NUMERO: 1475A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: De Meo

MATERIA: Fisica I. Prof.Carbone

MECCANICA
moto di un corpo

CINEMATICA
NO cause moto

DINAMICA
SÌ cause moto

- moto del PUNTO (solo massa)
- moto di un CORPO ESTESO (massa ed estensione)

  ↓

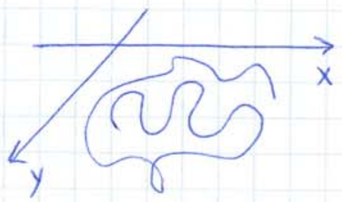
  CORPO RIGIDO
  non deformabile
  punti rigidamente vincolati
- FLUIDI

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 208

SISTEMA DI RIFERIMENTO

- Per descrivere il moto di un corpo è necessario servirsi di un SISTEMA DI RIFERIMENTO rispetto al quale definiamo la posizione e le VARIAZIONI DELLA POSIZIONE

- MOTO RETTILINEO → lungo 1 DIREZIONE
- MOTO CURVILINEO



lungo 1 PIANO
sistema di coordinate

TRAIETTORIA

- Insieme delle posizioni assunte dal corpo nel suo moto nel tempo e nello spazio (infinità di punti)
- Genericamente è una CURVA APERTA
- Quando è una CURVA CHIUSA il moto è LIMITATO, il punto percorre sempre le stesse posizioni (circonferenza pendolo)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 208

SPAZIO PERCORSO

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$dx = v(t)\,dt$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

$$[x]_{x_0}^{x} = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

$$\boxed{x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt}$$

MOTO RETTILINEO ACCELERATO

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

- l'ACCELERAZIONE MEDIA (a_m) è la rapidità con cui varia la velocità

$$a_{m1} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \qquad a_{m2} = \frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2}$$

$$\boxed{a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$ ACCELERAZIONE MEDIA (m/s^2)

$$\boxed{a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$ ACCELERAZIONE ISTANTANEA

$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = v'(t)$ derivata prima della v

$\frac{d^2x}{dt^2} = x''(t)$ derivata seconda di x

$$a = a[x(t)] = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v[x(t)]\right) = \frac{dv}{dx}\underbrace{\left(\frac{dx}{dt}\right)}_{v} = v \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\boxed{a = v \cdot \frac{dv}{dx}}$$

$a\,dx = v\,dv$

$\int_x^{x_0} a(x)\,dx = \int_{v_0}^{v} v\,dv$ $\quad a \neq cost \rightarrow$ $\boxed{\int_{x_0}^{x_0} a_m = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2}$

$a(x) = a_m = cost$

$\int_x^{x_0} a(x)\,dx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$ $\quad a = cost \rightarrow$ $\boxed{a_m(x - x_0) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2}$

• moto uniformemente accelerato

- $X(t) = X_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ $\quad$ - $a(x - x_0) = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2$
- $v(t) = v_0 + at$

• moto rettilineo uniforme

- $X(t) = X_0 + v_0 t$

MOTO RETTILINEO

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \qquad v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\, dt$$

$$a = v \cdot \frac{dv}{dx} \qquad \int_{x_0}^{x} a(x) = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2$$

∘ moto rettilineo uniforme $(v = \text{cost})$

- $X(t) = X_0 + v_0 t$

∘ moto rettilineo uniformemente accelerato $(a = \text{cost})$

- $X(t) = X_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$
- $v(t) = v_0 + at$
- $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$
- $v_m = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt$

- corpo che cade con $V_0 \neq 0$ rivolto verso il basso

$V_0 = -V_1 \qquad a = \text{cost} = -g$

1) $v(t) = -v_1 - gt$

2) $x(t) = h - v_1 t - \frac{1}{2} g t^2$

3) $v(x) = \sqrt{v_1^2 + 2g(h-x)} \qquad V_c = \sqrt{v_1^2 + 2gh}$

4) $t(x) = -\frac{v_1}{g} + \sqrt{\frac{v_1^2}{g^2} + \frac{2(h-x)}{g}} \qquad t_c = -\frac{v_1}{g} + \sqrt{\frac{v_1^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}$

$v(t) = \cancelto{-v_1}{v_0} + \cancelto{-g}{a}(t - \cancel{t_0}) = -v_1 - gt$

$x(t) = \cancelto{h}{x_0} + \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt = h + \int_{t_0}^{t} [-v_1 - gt] dt = h - v_1 t - \frac{1}{2} g t^2$

~~t da v~~

$v = -v_1 - gt$

$gt = -v_1 - v$

$t = \frac{-v_1 - v}{g}$

$x = h + v_1 \frac{(v_1 - v)}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_1 + v}{g} \right)^2$

MOTO ARMONICO SEMPLICE

moto unidimensionale che avviene ~~lungo~~ tramite una legge oraria

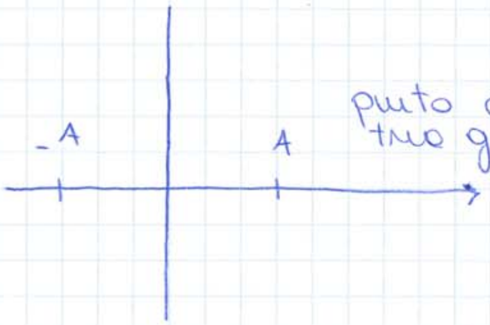
$$\boxed{x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)}$$

A = ampiezza del moto → max estensione del moto del punto (m)

ω = frequenza (1/s)

$(\omega t + \varphi)$ = fase del moto

φ : fase iniziale = t = 0 cambiare la fase equivale a ridefinire l'origine dei tempi



punto che si muove indefinitamente tra gli estremi

- $-1 < \sin(\omega t + \varphi) < 1$ il moto del punto varia tra -A ed A
è ampiezza dell'intervallo è 2A

- $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ PERIODO (s) Se si fa trascorrere un tempo T è argomento del seno vale $2\pi + \phi$, T corrisponde alla DURATA DI UN'OSSCILLAZIONE COMPLETA

- $\boxed{f = \frac{1}{T}}$ FREQUENZA (hz) Quante oscillazioni complete compie il punto in un secondo

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 208

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL MOTO ARMONICO

$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

$a(t) = - \cancel{A}\, \omega^2 \cancel{\sin}\, x(t)$

$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$ ← eq. diff. dell'oscillatore armonico

$\cancel{x''(t)}$

$\boxed{x''(t) = -\omega^2 x}$

MOTO ARMONICO ESPRESSO CON IL COSENO

$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$

$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 208

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v = -kv$$

$$\frac{dv}{dx} = -k$$

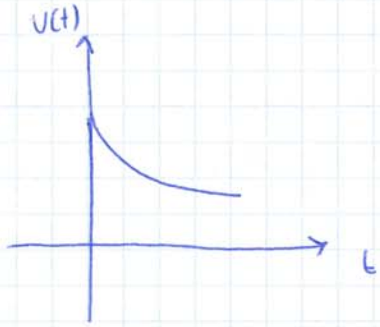
$$dv = -k\,dx$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{x_0}^{x} -k\,dx$$

$$v - v_0 = -kx$$

$$v = v_0 - kx$$

$$\boxed{v = v_0 - kx}$$



$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt}$$

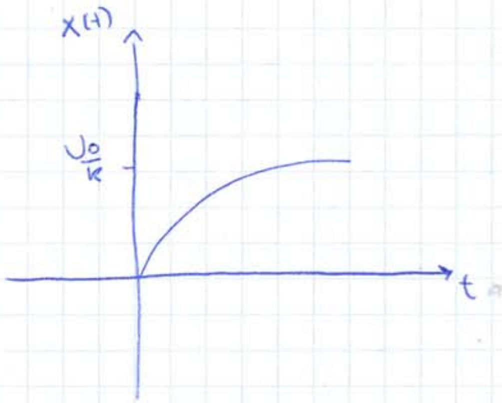
$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt}$$

$$dx = dt\, e^{-kt}$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = v_0 \int_{0}^{t} e^{-kt} dt$$

$$x - x_0 = \left[\frac{v_0}{k} e^{-k\tau} \right]_0^t$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})}$$



$$r(t) = x(t)\hat{u}_x + y(t)\hat{u}_y$$

$$v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

velocità media di un punto materiale che si muove nel piano.

