NUMERO: 1487A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Tortorici

MATERIA: Biomeccanica dei Fluidi + Eserc. Prof.Gallo

IDROSTATICA

A differenza dei solidi, i fluidi (liquidi e gas) non hanno una forma propria, ma assumono quella del recipiente che li contiene. Se si applica una forza a un solido, esso oppone resistenza perché è dotato di attriti interni. Un fluido, invece, si deforma perché i legami intermolecolari non sono abbastanza forti da opporre resistenza.

Si definisce **FLUIDO** un mezzo continuo (cioè non si considera la scala molecolare) nel quale, in equilibrio, gli sforzi siano sempre normali alle rispettive superfici, ovvero che non possa sopportare sforzi di taglio senza deformarsi per scorrimento.

I liquidi sono limitati da una superficie definita, che racchiude un volume definito (superficie di contatto con recipiente oppure interfaccia con un altro liquido o un gas).

I gas tendono a occupare tutto lo spazio consentito dal recipiente, adottando come superficie limite quella del recipiente stesso.

Proprietà dei fluidi:

- **densità:**

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad \text{u.d.m.} \begin{cases} SI \rightarrow Kg/m^3 \\ cgs \rightarrow g/cm^3 = 10^3\ Kg/m^3 \end{cases}$$

Per i liquidi la densità varia molto poco al variare di temperatura e pressione, quindi viene considerata costante al variare di tali parametri. Se si tratta di sangue, si assume che la T sia costante, ma la densità dipende anche dall'ematocrito (presenza di globuli rossi nel sangue), che normalmente è del 43%: se varia, varia anche ρ.

Per i gas ideali vale:

$$\begin{cases} pV = nRT \\ n = \dfrac{m}{M} \end{cases} \Rightarrow pV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow \frac{m}{V} = \rho = \frac{Mp}{RT}$$

Quindi ρ dipende anche da p e T e bisogna tenerne conto.

- **peso specifico:**

$$\frac{\text{peso corpo}}{\text{volume corpo}} \qquad \text{u.d.m.} \begin{cases} SI \rightarrow N/m^3 \\ cgs \rightarrow dyn/cm^3 = 10\ N/m^3 \end{cases}$$

Si ha: $\dfrac{P}{V} = \dfrac{mg}{V} = \rho g$

- **comprimibilità:** esprime quanto varia il volume di un fluido a causa di una variazione di pressione.

Modulo di comprimibilità: $E = -\dfrac{\Delta p}{\Delta V / V}$ u.d.m.: Pa

Coefficiente di comprimibilità: $\beta = \dfrac{1}{E}$

Per i liquidi, E assume valori elevati, indicando che per variazioni di p limitate si hanno variazioni di V trascurabili, da cui la considerazione dei liquidi come incomprimibili.

I gas in condizioni isoterme seguono la legge di Boyle:

$$pV = cost \Rightarrow d(pV) = d(cost) \Rightarrow p\,dV + V\,dp = 0 \Rightarrow p\,dV = -V\,dp \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p} \Rightarrow p = -\frac{dp}{dV/V} = E$$

FABER-CASTELL

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 88

Sostituendo nelle equazioni di equilibrio:

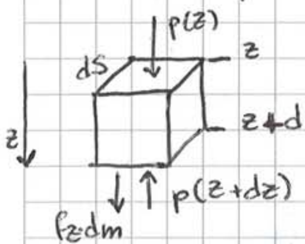
$$p_c \cdot \cancel{a} \cdot \cos\vartheta \cdot h = p_a \cdot \cancel{a} \cdot h \cdot \cos\vartheta \Rightarrow p_c = p_a$$
$$p_b \cdot a \cdot \sin\vartheta \cdot h = p_a \cdot a \cdot h \sin\vartheta \Rightarrow p_b = p_a$$
$$\Rightarrow p_a = p_b = p_c$$

Il risultato ottenuto è valido indipendentemente dai valori di area e angolo o dall'orientazione del prisma. Passando al limite e riducendo il prisma a un punto, si può parlare di pressione in un generico punto P senza specificare la superficie su cui essa agisce, nonostante la pressione sia stata definita come forza agente su una superficie.
I fluidi sono stati definiti come quei mezzi che in equilibrio possono sopportare sforzi normali alle rispettive superfici $\Rightarrow$ in equilibrio la pressione su tutti gli elementi di superficie che passano per uno stesso punto è la stessa per ogni orientazione.
Nella precedente dimostrazione non si è tenuto conto delle forze di volume. Considerandole, l'equilibrio diventa:

$$\text{eq.} \uparrow: \quad F_c = F_a \cos\vartheta + \rho g\, dV = F_a \cos\vartheta + \rho g \frac{1}{2} b c h$$

Ma: $dV = o(dS) \Rightarrow$ cioè V tende a zero più velocemente $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ si possono trascurare le forze di volume.

Come varia p all'interno di un fluido in quiete in funzione della posizione?



all'equilibrio: $F_p + F_v = 0$

$F_p \rightarrow$ forze di pressione
$F_v \rightarrow$ forze di volume

Si ha: $f_z \cdot dm = f_z \cdot \rho \cdot dV$

$$\text{eq} \uparrow: \; p(z)\, dS - p(z+dz)\, dS + f_z \cdot \rho \cdot dV = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow dS \left[p(z) - \left(p(z) + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) \right] + f_z \cdot \rho \cdot dV = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial z} \cdot \underbrace{dz\, dS}_{dV} + f_z \cdot \rho \cdot dV = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial z} \cancel{dV} + f_z \rho \cancel{dV} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = f_z \cdot \rho$$

Con: $f_z \rightarrow$ componente della generica forza di volume lungo z.
Analogamente:

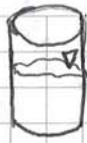
$$\frac{\partial p}{\partial x} = f_x \cdot \rho \quad e \quad \frac{\partial p}{\partial y} = f_y \cdot \rho$$

In maniera sintetica:

$$\boxed{\nabla p = \rho \cdot f}$$

Questo significa che la forza di volume deve essere bilanciata da un gradiente di pressione: la diminuzione di en. potenziale è compensata con un

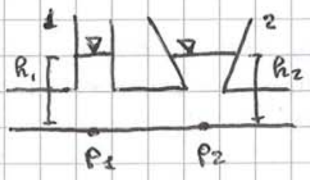
Due punti alla stessa altezza hanno la stessa pressione.



$p_{atm} \Rightarrow p$ al **pelo libero** (interfaccia liquido-aria)

Principio dei vasi comunicanti: i peli liberi hanno tutti la stessa $p \Rightarrow$ si trovano alla stessa altezza. Succede anche se il liquido si trova in recipienti diversi, purché collegati tra loro.

Dim:



Per assurdo sia: $h_d = h_2 - h_1 \Rightarrow h_2 = h_1 + h_d$

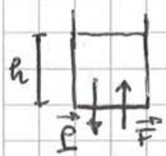
$$\begin{cases} p_1 = p_0 + \rho g h_1 \\ p_2 = p_0 + \rho g h_2 = p_0 + \rho g h_1 + \rho g h_d \end{cases}$$

Quindi: $p_1 - p_2 = \rho g h_d$

Ma p_1 e p_2 sono alla stessa quota, quindi per Stevino hanno la stessa p.

$p_1 = p_2 \Rightarrow h_d = 0$ non c'è differenza di quota tra h_1 e h_2.

Paradosso idrostatico: la p dipende solo da profondità e ρ, non dalla forma del recipiente che contiene il fluido.



Sul fondo del recipiente agiscono P e F. In quiete: $P = F$

$$\begin{cases} P = mg \\ F = pA \end{cases} \Rightarrow mg = pA \Rightarrow \rho A h g = p\cancel{A} \Rightarrow p = \rho g h$$

La formula vale nonostante ci siano pesi diversi in conseguenza a V diversi!

Spiegazione:

In un caso simile, una porzione del peso è sopportata dalle pareti laterali, che sviluppano una forza di reazione con componente verso l'alto.

In un caso simile, la forza di reazione delle pareti ha una componente verso il basso che si somma al peso del liquido.

Un'applicazione pratica della legge di Stevino si ha negli acquedotti, che distribuiscono acqua sfruttando la differenza di quota.

PRINCIPIO DI PASCAL

Qualsiasi variazione di p esterna si trasmette uniformemente a tutti i punti del fluido.

$$\boxed{p = p_0 + \Delta p}$$

Applicazioni: elevatore idraulico.

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del fluido spostato.

Dim:

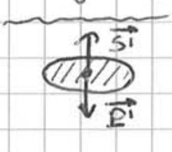
$\vec{S} \rightarrow$ spinta

eq↑: $P = S$

$\Downarrow$

$\rho V g = S$

Se si sostituisce l'elemento di fluido con un altro corpo con volume e forma uguali, ma ρ diversa, la forza peso P' sarà diversa.



$\rho' \neq \rho$ $\quad$ forma' = forma

$P' \neq P$ $\quad$ $V' = V$

$\Rightarrow S' = S$

eq↑: $S = P' \Rightarrow m\cancel{g} = m'\cancel{g} \rightarrow$ condizione necessaria per equilibrio

$m' = m \Rightarrow \rho \cancel{V} = \rho' V' \Rightarrow \rho = \rho'$

Se non c'è equilibrio, si avrà una risultante $R = P' - S = (m' - m)g = (\rho' - \rho)Vg$ e il corpo si muoverà.

Applicazioni: galleggiamento delle barche.
Il peso del corpo è applicato nel suo baricentro, mentre la spinta di galleggiamento è applicata nel baricentro della regione di fluido spostato (detto centro di spinta).
Nel caso di corpi simmetrici, il punto di intersezione tra la retta contenente la spinta e l'asse di simmetria del corpo è detto **metacentro** e si può immaginare che il corpo oscilli intorno ad un asse ortogonale al piano del foglio e passante per il metacentro. La configurazione è stabile finché il baricentro si trova al di sotto del metacentro.

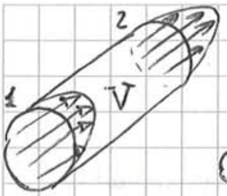
BILANCI

I bilanci esprimono la costanza di un certo parametro fisico e consistono nella scrittura di equazioni di conservazione per quel parametro:

$$\sum_i A_i = \text{cost}$$

I principi della meccanica dei fluidi derivano dalla meccanica razionale, nella quale si considera il fluido come un continuo (scala macroscopica), e sono espressi da relazioni chiamate bilanci riguardanti massa, energia, quantità di moto.
I bilanci valgono per il sistema in considerazione e la loro scrittura varia in base al tipo di sistema (se aperto o chiuso).
Un sistema chiuso è impermeabile a scambi di massa; un sistema aperto è un sistema in cui avvengono trasporti di massa.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 88



Se ci sono un solo ingresso e una sola uscita:

$$\dot m_{IN} = \dot m_{OUT} = \dot m$$

Quindi:

$$\dot m \left(u_1 + g z_1 + \frac{1}{2} w_1^2\right) - \dot m \left(u_2 + g z_2 + \frac{1}{2} w_2^2\right) + \dot Q + \dot L = 0$$

Dividendo per $\dot m$: $\left(u_1 + g z_1 + \frac{1}{2} w_1^2\right) - \left(u_2 + g z_2 + \frac{1}{2} w_2^2\right) + Q_{12} + L_{12} = 0$

Si ha: $L = L_p + L_m$

Con:

$L_p \rightarrow$ Lavoro forze pressione = lavoro di pulsione

$L_m \rightarrow$ lavoro forze esterne generiche

Vale:

$$\dot L_p = p A w = p \dot V = \dot m p v \qquad \text{con } v = 1/\rho \rightarrow \text{volume specifico}$$

Da cui: $L_p = p v$

Quindi:

$$L_{12} = L_{p_{12}} + L_{m_{12}} = p_1 v_1 - p_2 v_2 + L_{m_{12}}$$

Sostituendo nell'equazione di conservazione:

$$\left(u_1 + p_1 v_1 + g z_1 + \frac{1}{2} w_1^2\right) - \left(u_2 + p_2 v_2 + g z_2 + \frac{1}{2} w_2^2\right) + Q_{12} + L_{m_{12}} = 0$$

Se il fluido è incomprimibile: $\rho = cost \Rightarrow v = cost \Rightarrow v_1 = v_2 = v$

Per il II principio della termodinamica:

$$ds = \frac{du + \overbrace{p\,dv}^{\rightarrow 0\ (v = cost)}}{t} \Rightarrow \int_1^2 t\,ds = u_2 - u_1 = Q_{12} + LW \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_{12} = u_2 - u_1 - LW \qquad \text{con } LW \rightarrow \text{lavoro resistenze passive (attriti, ecc.)}$$

Quindi:

$$\left(\cancel{u_1} + g z_1 + p_1 v + \frac{1}{2} w_1^2\right) - \left(\cancel{u_2} + g z_2 + p_2 v + \frac{1}{2} w_2^2\right) + \cancel{u_2} - \cancel{u_1} - LW_{12} + \underbrace{\cancel{L_{m_{12}}}}_{0} = 0$$

(no organi meccanici in movimento)

Moltiplichiamo per $\rho = 1/v$:

$$\left(p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho w_1^2\right) - \left(p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho w_2^2\right) - \Delta p_R = 0 \Rightarrow$$

Δp_R ↳ dimensionalmente è una pressione

$$\Rightarrow (p_2 - p_1) + \frac{1}{2} \rho \left(w_2^2 - w_1^2\right) + \rho g (z_2 - z_1) + \Delta p_R = 0$$

Se non ci sono dissipazioni: $LW = 0 \Rightarrow \Delta p_R = 0$

Quindi:

$$\boxed{(p_2 - p_1) + \frac{1}{2} \rho \left(w_2^2 - w_1^2\right) + \rho g (z_2 - z_1) = 0} \rightarrow \text{EQ. DI BERNOULLI}$$

Si può scrivere come:

$$p + \frac{1}{2} \rho w^2 + \rho g z = cost \qquad \text{in termini di pressione}$$

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{1}{2g} w^2 + z = cost \qquad \text{in termini di altezza (quota)}$$

FABER-CASTELL

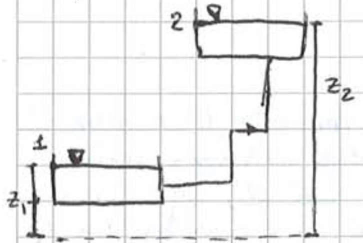
CIRCUITI IDRAULICI

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(z_1 - z_2) + \frac{1}{2}(w_1^2 - w_2^2) + L_m - LW = 0$$

Consideriamo $LW = 0$. L'equazione esprime l'energia necessaria al circuito per passare dallo stato 1 allo stato 2.

$$L_m = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}(w_2^2 - w_1^2) = g \cdot H \rightarrow \text{prevalenza}$$

Dove H è il salto [m].
La prevalenza è il lavoro ideale scambiato tra macchina e fluido.



Si supponga di voler valutare le caratteristiche di tale impianto. In condizioni ideali ($LW = 0$):

$$H = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{1}{2g}(w_2^2 - w_1^2) + (z_2 - z_1)$$

In condizioni reali il termine Δp_ℓ [m] tiene conto delle perdite: attrito, dissipazioni negli angoli, ecc.

$$H = \underbrace{\cancel{\frac{p_2 - p_1}{\rho g}}}_{0 \text{ perché } p_{atm}} + \frac{1}{2g}\underbrace{\cancel{(w_2^2 - w_1^2)}}_{0 \text{ perché trascurabile}} + (z_2 - z_1) + \Delta p_\ell$$

Le perdite che il fluido subisce nell'attraversamento dell'impianto (non nella macchina) sono di 2 tipi: perdite concentrate e perdite distribuite.
Le perdite concentrate sono dovute a brusche variazioni di geometria (curve, gomiti, strozzature, allargamenti, ecc). Sono espresse da:

$$\boxed{\Delta p_{\ell\,conc} = \sum \xi \frac{v^2}{2g}}$$

Con $\xi \rightarrow$ coefficiente di resistenza localizzata (ottenuto sperimentalmente).
Le perdite distribuite sono dovute all'attrito sulle pareti del condotto. Sono espresse da:

$$\boxed{\Delta p_{\ell\,distr} = \lambda \frac{v^2}{2g} \frac{L}{D}}$$

Con $\lambda \rightarrow$ coefficiente d'attrito, funzione del numero di Reynolds e della rugosità relativa:

$$\lambda = f(Re, \varepsilon/D)$$

Le perdite distribuite dipendono dalla modalità del moto; se ne distinguono 3 tipi (regimi di moto):
- MOTO LAMINARE: il movimento avviene per filetti fluidi che si mantengono paralleli alle pareti del condotto;
- MOTO DI TRANSIZIONE: il movimento avviene ancora per filetti fluidi, ma questi diventano sempre più instabili all'aumentare della velocità, perdendo il parallelismo con le pareti;
- MOTO PURAMENTE TURBOLENTO: il moto non avviene più per filetti fluidi.

