



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1467A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Pinto

MATERIA: Topografia. Prof.Cina

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

TOPOGRAFIA

La superficie terrestre con i manufatti dell'uomo NON è definibile ANALITICAMENTE \Rightarrow È NECESSARIO sostituire la SUPERFICIE FISICA DELLA TERRA con una SUPERFICIE DI RIFERIMENTO che (anche se approssimata), tipochi:

- REGolarITÀ
- CONTInUITÀ
- LEVIGATEZZA

legame = noto e facilmente realizzabile

\Rightarrow comprese e possibile trattare matematicamente

SUP DI RIFERIMENTO = data dalla PROIEZIONE di tutti i **PUNTI** caratteristici (realizzabile con FID A PIOMBO, LIVELLA O PENDOLO)

Questa SUP di RIFERIMENTO IDEALE è detta

GEOIDE

superficie che in ogni punto è normale alla direzione della verticale e coinciderebbe con la superficie dei mari

Ogni punto E al geode è univocamente determinato da:

- COPPIA DI COORDINATE CURVILINEE
- DISTANZA TRA IL PUNTO REALE E LA SUA PROIEZIONE (QUOTA)

2 TIPI DI PUNTI

di **DETTAGLIO**

descrivono l'andamento del terreno. Devono essere sufficientemente densi

- numerosi
- precisione anche solo grafica
- non materializzati
- riferiti ad almeno 2 pun di inquadramento

di **INQUADRAMENTO**

definiscono l'inquadramento del S.R (sono la sua realizzazione pratica)

- struttura portante dell'edificio
- pochi vertici materializzati
- rete di misure
- precisione eccedere il graficismo

PROCEDURA DI RILIEVO

- Descrizione del terreno (forma complessa) tramite un numero limitato di punti ma suff.
- Ogni punto fisico sarà proiettato sul geode lungo la verticale
- La posizione relativa sul geode dei punti sarà determinata tramite la misura di **ANGOLI** e **DISTANZE**
- la posizione dei puni proiettati sul geode definita dalle coordinate curvilinee (u, v)
- Rappresentazione ottenuta \rightarrow disegnata su un supporto arvo. Per questo, stabilita scorzispon = detta biunivoca tra c. curvilinee e quelle piane (x, y)

Problemi

Misurazione angoli e distanze = **IRREALIZZABILI** (geode ideale) \Rightarrow eseguite su sup reale fisica. I metodi usati forniscono valori \sim a quelli che si sarebbero ottenuti operando sul geode. Allo stesso modo è impossibile misurare le quote \Rightarrow grazie agli strumenti si misurano i **DISlivelli** tra puni sulla sup terrestre. le quote si ricaveranno indirettamente come somma di dislivelli a partire da puni di quota nota.

FORZE

↳ CONSERVATIVE → ENERGIA POTENZIALE

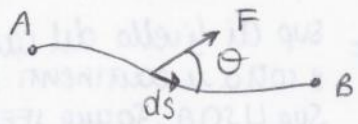
↳ F. conservativa se il lavoro da essa compiuto su di un corpo è NULLO quando il corpo percorre una traiettoria chiusa (pualunque).

CAMPO DI FORZA CONSERVATIVO

La forza F che il campo esercita su di un corpo è funzione della posizione.

Variatione E_p

$$u_A - u_B = \int_A^B F_s ds \quad F_s = F \cos \theta$$



Per definire l' E_p in un punt si sceglie di norma un punt in cui si pone l'energia potenziale $u=0$ e si avrà una funzione $u = f(x, y, z)$

SUP EQUIPOTENZIALE $\Rightarrow u = f(x, y, z) = \text{CONSTANTE}$

Su questa : per spostare un corpo da punt a punt \Rightarrow lavoro nullo
 \Rightarrow In ogni punto le LINEE DI FORZA sono \perp alla sup.

Data la superficie equipotenziale, si possono costruire le linee di forza tracciando le curve che le intersecano ortogonalmente.

Applicazione di questi concetti alla terna.

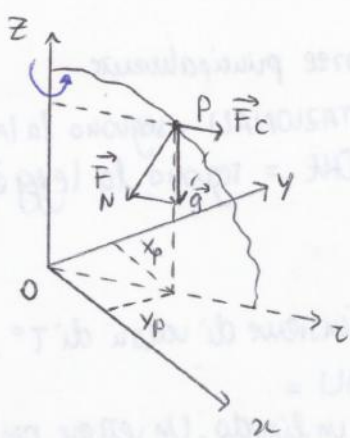
Stabilisco un S.R. CARTESIANO $[0, x, y, z]$ con origine nel baricentro della terna
 asse z = asse rotazione
 assi x, y = assi di inerzia
 } SISTEMA GEOCENTRICO (ECEF)

g → CAMPO GRAVITAZIONALE

\vec{g} in un generico punto P è una funzione della posizione di P + risultante di 2 F:

• \vec{F}_N = forza di attrazione Newtoniana su m_0
 Risultante di tutte le forze elementari da ogni elemento esercitata sull'unità di m posta in P.

• \vec{F}_c = forza centrifuga sulla massa posta in P dovuta alla rotazione della terna intorno a z.
 v. angolare : $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$
 acc : $\vec{c} = \omega^2 r \quad r = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}$



3 FORZE CONSERVATIVE \Rightarrow 3 POTENZIALI

\vec{g}	→	W
\vec{F}_c	→	ψ
\vec{F}_N	→	$V = U$

Dato che

$$\vec{g} = \sqrt{F_c + F_N}$$



i potenziali
(Possono essere sommati in quanto quantità scalari)

$$W = \nu + V$$

Ricavo analiticamente i 3 potenziali

Considero un corpo di prova nel punto P del campo di forza. Suppongo di spostarlo di ds , lungo la direzione di \vec{g} .

La derivata del potenziale lungo la direz. e fornisce la componente della forza in quella direzione

Si che: $dW = \vec{g} \cdot d\vec{s}$

In generale la COMPONENTE DI UN CAMPO secondo una direzione qualunque è uguale alla VARIAZIONE DEL POTENZIALE lungo quella direzione riferita all'unità di lunghezza.

Il vettore campo è il GRADIENTE del POTENZIALE, e diretto \perp alla sup equipotenziale.

$$\vec{g} = \text{grad} W$$

$$\vec{g} = \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right)$$

Essendo una SUP. EQUIPOTENZIALE $\Rightarrow W = \text{cost} \Rightarrow dW = 0$

dW può valere 0 per 3 motivi

$\vec{g} = 0$	NO
$d\vec{s} = 0$	NO
$\vec{g} \perp d\vec{s}$	✓

Altra conferma che \vec{g} è ortogonale alla sup equipotenziale

Osservazioni:

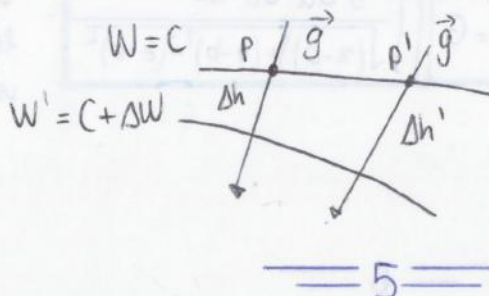
Derivate prime di $W =$ funzioni continue \rightarrow sup equipotenziali lisce, senza spigoli o punti angolosi. In ogni punto \rightarrow una sola normale univocamente definita, variabile con continuità.

Date 2 sup equipotenziali vicine $\begin{cases} W = C \\ W' = C + \Delta W \end{cases} \Rightarrow$ la distanza sarà $\Delta h = \frac{\Delta W}{g}$

se \vec{g} e \vec{g}' sono i valori del campo nei punti P e P' su $W = C \Rightarrow \vec{g} \Delta h = \vec{g}' \Delta h' = \text{cost}$

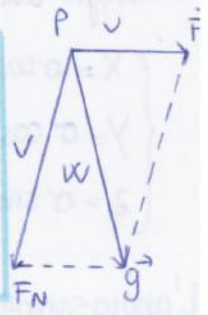
ma \vec{g} e \vec{g}' non sono mai uguali tra loro \Rightarrow le sup equipotenziali non sono geometricamente //

sono solo + ravvicinate quando la gravità aumenta (però diminuisce verso l'equatore).



RIASSUNTO FORZE e POTENZIALI

FORZA CENTRIFUGA	$\vec{F}_c = m_0 \omega^2 \vec{r}$	$v = \frac{1}{2} \omega^2 r^2$
FORZA GRAVITAZIONALE	$\vec{F}_N = -G \frac{dm}{r^2}$	$V = G \iiint \frac{\delta da db dc}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$
FORZA DI GRAVITÀ	\vec{g}	W



So che $W = v + V$

Se pongo $W = \text{cost} \Rightarrow \boxed{v(x, y) + V(x, y, z) = \text{cost}}$ ← Equazione famiglia di superfici equipotenziali

NB: sup equipotenziali del campo gravitazionale $\rightarrow \infty$

Una volta definite le sup. equipotenziali, creo:

- la LINEE DI FORZA della gravità tracciando le curve che intersecano ortogonalmente le superfici.
- la VERTICALE, realizzabile con il filo a piombo, tg alla linea di forza più indeterminato punto

\Rightarrow GEOIDE = superficie equipotenziale del campo gravitazionale, passante per il punto di posta ϕ , definito dal livello medio del mare

$$W = V(x, y, z) + v(x, y) = W_0$$

↓
 Impossibile da determinazione data la sua dipendenza da $\phi \Rightarrow$ ricerca un'espressione approssimata di v

\Rightarrow SVILUPPO IN SERIE

IMPOSSIBILE determinare rigorosamente l'equazione del geode

Sviluppo in serie di funzioni sferiche \Rightarrow passaggio dalle coordinate GEOCENTRICHE (x, y, z) \rightarrow POLARI $(\sigma, \varphi, \lambda)$

Dopo lo sviluppo V risulterà essere: $\boxed{V = V' + T}$
 parte sviluppabile \rightarrow POTENZIALE ANOMALO (potenziale tendente di grado ≥ 3)

Dato che: $W = V + v$

Ma ora: $V = V' + T \Rightarrow W = V' + T + v$

Ponendo: $V' + v = U \Rightarrow \boxed{W = T + U}$

$\vec{g} = \text{grad } W = \text{GRAVITÀ REALE}$
 $\vec{g}' = \text{grad } U = \text{GRAVITÀ NORMALE}$
 $= \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$

la differenza di modulo tra \vec{g} e \vec{g}' è detta ANOMALIA DI GRAVITÀ

a = semiasse equatoriale
 c = semiasse polare

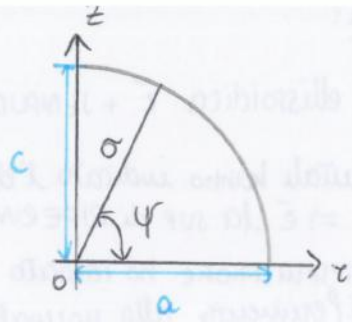
tramite satellite

SCHIACCIAMENTO GEOMETRICO (α)

$$\alpha = \frac{a-c}{a} = 1 - \frac{c}{a} \sim \frac{1}{300}$$

EQUAZIONE SFEROIDE (coordinate polari)

$$\sigma = a(1 - \alpha \sin^2 \psi)$$



$$(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = a \left(1 - \alpha \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

Considero ora un ellissoide di rotazione con gli stessi semiassi a, c dello sferoide.

→ È possibile sostituire l'equazione dello sferoide con quella dell'ellissoide? ← Dipende dall'errore

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \frac{a^2}{c^2} = a^2$$

ma cos'è $\frac{a^2}{c^2}$? lo so che $\frac{c}{a} = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 1 - \frac{c}{a}$

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{1}{(1 - \alpha)^2}$$

$$(1 - \alpha)^2 = (1 - 2\alpha + \alpha^2) \quad \text{con } \alpha \sim \frac{1}{300} \Rightarrow \alpha^2 \sim \frac{1}{90000} \sim 10^{-5}$$

$$\Rightarrow (1 - \alpha)^2 \approx 1 - 2\alpha$$

sviluppo in serie binomiale

$$\Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{1}{(1 - 2\alpha)} = (1 - 2\alpha)^{-1} \approx 1 + 2\alpha$$

Nella determinazione di c si commette un errore pari a 35 ACCETTABILE

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - 2\alpha z^2$$

$$\sigma^2 = a^2 \left(1 - 2\alpha \frac{z^2}{a^2} \right)$$

$\frac{a}{\sigma}$ } stesso ordine di grandezza \Rightarrow

È possibile accettare la seguente sostituzione

$$\frac{z^2}{a^2} \approx \frac{z^2}{\sigma^2} = \sin^2 \psi$$

$$\sigma^2 = a^2 (1 - 2\alpha \sin^2 \psi)$$

$$\sigma = a (1 - 2\alpha \sin^2 \psi)^{1/2}$$

(utilizzato lo sviluppo binomiale + trascurati termini in α^2 e sup)

EQUAZIONE DELL'ELLISSOIDE di ROTAZIONE

$$\sigma = a(1 - \alpha \sin^2 \psi)$$

→ coincide con lo sferoide a meno di un errore di $1/\alpha^2 \sim 10^{-5}$

SISTEMI DI COORDINATE DELL'ELLISSOIDE

COORDINATE GEOGRAFICHE

a = semiasse maggiore
 c = " minore

SCHIACCIAMENTO

$$\alpha = \frac{a-c}{a} = 1 - \frac{c}{a}$$

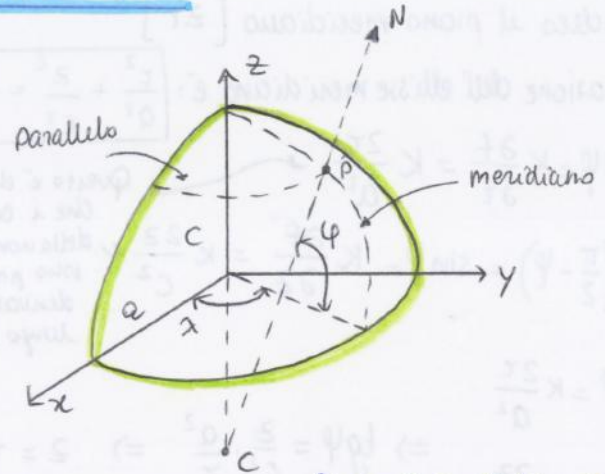
PRIMA ECCENTRICITÀ

$$e^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$

SECONDA ECCENTRICITÀ

$$e'^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2}$$

NB: geode $\vec{N} \equiv \vec{N}$
 ellissoide $\vec{N} \neq \vec{N}$



Punto P è all'ellissoide
 (N) = normale passante per P
 questa incontra l'asse z in C
 C = centro di curvatura dell'ellisse meridiana in P *

Relazioni tra queste

$$e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2}$$

$$e^2 = \frac{e'^2}{1+e'^2}$$

$$(1-e^2)(1+e'^2) = 1$$

$$\alpha = 1 - \sqrt{1-e^2}$$

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2$$

$$\frac{a}{c} = \sqrt{1+e'^2}$$

$$\frac{c}{a} = \sqrt{1-e^2} = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow c = (1 - \alpha)a$$

* La generatrice, e quindi ogni meridiano, è un'ELLISSE di SEMIASSE a e c detta **ELLISSE MERIDIANA**

φ = **LATITUDINE** di P = angolo acuto che N forma con il piano equatoriale $[x, y]$ con segno concorde all'asse z
 $\varphi = -90^\circ \div 90^\circ$

λ = **LONGITUDINE** di P = angolo diedro che il semipiano meridiano passante per P forma con un semipiano meridiano origine (es. piano $[z, x]$)
 $\lambda = 0 \div 360^\circ$

PARALLELI = linee E all'ellissoide di uguale latitudine

MERIDIANI = linee E all'ellissoide di uguale longitudine

(φ, λ) = **COORDINATE GEOGRAFICHE ELLISSOIDICHE** = individuano unicamente il punto P e N sono un sistema di coordinate aritmetiche superficiali

es. Torino $\varphi = 45^\circ 7' 12''$, 1111 N
 $\lambda = 8^\circ 09' 14''$, 1111 E

$$\begin{cases} x = r \cos \lambda \\ y = r \sin \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{w} \cos \varphi \cos \lambda \\ y = \frac{a}{w} \cos \varphi \sin \lambda \end{cases}$$

$$z = r \operatorname{tg} \varphi (1 - e^2) = \frac{a \cos \varphi}{w} \operatorname{tg} \varphi (1 - e^2) = \frac{a \cos \varphi}{w} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} (1 - e^2) = \frac{a \sin \varphi}{w} (1 - e^2)$$

$$\boxed{z = \frac{a}{w} \sin \varphi (1 - e^2)}$$

II EQ. PARAMETRICA DELL'ELLISSE MERIDIANA

$$\begin{cases} x = \frac{a}{w} \cos \lambda \cos \varphi \\ y = \frac{a}{w} \sin \lambda \cos \varphi \\ z = \frac{a}{w} \sin \varphi (1 - e^2) \end{cases} \quad N = \frac{a}{w} \Rightarrow \begin{cases} x = N \cos \varphi \cos \lambda \\ y = N \cos \varphi \sin \lambda \\ z = N(1 - e^2) \sin \varphi \end{cases}$$

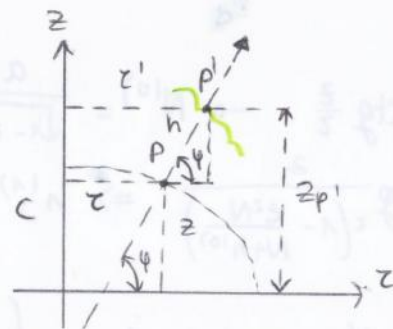
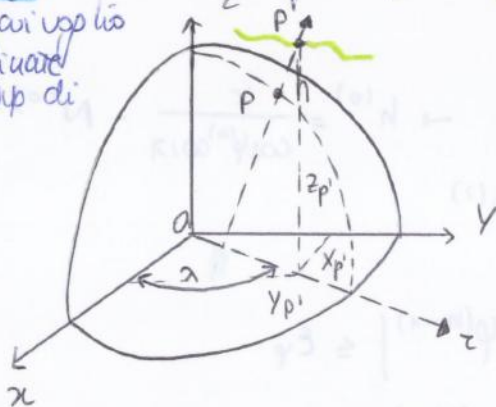
Date le equazioni parametriche \Rightarrow note le COORDINATE GEOGRAFICHE di un punto P (λ, φ) \Rightarrow è possibile ricavare le corrispondenti COORDINATE GEOCENTRICHE (x, y, z).

$$(\lambda, \varphi) \rightarrow (x, y, z)$$

CASO PARTICOLARE

il punto (P') di cui vogliamo calcolare le coordinate non giace sulla superficie di riferimento.