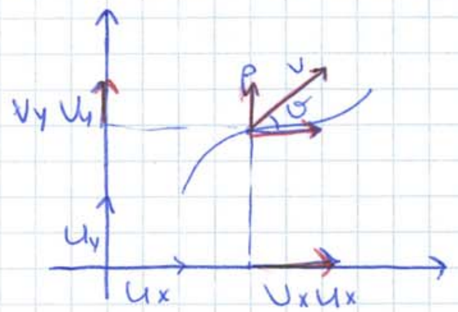
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} = r'(t)$$

velocità istantanea

COORDINATE CARTESIANE

posso considerare i versori costanti xk mi trovo nel piano cartesiano

$$r(t) = x(t)\hat{u}_x + y(t)\hat{u}_y$$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}u_y$$

$$\vec{v} = \vec{v}_x \hat{u}_x + \vec{v}_y \hat{u}_y$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

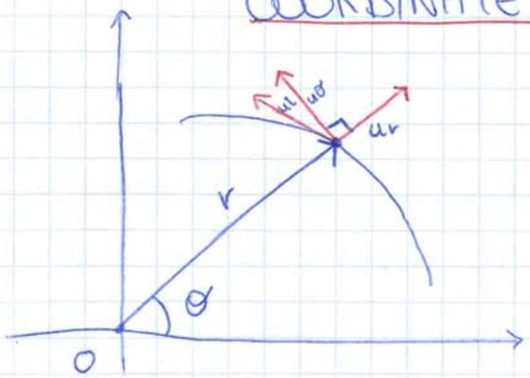
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\hat{u}_y$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\hat{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{u}_y$$

$$\vec{a} = a_x\hat{u}_x + a_y\hat{u}_y$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 208

COORDINATE POLARI



$\hat{u}_r$ = identifica la direzione di r

$\hat{u}_\theta$ = ortogonale a $\hat{u}_r$

$\hat{u}_t$ = versore tangente alla traiettoria

solo in una circonferenza:

$\hat{u}_\theta = \hat{u}_t$

$r(t) = r(t)\hat{u}_r$

il versore $\hat{u}_r$ non è costante quindi faccio la derivata del prodotto e uso la derivata del versore.

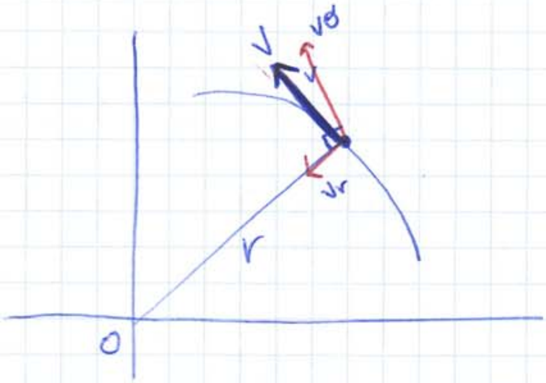
$$v = \frac{dr(t)}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\hat{u}_r}{dt}$$

$$v = \frac{dr}{dt} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta$$ ← derivata di 1 versore

velocità del punto in un sistema di coordinate polari

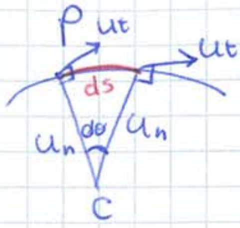
$$\boxed{v = v_r\hat{u}_r + v_\theta\hat{u}_\theta}$$

formata da 2 componenti: tangente alla curva in ogni punto



ACCELERAZIONE

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$



$$a = \frac{d(v\hat{u}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + v\frac{d\hat{u}_t}{dt} =$$

$$= \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + v\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_n$$

$$a = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + v\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_n$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}v$$

immagino la $\frac{d\theta}{dt}$ come funz composto del tempo e applico la regola di derivazione di funz. composte

V nel sistema di coordinate intrinseche

$ds = Rd\theta$

$$f[g(x)] = \frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}$$

$$\phi[s(t)] = \frac{d\phi}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + v\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_n$$

sostituisco $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}v^2$

$$= \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + \frac{v^2}{R}\hat{u}_n$$

comp

$$\boxed{a = a_t + a_n}$$

a_t = accelerazione TANGENZIALE

a_n = accelerazione CENTRIPETA

$= 0$ se la V è costante in modulo (moto circolare uniforme) ← a_t = tangente a $\hat{u}_t = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t$

agisce sul MODULO della velocità

$= 0$ se la traiettoria non è una curva. (moto rettilineo) ← a_n = tangente a $\hat{u}_n = \frac{v^2}{R}\hat{u}_n$

rappresenta la variazione di direzione

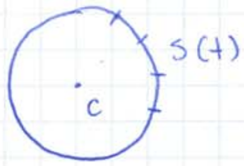
MOTO CIRCOLARE UNIFORME

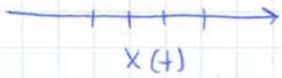
v_t = costante

$\omega(t)$ = costante

$s(t) = s_0 + vt$ → corrisponde al moto rettilineo uniforme

$x = x_0 + vt$





$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$ → cambiamento dell'angolo nel tempo costante se v è costante

$v = \text{cost} \rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$

$\Downarrow$

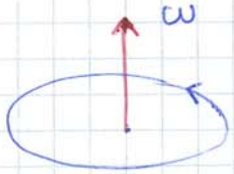
$$a = \cancel{\frac{dv}{dt}\hat{u}_t} + \frac{v^2}{R}u_n = R\cancel{\frac{d\omega}{dt}\hat{u}_t} + \frac{v^2}{R}u_n = \cancel{a_t} + a_n$$

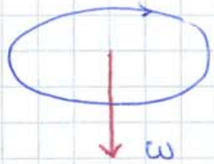
$a = a_n$ → v è cost. ma abbiamo un termine di accelerazione

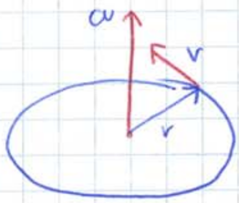
$a_n = \frac{v^2}{R}\hat{u}_n$ $\quad a_n$, perché il vettore velocità pur non cambiando in modulo sta cambiando in direzione

$T = \frac{2\pi R}{v}$ → moto periodico

Notazione vettoriale = il vettore velocità angolare è ortogonale alla circonferenza e il verso è tale che dall'estremo del vettore il moto appare antiorario







$v = \omega \times r$

$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,dt$$

$$\begin{cases} x(t) = \cancel{x(0)}^{\,0} + \int_0^t v_x(t)\,dt = \underline{(v_0 \cos\theta)t} \\ y(t) = \cancel{y(0)}^{\,0} + \int_0^t v_y(t)\,dt = \underline{(v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \dfrac{x}{v_0\cos\theta} \\ y = (\cancel{v_0}\sin\theta)\dfrac{x}{\cancel{v_0}\cos\theta} - \dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2 = x\tan\theta - \dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 \end{cases}$$

$$y = x\tan\theta - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$ ← eq. di una parabola