Il numero di Reynolds (Re) è un numero adimensionale dato da:

$$\boxed{Re = \frac{\rho v D}{\mu}}$$

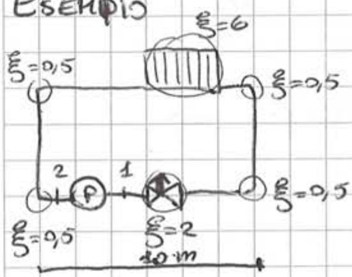
È possibile che una singola pompa non sia in grado di fornire da sola o tutta la portata o tutta la prevalenza richieste. In questi casi si ricorre alla configurazione in serie o in parallelo.

In **serie**:
- ogni macchina viene attraversata dall'intera portata Q che percorre l'impianto;
- la prevalenza richiesta dall'impianto è pari alla somma delle prevalenze fornite dalle singole macchine (H_a, H_b)

In **parallelo**:
- ogni macchina fornisce tutta la prevalenza richiesta dall'impianto;
- ogni macchina elabora solo parte della portata (Q_a, Q_b).

La **LINEA DEI CARICHI TOTALI** è data dalla somma di tutte le grandezze che compongono l'equazione di Bernoulli ed è costante. Variano, però, i contributi delle grandezze (aumenta velocità, diminuisce pressione). La **LINEA PIEZOMETRICA** è data dalla somma di pressione geodetica e pressione statica. La costanza della linea dei carichi totali vale solo in caso di fluido ideale. Nei casi reali è inclinata a causa di perdite. La differenza tra la linea ideale e quella reale esprime le perdite di carico che vanno sommate all'equazione di Bernoulli. In presenza di una pompa, la linea compie un salto (è la prevalenza).

ESEMPIO



$v = 0{,}75$ m/s
$\varepsilon = 10\ \mu m$
$Q = \dot m = 0{,}06$ Kg/s

$T = 66°C$
$\rho = 979$ Kg/m³
$\mu = 0{,}000434$ Pa·s

diametro tubazione D?
prevalenza?
potenza resa al fluido?

$$A = \frac{\dot m}{\rho \cdot v} = \frac{0{,}06\ \cancel{Kg/s}}{979\ \cancel{Kg}/m^3 \cdot 0{,}75\ m/\cancel{s}} = 8{,}2 \cdot 10^{-5}\ m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \pi \frac{D^2}{4} \Rightarrow D = 10\ mm$$

Applico Bernoulli tra i punti 1 e 2. Si ottiene: $H = \Delta p_c + \Delta p_d$

$$\Sigma \xi = 10 \Rightarrow \Delta p_c = \frac{(0{,}75\ m/s)^2 \cdot 10}{2 \cdot 9{,}81\ m/s^2} = 0{,}287\ m$$

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = 16918 \Rightarrow$$ regime turbolento: si deve usare abaco di Moody

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{10\ \mu m}{10\ mm} = 0{,}001 \Rightarrow \lambda \simeq 0{,}029$$

$$\Delta p_d = \lambda \frac{L}{D} \cdot \frac{Q^2}{2A^2 g} = 6{,}65\ m$$

Quindi: $H = 6{,}937$ m

$$W_R = \dot m g H = 0{,}06 \frac{Kg}{s} \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 6{,}937\ m = 4{,}08\ W$$

$\dot{m} = \dot{V}\rho_0 = 0{,}898\ m^3/s \cdot 800\ Kg/m^3 = 718{,}76\ Kg/s$

ESEMPIO 2

In una galleria del vento viene posto un tubo di Pitot. Determinare densità fluido manometrico e portata in volume nella sezione della galleria (rettangolo di lati L_1 e L_2).

$V = 28\ m/s$ $\qquad L_1 = 0{,}3\ m$

$\rho_L = 0{,}632\ Kg/m^3$ $\qquad L_2 = 0{,}4\ m$

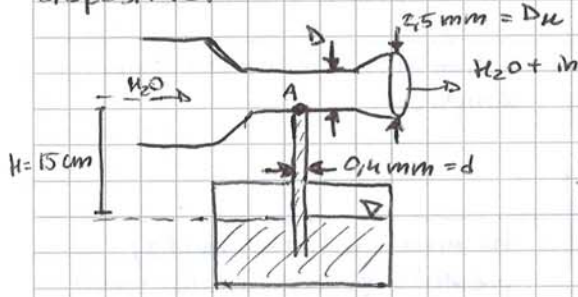
$h = 3{,}6\ cm$

$\dot{V} = L_1 L_2 \cdot V = 0{,}3\ m \cdot 0{,}4\ m \cdot 28\ m/s = 3{,}36\ m^3/s$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho_L V_2^2 + p_2 = p_1 \\ p_1 - p_2 = \rho_M g h \end{cases} \rightarrow \frac{1}{2}\rho_L V_2^2 = \rho_M g h \rightarrow \rho_M = \frac{1}{2}\rho_L \frac{V_2^2}{gh} = 701{,}5\ Kg/m^3$$

ESEMPIO 3

Un dispositivo deve disperdere una miscela di acqua e insetticida. Date $Q_I = 75\ ml/min$ e $Q_a = 4\ L/min$, calcolare la pressione in A e il diametro D del dispositivo.



Applico Bernoulli tra A e il pelo libero del serbatoio:

$$\frac{p_A}{\rho} + \frac{V_{A,I}^2}{2} + gH = \cancel{\frac{p_0}{\rho}}_{0} + \cancel{\frac{V_{I}^2}{2}}_{\simeq 0}$$

$Q_I = V_{A,I} \cdot \pi \frac{d^2}{4} \rightarrow V_{A,I} = 9{,}95\ m/s \rightarrow$

$\rightarrow p_A = -\rho g h - \frac{1}{2}\rho V_{A,I}^2 = -50972\ Pa \rightarrow$ minore rispetto a p_{atm}

Applico Bernoulli tra A e l'uscita (u):

$Q_I + Q_A = V_u \pi \frac{D_u^2}{4} \rightarrow V_u = 13{,}8\ m/s$

$\frac{p_A}{\rho} + \frac{V_{A,a}^2}{2} = \cancel{\frac{p_0}{\rho}}_{0} + \frac{V_u^2}{2} \rightarrow V_{A,A} = 17\ m/s$

$Q_A = V_{A,A} \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} \rightarrow D = 2{,}23\ mm$

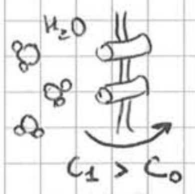
FENOMENI DI TRASPORTO

I fenomeni di trasporto sono fenomeni di spostamento di quantità fisiche, materiali o immateriali (massa, energia, calore). La parola "trasporto" sottende la presenza di un attore → esiste un motore (per es un gradiente di concentrazione). Sono fondamentali per il mantenimento dell'omeostasi.

I meccanismi di trasporto sono 2:

- **CONVEZIONE** → trasmissione di massa in un mezzo mediante movimento del mezzo stesso;

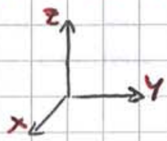
CONCETTO DI CONTINUO: la materia è discreta, ma la trattiamo come definita uniformemente nello spazio.



Per esempio consideriamo una membrana cellulare con delle molecole di H_2O che migrano da una parte all'altra.
Sia K la permeabilità: esprime un fattore di proporzionalità per il gradiente di concentrazione. Indica la facilità di passaggio da un lato all'altro della membrana.
Se si guarda K, non si tiene conto delle singole molecole, ma dell'insieme di fattori che determinano il passaggio da un lato all'altro.
Le equazioni a livello dei continui descrivono realtà medie (integrazione statistica di ciò che avviene su scala molecolare). I comportamenti fisici ad alta scala (scala continui) sono derivati e spiegati dai livelli più bassi.
I bilanci che affronteremo sono interpretabili come equazioni descrittive dei continui e sono derivati da equazioni a livello molecolare.

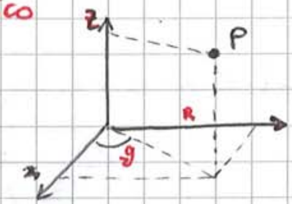
RIFERIMENTI SPAZIALI:

- cartesiano



coordinate olonomiche $\Rightarrow$ no singolarità
coordinate indipendenti

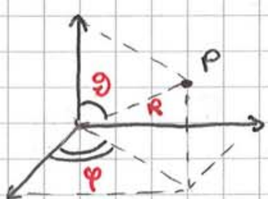
- cilindrico



$R \in [0, +\infty)$
$\vartheta \in [0, 2\pi]$
$z \in (-\infty; +\infty)$

$R = 0 \Rightarrow$ singolarità: ϑ può avere qualunque valore

- sferico



$\varphi \in [0, 2\pi] \rightarrow$ declinazione
$\vartheta \in [0, \pi] \rightarrow$ azimut
$R \in [0, +\infty)$

$R = 0 \Rightarrow$ singolarità

Si può passare da un sistema di riferimento all'altro.
Le equazioni di bilancio possono essere scritte come equazioni vettoriali, oppure come un sistema di 3 equazioni scalari che rappresentano la proiezione dell'equazione vettoriale sul sistema di 3 coordinate di riferimento.

Per il tempo si possono seguire 2 approcci:
- euleriano $\rightarrow$ punto fisso dello spazio
- lagrangiano $\rightarrow$ massa fissa

Definiamo come **traiettorie** di una particella fluida il luogo geometrico dei punti occupati dalla stessa particella in istanti di tempo successivi (path line o linea di flusso).
Definiamo come **linea di corrente** (stream line) una linea tangente in ogni suo punto al vettore velocità:

$$\frac{d\vec{x}}{ds} \wedge \vec{v}(\vec{x}) = 0 \rightarrow \text{condizione di parallelismo}$$

La q.d.m. di un sistema è modificata da una forza applicata; τ è responsabile dell'accelerazione o decelerazione di filetti di fluido adiacenti.
La τ è una media statistica di ciò che avviene a livello molecolare.
Se si considera il fluido come un materiale discreto, la direzione media delle molecole è quella della velocità, ma la τ esprime la migrazione di molecole di fluido da un filetto all'altro. (fenomeno che provoca l'accelerazione o decelerazione di filetti adiacenti: è uno scambio di q.d.m.).

τ_{xy} = flusso viscoso della componente x della q.d.m. nella direzione y
↓
dovuto a trasporto molecolare

VISCOSITÀ CINEMATICA: $\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \left[\frac{m^2}{s}\right]$

ESEMPIO

$V = 0{,}3\ m/s$
$\Delta y = 0{,}3\ mm$
$\mu = 0{,}7\ cP = 0{,}0007\ Pa \cdot s$

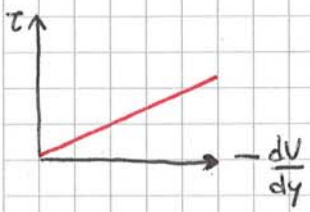
τ?

Profilo lineare: $\frac{dV_x}{dy} = \frac{\Delta V_x}{\Delta y} = \frac{0{,}3\ m/s}{0{,}0003\ m} = 1000\ s^{-1}$

$\tau_{xy} = -\mu \frac{dV_x}{dy} = 0{,}7 \cdot 10^{-3}\ Pa \cdot \cancel{s} \cdot 1000\ \cancel{s^{-1}} = 0{,}7\ Pa$

EQUAZIONE COSTITUTIVA DI UN FLUIDO

È la relazione che esprime il legame tra tensore degli sforzi e tensore delle deformazioni.

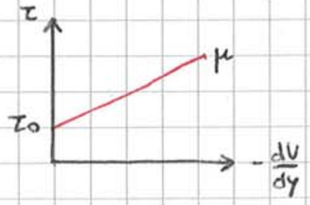


$\tau_{xy} = -\mu \frac{dV_x}{dy}$ → valida se μ è costante

μ è il coefficiente angolare della retta.
Se μ è costante, il liquido è newtoniano, cioè rispetta la legge di Newton originaria.

COMPORTAMENTI NON NEWTONIANI DEI FLUIDI:

- Fluidi alla Bingham (per esempio dentifricio): la relazione è lineare, ma con un offset rispetto all'origine.



τ_0 → sforzo critico o di scollamento

$$\begin{cases} \frac{dV_x}{dy} = 0 & \text{per } |\tau| < \tau_0 \\ \frac{dV_x}{dy} \neq 0 & \text{per } |\tau| > \tau_0 \end{cases}$$

Consideriamo un cilindro pieno di un fluido alla Bingham in quiete. (→ equilibrio tra τ e peso).

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 88

Per un sistema aperto:

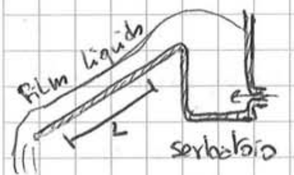
$$\left\{ \begin{matrix} \text{v di accumulo} \\ \text{di q.d.m.} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \text{v ingresso} \\ \text{q.d.m.} \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \text{v uscita} \\ \text{q.d.m.} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \Sigma \text{ forze esterne} \\ \text{agenti} \end{matrix} \right\}$$

↓ flusso di q.d.m.

Se si ipotizza di essere in regime stazionario, non vi sono variazioni nel patrimonio di q.d.m. all'interno del volume di controllo: il primo termine è nullo e il bilancio diventa:

$$\left\{ \begin{matrix} \text{v ingresso} \\ \text{q.d.m.} \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \text{v uscita} \\ \text{q.d.m.} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \Sigma \text{ forze esterne} \\ \text{agenti} \end{matrix} \right\} = 0$$

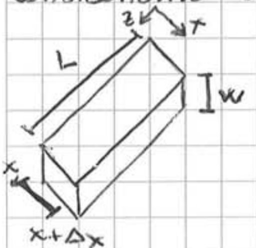
Approccio meccanico: si ricava il bilancio di q.d.m. applicando la seconda legge della dinamica, cioè con un bilancio di forze.
Per esempio consideriamo il sistema:



Nel tratto L le velocità sono costanti perché si raggiunge l'equilibrio tra gravità e attriti.
In condizioni stazionarie:

$$\left\{ \begin{matrix} \text{v in} \\ \text{q.d.m.} \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \text{v out} \\ \text{q.d.m.} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \Sigma F \\ \text{agenti} \end{matrix} \right\} = 0$$

Consideriamo uno strato Δx:



- flusso di q.d.m. nella direzione z entrante in $z=0$:

$$(\rho v_z|_{z=0}) \underbrace{w \cdot \Delta x}_{\text{Area}} \cdot v_z|_{z=0} = \dot{V} \cdot \rho v_z = \dot{M} \cdot v_z|_{z=0}$$

- flusso di q.d.m. nella direzione z uscente da $z=L$:

$$\left(\rho v_z|_{z=L}\right) w \Delta x \, v_z|_{z=L}$$

- flusso di q.d.m. nella direzione z entrante nella superficie in x:

$$\tau_{xz}|_x \cdot L \cdot w$$

- flusso di q.d.m. nella direzione z uscente dalla superficie in $x+\Delta x$:

$$\tau_{xz}|_{x+\Delta x} \cdot L w$$

- componente della forza di gravità che agisce lungo il piano inclinato:

$$(\rho g \cos\beta) \, L w \Delta x$$

Sommiamo i termini:

$$\cancel{w \Delta x \rho v_z^2|_{z=0}} - \cancel{w \Delta x \rho v_z^2|_{z=L}} + \tau_{xz}|_x Lw - \tau_{xz}|_{x+\Delta x} Lw + Lw\Delta x \rho g \cos\beta = 0$$

perché $v(0) = v(L)$

$$\bar{v}_z = \frac{\int_0^w \int_0^\delta v_z \, dx \, dy}{\int_0^w \int_0^\delta dx \, dy} = \frac{\cancel{w} \int_0^\delta v_z \, dx}{\cancel{w} \, \delta} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta v_z \, dx =$$

$$= \frac{\rho g}{2\mu} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \delta^2 \cos\beta \left[x - \frac{1}{3\delta^2} x^3 \right]_0^\delta =$$

$$= \frac{\rho g}{2\mu} \delta \cos\beta \cdot \frac{2}{3} \delta = \frac{\rho g}{3\mu} \delta^2 \cos\beta$$

Portata volumetrica:

$$\dot{V} = \int_0^w \int_0^\delta v_z \, dx dy = w \frac{\rho g \delta^3}{3\mu} \cos\beta$$

$$\dot{M} = \rho \dot{V}$$

Ricapitolando, il bilancio di q.d.m. secondo l'approccio meccanico si svolge:

- bilancio q.d.m. per uno strato finito (bilancio di forze)

$\downarrow \lim_{\Delta x \to 0}$

- equazione differenziale del flusso di q.d.m. τ

$\downarrow \int dx + BC1$

- profilo delle τ

$\downarrow$ eq. costitutiva

- ~~profilo delle~~ equazione differenziale delle v

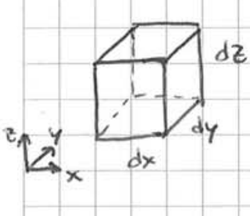
$\downarrow \int dx + BC2$

- profilo delle v

BILANCIO DI MASSA

Anche detto equazione di continuità. Si esegue un approccio fluidodinamico

$$dV = dx\,dy\,dz$$



Per un sistema aperto:

$$\left\{ \begin{matrix} \text{velocità di accumulo} \\ \text{della materia} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} v \text{ in} \\ \text{materia} \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} v \text{ out} \\ \text{materia} \end{matrix} \right\}$$

In termini matematici:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx\,dy\,dz \rightarrow \text{variazione nel tempo della massa in } dV$$

Per il bilancio della massa la variazione nel tempo è congruente al bilancio delle portate in massa che transitano attraverso le superfici di contorno.

