NUMERO: 1472A - ANNO: 2015

APPUNTI

STUDENTE: Brondino

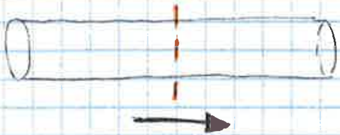
MATERIA: Elettrotecnica. Prof.Canavero

01/10/14

INTRODUZIONE:

- **Carica elettrica**: + ; − [si indica col simbolo "q" ; coulomb, [C]]

in questo corso verranno affrontati gli effetti delle cariche el. in movimento in un metallo



[filo di metallo]

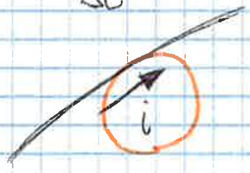
[direzione arbitraria che scelgo per la direzione di movimento delle cariche]

- Δq : q.tà di carica che scorre nel filo nella direzione indicata in Δt
- $\frac{\Delta q}{\Delta t}$: scorrimento delle cariche (flusso); si chiama **CORRENTE EL.**, si indica col simbolo "i" e si misura in $[C/s]$ = **ampere**, [A]
- se le cariche si muovono nella direzione opposta alla freccia →, uso il segno − ⟹

$$\begin{cases} i > 0 & \text{se cariche + sono equiverse con} \rightarrow \\ i < 0 & \text{se cariche + sono contrarie alla} \rightarrow \end{cases}$$

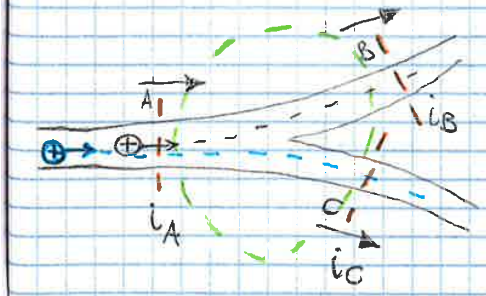
oppure se cariche − sono equiverse con →

- $i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$; la vera def. di corrente è però $\boxed{i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}}$



$i \gtrless 0$

$$\boxed{q = \int_{t_0}^{T} i \, dt}$$



- **Conservazione delle cariche** :

$i_A = i_B + i_C$ (vale per la scelta di direzioni della corrente che ho effettuato)

- scelgo una superficie che racchiude la biforcazione:

Σ corr. entranti = Σ corr. uscenti [deve essere così]

$$\begin{cases} \text{LEGGE DELLE CORRENTI (KCL)} \\ \Sigma\, i_e = \Sigma\, i_u \end{cases}$$

(KIRCHHOFF)

$\Sigma\, i_e = \Sigma\, i_u$

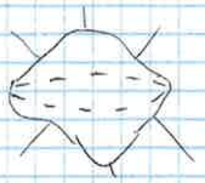
$i_1 + i_4 = i_2 + i_3 + i_5$

$i_1 + (-i_5) + i_4 + (-i_3) + (-i_2) = 0$

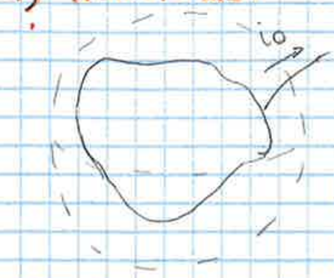
03/10/14

- corrente: $i = \frac{dq}{dt}$

- KCL: $\Sigma i_e = \Sigma i_u$ [sup. chiusa]



1) MONOPOLO:

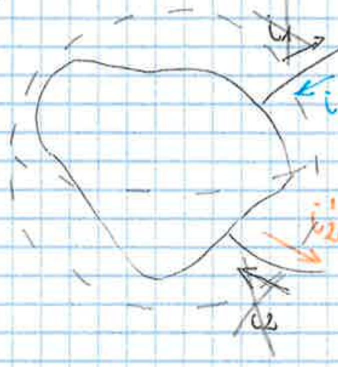


conduttore el. (polo)

KCL: $0 = i_0$

[con un solo conduttore le cariche non passano! ⟹ i sistemi elettrici devono avere più di un conduttore per funzionare!]

2) BIPOLO:



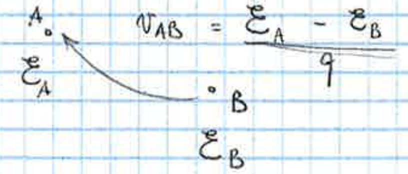
condut. n1 (polo 1)

condut. n2 (polo 2)

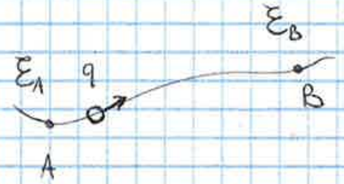
KCL: $i_2 = i_1$ (oppure $i_2 + i_1 = 0$)

$i_1 = \underbrace{-i_2}_{i_2'}$

- tensione:



$v_{AB} = \frac{\mathcal{E}_A - \mathcal{E}_B}{q}$



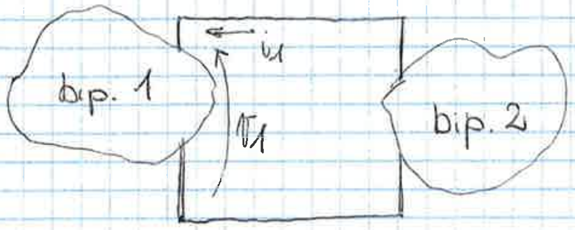
[condut. metallico]

- suppongo che non ci sia dispendio di energia per le cariche che si muovono lungo un conduttore metal. ecco ⟹ $\mathcal{E}_B = \mathcal{E}_A \Rightarrow v_{AB} = 0$

- si dice che il condut. metallico è equipotenziale; il fatto di avere tensione 0 si dice CORTO CIRCUITO

- Nella convenzione degli utilizzatori
  - se $p > 0$ → conversione en el ad altro (vero **utilizzatore**)
  - se $p < 0$ → conversione da altro ad en. el. (**generatore**)

- conservazione dell'energia ⇒ conservazione della potenza nei sistemi el.

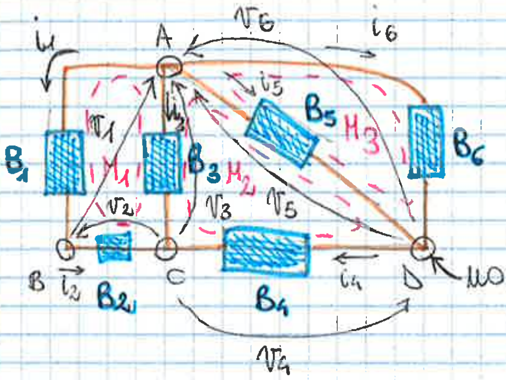


$P_1 = v_1 i_1 > 0$ utilizzatore

$P_1 + P_2 = 0$ ⇓

$P_2 = -P_1 < 0$ generatore

- **CIRCUITO**: insieme di elementi elettrici interconnessi



elementi el.

interconnessioni (conduttori) = corto c.ti equipotenziali

nodo: punto di collegamento tra 2 o + bipoli

- KCL sul circuito, applicate sui nodi $(\Sigma i_e = \Sigma i_u)$

A: $i_1 + i_3 + i_5 + i_6 = 0$

B: $i_1 = i_2$

C: $i_2 + i_3 + i_4 = 0 \rightarrow i_3 = -i_2 - i_4$

D: $i_4 = i_5 + i_6 \rightarrow i_5 = i_4 - i_6$

- sostituisco in A: $\cancel{i_2} + (-\cancel{i_2} - \cancel{i_4}) + (\cancel{i_4} - \cancel{i_6}) + \cancel{i_6} = 0 \Rightarrow 0 = 0$

- le **KCL** su un circuito forniscono N-1 equazioni indipendenti, dove N è il numero dei nodi (quindi scarto un nodo)

nell'esempio:

$$\begin{cases} i_1 = i_2 \\ i_3 = -i_4 - i_2 \\ i_5 = i_4 - i_6 \end{cases}$$

- applico **KVL** (percorsi chiusi)

[scelgo il percorso chiuso in modo che non vi siano bipoli all'interno (detto **MAGLIA**)]

$M_1 = v_1 + v_2 = v_3 \rightarrow v_1 + v_2 = v_4 + \cancel{v_5}\ v_6$

↻ ↺

$M_2 = v_3 = v_4 + v_5$

↻ ↺

$M_3 = v_5 = v_6$

↻ ↺

[tutte le equazioni delle maglie sono indipendenti]

• GENERATORE IDEALE INDIPENDENTE DI CORRENTE:

- **NB:** si dice indipendente perché trasforma un'energia in elettricità a prescindere dal contesto

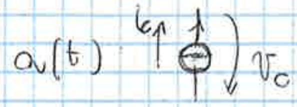
taglio che sbarra la congiungente

f.me impressa

[il costruttore indica con una freccia il verso delle cariche positive]

- ciò che si avvicina di più ad un gen. di corr è il caricabatterie

• LEGGE DI FUNZIONAMENTO DEL GEN di CORR:



$\boxed{i_c = a}$, $\forall\, v_c$

• CASO PARTICOLARE: $a(t) = 0 \Rightarrow i_c = 0 \Rightarrow$ CIRCUITO APERTO (filo tagliato)

• RESISTORE IDEALE (INDIPENDENTE):

- le cariche passano in un resistore come se avessero un certo "attrito"

[nel resistore scelgo nuovamente io il verso della corr.]

• LEGGE DI FUNZIONAMENTO DEL RESISTORE: (legge di Ohm)

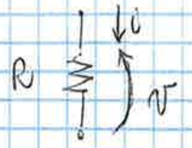
$\boxed{v = Ri}$; R coeff. di proporzionalità, **RESISTENZA**

- R è una grandezza non adimensionale: $\left[\frac{V}{A}\right] = [\Omega]$, **ohm**, sempre POSITIVA
  ↳ me lo deve dare il costruttore perché dipende dal materiale con il quale è costruito il resistore

• CASO PARTICOLARE: $R = 0 \Rightarrow v = 0$, $\forall\, i \neq \infty \Rightarrow$ CORTO CIRCUITO

• POTENZA NEL RESISTORE: $p = vi = \boxed{Ri^2 \geq 0}$ sotto la conv. degli utilizzatori
$\uparrow$
$v = Ri$
$\Rightarrow$ potenza ASSORBITA dal sist. elettrico (UTILIZZATA)

• NOTA BENE: la convenzione degli utilizzatori è fondamentale!



$v = Ri$

$i = \frac{1}{R} v$

$\frac{1}{R}$ = G, **conduttanza**, è dimensionale $\left[\frac{A}{V}\right] = [S]$, **siemens**

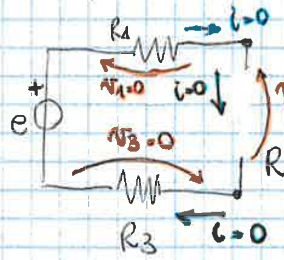
$\frac{1}{R}$ → cost. ≥ 0 $(R \geq 0)$

- **se** $G = 0 \Rightarrow i = 0$, $\forall\, v \neq \infty \Rightarrow$ CIRCUITO APERTO

REGOLA PARTITORE: $V_x = e \frac{R_x}{R_E}$

↳ CONSIDERAZIONI:

- se R_x è c.to aperto $\Rightarrow V_x = e$ (infiniti stex ordine sopra e sotto)



R_x è c.to aperto

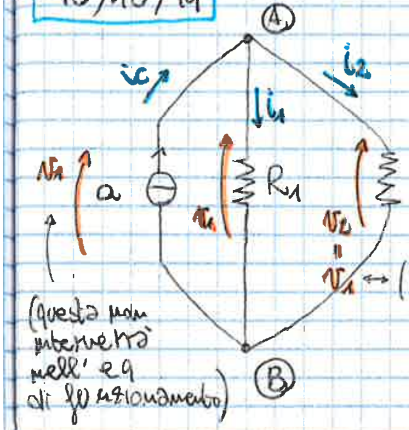
C.TO APERTO:

[In un c.to serie con un resistore aperto, la tensione su quel resistore vale e.]

KVL: $e = \cancel{V_1}^{0} + V_x + \cancel{V_3}^{0}$

10/10/14

ESEMPIO 1:



$V_2 = V_1$ ↔ (tensione fra stex nodi)

KCL Ⓐ: $\overset{a}{\cancel{i_C}} = i_1 + i_2$

- eq. di funz. dei resistori: $\left(G = \frac{1}{R}\right)$

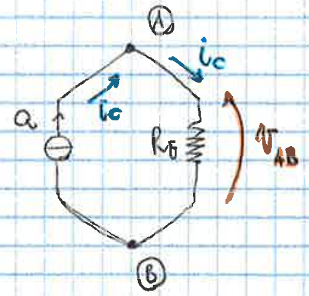
$i_1 = G_1 V_1$

$i_2 = G_2 V_1$

- sostituisco in KCL Ⓐ:

$a = G_1 V_1 + G_2 V_1 = (G_1 + G_2) V_1 \Rightarrow V_1 = \frac{a}{G_1 + G_2}$

ESEMPIO 2:



$V_{AB} = R_E i_C = R_E a \Rightarrow R_E = \frac{1}{G_E} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{AB} = \frac{a}{G_E}$

EQUIVALENZA TRA I 2 CIRCUITI: $(V_1 \leftrightarrow V_{AB})$

$\boxed{G_E = G_1 + G_2}$

deve essere

REGOLA DELLA CONDUTTANZA EQUIVALENTE:

↳ condizioni di validità: elementi collegati fra 2 soli nodi + un generatore di corrente; bipoli collegati fra 2 soli nodi si dicono collegati IN PARALLELO

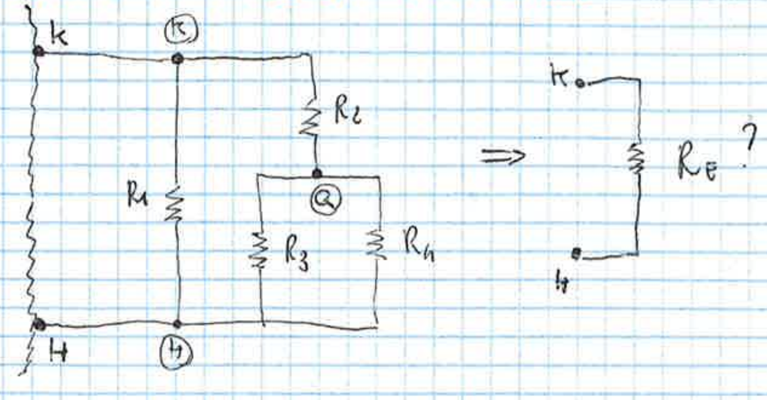
$\boxed{G_E = \sum_{i=1}^{n} G_i}$ n = numero resistori in parallelo

- Scritta con le resistenze: $\boxed{\frac{1}{R_E} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}$

CASO PARTICOLARE: 2 soli resistori

$\frac{1}{R_E} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} \Rightarrow \boxed{R_E = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$

CALCOLO DI CIRCUITI EQUIVALENTI:



[non è un c.to **né** in **SERIE**
né in **PARALLELO**]

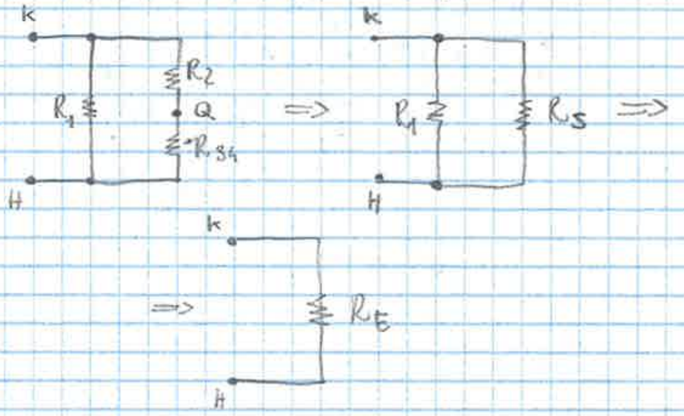
1) analizzare il c.to dal punto più lontano rispetto a dove si definisce l'equival.