⇓

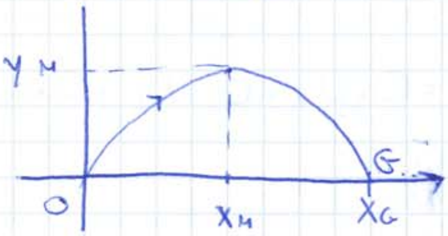
MOTO PARABOLICO

$$x_G = \frac{2v_0^2\cos\theta\sin\theta}{g}$$ ← GITTATA

⇓

max lunghezza percorsa

prendo l'eq. della parabola e la interseco con l'asse x



$$\begin{cases} x_M = \dfrac{v_0^2\cos\theta\sin\theta}{g} \rightarrow \dfrac{G}{2} \\ y_M = \dfrac{v_0^2\sin^2\theta}{2g} \end{cases}$$

DINAMICA DEL PUNTO

PRINCIPIO D'INERZIA (1° legge di Newton)

Un corpo non soggetto a forze non subisce cambiamenti di velocità, ovvero resta in uno stato di quiete se era in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme.

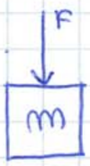
Un corpo non soggetto a forze non è necessariamente fermo! ma non ci sono variazioni di velocità ($a=0$)

La FORZA è la grandezza che esprime e misura l'interazione tra sistemi fisici

a) 

si osserva uno SPOSTAMENTO

La FORZA è caratterizzata da
INTENSITÀ
DIREZIONE
VERSO
} è una grandezza VETTORIALE!

b) 

NON si osserva uno SPOSTAMENTO (reazione vincolare

c) 

NON si osserva uno SPOSTAMENTO (forze uguali e contrarie)

~~[illegible]~~ una stessa forza applicata in punti diversi produce reazioni diverse al moto

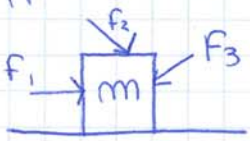
2ª legge di NEWTON

l'accelerazione che un corpo subisce quando è sottoposto a una forza F è uguale alla forza stessa / la massa m

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

$a = \frac{\vec{F}}{m}$ ← se un corpo ha una massa maggiore l'accelerazione sarà minore a parità di forza

È una relazione di tipo vettoriale
$\vec{F}$ è da intendersi come RISULTANTE di tutte le forze applicate al corpo



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{R} \qquad \vec{R} = m\vec{a}$$

l'ACCELERAZIONE avrà stessa direzione e verso di $\vec{R}$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

eq. dimensionale → $[F] = [M][L]/[T]^2$

$$F = kg\, m/s^2 = N$$

QUANTITÀ DI MOTO

p $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$ stesso direzione di $\vec{v}$
stesso verso di $\vec{v}$

qualsiasi corpo possiedo una velocità e una massa possiede una quantità di moto

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = m\frac{dv}{dt} = ma = F$$

la derivata della QUANTITÀ DI MOTO è uguale alla FORZA

$$\boxed{F = \frac{dp}{dt}}$$

$$F = \frac{dp}{dt} \quad dp = F\,dt \quad \int_{p_0}^{p} dp = \int_{p_0}^{t} F\,dt \quad p - p_0 = \int_{t_0}^{t} F\,dt$$

$$\boxed{J = \Delta p = \int_{t_0}^{t} F\,dt}$$ impulso

(teorema dell'impulso)

$\Delta p = m(V - V_0)$ massa costante

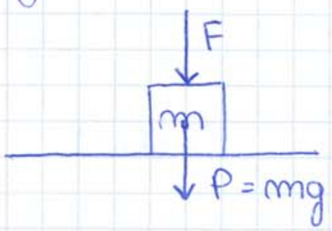
$$\left.\begin{array}{l} \Delta p = m(V - V_0) \\ \Delta p = \int_{t_0}^{t} F\,dt \rightarrow \text{se è costante} \rightarrow \Delta p = F\int_{t_0}^{t} dt = F(t - t_0) \\ m(V - V_0) = F(t - t_0) \\ V - V_0 = \frac{F(t - t_0)}{m} \quad t_0 = 0 \rightarrow V - V_0 = \frac{Ft}{m} \end{array}\right\} F \text{ cost}$$

$$F_m = \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} F\,dt = \frac{\Delta p}{t - t_0} \quad \} F \text{ non cost}$$

$$F = 0 \rightarrow \Delta p = 0 \rightarrow p \text{ è cost} \quad \} F = 0$$

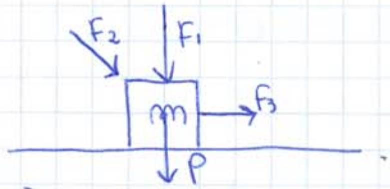
REAZIONI VINCOLARI

Se un corpo sottoposto a forze rimane in equilibrio esso deve essere soggetto a una forza con risultante nulla

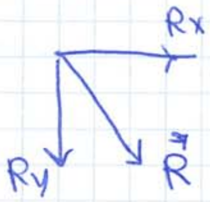


il tavolo esercita sul corpo una forza in grado di bilanciare F e P

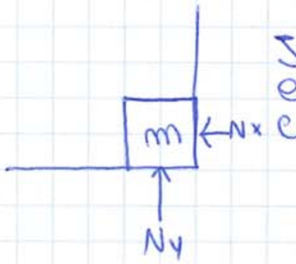
$$N = F + P$$



$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} F_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{P}$$



la REAZIONE VINCOLARE bilancia solo la componente Ry



In questo caso il corpo è in equilibrio perchè anche la componente Rx è bilanciata

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 208

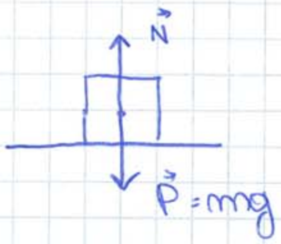
FORZA PESO

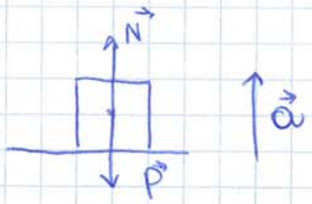
Un corpo che cade, qualunque sia la sua massa, subisce un'accelerazione di gravità $g = 9{,}81\ m/s^2$

$$F = ma \rightarrow P = ma \rightarrow P = mg$$

$$\boxed{\vec{P} = mg}$$

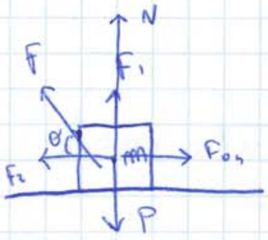
$1\,Kg_{peso} \Rightarrow 1\,Kg \cdot 9{,}8\ m/s^2 = 9{,}81\,N$





$$\vec{N} + \vec{P} = 0$$
$$\vec{N} = -\vec{P}$$

$$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$$
$$\vec{N} = -\vec{P} + m\vec{a}$$
$$\vec{N} = m(a - g)$$



$$R + P + F = 0$$
$$F_1 = F\sin\theta$$
$$F_2 = F\cos\theta$$

→ direzione verticale
$$N - P + F_1 = 0$$
$$N = P - F_1 = P - F\sin\theta$$

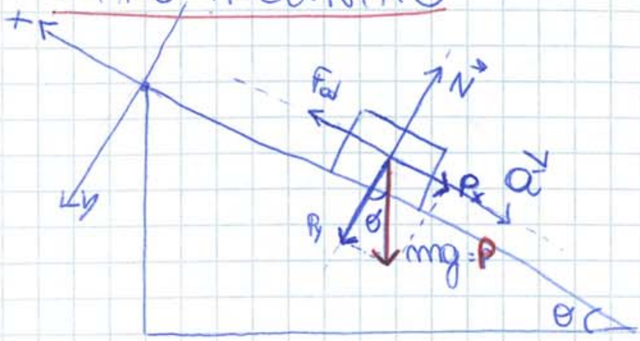
→ direzione orizzontale
$$F_{os} + F_2 = 0$$
$$F_{os} = -F_2 = -F\cos\theta$$

la condizione di appoggio del corpo è data da $N > 0$
In queste condizioni, la componente orizzontale F_{os} bilancia la F_2

$$F\cos\theta \leq \mu_s (P - F\sin\theta)$$

$$F \leq \frac{\mu_s P}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta}$$