La q.d.m. entra ed esce con 2 meccanismi:
1) convezione (moto di insieme del fluido)
2) trasporto molecolare (τ)

Accumulo di q.d.m. nel tempo: $dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial \rho v}{\partial t}\right)$

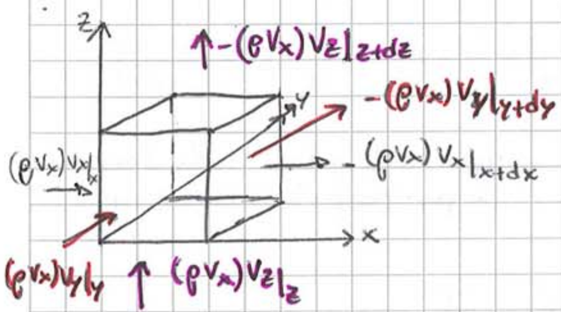
1) convezione: (consideriamo solo la componente x):

- $\dot{m}V_x = \dot{V}\rho V_x = dy\,dz\,V_x \cdot \rho V_x = dy\,dz\,\rho V_x V_x|_x$ → q.d.m. entrante in x
- $-dy\,dz\,\rho V_x V_x|_{x+dx}$ → " uscente da x+dx
- $(\rho V_x)V_y|_y\,dx\,dz$ → flusso di q.d.m. entrante in $d\bar{V}$ attraverso la superficie in y
- $-(\rho V_x)V_y|_{y+dy}\,dx\,dz$ → flusso di q.d.m. uscente da y+dy

→ variazione di q.d.m. in x per causa delle velocità in y

- $(\rho V_x)V_z|_z\,dx\,dy$ → flusso di q.d.m. entrante in z
- $-(\rho V_x)V_z|_{z+dz}\,dx\,dy$ → flusso di q.d.m. uscente da z+dz

→ variazione di q.d.m. in x causata da velocità in z



Mettendo tutte le equazioni trovate insieme si ottiene la variazione di q.d.m. per trasporto convettivo lungo x:

$$dy\,dz\left(\rho V_x V_x|_x - \rho V_x V_x|_{x+dx}\right) + dx\,dz\left(\rho V_x V_y|_y - \rho V_x V_y|_{y+dy}\right) + dx\,dy\left(\rho V_x V_z|_z - \rho V_x V_z|_{z+dz}\right)$$

$$\xrightarrow{/d\bar{V}} \frac{\rho V_x V_x|_x - \rho V_x V_x|_{x+dx}}{dx} + \frac{\rho V_x V_y|_y - \rho V_x V_y|_{y+dy}}{dy} + \frac{\rho V_x V_z|_z - \rho V_x V_z|_{z+dz}}{dz}$$

$$\xrightarrow{\lim_{d\bar{V}\to 0}} -\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x V_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_x V_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_x V_z)$$ → apporto convettivo di q.d.m. nella direzione x

Ipotizzando un fluido incomprimibile (ρ=cost.) e sviluppando le derivate:

$$\Rightarrow -\rho\left[V_x\frac{\partial V_x}{\partial x} + V_x\frac{\partial V_x}{\partial x} + V_x\frac{\partial V_y}{\partial y} + V_y\frac{\partial V_x}{\partial y} + V_x\frac{\partial V_z}{\partial z} + V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\rho\left[V_x\underbrace{\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right)}_{0} + V_x\frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y\frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}\right]$$

per bilancio massa

Trasporto convettivo + accumulo nel tempo (diviso volume):

FABER-CASTELL

Il fluido è accelerato dalle forze (A), (B), (C), (D) che agiscono.

L'equazione del moto ci dice che un elemento di volume in moto con il fluido viene accelerato a causa delle forze che agiscono su di esso. In altri termini si ritrova la II legge di Newton della dinamica nella forma (massa) x (accelerazione) = (ΣF). Si rileva che il bilancio di q.d.m. è perfettamente equivalente alla II legge di Newton.

Per semplificare supponiamo che il fluido sia Newtoniano e ne introduciamo l'eq. costitutiva (in unione a precedente ipotesi di fluido incomprimibile). Si è inoltre dimostrata l'eq. di continuità, per cui $\nabla \vec{v} = 0$.

Ipotesi:
- fluido newtoniano ($\mu = cost.$)
- fluido incomprimibile ($\rho = cost.$)
- eq. di continuità ($\nabla \vec{v} = 0$).

Si ha:

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = -\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right) - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

Sostituiamo le espressioni di $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ per fluido newtoniano:

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{2}{3}(\mu - k)\underbrace{(\nabla \vec{v})}_{0}$$

$$\tau_{xy} = -\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{xz} = -\mu\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)$$

Ottenendo:

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = -\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[-2\mu \frac{\partial V_x}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[-\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[-\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\right]\right\} - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

Espando la parentesi graffa dopo aver raccolto μ ($\mu = cost$ per Hp):

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial z}}_{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right] \to 0}$$

$\to 0$ per conservazione massa

Ritorno all'eq. generale:

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right] \to$$ eq. di Navier-Stokes (componente x)

In forma vettoriale:

FABER-CASTELL

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{P_0 - P_L}{2\mu L} r + \frac{C_1}{r} = 0$$

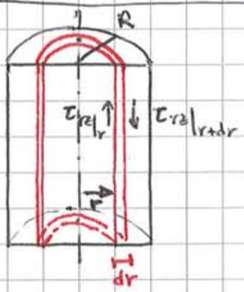
BC1: $r=0$ si ha un termine finito $\Rightarrow C_1 = 0$

$$\xrightarrow{\int dr} v_z + \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} r^2 + C_2 = 0 \Rightarrow v_z = -\frac{1}{4\mu L}(P_0 - P_L) r^2 - C_2$$

BC2: $v_z(R) = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{4\mu L}(P_0 - P_L) R^2$

$$\Rightarrow v_z(r) = -\frac{1}{4\mu L}(P_0 - P_L) r^2 + \frac{1}{4\mu L}(P_0 - P_L) R^2 = \frac{(P_0 - P_L)}{4\mu L} R^2 \left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right]$$

Approccio meccanico.



$v_z = v_z(r)$

Bilancio di forze:

- flusso di q.d.m. su parete laterale r: $2\pi r L \tau_{rz}|_r$
- flusso " " " " " r+dr: $-2\pi(r+dr) L \tau_{rz}|_{r+dr}$
- forza di pressione che agisce su $z=0$: $(2\pi r dr)^* P_0$

Dove: $P = p + \rho g z$

E dove: $*$: $\pi(r+dr)^2 - \pi r^2 = \cancel{\pi r^2} + \underbrace{\pi dr^2}_{\simeq 0\ [o(dr)]} + 2\pi r dr - \cancel{\pi r^2} = 2\pi r dr$

- forza di pressione che agisce su $z=L$: $-2\pi r dr P_L$

Mettendo tutto insieme:

$$2\pi r L \tau_{rz}|_r - 2\pi(r+dr) L \tau_{rz}|_{r+dr} + 2\pi r dr P_0 - 2\pi r dr P_L = 0 \xrightarrow{/(2\pi dr L)}$$

$$\Rightarrow \frac{r\tau_{rz}|_r}{dr} - \frac{(r+dr)\tau_{rz}|_{r+dr}}{dr} + \frac{r P_0}{L} - \frac{r P_L}{L} = 0 \xrightarrow{\lim_{dr\to 0}}$$

$$\Rightarrow \lim_{dr\to 0} \frac{r\tau_{rz}|_r - (r+dr)\tau_{rz}|_{r+dr}}{dr} + \frac{r(P_0 - P_L)}{L} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) + \frac{r(P_0 - P_L)}{L} = 0 \Rightarrow$$

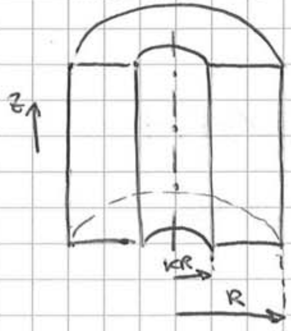
$$\Rightarrow \frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) = r\frac{P_0 - P_L}{L} \xrightarrow{\int dr}$$

$$\Rightarrow r\tau_{rz} = \frac{P_0 - P_L}{2L} r^2 + C_1 \xrightarrow{/r} \tau_{rz} = \frac{P_0 - P_L}{2L} r + \frac{C_1}{r}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 88

ESEMPIO

Condotto anulare. Hp: moto sviluppato e stazionario.



$V_z = V_z(r)$ con $KR \le r \le R$

Consideriamo l'equazione in termini di τ:

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\vartheta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \vartheta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz}) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\vartheta z}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right] + \rho g_z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz})\right] + \rho g_z \xrightarrow{\int dz,\ \mathcal{P} = p + \rho g}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) = \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{L} \Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) = \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{L}\, r}_{} \xrightarrow{\int dr}$$

può essere ottenuta da bilancio di forze, da eq. di bilancio espressa in τ e da eq. di bilancio espressa in v

$$\Rightarrow \tau_{rz} = \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2L}\, r + \frac{C_1}{r}$$

Non possiamo determinare subito C_1 perchè $r \neq 0$ sempre

Hp: fluido newtoniano:

$$\tau_{rz} = -\mu\frac{dv_z}{dr} \Rightarrow \frac{dv_z}{dr} = -\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2L\mu}\, r - \frac{C_1}{\mu r} \xrightarrow{\int dr}$$

$$\Rightarrow v_z(r) = -\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{4\mu L}\, r^2 - \frac{C_1}{\mu}\ln r + C_2$$

BC1: $v_z(r = KR) = 0$

BC2: $v_z(r = R) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = -\dfrac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{4\mu L}K^2R^2 - \dfrac{C_1}{\mu}\ln(KR) + C_2 \\ 0 = -\dfrac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{4\mu L}R^2 - \dfrac{C_1}{\mu}\ln R + C_2 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema e ricordando che:

$\ln(KR) = \ln K + \ln R$ e $-\ln K = \ln(1/K)$

Si ottiene:

$$C_1 = -\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{4L}\frac{(1-K^2)}{\ln(1/K)}$$

$$C_2 = \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{4\mu L}R^2\left[1 - \frac{1-K^2}{\ln(1/K)}\ln R\right]$$

Quindi:

FABER-CASTELL

differenti in geometrie simili che hanno stesso α^2 e stesso Re hanno stessa soluzione dell'eq. di Navier-Stokes (similarità dinamica).

$$\alpha^2 = \frac{\omega \rho L^2}{\mu} = \frac{\text{F inerziali transitorie}}{\text{F viscose}} \rightarrow \text{numero di Womersley}$$

$$Re = \frac{\rho |v| L}{\mu} = \frac{\text{F inerziali convettive}}{\text{F viscose}} \rightarrow \text{numero di Reynolds}$$

Re esprime la transizione da regime di moto laminare a regime di moto turbolento:

- $Re < 2000 \rightarrow$ moto laminare (prevalgono F viscose)
- $2000 < Re < 10000 \rightarrow$ moto di transizione
- $Re > 10000 \rightarrow$ moto puramente turbolento (prevalgono F inerziali convettive)

Consideriamo il moto in un condotto cilindrico (la lunghezza caratteristica L è il diametro D). In condizioni stazionarie vale la seguente eq. differenziale:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{P_1 - P_2}{\mu L} = 0$$ con $w \rightarrow$ velocità, $L \rightarrow$ lunghezza condotto $\rightarrow$

$$\rightarrow \frac{1}{r}\left(\cancel{\frac{\partial r}{\partial r}}^{1} \cdot \frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{\cancel{r}}\left(\cancel{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right) + \frac{P_1 - P_2}{\mu L} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{P_1 - P_2}{\mu L} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow w(r) = \frac{P_1 - P_2}{4 \mu L}(R^2 - r^2)$$ con $R \rightarrow$ raggio condotto

In condizioni non stazionarie:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{P_1 - P_2}{\mu L} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial w}{\partial t}$$ con $\nu \rightarrow$ viscosità cinematica

Consideriamo un moto periodico (come quello del sistema arterioso): si ha che il gradiente di pressione è periodico e può essere espresso come serie di Fourier ($\rightarrow$ esprime qualsiasi segnale periodico come somma di seni e coseni). Consideriamo una singola armonica:

$$\frac{P_1 - P_2}{L} = A e^{int}$$ $\rightarrow$ moto periodico con frequenza $f = \frac{n}{2\pi}$

Quindi:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{\nu}\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{A}{\mu} e^{int}$$ $\rightarrow$ eq. differenziale del II ordine non omogenea

La soluzione è composta dalla somma di soluzione dell'omogenea associata e di soluzione particolare. La soluzione, dunque, è la sovrapposizione di una componente media (la soluzione dell'eq. omogenea) e di una componente pulsatile (soluzione particolare).

FABER-CASTELL

Oppure per mantenere Q è necessario un Δp 16 volte maggiore!

$$\begin{cases} \Delta p = cost \\ Q' = \frac{Q}{16} \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} Q = costante \\ \Delta p' = 16 \Delta p \end{cases}$$

Di solito si operano stenosi con una riduzione del lume dal 75% in su.
Δp viene generato dal cuore ⇒ la stenosi comporta un aumento del carico che deve essere generato dal cuore.

NB 3: la legge di Poiseuille (o di Hagen Poiseuille) è limitata al seguente ambito di validità:
- stazionarietà
- fluido newtoniano
- moto laminare
- condotto cilindrico, assialsimmetrico, a sezione costante
- velocità nulla alla parete
- moto sviluppato
- parete rigida (⇒ non deformabile)

→ Se il flusso non è assialsimmetrico o se il moto è turbolento si perde simmetria.
→ Se il moto non è sviluppato ci sono effetti d'ingresso:


maggiori modificazioni del profilo vicino alla parete.

→ Se la sezione non è costante (come nei vasi sanguigni, in cui c'è una riduzione di diametro con angolo di circa 2°) si ha il fenomeno del tapering: per conservazione massa deve aumentare vel ⇒ per conservazione en. si riduce p ⇒ aumenta Δp rispetto a Poiseuille.
→ Se le pareti del vaso non sono rigide, si modificano per effetto di p. Se p non è costante, si modificano in modo diverso da punto a punto, quindi non c'è una sezione circolare costante e si perde assialsimmetria.
→ Se il condotto non è rettilineo, il sangue è sottoposto a una forza centrifuga (che agisce radialmente verso l'estremo della curva) ⇒ nascono flussi secondari (trasporto di massa che avviene in direzione perpendicolare al moto).
I flussi secondari si valutano con il numero di Dean (adimensionale).

$$De = 4 \cdot \sqrt{\frac{D}{R_c}} \cdot Re = \frac{\sqrt{F_{centripeta} \cdot F_{inerziali\ convettive}}}{F_{viscose}}$$

con R_c → raggio curvatura.

→ Se non c'è stazionarietà si usa il numero di Womersley:

$\alpha^2 < 1$ ⇒ soluzione stazionaria o quasi
$\alpha^2 > 1$ ⇒ F inerziali transitorie non trascurabili: bisogna tenerne conto nella soluzione.

Il sangue può essere considerato un fluido newtoniano solo nelle grandi arterie.
→ Se il condotto è deformabile, si ha vel ≠ 0 a parete.
Si utilizza la legge di Poiseuille (legata a NB 2).

FABER-CASTELL

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 88

Da Einstein a Bull:

$$\frac{1}{1-2,5c} = \frac{1}{1-2,5\cdot c}\cdot\frac{1+2,5c}{1+2,5c} = \frac{1+2,5c}{1^2-2,5^2\,c^2} = \frac{1+2,5c}{1-6,25\,c^2} =$$

$$= \frac{1+2,5c}{1-6,25\cdot(0,05)^2} \simeq \frac{1+2,25c}{1,1} \simeq 1+2,5c$$

Al posto di c si mette Ht. L'approssimazione è pesante perché si trascura il 10% e inoltre si ipotizza $c=0,05$, ma poi lo si sostituisce con Ht = 40%. Non si usa più.