2) scomporre per gradi il c.to

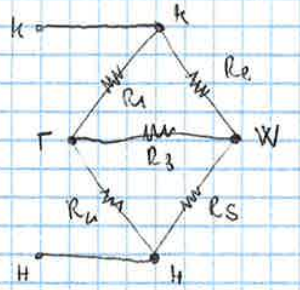
R_3, R_4 sono in // $\Rightarrow R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$

R_2, R_{34} sono in serie su Q $\Rightarrow R_S = R_2 + R_{34}$

R_1, R_S sono in // $\Rightarrow R_E = \frac{R_1 R_S}{R_1 + R_S}$

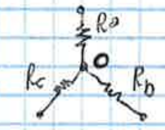


ESEMPIO NON SEMPLIFICABILE (al momento)

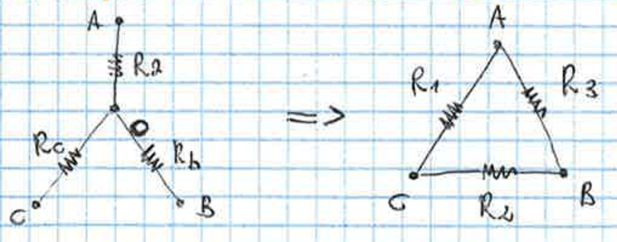


R_E?

questo circuito ha una configurazione a STELLA (λ); è dato da un punto centrale e 3 resistori che vanno a finire in 3 nodi diversi

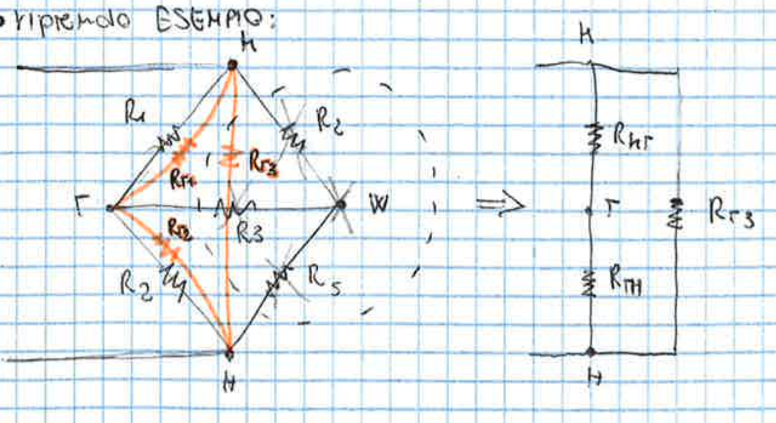


TRASFORMAZIONE DI UN C.TO STELLA:



collegamento a TRIANGOLO (Δ)

- se $R_a = R_b = R_c = R_S \Rightarrow R_1 = R_2 = R_3 = R_T$ con $\boxed{R_T = 3R_S}$
- riprendo ESEMPIO:



R_{KT} è $R_1 // R_{T1}$

R_{TH} è $R_4 // R_{T2}$

TEOREMA DI MILLMAN:

- condizioni di validità: c.to con rami in //

la tensione del // V_{AB} (A,B nodi del parallelo) è data da

$$\boxed{V_{AB} = \frac{\sum gen}{\sum cond}}$$

escluse quelle in serie ai gen. corr.

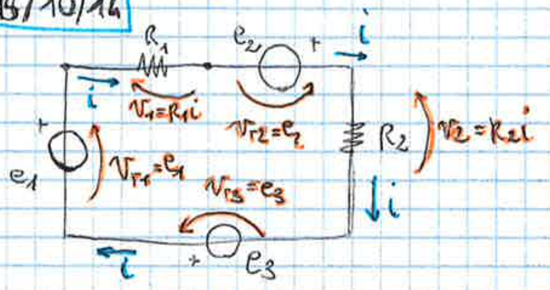
con gen tensione nella forma $\frac{e_k}{R_k}$ < + se concordi / − se discordi

con gen corrente nella forma a_k < + se verso pot. > / − se verso pot. <

NOTA BENE:

- se mancasse una resistenza nel ramo dove ho un gen tens, avrei già la tensione V_{AB} = a quella del gen di tens.
- se avessi una resistenza nel ramo dove ho un gen corr, quella resistenza non appare da nessuna parte

15/10/14



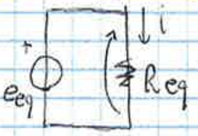
c.to SERIE → perc. chiuso ⇒

⇒ KVL: $V_{r1} + V_{r2} + V_{r3} = V_1 + V_2$

$$\underbrace{e_1 + e_2 + e_3}_{e_{eq}} = R_1 i + R_2 i$$

$$e_{eq} = \underbrace{(R_1 + R_2)}_{R_{eq}} i$$

c.to equivalente:

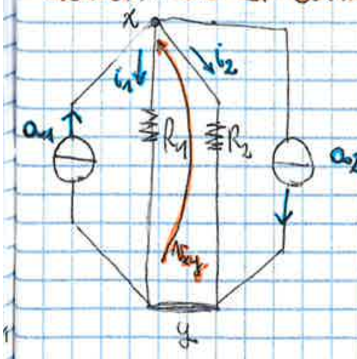


GENERATORE DI TENSIONE EQUIVALENTE:

- in un c.to serie posso sostituire ai gen di tensione un gen di tens. equivalente; si noti che non è necessario che i gen siano attaccati uno in coda all'altro

C.TO SERIE:
- gen. tensione: $e_{eq} = \sum_{k=1}^{K} e_k$
- resistori: $R_{eq} = \sum_{n=1}^{N} R_n$

GENERATORE DI CORRENTE EQUIVALENTE:



c.to PARALLELO → nodi ⇒

KCL nodo x: $a_1 = i_1 + i_2 + a_2$
ent. usc.

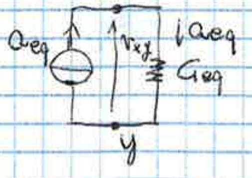
$\frac{1}{R} = G$

$v = Ri \Rightarrow i = \frac{v}{R}$

$$\underbrace{a_1 - a_2}_{a_{eq}} = G_1 V_{xy} + G_2 V_{xy}$$

$$a_{eq} = \underbrace{(G_1 + G_2)}_{G_{eq}} V_{xy}$$

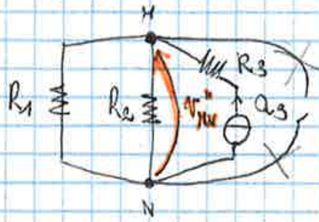
c.to equivalente:



C.TO PARALLELO:
- gen corrente: $a_{eq} = \sum_{k=1}^{K} a_k$
- resistori: $G_{eq} = \sum_{n=1}^{N} G_n$

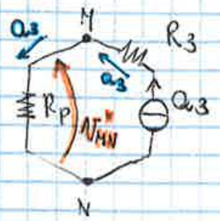
NB: sono tutte somme algebriche ⇒ conta il segno dei generatori

2) $g_2 = a_3$ e $e_1, e_4 = 0$; devo trovare V''_{MN}



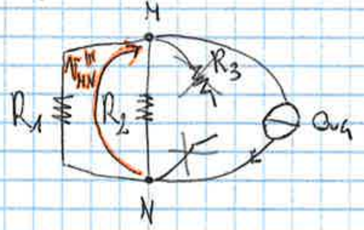
$R_1 \parallel R_2$

$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$



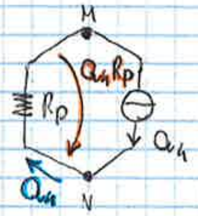
$V''_{MN} = R_p a_3$

3) $g_3 = a_4$ e $e_1, a_3 = 0$; devo trovare V'''_{MN}



$R_1 \parallel R_2$

$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$



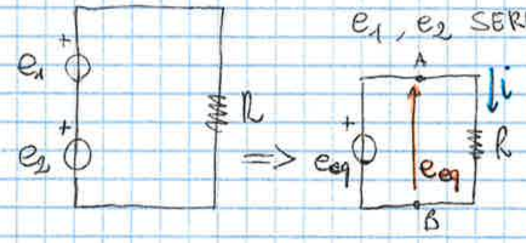
$V'''_{MN} = -a_4 R_p$

- applico la sovrapposizione degli effetti:

$$V_{MN} = V'_{MN} + V''_{MN} + V'''_{MN} = e_1 \frac{R_2}{R_1+R_2} + \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} a_3 - \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} a_4 \quad \circledast$$

NOTA BENE:

e_1, e_2 SERIE



$e_{eq} = e_1 + e_2$

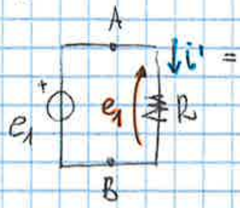
$i = \frac{e_{eq}}{R}$

pot. assorbita dal resistore R:

$p_R = e_{eq} i = \frac{(e_1 + e_2)^2}{R}$

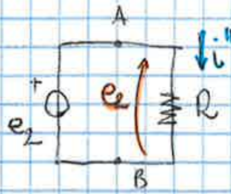
- risolvo con la sovrapposizione degli effetti: $(N = 2)$

1) e_1 acceso, $e_2 = 0$



$i' = \frac{e_1}{R}$; $P'_R = \frac{e_1^2}{R}$

2) e_2 acceso, $e_1 = 0$



$i'' = \frac{e_2}{R}$; $P''_R = \frac{e_2^2}{R}$

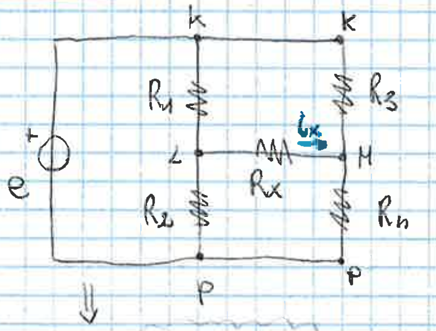
CONCLUSIONE:

$i = i' + i'' = \frac{e_1}{R} + \frac{e_2}{R}$

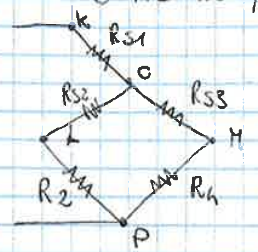
$P_R = P'_R + P'_R = \frac{e_1^2}{R} + \frac{e_2^2}{R}$ **SBAGLIATO!**

la potenza non è lineare ⟹ non si può applicare la sovrapposizione degli effetti

17/10/14 **ESEMPIO:**

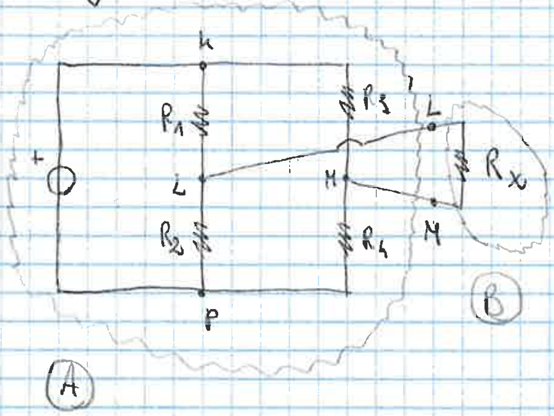


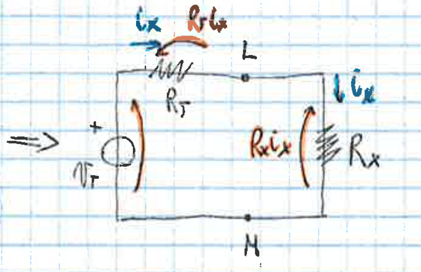
- no serie né //; posso fare trasformazioni stelle-triangolo



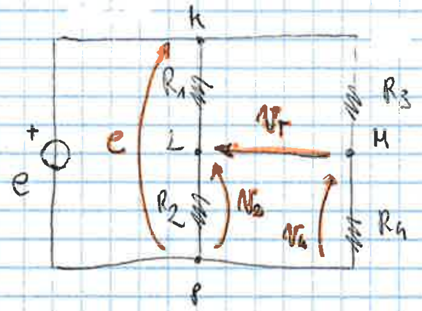
⇒ osservo che mi sparisce l'incognita ⇒ non è utile!

⇒ ridisegno e uso THEVENIN:





- per calcolare v_T e R_T ridisegno il sottocircuito Ⓐ lasciato aperto ai punti di collegamento:



$$v_2 = e\,\frac{R_2}{R_1+R_2}$$ ← [partitore di tensione]

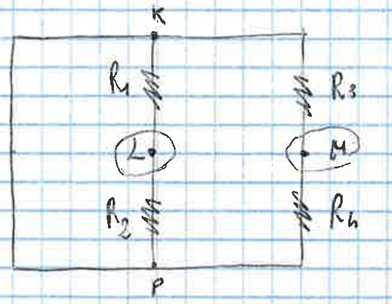
$$v_4 = e\,\frac{R_4}{R_3+R_4}$$

- percorso chiuso PLMP:

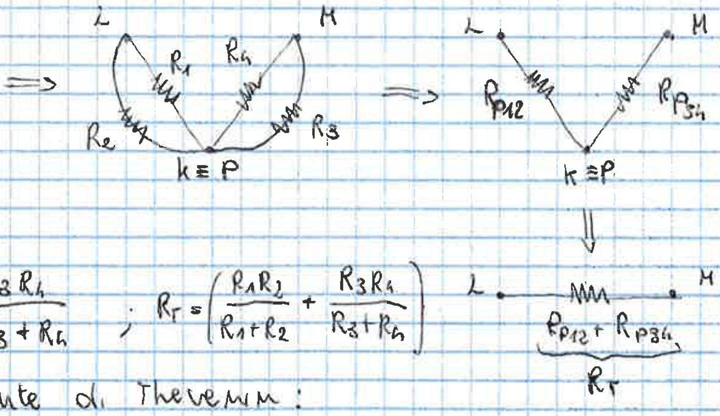
KVL: $v_2 = v_T + v_4 \Rightarrow v_T = v_2 - v_4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow v_T = e\,\frac{R_2}{R_1+R_2} - e\,\frac{R_4}{R_3+R_4} = e\left(\frac{R_2}{R_1+R_2} - \frac{R_4}{R_3+R_4}\right)$$

- spengo il generatore e per calcolare R_T:



- faccio collassare il corto c.to tra k e p:

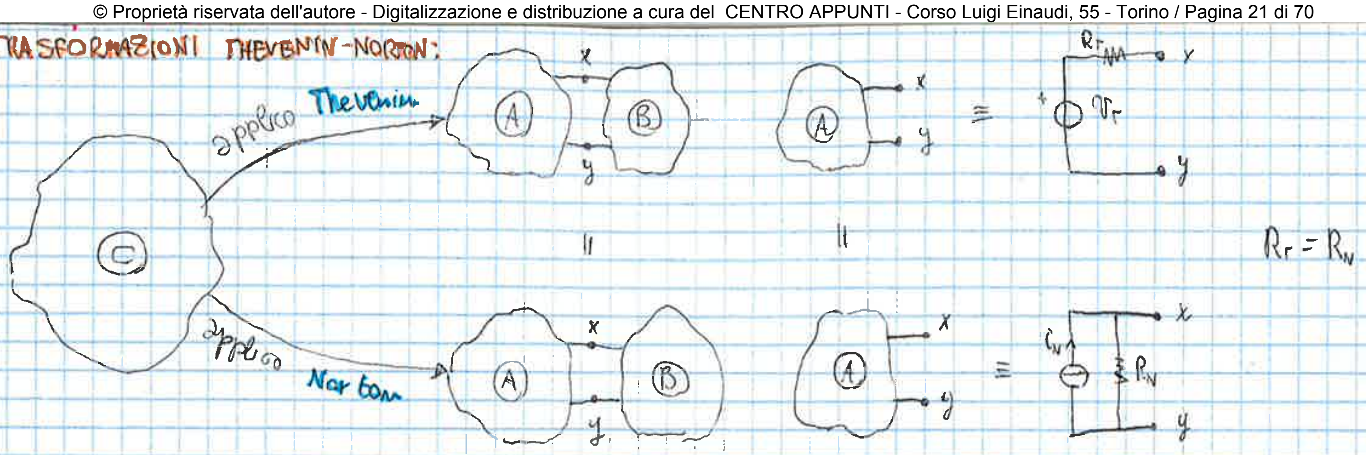


$$R_{P12} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \;;\quad R_{P34} = \frac{R_3R_4}{R_3+R_4} \;;\quad R_T = \left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + \frac{R_3R_4}{R_3+R_4}\right)$$

- riprendo il c.to equivalente di Thevenin:

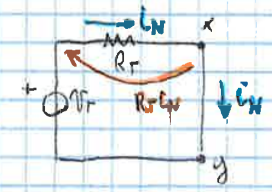
$$v_T = R_T\,i_x + R_x\,i_x \Rightarrow i_x = \frac{v_T}{(R_T+R_x)}$$

TRASFORMAZIONI THEVENIN-NORTON:



- applico l'equivalente di Norton al c.to di Thevenin

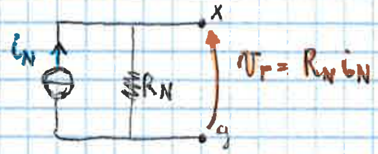
1)

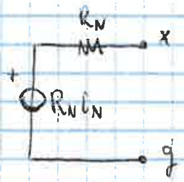


$V_T = R_T i_N \Rightarrow i_N = \frac{V_T}{R_T}$

- applico l'equivalente di Thevenin al c.to di Norton

2)





- definizione alternativa della resistenza equivalente di TH/NOR:

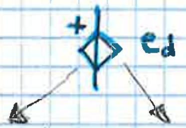
$$\boxed{R_T = \frac{V_T}{i_N}}$$

la resistenza equivalente di TH/NOR si definisce come il rapporto fra la tensione a vuoto e la corrente di corto circuito