Ma è alla terra.



$$\begin{aligned} r' &= r + h \cos \varphi \\ z' &= z + h \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x' = r' \cos \lambda \\ y' = r' \sin \lambda \end{cases}$$

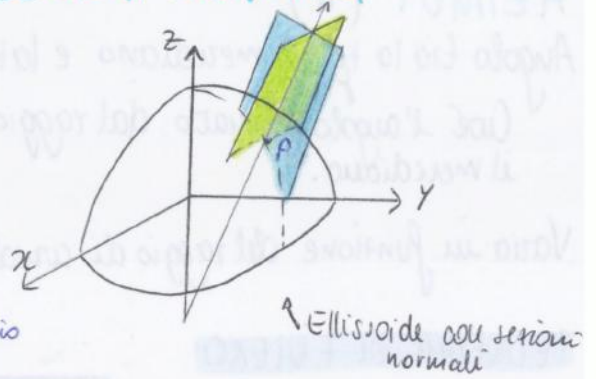
Dalle coordinate geografiche calcolo delle geocentriche

$$\boxed{(\lambda, \varphi, h) \rightarrow (x, y, z)}$$

$$\begin{aligned} x &= (N+h) \cos \varphi \cos \lambda \\ y &= (N+h) \cos \varphi \sin \lambda \\ z &= N(1 - e^2) \sin \varphi + h \sin \varphi \\ &= [N(1 - e^2) + h] \sin \varphi \end{aligned}$$

RAGGI DI CURVATURA DELL'ELLISSOIDE + SEZIONI NORMALI

Considero un punto P e all'ellissoide e la sua normale.



- Tutti i piani che contengono la normale (il fascio di piani aventi x come la normale) intersecano l'ellissoide secondo linee piane dette **SEZIONI NORMALI**

- Tutte le ALTRE INTERSEZIONI tra l'ellissoide e il fascio di piani che non contengono la normale sono dette

SEZIONI OBLIQUE

RAGGI DI CURVATURA

L'ellissoide ha 2 semiassi principali. A seconda di come viene sezionato \Rightarrow raggi \neq .

- **SEZ. NORMALI** nel punto P vi sono raggi \neq in funzione dell'angolo che la sezione normale genera con il piano che definisce la sezione normale meridiana

$\left\{ \begin{array}{l} \text{raggi variano con continuità} \\ \cdot \text{minimo} = \rho \\ \cdot \text{max} = N \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{sezione normale principale} \\ \text{con} \\ \text{raggi principali di curvatura} \end{array}$

NB: se sup di rotazione ellissoide tenesse la sezione normale ρ con il meridiano passante x P l'altro \perp al meridiano (piano che ha la tp al parallel pu)

Altri parametri:

• **CURVATURA (C)** $C = \frac{1}{\rho}$ cioè, l'inverso del raggio di curvatura di quel punto

• **CURVATURA MEDIA (CM)** $CM = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{N} \right)$ media aritmetica delle curvature di tutte le sezioni normali calcolate in quel punto

• **CURVATURA TOTALE (CT)** $CT = \frac{1}{\rho N}$ l'inverso del quadrato della media aritmetica di tutti i raggi.

- \rightarrow PIANO: sup con CT sempre nulla - 2 direzioni qualunque = principali
- \rightarrow CILINDRO/CONO: sup con CT sempre nulla, una delle 2 direzioni principali e la direzione della generatrice. L'altra \perp ad essa
- \rightarrow SFERA: $CT = \text{costante} = \frac{1}{R^2}$ - 2 qualsiasi direzioni \equiv principali
- \rightarrow ELLISSOIDE: $CT = \text{variabile} = \frac{1}{\rho N}$ (costante su ogni parallelo)

$$= \frac{-a \sin \varphi (1 - e^2 \sin^2 \varphi)}{\omega^3}$$

$$= \frac{-ae^2 \cos \varphi - ae^4 \cos \varphi \sin^2 \varphi - a\omega + ae^2 \sin \varphi \omega - e^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\omega^3}$$

$$= \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{-2e^2 \sin \varphi \cos \varphi}{2\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{d\varphi} = \frac{a(1 - e^2) \cos \varphi \cdot \omega + a(1 - e^2) \sin \varphi \cdot e^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\omega^2}$$

$$= \frac{a \cos \varphi \cdot \omega^2 (1 - e^2) + a(1 - e^2) \sin \varphi \cdot e^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\omega^3}$$

$$= \frac{a \cos \varphi (1 - e^2) (1 - e^2 \sin^2 \varphi) + ae^2 (1 - e^2) \sin^2 \varphi \cos \varphi}{\omega^3}$$

$$= \frac{a \cos \varphi - ae^2 \cos \varphi (1 - e^2 \sin^2 \varphi) + ae^2 (1 - e^2) \sin^2 \varphi \cos \varphi}{\omega^3}$$

$$= \frac{a \cos \varphi - ae^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi - ae^2 \cos \varphi + ae^4 \sin^2 \varphi \cos \varphi + (ae^2 - ae^4) \sin^2 \varphi \cos \varphi}{\omega}$$

$$= \frac{a \cos \varphi - ae^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi - ae^2 \cos \varphi + ae^4 \sin^2 \varphi \cos \varphi + ae^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi - ae^4 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{\omega}$$

$$\frac{a \cos \varphi - ae^2 \cos \varphi}{\omega} = \frac{a \cos \varphi (1 - e^2)}{\omega}$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{-a \sin \varphi \omega + a \cos \varphi \frac{1}{2\omega} 2e^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\omega^2} = \frac{-a \sin \varphi \omega^2 - a \cos^2 \varphi \sin \varphi e^2}{\omega^3}$$

$$= \frac{-a \sin \varphi - a e^2 \sin^3 \varphi - a e^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi}{\omega^3} = \frac{-a \sin \varphi - a e^2 \sin \varphi (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}{\omega^3}$$

$$= \frac{-a(1-e^2) \sin \varphi}{\omega^3}$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{-a(1-e^2) \sin \varphi}{\omega^3}$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{a(1-e^2) \cos \varphi}{\omega^3}$$

Sostituendo in $\rho = \frac{ds}{d\varphi}$ ottengo:

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2(1-e^2)^2 \sin^2 \varphi + a^2(1-e^2)^2 \cos^2 \varphi}{\omega^6}} = \frac{a(1-e^2)}{\omega^3}$$

⇓

RAGGIO DI CURVATURA MINIMO

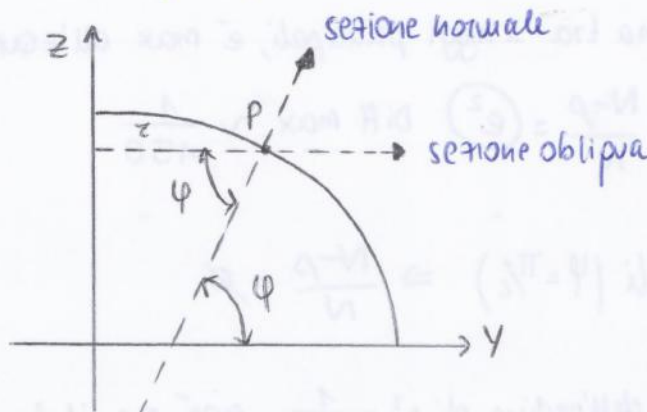
$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{\omega^3}$$

CALCOLO N

⇒ Applico il seguente teorema

TEOREMA DI MEUSNIER

Il raggio di curvatura in un punto P di una sezione obliqua (r) è uguale al raggio di curvatura della sezione normale (N) corrispondente al piano che contiene la tangente in P alla sezione obliqua moltiplicato per il coseno dell'angolo formato dai piani delle 2 sezioni.



LINEA GEODETTICA

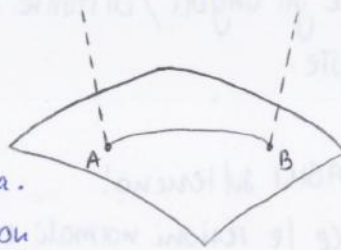
Problema: unire tutti i punti proiettati sull'ellissoide con linee appartenenti alla sup di riferimento per ricostruire la forma degli oggetti che stanno sulla superficie terrestre.

Possono essere uniti in ∞ modi (teoricamente)

• Possibile adottare la SEZ. NORMALE come linea cong?

NO poiché la sezione normale tra A e B non è unica.

Ne \exists 2: la prima è data dall'intersezione con l'ellissoide del piano contenente la normale nel punto A e passante per B. la seconda contiene la normale passante per B.



L'unica possibile è la

LINEA GEODETTICA

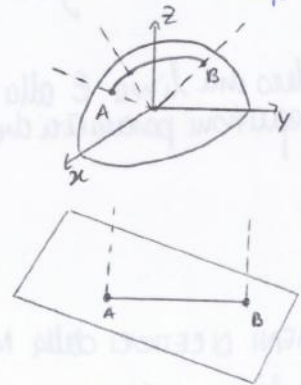
i) Linea \in alla superficie di riferimento

ii) la normale alla superficie di riferimento coincide con la normale alla curva $\vec{n}_{sup} = \vec{n}_{curv}$

esempi

• se la sup di riferimento fosse SFERICA \Rightarrow linea geodetica = arco di cerchio max

• se fosse un piano la sup \Rightarrow linea geodetica = segmento retta AB
Qualsiasi altra linea avrebbe la normale giacente sul piano stesso



↳ sono le **CONGIUNGENTI di MINOR LUNGHEZZA**

• Ellissoide

- Il MERIDIANO è sia SEZIONE NORMALE che GEODETTICA

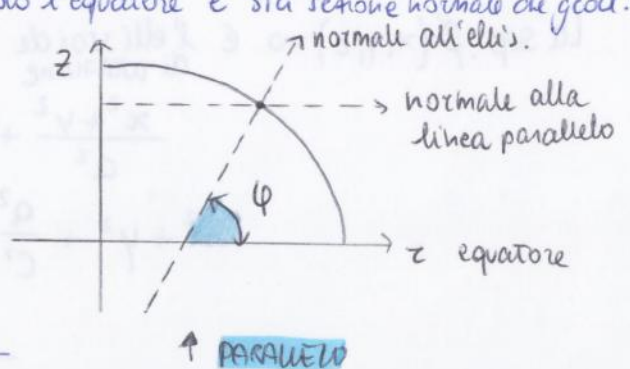
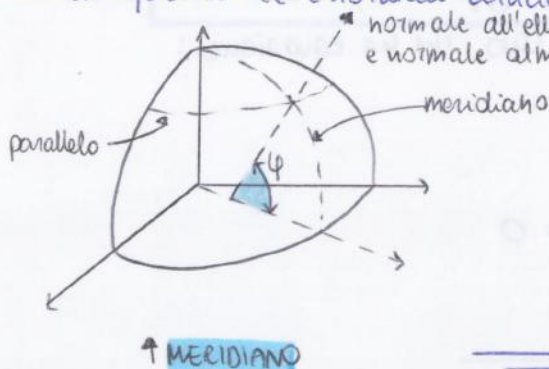
È SEZ. NORMALE dato che il piano che lo definisce (τ, z) contiene solo normali all'ellissoide

È una GEODETTICA in tutti i punti del meridiano coincidono la normale all'ellissoide e quella alla linea

- Il PARALLELO NON è una linea geodetica

La normale alla superficie non coincide con quella alla linea, ma formano φ

Solo all'equatore le 2 normali coincidono \Rightarrow solo l'equatore è sia sezione normale che geod.



$$x^2 + y^2 - \left(a^2 - \frac{a^2}{c^2} z^2 \right) = 0$$

So che:

$$e^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{1}{1 - e^2}$$

⇒ Posso riscrivere l'equazione nel seguente modo:

$$\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - \left(a^2 - \frac{z^2}{1 - e^2} \right) = 0$$

Da questa equazione ricavo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2y$$

Sostituisco nella **PRIMA EQUAZIONE DIFFERENZIALE**

$$2x \frac{d^2 y}{ds^2} - 2y \frac{d^2 x}{ds^2} = 0$$

$$x \frac{d^2 y}{ds^2} - y \frac{d^2 x}{ds^2} = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds} \left(x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} \right) = 0 \Rightarrow x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} = \text{cost}$$

Ricorda: **EQUAZIONI PARAMETRICHE DELL'ELLIPSOIDE**

$$\begin{cases} x = x(s) = r \cos \lambda \\ y = y(s) = r \sin \lambda \\ z = z(s) \end{cases}$$

Sostituisco in

$$\Rightarrow \frac{dx}{ds} = -r \sin \lambda \frac{d\lambda}{ds} + \cos \lambda \frac{dr}{ds} = -y \frac{d\lambda}{ds} + \cos \lambda \frac{dr}{ds}$$

$$\frac{dy}{ds} = r \cos \lambda \frac{d\lambda}{ds} + \sin \lambda \frac{dr}{ds} = x \frac{d\lambda}{ds} + \sin \lambda \frac{dr}{ds}$$

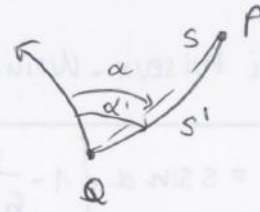
$$x \cdot \left(x \frac{d\lambda}{ds} + \sin \lambda \frac{dr}{ds} \right) - y \left(-y \frac{d\lambda}{ds} + \cos \lambda \frac{dr}{ds} \right) = \text{cost}$$

TEOREMI GEODESIA OPERATIVA

Ricorda: è POSSIBILE misurare angoli e distanze solo tra sezioni normali e non tra geodetiche.

Considero due punti (P, Q) sull'ellissoide

- l'arco di sezione normale s' che li congiunge
- $\alpha' = \alpha$ azimut
- $s =$ arco di geodetica di azimut α



AZIMUT = angolo tra la tg alla meridiana verso nord e la tg alla sezione obliqua (in pratica è la sezione normale)

Suppongo di avere 2 linee: una tg alla geodetica, l'altra tg alla sezione normale.

$s, \alpha =$ lunghezza ed azimut della geodetica

$s', \alpha' =$ lunghezza ed azimut della sezione normale

→ SVILUPPI IN SERIE DI PUISEUX - WEINGARTEN

• Per archi di alcune centinaia di km si dimostra che:

$$\frac{s' - s}{s} = \frac{1}{360} \frac{s^4}{N^2 R_\alpha^2} \left(\frac{e^2}{1 - e^2} \right)^2 \sin^2 2\alpha \cos^4 \varphi$$

Se $s = 1000 \text{ km} \Rightarrow \frac{s' - s}{s} \sim 10^{-8}$

Dato che i metodi di misura utilizzati non consentono di raggiungere precisioni $> 10^{-6} - 10^{-7}$
 \Rightarrow si considerano le misure eseguite secondo archi di sezione normali uguali alle misure eseguite secondo archi di geodetica.

• Per la DIFFERENZA DI AZIMUT, si dimostra che:

$$\alpha' - \alpha = \frac{s^2}{12 N R_\alpha} \frac{e^2}{1 - e^2} \sin 2\alpha \cos^2 \varphi$$

Le differenze assumono val

MAX $\alpha = 45^\circ$
 $\varphi = 0$ (EQUATORE)
 min (nulle) $\varphi = 90^\circ$ (POLI)

Ai poli, l'ellissoide si comporta come una sfera

In generale:

$$s = 1000 \text{ km} \rightarrow s' - s \cong 1 \text{ cm} \rightarrow \frac{s' - s}{s} \sim 10^{-8}$$

$$s = 100 \text{ km} \rightarrow \alpha' - \alpha \cong 0,01''$$

PRECISIONE $\left\{ \begin{array}{l} \text{Distanze} = 10^{-6} \text{ (1 mm / 1 km)} \\ \text{Angoli} = 0,1'' \end{array} \right.$

Qualunque misura di AZIMUT, ANGOLO o DISTANZA eseguita con i mezzi a disposizione dei topografi può ritenersi eseguita con riferimento ad archi di geodetica dell'ellissoide di riferimento

↑ Sostanza dei teoremi della geodesia operativa

L'ERRORE che si commette considerando il punto P proiettato sulla sfera locale di raggio R (invece che sull'ellissoide) è dato dalle differenze tra le coordinate di P_{sfe} e quelle di P_{ell}.

$$X_{P_{sfe}} - X_{P_{ell}} = -s \cdot \sin \alpha \frac{s^2}{6\rho N} \frac{e^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

$$Y_{P_{sfe}} - Y_{P_{ell}} = s \cdot \cos \alpha \frac{s^2}{6\rho N} \frac{e^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi}{1 - e^2}$$

$$Z_{P_{sfe}} - Z_{P_{ell}} = \frac{s^2}{2} \left(\frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{\rho N} \right)$$

MASSIME
DIFFERENZE

$$|X_{P_{sfe}} - X_{P_{ell}}| = \frac{s^3}{6\rho N} e^2 \quad (\alpha = 90^\circ, \varphi = 0^\circ)$$

$$|Y_{P_{sfe}} - Y_{P_{ell}}| = \frac{s^3}{6\rho N} \frac{e^2}{1 - e^2} \quad (\alpha = \varphi = 0^\circ)$$

s (km)	$\frac{s^3}{6\rho N e^2}$	Δ/s
1000	27,7 m	$2,8 \cdot 10^{-5}$
200	22 cm	$1,1 \cdot 10^{-6}$
10	0,08 mm	$2,8 \cdot 10^{-9}$

⇒ Definiamo come **CAMPO GEODETICO** quell'intorno dell'origine locale O entro il quale sarà possibile approssimare l'ellissoide con una sfera tg (sfera locale) e risolvere tutti i problemi di calcolo con la TRIGONOMETRIA SPERICA

NB: L'intorno è ≠ per le coordinate planimetriche (x, y) e z.

(x, y) → intorno di 100 km (qui sostituito di z > 2,6 m ⇒ inaccettabile).

(z) → intorno di 15 km

Considero l'ellissoide di Hayford. Con $\varphi = 45^\circ$ ottengo:

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{W^3} = 6\,367\,586,59 \text{ m}$$

$$N = \frac{a}{W} = 6\,389\,135,05$$

$$Z_{P_{sfe}} - Z_{P_{ell}} = \begin{cases} \frac{s^2}{2} \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{\rho N} \right) = -s^2 \cdot 1,32 \cdot 10^{-7} \\ \frac{s^2}{2} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho N} \right) = +s^2 \cdot 1,32 \cdot 10^{-7} \end{cases}$$

s [km]	$\frac{s^3}{6\rho N} = \Delta x = \Delta y$	$\frac{\Delta x}{s}$
50	0,51 m	10^{-5}
20	3,3 cm	$1,6 \cdot 10^{-6}$
15	1,4 cm	10^{-6}
10	4 mm	10^{-2}

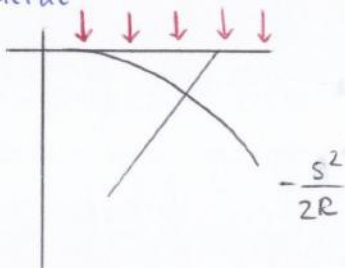
A 15 km dall'origine, lo scostamento z è superiore ai 17,6 m \Rightarrow inaccettabile. Maggiore della precisione strumentale.

\Rightarrow Definiamo come **CAMPO TOPOGRAFICO**, quell'intorno dell'origine locale O , entro il quale sarà possibile approssimare la sfera locale con un piano tangente e quindi risolvere tutti i problemi di calcolo con la TRIGONOMETRIA PIANA.

Intorno = 15 km vale solo per le coordinate planimetriche

\Rightarrow Per la z , non si può mai approssimare la sfera locale con il piano tg (errore troppo grande)
 \Rightarrow per l'altimetria non è definibile un campo topografico.