- Taylor:

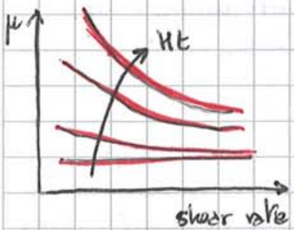
$$\mu_s = \mu_p\left(1 + 2,5\cdot c\cdot\frac{\frac{\mu_r}{\mu_p}+0,4}{\frac{\mu_r}{\mu_p}+1}\right)$$

- Jeffrey:

$$\mu_s = \mu_p\,\frac{1+c}{1-b\cdot c}$$

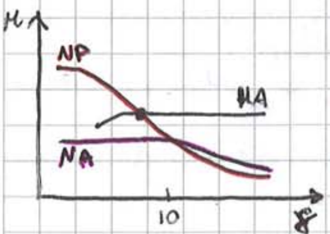
Introduce fattore correttivo sulla forma delle particelle.

Graficando la viscosità in funzione dello shear rate, per un fluido newtoniano si troverebbe una retta orizzontale. Sperimentalmente si osserva che il comportamento del sangue varia in base ad Ht: se Ht è elevato il comportamento non è newtoniano, ma la viscosità aumenta al diminuire dello shear rate ($\dot{\gamma}$). Questo comportamento è dovuto a globuli rossi e fibrinogeno.



A bassi shear rate (→ velocità costante) i globuli rossi tendono ad aggregarsi e il fibrinogeno ha un ruolo fondamentale in questo processo. Si formano **rouleaux** che interferiscono con il moto, causando un aumento di viscosità. Normalmente, invece, i globuli rossi hanno una superficie leggermente polarizzata, quindi tendono a respingersi. L'aggregazione per bassi shear rate è accentuata da una maggior presenza di globuli rossi (alto Ht).

Per valutare l'effetto delle proteine nel plasma si eseguono test in presenza di una sola proteina. L'albumina è la più presente, ma ha un effetto marginale sulla viscosità del sangue. La proteina con il ruolo più rilevante per determinare la viscosità è la globulina perché ha dimensioni maggiori rispetto all'albumina ⇒ maggior interazione con velocità ⇒ maggior interazione con il gradiente di velocità ⇒ maggior interazione con viscosità. Il fibrinogeno è presente in basse percentuali e ha un ruolo soprattutto nella formazione dei rouleaux.



Il grafico di fianco è stato ottenuto sperimentalmente.

NP → sangue intero (Ht = 45%). ↑shear rate ⇒ ↓μ

Ha un comportamento shear thinning e a un certo punto diventa newtoniano. Ha un asintoto orizzontale a 3,5 cP.

NA → sangue senza fibrinogeno. Per alti shear rate la curva coincide con NP, mentre si discostano al di sotto di $10\,s^{-1}$. Senza fibrinogeno non si formano i rouleaux, quindi μ aumenta leggermente ma non con la stessa rapidità di NP.

FABER-CASTELL

All'aumentare di Re, le F inerziali diventano predominanti sulle viscose, finché queste ultime ~~ma~~ si possono trascurare.

L'equazione di Poiseuille descrive un moto laminare: il fluido si muove per lamine parallele che scivolano le une sulle altre senza intersecarsi mai e che si scambiano forze trasversali. Le lamine più lente sono quelle vicine alle pareti.
Reynolds svolse degli esperimenti usando tubi cilindrici molto lunghi e variando la velocità del flusso. Trovò che esisteva una relazione per il regime stazionario: se $Re = \frac{\rho v D}{\mu}$ era uguale, i moti erano identici.

Facendo scorrere un filo d'inchiostro nel tubo, per $Re < 2100$ il flusso era laminare.
Per $2100 < Re < 4000$ la striscia d'inchiostro diventava ondulata, ma manteneva la sua coerenza spaziale (regime transizionale).
Per $Re > 4000$ la linea d'inchiostro presentava un fenomeno simile alla diffusione di un liquido in un altro. Un tale regime è detto turbolento ed è caratterizzato da un moto disordinato, completamente tridimensionale e non stazionario e da delle fluttuazioni di velocità con caratteristiche non deterministiche.
I valori di Re riportati si riferiscono a un condotto cilindrico molto levigato.
Si può avere moto turbolento anche se la velocità media è nulla: il processo aleatorio ~~è~~ stazionario, ma in ogni punto del campo di moto ci sono fluttuazioni istantanee della velocità.

Nel caso del fumo di sigaretta: il fumo è molto caldo rispetto all'aria, quindi all'inizio hanno viscosità molto diverse (alta per l'aria, bassa per il fumo). I Re sono bassi, quindi il fumo rimane collimato. Man mano il moto di galleggiamento (espansione del gas) aumenta la velocità e la temperatura si avvicina a quella dell'aria, quindi Re cresce e il moto diventa turbolento.

Le fluttuazioni di velocità indotte nel fluido dal moto turbolento hanno la capacità di trasportare una quantità (scalare o vettoriale) molto rapidamente anche in assenza di moto medio.
Ciò porta ad assimilare l'effetto della turbolenza con un notevole aumento della diffusività del fluido che arriva ad essere anche 2 o 3 ordini di grandezza maggiore rispetto al valore molecolare.
Le equazioni di Navier-Stokes (eq. di continuità ed eq. di conservazione della q.d.m.) presentano termini non lineari relativi ad accelerazioni convettive: sono questi termini quelli più sensibili alla turbolenza. Le eq. di Navier-Stokes sono deterministiche, quindi non adatte a descrivere la turbolenza.
Per misurare un moto turbolento bisogna mettere un probe in un condotto e misurare la velocità in un punto per n intervalli di tempo, poi calcolarne media e varianza.
Un regime di flusso turbolento include:
- basso momento diffusivo;
- alto momento convettivo;
- rapide variazioni spazio-temporali di pressione e velocità.

Lorenz ha conciliato la natura stocastica del moto turbolento con le eq. di Navier-Stokes, dimostrando che alcuni sistemi non lineari possono avere una tale sensibilità alle condizioni iniziali che perturbazioni inapprezzabili nei parametri

FABER-CASTELL

meno lavoro. Solo nell'aorta si arriva al regime di transizione, ma non si sviluppa mai turbolenza.
In caso di patologia (per es una stenosi): riduzione sezione di passaggio del sangue ⇒ aumento velocità ⇒ aumento Re ⇒ moto turbolento.
La turbolenza si può innescare anche nei dispositivi a ricircolo di sangue.

Turbolenza ⇒ cuore lavora di più ⇒ ipertrofizza ⇒ si dilata ⇒ non riesce più a pompare.

Equazioni di Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \rho \dfrac{Dv}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \cdot \tau] & \text{(trascurando gravità)} \\ \nabla \cdot v = 0 \end{cases}$$

Con: $\dfrac{Dv}{Dt} = \dfrac{\partial v}{\partial t} + [\nabla \cdot v \cdot v]$ ⇒ accelerazione convettiva: termine non lineare

$\dfrac{\partial v}{\partial t}$: accelerazione convettiva non stazionaria

Si considerano p e v in un punto i e le si scrive come somma del loro valor medio e delle loro fluttuazioni:

$$v_i = \overline{v_i} + v_i' \qquad p = \overline{p_i} + p'$$

Con:
$$\overline{v_i} = \frac{1}{t_0}\int_t^{t+t_0} v\,dt$$

bisogna scegliere t_0 tale che il valore della media sia sempre lo stesso (fenomeno stazionario in senso debole). Se questo è vero, allora:

$$\frac{1}{t_0}\int_t^{t+t_0} v_i'\,dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{v_i'} = 0$$ la media della fluttuazione è nulla!

Inoltre:
$$\frac{1}{t_0}\int_t^{t+t_0} v_i'^2\,dt \neq 0$$ ⇒ se la varianza fosse nulla, il fenomeno sarebbe deterministico.

Si pongono v e p in termini di media e fluttuazione nell'eq. di Navier-Stokes.
Eq. di continuità

$$\nabla v = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$ (in termini vettoriali) ⇒

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\overline{v_x} + v_x') + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{v_y} + v_y') + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{v_z} + v_z') = 0$$ ⇒ si integra sul periodo T

$$\Rightarrow \int_T \frac{\partial}{\partial x}(\overline{v_x} + v_x')\,dt + \int_T \frac{\partial}{\partial y}(\overline{v_y} + v_y')\,dt + \int_T \frac{\partial}{\partial z}(\overline{v_z} + v_z')\,dt = 0$$

FABER-CASTELL

Si può scrivere l'eq. di Navier-Stokes in forma vettoriale:

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = -\nabla \bar{p} - \underbrace{\left[\nabla \cdot \bar{\tau}^{(l)}\right]}_{\text{legato ai gradienti dei valori medi}} - \underbrace{\left[\nabla \cdot \bar{\tau}^{(t)}\right]}_{\text{legato solo alle medie delle fluttuazioni}}$$

Con:

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \left[\nabla \cdot \bar{v} \cdot \bar{v}\right]$$

Per il moto laminare si aveva: $\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \cdot \tau]$

Avendo introdotto un tensore che dipende dalle fluttuazioni, possiamo rappresentare sia il moto laminare che quello turbolento. L'ipotesi alla base è che si consideri un periodo di tempo in cui la velocità media del segnale non varia (turbolenza = fenomeno stazionario in senso debole).
Il problema è che si hanno 6 incognite in più! (la matrice di Reynolds è simmetrica). In totale ci sono 10 incognite: v_x, v_y, v_z, p, 6 τ.
Le equazioni che abbiamo sono 4: eq. del moto lungo x, y, z ed eq. di continuità.
Vi sono 2 approcci possibili: formulare una relazione tra gli sforzi di Reynolds e le grandezze fisiche del problema introducendo il concetto di viscosità turbolenta, oppure risolvere esplicitamente le eq. di trasporto separate per le 6 componenti indipendenti del tensore degli sforzi turbolenti ed eventualmente le 3 del vettore flusso termico turbolento.
Per quanto riguarda il primo approccio, Boussinesq ha osservato che in un campo di moto la turbolenza decade a meno che non siano presenti degli shear (gradienti di velocità); inoltre la turbolenza aumenta all'aumentare della velocità media di deformazione. Propose, quindi, l'idea che il tensore di Reynolds fosse legato alla velocità media di deformazione:

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u_i' u_j'} = \underbrace{\mu_t}_{\text{viscosità turbolenta}} \underbrace{\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right)}_{\text{rate medi di deformazione}}$$

viscosità turbolenta: ha le stesse dimensioni della viscosità dinamica, ma <u>non</u> è una proprietà fisica del fluido!

Ma il termine $\nabla \bar{\tau}^{(t)}$ dipenderà dal rate medio di deformazione: bisogna conoscere μ_t, che varia da punto a punto. Serve un sistema di equazioni per collegare μ_t alle altre grandezze: esistono molti modi per farlo.

TEORIA DI KOLMOGOROV

La turbolenza è una cascata di strutture (eddies) di dimensioni differenti, tramite le quali l'en. immessa nel sistema viene trasportata finché non viene dissipata in modo viscoso (⇒ produce localmente un aumento di T).
Ci sono 3 scale di lunghezza di turbolenza, ciascuna con Re tipico: scala integrale, scala di Taylor e scala di Kolmogorov.
La teoria di Kolmogorov si sviluppa <u>solo</u> sull'analisi dimensionale.

Un flusso turbolento completamente sviluppato può essere rappresentato da eddies

FABER-CASTELL

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 88

sull'ipotesi di isotropia locale: K è la stessa ovunque e gli eddies si comportano nello stesso modo in tutte le direzioni. ⇒ alle scale più piccole della turbolenza non vale più qualunque tipo di polarizzazione su larga scala. (!!)
La scala integrale non è isotropa!! È influenzata dalla direzione principale del moto.

1° Hp di similarità: man mano che l'en viene trasferita si perde l'informazione riguardante la geometria degli eddies. A parità di Re su scala più grande, le strutture che si formano sulla scala più piccola hanno una statistica di tipo universale → non dipendono da direzione o forma del moto: sono simili per ogni moto turbolento con stesso Re. In altre parole, purché i Re del fenomeno siano gli stessi, gli eddies piccoli non dipendono dalle condizioni al contorno.

Scala di Kolmogorov: $Re_\eta \cong 1 = \eta \frac{u_\eta}{\nu}$

$$u_\eta = \frac{\nu}{\eta} \rightarrow \text{scala di velocità}$$

$$\varepsilon = \frac{K}{\tau_\eta} = \frac{u_\eta^2}{\tau_\eta} = \frac{u_\eta^2}{\eta} \cdot u_\eta = \frac{u_\eta^3}{\eta} \Rightarrow u_\eta = (\varepsilon\eta)^{1/3}$$

Da cui:

$$(\varepsilon\eta)^{1/3} = \frac{\nu}{\eta} \Rightarrow \eta = \frac{\nu}{\varepsilon^{1/3}\cdot\eta^{1/3}} \Rightarrow \eta^{4/3} = \frac{\nu}{\varepsilon^{1/3}} \Rightarrow \eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \rightarrow \text{scala di lunghezza}$$

Da cui:

$$\begin{cases} u_\eta = (\varepsilon\eta)^{1/3} \\ \eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \end{cases} \Rightarrow u_\eta = \left(\varepsilon\frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}}\right)^{1/3} = \nu^{1/4}\left[\varepsilon^{1-\frac{1}{4}}\right]^{1/3} = \nu^{1/4}(\varepsilon^{3/4})^{1/3} = (\nu\varepsilon)^{1/4} = u_\eta$$

Quindi:

$$\tau_\eta = \frac{\eta}{u_\eta} = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \rightarrow \text{scala temporale}$$

Rapporto fra scala più grande e più piccola:

$$\begin{cases} l_0 \cong \frac{K^{3/2}}{\varepsilon} \\ \eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \end{cases} \Rightarrow \frac{\eta}{l_0} = \frac{(\nu/\varepsilon)^{1/4}}{K^{3/2}/\varepsilon} = \left[\frac{\varepsilon\nu}{K^2}\right]^{3/4}$$

Si ha: $Re_L = \frac{K^2}{\varepsilon\nu}$ (Re scala integrale)

Quindi:

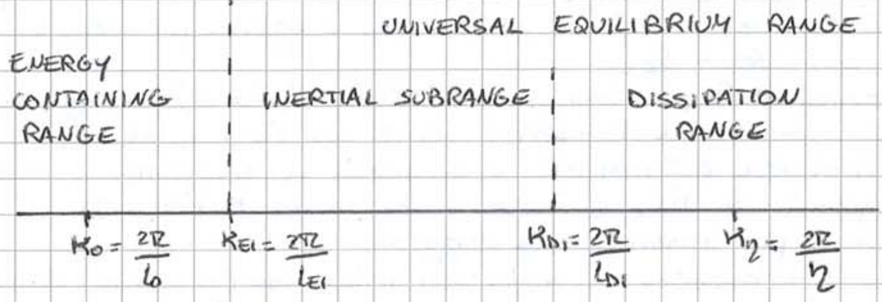
$$\frac{\eta}{l_0} = Re_L^{-3/4} \Rightarrow \eta = \frac{l_0}{Re_L^{3/4}}$$

La differenza nelle scale di lunghezza dipende da Re_L, che è prossimo a

FABER-CASTELL

Si definisce il numero d'onda $K = \frac{2\pi}{L}$

In maniera adimensionale: $K = \frac{2\pi}{L} \cdot \eta$ → si rendono i problemi universali



(slide 24)

L'energia cinetica turbolenta è data da: $K = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle = \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right)$

Per determinare come l'energia cinetica turbolenta sia distribuita tra gli eddies di dimensioni diverse si usa lo spettro di energia $E(K)$.

$E(K)$ è l'energia contenuta negli eddies di dimensione L e numero d'onda $K = \frac{2\pi}{L}$.

Per definizione, l'en. cinetica è data da:

$$K = \int_0^\infty E(K)\, dK$$

Dunque l'en. cinetica contenuta negli eddies con numero d'onda tra K_A e K_B è:

$$K_{(K_A, K_B)} = \int_{K_A}^{K_B} E(K)\, dK$$

Per definire lo spettro di energia si esegue solo l'analisi dimensionale:

$$\left.\begin{aligned} [K] &= m^2/s^2 \\ [\varepsilon] &= m^2/s^3 \\ [K] &= 1/m \\ [E(K)] &= m^3/s^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\varepsilon^{2/3} \cdot K^{-5/3} \right] = m^3/s^2$$

Da cui: $E(K) \propto \varepsilon^{2/3} \cdot K^{-5/3} \Rightarrow E(K) = C\, \varepsilon^{2/3} \cdot K^{-5/3}$ → indica come decade lo spettro di Kolmogorov

Sperimentalmente si determina: $C = 1,5$

Lo spettro completo è dato da: $\boxed{E(K) = C\, \varepsilon^{2/3} \cdot K^{-5/3} \cdot f_L \cdot f_\eta}$

(slide 27)

C'è un range in cui l'en. viene contenuta (scala integrale), un range subinerziale in cui l'en. viene un po' dissipata, ma sostanzialmente viene trasportata, e infine c'è il range di dissipazione. f_L e f_η sono funzioni che pesano l'en. sui vari range dei numeri d'onda. Assumono valori compresi tra 0 e 1.