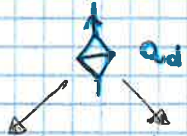
GENERATORI PILOTATI (COMANDATI, DIPENDENTI):

- i generatori dipendenti sentono l'influenza del c.to a cui sono collegati.

gen. dip. di tens.



gen dip. di corr



dipendente da una tensione

$e_d = \underset{\text{adim.}}{\alpha} V_x$

dipendente da una corrente

$e_d = \underset{\text{ohm}}{r_m} i_x$

dipende da una tensione

$a_d = g_m V_y$

dipende da una corrente

$a_d = \beta i_y$

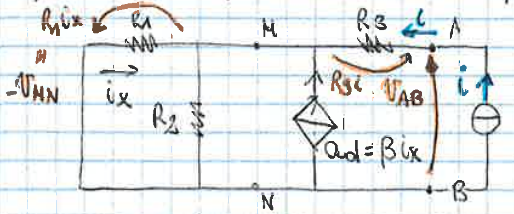
- il generatore dip. non è un qualcosa di fisico, ma un modello che serve a spiegare il funzionamento di alcuni elementi elettronici (transistor)

$$\frac{e_1(R_1+R_2) - \cancel{e_1 R_2}}{R_1R_2} = i_x\left(\frac{\beta R_2}{R_2}+\frac{R_1+R_2}{R_2}\right) \Rightarrow \frac{e_1}{\cancel{R_2}}\cdot\frac{\cancel{R_2}}{\beta R_2 + R_1+R_2} = i_x \Rightarrow i_x = \frac{e_1}{R_1+R_2(1+\beta)}$$

$R_2(\beta+R_1)$

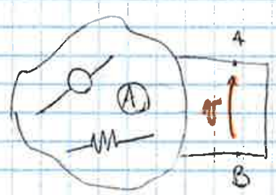
$$V_T = e_1 - R_1 i_x = e_1 - R_1\frac{e_1}{R_1+R_2(1+\beta)} = \frac{\cancel{e_1R_1} + e_1R_2(1+\beta) - \cancel{e_1R_1}}{R_1+R_2(1+\beta)} = \frac{e_1R_2(1+\beta)}{R_1+R_2(1+\beta)}$$

2) trovare R_T = resistenza equivalente del cto con gen. spenti



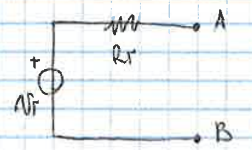
R_T è il coeff di prop con gen i acceso e gli altri gen spenti => si spengono solo i gen indipendenti

- riprendo la dim. di Thevenin



$v = k_1 g_1 + k_2 g_2 + R_T i$

per R_T : i accesa, g spent



$$\underset{-R_1 i_x}{\cancel{V_{HN}}} = \frac{\overset{\beta i_x}{\cancel{a_d}} + i}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} \Rightarrow -R_1 i_x = \frac{\beta i_x + i}{\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}} \Rightarrow -\cancel{R_1}\frac{R_1+R_2}{\cancel{R_1}R_2}i_x = \beta i_x + i$$

$$\Rightarrow -i_x\left(\frac{R_1+R_2}{R_2}+\beta\right) = i \Rightarrow i_x = \frac{-i}{\frac{R_1+R_2}{R_2}+\beta}$$

$$\left[A = \frac{A}{\frac{\cancel{B}}{\cancel{B}}+\square}\right]$$

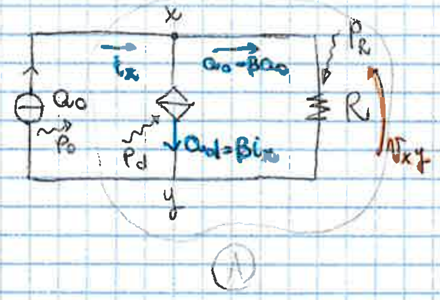
- percorso chiuso $M \to A \to B \to N \to M$

$$V_{HN} + R_3 i = V_{AB} \Rightarrow -R_1 i_x + R_3 i = V_{AB} \Rightarrow +R_1\frac{+i}{\frac{R_1+R_2}{R_2}+\beta} = V_{AB} \Rightarrow$$

C ↺

$$\Rightarrow i\underbrace{\left(\frac{R_1R_2}{R_2+R_1+R_2\beta}+R_1\right)}_{R_T} = V_{AB}$$

RESISTENZA NEGATIVA:



$i_x = a_0$; $V_{xy} = R a_0(1-\beta)$

- su a_0 ho conv. di segno dei gen => la pot è una pot generata => $P_0 = V_{xy} a_0 = R a_0^2(1-\beta)$
- su a_d ho conv di segno deg uti.l => la pot è una pot assorbita => $P_d = V_{xy} a_d = \beta R a_0^2(1-\beta)$

- sul resistore => $P_R = R a_0^2(1-\beta)^2$ [qui la convenzione deve sempre essere degli util]
- per la conservazione della potenza deve essere che

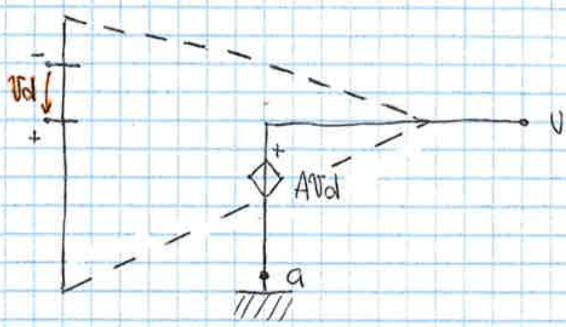
$$P_0 = P_d + P_R \Rightarrow \cancel{R a_0^2}\cancel{(1-\beta)} = \beta\cancel{R a_0^2}\cancel{(1-\beta)} + \cancel{R a_0^2}(1-\beta)^{\cancel{2}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1 = \cancel{\beta} + 1 - \cancel{\beta}$ verificato!

- osserviamo P_R : $R, a_0^2, (1-\beta)^2 \geq 0 \Rightarrow P_R \geq 0$ sempre!
- osserviamo P_0 : $R, a_0^2 \geq 0$; se $\beta < 1 \Rightarrow (1-\beta) > 0 \Rightarrow P_0 > 0 \Rightarrow a_0$ genera veramente potenza

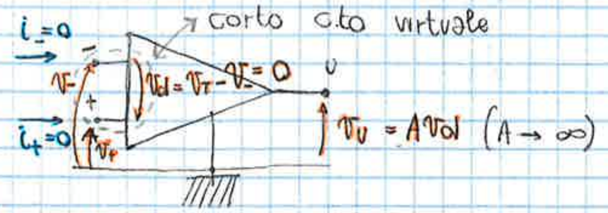
24/10/14

AMPLIFICATORE OPERAZIONALE:

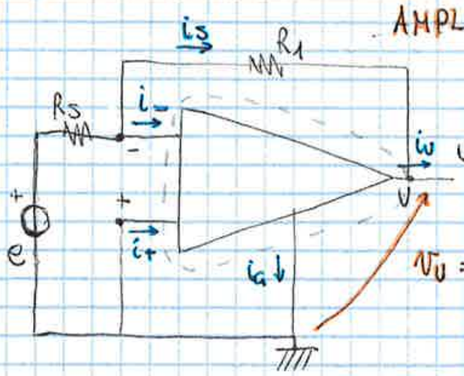


- $A \to \infty$, $V_d \to 0$

$\Rightarrow$ lo rappresentiamo solo così:



AMPLIFICATORE INVERTENTE:



$V_U = -\frac{R_1}{R_S} e$

KCL al nodo U:

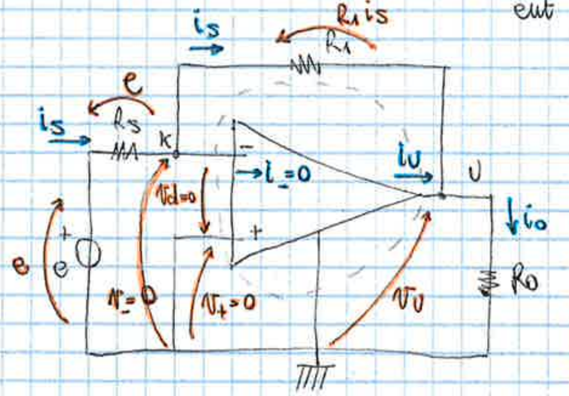
$i_U = -i_S$

configurazione amplificatore invertente

se $R_1 > R_S \Rightarrow |V_U| > |e|$

se $R_1 \leq R_S \Rightarrow |V_U| \leq |e|$

- KCL su sup chiusa: $\underbrace{\cancel{i_-}^{0} + \cancel{i_+}^{0}}_{ent} = \underbrace{i_a + i_U}_{usc} \Rightarrow \boxed{i_a = -i_U}$ [IMPORTANTE!]



$i_S = \frac{e}{R_S}$

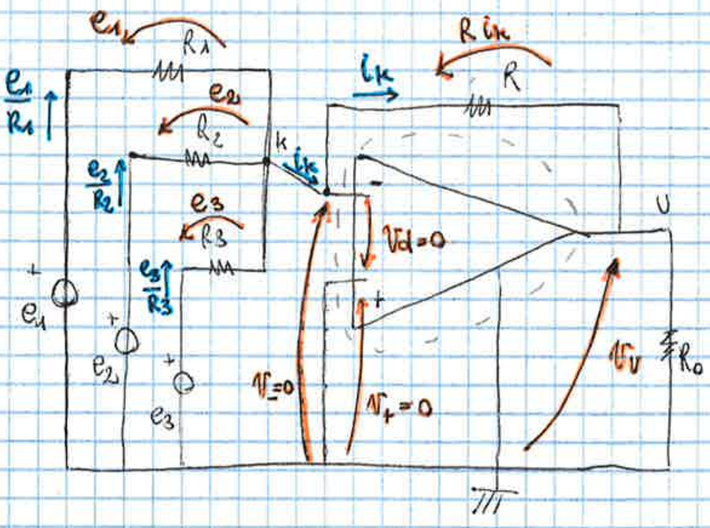
$V_U = -R_1 i_S = -\frac{R_1}{R_S} e$

$i_o = \frac{V_U}{R_o} = -\frac{R_1}{R_o R_S} e$

- KCL al nodo U:

$i_U = i_o - i_S$

CIRCUITO SOMMATORE:



- KCL al nodo k:

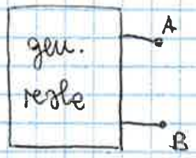
$i_k = \frac{e_3}{R_3} + \frac{e_2}{R_2} + \frac{e_1}{R_1}$

- KVL sup chiusa:

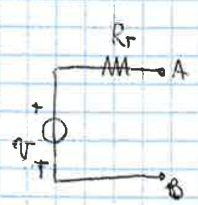
$V_U = -R i_k = -\left(\frac{R}{R_1} e_1 + \frac{R}{R_2} e_2 + \frac{R}{R_3} e_3\right)$

$\Rightarrow$ c.to SOMMATORE è un c.to che somma N segnali

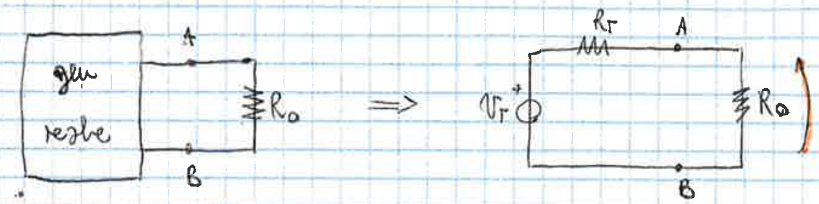
MISURATORE DI TENSIONE:



rappresento con equivalente di Th



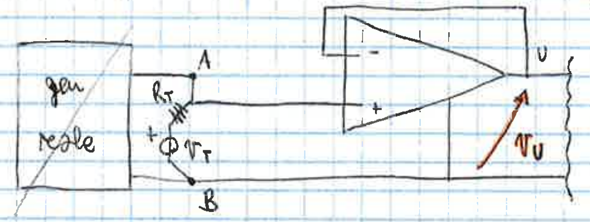
se V_T è una quantità piccola, vado a misurare V_0 che è una quantità ancora più piccola!



$V_0 = V_T \frac{R_0}{R_T+R_0}$

$V_0 < V_T$ sempre

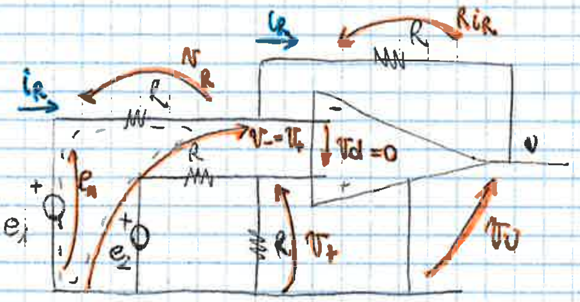
- posso pensare di usare un inseguitore di tensione:



$\Rightarrow V_U = V_T$

utile per misurare segnali biologici (~ mV)

CONFIGURAZIONE DIFFERENZIALE:



$V_+ = e_2 \frac{R}{R+R} = \frac{e_2}{2}$

- KVL su percorso chiuso sx: $e_1 = V_R + V_-$

$V_R = e_1 - \frac{e_2}{2}$

$i_R = \frac{V_R}{R} = \frac{e_1 - \frac{e_2}{2}}{R}$

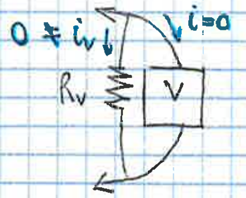
- KVL attorno Op. Amp: $V_U + Ri_R = \overset{V_-}{\boxed{\frac{e_2}{2}}} \Rightarrow V_U = \frac{e_2}{2} - \cancel{R}\left(\frac{e_1 - e_2/2}{\cancel{R}}\right) = -e_1 + \frac{e_2}{2}.2$

$\Rightarrow V_0 = e_2 - e_1 \Rightarrow$ configurazione differenziale

29/10/14

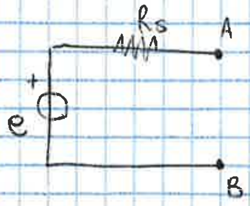
MISURATORE DI TENSIONE IDEALE (VOLTMETRO): si tratta, come già detto, di un inseguitore di tens

- nel caso reale:



R_V ha valore molto grande, p. es $R_V \sim M\Omega$

ERRORE DI MISURA CON IL VOLTMETRO REALE:



- voglio misurare la tens. a vuoto, teoricamente (cioè la misura esatta) è $V_{AB} = e$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3} \end{bmatrix}}_{\text{matrice dei coeffic.}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{V}_2 \end{bmatrix}}_{\text{incog.}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix}}_{\text{term. noti}} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{matr coeff} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix}$$

- dal termine (1,1) R_1 ed R_2 sono i resistori connessi al nodo ①
- dal termine (2,2) R_1 ed R_3 sono i resistori connessi al nodo ②
- dal termine (1,2) R_1 che è connesso tra il nodo ① e il nodo ②

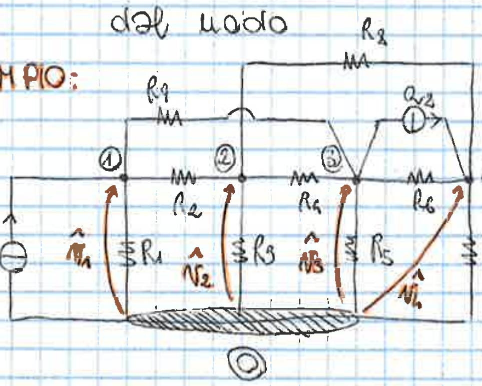
REGOLA PER LA MATRICE DEI COEFF.

⟹ la matrice dei coeff è sempre simmetrica ed è costruibile in modo automatico (per ispezione) — eccetto che con gen pilotati

REGOLA PER I TERMINI NOTI:

∀ nodo: gen di corrente con + se la corr. va nel nodo e − se la corr esce dal nodo

ESEMPIO:



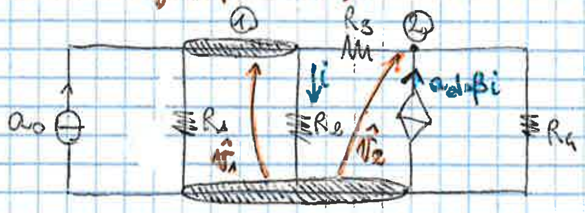
- $N=5 \Rightarrow$ sistema (4×4), 4 tensioni nodali

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_9} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_9} & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_8} & -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_8} \\ -\frac{1}{R_9} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_9} & -\frac{1}{R_6} \\ 0 & -\frac{1}{R_8} & -\frac{1}{R_6} & \frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_7}+\frac{1}{R_8} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{V}_2 \\ \hat{V}_3 \\ \hat{V}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ -a_2 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

(matrice coeff × incog = term noti)

- i termini fuori diagonale sono contenuti nel termine diagonale, che in più mostra anche la resistenza collegata tra il nodo preso in considerazione ed il nodo di riferimento

ESEMPIO (gen pilotato):



- $N=3 \Rightarrow$ sistema (2×2), 2 tensioni nodali

$$-\frac{1}{R_3}\hat{V}_1 + \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)\hat{V}_2 = \beta \cancel{i}\, \frac{\hat{V}_1}{R_2} \Longrightarrow$$

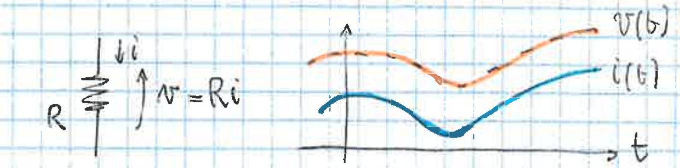
$$\Longrightarrow \left(-\frac{1}{R_3}-\frac{\beta}{R_2}\right)\hat{V}_1 + \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)\hat{V}_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3}-\frac{\beta}{R_2} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- nel caso di gen pilotato, scrivo prima la matrice considerando a_d noto, e poi attraverso i passaggi (vedi sopra) riscrivo la matrice nella sua forma finale; noto che perdo la simmetria!