Campo topografico per altimetrie

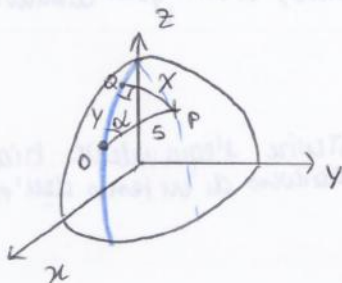


s [km]	$\Delta z = -\frac{s^2}{2R}$
10	-7,8 m
5	-2 m
1	-8 cm
100 m	-0,8 mm

Con questo errore sbaglierei tutte le misure

S.R. RELATIVI

a) COORD. GEODETICHE RETTANGOLARI (x, y)



Dal punto P traccio una geodetica \perp al meridiano

Considero $\left\{ \begin{array}{l} OQ = y \text{ (arco di meridiano)} \\ PQ = x \text{ (geodetica passante per } P \text{ ortogonale al meridiano passante per } O) \end{array} \right.$

Queste coordinate appena ottenute sono generate da quelle geodetiche polari.

NB: sono coordinate che \in alla superficie dell'ellissoide.

O = assunto come origine in questo sist. di riferimento locale

P = punto che si vuole riferire a tale origine

Q = dato dall'intersezione tra la geodetica e il meridiano

Gli angoli del triangolo piano valgono:

$$Q' \hat{O} P' = \alpha - \epsilon$$

$$P' \hat{Q}' O' = \frac{\pi}{2} - \epsilon$$

$$O' \hat{P}' Q' = \pi - \left[(\alpha - \epsilon) + \left(\frac{\pi}{2} - \epsilon \right) \right] = \frac{\pi}{2} - (\alpha - 2\epsilon)$$

Applico il teorema dei seni a tale triangolo, ottenendo:

$$\frac{X}{\sin(\alpha - \epsilon)} = \frac{Y}{\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \epsilon)\right]} = \frac{S}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right)}$$

$$\frac{X}{\sin(\alpha - \epsilon)} = \frac{Y}{\cos(\alpha - 2\epsilon)} = \frac{S}{\cos \epsilon}$$

NB: L'eccesso sferico è una quantità molto piccola $\Rightarrow \cos \epsilon \sim 1$. Da qui ricavo:

$$(x, y) \rightarrow (s, \alpha) \quad \begin{cases} X = s \sin(\alpha - \epsilon) \\ Y = s \cos(\alpha - 2\epsilon) \end{cases}$$

Calcolo delle COORDINATE GEODETICHE RETTANGOLARI in funzione delle COORDINATE GEODETICHE POLARI

Ricavo le relazioni inverse.

Sviluppo sin e cos da \curvearrowright

$$X = s \sin \alpha \cos(-\epsilon) + s \cos \alpha \sin(-\epsilon) = s \sin \alpha \cos \epsilon - s \cos \alpha \sin \epsilon$$

$$Y = s \cos \alpha \cos(-2\epsilon) - s \sin \alpha \sin(-2\epsilon) = s \cos \alpha \cos 2\epsilon + s \sin \alpha \sin 2\epsilon$$

$$\begin{aligned} X = s \sin \alpha - \epsilon y & \Rightarrow s \sin \alpha = X + \epsilon y \\ Y = s \cos \alpha + 2\epsilon X & \Rightarrow s \cos \alpha = Y - 2\epsilon X \end{aligned}$$

$$(x, y) \rightarrow (s, \alpha) \quad \begin{cases} s = \sqrt{(x + \epsilon y)^2 + (y - 2\epsilon x)^2} \\ \alpha = \arctg \frac{x + \epsilon y}{y - 2\epsilon x} \end{cases}$$

b) COORD. POLARI (GEODETICHE) (s, α)

c) COORD. EULERIANE

PASSAGGIO DALLE COORDINATE ECEF → EULERIANE

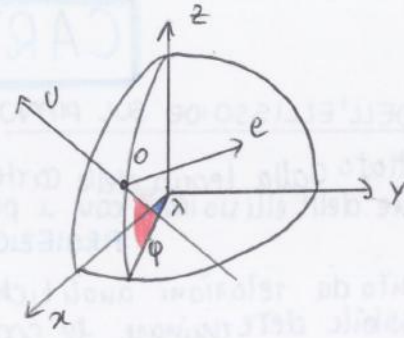
Si compone di 1 TRASLAZIONE + 3 ROTAZIONI

1) TRASLAZIONE della terna geocentrica x_0, y_0, z_0

$$(x, y, z) \longrightarrow (x', y', z')$$

dove (x', y', z') è un nuovo sistema // e centrato in O.

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \\ z' = z - z_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = N \cos \psi \cos \lambda \\ y_0 = N \cos \psi \sin \lambda \\ z_0 = N(1 - e^2) \sin \psi \end{cases} \quad \begin{matrix} (\text{eq. parametriche}) \\ \text{ellisse} \end{matrix}$$



2) ROTAZIONE intorno a z', antioraria, di $(\frac{\pi}{2} + \lambda) \Rightarrow x // e$

$$(x', y', z') \longrightarrow (x'', y'', z'')$$

3) ROTAZIONE intorno a x'', antioraria, di $(\frac{\pi}{2} - \psi) \Rightarrow z'' \equiv u$

$$\begin{pmatrix} e \\ u \\ u \end{pmatrix} = R^{\oplus} \left(\frac{\pi}{2} - \psi \right) R^{\ominus} \left(\frac{\pi}{2} + \lambda \right) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

$$R = R_{\psi} R_{\lambda} = \begin{vmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \psi \cos \lambda & -\sin \psi \sin \lambda & \cos \psi \\ \cos \lambda \cos \psi & \cos \lambda \sin \psi & \sin \psi \end{vmatrix} \Rightarrow \text{Questa è la matrice di rotazione.}$$

PASSAGGIO DALLE COORDINATE EULERIANE → ECEF

$$\begin{pmatrix} e \\ u \\ u \end{pmatrix} = [R] \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + [R]^{-1} \begin{pmatrix} e \\ u \\ u \end{pmatrix}$$

R è ortogonale $\Rightarrow R^{-1} \equiv R^T$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \psi \cos \lambda & -\sin \psi \sin \lambda & \cos \psi \\ \cos \lambda \cos \psi & \cos \lambda \sin \psi & \sin \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ u \\ u \end{pmatrix}$$

LE PROIEZIONI CARTOGRAFICHE sono CLASSIFICATE in 2 MODI \neq

1) Classifica che si basa sui \neq modi di stabilire la corrispondenza. Si distinguono

a. PROIEZIONI GEOMETRICHE \rightarrow corrispondenza di tipo PROETTIVO.

La carta si ottiene proiettando da un centro di proiezione la porzione di ellissoide sul piano cartografico.

b. PROIEZIONI ANALITICHE \rightarrow corrispondenza ANALITICA.

Definite formule che consentono di ricavare le coord. cartografiche note.

2) Classifica secondo la SUPERFICIE di RAPPRESENTAZIONE. Si distinguono:

c. PROIEZIONI PROSPETTICHE: la sup di rappresentazione è il piano cartografico

d. PROIEZIONI PER SVILUPPO: nelle quali la sup di rappresentazione è quella di un solido di rotazione sviluppabile sul piano SENZA DEFORMAZIONE (cilindrico).

© PROIEZIONI PROSPETTICHE

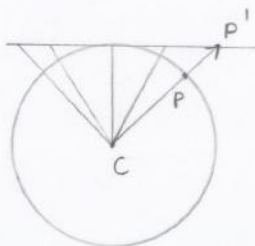
Proietto da un punto dello spazio (C) porzione della sup di riferimento (ellissoide) su un piano (piano della carta).

\rightarrow A seconda della POSIZIONE DEL PIANO DELLA CARTA si distinguono tre proiezioni:

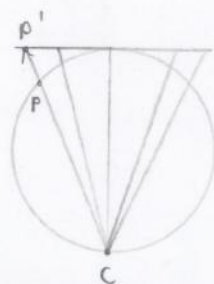
- POLARI - piano tg ad un polo
- MERIDIANE - piano tg all'equatore
- OBLIQUE - piano tg in un punto qualsiasi

\rightarrow A seconda della posizione di C (CENTRO DI PROIEZIONE) si distinguono altre 4 proiezioni

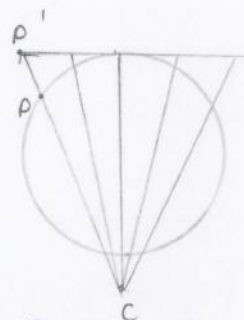
- CENTROGRAFICA - C nel centro dell'ellissoide
- STEREOGRAFICA - C nel punto diametralmente opposto al punt di tangenza
- SCENOGRAFICA - C è alla normale al piano cartografico, esterno all'ellissoide
- ORTOGRAFICA - C all' ∞



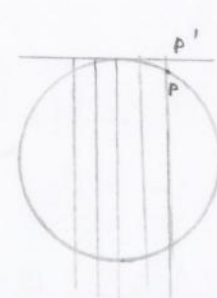
CENTROGRAFICA



STEREOGRAFICA



SCENOGRAFICA



$C \equiv \infty$
ORTOGRAFICA

→ RELAZIONI ANALITICHE

Troviamo la corrispondenza BIVOCICA fra le COORD. dei punti sull'ellissoide e quelle CARTESIANI ORTOGONALI

Le relazioni saranno del tipo:

$$\begin{cases} X = X(\varphi, \lambda) \\ Y = Y(\varphi, \lambda) \end{cases}$$

Dato che X, Y possono essere svariati tipi di funzioni $\Rightarrow \infty$ rappresentazioni

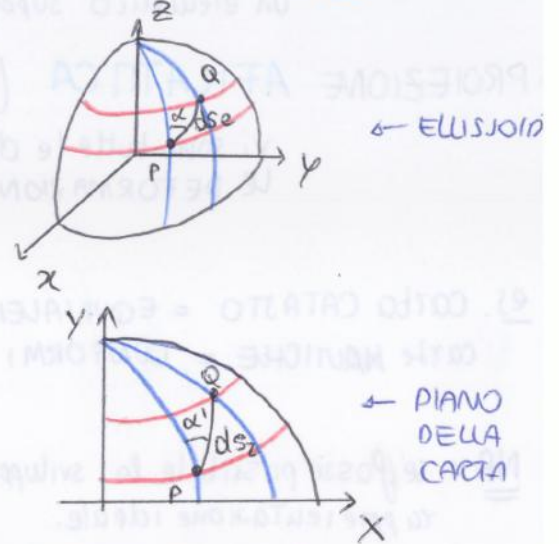
Dato che la rappresentazione implica delle deformazioni \Rightarrow bisogna definire i **MODULI DI DEFORMAZIONE**

• MODULO DI DEFORMAZIONE LINEARE

Considero un elemento lineare infinitesimo (ds_e)
 ds_e trasformato sulla cartografia diventa ds_z
 Il modulo di def. lineare è dato dal rapporto tra i 2 infinitesimi.

$$m_e = \frac{ds_z}{ds_e}$$

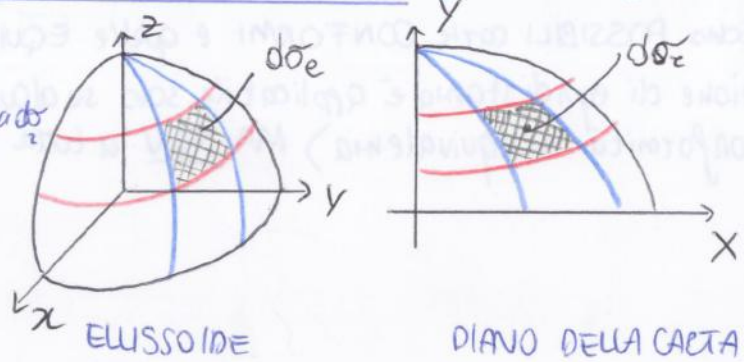
Trasformata di geodetica = linea geodetica trasformata sul piano
 NB: il pedice "z" sta per rotazione



• MODULO DI DEFORMAZIONE SUPERFICIALE (AREALE)

Considero sull'ellissoide un elemento superficiale infinitesimo ds_e
 Considero sulla cartografia la trasformata ds_z
 Il modulo di deformazione areale è dato da:

$$m_\sigma = \frac{ds_z}{ds_e} = \frac{dA_z}{dA_e}$$

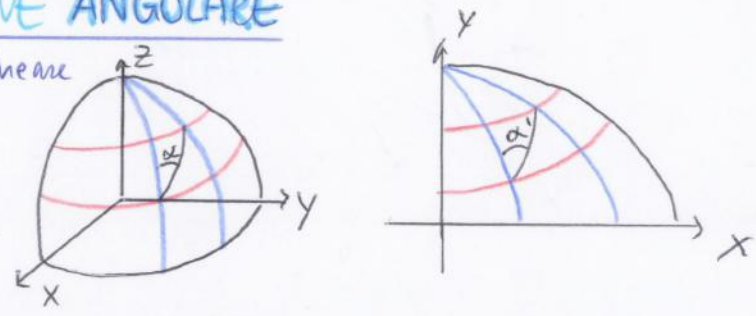


• MODULO DI DEFORMAZIONE ANGOLARE

Considero sull'ellissoide un elemento lineare di azimut α e sulla cartografia la corrispondente trasformata α'

Il modulo di deformazione angolare è dato da:

$$f = \alpha - \alpha'$$

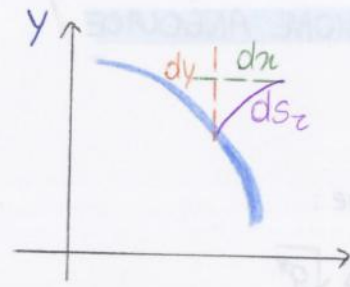
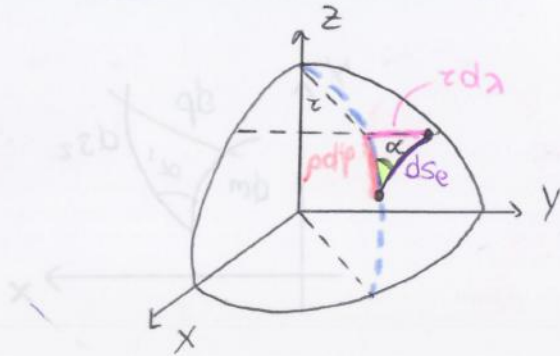


DETERMINAZIONE ANALITICA DEI MODULI DI DEFORMAZIONE

Funzioni che definiscono la rappresentazione dell'ellissoide sul piano cartografico:

$$\begin{cases} X = X(\varphi, \lambda) \\ Y = Y(\varphi, \lambda) \end{cases} \xrightarrow{\text{Differenziali totali}} \begin{cases} dX = \frac{\partial X}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial X}{\partial \lambda} d\lambda \\ dY = \frac{\partial Y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} d\lambda \end{cases}$$

MODULO DI DEFORMAZIONE LINEARE



$$\begin{cases} d^2X = \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)^2 d^2\varphi + \left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)^2 d^2\lambda + 2\frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{\partial X}{\partial \lambda} d\varphi d\lambda \\ d^2Y = \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right)^2 d^2\varphi + \left(\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\right)^2 d^2\lambda + 2\frac{\partial Y}{\partial \varphi} \frac{\partial Y}{\partial \lambda} d\varphi d\lambda \end{cases}$$

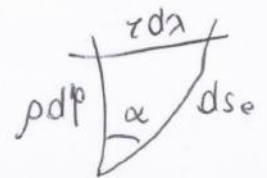
$$d^2s_z = \underbrace{\left[\left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right)^2\right]}_e d^2\varphi + \underbrace{\left[\left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\right)^2\right]}_g d^2\lambda + 2 \underbrace{\left[\frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{\partial X}{\partial \lambda} + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \frac{\partial Y}{\partial \lambda}\right]}_f d\varphi d\lambda$$

$$d^2s_z = e d^2\varphi + g d^2\lambda + 2f d\varphi d\lambda$$

Sapendo che:

$$\begin{aligned} r d\lambda &= ds_e \sin \alpha \\ \rho d\varphi &= ds_e \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} d\varphi &= ds_e \frac{\cos \alpha}{\rho} \Rightarrow d^2\varphi = d^2s_e \frac{\cos^2 \alpha}{\rho^2} \\ d\lambda &= ds_e \frac{\sin \alpha}{r} \Rightarrow d^2\lambda = d^2s_e \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} \end{aligned}$$



Inoltre

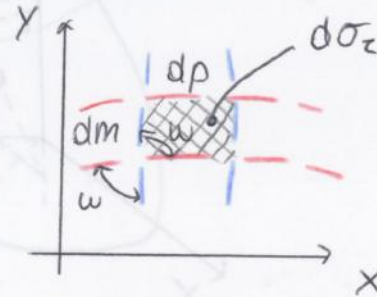
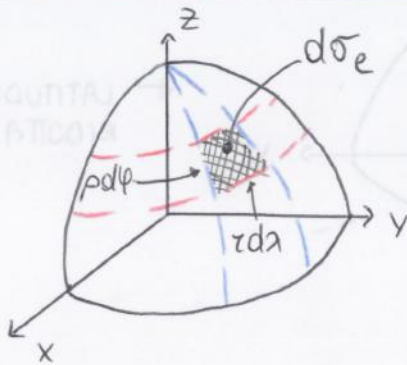
$$m = \frac{ds_z}{ds_e} \Rightarrow d^2s_z = e \cdot d^2s_e \frac{\cos^2 \alpha}{\rho^2} + 2f ds_e \frac{\cos \alpha}{\rho} \cdot ds_e \frac{\sin \alpha}{r} + g d^2s_e \frac{\sin^2 \alpha}{r^2}$$

$$m^2 = \frac{d^2s_z}{d^2s_e} = \frac{e d^2s_e \frac{\cos^2 \alpha}{\rho^2} + 2f d^2s_e \frac{\cos \alpha}{\rho} \frac{\sin \alpha}{r} + g d^2s_e \frac{\sin^2 \alpha}{r^2}}{d^2s_e}$$

$$= \left(\frac{e}{\rho^2}\right) \cos^2 \alpha + 2 \left(\frac{f}{\rho r}\right) \cos \alpha \sin \alpha + \left(\frac{g}{r^2}\right) \sin^2 \alpha$$

$$m^2 = e^* \cos^2 \alpha + g^* \sin^2 \alpha + 2f^* \sin \alpha \cos \alpha$$

MODULO DI DEFORMAZIONE SUPERFICIALE / AREALE



$$d\sigma_e = \rho d\varphi \cdot r d\lambda$$

$$d\sigma_z = d\rho \cdot dm \cdot \sin w$$

$$= r d\lambda \sqrt{g^*} \rho d\varphi \sqrt{e^*} \sin w$$

Approssimazione della superficie del quadrilatero infinitesimo con quella di un trapezio (con basi uguali dp)

$$dm = \rho d\varphi \cdot m_e = \rho d\varphi \cdot \frac{r}{\rho} = d\varphi \sqrt{e}$$

$$d\rho = r d\lambda \cdot m_e = r d\lambda \frac{r}{\rho} = d\lambda \sqrt{g}$$

Sapendo che

$$m_A = \frac{d\sigma_z}{d\sigma_e} = \frac{\rho d\varphi r d\lambda \sqrt{g^*} e^* \sin w}{\rho d\varphi r d\lambda} = \sqrt{g^*} e^* \sin w$$

$$m_A = \sqrt{g^*} e^* \sin w$$

$(dm) \Rightarrow$ trasformato di un infinitesimo di meridiana in cartog (dm) è pari al corrispondente in infinitesimo sull'ellissoide per il modulo di deformazione lineare ($d=0$) con come x dp ($a = r/2$)

EQUAZIONI CARTE CONFORMI

\rightarrow def angolare = 0 in ogni punto e in direzione \downarrow $tg f = 0$

Ricorda formule pag (38)

$$g = \frac{r^2}{\rho^2} e \quad \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right] = \frac{r^2}{\rho^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right]$$

È conveniente introdurre al posto di φ la COORDINATA CURVILINEA "U" (LATITUDINE RIDOTTA) legata a φ nel seguente modo

$$\rho d\varphi = r du$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{\rho}{r}$$

NS: grazie alla sostituzione con u , latitudine e longitudine hanno lo stesso coefficiente

Il sistema di coordinate sull'ellissoide (u, λ) è detto ISOTERMO \rightarrow converte a du e $d\lambda$ di avere lo stesso coeff in ds_e^2

$$ds_e^2 = r^2 du^2 + r^2 d\lambda^2 = r^2 (du^2 + d\lambda^2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial \lambda}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \pm \frac{\partial y}{\partial u}$$

⇓

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial \lambda} = -\frac{\partial x}{\partial u}}$$

Queste 2 sono le EQUAZIONI DIFFERENZIALI DELLE RAPPRESENTAZIONI CONFORMI

⇒ le rappresentazioni conformi sono definite da un sistema di equazioni alle derivate parziali ⇒ si possono avere ∞ rappresentazioni conformi

Le rappresentazioni si ottengono imponendo le condizioni al contorno (e quindi decidendo in che modo far variare il meridiano nella trasformata e quindi decidere il modulo di deformazione lineare).