PIANO INCLINATO



l'accelerazione determina la direzione di uno degli assi del sistema di riferimento

diagramma di corpo libero → "liberato" dai tutti i vincoli che vengono rappresentati come reazioni vincolari

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}}$$

- $\vec{P} = m\vec{g}$ forza peso $\begin{cases} P_x = P\sin\theta \\ P_y = P\cos\theta \end{cases}$
- $F_{ad} = \mu_d \sum R_y$ forza di attrito → parallela alle 2 superfici di contatto verso opposto al movimento

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\sum (F_x \hat{u}_x + F_y \hat{u}_y) = \sum m(a_x \hat{u}_x + a_y \hat{u}_y)$$

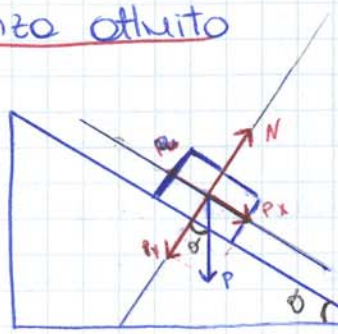
$$\begin{cases} \sum F_x \hat{u}_x = \sum m a_x \hat{u}_x \\ \sum F_y \hat{u}_y = \sum m a_y \hat{u}_y \end{cases} =$$

$$\begin{cases} \sum F_x = \sum m a_x \\ \sum F_y = \sum m a_y \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 208

PIANO INCLINATO

Senza attrito

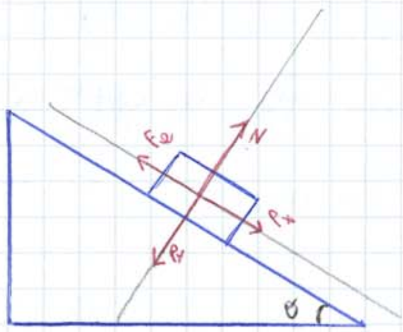


$$P = mg$$

$$\begin{cases} P_x = mg \sin\theta \\ P_y = mg \cos\theta \end{cases}$$

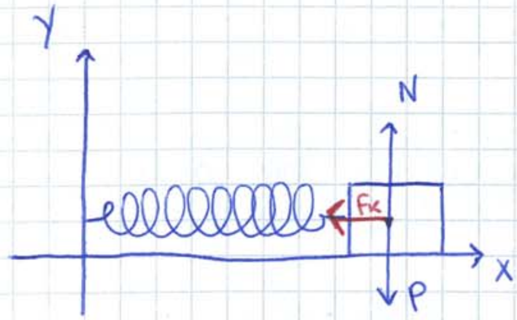
$$\begin{cases} N = mg \cos\theta \\ a = g \sin\theta \end{cases}$$

Con attrito



$$mg \sin\theta - F_a = ma$$

$$\begin{cases} \tan\theta \leq \mu_s \rightarrow \text{CORPO FERMO} \\ \tan\theta > \mu_s \rightarrow \text{CORPO IN MOTO} \end{cases}$$



$X_0 = 0$

$$\begin{cases} \sum F_x = m a_x \\ \sum F_y = m a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_K = ma \\ N - P_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -K(x - X_0) = ma \\ N = P \end{cases} \qquad X_0 \stackrel{?}{=} 0$$

$$\begin{cases} -Kx = ma \\ N = P \end{cases}$$

$$-Kx = ma$$

$$-Kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m} x$$

$$x''(t) = -\frac{K}{m} x \qquad -\frac{K}{m} = \omega^2 \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$X(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ ← moto armonico semplice

- nel punto di max allungamento o compressione $a = max$ $V = 0$
- nel punto di equilibrio $V = max$ $a = 0$

FORZE CENTRIPETE

Nel caso di un moto curvilineo l'accelerazione è un vettore formato di due componenti:

$\vec{a} = a_T \hat{u}_T + a_N \hat{u}_N$ ← coord. intrinseche

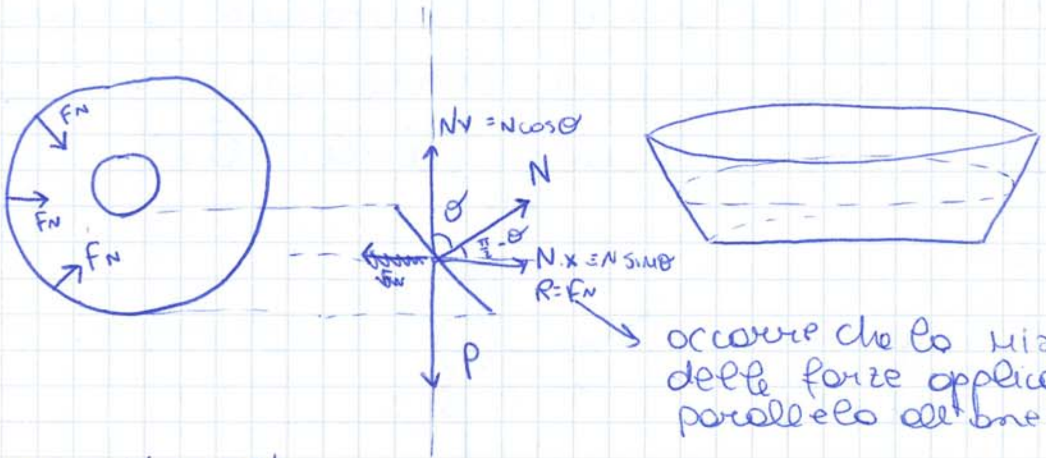
$\vec{a} = a_\theta \hat{u}_\theta + a_r \hat{u}_r$ ← coord. polari

$m\vec{a} = ma_T \hat{u}_T + ma_N \hat{u}_N$

$\vec{F} = \vec{F}_T + \vec{F}_N$

$F_N = ma_N = m\frac{v^2}{R}$

es.



occorre che la risultante R delle forze applicate sia parallela all'asse x

$$\begin{cases} mg = N\cos\theta \\ R = N\sin\theta \end{cases}$$

$N\sin\theta = F_N = m\frac{v^2}{R} \rightarrow \tan\theta = \frac{v^2}{gr}$

TANGENZIALE

$$-mg\sin\theta = ma_T$$

$$a_T = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

raggio traiettoria; accelerazione angolare

$$-mg\sin\theta = mL\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

NORMALE

$$T_F - mg\cos\theta = ma_N$$

$$a_n = \frac{v^2}{L}$$

$$m\frac{v^2}{L} = T_F - mg\cos\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