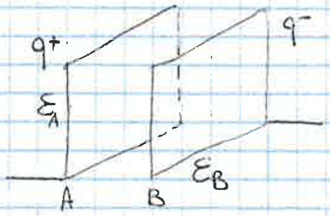
31/10/14



v(t) [relazione algebrica]

i(t) [relazione istantanea]

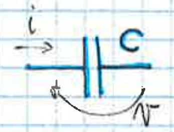
CONDENSATORE:



$q \propto (\mathcal{E}_A - \mathcal{E}_B)$

$\downarrow$

$q = \textcircled{C}\, v$ → **capacità** $\left[\frac{C}{V}\right] = [F]$, **farad**



$C \geq 0$, costante che dipende solo dalla geometria e dal mezzo

- non ho più esplicitamente la corrente => derivo rispetto al tempo:

$$\frac{d}{dt} q = \frac{d}{dt} C v \Rightarrow \boxed{i = C \frac{dv}{dt}}$$ [relazione differenziale] **[I forma]**

eq di funz del condensatore

- per trovare la tensione dovrò quindi integrare:

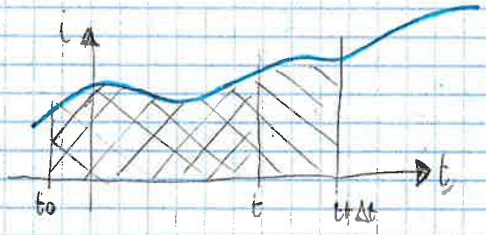
$$\int_{t_0}^{t} i\, dt = C \int_{v_0}^{v(t)} dv = C(v(t) - v_0) \Rightarrow \boxed{v(t) = v_0 + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\, dt}$$ [relazione integrale] **[II forma]**

- la tensione all'istante t dipende dalla storia precedente della corrente, ovvero il condensatore mantiene memoria [bipolo con memoria]
- riparto dalla forma integrale:

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\, dt$$

- passo ad un istante $t + \Delta t$: differenza ➡

$$v(t+\Delta t) = v_0 + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t+\Delta t} i\, dt$$



$$\Rightarrow v(t+\Delta t) - v(t) = \cancel{v_0} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t+\Delta t} i\, dt - \cancel{v_0} - \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\, dt = \frac{1}{C}\left[\int_{t_0}^{t+\Delta t} i\, dt - \int_{t_0}^{t} i\, dt\right] \Rightarrow$$

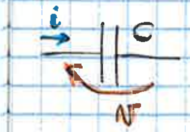
$$\Rightarrow v(t+\Delta t) - v(t) = \frac{1}{C}\int_{t}^{t+\Delta t} i\, \Delta t$$

- passo al limite di Δt molto piccolo:

$\lim_{\Delta t \to 0} (v(t+\Delta t) - v(t)) = 0$ [è la def di funzione continua => non fa salti!]

=> la **tensione** sul **condensatore** è una **f.ne continua** (non è detto che la corr. lo sia!)

POTENZA ED ENERGIA:

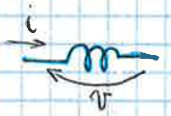


$$\begin{cases} i = C \dfrac{dv}{dt} & \text{[eq. funz. diff.]} \\ v = v_0 + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{t_0}^{t} i\, dt & \text{[eq. funz. int.]} \end{cases}$$

- considero la potenza; si tratta di una pot. assorbita per la convenzione degli utilizzatori

$$P = vi = \underset{\geq 0}{C}\, v \overset{?}{\textcircled{\tfrac{dv}{dt}}} \gtrless 0\ ?$$ => C può essere utilizzatore o generatore

INDUTTORE:



$$\boxed{v = \overset{\text{costante di prop.} \geq 0 \text{ in convenzione degli utilizzatori;}}{L}\,\frac{di}{dt}}$$

INDUTTANZA $\left[\frac{V}{A/s}\right] = [H]$, **henry**

[forma differenziale]

$$\int v\,dt = L\int_{t_0}^{t} di \Rightarrow \boxed{i(t) - i_0 = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt}$$ [forma integrale]

- riparto dalla forma integrale:

$$i(t+\Delta t) = i_0 + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t+\Delta t} v\,dt$$

$$i(t+\Delta t) - i(t) = \cancel{i_0} + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t+\Delta t} v\,dt - \cancel{i_0} - \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt = \frac{1}{L}\left[\int_{t_0}^{t+\Delta t} v\,dt - \int_{t_0}^{t} v\,dt\right] = \frac{1}{L}\int_{t}^{t+\Delta t} v\,dt$$

- passo al limite di Δt molto piccolo:

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(i(t+\Delta t) - i(t)\right) = 0$$ => la corrente sull'induttore è una funzione continua, la tensione può essere qualsiasi cosa.

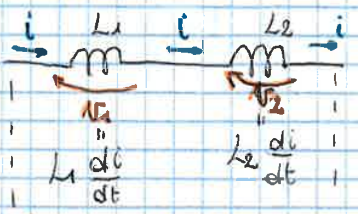
POTENZA ED ENERGIA:

$$p = vi = L\underset{\geq 0}{i}\overset{?}{\left(\frac{di}{dt}\right)} \gtrless 0\ ?$$ ⇒ L può essere utilizzatore o generatore

$$p = \frac{d\mathcal{E}}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \int_{t_0}^{t} p\,dt = \mathcal{E}_0 + \int_{t_0}^{t} L i \frac{di}{\cancel{dt}}\,\cancel{dt} = \mathcal{E}_0 + L\int_{i(t_0)}^{i(t)} i\,di \Rightarrow$$

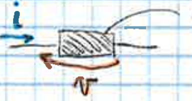
$$\Rightarrow \mathcal{E}_0 + \frac{L}{2}i^2 \geq 0$$ sempre => l'energia è sempre positiva come nel condensat.

INDUTTORI EQUIVALENTI:

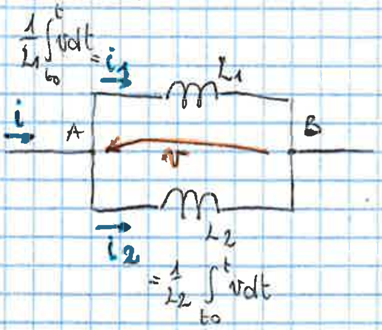


- induttori in serie:

$$v = L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} = (L_1 + L_2)\frac{di}{dt}$$



è un induttore L_{eq}; $\boxed{L_{eq} = L_1 + L_2}$



- induttori in parallelo: scelgo t_0 per $i_0 = 0$; KCL in A:

$$i = i_1 + i_2 = \frac{1}{L_1}\int_{t_0}^{t} v\,dt + \frac{1}{L_2}\int_{t_0}^{t} v\,dt = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)\int_{t_0}^{t} v\,dt$$

è un induttore L_{eq}; $\boxed{\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}$

- la soluzione è $x(t) = k_0 e^{-t/\tau} + S$; ho bisogno della condizione iniziale per poter trovare k_0; 0 istante iniziale, cond iniziale $x(0)$ che suppongo sia nota la sol. per $t=0$: $x(0) = k_0 e^0 + S = k_0 + S \Rightarrow \boxed{k_0 = x(0) + S}$

$$\Rightarrow x(t) = [x(0) - S] e^{-t/\tau} + S$$

COROLLARIO:

sol per $t \to \infty$: $x(\infty) = [x(0) - S] \cdot 0 + S$

$\Rightarrow$ II forma della sol: $x(t) = [x(0) - x(\infty)] e^{-t/\tau} + x(\infty)$

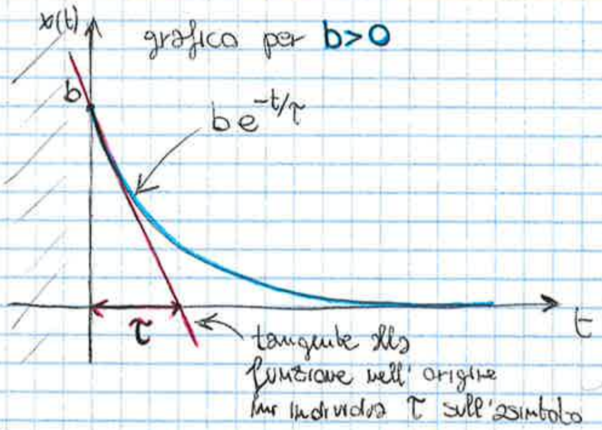
SOLUZIONE e GRAFICO:

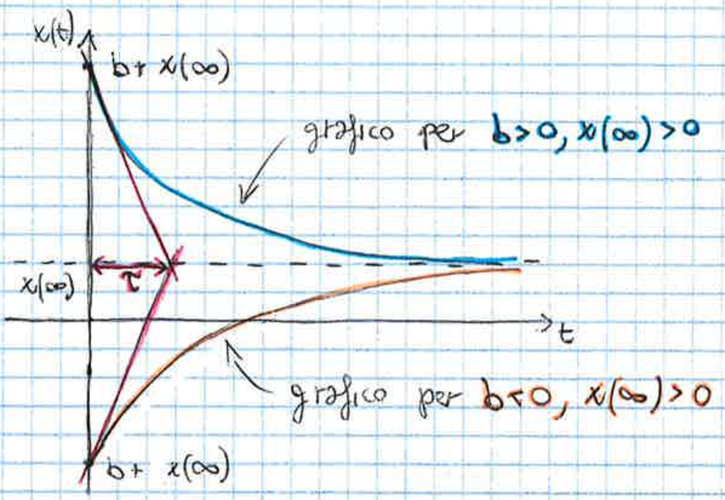
- in un c.to con un solo elemento con memoria, gen costanti ed $R_{eq(r,N)} > 0$ (anche con gen pilotati) la soluzione è:

$$\boxed{x(t) = [\underset{\uparrow}{x(0)} - \underset{\uparrow}{x(\infty)}] e^{-t/\tau} + x(\infty)} = b e^{-t/\tau} + x(\infty) \quad [\text{vale per } t \geq 0]$$

cond. iniziale — cond all'∞

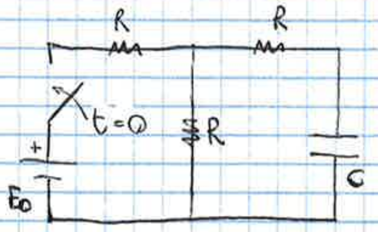
cost: $x(0) - x(\infty)$





[andamento del grafico transitorio] → [quando il grafico diventa costante (4/5τ) si dice che il transitorio è esaurito]

ESEMPIO (CONDENSATORE):

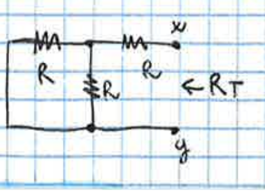


- per $t < 0$ c.to aperto (il c.to è INERTE = non funziona)
  $\Rightarrow$ non ci sono i e v nel c.to
- $t = 0$ è il momento iniziale
- per $t > 0$ c.to funzionante

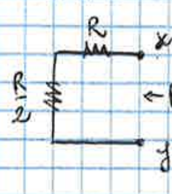
$$v_C(t) = [v_C(0) - v_C(\infty)] e^{-t/\tau} + v_C(\infty) \quad ; \quad \tau = R_T C$$

- v_C, tensione sul condensatore, è una funzione continua $\Rightarrow$ non fa salti:

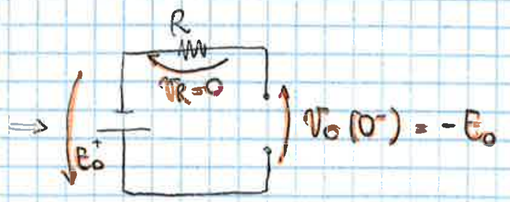
$t = 0^-$ istante precedente alla chiusura dell'interruttore
$t = 0^+$ istante successivo alla chiusura dell'interruttore
$\Big\} \ v_C(0) = 0$



$\leftarrow R_T \Rightarrow$



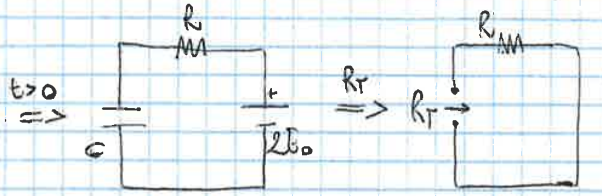
$\leftarrow R_T = \frac{3}{2} R \Rightarrow \tau = \frac{3}{2} CR$



• come già detto V_C è una f.ne continua ⇒

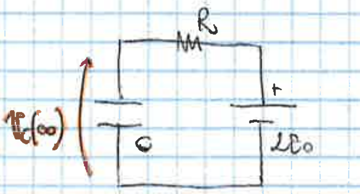
⇒ $V_C(0^-) = V_C(0^+) = V_C(0) = -E_0$

• calcolo τ (cto per $t > 0$):



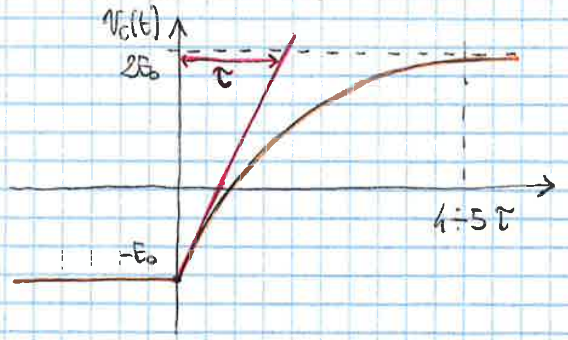
⇒ $R_T = R$

• calcolo la condizione finale:



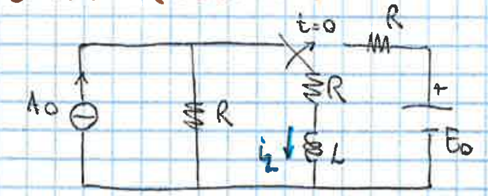
• $v_C(\infty)$ ⇒ la parte $e^{-t/\tau} \to 0$ ⇒ il gen costante produce var. el. costanti ⇒ su C $i = C\underset{0}{\frac{dv}{dt}}$ ho che $i=0$ ⇒ C è cto aperto ⇒ $V_C(\infty) = 2E_0$

⇒ $v_C(t) = [-E_0 - 2E_0]\, e^{-t/CR} + 2E_0 = -3E_0\, e^{-t/CR} + 2E_0$ per $t \geq 0$



nei c.ti elettronici τ è molto breve ($\sim \mu s$); durante la fase esponenziale passa un "guizzo" di corrente che permette il funzionamento del c.to (prima di zero e dopo $4 \div 5\tau$ $i = 0$)

ESEMPIO (INDUTTORE):



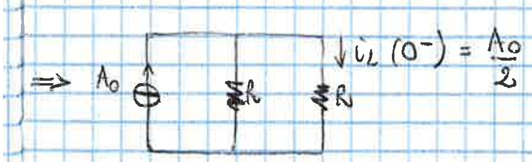
$i_L(t) = [i_L(0) - i_L(\infty)]\, e^{-t/\tau} + i_L(\infty)$ per $t \geq 0$

• calcolo la condizione iniziale:

$i_L(0^-) = i_L(0^+)$, studio il c.to per $t < 0$ ⇒

⇒ il cto è in questa condizione da tempo "infinito"; a causa del gen costante tutte le var el del cto sono costanti, anche la corrente su L è costante

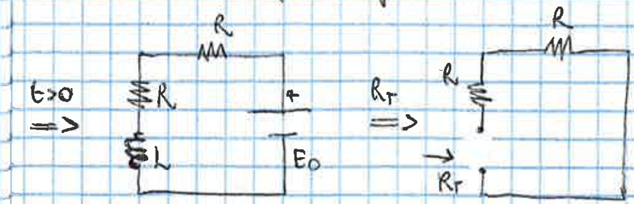
⇒ $v = L\frac{di}{dt}$ ⇒ $v = 0$ ⇒ L è un corto c.to ⇒



calcolato $i_L(0^-)$ con un partitore di corrente;

$i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0) = \frac{A_0}{2}$

• calcolo τ (cto per $t > 0$)



⇒ $R_T = 2R$

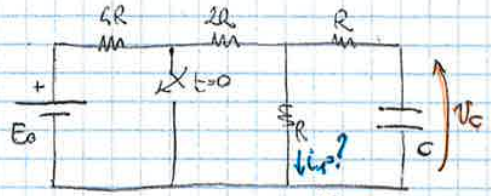
SOLUZIONE:

$$\boxed{y(t) = [y(0^+) - y(\infty)]\, e^{-t/\tau} + y(\infty)}$$ per $t \geq 0$

NOTA BENE:

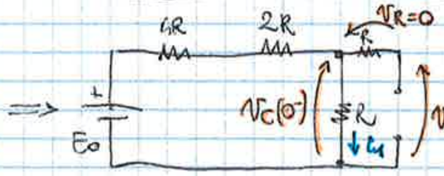
y può fare salti; $y(\infty)$ e τ si trovano come prima, il problema è $y(0^+)$

ESEMPIO:



$i_1(t) = [i_1(0^+) - i_1(\infty)]\, e^{-t/\tau} + i_1(\infty)$ per $t \geq 0$

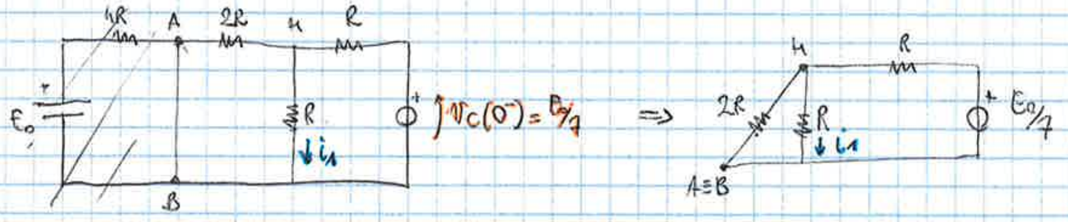
- calcolo $i_1(0^+)$, studio c.to per $t<0$;
gen costante => tutto costante => C cto aperto =>



$\boxed{i_1(0^-) = E_0/7R}$ → (non serve, calc solo per far vedere salto alla fine!)