NB: nelle rappresentazioni conformi il modulo di deformazione lineare è INDIPENDENTE da λ (anzi u)

EQUAZIONI DI CAUCHY-RIEMAN

Rappresentano la condizione necessaria e sufficiente per una soluzione in campo complesso di variabile complessa tale che:

$$y + ix = f(u + i\lambda)$$

dove

- $(x, y) =$ coord. piane
- $(u, \lambda) =$ " curvilinee $f =$ qualsiasi funzione
- $i =$ operatore complesso

SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR

$$(y + ix) = f(u) + f'(u) i\lambda + \frac{f''(u)(i\lambda)^2}{2} + \frac{f'''(u)}{3!} (i\lambda)^3 + \dots$$

Tanto più l'ordine è alto ⇒ tanto più la funzione è ben approssimata.

$$f'(u) = \frac{u^c}{du} = \frac{u^c}{d\varphi} \frac{d\varphi}{du} = \frac{c}{\rho} \frac{u^c}{d\varphi} = -r \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} x &= f'(u) \lambda - \frac{1}{3!} f'''(u) \lambda^3 + \frac{1}{5!} f^{(5)}(u) \lambda^5 - \dots = \lambda N \cos \varphi + \frac{\lambda^3}{6} N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{1}{120} \lambda^5 N \cos^5 \varphi (\dots) + \dots \\ &= \lambda N \cos \varphi + \frac{\lambda^3}{6} N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{1}{120} \lambda^5 N \cos^5 \varphi (\dots) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= f(u) - \frac{1}{2} f''(u) \lambda^2 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(u) \lambda^4 - \dots = \\ &= \lambda \varphi + \frac{1}{2} \lambda^2 N \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\lambda^4}{24} N \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \dots \end{aligned}$$

dove:

$$t = \tan \varphi$$

$$\eta^2 = \frac{N - \rho}{\rho} = \frac{a^2 - c^2}{c^2} \cos^2 \varphi$$

NB: limitando l'ampiezza del fuso a pochi gradi (longitudine $\lambda = \pm 3^\circ$ rispetto al meridiano centrale), la serie converge rapidamente \Rightarrow possibile trascurare i termini maggiori di λ^9

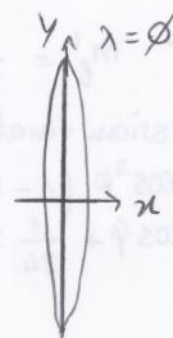
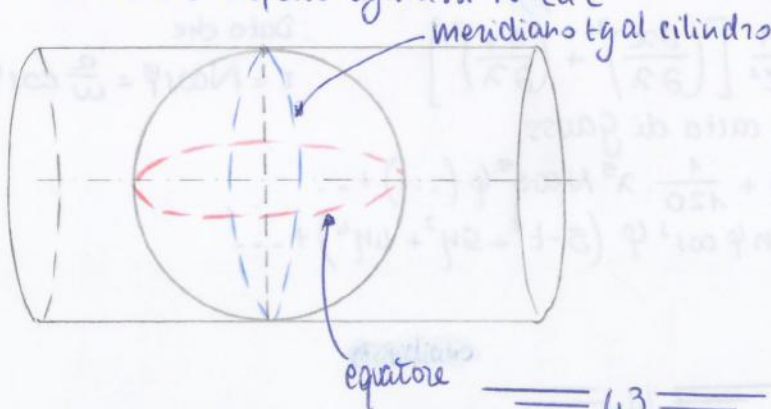
È possibile ricavare le formule inverse e ricavare le coord. geografiche in fun di altre cartografiche

$$\begin{cases} \varphi = \varphi(x, y) \\ \lambda = \lambda(x, y) \end{cases}$$

OSSERVAZIONI:

È la cartografia + diffusa nel mondo. Caratteristiche:

- È una CARTOGRAFIA CONFORME
- le trasformate del meridiano t_φ e dell'equatore sono RETTE che definiscono gli assi del sistema di riferimento ortogonale cartesiano (N o E) o sist cartografico.
- sul meridiano t_φ la rappresentazione è EQUIDISTANTE
- le trasformate dei meridiani e dei paralleli sono famiglie di curve tra loro \perp e simmetriche rispetto agli assi N ed E



la carta di Gauss è ben approssimato dalla proiezione cilindrica trasversa

Calcolo le derivate (trascurando i termini in λ^4 e i termini η^2 e η^4):

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\lambda} &= \lambda N \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{6} \lambda^3 N \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + \dots) = \\ &= \lambda N \sin \varphi \cos \varphi \left(1 + \frac{1}{6} \lambda^2 \cos^2 \varphi (5 - t^2 + \dots) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2 &= \lambda^2 N^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \left(1 + \frac{\lambda^2}{6} \cos^2 \varphi (5 - t^2 + \dots) \right)^2 = \\ &= \lambda^2 N^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \left(1 + \frac{\lambda^4}{36} \cos^4 \varphi (5 - t^2 + \dots) + \frac{\lambda^2}{3} \cos^2 \varphi (5 - t^2 + \dots) \right) = \\ &= \lambda^2 N^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \text{termini trascurabili} \end{aligned}$$

Analogamente per x :

$$\frac{dx}{d\lambda} = N \cos \varphi + \frac{\lambda^2}{2} N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \dots) = N \cos \varphi \left(1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 - t^2 + \dots) \right)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 &= N^2 \cos^2 \varphi \left(1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 - t^2 + \dots) \right)^2 = N^2 \cos^2 \varphi \left(1 + \frac{\lambda^4}{2} \dots + \lambda^2 \cos^2 \varphi (1 - t^2 + \dots) \right) = \\ &= N^2 \cos^2 \varphi \left(1 + \lambda^2 \cos^2 \varphi - \lambda^2 \cos^2 \varphi \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} + \dots \right) = \\ &= N^2 \cos^2 \varphi \left(1 + \lambda^2 \cos^2 \varphi - \lambda^2 \sin^2 \varphi + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2 &= N^2 \cos^2 \varphi \left(1 + \lambda^2 \cos^2 \varphi - \lambda^2 \sin^2 \varphi \right) + N^2 \lambda^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = \\ &= N^2 \cos^2 \varphi \left(1 + \lambda^2 \cos^2 \varphi - \lambda^2 \sin^2 \varphi + \lambda^2 \sin^2 \varphi \right) = \\ &= N^2 \cos^2 \varphi \left(1 + \lambda^2 \cos^2 \varphi \right) \end{aligned}$$

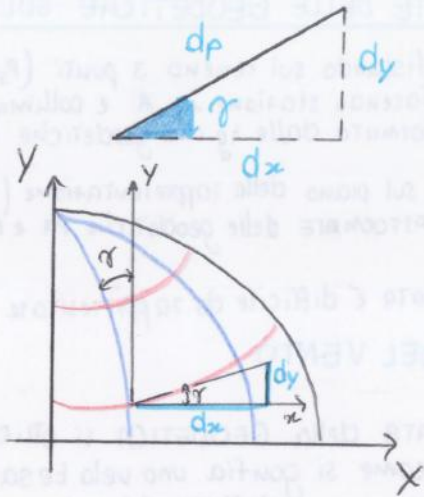
ALLORA:

$$m_e^2 = \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right] = \frac{1}{N^2 \cos^2 \varphi} N^2 \cos^2 \varphi \left(1 + \lambda^2 \cos^2 \varphi \right) = 1 + \lambda^2 \cos^2 \varphi$$

$$m_e = \left(1 + \lambda^2 \cos^2 \varphi \right)^{1/2} = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi + \dots$$

Considero il triangolo rettangolo infinitesimo che ha per lati dp (trasformata del parallelo) e per cateti dx e dy

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\lambda} d\lambda}{\frac{dx}{d\lambda} d\lambda} = \frac{\frac{dy}{d\lambda}}{\frac{dx}{d\lambda}}$$



Ma so che:

$$\frac{dy}{d\lambda} = \lambda N \sin \varphi \cos \varphi \left(1 + \frac{\lambda^2}{6} \cos^2 \varphi (5 - t^2 + \dots) \right)$$

$$\frac{dx}{d\lambda} = N \cos \varphi \left(1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 - t^2 + \dots) \right)$$

=> sfruttando i binomiali, considero λ piccolo e trascuro λ^4 e +. Ottengo:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{dy}{d\lambda}}{\frac{dx}{d\lambda}} = \frac{\lambda N \sin \varphi \cos \varphi \left(1 + \frac{\lambda^2}{6} \cos^2 \varphi (5 - t^2) \right)}{N \cos \varphi \left(1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 - t^2) \right)}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \lambda \sin \varphi \left(1 + \frac{\lambda^2}{6} \cos^2 \varphi (5 - t^2) \right) \cdot \left(1 - \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 - t^2) \right) = \\ &= \lambda \sin \varphi \left(1 - \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 - t^2) + \frac{\lambda^2}{6} \cos^2 \varphi (5 - t^2) \right) - \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi \left(1 - t^2 - \frac{5}{3} + \frac{t^2}{3} \right) = \\ &= \frac{\lambda^2}{3} \cos^2 \varphi (1 + t^2) \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \lambda \sin \varphi \left(1 + \frac{\lambda^2}{3} \cos^2 \varphi (1 + t^2) + \dots \right) \quad \text{ma } t = \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow \operatorname{tg} \gamma = \lambda \sin \varphi \left(1 + \frac{\lambda^2}{3} + \dots \right)$$

Sviluppando in serie la funz. $\operatorname{arctg} \Rightarrow \gamma = \operatorname{tg} \gamma - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \gamma + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 \gamma - \dots$
Trascurando i termini in λ^4 e superiori

$$\gamma = \lambda \sin \varphi + \frac{1}{3} \lambda^3 \sin \varphi - \frac{1}{3} \lambda^3 \varphi$$

⇓

$$\gamma = \lambda_{mc} \sin \varphi \left(1 + \frac{1}{3} \lambda_{mc}^2 \cos^2 \varphi \right)$$

Con una maggiore approssimazione si ottiene la relazione:

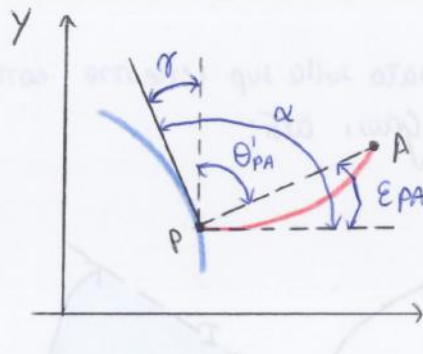
$$\gamma = \lambda_{mc} \sin \varphi \left(1 + \frac{1}{3} \lambda_{mc}^2 \cos^2 \varphi \left(1 + 3 \frac{a^2 - c^2}{c^2} \cos^2 \varphi \right) \right)$$

Ricordando che $\lambda = \frac{x}{N \cos \varphi}$ NB: qui, x è l'ascissa letta sulla cartografia e depurata della falsa origine e dal coeff di contrazione

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \gamma = \frac{x}{N} \operatorname{tg} \varphi \left(1 + \frac{x^2}{3 N^2 \cos^2 \varphi} \right)$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{x}{N} \operatorname{tg} \varphi \left(1 + \frac{x^2}{3 N^2 \cos^2 \varphi} \cos^2 \varphi \left(1 + 3 \frac{a^2 - c^2}{c^2} \cos^2 \varphi \right) \right)$$

== 47 ==



γ = convergenza del meridiano
 E_{PA} = riduzione della corda
 (convezione angolare)
 alla corda

$$\alpha = \theta'_{PA} + \gamma - E_{PA}$$

NB: sia γ che E_{PA} sono dotati di segno

- E_{PA} avrà segno
 - ⊖ se rotando in senso ORAIO la direzione positiva dell'asse y si incontra prima la corda e poi la trasformata
 - ⊕ viceversa
- γ avrà segno
 - ⊕ quando P si trova a DX dell'asse y (nodo)
 - ⊖ " " " SX " " " " " " " " " " " "

E_{PA} - riduzione della corda - è pari a:

$$E_{PA} = \frac{(Y_P - Y_A)(2X_P + X_A)}{6\rho_c N_c}$$

dove ρ_c, N_c = raggi principali di curvatura (calcolati in C dello corda PA) e C corda PA dista $\frac{1}{3}$ della lunghezza PA da P

le coordinate si possono calcolare nel seguente modo:

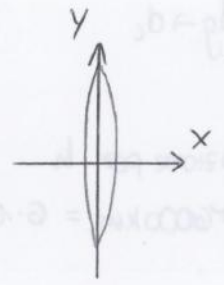
$$\begin{cases} X_c = (2X_P + X_A)/3 \\ Y_c = (2Y_P + Y_A)/3 \end{cases}$$

$$E_{12} = \frac{(Y_1 - Y_2)(2x_1 + x_2)}{6\rho_m \cdot Nm \cdot 0,99996^2}$$

$$E_{21} = \frac{(Y_2 - Y_1)(2x_2 + x_1)}{6\rho_m \cdot Nm \cdot 0,99996^2}$$

.. LUNGHEZZA CORDA E TRASFORMATA GEODETICA (appunti)

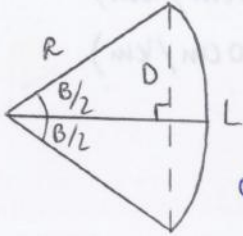
è necessario definire la **CURVATURA GEODETICA** → in generale $C = \frac{1}{R}$



$x_{max} = 300 \text{ km}$

CURVATURA GEODETICA in un FUSO

$$\Rightarrow C_{max} = \frac{300 \text{ km}}{6370^3} \approx \frac{1}{130000}$$



L = lunghezza trasformata
 D = lunghezza corda
 dove $\begin{cases} L = R\beta \\ D = 2R \sin(\beta/2) \end{cases}$

$$D = 2R \left(\frac{\beta}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\beta}{2} \right)^3 \right) = R\beta - \frac{1}{24} R\beta^3 \quad (\text{sviluppo anestetato al 2° ordine})$$

$$L - D = R\beta - \left(R\beta - R \frac{\beta^3}{24} \right) + \frac{R\beta^3}{24}$$

$$\text{Ponendo } \beta = \frac{L}{R} \Rightarrow L - D = \frac{R L^3}{R^3 24} = \frac{L^3}{R^2 24} = \frac{C^2 L^3}{24}$$

L	$\Delta(L-D)$	Δ/L
100 km	2,5 mm	$2,5 \cdot 10^{-8}$
500 km	31 cm	$0,6 \cdot 10^{-6}$
1000 km	2,5 m	$2,5 \cdot 10^{-6}$

RIDUZIONE DELLA DISTANZA ALLA SUP DI RIFERIMENTO

d_i = distanza inclinata / reale

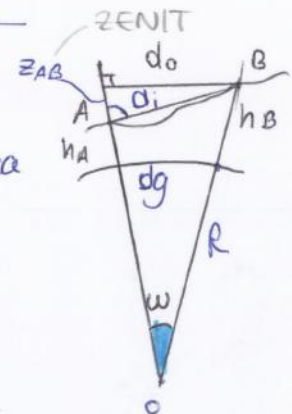
d_o = distanza orizzontale / ridotta

d_g = distanza geode (rif. riferimento)

d_c = distanza cartografica

OBIETTIVO

$$d_i \rightarrow d_o \rightarrow d_g \rightarrow d_c$$



1) $d_i \rightarrow d_o$

$$d_o = d_i \sin Z_{AB}$$

2) $d_o \rightarrow d_g$

$$d_g = R w = R \sin w \quad (w \text{ piccolissimo})$$

Considero il triangolo che ha come:

- cateto = d_o
- ipotenusa = $R + h_B$

$$\Rightarrow \sin w = \frac{d_o}{R + h_B} \Rightarrow d_g = R \frac{d_o}{R + h_B} = \frac{d_o}{1 + \frac{h_B}{R}} =$$

$$\underline{\underline{51}} = d_o \left(1 + \frac{h_B}{R} \right)^{-1} = d_o \left(1 - \frac{h_B}{R} \right)$$

Classificazione delle carte in base alla scala 1/n

geografiche (1:1.000.000 e minori)

corografiche (1:100.000 ÷ 1:1.000.000)

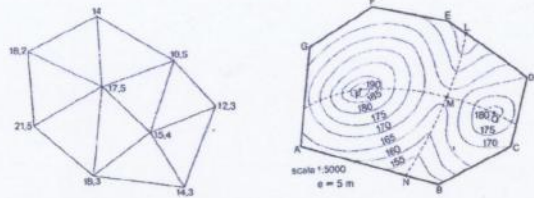
topografiche a:

- piccola scala (1:50.000 ÷ 1:100.000)
- media scala (1:10.000 ÷ 1:25.000)
- grande scala (1:1.000 ÷ 1:5.000)
- grandissima scala (1:200 ÷ 1:500)

La scala 1/n influisce su: precisione
 grado di dettaglio
 simboli convenzionali
 equidistanza curve di livello

Piano quotato e a curve di livello

Curva di livello: intersezione del terreno con piani aventi la stessa equidistanza



Precisione delle carte in funzione del denominatore di scala "n"