$\downarrow$ $\theta \sim 0 \Rightarrow \sin\theta \sim \theta$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!}$$

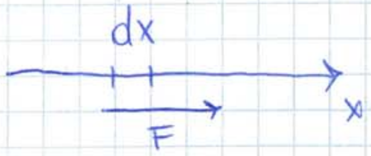
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \cong -\underbrace{\frac{g}{L}}_{\to\,\omega^2}\theta$$

$$\boxed{\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)}$$ ← legge oraria (moto armonico)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \omega_0\theta_0\cos(\omega_0 t + \phi)}$$ ← velocità angolare

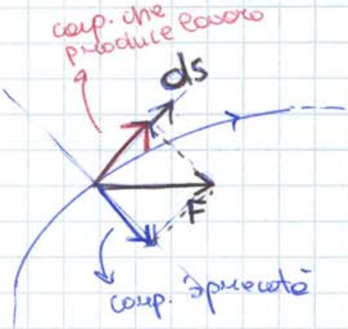
LAVORO



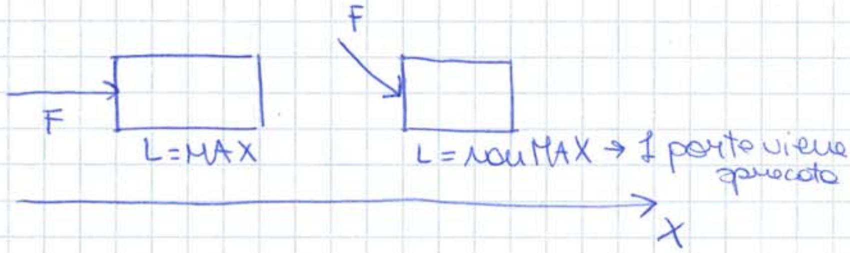
Consideriamo il caso unidimensionale in cui la forza agisce e produce uno spostamento

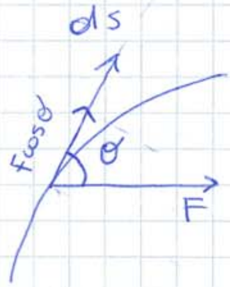
forza e spostamento PARALLELI → ~~dL~~ MAX

$$\boxed{dL = F dx}$$



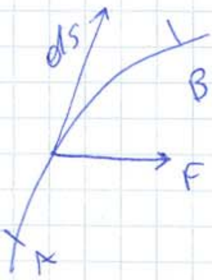
Consideriamo ora un caso NON unidimensionale
Se lavoro non è MAX, solo una componente produce lavoro





$dL = \vec{F} \cdot \vec{ds}$ prodotto scalare → vettore x la proiezione dell'altro vettore sul primo

$dL = F ds \cos\theta$



Nel caso in cui lo spazio percorso non sia infinitesimo

$$L_{A \to B} = \int_A^B F ds = \int_A^B F \cos\theta \, ds = \int_A^B F_T \, ds$$

UNITÀ DI MISURA

$[\text{lavoro}] = [F][L] = [M][L][T]^{-2}[L]$ Joule

$[\text{Potenza}] = \dfrac{[\text{lavoro}]}{[T]}$ watt

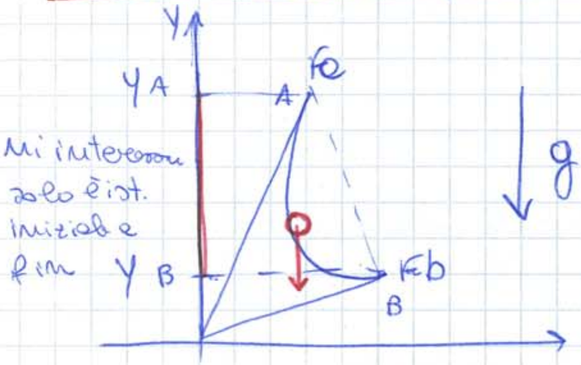
Energia cinetica e quantità di moto

$E_K = \frac{1}{2} m v^2 \qquad \vec{p} = m\vec{v}$

$E_K = \frac{p^2}{2m} \qquad \boxed{p = \sqrt{2mE_K}}$ ← modulo p

E_K è una quantità scalare

Lavoro della forza peso



$$L_{A \to B} = \int_A^B F\,ds = F\int_A^B ds =$$
$$F\,[r_B - r_A] = mg\,r_{AB}$$

ma l'unica componente non nulla della forza peso è lungo l'asse y dove la componente del vettore è data da

$y_B - y_A \qquad \vec{F} \quad \vec{s}$

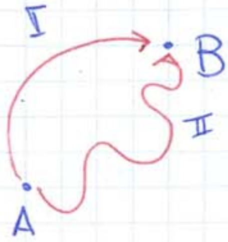
$$L_{A \to B} = -mg(y_B - y_A) =$$
$$= -(mg\,y_B - mg\,y_A)$$

$$L_{A \to B} = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p$$

$\boxed{E_p = mgy}$ E potenziale del campo gravitazionale

FORZE CONSERVATIVE

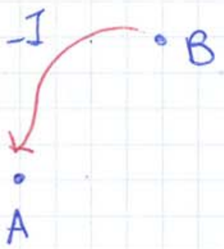
Il lavoro dipende solo dalle posizioni iniziale e finale (forza peso, elastica) e non dal particolare percorso.



$$L_{A\to B} = \int_A^B F\,ds_{II} = \int_A^B F\,ds_{I} = \int_A^B F\,ds$$

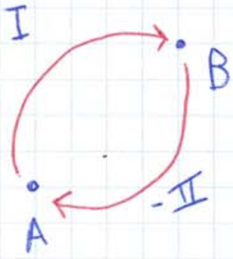
Il lavoro è indipendente dal percorso

La loro energia si conserva.
È così possibile scegliere il percorso più comodo.



Se inverto lo percorrimento si invertono gli estremi di integrazione quindi cambia il segno

$$\int_A^B F\,ds = -\int_B^A F\,ds$$



$$\int_A^B F\,ds_{I} + \int_A^B F\,ds_{-II} = \int_A^B F\,ds - \int_A^B F\,ds = 0$$

$$\Downarrow$$

lungo un qualsiasi percorso chiuso il lavoro compiuto da una qualsiasi forza conservativa è = 0

integrale di una curva chiusa → $\oint F\,ds$

FORZE NON CONSERVATIVE

Tutte le forze il cui lavoro dipende dal percorso seguito

Per esse continua a valere il teorema dell'E_c

$$L_{A \to B} = \int_A^B m v \, dv = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \Delta E_k$$

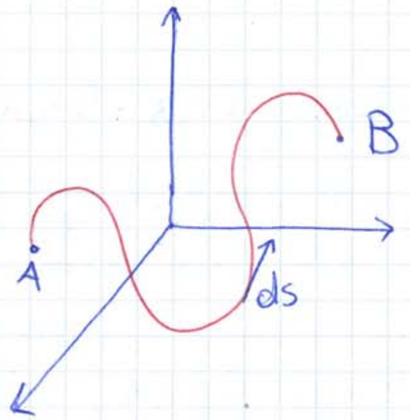
Un particolare tipo di forze non conservative sono le forze di attrito

relazione tra Ep e forza

$$dW = F \cdot ds = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = -dE_p$$

$$\oint (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) = \oint dW = 0$$

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx} \qquad F_y = -\frac{dE_p}{dy} \qquad F_z = -\frac{dE_p}{dz}$$



$ds = dx\,\hat{u}_x + dy\,\hat{u}_y + dz\,\hat{u}_z$

$\vec{F} = F_x\,\hat{u}_x + F_y\,\hat{u}_y + F_z\,\hat{u}_z$

$\downarrow F \cdot ds = dW$

$dW = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$

se la forza è CONSERVATIVA $\downarrow$ $dW = dE_p$

$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$ $f_y = -\frac{dE_p}{dy}$ $f_z = -\frac{dE_p}{dz}$ $\xleftarrow{\text{uguaglianza tra scalari}}$ $f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz = -dE_p$

$\downarrow$ se A→B è 1 percorso chiuso

$$\oint dW = 0$$

le 3 componenti della forza possono essere ottenute derivando l'Ep.