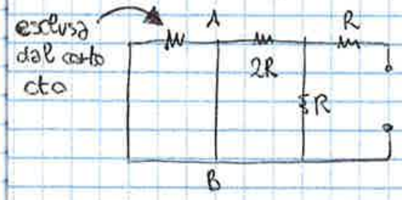
$V_c(0^-) = E_0 \frac{R}{7R} = \frac{E_0}{7}$ → f.ne costante → $V_c(0^-) = V_c(0^+)$

- cto a $t=0^+$ (il corto cto mi esclude la parte a sinistra)



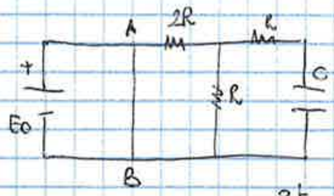
$$V_{HA} = \frac{\frac{E_0}{7R}}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{\frac{E_0}{7R}}{\frac{5}{2R}} = \frac{E_0}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{35} E_0 \Rightarrow i_1 = \frac{V_{HA}}{R} = \frac{2}{35R} E_0 \neq \frac{E_0}{7R}$$ **SALTO!**

- per calcolare la mia incognita parto da 0^- e poi uso un cto ausiliario in 0^+
- calcolo τ (cto per $t \geq 0$)



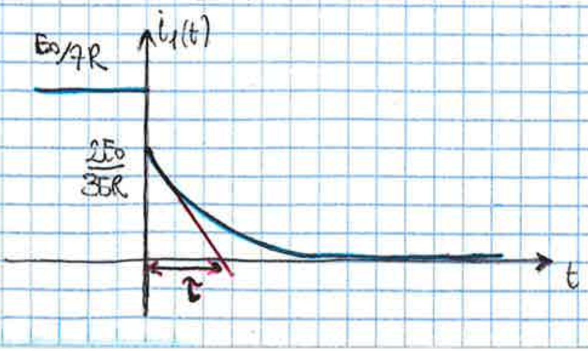
$$R_T = 2R /\!/ R + R = \frac{2R \cdot \cancel{R}}{3\cancel{R}} + R = \frac{5}{3} R$$

- calcolo la condizione finale:



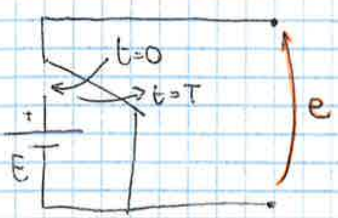
per $t \to \infty$ cto inerte
$\Rightarrow i_1(\infty) = 0$

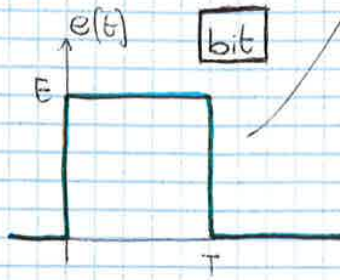
$$\Rightarrow i_1(t) = \frac{2E_0}{35R}\, e^{-\frac{3t}{5CR}}$$ per $t \geq 0$



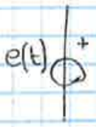
12/11/14

COMMUTAZIONI MULTIPLE:

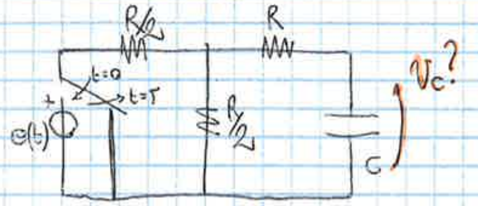




forma d'onda costante a tratti



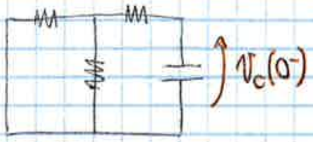
si può rappresentare con un gen avente una funzione associata il cui andamento è quello del grafico



$v_c(t) = [v_c(0) - v_c(\infty)]\, e^{-t/\tau} + v_c(\infty)$, $t \geq 0$

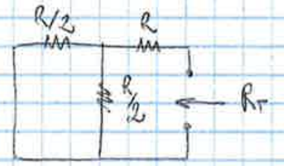
- procedo a calcolare $v_c(0), v_c(\infty), \tau$ come nei casi precedenti

- calcolo $v_c(0)$ in $t = 0^-$:



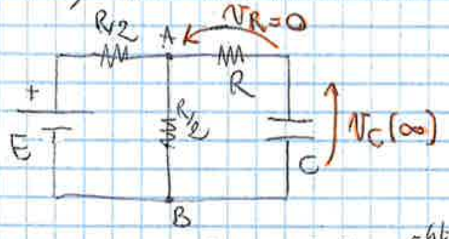
cto inerte, $v_c(0^-) = 0 \Rightarrow v_c(0) = 0$

- calcolo $\tau = CR_T$



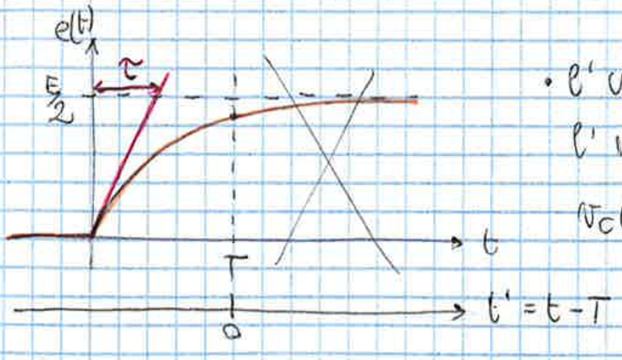
$R_{eq} = \frac{R}{2} /\!/ \frac{R}{2} + R = \frac{R}{4} + R = \frac{5}{4} R \Rightarrow \tau = \frac{5}{4} RC$

- calcolo $v_c(\infty)$; per il momento considero solo il primo passaggio dell'interruttore, senza contare che a $t = T$ tornerà nella posizione originaria.



tutto costante, $i_c = C \frac{dv_c}{dt} = 0$; rimango con la sola parte a SX $\Rightarrow$ partitore: $v_c(\infty) = v_{AB} = \frac{E}{2}$

$\Rightarrow v_c(t) = \left[0 - \frac{E}{2}\right] e^{\frac{-4t}{5RC}} + \frac{E}{2} = \frac{E}{2}\left(1 - e^{\frac{-4t}{5RC}}\right)$, $t \geq 0$



- l'ultimo tratto non è valido, poiché a $t = T$ l'interruttore commuta nuovamente!

$v_c(T) = \frac{E}{2}\left(1 - e^{\frac{-4T}{5RC}}\right)$ [è un numero, no funzione!]

- definisco un nuovo asse t' in modo da avere T=0 su quell'asse e poter riapplicare le formule precedenti (cambiamento di variabile)

- studio la seconda parte, dopo la seconda commutazione dell'interruttore; per t' $v_c(t') = [v_c(t'=0^-) - v_c(\infty)]\, e^{-t'/\tau}$, $t' \geq 0$

- utilizzo la sovrapposizione degli eff. per ricavare le variabili complementari:

$$\begin{cases} i_C = \underbrace{a_1 g_1 + a_2 g_2 + \_\_\_}_{=U_1} + \alpha v_C + \beta i_L & ; \quad i_C = C\frac{dv_C}{dt} \\ v_L = \underbrace{b_1 g_1 + b_2 g_2 + \_\_\_}_{=U_2} + \gamma v_C + \delta i_L & ; \quad v_L = L\frac{di_L}{dt} \end{cases} \Rightarrow \text{sostituisco:}$$

$$\begin{cases} \frac{dv_C}{dt} = \frac{\alpha}{C} v_C + \frac{\beta}{C} i_L + \frac{U_1}{C} \\ \frac{di_L}{dt} = \frac{\gamma}{L} v_C + \frac{\delta}{L} i_L + \frac{U_2}{L} \end{cases}$$

[sistema di eq. differenziali del I ordine a coeff costanti non omogenee]

- **in generale:**

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}$$

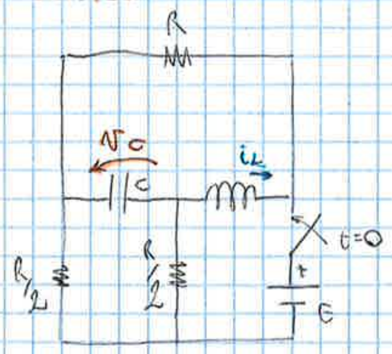
var di stato; ce ne sono N = numero el con memoria

matrice A dei coeff

termini noti, dipendono dai generatori indipendenti

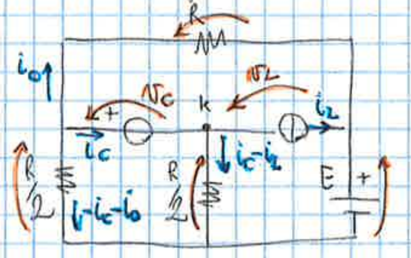
- all' esame potranno esserci es o dal cto al sistema o dal sistema al cto

ESEMPIO:



* dal circuito alla matrice

c.to per $t \geq 0$:



- sul perimetro ext: $-\frac{R}{2}(i_C + i_o) = Ri_o + E$

$\frac{3}{2}Ri_o = -\frac{R}{2}i_C - E \Rightarrow i_o = \frac{-\cancel{\frac{R}{2}}i_C - 2E}{\cancel{\frac{3}{2}}R}$

- KVL interno maglia DX: $E + v_L = \frac{R}{2}(i_C - i_L)$
- KVL interno maglia SX: $v_C + \frac{R}{2}(i_C - i_L) = -\frac{R}{2}(i_C + i_o)$

- sostituisco $i_o \Rightarrow v_C + \frac{R}{2}(i_C - i_L) = -\frac{R}{2}i_C + \frac{\cancel{R}}{2}\,\frac{2E + Ri_C}{3\cancel{R}}$

$$\Rightarrow i_C\underbrace{\left(\frac{R}{2} + \frac{R}{2} - \frac{R}{6}\right)}_{+5/6\,R} = -v_C + \frac{R}{2}i_L + \frac{E}{3} \Rightarrow i_C = -\frac{6v_C}{5R} + \frac{3\cancel{R}i_L}{5\cancel{R}} + \frac{2E}{5R}$$

sostituisco

- ricavo v_L da KVL DX: $v_L = \frac{R}{2}i_C - \frac{R}{2}i_L - E = -\frac{\cancel{R}}{\cancel{2}}\frac{\overset{3}{\cancel{6}}v_C}{5\cancel{R}} + \frac{R}{2}\frac{3}{5}i_L + \frac{\cancel{R}}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}E}{5\cancel{R}} - \frac{R}{2}i_L - E$

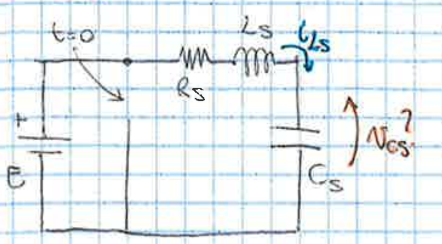
$$\Rightarrow v_L = -\frac{3}{5}v_C + \frac{3}{10}Ri_L + \frac{E}{5} - \frac{R}{2}i_L - E = -\frac{3}{5}v_C - \frac{1}{5}Ri_L - \frac{4}{5}E$$

$$\frac{1}{C}i_C = \frac{dv_C}{dt} = -\frac{6}{5CR}v_C + \frac{3}{5C}i_L + \frac{2E}{5CR}$$

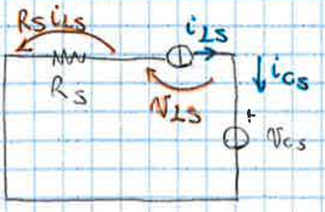
$$\frac{1}{L}v_L = \frac{di_L}{dt} = -\frac{3}{5L}v_C - \frac{R}{5L}i_L - \frac{4E}{5L}$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} -\frac{6}{5CR} & \frac{3}{5C} \\ -\frac{3}{5L} & -\frac{R}{5L} \end{bmatrix}} ; \quad \underset{S}{\begin{bmatrix} \frac{2E}{5CR} \\ -\frac{4E}{5L} \end{bmatrix}}$$

14/11/14



- per $t \geq 0$:



$i_{Cs} = i_{Ls}$ ✓

$v_{Cs} + v_{Ls} + R i_{Ls} = 0$ ✓

$$\cancel{C_s}\frac{dv_{Cs}}{dt} = i_{Ls}/C_s \quad ①$$

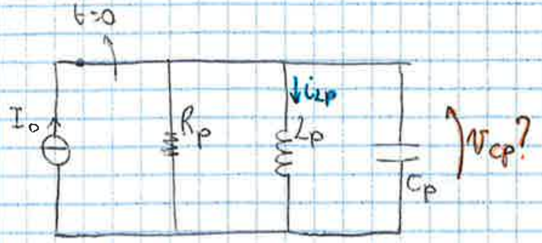
$$\cancel{L_s}\frac{di_{Ls}}{dt} = -\frac{v_{Cs}}{L_s} - \frac{R i_{Ls}}{L_s} \quad ②$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_{Cs} \\ i_{Ls} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1/C_s \\ -1/L_s & -R_s/L_s \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} v_{Cs} \\ i_{Ls} \end{bmatrix} + \cancel{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

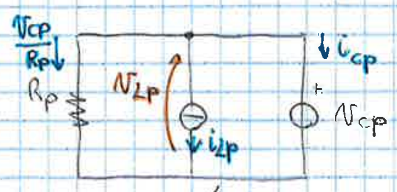
- dalla forma matriciale alla differenziale:

$$\frac{d^2 v_{Cs}}{dt^2} + \underset{-(a_{11}+a_{22})}{2\alpha}\frac{dv_{Cs}}{dt} + \underset{(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}{\omega_0^2} v_{Cs} = 0$$

$$\Rightarrow 2\alpha = \frac{R_s}{L_s} \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{L_s C_s}$$



- per $t \geq 0$:



$v_{Lp} = v_{Cp}$ ✓

$i_{Cp} + i_{Lp} + \frac{v_{Cp}}{R_p} = 0$ ✓

$$\cancel{L_p}\frac{di_{Lp}}{dt} = v_{Cp}/L_p \quad ②$$

$$\cancel{C_p}\frac{dv_{Cp}}{dt} = -\frac{v_{Cp}}{C_p R_p} - i_{Lp}/C_p \quad ①$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_{Cp} \\ i_{Lp} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{C_p R_p} & -\frac{1}{C_p} \\ 1/L_p & 0 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} v_{Cs} \\ i_{Ls} \end{bmatrix} + \cancel{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

- dalla forma matriciale alla differenziale:

$$\frac{d^2 v_{Cp}}{dt^2} + 2\alpha\frac{dv_{Cp}}{dt} + \omega_0^2 v_{Cp} = 0$$

$$\Rightarrow 2\alpha = \frac{1}{C_p R_p} \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{1}{C_p L_p}$$

(*) equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \begin{cases} \lambda_1 & (+) \\ \lambda_2 & (-) \end{cases}$$

$$x_0 = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

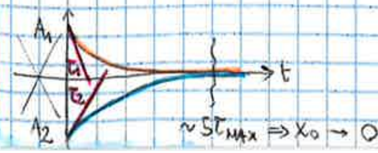
- se $\alpha > 0$ e $\alpha > \omega_0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2 < 0$
- se $\alpha > 0$ e $\alpha < \omega_0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda = -\alpha \pm j\beta$ UNITÀ IMMAG.
- se $\alpha = 0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = \pm j\beta$
- se $\alpha = \omega_0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$

$$\lambda = -\frac{R_s}{2L_s} \pm \sqrt{\frac{R_s^2}{4L_s^2} - \frac{1}{L_s C_s}}$$

$$\lambda = -\frac{1}{2C_p R_p} \pm \sqrt{\frac{1}{4C_p^2 R_p^2} - \frac{1}{C_p L_p}}$$

- caso $\alpha > 0, \alpha > \omega_0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 < 0 \rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{\tau_1}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{\tau_2}$

$$x_0 = A_1 e^{-t/\tau_1} + A_2 e^{-t/\tau_2} \quad , \quad t \geq 0$$



$\sim 5\tau_{MAX} \Rightarrow x_0 \rightarrow 0$

- in questo caso ho supposto $A_1 > 0, A_2 < 0$, ma possono essere qualsiasi cosa; il grafico di x_0 viene dalla somma dei due grafici e va sicuramente a zero per tempi abbastanza grandi

- caso $\alpha > 0$, $\alpha < \omega_0$ $\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda = -\alpha \pm j\beta$

$x_0(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$, $t \geq 0$

$\Rightarrow x_0(t) = A_1 e^{(-\alpha + j\beta)t} + A_2 e^{(-\alpha - j\beta)t} = A_1 e^{-\alpha t} e^{j\beta t} + A_2 e^{-\alpha t} e^{-j\beta t} = e^{-\alpha t}(A_1 e^{j\beta t} + A_2 e^{-j\beta t})$

- x_0 deve essere reale, essendo una corr od una tensione → quantità fisica misurabile!