FABER-CASTELL

Valor medio di WSS nel tempo (TAWSS, Time Averaged WSS):

$$TAWSS = \frac{1}{T}\int_0^T |WSS(s,t)|\,dt$$

Con T ciclo cardiaco.
- TAWSS < 0,4 Pa → stimola fenotipo pro aterogenico (patologia)
- TAWSS > 1,5 Pa → espressione di geni ateroprotettivi (sano)
- TAWSS > 10-15 Pa → traumi dell'endotelio

OSI (Oscillatory shear Index) viene usato per identificare regioni del vaso soggette ad alte variazioni di WSS durante il ciclo cardiaco:

$$OSI = 0{,}5 \cdot \left(1 - \frac{\left|\int_0^T WSS(s,t)\,dt\right|}{\int_0^T |WSS(s,t)|\,dt}\right) \qquad 0 \le OSI \le 0{,}5$$

- OSI basso → sano
- OSI alto → patologico

Si usa RRT (Relative Residence Time) per mettere insieme TAWSS e OSI.

$$RRT = \frac{1}{(1-2\cdot OSI)\cdot TAWSS} = \frac{T}{\left|\int_0^T WSS(s,t)\,dt\right|}$$

Applicazioni:
- modellizzazione flusso in biforcazione carotidea. Si confrontano diversi modelli reologici (Newtoniano, non newtoniani) e si visualizza l'effetto delle diverse assunzioni su WSS. Si vede che l'assunzione di fluido newtoniano è accettabile nell'ambito del corrente livello di incertezza associato alla ricostruzione geometrica. La ricostruzione geometrica ha un'influenza primaria su indicatori fisiologicamente significativi!
- confronto tra stent coronarici per valutare il rischio di restenosi;
- modellizzazione flussi in aorta.

CFD

La CFD si usa perché nella maggior parte dei casi reali, per questioni geometriche o proprietà meccaniche, non è possibile trovare una soluzione in forma chiusa delle equazioni che governano un processo. Permette di ottenere una soluzione approssimata delle leggi del fenomeno fisico in istanti di tempo discreti del dominio.
È un tool kit di supporto alla progettazione e alla ricerca.
La CFD è alla base della progettazione di strumenti blood recirculating (valvole, cateteri, sistemi di assistenza meccanica al circolo, ecc.).
Per risolvere un problema di meccanica dei fluidi si possono usare 3 approcci:
- sperimentale → richiede la costruzione di un modello (prototipazione);
- teorico → ha dei limiti (per es Poiseuille non si può applicare a sistema cardiovascolare);
- computazionale → i codici di calcolo vanno validati con misure sperimentali su esperimenti che si possono replicare in silico (al pc)

I flussi cardiovascolari non sono validabili, al massimo verificabili con misure in vivo: infatti in vivo non si possono controllare tutti i parametri.

FABER-CASTELL

sentazione equivalente di tipo algebrico, per es con le differenze finite (espansione in serie di Taylor):

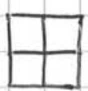
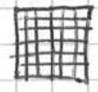
$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{(\Delta x)^2}{2} + \dots + \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\frac{(\Delta x)^n}{n!} + \dots$$

Lo sviluppo di Taylor è dato dalla somma di infiniti termini. La derivata parziale può essere espressa come:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{(\Delta x)^2}{2}\cdot\frac{1}{\Delta x} + \dots \Rightarrow$$

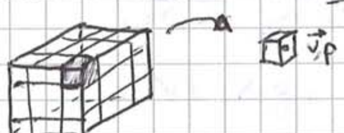
$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \underbrace{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}_{\text{differenza finita}} \underbrace{- \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{(\Delta x)^2}{2}\cdot\frac{1}{\Delta x} + \dots}_{\text{errore di troncamento}}$$

Dunque la derivata parziale della velocità è esprimibile come rapporto incrementale sommato a termini di ordine superiore. Se si ignorano questi ultimi si commette un errore di troncamento.
In questo modo si rappresenta una derivata parziale come una differenza!
ERRORE DI TRONCAMENTO: differenza tra l'equazione con le derivate parziali e la sua rappresentazione con le differenze finite.
CONSISTENZA: differenza tra la derivata parziale e la sua rappresentazione discreta quando il raffinamento della griglia aumenta. La derivata parziale è rappresentata in maniera consistente se l'errore di troncamento diventa trascurabile all'aumentare della densità della griglia di calcolo computazionale.

 → rappresentazione non consistente: si infittisce la griglia ⇒ 

STABILITÀ: gli errori di qualunque origine (troncamento, arrotondamento, ecc.) non devono crescere nella sequenza di procedure numeriche.

Nella tecnica dei volumi finiti i principi di conservazione (massa e q.d.m.) sono applicati a una regione definita (volume di controllo). Si integrano le eq. di Navier-Stokes nei volumi di controllo: si prende il centro di massa di ciascun volume e vi si applica il valore integrale di velocità ottenuto tramite l'integrazione. La tecnica si basa sul teorema della divergenza:



$$\int_V (\nabla\cdot F)\,dV = \int_{\partial V} F\cdot da$$

Cioè: se E è una regione solida con superficie S e $\vec{F}$ è un campo vettoriale con derivate parziali continue, allora l'integrale sul volume della divergenza di F è pari al flusso di F attraverso la superficie chiusa S.

Solutore segregated: si usa 1 matrice per u, 1 matrice per v, 1 matrice per w e 1 matrice per p. Per ciascuna di queste matrici si risolvono le eq. di Navier-Stokes lungo x, y, z e l'eq. di conservazione della massa. Poi si controlla la convergenza: se non è raggiunta, si continua. Si cicla finché non si ottiene un errore relativo inferiore a una data soglia.

FABER-CASTELL

Si ottiene: $\int_V \rho\left(\underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial x_1} v_1}_{v_1 \nabla\cdot v_1 i} + \underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial x_2} v_2}_{v_2 \nabla v_1 j}\right) dV = \int_V \rho \left(v_1 \nabla v_1 i + v_2 \nabla v_1 j\right) dV$

L'eq. diventa:

$$\underbrace{\int_V \rho \frac{\partial v_1}{\partial t}\, dV}_{\text{gradiente temporale}} + \underbrace{\int_S \rho v_1 v_1 i\cdot n\, dA + \int_S \rho v_2 v_1 j\cdot n\, dA}_{\text{termine convettivo}} = \underbrace{-\int_S p i\cdot n\, dA}_{\text{termine di pressione}} + \overbrace{\int_S \mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} i\cdot n + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} j\cdot n\right) dA}^{\text{termine di diffusione}} + \underbrace{\int_V \rho X_1\, dV}_{\text{termine sorgente}}$$

Dove: A → area che racchiude il volume
i, j, k → vettori unitari nelle 3 direzioni cartesiane
n → vettore unitario normale alla superficie A

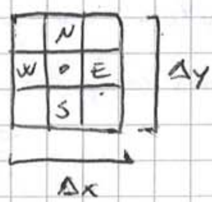
Calcolo degli integrali:

• il gradiente temporale viene discretizzato con la formula di Eulero:

$$\int_V \rho \frac{\partial v_1}{\partial t}\, dV = \rho \frac{v_1(t) - v_1(t-\Delta t)}{\Delta t} \Delta x \cancel{\Delta x_2} = \rho \frac{v_1 - v_1^0}{\Delta t} \Delta x \Delta y$$

(non si può applicare teo divergenza perché non esiste rispetto al tempo: che superficie delimita il tempo?)

• termine convettivo (o di trasporto):



$$\int_S \rho v_1 v_1 i\cdot n\, dA = F_e v_{1e} - F_w v_{1w}$$

$$\int_S \rho v_2 v_1 j\cdot n\, dA = F_n v_{1n} - F_s v_{1s}$$

Dove F sono i flussi convettivi, che valgono: $F_e = \rho v_{1e} \Delta \cancel{x_2}$ → in 3D sarebbe una superficie
$F_w = \rho v_{1w} \Delta \cancel{x_2}$
$F_n = \rho v_{2n} \Delta x_1$
$F_s = \rho v_{2s} \Delta x_1$

Bisogna stabilire come calcolare le velocità sulle superfici di contorno ($v_{1e}, v_{1w}, v_{2n}, v_{2s}$). Ci sono 3 metodi principali:
- upwinding del primo ordine: si prende come valore di v quello della cella a monte. È il più rozzo, serve per trovare velocemente un'idea di soluzione;
- upwinding del secondo ordine: si prende come valore di v una stima calcolata a partire dal gradiente di v nella cella a monte, metodo più raffinato;
- quick: si prende come valore di v il valore assunto nella cella a valle.

• termine di pressione:

$$\int_S p i\cdot n\, dA = p_e \Delta \cancel{y}_e - p_w \Delta \cancel{y}_w$$

Se il fluido è incomprimibile, per calcolare la pressione si usano dei procedimenti chiamati pressure-velocity coupling, basati sull'eq. di conservazione della q.d.m. L'eq. di conservazione della q.d.m. viene risolta nel metodo segregated introducendo dei valori tentativo v_1^*, v_2^*, p^* (si inizializzano le variabili).
Dette v_1, v_2 e p le soluzioni corrette, i metodi di pressure velocity coupling si basano sul calcolo del fattore correttivo p' che permette di passare dalla soluzione approssimata a quella corretta:

$$p = p^* + p'$$

Consideriamo l'eq. di conservazione della q.d.m. in direzione 1 trascurando i termini legati a v_{1nb} e b_v.
Per il caso corretto:

$$a_v v_1 = \sum_{e,w} a_{p,nb}\, p_{nb}$$

Per il caso approssimato:

$$a_v v_1^* = \sum_{e,w} a_{p,nb}\, p_{nb}^*$$

Sottraendo membro a membro:

$$v_1 - v_1^* = \frac{\sum_{e,w} a_{p,nb}}{a_v} \left(p_{1nb} - p_{1nb}^*\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = v_1^* + d_p\, p'$$

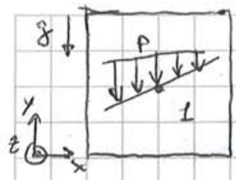
Consideriamo l'eq. di conservazione della massa nel caso 2D incomprimibile. Sostituendo la formula che lega v_1 a v_1^* e p', si ottiene un'eq. in cui compaiono le v_1^* (note) e la p' (incognita).
Su questo principio si basa il metodo SIMPLE (semi-implicit for pressure linked equation). Passi:
1- si usa una p_J^* di tentativo nelle eq. di conservazione della q.d.m. (J indica il J-esimo elemento);
2- si ottengono delle v_J^* che però non soddisfano l'eq. della massa;
3- sostituisco nell'eq. di conservazione della massa;
4- calcolo il fattore correttivo p_J' con l'eq. modificata
5- ricalcolo p_J per la nuova stima delle v dell'iterazione successiva come:

$$p_J = p_J^* + \alpha_p\, p_J'$$

fattore di sottorilassamento: stabilizza procedura iterativa

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 88

ESERCITAZIONE 09/10/14



Principio di Pascal:

$p_{1x} = p_{1y} = p_{1z} = p_1 \rightarrow$ p agisce in maniera $\perp$ alla superficie

Legge di Stevino:

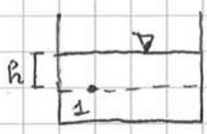
$p = (\rho g) y$

$\gamma \rightarrow$ peso specifico volumetrico $[N/m^3]$

$\boxed{p_{atm} = 101'325 \ Pa}$ $\boxed{\rho_{H_2O} = 1000 \ kg/m^3}$ $\boxed{\rho_{ARIA} \cong 1 \ kg/m^3}$

$p \ [Pa] = \gamma \cdot h \ [m]$

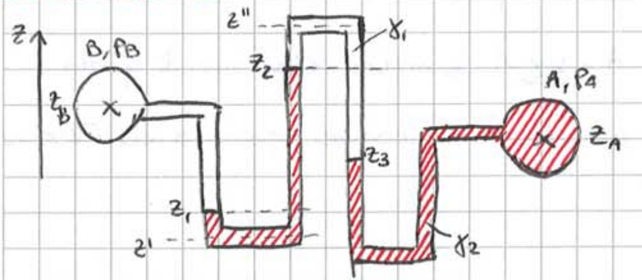
$1 \ Pa = 10^{-5} \ bar = 9{,}8692 \cdot 10^{-6} \ atm = 7{,}5 \cdot 10^{-3} \ Torr \ (mmHg)$



pressione assoluta: $p_1 = p_{atm} + \gamma h$

pressione relativa: $p_1 = \gamma h$

ESERCIZIO 1



Catena manometrica.

$z_A = 1{,}6 \ m$

$z_B = 1{,}8 \ m$

$z_1 = 0{,}7 \ m$

$z_2 = 2{,}1 \ m$

$z_3 = 0{,}9 \ m$

$\gamma_1 = 9'807 \ \frac{N}{m^3}$ (H_2O)

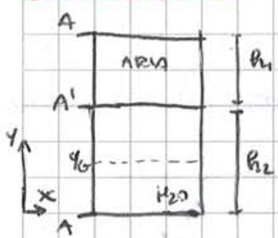
$\gamma_2 = 133'100 \ \frac{N}{m^3}$ (Hg)

$p_A - p_B = ?$

$$p_B + \gamma_1 (z_B - z_1) + \gamma_2 \cancel{(z_1 - z')} - \gamma_2 \cancel{(z_1 - z')} - \gamma_2 (z_2 - z_1) - \gamma_1 \cancel{(z'' - z_2)} + \gamma_1 \cancel{(z'' - z_2)} + \gamma_1 (z_2 - z_3) + - \gamma_2 (z_A - z_3) = p_A$$

$$\Rightarrow p_A - p_B = \gamma_1 (z_B - z_1 + z_2 - z_3) - \gamma_2 (z_2 - z_1 + z_A - z_3) = 286 \ kPa$$

ESERCIZIO 2



$h_1 = 2 \ m$

$h_2 = 3 \ m$

$p_{ARIA} = 7 \ bar = 700'000 \ Pa$

$\gamma_{H_2O} = 9'806 \ N/m^3$

profondità $= 1 \ m$

1) Spinta $\vec{S}$ su A-A?
2) Ricavare piano dei carichi idrostatici
3) disegnare distribuzione di pressione su A-A.

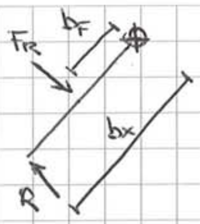
$\rho_{H_2O} \gg \rho_{ARIA} \Rightarrow p_{ARIA} =$ costante su A-A'

$|S_{ARIA}| = p_{ARIA} \cdot A = 1 \ m \cdot h_1 \cdot p_{ARIA} = 1'400 \ kN$ lungo x

$$\boxed{F_R = \int_A \gamma y \, dA = \gamma h_G A = p_G A}$$

$p_G = p_{ARIA} + \gamma_{H_2O} \frac{h_2}{2}$

$|S_{H_2O}| = p_G A = 2'140 \ kN$ lungo x



$|F_R| = p_G \cdot A = \gamma h_G \cdot A$

$p_G = \gamma\left(h + \frac{a}{2}\operatorname{sen}\alpha\right) = 36\,900\ Pa$

$F_R \rightarrow$ risultante delle pressioni agenti sulla paratia.