↓ forza peso

es. $E_p = -mgy$ ← energia potenziale gravitazionale

$$F_x = \frac{dE_p}{dx} = 0 \qquad F_y = \frac{dE_p}{dy} = mg \qquad F_z = \frac{dE_p}{dz} = 0$$

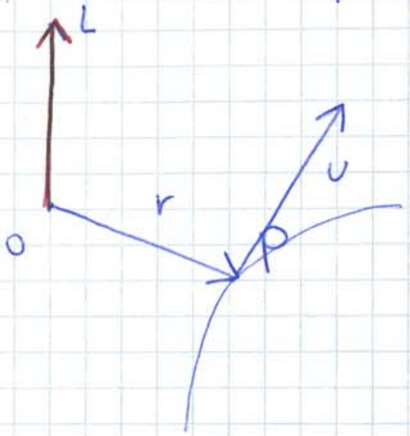
$\vec{F} = (0, mg, 0)$ ← forza peso

$\vec{P} = mg\,\hat{u}_y$ sia modulo che direzione e verso

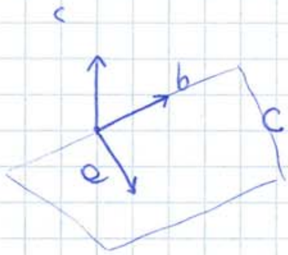
MOMENTO ANGOLARE

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$\| L \| = r p \sin\theta$$



è una grandezza VETTORIALE

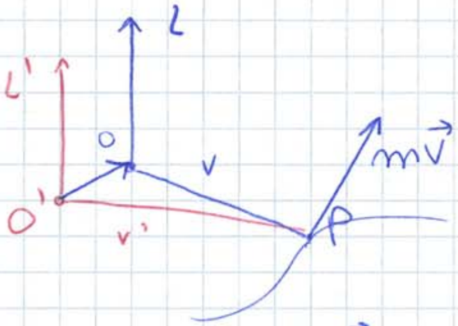


$c = a \times b$

L è un vettore ortogonale sia ad r che a p e il verso è determinato con la regola della mano destra.

$$\boxed{\vec{L}_{O'} = \vec{L}_O + \overrightarrow{OO} \times m\vec{v}}$$

Nel



$L = \vec{r} \times m\vec{v}$

$L' = \vec{r}\,' \times m\vec{v}$

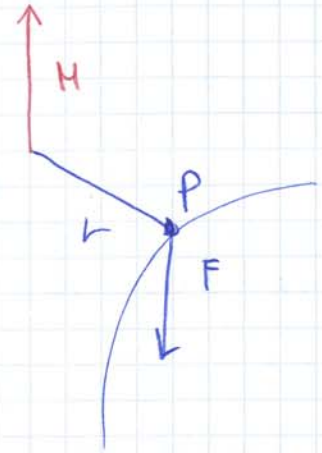
$r' = v + OO'$

$L' = (r + OO') \times OO'$

$L' = v \times mv + OO' \times mv$

$L' = \vec{L} + OO' \times m\vec{v}$

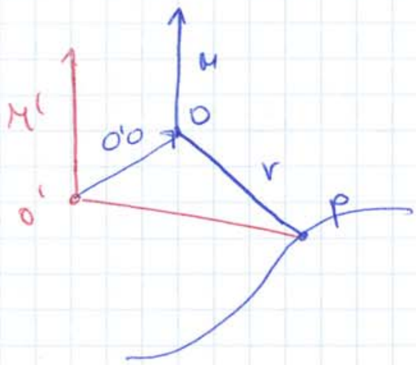
MOMENTO DELLA FORZA



$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

$\|M\| = r F \sin\theta$

è una grandezza VETTORIALE



$$M_{O'} = M_O + O'O \times F$$

$M = r \times F$

$M' = r' \times F$

$r' = r + r_{OO'}$

$M = (r + r_{OO'}) \times F$

$M' = r \times F + r_{OO'} \times F$

Se al punto sono applicate più forze

$M = r \times F_1 + r \times F_2 + \ldots + r \times F_m$

$\vec{M} = r \times (F_1 + F_2 + \ldots + F_m) = \vec{r} \times \vec{R}$

$$\frac{dL}{dt} = M$$

$$dL = M\,dt \Rightarrow L_f - L_i = \int_0^t M\,dt$$

teorema del momento dell'impulso

r = cost → consideriamo il polo fisso

$$\int_0^t M\,dt = \int_0^t (r \times F)\,dt = r \times \int_0^t F\,dt = r \times J$$

$$\boxed{r \times J = \Delta L}$$

la variazione di momento angolare è uguale al momento dell'impulso applicato al punto

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right)$$

↓

accelerazione del treno

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}u_x + \frac{dy}{dt}u_y + \frac{dz}{dt}u_z \leftarrow$$ v assoluta

$$v' = \frac{dx'}{dt}u_{x'} + \frac{dy'}{dt}u_{y'} + \frac{dz'}{dt}u_{z'} \leftarrow$$ v. relativa

$$v_{O'} = \frac{dOO'}{dt} = \frac{dx_{O'}}{dt}u_x + \frac{dy_{O'}}{dt}u_y + \frac{dz_{O'}}{dt}u_z \rightarrow$$ velocità di O' nel sistema Oxy

(abbandono l'ipotesi che i due sist. di riferimento si muovano solo di moto traslatorio

$$r = \vec{OO'} + r'$$

$$v = \frac{dr}{dt} = \underbrace{\frac{dOO'}{dt}}_{v_{O'}} + \frac{dr'}{dt}$$

fai finta che questo non ci sia!

$$\boxed{v = \frac{dr}{dt}} = \overbrace{\boxed{\frac{dx_{O'}}{dt}u_x + \frac{dy_{O'}}{dt}u_y} + \boxed{\frac{dz_{O'}}{dt}u_z}}^{v_{O'}} + \overbrace{\boxed{\frac{dx'}{dt}u_{x'} + \frac{dy'}{dt}u_{y'}} + \frac{dz'}{dt}u_{z'}}^{v'}$$

$$+ x'\frac{du_{x'}}{dt} + y'\frac{du_{y'}}{dt} + z'\frac{du_{z'}}{dt} \leftarrow$$ considero anche le derivate dei versori perché non sono più costanti nel tempo