$\Rightarrow (A_1 e^{j\beta t} + A_2 e^{-j\beta t})$ deve $\in \mathbb{R}$

- ipotizzo $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$;

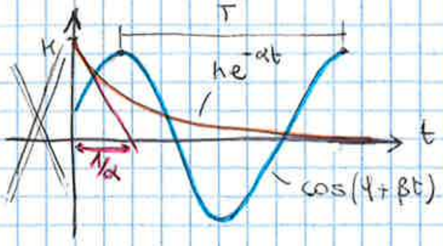
$A_1 = Ae^{j\varphi}$ (A: modulo $\in \mathbb{R}$; φ: fase)

$A_2 = Ae^{-j\varphi}$

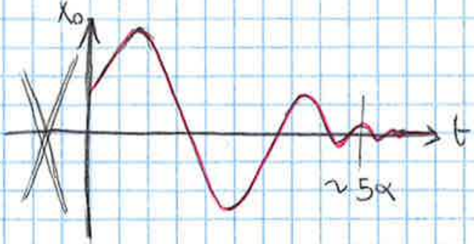
$\Rightarrow x_0(t) = e^{-\alpha t}(Ae^{j\varphi}e^{j\beta t} + Ae^{-j\varphi}e^{-j\beta t}) = \overbrace{Ae^{-\alpha t}}^{\mathbb{R}}(e^{j\varphi + j\beta t} + e^{-j\varphi - j\beta t}) =$

$= Ae^{-\alpha t} \cdot 2 \underbrace{\left(\frac{e^{j(\varphi + \beta t)} + e^{-j(\varphi + \beta t)}}{2}\right)}_{\cos(\varphi + \beta t)}$ $\Rightarrow 2A = k \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0(t) = k e^{-\alpha t} \cos(\varphi + \beta t) \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$



$\beta = \frac{2\pi}{T}$

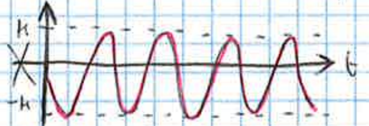


[funzione oscillante smorzata]

- con le condizioni iniziali si determinano A (o k) e φ

- **sottocaso:** $\alpha = 0$ $\Rightarrow \lambda = \pm j\beta$; $\beta = \omega_0$

$\Rightarrow x_0 = k \cos(\varphi + \beta t)$, $t \geq 0$



[funzione oscillante non smorzata]

- **sottocaso:** $\alpha = \omega_0$ $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$ $(\lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})$

$\Rightarrow x_0 = (A_1 t + A_2)e^{-\alpha t}$ [è una soluzione matematica; viene così perché perderei una soluzione usando la formula precedente]

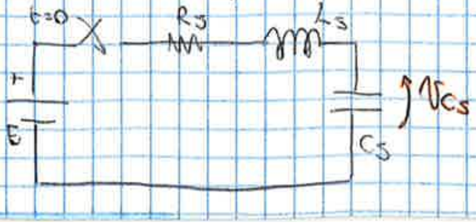
CASO NON OMOGENEO (termini noti $\neq 0$):

$x(t) = x_0(t) + x_p$

ipotesi: solo generatori costanti $\Rightarrow x_p = X_p$ costante

- eccetto che nell'oscillante non smorzato, X_p si trova osservando il comportamento all'infinito poiché $x_0(t)$ va a zero (vedi grafici)

- riprendo il primo cto (SERIE):



calcolo $X_p \to V_{Cs} = V_{Cs}(t \to \infty)$

poiché gen costanti $\Rightarrow$ tutto è costante $\Rightarrow$

=> esprimo ogni oscillazione con la formula di Eulero $\left[\cos(x) = \frac{e^{j(x)} + e^{-j(x)}}{2}\right]$

$$(*)\quad e = E_m \left[\frac{e^{j(\omega t+\beta)} + e^{-j(\omega t+\beta)}}{2}\right]$$

$$(\ast\ast)\quad v_{cp} = A\left[\frac{e^{j(\omega t+\vartheta)} + e^{-j(\omega t+\vartheta)}}{2}\right]$$

numeri complessi:

$$\underbrace{z}_{\in \mathbb{C}} = \underbrace{a + jb}_{\text{rappres. cartesiana}} = \underbrace{q e^{j\alpha}}_{\text{rappres. polare}}$$

num compl in forma polare

$$(*) \to e = \frac{E_m}{2}\left[e^{j\omega t}e^{j\beta} + e^{-j\omega t}e^{-j\beta}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega t}\underbrace{E_m e^{j\beta}}_{\hat{E}=} + e^{-j\omega t}\underbrace{E_m e^{-j\beta}}_{\hat{E}^*=}\right]$$

$$(\ast\ast) \to v_{cp} = \frac{A}{2}\left[e^{j\omega t}e^{j\vartheta} + e^{-j\omega t}e^{-j\vartheta}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega t}\underbrace{A e^{j\vartheta}}_{=\hat{A}} + e^{-j\omega t}\underbrace{A e^{-j\vartheta}}_{=\hat{A}^*}\right]$$

complesso coniugato

$$e(t) = \frac{1}{2}\left[\hat{E}e^{j\omega t} + \hat{E}^* e^{-j\omega t}\right] = E_m\cos(\omega t+\beta)$$

$$\left[\hat{E} = E_m e^{j\beta}\ ;\ \hat{A} = A e^{j\vartheta}\right]$$

$$v_{cp}(t) = \frac{1}{2}\left[\hat{A}e^{j\omega t} + \hat{A}^* e^{-j\omega t}\right] = A\cos(\omega t+\vartheta)$$

- sostituisco nell'eq diff: $\frac{dv_{cp}}{dt} + \frac{1}{RC}v_{cp} = \frac{e}{RC}$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\left[\hat{A}\,j\omega\,e^{j\omega t} + \hat{A}^*(-j\omega)e^{-j\omega t}\right] + \frac{1}{\cancel{2}RC}\left(\hat{A}e^{j\omega t} + \hat{A}^* e^{-j\omega t}\right) = \frac{1}{\cancel{2}RC}\left(\hat{E}e^{j\omega t} + \hat{E}^* e^{-j\omega t}\right)$$

$$\underset{\text{fue di t}}{e^{j\omega t}}\underbrace{\left(j\omega\hat{A} + \frac{\hat{A}}{RC} - \frac{\hat{E}}{RC}\right)}_{\text{numero } \mathbb{C}} = \underset{\text{fue di t}}{e^{-j\omega t}}\underbrace{\left(j\omega\hat{A}^* - \frac{\hat{A}^*}{RC} + \frac{\hat{E}^*}{RC}\right)}_{\text{numero } \mathbb{C}}$$

- le funzioni sono diverse => per soddisfare l'uguaglianza deve essere che

$$j\omega\hat{A} + \frac{\hat{A}}{RC} - \frac{\hat{E}}{RC} = 0 \quad e \quad j\omega\hat{A}^* - \frac{\hat{A}^*}{RC}, \frac{\hat{E}^*}{RC} = 0 \quad (\square)$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{A}\left(j\omega + \frac{1}{RC}\right) = \frac{\hat{E}}{RC} \Rightarrow \hat{A}\left(\frac{j\omega RC+1}{\cancel{RC}}\right) = \frac{\hat{E}}{\cancel{RC}} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\hat{E}}{j\omega RC+1} \quad (\Delta)$$

- sostituisco (Δ) in $(\square)$ applicando il complesso coniugato:

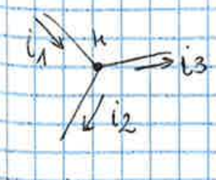
$$\frac{\hat{E}^*}{RC} - \frac{1}{RC}\frac{\hat{E}^*}{1-j\omega RC} + j\omega\frac{\hat{E}^*}{1-j\omega RC} = 0$$

$$\frac{\hat{E}^*}{RC} + \frac{-\hat{E}^* + j\omega RC\hat{E}^*}{RC(1-j\omega RC)} = 0 \Rightarrow \frac{\hat{E}^*}{RC} - \frac{\hat{E}^*\cancel{(1-j\omega RC)}}{RC\cancel{(1-j\omega RC)}} = 0$$

verificata! => basta la prima

- $\hat{A}$, $\hat{E}$ ovvero i numeri complessi associati alle mie variabili sono detti **FASORI**

DIMOSTRAZIONE PER UN KCL:



$\underbrace{i_1 = i_2 + i_3}_{KCL}$

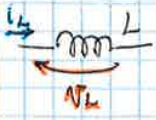
- correnti sinusoidali:

$i_1(t) = I_{M1}\cos(\omega t+\alpha_1)$
$i_2(t) = I_{M2}\cos(\omega t+\alpha_2)$
$i_3(t) = I_{M3}\cos(\omega t+\alpha_3)$

- fasori:

$\hat{I}_1 = I_{M1}e^{j\alpha_1}$
$\hat{I}_2 = I_{M2}e^{j\alpha_2}$
$\hat{I}_3 = I_{M3}e^{j\alpha_3}$

* INDUTTORE



$v_L = L \frac{di_L}{dt}$ nel mondo fisico

- se i_L, v_L sono oscillanti $\xrightarrow{\text{fasori}}$ $\hat{I}_L, \hat{V}_L$

$$\cancel{\frac{1}{2}}\left[\hat{V}_L e^{j\omega t} + \hat{V}_L^* e^{-j\omega t}\right] = L \frac{d}{dt}\left\{\cancel{\frac{1}{2}}\left[\hat{I}_L e^{j\omega t} + \hat{I}_L^* e^{-j\omega t}\right]\right\}$$

$$\hat{V}_L e^{j\omega t} + \hat{V}_L^* e^{-j\omega t} = L\hat{I}_L e^{j\omega t}(j\omega) + L\hat{I}_L^* e^{-j\omega t}(-j\omega)$$

$$e^{j\omega t}\underbrace{\left(\hat{V}_L - j\omega L\hat{I}_L\right)}_{\text{deve essere zero}} = e^{-j\omega t}\underbrace{\left(-\hat{V}_L^* - j\omega L\hat{I}_L^*\right)}_{\text{deve essere zero}}$$

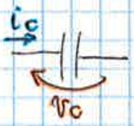
- dovendo essere zero, trovo che:

$$\boxed{\hat{V}_L = j\omega L\hat{I}_L}$$

[con i fasori non compare più la derivata, infatti i fasori fanno sparire le fun del tempo e quindi la derivata non avrebbe più senso]

$j\omega L$ ha dimensioni di ohm, e si chiama **IMPEDENZA** dell'induttore; spesso si indica con $Z_L = j\omega L$

* CONDENSATORE



$i_C = C \frac{dv_C}{dt}$ nel mondo fisico

- se i_C, v_C sono oscillanti $\xrightarrow{\text{fasori}}$ $\hat{I}_C, \hat{V}_C$

$$\cancel{\frac{1}{2}}\left[\hat{I}_C e^{j\omega t} + \hat{I}_C^* e^{-j\omega t}\right] = C \frac{d}{dt}\left\{\cancel{\frac{1}{2}}\left[\hat{V}_C e^{j\omega t} + \hat{V}_C^* e^{-j\omega t}\right]\right\}$$

$$\hat{I}_C e^{j\omega t} + \hat{I}_C^* e^{-j\omega t} = C\hat{V}_C e^{j\omega t}(j\omega) + C\hat{V}_C^* e^{-j\omega t}(-j\omega)$$

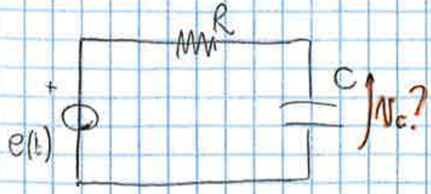
$$e^{j\omega t}\underbrace{\left(\hat{I}_C - j\omega C\hat{V}_C\right)}_{\text{deve essere zero}} = e^{-j\omega t}\underbrace{\left(-\hat{I}_C^* - j\omega C\hat{V}_C^*\right)}_{\text{deve essere zero}}$$

- dovendo essere zero, trovo che:

$$\boxed{\hat{I}_C = j\omega C\hat{V}_C}$$

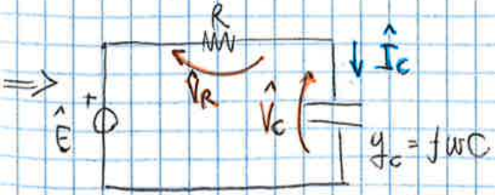
$j\omega C$ ha dimensioni di siemens, e si chiama **AMMETTENZA** del condensatore, spesso si indica con $y_C = j\omega C$

ESEMPIO:



$e(t) = E_m\cos(\omega t + \beta) \longrightarrow$ fasore: $\hat{E} = E_m e^{j\beta}$

- ridisegno il cto usando i fasori $\Longrightarrow$



$$\hat{V}_C = \hat{E}\frac{Z_C}{Z_R + Z_C} = \hat{E}\frac{\frac{1}{y_C}}{R + \frac{1}{y_C}} = \hat{E}\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \checkmark$$

[l'impedenza del condensatore è l'inverso dell'ammettenza]

$$\hat{V}_C = \hat{E}\frac{\frac{1}{\cancel{j\omega C}}}{\frac{j\omega CR + 1}{\cancel{j\omega C}}} = \frac{\hat{E}}{1 + j\omega CR} = p + jq = Me^{j\delta} \Longrightarrow v_C t = M\cos(\omega t + \delta)$$

* 

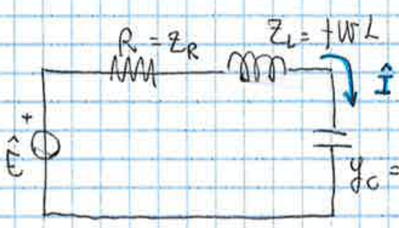
$$\hat{V} = \underbrace{(j\omega L)}_{z_L}\hat{I} \longrightarrow \hat{I} = \underbrace{\left(\frac{1}{j\omega L}\right)}_{y_L}\hat{V} \rightsquigarrow y_L = \frac{1}{j\omega L}\cdot\frac{j}{j} = -\frac{j}{\omega L}$$

* 

$$\hat{I} = \underbrace{(j\omega C)}_{y_c}\hat{V} \longrightarrow \hat{V} = \underbrace{\left(\frac{1}{j\omega C}\right)}_{z_c}\hat{I} \rightsquigarrow z_c = \frac{1}{j\omega C}\cdot\frac{j}{j} = -\frac{j}{\omega C}$$

ESEMPIO:

$\Longrightarrow$



$y_c = j\omega C$; $z_c = -\frac{j}{\omega C}$

$e(t) = E_m \cos(\omega t + \alpha)$ $\qquad$ $\hat{E} = E_m e^{j\alpha}$, (ω)