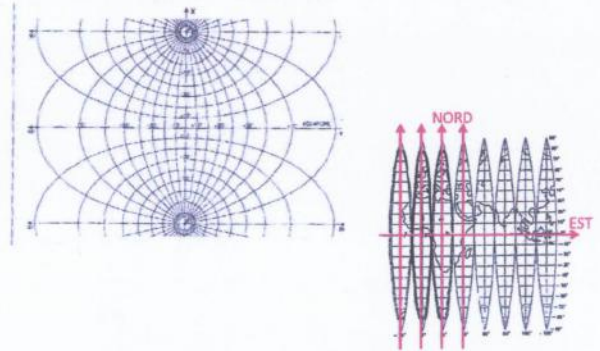
Precisione planimetrica (errore di graficismo)

scala 1:	errore medio planimetrico $\pm(0.2 - 0.5 \text{ mm}) * n$
2.000	$\pm(0.4 + 1) \text{ m}$
10.000	$\pm(2 + 5) \text{ m}$
25.000	$\pm(5 + 12.5) \text{ m}$

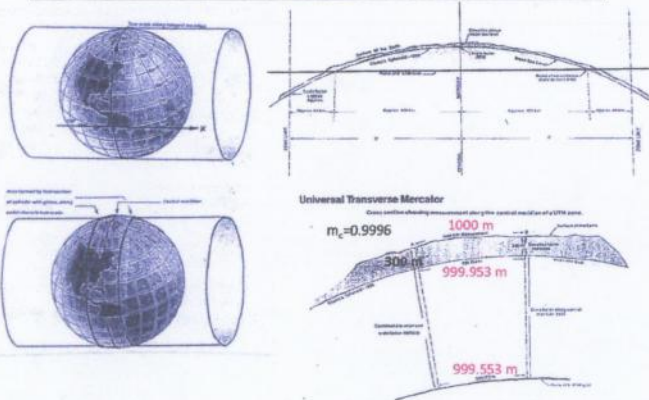
Precisione altimetrica ed equidistanza curve livello

scala 1:	errore medio punti quotati $\pm(0.02 - 0.2 \text{ mm}) * n$	errore medio curve livello $\pm(0.1 - 0.5 \text{ mm}) * n$	equidistanza (in generale) $1 \text{ mm} * n$
2000	4 ÷ 40 cm	$\pm(0.2 + 1) \text{ m}$	2 m
10.000	0.2 ÷	$\pm(1 + 5) \text{ m}$	10 m
25.000	0.5 ÷ 5 m	$\pm(2.5 + 12.5) \text{ m}$	25 m

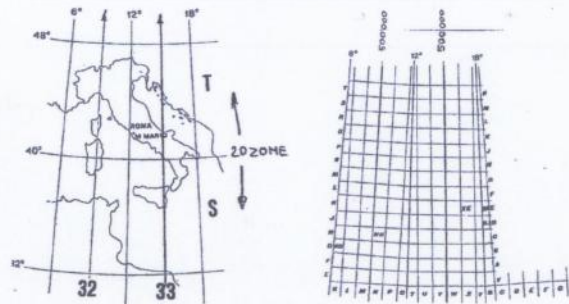
Carta di Gauss e fusi (ampiezza longitudine = 6°)



Analogia della rappresentazione di Gauss: proiezione cilindrica inversa



Datum WGS84 e coordinate UTM



Ellissoide geocentrico WGS84
 60 fusi da 6° d'ampiezza numerati dall'antimeridiano di greenwich

Origine delle Longitudini: Greenwich
 Origine le coordinate cartografiche UTM

Designazione di un punto in UTM:
32 T LQ 57641 21255

Definizione e realizzazione sistema ECEF - ITRS

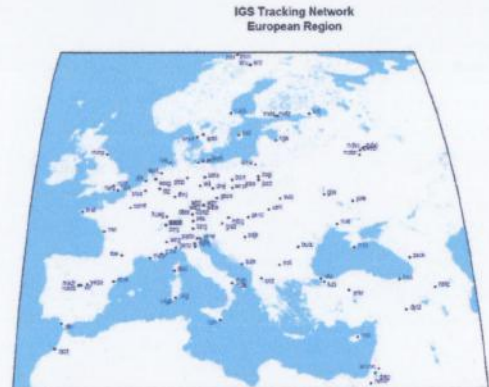
Lo IERS definisce il sistema di riferimento ITRS (*International Terrestrial Reference System*), la cui realizzazione pratica consiste in un catalogo di posizioni e velocità di punti (oggi stazioni permanenti GPS), detto ITRF (*International Terrestrial Reference Frame*).

L'IGS (*International GNSS Service*) contribuisce alla determinazione degli ITRS ITRF periodicamente (ITRF89 ... ITRF2008)



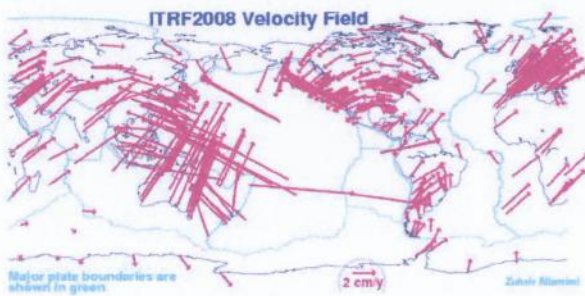
<http://igsceb.jpl.nasa.gov/network/netindex.html>

La rete di stazioni permanenti dell'IGS - Europa



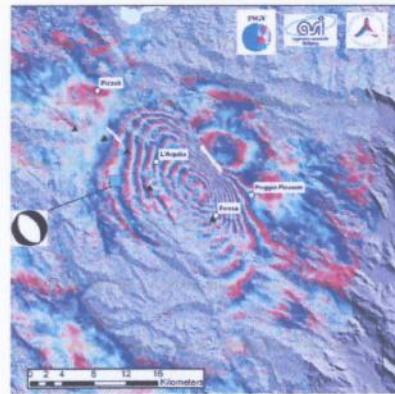
<http://igsceb.jpl.nasa.gov>

Campo di velocità ITRF2008



Major plate boundaries are shown in green. 2 cm/y. Zuhdi Altamimi

Perché cambiano i sistemi di riferimento?



Deformazioni locali

Esempio: terremoto in Abruzzo.
interferogramma SAR ENVISAT - ogni frangia d'interferenza rappresenta uno spostamento quasi verticale di 2.5 cm
Fonte: INGV

Definizione e realizzazione sistema ECEF - ETRS

In Europa una buona parte di questi spostamenti globali è seguita da tutte le nazioni; per questo si è deciso di istituire una rete "locale" Europea, le cui coordinate, depurate da questi spostamenti comuni, servissero da sistema di riferimento. Questo progetto, nato all'interno della IAG, si chiama EUREF (*European Reference Frame*). La sua realizzazione consiste in un catalogo di punti di note coordinate e velocità denominate ETRFxx (ETRF89 ETRF2000)

EUREF Permanent Tracking Network



ITRF e ETRF coincidono all'anno 1989 (ITRS89=ETRS89).

http://www.epncb.oma.be/_trackingnetwork/maps.php

Realizzazione del DATUM WGS84: la rete IGM95

Rete IGM95:

- materializza il S.R. WGS84 usato nel GPS nella realizzazione ETRF89
- circa 2000 vertici
- interdistanza 20 km e in alcune zone 7 km
- rilievo con metodologia GPS



Monografia di vertici IGM95

GRUGLIASCO (Parco Porporati)		058053 100 Sca 9	
Regione: ITALIA Provincia: GRUGLIASCO Comune: GRUGLIASCO	Progetto: E.N.E.L. S.p.A. Indirizzo: Corso Regina Margherita, 207 Codice: 10130 Città: GRUGLIASCO Telefono: 011/2721111	Geografiche (WGS84) Piani (Sca) Geografiche (ETRF2000) Piani (ETRF2000) N: 47°04'45" E: 11°08'15" N: 47°04'45" E: 11°08'15" UTM UTM UTM UTM 32Q 32Q 32Q 32Q 500000 500000 500000 500000 6 6 6 6	

Informazioni cartografiche: Per l'elenco delle opere in corso di realizzazione o in fase di studio, il cliente può richiedere copia gratuita del piano di lavoro.	
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

Il sistema di riferimento ufficiale italiano: ETRF2000

Rete Dinamica Nazionale (RDN)

- realizzata dall'IGM
- 100 stazioni permanenti GNSS
- materializza il S.R. WGS84 ETRF2000 in maniera "dinamica" (continua acquisizione e ricalcolo) dal 1 gennaio 2009

Da: <http://www.igmi.org/>

SPGPS Politecnico di Torino

Realizzazione del DATUM WGS84: il sistema ITRF

RDN è inquadrata nel sistema ETRF2000. Come riferimento temporale è stato scelto, secondo le direttive EUREF, il 2008.0. Essa è il Frame che realizza in maniera dinamica il sistema geodetico ufficiale italiano a partire dall'epoca 1/1/2009.

Con Decreto della PRESIDENZA DEL CONSIGLIO DEI MINISTRI 10 novembre 2011 (Gazzetta n. 48 del 27 febbraio 2012) su "Adozione del Sistema di riferimento geodetico nazionale", il Datum WGS84 nella realizzazione ETRF2000 è diventato il nuovo sistema di riferimento geodetico italiano.

Tutti gli enti cartografici nazionali devono oggi adeguarsi al nuovo sistema di riferimento nazionale, peraltro già richiesto dalla direttiva Europea INSPIRE (Infrastructure for Spatial Information in Europe) sulla condivisione dei dati territoriali.

Formule di Hirvonen dirette: da φ, λ a x, y

$$x = d \operatorname{arcsinh} \frac{\cos z \tan \lambda'}{v_1}$$

$$y = a(A_1 z - A_2 \sin 2z + A_3 \sin 4z - A_4 \sin 6z)$$

si ricorda che $\operatorname{arcsinh} h(t) = \log(t + \sqrt{1+t^2})$

a, c = semiasse equatoriale e polare

$$e^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{a^2}{1 - e^2} \quad \text{prima eccentricità} \quad d = \frac{a^2}{c}$$

$$v = \sqrt{1 + e^2 \cos^2 \varphi}$$

$$\lambda' = (\lambda - \lambda_0) \quad \text{dove } \lambda_0 = \text{longitudine meridiana centrale del fuso}$$

$$z = \arctan \frac{\tan \varphi}{\cos(\lambda' v)} \quad v_1 = \sqrt{1 + e^2 \cos^2 z}$$

$$A_1 = \left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64} - \frac{5e^6}{256}\right) \quad A_2 = \left(\frac{3e^2}{8} - \frac{3e^4}{32} + \frac{45e^6}{1024}\right)$$

$$A_3 = \left(\frac{15e^4}{256} - \frac{45e^6}{1024}\right) \quad A_4 = \left(\frac{35e^6}{3072}\right)$$

Le coordinate cartografiche Est, Nord si ricavano dalle x, y applicando la contrazione e le false origini:

$$\text{Est} = mc x + x_0$$

$$\text{Nord} = mc y + y_0$$

Formule di Hirvonen inverse: da x, y a φ, λ

$$\lambda' = \arctan \frac{v_1 \operatorname{senh} \left(\frac{x}{d} \right)}{\cos \xi}$$

$$\varphi = \arctan \left[\tan \xi \cos(v_1 \lambda') \right]$$

$$v_1 = \sqrt{1 + e^2 \cos^2 z} \quad (\text{come formule precedenti})$$

$$e_1 = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \right)$$

$$x = \frac{\text{Est} - x_0}{m_c} \quad y = \frac{\text{Nord} - y_0}{m_c} \quad \vartheta = \frac{y}{m_c A_1}$$

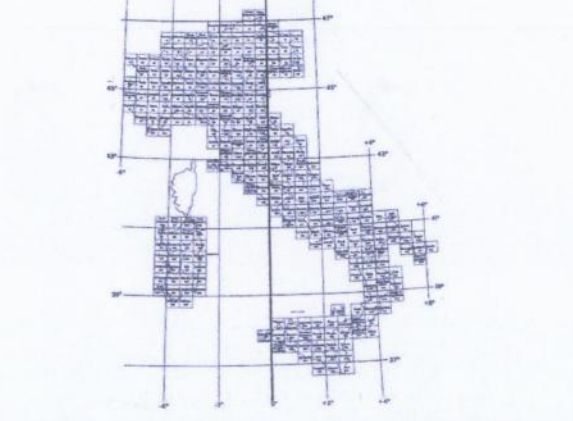
con x_0, y_0 origini convenzionali e m_c modulo di contrazione

$$\xi = \vartheta + B_1 \operatorname{sen} 2\vartheta + B_2 \operatorname{sen} 4\vartheta + B_3 \operatorname{sen} 6\vartheta + B_4 \operatorname{sen} 8\vartheta$$

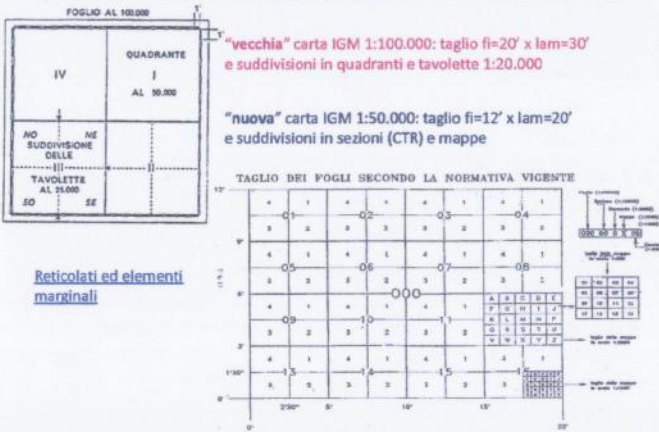
$$B_1 = \left(\frac{3e_1}{2} - \frac{27e_1^3}{32} \right) \quad B_2 = \left(\frac{21e_1^2}{16} - \frac{55e_1^4}{32} \right)$$

$$B_3 = \frac{151e_1^3}{96} \quad B_4 = \frac{1097e_1^4}{512}$$

Ttaglio dei Fogli scala 1:100.000 – quadro di unione



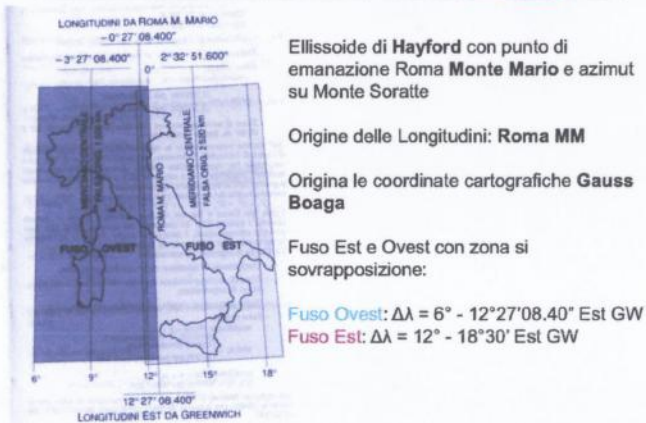
Ttaglio dei Fogli



Sistemi geodetici e cartografici di Gauss

	Roma40/Gauss Boaga	ED50 / UTM ED50	WGS84 / UTM WGS84
Parametri ellissoide	Hayford: semiasse equatoriale $a = 6378388$ m Eccentricità $e^2 = 0.006722670022$		WGS84: $a=6378137$ m $e^2=0.006694379990$
DATUM	Roma 1940	ED50	WGS84
Origini longitud. λ	Roma Monte Mario (MM)	Greenwich (GW)	
Ampiezza fusi $\Delta\lambda$	6° per tutti i fusi		
Denominazione fusi	Ovest	Est	32, 33
Meridiani centrali λ_0	-3°27'08.40" Est di MM	2°32'51.60" Est di MM	9°, 15°, 9°, 15° Est GW
coordinate cartograf.	GAUSS-BOAGA		UTM-ED50, UTM-WGS84
Falsa origine x_0	1500 km	2520 km	500 km per tutti i fusi
Falsa origine y_0	0 per l'emisfero Nord 10000 km per l'emisfero Sud		
Modulo contrazione m_c	0.9996 per tutti i fusi		

I precedenti sistemi di riferimento: Datum Roma 1940



Trasformazione DATUM ED50 e Roma40

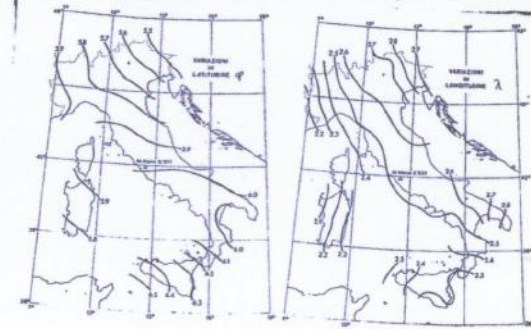


Tabelle di trasformazione tra Gauss-Boaga e UTM ED50

Foglio n°	Coordinate NORD		Coordinate EST		Foglio n°	Coordinate NORD		Coordinate EST	
	fuso 32	fuso 33	fuso 32	fuso 33		fuso 32	fuso 33	fuso 32	fuso 33
1	-171		-999948		40A		169		934
1A	171	+187	948	-2019936	40B		169		934
2	173		948		41	+181		-999948	
3	174		948		42	180			948
4	173		947		43	179			945
4A	173		948		44	178			943
4B	173	169	948	936	45	178			945
5	179		944		47	178			948
5A	179		944		48	177			947
6	179		945		49	177			947
7	177		945		50	177			948
8	178		945		51	176	+172	948	-2019936
9	178		946		52	171			938
10	175		947		53	171			938
11	174		948		53A		170		938
12	174	169	948	935	53B		170		938
13	174	169	948	935	53C		170		938
14	169		934	84	58		181		947
14A	168		934	85	58		181		948
14B	167		933	86	58		180		948
15	178		944		57	180			948

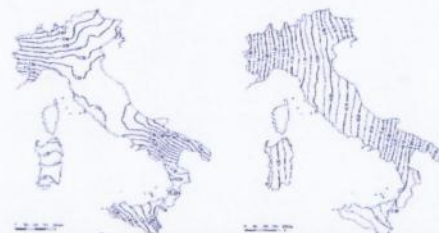
Correzioni in metri da aggiungere alle coordinate dei punti nella rappresentazione Gauss-Boaga (Roma 1940), per ottenere le coordinate degli stessi punti nel sistema UTM ED50.

Sistema WGS84 e Roma1940

I SR sono realizzati da reti geodetiche:

- Roma40: Rete di triangolazione 1° ordine IGM
- WGS84: ETRS/ITRS – In Italia IGM95 e RDN

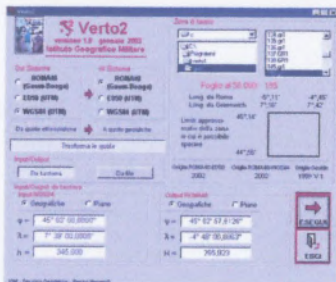
Isotransitive: variazioni di latitudine e longitudine tra sistema nazionale Roma40 e WGS84



isotransitive $\lambda_{RMA} - \lambda_{WGS84}$ equidistanza: 0.05 secondi
isotransitive $\phi_{RMA} - \phi_{WGS84}$ equidistanza: 0.02 secondi

trasformazione continua – procedura VERTO

Mette in relazione i sistemi di riferimento Roma40 ED50 e WGS84 ma anche il DATUM altimetrico (ondulazione del geoido)



Grigliati di isovariazione, per ogni foglio 1:50.000 ($\Delta\varphi=20'$ $\Delta\lambda=30'$) relativi a:

- latitudine λ ,
- longitudine φ ,

sui bordi delle tavolette IGM1:25.000 ($\Delta\varphi=5'$ $\Delta\lambda=7' 30''$)

- ondulazione del geoido N

All'interno della maglia si usa un interpolatore bilineare

Il valore non è tanto quello del software che fa una interpolazione quanto quello dei dati di isovariazione contenuti nei grigliati acquistabili presso l'IGM (.gr1 e oggi .gk2)

LA CARTOGRAFIA UFFICIALE ITALIANA

Legge 2/2/1960 n° 68 → stabiliti gli ORGANI CARTOGRAFICI DELLO STATO.