↓

perché considero la velocità relativa rispetto al sist. di riferimento fisso Oxy

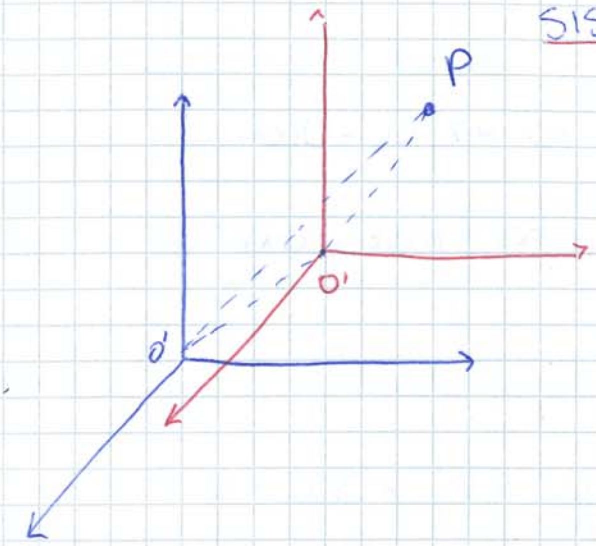
$$v = v_{O'} + v' + x'\frac{du_{x'}}{dt} + y'\frac{du_{y'}}{dt} + z'\frac{du_{z'}}{dt}$$

$$\frac{du_{x'}}{dt} = \omega \times u_{x'} \qquad \frac{du_{y'}}{dt} = \omega \times u_{y'} \qquad \frac{du_{z'}}{dt} = \omega \times u_{z'}$$

$$v = v_{O'} + v' + \omega \times (x'u_{x'} + y'u_{y'} + z'u_{z'})$$

$$\boxed{v = v_{O'} + v' + \omega \times r'}$$

SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI



$$\begin{cases} r = \overrightarrow{OO'} + r' \\ v = v_{OO'} + v' \\ a = a_{OO'} + a' \end{cases}$$

Osserviamo che se $v_{OO'} \neq cost$ avremo $a_{OO'} = a' = a - a_{OO'}$

$$F' = ma' = m(a - a_{OO'}) = F - m a_{OO'}$$

forza "apparente" dovuta all'accelerazione del sist. mobile

$$F_{in} = m a_{OO'}$$

L'osservatore su O' osserverà una forza differente, addirittura nel caso in cui per O $F = 0$
Sarà per O' $F' \neq 0$

Un sistema in cui vale il principio di inerzia è detto INERZIALE → non si muove di moto accelerato rispetto al primo

MOTO DELLA TERRA

$$g_0 = g + \omega \times (\omega + R') + 2\omega \times v'$$

accelerazione di gravità per un sistema inerziale

Accelerazione di gravità rispetto a un sistema terrestre

velocità di un oggetto rispetto al sistema terrestre

$$g = g_0 - \omega \times (\omega \times R') - 2\omega \times v'$$

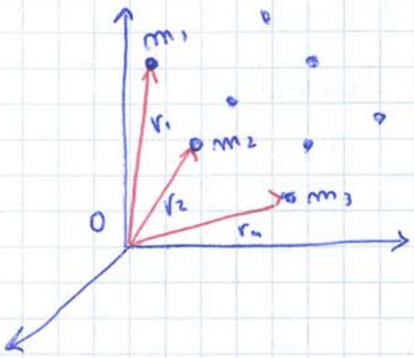
forza centrifuga

forza di Coriolis

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 208

grandezze caratteristiche del sistema di punti

n p.ti materiali di massa → $m_1 .. m_2 ... m_n$
posizioni → $r_1, r_2 ... r_n$
velocità → $v_1, v_2 ... v_n$
accelerazioni → $a_1, a_2 ... a_n$



Vale il 2° principio di Newton per ogni massa

risultante forze

$\boxed{a_i = \frac{F_i}{m_i}}$ → accelerazione

$\boxed{p = m_i v_i}$ → quantità di moto

$\boxed{L_i = r_i \times m_i v_i}$ → momento angolare

$\boxed{E_{k_i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2}$ → energia cinetica

$$P = \sum_i p_i = \sum_i m_i v_i$$

$$L = \sum_i L_i = \sum_i r_i \times m_i v_i$$

$$E_K = \sum E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

→ per il sistema complessivo

Velocità del centro di massa

Le particelle sono in moto continuo quindi la posizione del centro di massa cambia continuamente muovendosi con una velocità V_{cm}

$$\boxed{r_{cm} = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}}$$

velocità dei singoli p.t.

quantità di moto tot del sist.

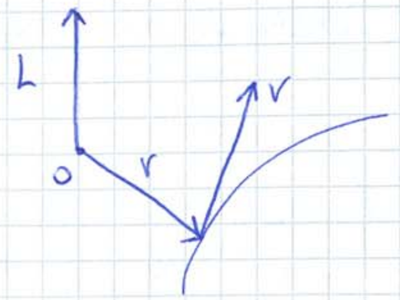
$$V_{cm} = \frac{dr_{cm}}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{dr_i}{dt}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i v_i}{\sum m_i} = \frac{P}{\sum m_i}$$

$$\boxed{V_{cm} = \frac{P_{cm}}{\sum m_i}}$$

$$P = \sum m_i v_{cm} = \underset{\text{massa del sistema}}{m}\, V_{cm}$$

La quantità di moto totale P del sistema coincide con la quantità di moto del centro di massa.

TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE



$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} r \times mv = \frac{dr}{dt} \times mv + r \times m\frac{dv}{dt} =$$

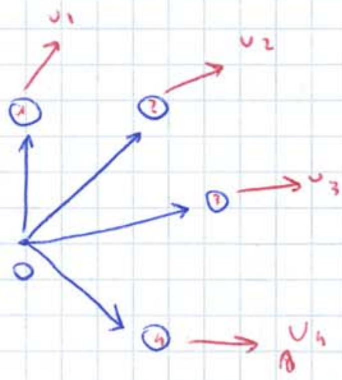
$$v \times mv + r \times ma = r \times F = M$$

la derivata temporale del momento angolare è uguale al momento della forza se entrambi i momenti sono riferiti allo stesso polo di un sist. fisso.

Se la forza è nulla o forza e vettori sono paralleli

$$\frac{dL}{dt} = 0 \Rightarrow L = cost.$$

CENTRO DI MASSA → momento angolare



Se ogni particella ha una massa m_i e una velocità v_i quindi possiamo definirne il momento angolare

$$L_i = r_i \times m_i v_i$$

$$\sum_i r_i \times m_i v_i = \sum L_i = L$$

derivo...

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i L_i = \frac{d}{dt} \sum_i r_i \times m_i v_i$$

xk i poli coincidono ↑ v_i | ↑ 0 vettori paralleli

$$\frac{d}{dt} \sum r_i \times m_i v_i = \sum_i \frac{dr_i}{dt} \times m_i v_i + \sum r_i \times m_i \frac{dv_i}{dt} = \cancel{\sum v_i \times m_i v_i} + \sum r_i \times m_i a_i$$

$$= \sum r_i \times F_i$$

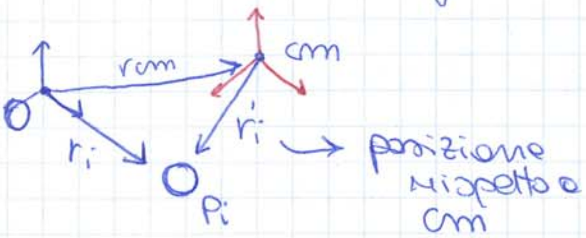
$$= \sum r_i \times F_i^{(e)} + \sum_{i,j} r_i \times F_i^{(i)}$$

SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA

Consideriamo il centro di massa come origine di un sistema di riferimento cartesiano con assi ad orientazione fissa rispetto a un sistema Oxy inerziale, ~~......~~

Sarà un sistema di riferimento mobile

cm sarà l'origine



$r_i = r_i' + r_{cm}$

$v_i = v_i' + v_{cm}$

$r'_{cm} = 0 \quad v'_{cm} = 0$ ← posizione e velocità del cm nel sist. di rif. del cm