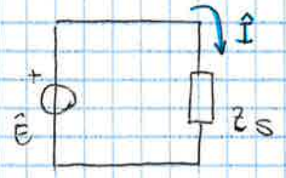
- impedenza equivalente della serie:

$$z_S = \sum z_k = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

IN GENERALE: $z = \underset{\text{resistenza}}{R} + j\underset{\text{REATTANZA}}{X}$ [impedenza forma cartesiana]

$y = \underset{\text{conduttanza}}{G} + j\underset{\text{SUSCETTANZA}}{B}$ [ammettenza forma cartesiana]

- riprendo l'esercizio:

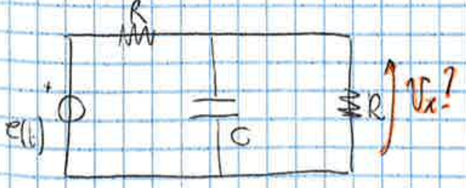
$\Longrightarrow$ 

$$\hat{I} = \frac{\hat{E}}{z_S} \; ; \; \text{ma} \begin{cases} |z_S| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \\ \angle z_S = \text{arctg} \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R} \end{cases}$$

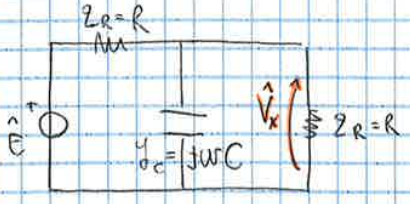
$$\Longrightarrow \hat{I} = \frac{E_m e^{j\alpha}}{|z_S| e^{j\angle z_S}} = \frac{E_m}{|z_S|} e^{j(\alpha - \angle z_S)}$$

$$\Longrightarrow i(t) = \frac{E_m}{|z_S|} \cos(\omega t + \alpha - \angle z_S)$$

ESEMPIO:



$\Longrightarrow$



$e(t) = E_m \cos(\omega t + \beta)$ $\qquad$ $\hat{E} = E_m e^{j\beta}$, (ω)

- risolviamo con ∥ e poi partitore:

y_p : ammettenza eq del ∥ : $\sum y_n = j\omega C + \frac{1}{R} \Longrightarrow$

Ⓐ $$\hat{V}_L' = \hat{E}_1 \frac{j\omega_1 L}{R + j\omega_1 L} = \underbrace{\hat{E}_1}_{Ae^{j\alpha}} \frac{\omega_1 L\, e^{j\pi/2}}{\sqrt{R^2+(\omega_1 L)^2}\; e^{j\,arctg\frac{\omega_1 L}{R}}} = \frac{A\omega_1 L}{\sqrt{R^2+(\omega_1 L)^2}}\, e^{j\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - arctg\frac{\omega_1 L}{R}\right)}$$

Ⓑ $$\hat{V}_L'' = \hat{E}_2 \frac{j\omega_2 L}{R + j\omega_2 L} = \underbrace{\hat{E}_2}_{Be^{j\beta}} \frac{\omega_2 L\, e^{j\pi/2}}{\sqrt{R^2+(\omega_2 L)^2}\cdot e^{j\,arctg\frac{\omega_2 L}{R}}} = \frac{B\omega_2 L}{\sqrt{R^2+(\omega_2 L)^2}}\, e^{j\left(\beta + \frac{\pi}{2} - arctg\frac{\omega_2 L}{R}\right)}$$

NOTA BENE: i due fasori $\hat{V}_L'$ e $\hat{V}_L''$ non si sommano, posso sommare solo quando torno ai due $v_L(t)$

$$\Rightarrow v_L'(t) = \frac{A\omega_1 L}{\sqrt{R^2+(\omega_1 L)^2}} \cos\left(\omega_1 t + \alpha + \frac{\pi}{2} - arctg\frac{\omega_1 L}{R}\right)$$

$$\Rightarrow v_L''(t) = \frac{B\omega_2 L}{\sqrt{R^2+(\omega_2 L)^2}} \cos\left(\omega_2 t + \beta + \frac{\pi}{2} - arctg\frac{\omega_2 L}{R}\right)$$

- per la sovrapposizione degli effetti:

$$v_L(t) = v_L'(t) + v_L''(t)$$

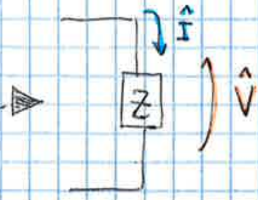
POTENZA ISTANTANEA (SINUSOIDALE):

- siamo in regime sinusoidale alla singola pulsazione ω:

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \alpha) \rightarrow \hat{I} = I_M e^{j\alpha} = |\hat{I}|\, e^{j\angle\hat{I}}$$

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \beta) \rightarrow \hat{V} = V_M e^{j\beta} = |\hat{V}|\, e^{j\angle\hat{V}}$$

- inoltre posso descrivere la nuvoletta con un'impedenza eq:



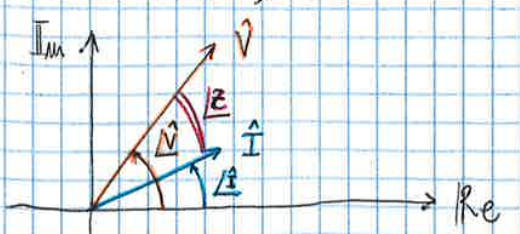
$$\hat{V} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coeff di} \\ \text{prop complesso,}}}{Z}\, \hat{I} \Rightarrow$$

$$Z = R + jX = |Z|\, e^{j\angle Z}$$

$$\Rightarrow |\hat{V}|\, e^{j\angle\hat{V}} = |Z|\, e^{j\angle Z}\, |\hat{I}|\, e^{j\angle\hat{I}} = |Z||\hat{I}|\, e^{j(\angle Z + \angle\hat{I})}$$

- se i due devono essere uguali deve essere:

$$|\hat{V}| = |Z||\hat{I}| \;;\quad \angle\hat{V} = \angle Z + \angle\hat{I} \quad \text{oppure} \quad \angle Z = \angle\hat{V} - \angle\hat{I}$$



- posso anche scrivere:

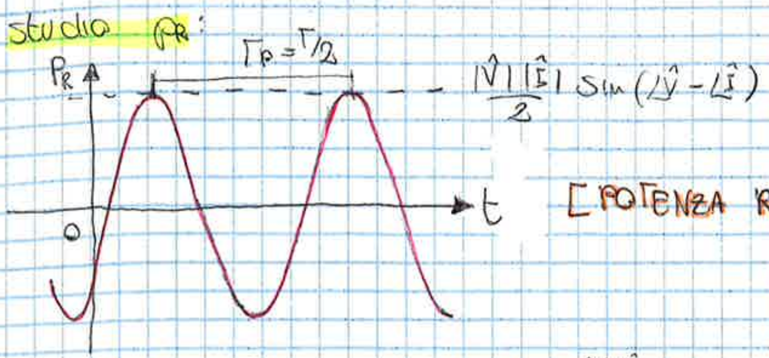
$$i(t) = \frac{1}{2}\left[\hat{I} e^{j\omega t} + \hat{I}^* e^{-j\omega t}\right]$$

$$v(t) = \frac{1}{2}\left[\hat{V} e^{j\omega t} + \hat{V}^* e^{-j\omega t}\right]$$

- potenza assorbita dal bipolo:

$$p(t) = v(t)\, i(t) = \frac{1}{2}\left[\underset{①}{\hat{V} e^{j\omega t}} + \underset{②}{\hat{V}^* e^{-j\omega t}}\right] \frac{1}{2}\left[\underset{③}{\hat{I} e^{j\omega t}}\ \underset{④}{\hat{I}^* e^{-j\omega t}}\right] =$$ passo in forma polare

- studio p_R:



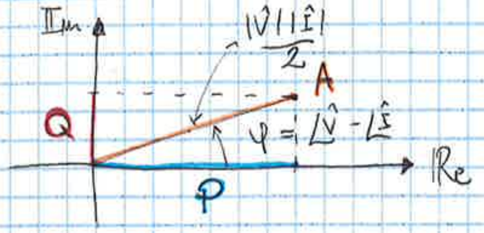
[POTENZA REATTIVA]

* chiamo potenza attiva $P = \frac{|\hat V||\hat I|}{2}\cos(\angle\hat V - \angle\hat I)$

* chiamo potenza reattiva $Q = \frac{|\hat V||\hat I|}{2}\sin(\angle\hat V - \angle\hat I)$

$\left[\hat V = Z\hat I;\ Z = |Z|e^{j\varphi}\right]$ $\varphi = \angle Z = \angle\hat V - \angle\hat I$

- sul piano di Gauss posso rappresentare P e Q:



POTENZA COMPLESSA:

$A = P + jQ$

$A = \frac{1}{2}\hat V\hat I^*$ [attenzione ad $\hat I^*$ complex coniugato!]

$$A = \frac{1}{2}\hat V\hat I^* = \frac{1}{2}|\hat V|e^{j\angle\hat V}\left(|\hat I|e^{j\angle\hat I}\right)^* = \frac{1}{2}|\hat V|e^{j\angle\hat V}|\hat I|e^{-j\angle\hat I} = \frac{1}{2}|\hat V||\hat I|e^{j(\angle\hat V - \angle\hat I)}$$

- P e Q fisicamente sono entrambe in Watt, ma per distinguere la reattiva dall'attiva introduco una nuova unità di misura (ingegneristica) =>

=> Volt-Ampere-reattivi : VAr

- la potenza complessa A si misurerà in Volt-Ampere : VA

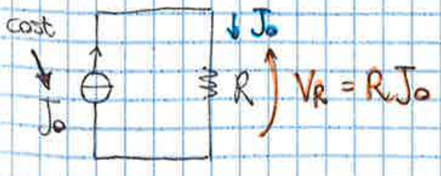
CASI PARTICOLARI:

*) $Z = R \rightarrow \varphi = 0$ (il complesso ha solo parte reale perché = R)

$A = \frac{1}{2}|\hat V||\hat I| = P + \cancel{jQ} \Rightarrow P = \frac{1}{2}|\hat V||\hat I|\ ;\ Q = 0$

- la potenza attiva è l'unica che sopravvive; le oscillazioni sono massime perché il $\cos(\angle\hat V - \angle\hat I)$ vale 1

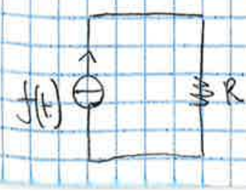
ESEMPIO:



pot assorbita da R

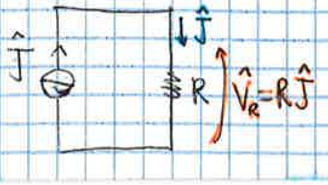
$p = RJ_0^2$

- se invece del gen costante ho un sinusoidale:



$j(t) = J_m\cos(\omega t + \alpha)$

$\hat J = J_m e^{j\alpha}$



pot attiva assorbita

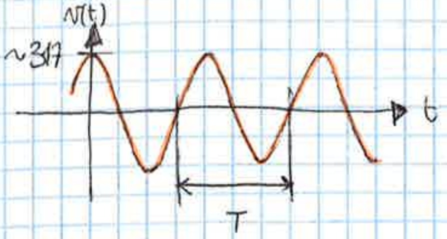
$P = \frac{1}{2}\hat V_R\hat J^* = \frac{1}{2}RJ_m^2$

prodotto coniugati

$\Rightarrow A_n = P_n + jQ_n \Rightarrow \sum_n (P_n + jQ_n) = 0 \Rightarrow \underset{0}{\cancel{\sum_n P_n}} + j \underset{0}{\cancel{\sum_n Q_n}} = 0$

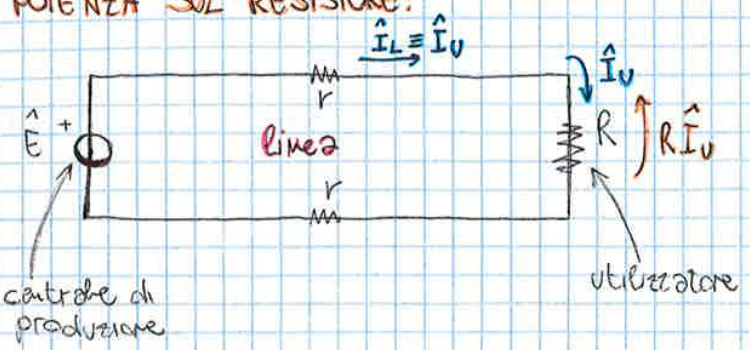
ENERGIA ELETTRICA:

- frequenza: 50 Hz ; $\omega = 2\pi f = 314$ rad/s
- all'utilizzatore finale $V_{eff} = 220$ V (230)
  - ↳ è data dai valori efficaci ⇒ l'ampiezza max è ~317 V



$T = \frac{1}{50}$ s $= 20$ mS

POTENZA SUL RESISTORE:



RESISTIVITÀ (materiale)

$r = \rho \frac{l}{S}$

r { la resistenza è proporzionale alla lunghezza ed inversamente proporzionale alla sezione del conduttore

- tipicamente r è piccolo, $r << R$

$\hat{E} = E_M e^{j\vartheta}$

$\hat{I} = \frac{\hat{E}}{R+2r}$

pot. assorbita dall'utilizzatore: $\frac{1}{2}|\hat{V}_U||\hat{I}_U| = \frac{1}{2} R |\hat{I}_U|^2 = \overset{\text{trascuro } r}{(r << R)} = \frac{1}{2} \cancel{R} \frac{|\hat{E}|^2}{R^{\cancel{2}}} = P_U$

- potenza assorbita dai fili di collegamento (LINEA): $\frac{1}{2}|\hat{V}_L||\hat{I}_L| = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} r |\hat{I}_L|^2 =$ $= r \left(\frac{|\hat{E}|}{R}\right)^2 = r \frac{|\hat{E}|^2}{R^2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2r}{R} P_U = P_L$
- la linea assorbe una potenza proporzionale a quella richiesta dall'utilizzatore
- pot. prodotta dalla centrale: $P_C = P_L + P_U$
- per altri utilizzatori il carico è un'impedenza:

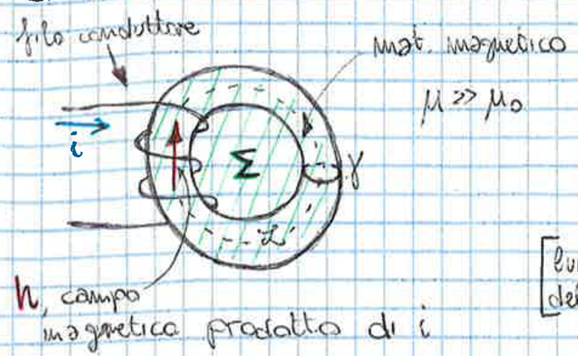
$Z_U = R_U + jX_U$

12/12/14

DATI DI TARGA: $P_U, E_{0eff} \Rightarrow R = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{P_U} = \frac{1}{2} \frac{(E_{0eff}\sqrt{2})^2}{P_U} = \frac{E_{0}^2{}_{eff}}{P_U}$

- nei dati di targa viene dato il valore efficace di E_0, non il valore massimo ⇒ per usarlo nelle formule devo moltiplicarlo per $\sqrt{2}$

CAMPO MAGNETICO:



- se voglio legare campo magnetico e corrente uso la **Legge di AMPERE**:

$$\oint_\gamma \vec{h}\, d\vec{l} = I_{tot\ in\ \Sigma}$$

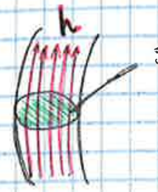
$$\Downarrow$$

[lunghezza del percorso] [numero di spire]

$$h\,\mathcal{L} = N i$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{h = \frac{N i}{\mathcal{L}}}$$



sez. anello: A

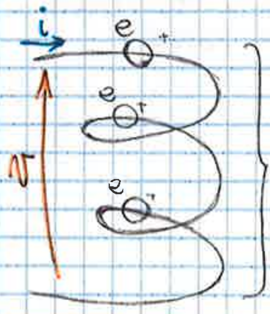
flusso: quantità di linee del campo nella sezione A

b : **induzione magnetica**, $b = \mu h$

flusso: $\phi = bA = \mu \frac{Ni}{\mathcal{L}} A$

tensione indotta in un conduttore circolare (spira) ⊥ a ϕ

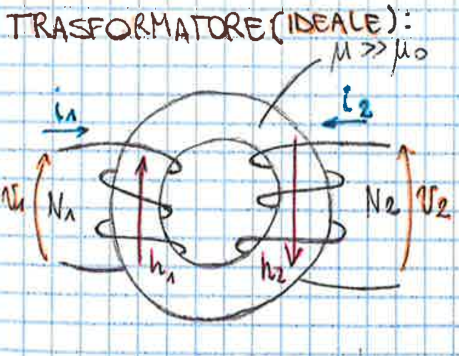
- **Legge di FARADAY**: $e = -\frac{d\phi}{dt} = -\mu \frac{N}{\mathcal{L}} A \frac{di}{dt}$



legge di funz. dell'induttore

N avvolgimenti ; $v = -Ne \Rightarrow v = \underbrace{\mu \frac{N^2 A}{\mathcal{L}}}_{L} \frac{di}{dt}$

TRASFORMATORE (IDEALE):



- dentro materiale magnetico: $h = h_1 + h_2$

$$\phi = \mu (h_1 + h_2) A$$

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= N_1 \frac{d\phi}{dt} \\ v_2 &= N_2 \frac{d\phi}{dt} \end{aligned}\right\} \boxed{\frac{v_2}{v_1} = \frac{N_2}{N_1}} \leftarrow \text{rapporto spire, } n$$

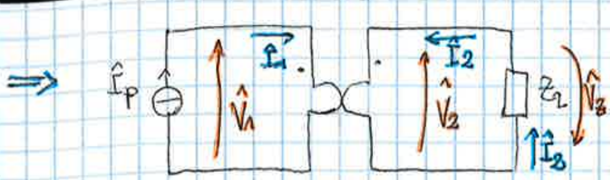
- $\phi = \mu A \left(\frac{N_1 i_1}{\mathcal{L}} + \frac{N_2 i_2}{\mathcal{L}} \right) = \frac{\mu A}{\mathcal{L}} \underbrace{(N_1 i_1 + N_2 i_2)} \Longrightarrow N_1 i_1 = -N_2 i_2$

$\mu \to \infty$

DEVE → 0 perché il flusso **DEVE** avere un valore finito

$$\boxed{\frac{i_2}{i_1} = -\frac{N_1}{N_2} = -\frac{1}{n}}$$

- le eq di funzionamento vengono da una derivata nel tempo ⟹ se ho un gen costante il trasformatore non funziona!