$F_R\, b_F = R\, b_x$ con $b_x = a$

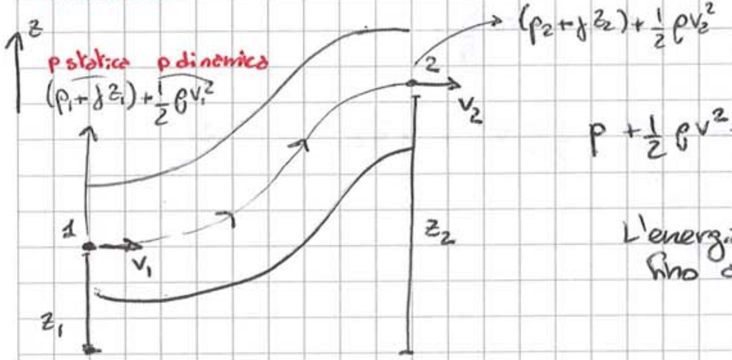
$\Rightarrow |F_R| = p_G \cdot a^2 \cong 148\ kPa$

Paratia quadrata: $I_{xG} = \frac{a^4}{12}$

$$y_{CS} = y_G + \frac{I_{xG}}{y_G \cdot A} = \left(\frac{a}{2} + \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}\right) + \frac{1{,}33\ m^4}{\left(\frac{a}{2} + \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}\right) \cdot A} = 4{,}99\ m$$

$b_F = 4{,}99\ m - x$

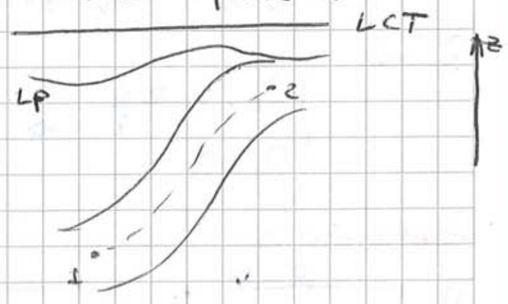
RIPASSO



$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \gamma z = cost.$ [Pa]

$\Downarrow$

L'energia del punto 1 viene conservata fino ad arrivare al punto 2



LCT $\rightarrow$ linea dei carichi totali. Rimane costante lungo tutto il condotto

$$LCT = \frac{p}{\gamma} + \frac{1}{2g} v^2 + z$$

LP $\rightarrow$ linea piezometrica. E' il termine dovuto solo alla p statica

$$LP = \frac{p}{\gamma} + z$$

In ogni punto: $LCT - LP = \frac{1}{2g} v_P^2$

Un altro modo per scrivere Bernoulli:

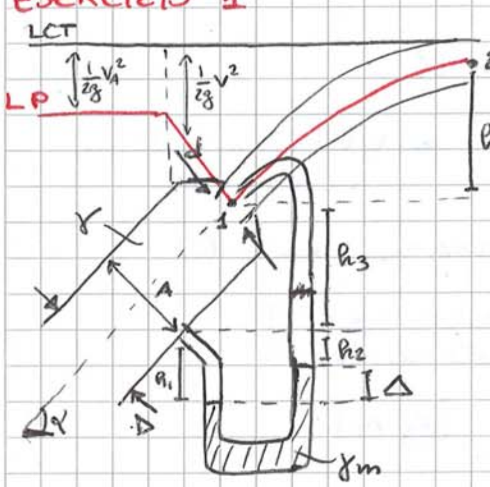
$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz = cost. \quad [J/kg]$$

$\Downarrow$

Legge della conservazione dell'energia $w_1 = w_2$

ESERCITAZIONE 22/10/14

ESERCIZIO 1



$h = 8{,}5\ m$
$D = 0{,}15\ m$
$d = 0{,}05\ m$
$\alpha = 45°$
$\gamma = 9806\ N/m^3$
$\gamma_m = 13\,362\ N/m^3$

$h \rightarrow$ altezza getto prodotto

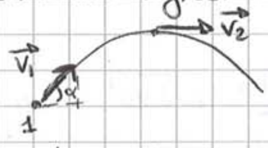
- portata in uscita Q?
- Δ?
- linea carichi totali e linea piezometrica?

- $Q = v \cdot A$

$$\cancel{p_1} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \gamma z_1 = \cancel{p_2} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \gamma z_2 \Rightarrow \gamma h = \rho\frac{(v_1^2 - v_2^2)}{2}$$

($p_1 = 0$, $p_2 = 0$)

La formula: $Q_1 = Q_2 \Rightarrow v_1 A_1 = v_2 A_2$ è valida in un tubo a pressione. In realtà il punto 2 è fuori dal tubo, quindi il fluido va considerato come un corpo soggetto a $\vec{g}$: è come se fosse un solido, quindi vale un moto rigido.



$V_x = \text{cost} \Rightarrow V_2 = V_1 \cos\alpha$

Quindi: $\gamma h = \rho\,\dfrac{v_1^2 - v_1^2\cos^2\alpha}{2} \Rightarrow g h = \dfrac{v_1^2(1-\cos^2\alpha)}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_1 = \sqrt{\frac{2gh}{1-\cos^2\alpha}}$$

Da cui: $Q_1 = Q = v_1 \pi \dfrac{d^2}{4}$

- $\begin{cases} p_A + \gamma h_1 - \gamma_m\Delta - \gamma(h_2+h_3) = p_1 \\ h_1 = h_2 + \Delta \end{cases} \Rightarrow p_A - p_1 = -\left[\gamma h_2 + \gamma\Delta - \gamma_m\Delta - \gamma(h_2+h_3)\right]$

$$\Rightarrow p_A - p_1 = \Delta(\gamma_m - \gamma) - \gamma h_2 + \gamma(h_2+h_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta(\gamma_m - \gamma) = \underbrace{p_A - p_1 + \gamma h_2 - \gamma(h_2+h_3)}$$

Bernoulli A-1: $p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \gamma z_A = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \gamma z_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{(p_A + \gamma z_A) - (p_1 + \gamma z_1)} = -\frac{1}{2}\rho v_A^2$$

=

Da cui: $-\frac{1}{2}\rho v_A^2 = \Delta(\gamma_m - \gamma) \Rightarrow \Delta = -\frac{1}{2}\rho v_A^2 \cdot \dfrac{1}{\gamma_m - \gamma}$

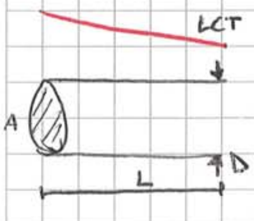
FABER-CASTELL

ESERCITAZIONE

30/10/14

Bernoulli senza attrito: $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \gamma z = \text{cost.}$

Per un fluido viscoso (⇒ con attrito):

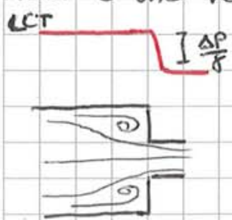


$$\boxed{\Delta p_{distribuita} = \frac{\rho v^2}{2} \cdot \frac{L}{D} \cdot \lambda}$$ → valida ∀ regime di moto (laminare o turbolento)

Con $\lambda = \lambda(Re, \varepsilon, D)$ che si ricava dall'abaco di Moody

Tubo rugoso e con diametro piccolo → tanto attrito.

LCT è una retta con coefficiente angolare $\frac{L}{D}$.

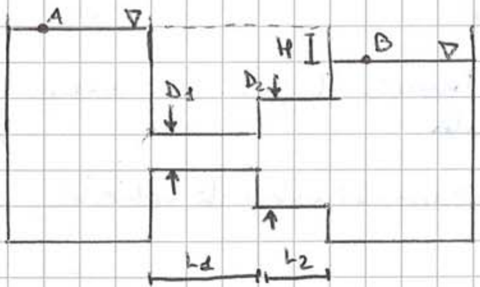


$$\boxed{\frac{\Delta p_{concentrata}}{\gamma} = \frac{v^2}{2g} \cdot \xi}$$

Si ha una riduzione quasi istantanea dell'energia del flusso.

ξ si ricava sperimentalmente e dipende solo dal tipo di geometria.

ESERCIZIO



$D_1 = 5\ cm$
$D_2 = 10\ cm$
$L_1 = 180\ m$
$L_2 = 90\ m$
$\varepsilon = 0,2\ mm$
$\nu = \mu/\rho = 0,9 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$
$H = 6\ m$

Q ?

H → dovuto a perdite di carico.

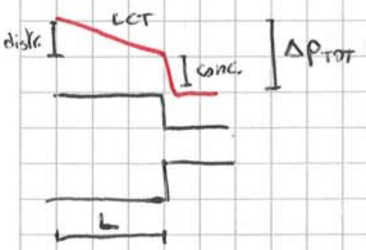
Bernoulli tra A e B:

$$\underbrace{\cancel{p_A}^{\,0} + \frac{1}{2}\rho \cancel{v_A^2}^{\,\simeq 0} + \gamma z_A}_{p_{TOT}\ a\ sx} = \underbrace{\cancel{p_B}^{\,0} + \frac{1}{2}\rho \cancel{v_B^2}^{\,\simeq 0} + \gamma z_B}_{p_{TOT}\ a\ dx} + R$$

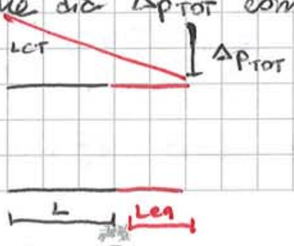
→ energia persa. Termine positivo: va aggiunto all'en. totale di dx per compensare la perdita

$$\Rightarrow \gamma H = R \xrightarrow{\text{divisione per } \rho} g H = R^*$$

Il termine R^* riassume la perdita di carico distribuita lungo L_1, concentrata nel passaggio da D_1 a D_2, distribuita lungo L_2, concentrata nel passaggio da D_2 a serbatoio.



⇒ Si può considerare un tubo di lunghezza equivalente che dia Δp_{TOT} come Δp distribuita.



STEP 5: calcolo dei nuovi valori di velocità.

$$V_2^{II} = \sqrt{\frac{a}{\lambda_1^I b + \lambda_2^I c}} \simeq 0{,}26 \ m/s \quad ; \quad V_1^{II} = 1{,}033 \ m/s$$

Si calcola l'errore % tra iterazioni consecutive:

$$e\% = \left| \frac{V^I - V^{II}}{V^{II}} \right|$$

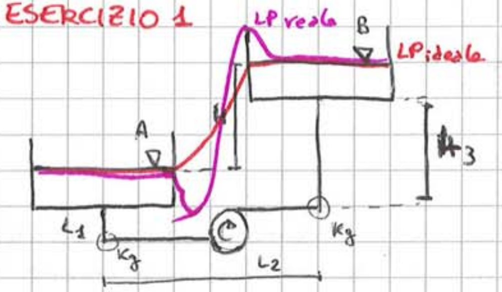
Scegliamo un valore accettabile di errore (per es 2-5%, mai oltre 10%).
Se e% è minore del valore accettabile, allora si è raggiunto il valore vero.
La prima ipotesi su V si può fare ponendo $V_2^I = \sqrt{2gH}$

Problemi tipici da risolvere con metodo iterativo:
- date caratteristiche geometriche (D, ε) ricavare Q;
- dato Q ricavare le caratteristiche geometriche.

ESERCITAZIONE

12/11/14

ESERCIZIO 1



$\rho = 1000 \ kg/m^3$
$\mu = 0{,}001 \ Pa \cdot s$
$D = 50 \ mm$
$\varepsilon = 150 \ \mu m$
$\dot{m} = 3 \ kg/s$

$H = 30 \ m$
$L_1 = 2 \ m$
$L_2 = 5 \ m$
$L_3 = 32 \ m$
$K_{imbocco} = K_{sbocco} = 1 \rightarrow \xi$
$K_g = 0{,}5$

Prevalenza $\frac{\Delta p_p}{\gamma}$?

$$p_{in} + \frac{1}{2}\rho v_{in}^2 + \gamma z_{in} = p_f + \frac{1}{2}\rho v_f^2 + \gamma z_f + R \qquad [Pa]$$

R ↳ { perdite concentrate, perdite distribuite }

P: in, f

Prevalenza: $\frac{\Delta p}{\gamma} = H_p \quad [m]$

Se il sistema fosse senza perdite: $H_p = 30 \ m$.
In realtà ci sono perdite:

$$\underbrace{\cancel{p_A}}_{0} + \frac{1}{2}\rho \underbrace{\cancel{v_A^2}}_{\simeq 0} + \gamma z_A + \Delta p_p = \underbrace{\cancel{p_B}}_{0} + \frac{1}{2}\rho \underbrace{\cancel{v_B^2}}_{\simeq 0} + \gamma z_B + R \Rightarrow$$

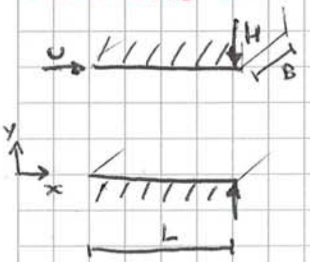
N.B: scrivere sempre così: prevalenza a dx e perdite a sx.

$$\Rightarrow \Delta p = \gamma(z_B - z_A) + R \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta p}{\gamma} = H + R^* \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta p}{\gamma} = H + \underbrace{\lambda \frac{L_{TOT}}{D}\frac{v^2}{2g}}_{\text{perdita distribuita}} + \underbrace{2K_g \frac{v^2}{2g} + 2K_{imb}\frac{v^2}{2g}}_{\text{perdite concentrate}}$$

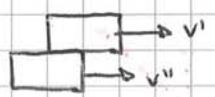
BILANCI. Esercizi tipo esame:
- teoria sul film cadente
- condotti a sezione circolare
- lastre piane parallele
- esposimetri

ESERCIZIO 3

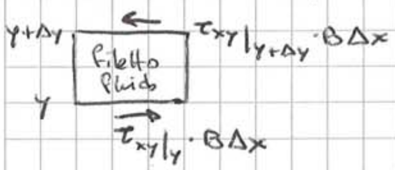


Lastre piane parallele.
Hp:
- Dimensione z infinitamente più grande di y:
  $B >> H \Rightarrow v_z = 0$
- Flusso stazionario: $\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0$
- Flusso completamente sviluppato: $v_y = 0$

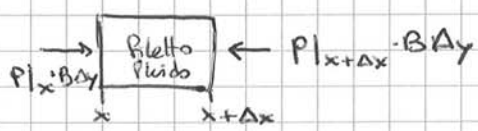
Ci sono forze di attrito tra pareti e filetti fluidi.



$v' > v'' \Rightarrow$ i filetti hanno diversa q.d.m. $\Rightarrow$ i filetti scambiano q.d.m. in direzione trasversale al moto (τ)
Effetto dello sfregamento è il profilo di velocità.



Diffusione della q.d.m.: $\tau_{xy}|_y \cdot B\Delta x$
$- \tau_{xy}|_{y+\Delta y} B\Delta x$



Caso stazionario $\Rightarrow$ no variazioni di q.d.m. nel tempo

Si ottiene: $\boxed{(P|_x - P|_{x+\Delta x}) B\Delta y + (\tau_{xy}|_y - \tau_{xy}|_{y+\Delta y}) B\Delta x = 0} \Rightarrow$

$\downarrow$
sempre vero quando il flusso è completamente sviluppato e stazionario

$/B\Delta x\Delta y$

$$\Rightarrow -\frac{P|_{x+\Delta x} - P|_x}{\Delta x} - \frac{\tau_{xy}|_{y+\Delta y} - \tau_{xy}|_y}{\Delta y} = 0$$ sono rapporti incrementali!

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0}$$

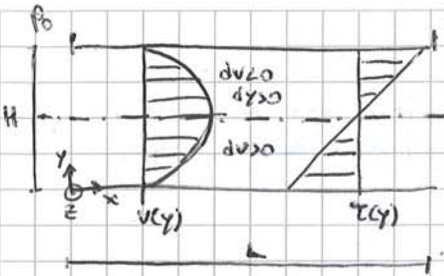
(!!)

$p_0 > p_L$: il flusso scorre sempre da p maggiore a p minore (contro gradiente di p)

$$\begin{cases} \frac{\tau_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\Delta P}{L} = -\frac{P_L - P_0}{L} \\ \tau_{xy} = -\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial P}{\partial x} \Rightarrow$$

FABER-CASTELL

ESERCITAZIONE 18-12-14



$\Delta p = p_0 - p_1$

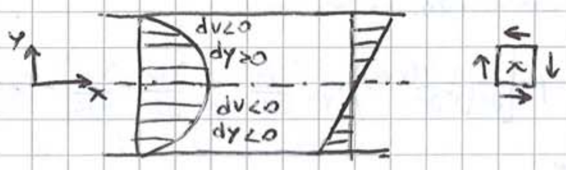
Fluido newtoniano: $\tau(y) = -\mu \frac{dV_x}{dy}$

Per disegnare le τ si deve ragionare su dV_x/dy. Si parte dall'origine (piastra inferiore)

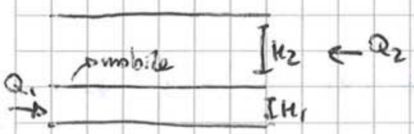
Per il primo $H/2$, la velocità cresce verso l'alto ($\Rightarrow dV_x>0$) e anche y ($\Rightarrow dy>0$). $\frac{dV_x}{dy}>0$ ma nella formula c'è un meno $\Rightarrow \tau<0$

Idem per il secondo $H/2$: $\frac{dV_x}{dy}<0 \Rightarrow \tau>0$

Ragionando sulla forza che il fluido esercita sulla parete, si vede che il fluido si sposta verso destra, ma lo sforzo di taglio va verso sinistra (nel primo $H/2$). È la convenzione del sistema di riferimento che mette in relazione l'elemento solido.

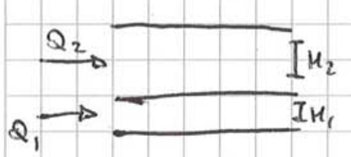


La particella di fluido che scorre vicino alla parete è rallentata da essa (v decresce), mentre la parete si sente accelerata dalla particella (azione-reazione)



$H_1 \neq H_2$ → ESAME!!

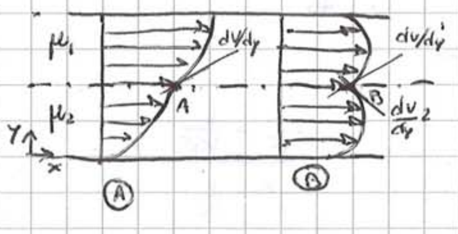
Esiste Q_1/Q_2 tale che la piastra intermedia stia ferma?