- I.G.M - Istituto Geografico Militare
- I.I.M - Istituto Idrografico della Marina
- C.I.G.A - Centro di Informazioni Geotopografiche dell'Aeronautica
- CATASTO - Direzione Centrale del Catasto e dei servizi Geotopocartografici e della conservazione dei registri immobiliari.
- Servizio geologico

CARTOGRAFIA UFFICIALE

carte

topografiche, nautiche, aeronautiche, catastali e geologiche

Produzione cartografica in Italia

→ REGIONI a statuto ordinario (1970)
conquistate nascono i programmi di C.T.R (cartografia tecnica a grande scala).
1:10.000 e 1:5.000

→ PROVINCE (sono 102)
queste prevedono la costruzione di cartografia tecnica (tradizionale e/o numerata)
1:5.000

→ COMUNI (sono 8.102)
producono cartografia tecnica alle scale:
1:500, 1:1.000, 1:2.000

PRINCIPALI SISTEMI CARTOGRAFICI in ITALIA

PROIEZIONE DI CASSINI-SOLDER

↳ CATASTO carte a scala variabile (1:500 ÷ 1:4.000)

$$\begin{cases} x = s \cos(\alpha - 2\varepsilon) \\ y = s \sin(\alpha - \varepsilon) \end{cases} \quad 3\varepsilon = \frac{\text{Sup}}{R^2}$$

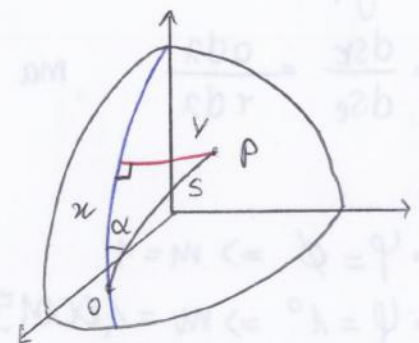
→ Cartografia afilattica

$$m_e = 1 + \frac{y^2}{2\rho N} \cos^2 \alpha$$

$$m_a = 1 + \frac{y^2}{2\rho N}$$

$$\max m_e \cong 6 \text{ cm/km}$$

$$\max f = 6''$$



800 piccole origini
35 grandi origini

WCS 84 → normativa in uso

PROIEZIONE DI MERCATORE MODIFICATA

La rete **CONFORME**

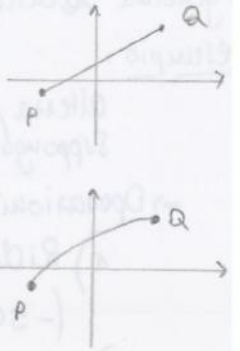
$$\begin{cases} x = a\lambda \\ y = a \log \left[\left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{1/2} \operatorname{tg} 45 + \varphi/2 \right] \end{cases} \text{ dove } e = n^{\circ} \text{ di Nepero}$$

Definito un parallelo ad una certa altitudine \Rightarrow stabilisco una COMPRESSIONE, applicata per evitare grosse deformazioni.
 pari al " $\cos \varphi$ "

Si utilizzano 2 tipi di linee:

- LOSSODROMIA = linea di azimut costante (sull'ellissoide praticamente una retta) \rightarrow sulla carta
- ORTODROMIA = linea di minor percorso (sull'ellissoide praticamente la geodetica) \rightarrow

Vantaggio = possibile ottenere un azimut costante con la bussola, priva di deformazioni.
 oltre latitudini $\pm 60^{\circ}$ non usata x le def.



CARTA DI GAUSS

Rappresentazione analitica, vista come una cilindrica trasversa.

Se si sviluppa tutta la carta di Gauss su un cilindro ipotetico, unico:

\rightarrow nell'angolo al meridiano di $\operatorname{tg} \Rightarrow$ deformat. abbastanza ^(nulla) piccola. Più ci si allontana \Rightarrow più aumenta la deformazione. I meridiani diventano quasi retti ($\pm 90^{\circ}$). Per risolvere questo problema di def.:

immagino una carta POLICILINDRICA = tanti cilindri tangente ai meridiani, non un cilindro solo

6° = ampiezza dei MERIDIANI stabilita per diminuire le deformat. (convenzione)

60 fusi da 6° di ampiezza (numerati dall'ANTIMERIDIANO di GREENWICH numerati in senso antiorario)

$\left\{ \begin{array}{l} 40 \text{ cm/km (contratti)} \\ 30 \text{ cm/km (allungati)} \end{array} \right.$

$\hookrightarrow (360 \div 6 = 60)$

\Rightarrow Origine delle longitudini \rightarrow GREENWICH

\Rightarrow origine delle coord. cartografiche \rightarrow UTM

Sistema di riferimento

Ogni fuso ha un S.R. indipendente dalla lat. \Rightarrow incoerenza tra i vari S.R.

\Rightarrow Trasformata EQUATORE = asse EST/x

MERIDIANO CENTRALE (quello che sul cilindro = coordinata NORD/y non si deforma)

Ogni fuso ha un suo S.R. \Rightarrow per un totale di 60 S.R. tra di loro incoerenti



SISTEMA U.T.M.

universale
 trasversa
 di Mercatore

CONVENZIONE per designare un PUNTO dato in COORDINATE UTM

ZONE = fasce di $\Delta\varphi = 8^\circ$, numerate con lettere

es. Italia: zona S, T.

All'interno delle zone si ha una quadratura di 100 per lato.

Per designare un punto posso fornire

- coord. N, E, S, O

oppure

- numero del fuso, zona quadrato, es: 32 T 1Q 57641 21255

ELLIPSOIDE WGS 84

- 1° approccio = posizionarlo adiacentemente
- 2° approccio = adiacente + il CM coincide con il vero CM

ITRS - International Terrestrial Reference System -

Lo S.R. definito dallo IERS, la sua realizzazione pratica consiste in un catalogo di posizioni e velocità di punti (oggi stazioni permanenti GPS) detto ITRF (International Terrestrial Reference Frame).

IGS - International GNSS Service -

Lo contribuisce alla realizzazione pratica di un CATALOGO DI COORDINATE (150 stazioni)

Aggiornamento S.R.

→ PIANETA IN MOVIMENTO (Teoria Geodinamica) → PIACCHE IN MOVIMENTO.
 Misurato uno spostamento di 3 cm l'anno in Europa.



Devono cambiare ogni anno i S.R.?

NO! Solo nel momento in cui le deformazioni sono eccessive si

CAMBIA il S.R.



Fornite EQ per il PASSAGGIO da un S.R. all'altro

NB: In Europa una buona parte di questi spostamenti globali è seguita da tutte le nazioni ⇒ si è istituita una rete locale europea. Le coord. sono depurate da questi spostamenti e fungono da S.R.

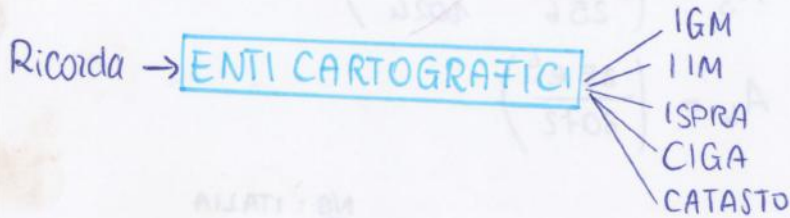
Lo Progetto nato all'interno della IAG detto **EUREF** (European Reference Frame)



(pochi aggiornamenti →) realizzazione di un catalogo di punti di note coordinate e velocità denominate ETRF_{xx}

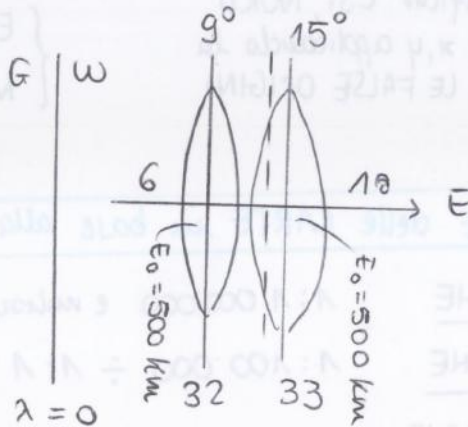
Con il Decreto della Presidenza del Consiglio dei Ministri, 10.11.2011 (Gazzetta n° 48 del 27.02.2012) su "Adozione del S.R. geodetico nazionale" il **Datum WGS84** nella realizzazione ETRF 2000 è diventato il nuovo S.R. geodetico italiano.

NB: Tutti gli enti cartografici nazionali devono oggi adeguarsi al nuovo S.R. nazionale, già richiesto dalla direttiva Europa INSPIRE (Infrastructure for Spatial Information in Europe) sulla condivisione dei dati territoriali.



L'IGM utilizza la cartografia UTM.
Oggi si usa l'UTM-WGS84-ETRF 2000.

Ricorda: l'Italia occupa 2 fusi completamente e un terzo parzialmente



Tramite la CARTA di GAUSS è possibile $(x, y) \iff (\varphi, \lambda)$

esempio: $E = 475 \text{ km}$
 $F_{uso} = 32$

$$\Rightarrow E_c = 475 - 500 = -25$$

NB: Tutto è sempre
* calcolato a partire dal meridiano centrale

$$E = x \cdot 0,9996 + E_0$$

$$E_0 = 500 \text{ km}$$

$$N = y \cdot 0,9996 + N_0$$

$$N_0 = \emptyset \text{ (emisfero Nord)}$$

$$N_0 = 10000 \text{ km (emisfero Sud)}$$

FORMULE DI HIRVOVEN

Da $(\varphi, \lambda) \rightarrow (x, y)$

$$\begin{cases} x = d \operatorname{arcsin} \frac{\cos z \operatorname{tg} \lambda'}{v_1} \\ y = a (A_1 z - A_2 \sin 2z + A_3 \sin 4z - A_4 \sin 6z) \\ z = f(\varphi, \lambda) \quad v_1 = f(\varphi) \end{cases}$$

NB: A_1, \dots, A_n sono calcolabili con formule che dipendono dall'eccentricità

Ricorda che $\operatorname{arcsin} h(t) = \log(t + \sqrt{1+t^2})$
 a, c = semiasse equatoriale e polare

$$E^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2} = \frac{e^2}{1 - e^2} \quad (\text{prima eccentricità}) \quad d = \frac{a^2}{c} \quad v = \sqrt{1 + E^2 \cos^2 \varphi}$$

NB: Il fattore di scala sancisce l'equidistanza.

PRECISIONI PLANIMETRICHE

$((0,2)mm \div (0,5)mm) \cdot n$ ERRORE DI GRAFICISMO (metodo planimetrico)

Ogni carta nasce con il suo peccato originale

TAGLIO DEI FOGLI

scala 1:	errore
2.000	$\pm (9,4 \div 1)m$
10.000	$\pm (2 \div 5)m$
25.000	$\pm (5 \div 12,5)m$

TUTTA la cartografia non può essere rappresentata su un solo foglio.

2 tipi di taglio:

- 1) Secondo le coord. cartografiche
- 2) secondo meridiani e paralleli

Si parla in generale di un taglio di tipo geografico cioè che segue il reticolo geografico

Cartografia 1: 5000 = cartografia di base

la scala 1:100000 presentava prima un taglio QUADRATO ($\varphi \approx 20' \times \lambda = 30'$) i quadrati erano di 1:20000. Considero un parallelo e un meridiano (centrale). Ottergo il quadrante 1:5000 e tiraccio ancora un parallelo e un meridiano centrale. Taglio di $5' \times 7' 30''$ e F80 III SE

Dopo si è passati alla carta IGM 1:50000 ($\varphi = 12' \times \lambda = 20'$) suddivisa in sezioni (CTR) e mappe (cambiato il tipo di taglio). Taglio secondo meridiani e paralleli.

16 sezioni totali. Da queste deriva le varie mappe. Alcune regioni utilizzano il taglio secondo le coord. geog.

DATUM ROMA 1940

Ellissoide di Hayford, punto di emanazione Roma MONTE MARIO, azimut su MONTE SORATTE.

Origine longitudini = ROMA MM.

Origine le coord. cartografiche GAUSS BOAGA.

2 FUSI $\left\{ \begin{array}{l} \text{EST} \\ \text{OVEST} \end{array} \right.$ con zona di sovrapposizione.

FUSO EST : $\Delta \lambda = 12^\circ - 18^\circ 30' \text{ EST GW}$

" OVEST : $\Delta \lambda = 6^\circ - 12^\circ 27' 08,40''$

Prima di questa vi era il DATUM ED 50 - ROMA 40.

Non ha motivi di \exists .
vi era solo perché il taglio dei fogli si basa su questo

DA COORD. PIXEL → CARTOGRAFICHE

Georeferenzazione di mappe raster

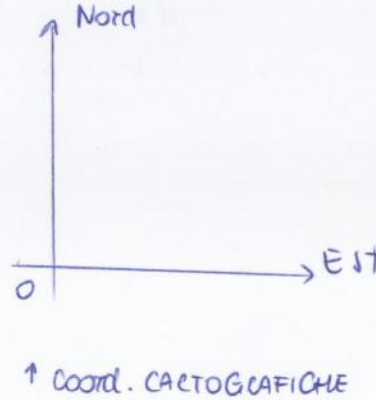
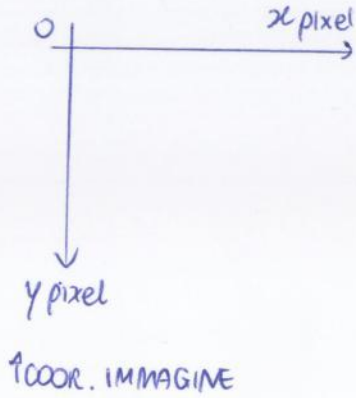
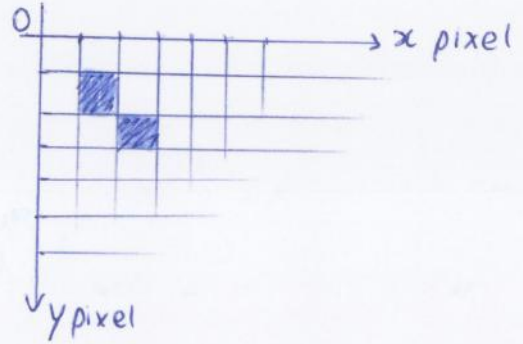
PIXEL

Ø posto in alto a sx
Sotto = matrice di pixel

→ Necessario dare un significato metrico ai pixel

• TRASLAZIONE + ROTAZIONE

Se considero anche la deformazione ⇒ dovrò compiere una **TRASFORMAZIONE AFFINE**



$$\text{Est} = A \cdot X + C \cdot Y + E$$

$$\text{Nord} = B \cdot X + D \cdot Y + F$$

A, B, C, D, E, F sono parametri contenuti in word file.

NB: Se D ha segno meno ⇒ si ha l'inversione di dati.

Ad ogni file JPG è associato un file JGW che rappresenta la georeferenzazione.

MODALITÀ DI MISURA = copie per l'originale d'impianto.



POLITECNICO DI TORINO

Dipartimento di Ingegneria dell'Ambiente, del Territorio e delle Infrastrutture

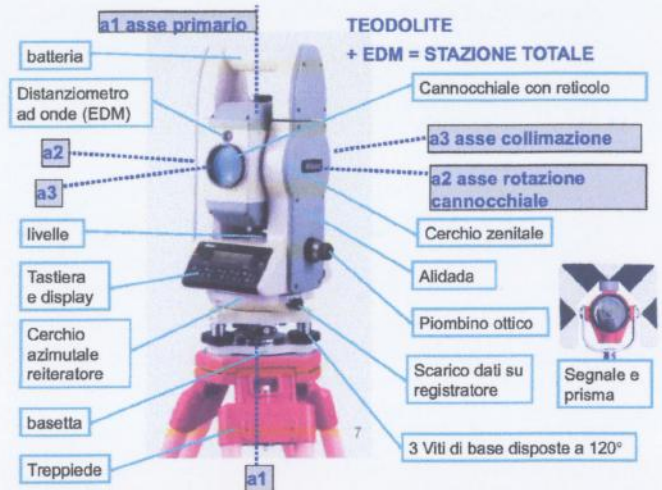
Topografia

Strumenti per la misura di angoli: teodoliti e stazioni totali

Alberto CINA

E-mail: alberto.cina@polito.it
Tel / fax 011-090-7630 / 7699

2014



Livella torica



Fiala in vetro a sezione di toroide, parzialmente piena di un liquido la cui superficie si dispone orizzontale

geometria: 1) Tangente al centro dell'arco direttore → tangente centrale
2) linea d'appoggio



$$\gamma = \frac{2mm}{R}$$

• **Condizione operativa:** si ruota la livella fino a quando la tang. Centrale coincide con la tan. al centro bolla → in pratica ciò avviene "centrando la bolla" al centro della graduazione

• **Condizione di rettifica:** tang. Centrale parallela alla linea di appoggio
→ Orizzontalizza assi, piani e verticalizza assi

Sensibilità della livella: angolo di rotazione in secondi d'arco, per da dare per uno spostamento di 2 mm (1 parte di graduazione) alla bolla

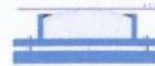
Nei teodoliti di media precisione vale spesso 20"

Livella SFERICA



calotta in vetro, parzialmente piena di un liquido la cui superficie si dispone orizzontale

geometria: 1) piano tangente al centro della calotta
2) superficie d'appoggio



• **Condizione operativa:** si ruota la livella fino a quando il la tang. Centrale coincide con la tan. al centro bolla → in pratica ciò avviene "centrando la bolla" al centro della graduazione

• **Condizione di rettifica:** piano tangente al centro della calotta parallelo alla superficie di appoggio
→ Orizzontalizza piani e verticalizza assi

Sensibilità della livella sferica: limitata ad 1 o alcuni primi d'arco. È uno strumento di «prima approssimazione».