$\sum m_i r_i' = 0 \quad \sum m_i v_i' = 0$

gli assi mantengono sempre la stessa direzione rispetto agli assi del sistema di riferimento inerziale e possono essere presi paralleli

Se moto è traslatorio ma non necessariamente rettilineo uniforme → rettilineo perché gli assi sono paralleli

$$v_{cm} = \frac{\sum_i m_i v_i}{\sum_i m_i} \qquad r_{cm} = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} \qquad \boxed{O}$$

$$v'_{cm} = \frac{\sum m_i v_i'}{\sum m_i} \qquad r'_{cm} = \frac{\sum_i m_i r_i'}{\sum_i m_i} \qquad \boxed{CM}$$

$\Downarrow v'_{cm} = 0 \qquad \Downarrow r'_{cm} = 0$

$$\frac{\sum m_i v_i'}{\sum m_i} = 0 \qquad \frac{\sum m_i r_i'}{\sum m_i} = 0$$

$$\sum_i m_i v_i' = 0 \qquad \sum m_i r_i' = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 208

URTO ELASTICO

Vale il principio di conservazione della quantità di moto

$$m_1 v_{1,in} + m_2 v_{2,in} = m_1 v_{1,fin} + m_2 v_{2,fin} = (m_1 + m_2) v_{cm}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,fin}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,fin}^2$$

è E_k ~~si conserva~~ → vale la conservazione dell'energia

$$\begin{cases} v_{1,in} = v'_{1,fin} + v_{cm} \\ v_{1,fin} = v'_1 + v_{cm} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{2,in} = v'_{2,fin} + v_{cm} \\ v_{2,fin} = v'_{2,fin} + v_{cm} \end{cases}$$

$$p' = 0 \begin{cases} m v'_{1,in} + m_2 v'_{2,in} = 0 \Rightarrow m v'_{1,in} = -m_2 v'_{2,in} \\ m v'_{1,fin} + m_2 v'_{2,fin} = 0 \Rightarrow m v'_{1,fin} = -m_2 v'_{2,fin} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,in}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,in}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,fin}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,fin}^2$$

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_{1,in} + m_2 v_{2,in}}{(m_1 + m_2)}$$

$$v_{1,fin} = \frac{(m_1 - m_2) v_{1,in} + 2 m_2 v_{2,in}}{(m_1 + m_2)}$$

$$v_{2,fin} = \frac{2 m_1 v_{1,in} + (m_2 - m_1) v_{2,in}}{(m_1 + m_2)}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 208

SISTEMI A MASSA VARIABILE

$$F = \frac{dP}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$

← deriviamo m perché dobbiamo considerare la massa come una funz. del tempo

↑ nel caso di v=cost $\frac{dv}{dt}=0$

$$\boxed{F = v\frac{dm}{dt}}$$

Nel caso in cui non agisca alcuna forza ($R^{(e)}=0$) si può applicare la conservazione della quantità di moto tra 2 istanti (P=cost)

$$m_0 v_0 = m(t)\,v(t)$$

es.

Razzo il cui motore brucia carburante (massa variabile)

$$mv = (m-dm)(v+dv) + dm(v-v^*)$$

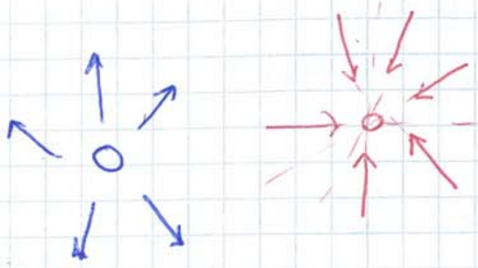
↑ carburante consumato

$$m\,dv = v^* dm$$

v^* → velocità di espulsione

$$dv = v^*\frac{dm}{m}$$

FORZE CENTRALI e CAMPI



Si definisce FORZA CENTRALE una forza agente in una certa regione dello spazio con le seguenti proprietà

1) In un qualsiasi punto la sua direzione passa sempre per un punto fisso O, detto centro della forza

2) Il modulo è funzione solo della distanza dal centro stesso (r)

$\vec{F} = F(r)\hat{u}_r$ • $F(r) < 0$ ATTRATTIVA

$r = OP$ $\hat{u}_r$ = versore radiale • $F(r) > 0$ REPULSIVA

$r \times v_r \rightarrow$ paralleli

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = r \times m(\cancel{v_r} + v_\theta) = r \times m v_\theta$$

$$|L| = m r v_\theta = m r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{cost}$$

$v_\theta \rightarrow r\frac{d\theta}{dt}$

$|L|$ è cost ma le quantità presenti in L non sono cost. separatamente ma solo il prodotto è cost.

$r\,d\theta$ lunghezza dell'arco quindi l'area dA del settore circolare approssimato con 1 triangolo

$$\boxed{dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta}$$

$\frac{1}{2} r \cdot r d\theta$

r → base, $r\,d\theta$ → altezza

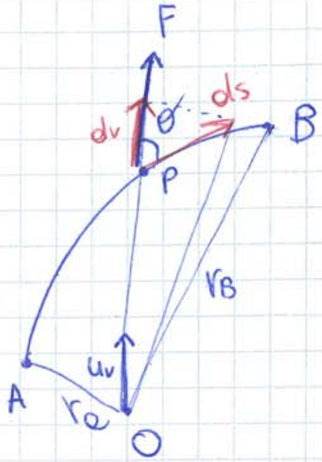
velocità areale = rapidità con cui l'area viene spazzata da v

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m} \qquad L = m r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

la traiettoria di un p.to che si muove in un campo di forze centrali giace in un piano fisso passante x ~~rette~~ il centro ed è percorsa in modo tale che la velocità areale rimanga costante

LAVORO DI 1 FORZA CENTRALE



$$W = \int_A^B F \cdot ds = \int_A^B F(r)\,\hat{u}_r \cdot ds$$

$\hat{u}_r \cdot d\vec{s} = ds \cos\theta$ ← proiezione di ds lungo u_r

$u_r \cdot ds = dr$ ← spostamento infinitesimo riferito ad r

$$W = \int_A^B F(r)\,dr = f(r_B) - f(r_A)$$

↑ funz. integrale

← funz. che dipende solo da r

forze centrali ⇒ forze conservative

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 208

TEORIA DI NEWTON

Le orbite ellittiche dei pianeti possono essere approssimate a delle circonferenze.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = cost$$ la velocità areale = costante $\frac{dA}{dt} = cost$

Nel caso di una circonferenza r è costante quindi:

$$\frac{d\theta}{dt} = cost$$

Se la traiettoria è circolare, il pianeta deve essere soggetto ad una forza centripeta:

$$F = m\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$ per la 3° legge di Keplero $T^2 = kr^3$

$$\boxed{F = \frac{G\pi^2}{K}\frac{m}{r^2}}$$ ← la forza che si esercita dal sole ai pianeti è inv. prop. al quadrato della distanza dal sole

x principio azione reaz.

$$F_{S,T} = \frac{G\pi^2}{K_T}\frac{m_T}{r^2} \qquad F_{T,S} = \frac{G\pi^2}{K_S}\frac{m_S}{r^2}$$

$$F_{S,T} = F_{T,S}$$

$$\frac{G\pi^2}{K_T}\frac{m_T}{r^2} = \frac{G\pi}{K_S}\frac{m_S}{r^2}$$

$$K_S m_T = K_T m_S$$