$H_1 \neq H_2$
$Q_1 \neq Q_2$

Che forza serve per vincolare la lastra centrale?

ES 1



Si hanno 2 fluidi immiscibili che scorrono tra 2 lastre piane.

a - A e B sono situazioni fisicamente possibili?

b - dire se le lastre sono in moto e se i fluidi sono soggetti a Δp.

c - indicare direzione e verso della forza esercitata dalla piastra superiore.

a - Sull'asse centrale ci deve essere uguaglianza tra gli sforzi di taglio. Nei punti A e B le derivate delle velocità devono essere uguali, cioè la pendenza della parabola in quel punto deve essere la stessa. L'unico caso possibile è A.

b - La piastra superiore è in movimento, altrimenti la velocità a parete sarebbe nulla, la piastra inferiore è ferma. Con Δp si attiva un termine quadratico: se non ci fosse, il profilo di velocità sarebbe una retta.

c - $\frac{dV}{dy}<0 \Rightarrow \tau = -\mu \frac{dV}{dy} > 0$ con $V(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}H^2\left[\left(\frac{y}{H}\right)^2 - \left(\frac{y}{H}\right)\right] + \frac{U_w}{H}y$

$F = \tau \cdot A$

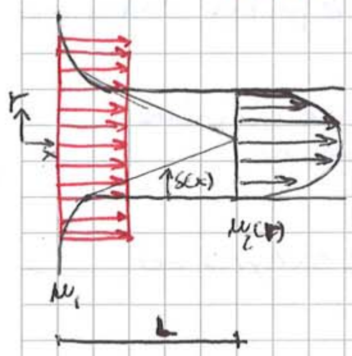
(Sarebbe $M = -2\pi R L |\tau|_R| \cdot R$, per questo tenendo conto del meno di $\tau|_R$ diventa +)

$\Rightarrow$ $M(\mu) = (-) 4\pi\mu L\omega R^2 \left(\frac{k^2}{1-k^2}\right)$

$M(\mu)$ nota $\Rightarrow$ ricavo μ.

Possibili domande d'esame:
- Qual è la coppia che si deve applicare per tenere fermo il cilindro interno?
- Cosa succede se a ruotare è il cilindro interno?

ESERCITAZIONE 14-01-15



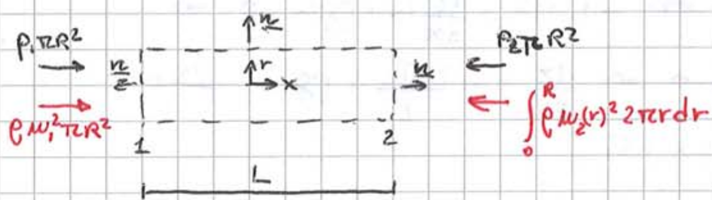
$$w_2(r) = w_{2MAX}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

ξ?

Flusso sviluppato $\Rightarrow$ F viscose = F di pressione

All'inizio non ci sono forze viscose. Resta la Δp tra ingresso (1) e uscita (2) con $p_1 > p_2$ e c'è una diversa q.d.m. tra 1 e 2.

Individuo il volume di controllo del cilindro:



Bisogna tener conto delle direzioni di $\underline{n}$ (normale alla superficie):

$$-\rho w_1^2 \pi R^2 + \int_0^R \rho\, w_2(r)^2\, 2\pi r\, dr = (p_1 - p_2)\pi R^2$$

Risolvo l'integrale:

$$\int_0^R \rho\, w_2(r)^2\, 2\pi r\, dr = 2\pi\rho\, w_{2MAX}^2 \int_0^R \left[1 + \left(\frac{r}{R}\right)^4 - 2\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] r\, dr = 2\pi\, w_{2MAX}^2 \int_0^R \left(r + \frac{r^5}{R^4} - 2\frac{r^3}{R^2}\right) dr =$$

$$= 2\pi\rho\, w_{2MAX}^2 \left[\frac{R^2}{2} + \frac{R^6}{6R^4} - \frac{2R^4}{4R^2}\right] = \pi\rho\, w_{2MAX}^2 \frac{R^2}{3}$$

Quindi $p_1 - p_2 = \rho\left(\frac{1}{3} w_{2MAX}^2 - w_1^2\right)$

Perdita di carico concentrata: $\Delta p_c = \xi \cdot \frac{1}{2}\rho \bar{v}^2$

Per conservazione portata: $\bar{v} = w_1 = \frac{w_{2MAX}}{2}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta p_c = p_1 - p_2 = \frac{1}{3}\rho\, 4\bar{v}^2 - \rho\bar{v}^2 = \frac{\rho\bar{v}^2}{2}\left(\frac{8}{3} - 2\right) \Rightarrow \xi = \frac{2}{3}$$

FABER-CASTELL

RIASSUNTI FLUIDI

IDROSTATICA

Fluido: mezzo continuo nel quale, in equilibrio, gli sforzi siano sempre normali alle rispettive superfici, ovvero che non possa sopportare sforzi di taglio senza deformarsi per scorrimento.

liquidi → delimitati da superficie definita
gas → occupano tutto lo spazio consentito dal recipiente

Proprietà:

- **densità**: $\rho = \frac{m}{V}$ u.d.m.: $\frac{kg}{m^3}$ (SI) o $\frac{g}{cm^3} = 10^3 \frac{kg}{m^3}$ (cgs)

liquidi: ρ costante al variare di T e p

gas: $\frac{m}{V} = \rho = \frac{Mp}{RT}$ (da formula gas ideali) $\Rightarrow \rho = \rho(T,p)$

- **peso specifico**: $\frac{\text{peso corpo}}{\text{volume corpo}} = \frac{P}{V} = \rho g$ u.d.m. $\frac{N}{m^3}$ (SI) o $\frac{dyn}{cm^3} = 10 \frac{N}{m^3}$ (cgs)

- **comprimibilità**: $E = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V}$ → modulo di comprimibilità. u.d.m: Pa

$\beta = \frac{1}{E}$ → coeff. di comprimibilità

liquidi: E elevato ⇒ sono incomprimibili

gas: $T = cost$ ⇒ legge di Boyle

$pV = cost \Rightarrow d(pV) = d(cost) \Rightarrow p\,dV + V\,dp = 0 \Rightarrow p = -\frac{dp}{dV/V} = E$ ⇒ facilmente comprimibili

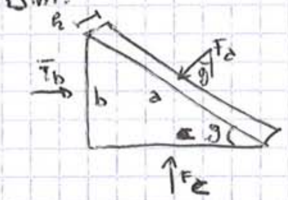
$\alpha_V = \frac{\Delta V / V}{\Delta T}$ → coeff. di dilatazione di volume

PRESSIONE: $p = \frac{F}{S}$ u.d.m.: $Pa = \frac{N}{m^2}$ (SI) o $\frac{dyn}{cm^2} = 0{,}1\ Pa$ (cgs)

$1\ bar = 10^5\ Pa$
$1\ mmHg = 1\ Torr = 133{,}22\ Pa$

La pressione è una proprietà <u>scalare</u>.

Dim:



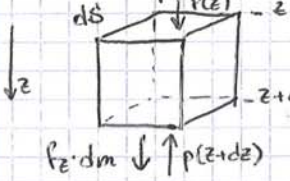
eq ↑: $F_c = F_a \cos\vartheta$
eq →: $F_b = F_a \sin\vartheta$

con forze di V: $dV = o(dS)$

$$\left.\begin{aligned} F_a &= p_a \cdot a \cdot h \\ F_b &= p_b \cdot b \cdot h \\ F_c &= p_c \cdot c \cdot h \\ c &= a\cos\vartheta \\ b &= a\sin\vartheta \end{aligned}\right\} \Rightarrow p_a = p_b = p_c \quad \text{c.v.d.}$$

In equilibrio la p su tutti gli elementi di superficie che passano per uno stesso punto è la stessa ∀ orientazione.

Variazione p in un fluido in quiete in funzione della posizione:



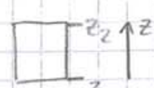
$$\begin{cases} F_p + F_V = 0 \Rightarrow \\ f_z\,dm = f_z\,\rho\,dV \end{cases}$$

eq ↑: $p(z)dS - p(z+dz)dS + f_z\rho\,dV = 0 \Rightarrow dS\left[p(z) - \left(p(z) + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right)\right] + f_z\rho\,dV = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial z}\underbrace{dz\,dS}_{dV} + f_z\rho\,dV = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = f_z\,\rho$

Analogamente per x e y. Sinteticamente: $\boxed{\nabla p = \rho f}$

↓ en. potenziale ⇒ ↑ p



Applichiamo a forza peso: $\begin{cases} f_z = -g \\ f_x = f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\rho g \overset{\int}{\Rightarrow} p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1)$ ⇒ p aumenta con profondità.

$p_2 < p_1$, <0, >0

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA: il contenuto energetico di un sistema varia nel tempo in funzione dell'en. in transito attraverso la superficie (potenza scambiata). ②

Sistemi aperti:

$$\frac{dU_v}{dt} = \sum_i \dot m_{in,i} U_{in,i} - \sum_s \dot m_{out,s} U_{out,s} + \underbrace{\dot Q + \dot L}$$

potenze entranti: meccaniche (lavoro) e termiche (calore)

Con:

$$U = \underbrace{u}_{\text{en. int.}} + \underbrace{\tfrac{1}{2} w^2}_{\text{en. cin.}} + \underbrace{gz}_{\text{en. pot. gravitazionale}} + \sum_i \varphi_{altre} \rightarrow \text{contenuto energetico dell'unità di massa.}$$

trascuriamo

Hp: condizioni stazionarie $\Rightarrow dU_v/dt = 0$
1 in e 1 out $\Rightarrow \dot m_{in} = \dot m_{out} = \dot m$

Si ha: $\dot m (u_1 + gz_1 + \frac{1}{2} w_1^2) - \dot m (u_2 + gz_2 + \frac{1}{2} w_2^2) + \dot Q + \dot L = 0 \xrightarrow{\frac{1}{\dot m}} (u_1 + gz_1 + \frac{1}{2} w_1^2) - (u_2 + gz_2 + \frac{1}{2} w_2^2) + Q + L = 0$

Si ha: $L = L_p + L_m$

$$\left.\begin{cases} \dot L_p = pA \cdot w = p\dot V = \dot m p v \quad \Rightarrow L_p = pv \\ v = 1/\rho \end{cases}\right\} \Rightarrow L_{12} = L_{p_{12}} + L_{m_{12}} = p_1 v_1 - p_2 v_2 + L_{m_{12}}$$

Fluido incomprimibile: $v_1 = v_2 = v \quad (v = cost)$

$$(u_1 + p_1 v + gz_1 + \tfrac{1}{2} w_1^2) - (u_2 + p_2 v + gz_2 + \tfrac{1}{2} w_2^2) + Q_{12} + L_{m_{12}} = 0$$

Per il II principio della termodinamica:

$$dS = \frac{du + p\,dv^{\,0}}{t} \Rightarrow \int_1^2 t\,dS = u_2 - u_1 = Q_{12} + LW \Rightarrow Q_{12} = u_2 - u_1 - LW \rightarrow \text{lavoro resistenze passive}$$

Da cui:

$$(\cancel{u_1} + gz_1 + p_1 v + \tfrac{1}{2} w_1^2) - (\cancel{u_2} + gz_2 + p_2 v + \tfrac{1}{2} w_2^2) + \cancel{u_2} - \cancel{u_1} - LW_{12} + \underbrace{L_{m_{12}}}_{\to 0} = 0$$

$\to 0$ (no organi meccanici in movimento)

$$\xrightarrow{\frac{1}{v} = \rho} (p_1 + \rho g z_1 + \tfrac{1}{2} \rho w_1^2) - (p_2 + \rho g z_2 + \tfrac{1}{2} \rho w_2^2) - \Delta p_R = 0$$

No dissipazioni: $\Rightarrow \Delta p_R = 0$

$$\boxed{(p_2 - p_1) + \tfrac{1}{2}\rho (w_2^2 - w_1^2) + \rho g (z_2 - z_1) = 0} \rightarrow \text{EQ. DI BERNOULLI}$$

In termini di p: $p + \frac{1}{2}\rho w^2 + \rho g z = cost$ (p statica + p dinamica + p geodetica = cost)

In termini di quota: $\frac{p}{\rho g} + \frac{1}{2g} w^2 + z = cost$ (h piezometrica + h dinamica + h geodetica = cost)

LEGGE DI TORRICELLI: $w_2 = \sqrt{2gh}$ (vel di uscita da un serbatoio)

CIRCUITI IDRAULICI

Da Bernoulli:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(z_1 - z_2) + \frac{1}{2}(w_1^2 - w_2^2) + L_m - LW = 0$$

Se non c'è dissipazione:

$$\boxed{L_m = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}(w_2^2 - w_1^2) = g \cdot H} \rightarrow \text{PREVALENZA: lavoro ideale scambiato tra macchina e fluido}$$

Le perdite che il fluido subisce nell'attraversamento dell'impianto sono di 2 tipi:

- perdite concentrate: dovute a brusche variazioni di geometria.

$$\boxed{\Delta p_{f\,conc} = \sum \xi \frac{v^2}{2g}} \qquad \xi \rightarrow \text{coeff. di perdita localizzata (ottenuto sperimentalmente)}$$

- perdite distribuite: dovute ad attrito.

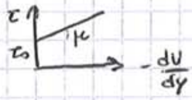
$$\boxed{\Delta p_{f\,distr} = \lambda \frac{v^2}{2g} \frac{L}{D}} \qquad \lambda = f\left(Re, \frac{\varepsilon}{D}\right) \rightarrow \text{coeff. d'attrito}$$

Le perdite distribuite dipendono dal regime di moto:
- LAMINARE
- TRANSIZIONALE
- TURBOLENTO

$$\boxed{Re = \frac{\rho v D}{\mu}} \rightarrow \text{numero di Reynolds. Adimensionale}$$

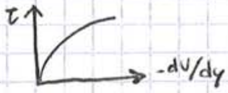
Comportamenti dei Fluidi:

- **Fluidi alla Bingham:**



$$\begin{cases} \frac{dv}{dy} = 0 & \text{se } |\tau| < \tau_0 \\ \frac{dv}{dy} \neq 0 & \text{se } |\tau| > \tau_0 \end{cases}$$

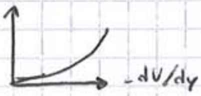
- **Fluidi pseudoplastici:**



$$\tau_{xy} = -\mu \left|\frac{dv_x}{dy}\right|^{n-1} \frac{dv_x}{dy} \qquad \text{con } n < 1$$

$\uparrow dv_x/dy \Rightarrow \downarrow \mu$ (shear thinning)

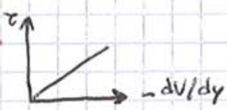
- **Fluidi dilatanti:**



$$\tau_{xy} = -\mu \left|\frac{dv_x}{dy}\right|^{n-1} \frac{dv_x}{dy} \qquad \text{con } n > 1$$

$\uparrow dv_x/dy \Rightarrow \uparrow \mu$ (shear thickening)

- **Fluidi newtoniani:**



$$\tau_{xy} = -\mu \frac{dv_x}{dy}$$

BILANCIO DI MASSA = EQ. DI CONTINUITÀ

Approccio fluidodinamico. Sistema aperto.

$$\begin{Bmatrix} \text{vel di accumulo} \\ \text{della materia} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v \text{ in} \\ \text{materia} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} v \text{ out} \\ \text{materia} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx\,dy\,dz \frac{\partial \rho}{\partial t} = dy\,dz\left(\rho v_x|_x - \rho v_x|_{x+dx}\right) + dx\,dz\left(\rho v_y|_y - \rho v_y|_{y+dy}\right) + dx\,dy\left(\rho v_z|_z - \rho v_z|_{z+dz}\right) \xrightarrow{\div V,\ \lim_{dV \to 0}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} - \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} - \frac{\partial \rho v_z}{\partial z}$$

Fluido incomprimibile ($\partial \rho = 0$) $\Rightarrow \rho\left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right] = 0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{v} = 0}$

BILANCIO DI Q.D.M.

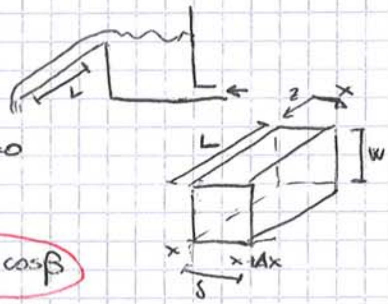
Sistema aperto.