Cannocchiale a lunghezza costante e collimazione ad un punto



Adattamento alla vista: immagine "nitida" del reticolo (portare l'immagine ad una distanza pari a quella della visione distinta)

Adattamento alla distanza: portare l'immagine del punto sul reticolo agendo sulla vite di focamento che sposta la lente anallattica

Asse di collimazione: passa per il centro obiettivo e il centro reticolo. Coincide con l'asse ottico del cannocchiale

Collimazione al punto P: allineare il centro obiettivo e del reticolo, al punto da collimare

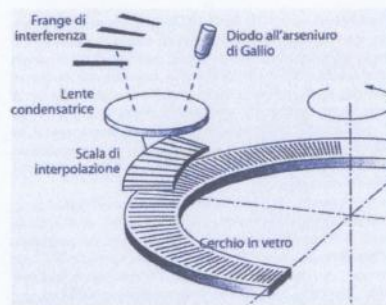
- 1) Adattamento distanza
- 2) Bloccaggio azimutale e zenitale
- 3) Collimazione "fine" con viti dei piccoli spostamenti



Letture elettroniche delle direzioni: cerchio graduato e lettura incrementale

Cerchi in vetro ottico ma con tratti alternativamente opachi e trasparenti

un sistema di diodo e fotodiiodo conta in numero di transizioni "opaco trasparente" (0 / 1) nella rotazione dell'alidada rispetto ad una posizione iniziale



Il cerchio graduato porta tratti tutti uguale → misura di incrementi da una posizione iniziale, col conteggio degli interi e loro frazioni

Necessità di dispositivi di interpolazione dei tratti principali della graduazione

Letture elettroniche delle direzioni: cerchio codificato e lettura assoluta



Una matrice di sensori legge le diverse sezioni del cerchio, restituendo per ognuna un segnale 0 / 1 a seconda del passaggio della luce

La graduazione complessa corrisponde ad un valore numerico ben preciso

migliaia	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
centinaia	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
decine	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
unità	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

POSIZIONI DEL TEODOLITE

- **NORMALE** : con cerchio zenitale alla sinistra dell'operatore
- **CONIUGATA** : con cerchio zenitale alla destra dell'operatore

CONDIZIONI OPERATIVE (MESSA IN STAZIONE)

- asse primario (a1) verticale
- centro dello strumento (a1/a2/a3) e punto a terra sulla stessa verticale

CONDIZIONI DI RETTIFICA

- a1 ortogonale ad a2
- a2 ortogonale a3 (ovvero a2 ortogonale al piano formato da a1 e a3)

ERRORI NELLE MISURE AZIMUTALI

RETTIFICA	Verticalità (ϵ_v)	a1 \perp verticale
	Inclinazione (ϵ_i)	a1 \perp a2
	Collimazione (ϵ_c)	a2 \perp a3
COSTRUZIONE	eccentricità cerchi graduati	
	tracciamento cerchi graduati	

ERRORI NELLE MISURE ZENITALI

Zenit strumentale (Z)
Residuo errore di verticalità a1 (ν)
rifrazione atmosferica

ERRORI VARI NELLE MISURE AZIMUTALI E ZENITALI

- Puntamento
- Centramento del punto a terra
- stima lettura ai cerchi
- giochi parti meccaniche

REGOLA DI BESSEL

la media delle letture al cerchio azimutale eseguite nelle posizioni **normale** e **coniugata**, è esente dagli errori di :

- inclinazione (ϵ_i)
- collimazione (ϵ_c)
- eccentricità dei cerchi

N.B. : Non elimina l'errore di verticalità

METODO DELLA REITERAZIONE

Consiste nell'applicazione della regola di BESSEL in diverse zone del cerchio, dando spostamenti a questo con la vite di reiterazione.

In questa maniera vengono mediati gli errori di tracciamento del cerchio azimutale

N.B. : il metodo della reiterazione applicato all'osservazione di più direzioni angolari prende il nome di "METODO A STRATI"



POLITECNICO DI TORINO

Dipartimento di Ingegneria dell'Ambiente, del Territorio e delle Infrastrutture

Topografia

Strumenti e metodi per la misura dei dislivelli

Alberto CINA

E-mail: alberto.cina@polito.it
Tel / fax 011-090-7630 / 7699

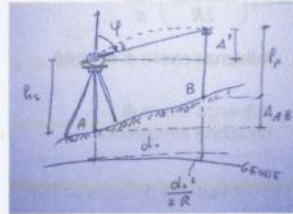
2014

Misura indiretta dei dislivelli con angoli e distanze

STRUMENTI : STAZIONE TOTALE

- non è precisa come la livellazione geometrica
- distlivello con angolo zenitale ξ e distanza inclinata

Sistema di riferimento: fisico (riferimento alla verticale)



$$\Delta_{AB} + I_p = \Delta' + h_s$$

$$\Delta_{AB} = d_i \cos \varphi + h_s - I_p$$

Con correzione di rifrazione e sfericità:

$$\Delta_{AB} = \left[d_i \cos \varphi + \frac{(d_i \sin \varphi)^2}{2R} \right] + h_s - I_p =$$

$$= \left[d_i \cos \xi + \frac{(d_i \sin \xi)^2}{2R} (1 - K) \right] + h_s - I_p$$

La precisione globale dipende dalla precisione con cui è nota:
• distanza, angolo zenitale, coefficiente di rifrazione atmosferica K e altezza strumentale e del prisma ($\sigma = \pm 1-10 \text{ mm}$)

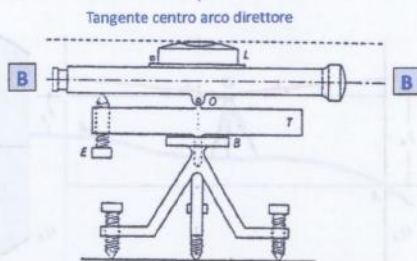
Costruzione del livello



Livelli e stadi



Livello con vite di elevazione



CONDIZIONE OPERATIVA

• asse di collimazione [B] orizzontale

CONDIZIONE DI RETTIFICA

• Asse di collimazione [B] parallelo alla tangente al centro dell'arco direttore della livella torica

Errori nella livellazione geometrica

Errori grossolani e procedure operative:

- livellazione in "andata e ritorno" → verifica errore di chiusura
- doppia lettura nella stessa battuta, con riposizionamento del livello
- stadia con doppia graduazione (classiche in invar)

Errori sistematici

- Rifrazione (terreni in pendenza, ore calde ...)
- Inclinazione stadia (la lettura è sempre maggiore di quella secondo la verticale)
- Affondamento stadia e strumento
- Errore residuo di rettifica (orizzontalità linea di mira)
- Errore di sfericità

Procedura operativa per eliminare sistematismi:

- livellazione dal mezzo o reciproca, piastra pesante di appoggio stadia

Errori accidentali

- Precisione lettura alla stadia: $\approx 1 - 0.1 \text{ mm}$ (apprezzamento: centesimi)
- precisione battuta livellazione: $(1 - 0.1 \text{ mm}) \cdot \sqrt{2}$

13

Classificazione dei livelli in base alla precisione

PRECISIONE	e.m.k. [mm]	Sensibilità livella o compensatore	Ø obiett. [mm]	Ingrandim. Cannocch.
Bassa	± 10	60"	20+30	15+20
Media	± 5	40"	30	20+30
Alta	± 1+2	10+25"	35+40	30
Altissima	± 0.3+0.5	5+10"	50+60	40+50

Lo s.q.m. è proporzionale alla radice della lunghezza L della linea:

$$\sigma_{\Delta} = \pm emk \sqrt{L(km)}$$

emk : errore medio kilometrico: dipende dal livello, della stadia e delle modalità operative

Esempio: $emk = 2 \text{ mm}$ e $L = 9 \text{ km}$ $\sigma_{\Delta} = \pm 2 \text{ mm/km} * \sqrt{9} = \pm 6 \text{ mm}$

15

Capisaldi IGM e monografie

Rete di livellazione di alta precisione:

- Capisaldi su parete
- Capisaldi a terra (tombini)



CAPOSALDO VERTICALE (SU PARETE)

Istituto Geografico Militare

Comando Regione Militare Torino-Milano
 SM-C C. Dozza
 Comune Dozza
 Progetto Comune di Dozza

Quota: $H = 71,5662$
 Referita a: o.s.o. C

Coordinate geografiche
 $44^{\circ}22'53''$ $- 07^{\circ}48'15''$

ANNO DI FONDAZIONE (1972) Pianta e Prospetto

090244 TOSCARELLA Scuole comunali In-III-089-15/97

• A 0071 alla base della facciata 0160 della scuola, presso lo spigolo destro

• 0074 sulla stessa facciata, in corrispondenza del o.s.o.

Nome: TOSCARELLA - Scuole comunali In-III-089 15/97

17

Esecuzione di battute di livellazione



18

Esecuzione di battute di livellazione in galleria



21

Esecuzione di battute di livellazione



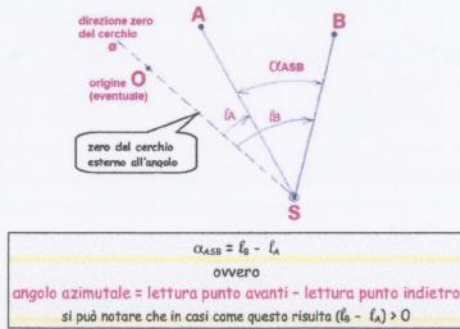
23

Esecuzione di battute di livellazione



1.4. MISURA DEGLI ANGOLI AZIMUTALI

Con il teodolite in stazione nel punto S, si collimano il punto indietro A e il punto avanti B, e si eseguono le rispettive letture al cerchio azimutale l_A e l_B . La graduazione del cerchio cresce sempre in senso orario. L'angolo azimutale si ottiene per differenza di letture (vedi figura):



E' consigliabile (anche se non indispensabile) orientare lo zero del cerchio verso un punto origine O fisicamente esistente e ben visibile. E' un buon accorgimento operativo perché sul terreno, a misura conclusa, resta materializzato un sistema polare (con origine in S dove esiste un centrino, e direzione origine S-O). Se si deve tornare sul posto a completare le misure, è facile orientarsi esattamente allo stesso modo della stazione già eseguita. L'orientamento del cerchio verso un punto prestabilito si esegue nei teodoliti classici con la vite di reiterazione o con il dispositivo ripetitore (levetta che collega il cerchio all'alidada o al basamento). Nei teodoliti elettronici è possibile azzerare via software la lettura su una data direzione. Nella figura qui sopra, lo zero del cerchio cade esternamente all'angolo da misurare, e la differenza delle letture (p.avanti - p.indietro) risulta quindi positiva. Se lo zero cade all'interno dell'angolo, la differenza delle letture (p.avanti - p.indietro) risulta negativa. In tal caso è necessario aggiungere ad essa un angolo giro (v. pagina seguente).

1

Regola di Bessel:
La media delle due letture azimutali "coniugate" (diritta e capovolta) è esente dagli errori di rettifica della 2° e 3° condizione e dall'errore di eccentricità del cannocchiale

La media va effettuata tenendo conto che le due letture coniugate differiscono di un angolo piatto, in quanto l'alidada viene ruotata di 180° tra l'una e l'altra. Traducendo quindi la regola di Bessel in formula si ha:

$$I_m = \frac{I^{C.D.} + (I^{C.D.} \pm 200^\circ)}{2}$$

N. B. : il segno dentro la parentesi va assunto positivo se $I^{C.D.} < 200^\circ$, negativo se $I^{C.D.} > 200^\circ$

Esempi numerici:

1) $I^{C.D.} = 103,3520^\circ$
 $I^{C.D.} = 303,3530^\circ$
 $I_m = \frac{I^{C.D.} + (I^{C.D.} + 200^\circ)}{2} = \frac{103,3520^\circ + (303,3530^\circ - 200^\circ)}{2}$
 $= \frac{103,3520^\circ + 103,3530^\circ}{2} = 103,3525^\circ$

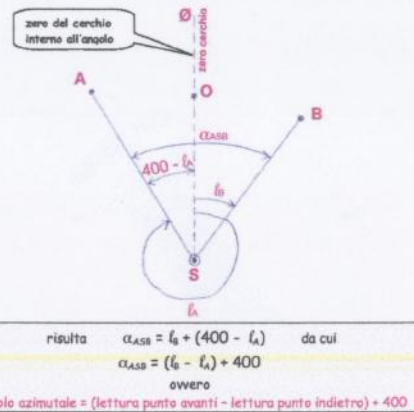
2) $I^{C.D.} = 248^\circ 23' 36''$
 $I^{C.D.} = 68^\circ 23' 40''$
 $I_m = \frac{I^{C.D.} + (I^{C.D.} + 180^\circ)}{2} = \frac{248^\circ 23' 36'' + (68^\circ 23' 40'' + 180^\circ)}{2}$
 $= \frac{248^\circ 23' 36'' + 248^\circ 23' 40''}{2} = 248^\circ 23' 38''$

In pratica, il calcolo può essere effettuato facilmente a mano: la lettura media si ottiene prendendo la parte intera (gradi, primi) della lettura cerchio a sinistra, e aggiungendo ad essa la media dei secondi.

Con i dati dell'esempio 1:
 $103,35^\circ + (20'' + 30'')/2 = 103,35^\circ + 25'' = 103,35^\circ + 0,0025^\circ = 103,3525^\circ$

La regola di Bessel va applicata sempre nelle misure angolari di una certa importanza. In pratica, l'unico caso in cui si omette di applicarla è il cosiddetto rilievo "celerimetrico" (v. seguito, dispense sul rilevamento).

3



In pratica, riassumendo:
 L'angolo azimutale tra due punti si ottiene sempre dalla differenza (lettura p.avanti - lettura p.indietro). Se essa risulta positiva lo zero è esterno all'angolo (v. pagina precedente) e non si aggiunge niente. Se la differenza è negativa, lo zero è interno all'angolo e si deve aggiungere un angolo giro

La Regola di Bessel

Si è visto come il teodolite sia utilizzabile in due posizioni (diritta e capovolta, dette anche cerchio a destra e cerchio a sinistra). Si può dimostrare che alcuni errori sistematici sull'angolo azimutale, in particolare i seguenti:

- errore residuo di inclinazione (2° condizione di rettifica)
- errore residuo di collimazione (3° condizione di rettifica)
- errore di eccentricità del cannocchiale (condizione di costruzione)

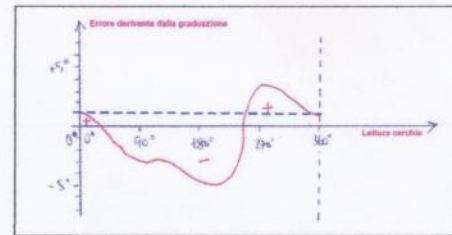
si manifestano con lo stesso valore ma con segno opposto nella posizione diritta e in quella capovolta. Quindi, se si esegue la media delle due letture "coniugate" un errore positivo si somma a un uguale errore negativo per cui complessivamente l'errore si elide. Risultato allora:

2

La RETTERAZIONE

Nelle misure angolari più importanti (ad es. nelle reti di triangolazione), in cui si richiede una precisione spinta, si ricorre alle cosiddette tecniche di reiterazione (o ripetizione) che consistono nel ripetere la misura dell'angolo azimutale più volte, con posizioni diverse del cerchio, e poi farne la media.

In questo modo si mediano gli errori accidentali di collimazione (coincidenza imposta dall'operatore tra reticolo del cannocchiale e immagine della mira, che dipende dalle condizioni di visibilità, illuminazione, ecc. oltre che dalla vista e dall'atteggiamento dell'operatore), riducendone complessivamente l'entità. Inoltre, dato che si mediano letture eseguite in zone diverse del cerchio, si riduce l'effetto degli errori di graduazione (che hanno segno positivo e negativo avendo andamento periodico sui 360° del cerchio).



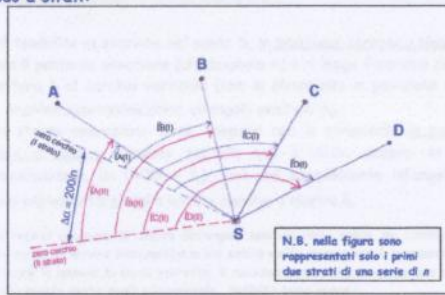
Errore periodico di graduazione (si può determinare in laboratorio su un banco di taratura)

Esistono diverse tecniche di reiterazione. Il metodo più utilizzato nella pratica è quello a strati, illustrato dalla figura alla pagina seguente

- I teodoliti si distinguono in reiteratori (quelli dotati della vite di reiterazione, già visto, che consente di orientare il cerchio indipendentemente da alidada e basamento agendo su tale vite, che muove il cerchio mediante un meccanismo a pignone e cremagliera), e ripetitori, dotati di un sistema più economico costruttivamente, che consente di solidarizzare il cerchio azimutale all'alidada o al basamento, per mezzo di un'apposita levetta e di una doppia coppia di viti di arresto - piccoli movimenti: l'orientamento del cerchio nei ripetitori viene effettuato come segue: si blocca il cerchio all'alidada, lo si trascina con esso nella direzione voluta, e poi lo si riblocca al basamento. Nei teodoliti elettronici dotati di sistema di lettura dinamica si fa a meno di tali dispositivi meccanici, perché la lettura avviene sempre come media di tutto il cerchio.

4

Metodo a strati:



I strato:

Si orienta il cerchio in modo che sul primo punto (o sull'origine, se presente) si faccia una lettura di poco superiore allo 0. Mantenendo il cerchio così orientato, si effettuano le letture su tutti i punti da rilevare (tutto il "giro d'orizzonte"), diritte e capovolte e relative medie con la regola di Bessel. Dalla serie di letture del primo strato $\hat{a}(i)$, $\hat{b}(i)$, $\hat{c}(i)$, $\hat{d}(i)$ (tutte medie Bessel) si ottengono per differenza (punto avanti - punto indietro) gli angoli del primo strato:

$$\alpha_{ASB}(i) = \hat{b}(i) - \hat{a}(i)$$

$$\alpha_{BSC}(i) = \hat{c}(i) - \hat{b}(i)$$

$$\alpha_{CSD}(i) = \hat{d}(i) - \hat{c}(i)$$

II strato:

Si sposta il cerchio all'indietro (cioè in senso antiorario) di una quantità $\Delta\alpha = 200/n$ rispetto allo strato precedente, dove n è il numero di strati (reiterazioni) che si vuole eseguire. Se ad esempio $n = 4$, risulta $\Delta\alpha = 200/4 = 50^\circ$, per cui si fa in modo che sul primo punto (o sull'origine, se presente) si faccia una lettura di poco superiore a 50° . Mantenendo il cerchio così orientato, si effettuano le letture su tutti i punti da rilevare (tutto il "giro d'orizzonte"), diritte e capovolte e relative medie con la regola di Bessel. Dalla serie di letture del secondo strato $\hat{a}(II)$, $\hat{b}(II)$, $\hat{c}(II)$, $\hat{d}(II)$ (medie Bessel) si ottengono per differenza (sempre punto avanti - punto indietro) gli angoli del secondo strato:

$$\alpha_{ASB}(II) = \hat{b}(II) - \hat{a}(II)$$

$$\alpha_{BSC}(II) = \hat{c}(II) - \hat{b}(II)$$

$$\alpha_{CSD}(II) = \hat{d}(II) - \hat{c}(II)$$

i-esimo strato successivo:

Si sposta il cerchio ancora all'indietro di una quantità $\Delta\alpha = 200/n$ rispetto allo strato precedente. Se ad es. si ha $n = 4$, da cui $\Delta\alpha = 200/4 = 50^\circ$, si fa in modo che sul primo punto (o sull'origine, se presente) si faccia una lettura di poco superiore a quella dello strato precedente aumentata di 50° . Si effettuano quindi le letture su tutti i punti da rilevare, come negli strati precedenti, e si ottengono gli angoli dell' i-esimo strato:

$$\alpha_{ASB}(i) = \hat{b}(i) - \hat{a}(i)$$

$$\alpha_{BSC}(i) = \hat{c}(i) - \hat{b}(i)$$

$$\alpha_{CSD}(i) = \hat{d}(i) - \hat{c}(i)$$

... e così via fino ad arrivare all'ultimo strato (n-esimo) che completa il lavoro di campagna.