⟹ 

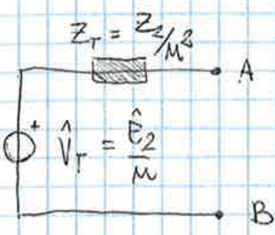
$\hat V_1 = Z_T \hat I_p$

$\hat I_1 = \hat I_p$; $\hat I_2 = -\frac{1}{\mu} \hat I_p$

$\hat V_3 = Z_2 \hat I_3 = -\frac{Z_2}{\mu} \hat I_p$

$$\hat V_2 = -\hat V_3 = \frac{Z_2}{\mu} \hat I_p \Rightarrow \hat V_1 = \frac{\hat V_2}{\mu} = \frac{Z_2}{\mu^2} \hat I_p \Rightarrow Z_T = \frac{Z_2}{\mu}$$

- equivalente di Thevenin:

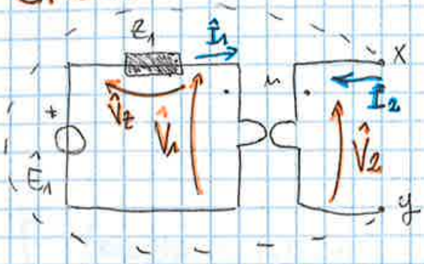


- se riesco ad isolare il secondario, ottengo sempre

$\boxed{\hat V_T = \frac{\hat E_2}{\mu}}$; $\boxed{Z_T = \frac{Z_2}{\mu^2}}$

(ho qualcosa attaccato al secondario)

CASO 2:



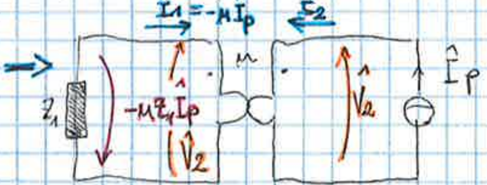
- equivalente di Thevenin:

$\hat I_2 = 0 \Rightarrow \hat I_1 = 0$ (sto ragionando sulla tensione a vuoto)

$\hat I_1 = 0 \Rightarrow \hat V_z = 0$

$\Rightarrow \hat V_1 = \hat E_1 \Rightarrow \hat V_T = \hat V_2 = \mu \hat E_1$

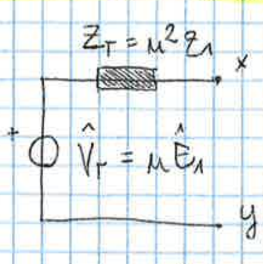
- per l'impedenza eq devo ricorrere al gen di prova ⟹

⟹ 

$\hat V_1 = -(-\mu Z_1 \hat I_p) = \mu Z_1 \hat I_p$

$\hat V_2 = \mu \hat V_1 = \mu^2 Z_1 \hat I_p \Rightarrow Z_T = \mu^2 Z_1$

- equivalente di Thevenin:

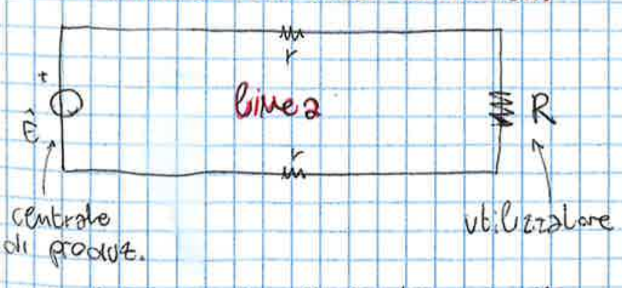


- se riesco ad isolare il primario, ottengo sempre

$\boxed{\hat V_T = \mu \hat E_1}$; $\boxed{Z_T = \mu^2 Z_1}$

(ho qualcosa attaccato al primario)

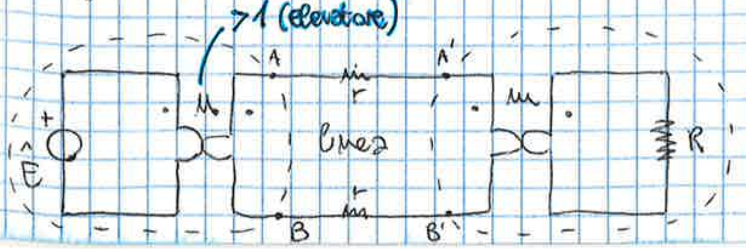
TRASFORMATORE SULLA LINEA ELETTRICA:



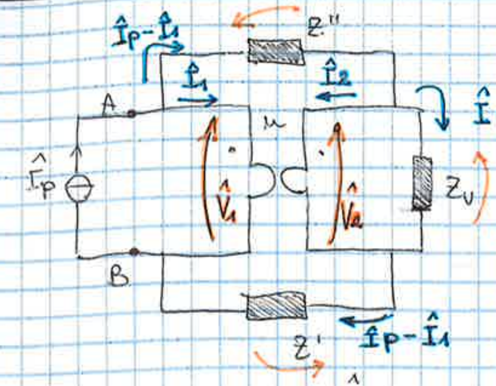
[pot assorbita dalla linea]

$$P_L = \underset{\ll 1}{\boxed{\frac{2r}{R}}} P_U$$

- voglio provare a ridurre ulteriormente la pot dissipata:



[mi serve μ grande perché il gen genera circa 2kV e sulla linea ho bisogno di ~ 317kV a causa di μ piccolo (vedi dopo per μ piccolo!)]



$$\hat{I}_2 = -\frac{1}{\mu}\hat{I}_1$$

$$\hat{I}_U = (\hat{I}_p - \hat{I}_1) - \hat{I}_2 = \hat{I}_p - \hat{I}_1 + \frac{1}{\mu}\hat{I}_1$$

$$\hat{V}_2 = Z_U \hat{I}_U = Z_U \hat{I}_p + Z_U \hat{I}_1 \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)$$

$$\hat{V}_1 = \frac{\hat{V}_2}{\mu} = \frac{Z_U}{\mu}\hat{I}_p + \frac{Z_U}{\mu}\hat{I}_1\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) \quad ⊡$$

- KVL esterno: $\hat{V}_1 = Z''(\hat{I}_p - \hat{I}_1) + Z_U \hat{I}_p + Z_U \hat{I}_1\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) + Z'(\hat{I}_p - \hat{I}_1)$ ⓐ

↻ ↺

$$⊡\ \hat{I}_1 \frac{Z_U}{\mu}\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right) = \hat{V}_1 - \frac{Z_U}{\mu}\hat{I}_p \Rightarrow \hat{I}_1 = \left(V_1 - \frac{Z_U}{\mu}\hat{I}_p\right)\frac{\mu^2}{1-\mu}\frac{1}{Z_U}$$

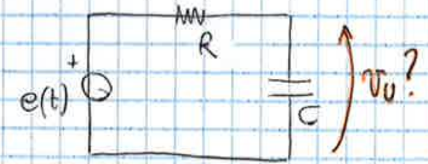
$$ⓐ\ \hat{V}_1 = \hat{I}_p(Z'' + Z_U + Z') + \hat{I}_1\left(Z_U \frac{1-\mu}{\mu} - Z'' - Z'\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{V}_1 = \hat{I}_p(Z'' + Z_U + Z') + \frac{\mu^2}{1-\mu}\frac{1}{Z_U}\hat{V}_1\left(Z_U\frac{1-\mu}{\mu} - Z'' - Z'\right) - \frac{\mu^{\cancel{2}}}{1-\mu}\frac{1}{\cancel{Z_U}}\frac{\cancel{Z_U}}{\cancel{\mu}} I_p\left(Z_U\frac{1-\mu}{\mu} - Z'' - Z'\right)$$

$$\hat{V}_1\left[1 - \frac{\mu^2}{1-\mu}\frac{1}{Z_U}\left(Z_U\frac{1-\mu}{\mu} - Z'' - Z'\right)\right] = \hat{I}_p\left[Z'' + Z_U + Z' - \frac{\mu}{1-\mu}\left(Z_U\frac{1-\mu}{\mu} - Z'' - Z'\right)\right]$$

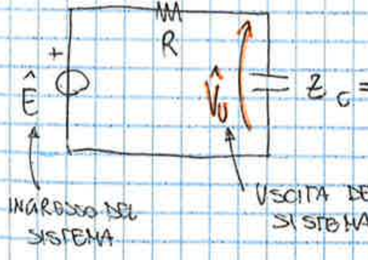
$$\Rightarrow Z_T = \frac{Z'' + \cancel{Z_U} + Z' - \cancel{Z_U} + \frac{\mu}{1-\mu}Z'' + \frac{\mu}{1-\mu}Z'}{1 - \mu + \frac{\mu^2}{1-\mu}\frac{Z''}{Z_U} + \frac{\mu^2}{1-\mu}\frac{Z'}{Z_U}}$$

FILTRI:



$e(t) = E_M \cos(\omega t + \alpha)$; ω parametro, posso impostare la freq che voglio (non è più fissa)

⇓ PASSO AI FASORI



$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$

$\hat{E} = E_M e^{j\alpha}$; ω

$$\hat{V}_U = \hat{E}\ \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

→ coeff prop uscita\ingresso è funzione di ω ⇒ **FUNZIONE DI TRASFERIMENTO, $H(\omega)$**

$= H(\omega)$

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{j\omega CR + 1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

$\in \mathbb{C} \Rightarrow$ difficile da rappresentare, passo in polari e ricavo modulo e fase

$$H(\omega) = |H| e^{j\angle H}$$

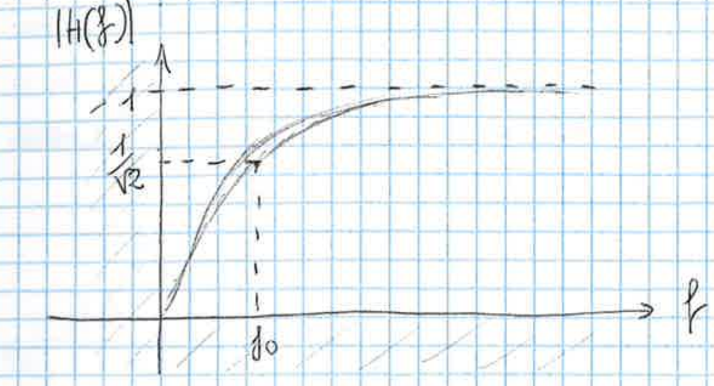
- $$|H(\omega)| = \frac{1}{|1 + j\omega CR|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(CR)^2\left(\frac{1}{(CR)^2} + \omega^2\right)}} = \frac{\frac{1}{CR}}{\sqrt{\left(\frac{1}{CR}\right)^2 + \omega^2}}$$

$$H = \frac{\hat{V}_0}{\hat{E}} = \frac{j2\pi f \, L/R}{1 + j2\pi f \, L/R} = \frac{j2\pi \, L/R \, f}{2\pi \frac{L}{R}\left(\frac{1}{2\pi \frac{L}{R}} + jf\right)} = \frac{j \, f/f_0}{1 + j \, f/f_0}$$

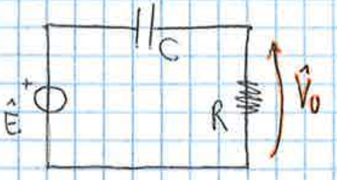
$$|H(f)| = \frac{f/f_0}{\sqrt{1^2 + (f/f_0)^2}} = \frac{f/f_0}{\sqrt{1 + (f/f_0)^2}}$$

$$\angle H(f) = \angle \text{Num} - \angle \text{Den} = \frac{\pi}{2} - \text{arctg} \frac{f/f_0}{1}$$

poiché ho un numero immaginario

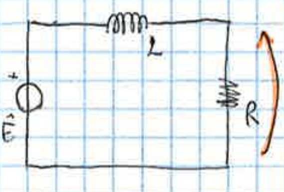


ESERCIZIO:



$$\Rightarrow H' = \frac{\hat{V}_0}{\hat{E}}$$

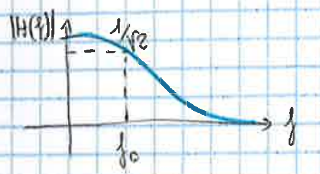
ESERCIZIO:



$$\Rightarrow H'' = \frac{\hat{V}_0}{\hat{E}}$$

- i grafici dei filtri vengono espressi nella forma $20\,\underbrace{\log_{10}}_{\text{Log}}|H| \rightarrow \text{dB}$

p. es considero il filtro passa - basso:

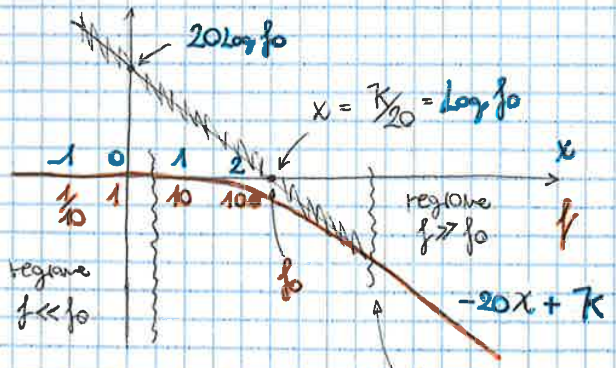


$$20 \text{ Log} \frac{1}{\sqrt{1+(f/f_0)^2}} = \cancel{20 \text{ Log} 1}_{0} - 20 \text{ Log} \sqrt{1+(f/f_0)^2} =$$

grafico ✪

$$= -20\,\frac{1}{2} \text{ Log}\left[1+(f/f_0)^2\right] = H_{dB}$$

- per $f \ll f_0 \Rightarrow H_{dB} = -10\,\cancel{\text{Log} 1}_{0}$
- per $f \gg f_0 \Rightarrow H_{dB} = -10 \text{ Log}(f/f_0)^2 = -20 \text{ Log}\frac{f}{f_0} = -20\,\underbrace{\text{Log} f}_{x} + \underbrace{20 \text{ Log} f_0}_{\substack{\text{costante,} \\ K}}$

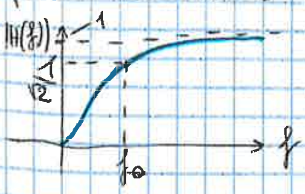


la retta vale solo da qui in poi, $f \gg f_0$

- usando il Log non mi rimane solo più il semiasse positivo, ma l'asse da $(-\infty, +\infty)$
- il grafico esprime esattamente la stessa cosa del grafico ✪
- è la curva di H espresso in dB

- per valori di H molto negativi non passa nulla, per valori di H vicini allo zero passa la frequenza

p es considero il filtro passa - alto:



$$20 \text{ Log}|H| = 20 \text{ Log}\frac{f}{f_0} - 20 \text{ Log}\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^2} =$$

$$= 20 \text{ Log} f - \overbrace{20 \text{ Log} f_0}^{K} - 10 \text{ Log}\left[1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right] = H_{dB}$$

- per $f \gg f_0 \Rightarrow H_{dB} = 20 \text{ Log} f - K - 20 \text{ Log} f/f_0 = \cancel{20 \text{ Log} f} - \cancel{K} - \cancel{20 \text{ Log} f} + \cancel{\overbrace{20 \text{ Log} f_0}^{K}} = 0$
- per $f \ll f_0 \Rightarrow H_{dB} = 20 \text{ Log} f - 20 \text{ Log} f_0 - 10\,\cancel{\text{Log} 1}_{0} = 20\,\overbrace{\text{Log} F}^{x} - \overbrace{20 \text{ Log} f_0}^{K}$