FLUSSO DI Q.D.M.

$$\begin{Bmatrix} v \text{ di accumulo} \\ q.d.m. \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v \text{ in} \\ q.d.m. \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} v \text{ out} \\ q.d.m. \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Sigma\, F_{ext} \\ \text{agenti} \end{Bmatrix}$$

↳ 0 in regime stazionario

Approccio meccanico: si fa un bilancio di forze.



$$\cancel{w\,\Delta x\,\rho\,v_z^2\big|_{z=0}} - \cancel{w\,\Delta x\,\rho\,v_z^2\big|_{z=L}} + \tau_{xz}\big|_x L w - \tau_{xz}\big|_{x+\Delta x} L w + L w \Delta x\,\rho g \cos\beta = 0$$

$v(0) = v(L)$

$$\xrightarrow{\div \Delta x,\ \lim_{dx \to 0}} \rho g \cos\beta = \frac{d(\tau_{xz})}{dx} \xrightarrow{\int_x} \begin{cases} \tau_{xz} = \rho g x \cos\beta + C_1 \\ BC1: \tau(x=0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \tau_{xz} = \rho g x \cos\beta$$

Fluido newtoniano: $\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z}{dx}$

$$\Rightarrow -\mu\frac{dv_z}{dx} = \rho g x \cos\beta \xrightarrow{\int} \begin{cases} v_z(x) = -\frac{\rho g}{2\mu} x^2 \cos\beta + C_2 \\ BC2: v_z(x=\delta) = 0 \end{cases} \Rightarrow v_z(x) = \frac{\rho g}{2\mu} \cos\beta\, \delta^2 \left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right]$$

Velocità massima:

$$v_{MAX} = \frac{\rho g}{2\mu}\delta^2 \cos\beta = v(x=0)$$

Velocità media:

$$\overline{v_z} = \frac{\int_0^w \int_0^\delta v_z\,dx\,dy}{\int_0^w \int_0^\delta dx\,dy} = \frac{\rho g}{3\mu}\delta^2 \cos\beta$$

Portata volumetrica:

$$\dot{V} = \int_0^w \int_0^\delta v_z\,dx\,dy = w\frac{\rho g \delta^3}{3\mu}\cos\beta$$

$$\dot{M} = \rho \dot{V}$$

EQ. DI NAVIER-STOKES (vettoriale).

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v}}$$

Dove:
$$\underbrace{\rho \frac{\partial v_x}{\partial t}}_{\text{Forze inerziali di tensione}} + \underbrace{\rho\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)}_{\text{Forze convettive}} = \underbrace{\rho g_x}_{\text{Forze di gravità}} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{Forze di pressione}} + \underbrace{\mu\left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right]}_{\text{Forze viscose}}$$

EQ. DI NAVIER-STOKES ADIMENSIONALIZZATA

Hp: $\rho g_x = 0$

Si definiscono le seguenti variabili adimensionali:

- $x' = \frac{x}{L}$; $y' = \frac{y}{L}$; $z' = \frac{z}{L}$ — $L \rightarrow$ lunghezza caratteristica (cilindro $\Rightarrow$ diametro)
- $v_x' = \frac{v_x}{|v|}$ — $|v| \rightarrow$ vel media nella sezione
- $p' = \frac{p}{\rho |v|^2}$ — $\rho |v|^2 \rightarrow p$ dinamica
- $t' = t\omega$ — $\omega \rightarrow$ frequenza angolare $= 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

Si sostituisce in eq. di Navier-Stokes:

$$\rho |v| \omega \frac{Dv'_x}{Dt'} = -\rho \frac{|v|^2}{L} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \mu \frac{|v|}{L^2}\left[\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial z'^2}\right] \xrightarrow{\rho |v|^2 / L}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{L\omega}{|v|}\right)}_{\frac{\alpha^2}{Re}} \frac{Dv'_x}{Dt'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \underbrace{\left(\frac{\mu}{\rho |v| L}\right)}_{\frac{1}{Re}}\left[\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial z'^2}\right] \Rightarrow$$

con α^2 e Re adimensionali

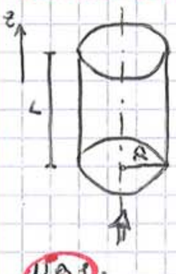
$$\Rightarrow \boxed{\frac{\alpha^2}{Re} \frac{Dv'_x}{Dt'} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial z'^2}\right]}$$

Similarità dinamica: 2 moti molto differenti in geometrie simili che hanno stesso α^2 e stesso Re hanno stessa soluzione dell'eq. di Navier-Stokes.

$$\alpha^2 = \frac{\omega \rho L^2}{\mu} = \frac{F \text{ inerziali transitorie}}{F \text{ viscose}} \rightarrow \text{numero di Womersley}$$

$$Re = \frac{\rho |v| L}{\mu} = \frac{F \text{ inerziali convettive}}{F \text{ viscose}} \rightarrow \text{numero di Reynolds}$$

EQ. DI POISEUILLE



$$\frac{\Delta p}{L} = \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right] \Rightarrow v_z(r) = \frac{\overset{P_0 - P_L}{\Delta p} R^2}{4\mu L}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

Portata volumica:

$$Q = \int_0^R 2\pi r\, v_z(r)\, dr = \frac{\pi R^4}{8\mu L}\Delta p \Rightarrow \boxed{\Delta p = \frac{8\mu L}{\pi R^4} Q} \rightarrow \text{eq. di Poiseuille}$$

N.B. 1:
$$\bar{v} = \frac{1}{2} v_{max} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{\Delta p R^2}{8\mu L} \Rightarrow v_{max} = \frac{\Delta p R^2}{4\mu L}$$

N.B. 2: analogia idraulico-elettrica: $\Delta p = \mathcal{R} \cdot Q$

N.B. 3: Ambito di validità legge di Poiseuille:

- stazionarietà
- fluido newtoniano
- moto laminare
- condotto cilindrico, assialsimmetrico, a sezione costante
- velocità nulla alla parete
- moto sviluppato
- parete rigida

MOTO TURBOLENTO

5

È un fenomeno simile alla diffusione di un liquido in un altro; è caratterizzato da un moto disordinato, completamente 3D e non stazionario e da delle fluttuazioni di velocità con caratteristiche non deterministiche.

regime di flusso turbolento:
- basso momento diffusivo
- alto momento convettivo
- rapide variazioni spaziotemporali di ρ e v

Lorentz ha dimostrato che alcuni sistemi non lineari possono avere una tale sensibilità alle condizioni iniziali che perturbazioni inapprezzabili nei parametri di partenza determinano rapidamente soluzioni diverse $\Rightarrow$ si possono adattare le eq. di Navier-Stokes (deterministiche) per descrivere la turbolenza (statistica).
Parametri iniziali eq. di Navier-Stokes:
- campo di v
- ρ
- geometria condotto
- distribuzione iniziale di T
- presenza di impurità, rifinitura superficiale tubo

} non possono essere controllati in modo preciso $\Rightarrow$ dinamica non deterministica

La turbolenza è una cascata di strutture (eddies) che va dalle più grandi alle più piccole, in corrispondenza delle quali si dissipa l'energia. Δp fornisce energia solo al moto medio.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{predominano } F \text{ inerziali} \Rightarrow \text{en. trasferita} \\ F \text{ comparabili} \Rightarrow \text{en. dissipata}\end{array}}$$

Eq. di Navier-Stokes (si trascura la gravità):

$$\begin{cases}\rho \dfrac{Dv}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \tau] \\ \nabla v = 0\end{cases} \qquad \text{con: } \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \underbrace{[\nabla v \cdot v]}_{}$$

↳ accelerazione convettiva: termine non lineare

Si scrivono p e v in un punto i come somma di valor medio e fluttuazioni:

$$v_i = \bar{v}_i + v_i' \qquad p = \bar{p} + p'$$

Se il fenomeno è stazionario in senso debole:

$$\bar{v}_i = \frac{1}{t_0}\int_t^{t+t_0} v\, dt \quad ; \quad \frac{1}{t_0}\int_t^{t+t_0} v_i'\, dt = 0 \Rightarrow \bar{v}_i' = 0 \quad ; \quad \frac{1}{t_0}\int_t^{t+t_0} v_i'^2\, dt \neq 0 \quad \text{(varianza)}$$

Si sostituisce nell'eq. di continuità:

$$\nabla v = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\bar{v}_x + v_x') + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v}_y + v_y') + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{v}_z + v_z') = 0 \overset{\int_T}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_T \bar{v}_x dt + \cancel{\int_T v_x' dt}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_T \bar{v}_y dt + \cancel{\int_T v_y' dt}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\int_T \bar{v}_z dt + \cancel{\int_T v_z' dt}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + T\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + T\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0$$

Eq. di Navier-Stokes lungo x (per le altre direzioni si procede in modo analogo):

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}(\bar{v}_x + v_x') + \frac{\partial(\bar{p}_x + p_x')}{\partial x} + \rho\left[\frac{\partial}{\partial x}(\bar{v}_x + v_x')(\bar{v}_x + v_x') + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v}_y + v_y')(\bar{v}_x + v_x') + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{v}_z + v_z')(\bar{v}_x + v_x')\right] = \mu\nabla^2(\bar{v}_x + v_x') \overset{\int_T}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \rho\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\rho\overline{v_x}\,\overline{v_x} + \frac{\partial}{\partial y}\rho\overline{v_y}\,\overline{v_x} + \frac{\partial}{\partial z}\rho\overline{v_z}\,\overline{v_x}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\rho\overline{v_x'v_x'} + \frac{\partial}{\partial y}\rho\overline{v_y'v_x'} + \frac{\partial}{\partial z}\rho\overline{v_z'v_x'}\right) + \mu\nabla^2\bar{v}_x$$

Tensore di Reynolds: dipende solo dalle fluttuazioni:

$$T = \rho\overline{v_i'v_j'} = \rho\begin{bmatrix}\overline{v_x'^2} & \overline{v_x'v_y'} & \overline{v_x'v_z'} \\ \overline{v_x'v_y'} & \overline{v_y'^2} & \overline{v_y'v_z'} \\ \overline{v_x'v_z'} & \overline{v_y'v_z'} & \overline{v_z'^2}\end{bmatrix}$$

Si introduce: $\tau_{ij} = \tau_{ij}^{(L)} + \tau_{ij}^{(t)}$

$\tau_{ij}^{(L)}$: sforzi viscosi medi; $\tau_{ij}^{(t)}$: tensore di Reynolds

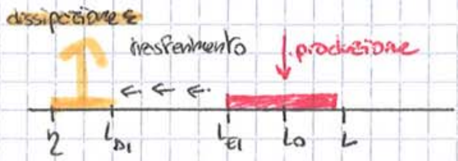
$$\Rightarrow \boxed{\rho\frac{D\bar{v}}{Dt} = -\nabla\bar{p} - [\nabla\tau^{(L)}] - [\nabla\tau^{(t)}]}$$

↳ eq. di Navier-Stokes in forma vettoriale

Con: $\dfrac{D\bar{v}}{Dt} = \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial t} + [\nabla\bar{v}\cdot\bar{v}]$

scala del moto → scala integrale → range inerziale → scala di Kolmogorov

⑥



scala integrale → energy containing range
microscala di Taylor → inertial subrange
scala di Kolmogorov → dissipation range

numero d'onda: $k = \frac{2\pi}{L}$

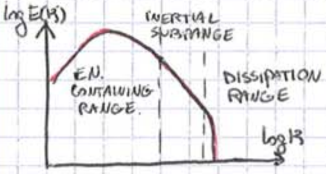
Lo spettro di energia $E(k)$ è l'energia contenuta negli eddies di dimensione l e n° d'onda $k = 2\pi/l$.
Energia cinetica contenuta negli eddies con n° d'onda tra k_A e k_B:

$$K_{(k_A,k_B)} = \int_{k_A}^{k_B} E(k)\, dk$$

Analisi dimensionale: $[K] = m^2/s^2$ $\quad [k] = 1/m$ $\quad [\varepsilon^{2/3} \cdot k^{-5/3}] = m^3/s^2$

$[\varepsilon] = m^2/s^3$ $\quad [E(k)] = m^3/s^2$

Da cui: $E(k) \propto \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \Rightarrow E(k) = C \cdot \varepsilon^{2/3} \cdot k^{-5/3}$ con $C = 1{,}5$ (sperimentalmente)



$$\boxed{E(k) = C \cdot \varepsilon^{2/3} \cdot k^{-5/3} \cdot f_L \cdot f_\eta}$$

Con f_L e f_η compresi tra 0 e 1.

Slope del subrange inerziale pari a -5/3 ⇒ turbolenza isotropa.
Per la teo di Kolmogorov, $E(k)$ è uguale per tutte le turbolenze isotrope con stesso Re_L.

Maggiore è Re_L ⇒ prima l'en. comincia a decadere.

APPLICAZIONI EMODINAMICA

Il wall shear stress influenza morfologia e orientamento delle cell endoteliali nei vasi.
Flusso disturbato ⇒ wss bassi e oscillatori ⇒ strato di cell non orientato ⇒ formazione placche

$$\boxed{TAWSS = \frac{1}{T}\int_0^T |wss(s,t)|\, dt}$$

→ valor medio di wss nel tempo.
TAWSS < 0,4 Pa ⇒ patologia
TAWSS > 1,5 Pa ⇒ sano
TAWSS > 10-15 Pa ⇒ traumi all'endotelio

$$\boxed{OSI = \left(1 - \frac{\left|\int_0^T wss(s,t)\,dt\right|}{\int_0^T |wss(s,t)|\,dt}\right) \cdot 0{,}5}$$

→ oscillatory shear index: $0 \le OSI \le 0{,}5$
OSI basso ⇒ sano
OSI alto ⇒ patologico

$$\boxed{RRT = \frac{1}{(1 - 2 \cdot OSI) \cdot TAWSS} = \frac{T}{\left|\int_0^T wss(s,t)\,dt\right|}}$$

→ relative residence time

CFD

Consente di ottenere v e p in n punti del dominio fluido. Per ottenere la soluzione numerica si devono usare metodi di discretizzazione che approssimino le eq. differenziali.
I risultati computazionali possono differire da realtà a causa di:

- eq. differenziali che descrivono fenomeno fisico sono idealizzazioni
- semplificazioni nel processo di discretizzazione
- uso di metodi iterativi

SCHEMA SU APPUNTI

Tecniche di discretizzazione → differenze finite / volumi finiti / elementi finiti

Differenze finite: sfrutta la serie di Taylor.

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \dots + \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\frac{(\Delta x)^n}{n!} + \dots \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \underbrace{\frac{f(x+\Delta x) - f_x}{\Delta x}}_{\text{differenza finita}} - \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{(\Delta x)^2}{2}\cdot\frac{1}{\Delta x} + \dots}_{\text{errore di troncamento}}$$

Si ottiene la rappresentazione di una derivata parziale come una differenza!

ERRORE DI TRONCAMENTO: differenza tra l'eq. con le derivate parziali e la sua rappresentazione con le differenze finite.

Eq. di bilancio di massa: ⑦

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x_1} dV + \int_V \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial x_2} dV = 0 \Rightarrow \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho v_1 i \cdot n dA + \int_S \rho v_2 j \cdot n dA = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\rho V - \rho^0 V}{\Delta t} + \Sigma_{nb}\, a_{p,nb}\, \rho_{nb}\, v_{nb} = 0$$

Se il fluido è incomprimibile per calcolare la p si usano i metodi di pressure-velocity coupling.
Il metodo segregated risolve le eq. di conservazione introducendo valori tentativo v_1^*, v_2^*, p^*.
Dette v_1, v_2 e p le soluzioni corrette, i metodi di p-v coupling si basano sul calcolo del fattore correttivo p':

$$p = p^* + p'$$

Consideriamo eq. di conservazione qdm in direzione 1 (trascurando termini in v_{1nb} e b_v). Per il caso corretto:

$$a_v v_1 = \sum_{e,w} a_{p,nb}\, p_{nb}$$

Caso approssimato: $a_v v_1^* = \sum_{e,w} a_{p,nb}\, p_{nb}^*$

Sottraendo:

$$v_1 - v_1^* = \frac{\sum_{e,w} a_{p,nb}}{a_v} (p_{1,nb} - p_{1,nb}^*) \Rightarrow v_1 = v_1^* + d_p\, p'$$

Su questo calcolo si basa il metodo SIMPLE:
1. si usa una p_j^* di tentativo nell'eq. di conservazione della q.d.m ($j \rightarrow j$-esimo elemento)
2. si ottengono delle v_j^*
3. si sostituisce nell'eq. della massa
4. si calcola fattore correttivo p_j' dall'eq. modificata
5. si calcola p_j per la nuova stima di v_j come: $p_j = p_j^* + \alpha_p\, p_j'$

$\alpha_p \rightarrow$ fattore di sottorilassamento

NOTA BENE: per fluidi Newtoniani

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3}(\mu - k)\nabla v \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{2}{3}(\mu - k)\nabla v \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)$$

$$\tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{2}{3}(\mu - k)\nabla v \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx} = -\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)$$

$k \rightarrow$ viscosità di massa

NOTA BENE: spinta

$$|S| = \rho g y_G A$$

Punto di applicazione: $y_{CS} = y_G + \frac{I_{xG}}{y_G \cdot A}$

Conoscendo y_G e la forma della sezione si può ricavare il centro di spinta.