A questo punto, per ogni angolo del "giro di orizzonte" si dispone di n misure, che essendo state effettuate con lo stesso strumento e nelle stesse condizioni possono ritenersi di ugual precisione. Il valore più probabile di ciascun angolo è allora dato dalla media aritmetica degli n valori misurati nei singoli strati:

$$\bar{\alpha}_{ASB} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_{ASB}(i)}{n}, \text{ ecc. per gli altri angoli}$$

Per valutare a posteriori la precisione raggiunta nella misura di ogni angolo, si determinano gli scarti dei singoli valori (di ciascuno strato) dalla media:

$$v_i = \alpha_{ASB}(i) - \bar{\alpha}_{ASB}$$

con i quali si calcolano infine i parametri stocastici dell'angolo:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1} \text{ varianza campionaria}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}} \text{ deviazione standard campionaria}$$

$$s(\bar{\alpha}) = \frac{s}{n} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n(n-1)}} \text{ deviazione standard della media}$$

Il numero n degli strati da eseguire varia in funzione della precisione da raggiungere e dell'importanza del rilievo. Si va da un minimo di $n=2$ o $n=4$ per reti locali a carattere tecnico, a valori molto elevati per lavori di alta precisione e particolari (ad es. $n=24$ adottato dall'IGM per la rete di triangolazione del I ordine).

ACCURATEZZA NELLA MISURA DEGLI ANGOLI AZIMUTALI

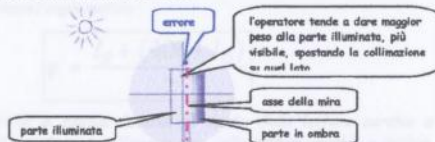
Nella misura degli angoli azimutali è possibile commettere errori di vario tipo, che possono essere distinti come segue:

ERRORI GROSSOLANI

- errata individuazione del punto da collimare
- errori di lettura e di trascrizione dei valori letti (teodoliti ottico-meccanici)
- errori nella numerazione dei punti, cancellazione di files (teodoliti elettronici)
- spostamenti indesiderati dello strumento durante l'esecuzione della stazione (basta un colpo dato inavvertitamente a una zampa del treppiede)

ERRORI SISTEMATICI

- effetto degli errori residui di rettificazione (il più pericoloso è quello di verticalità, quando la visuale è molto inclinata)
- effetto di condizioni di costruzione non perfettamente rispettate
- "errore di fase" nella collimazione: a seconda delle condizioni di illuminazione (variabili nel corso della giornata) alcuni tipi di mire (ad es. quelle cilindriche) possono essere collimate in modo diverso



- effetto della componente sul piano orizzontale della rifrazione atmosferica (detta "rifrazione laterale"): la non omogeneità della densità dell'aria lungo il percorso ottico, dovuta a differenze di temperatura tra zone soleggiate e ombreggiate, ecc., fa sì che il percorso ottico dal teodolite alla mira non sia una linea retta ma una curva. Non è possibile modellare questo fenomeno dato che varia moltissimo da caso a caso. Se le misure sono ripetute in orari e condizioni diverse, questo tipo di errori si manifesta con segni e valori diversi e la media lo compensa in parte, in modo simile agli errori accidentali.

È importante evitare di passare con la visuale attraverso fogliame o vicino a edifici o altri oggetti che nascondono in parte la mira: anche se la mira si riesce a mettere a fuoco, la misura è imprecisa per l'effetto della rifrazione.

ERRORE ACCIDENTALE

- errori di collimazione della mira: la collimazione non è mai "perfetta" ma dipende dalle capacità visive e dall'apprezzamento dell'operatore. I teodoliti robotizzati hanno una telecamera interna che collima alcuni tipi di mire standard (ad es. un prisma) automaticamente, con ripetibilità migliore rispetto a un operatore umano.
- errori di stima della coincidenza del micrometro (teodoliti ottico-meccanici).
- piccoli movimenti del treppiede o del teodolite durante la misura, dovuti ad es. ad effetti termici (è bene proteggere lo strumento dall'insolazione diretta in estate usando un ombrellone) o ad assestamenti delle zampe del treppiede nel terreno (es. su terreno naturale poco compatto o su asfalto caldo).

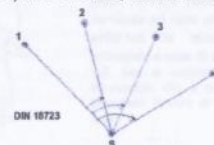
Per effetto di questi errori, l'accuratezza raggiungibile in pratica nella misura di un angolo è stimabile di massima come segue:

- $\alpha_m = 1'' - 2''$ con teodoliti di alta precisione (0,1"), mire di tipo adeguato, risultati variabili in funzione delle condizioni di visibilità
- $\alpha_m = 2'' - 5''$ con teodoliti di precisione (sensibilità 1"), mire di tipo adeguato, risultati variabili in funzione delle condizioni di visibilità
- $\alpha_m = 10'' - 1'$ con teodoliti di minor precisione (che fino ad alcuni anni fa venivano detti *tacheometri*)

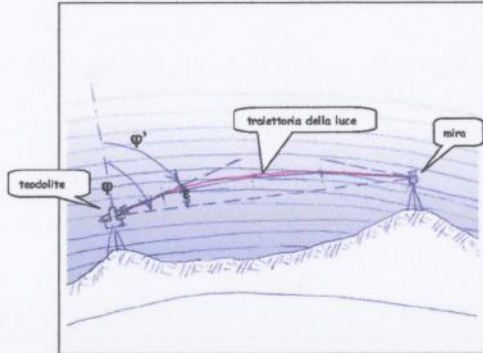
Esiste una normativa di riferimento (DIN 18723, Germania) che permette di valutare la precisione di un teodolite in modo obiettivo, in base a un test sperimentale standardizzato. Il test della DIN 18723 consiste in pratica nell'effettuare misure angolari in 4 strati con lettura diritta e capovolta su 4 mire standard poste a distanza di circa 100 m dal teodolite. La precisione viene valutata a posteriori dai risultati del test in base alla deviazione standard campionaria.

Molti costruttori di strumenti riportano nella documentazione dei vari modelli di teodolite i risultati raggiunti con tale prova, che è facilmente riproducibile da parte di qualunque tecnico.

I risultati della DIN 18723 sono utili soprattutto a *comparare* diversi modelli di teodolite. L'accuratezza reale, come si è detto, dipende dalle condizioni operative reali che si verificano all'atto di ciascuna misura, e da fattori esterni al teodolite, non tutti prevedibili (tipo e qualità delle mire, accuratezza del centramento, rifrazione laterale...).



Questa variazione dell'indice di rifrazione provoca un *incurvamento* del percorso della luce dall'oggetto osservato al teodolite (v. figura a pagina seguente): nell'atmosfera la luce non viaggia in linea retta ma con una traiettoria curva che tende a seguire la curvatura della superficie terrestre.



La luce, nel passare da uno strato più denso a uno meno denso subisce una rifrazione, e devia allontanandosi dalla normale alla superficie di separazione tra i due strati. La variazione di densità in realtà non avviene per strati ma con continuità, per cui la traiettoria luminosa è una curva con concavità verso il basso (rappresentata con linea rossa nella figura). Il fenomeno è noto ai naviganti: in mare è possibile vedere navi molto lontane, anche oltre quella che sarebbe la teorica linea di orizzonte, proprio perché la traiettoria della luce tende a seguire per rifrazione la curvatura della terra.

Ne consegue che, anziché misurare l'angolo zenitale φ , si misura un valore φ' che differisce da φ di una quantità incognita ϵ . Si tratta di un errore sistematico, in quanto φ' è sempre minore di φ (la concavità della traiettoria è sempre rivolta verso il basso). La correzione ϵ varia però a seconda delle condizioni dell'atmosfera, ed è necessario ricorrere a un opportuno modello che ci permetta di stimarla.

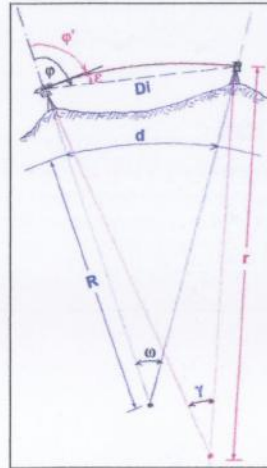
17

Il modello comunemente adottato per la rifrazione verticale, con buoni risultati, è il seguente: si assume che la traiettoria della luce sia prossima ad un arco di circonferenza di raggio r .

Il raggio della traiettoria viene stimato con la seguente espressione:

$$r = \frac{R}{k}$$

dove R è il raggio di curvatura medio della superficie terrestre nella zona (si assume pari al raggio della sfera locale), e k è detto coefficiente di rifrazione atmosferica



Il coefficiente di rifrazione atmosferica (da non confondere con l'indice di rifrazione che è un'altra cosa) risulta quindi definito come rapporto tra il raggio di curvatura della superficie di riferimento e quello della traiettoria luminosa:

$$k = \frac{R}{r}$$

I valori di k vengono determinati sperimentalmente (vedi seguito).

L'angolo al centro che sottende la traiettoria è:

$$\varphi = \frac{D_1}{r} = \frac{d}{r}$$

e quindi per come è stato definito k si ha:

$$r = \frac{kd}{R}$$

L'angolo ϵ tra la corda e la tangente è un caso particolare di angolo alla circonferenza (con il vertice coincidente con uno degli estremi dell'arco sotteso) e quindi, per un noto teorema di geometria, è pari alla metà dell'angolo al centro che sottende lo stesso arco:

$$\epsilon = \frac{\varphi}{2}$$

$$\epsilon = \frac{kd}{2R}$$

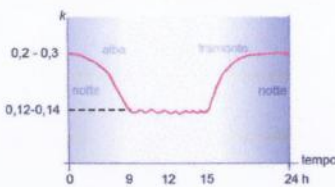
Risulta pertanto: formula con cui si può calcolare la correzione da dare all'angolo zenitale per tener conto dell'effetto della rifrazione atmosferica.

18

Determinazione del coefficiente di rifrazione atmosferica

Il coefficiente k viene determinato sperimentalmente. Uno dei metodi possibili è quello di effettuare misure di livellazione trigonometrica (v. seguito) tra punti di cui sia nota la quota, considerando k come incognita nella formula della livellazione trigonometrica.

Le esperienze mostrano che k varia notevolmente nel corso della giornata e del ciclo giorno-notte, con un andamento riportato qualitativamente nella seguente figura:



Nelle ore centrali della giornata k si mantiene abbastanza stabile (con piccole oscillazioni). Le esperienze eseguite in Italia indicano per tali orari un valore di k compreso tra 0,12 e 0,14. È consigliabile eseguire misure di angoli zenitali nelle ore a cavallo del mezzogiorno, evitando invece i periodi dell'alba e del tramonto, in cui la variazione di k è molto rapida.

ACCURATEZZA NELLA MISURA DEGLI ANGOLI ZENITALI

Nella misura degli angoli zenitali è possibile commettere errori di vario tipo, che possono essere distinti come segue:

ERRORI GROSSOLANI

- errata individuazione zenitale del punto da collimare (es. base mira piuttosto che asse o sommità mira)
- mancato centramento della livella zenitale per dimenticanza dell'operatore (teodoliti con livella zenitale)
- errori di lettura e di trascrizione dei valori letti (teodoliti ottico-meccanici)
- errori nella numerazione dei punti, cancellazione di files (teodoliti elettronici)
- spostamenti indesiderati dello strumento durante l'esecuzione della stazione

ERRORI SISTEMATICI

- zenit strumentale (se non se ne tiene conto)
- effetto dell'errore di verticalità (eliminato quasi completamente dai dispositivi visti, che però devono essere ben tarati)

19

- effetto di condizioni di costruzione non perfettamente rispettate
- effetto della rifrazione atmosferica verticale: il modello basato sul coefficiente k è semplificato, e il valore assunto per k è approssimato, spesso può discostarsi dai valori 0,12-0,14 comunemente assunti. La rifrazione atmosferica è la maggior causa di errore nella misura degli angoli zenitali.

ERRORI ACCIDENTALI

- errori di collimazione della mira: la collimazione non è mai "perfetta" ma dipende dalle capacità visive e dall'apprezzamento dell'operatore. I teodoliti robotizzati hanno una telecamera interna che collima alcuni tipi di mire standard (ad es. un prisma) automaticamente, con ripetibilità migliore rispetto a un operatore umano.
- errori di stima della coincidenza del micrometro (teodoliti ottico-meccanici).
- piccoli movimenti del treppiede o del teodolite durante la misura, dovuti ad es. ad effetti termici (è bene proteggere lo strumento dall'insolazione diretta in estate usando un ombrellone) o ad assestamenti delle zampe del treppiede nel terreno (es. su terreno naturale poco compatto o su asfalto caldo).

Per effetto di questi errori, e in particolare di quello provocato dalla rifrazione atmosferica, l'accuratezza raggiungibile in pratica nella misura di un angolo zenitale è sempre inferiore a quella vista per gli angoli azimutali. L'errore dovuto alla rifrazione atmosferica è tanto più grande quanto maggiore è la distanza, per cui si può concludere in linea di massima quanto segue:

- su distanze brevi (fino a qualche centinaio di metri) l'accuratezza degli angoli zenitali è abbastanza simile a quella degli angoli azimutali;
- a partire da 1-2 km in su, l'indeterminazione è superiore a quella degli angoli azimutali, di un fattore da 1,5-2 in su (crescente con la distanza);
- oltre gli 8-10 km circa la misura, a causa della rifrazione, diviene talmente poco accurata da risultare inaffidabile: si sconsiglia di eseguire misure di angoli zenitali su lunghe distanze.

Nella quasi totalità dei teodoliti si può notare che il cerchio verticale ha un diametro inferiore al cerchio azimutale. Questo proprio perché gli angoli zenitali sono penalizzati dall'effetto della rifrazione e non possono raggiungere la stessa accuratezza di quelli azimutali.

Per lo stesso motivo, nella misura di angoli zenitali non si procede alla reiterazione con spostamenti dello zero del cerchio (il cerchio verticale è privo di dispositivo di reiterazione). È comunque buona norma ripetere la misura più volte, possibilmente in orari diversi.

20

27/05/2014

POSIZIONAMENTO TRIDIMENSIONALE
~~del~~ tempo di permanenza più della
 terra

 **POLITECNICO DI TORINO**
 Dipartimento di Ingegneria dell'Ambiente, del Territorio e delle Infrastrutture

Principi di posizionamento GNSS
 (Global Navigation Satellite System)

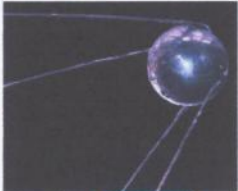
Alberto CINA

Topografia - a.a. 2013-2014

L'inizio del posizionamento satellitare

Il 4 ottobre 1957 l'URSS lanciava il primo satellite artificiale della storia intorno alla Terra: lo Sputnik 1

Inizio del posizionamento satellitare: il DoD (Department of Defence USA) si rese conto della possibilità di determinare la posizione di punti sfruttando l'effetto Doppler.



1958: inizia il programma TRANSIT, costellazione di 6 satelliti ad una altezza di 1100 km che poteva permettere la determinazione della posizione sfruttando l'effetto Doppler sull'unica frequenza trasmessa

La misura poteva anche durare alcune ore con una precisione di circa 200-500 m. Ciò portò gli americani a concepire un sistema più rapido e preciso: il GPS.

SPUTNIK
 ↓
 TRANSIT (6 satelliti)
 effetto Doppler
 ↓
 GPS

Il sistema GNSS

Il GNSS (Global Navigation Satellite System) è il sistema di posizionamento e navigazione basato sulla ricezione di segnali radio trasmessi da diverse costellazioni di satelliti artificiali.

- GPS (Global Positioning System), realizzato e controllato dal Dipartimento della Difesa degli Stati Uniti (DoD)
- GLONASS (GLobalnaya NAVigatsionnaya Sputnikovaya Sistema) è il sistema di posizionamento russo del Russian Aerospace Defence Forces
- GALILEO è il sistema di posizionamento Europeo
- BeiDou o BDS (BeiDou Navigation Satellite System) è il sistema di posizionamento cinese
- QZSS (Quasi-Zenith Satellite System) è il sistema di posizionamento regionale Giapponese
- ... altre costellazioni previste ...

Completano il sistema GNSS alcuni servizi di augmentation quali satelliti geostazionari e componenti locali di terra

GNSS
 ≠ satelliti → segnali radio

Parti del sistema GNSS (segmenti)

- Segmento spaziale:** costituito da satelliti MEO (Medium Earth Orbit), in orbita pressoché circolare intorno alla Terra ad altezza variabile, a seconda della costellazione, da circa 19.100 km a circa 23.200 km
 - trasmettere agli utilizzatori un segnale radio
 - mantenere un riferimento di tempo accurato
 - ricevere e memorizzare informazioni dal segmento di controllo
- Segmento di controllo:** stazioni a terra con compiti:
 - "tracciare" i satelliti per calcolarne la posizione (effemeridi);
 - controllare gli orologi dei satelliti e calcolare un modello d'errore;
 - imporre correzioni d'orbita
 - memorizzare nuovi dati sui satelliti
- Segmento di utilizzo:** è costituito dall'utenza dotata di ricevitori con antenna

Principi sul segnale GNSS

componenti del segnale sono controllate da orologi atomici, con stabilità a lungo termine pari a 10^{-12} - 10^{-14}

Gli orologi producono una frequenza fondamentale f_0 a cui corrisponde una lunghezza d'onda: $\lambda = \frac{c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{f_0}$

Da essa si originano le 3 parti del segnale:

- **componente portante:** onde sinusoidali generate moltiplicando la frequenza fondamentale per coefficienti noti;
- **componente impulsiva** (codici): onde quadre formate da transizioni di valori +1 e -1, generati da un algoritmo che si ripete periodicamente nel tempo. Vengono detti, per questo motivo, "pseudo casuali" o PRN (Pseudo Random Noise).
- **Componente messaggio** (codice di navigazione): contiene importanti informazioni tra le quali le effemeridi per il calcolo della posizione dei satelliti

$\sim 1,5 \cdot 10^9$ } $\lambda = 20 \text{ cm}$

Le componenti del segnale GNSS

componente sinusoidale: hanno lunghezza d'onda di circa 20 cm, a seconda della frequenza


componente impulsiva (codici): transizioni di +1 e -1 che modulano le portanti, producendo uno sfasamento di π sulla fase

Il segnale trasmesso (Broadcast signal) che ne risulta è dunque quello della portante modulata dai vari codici:

Misura del «range» p

La distanza tra i centri di fase del satellite e del ricevitore (range) può essere misurata con:

- 1) **misure di codice:** a partire dal tempo di propagazione del segnale dal satellite al ricevitore;
- 2) **misure di fase:** a partire dal numero di cicli interi e dalla parte frazionaria dell'onda sinusoidale.




Perché i segnali GNSS sono così complessi:

- Alcuni sistemi sono militari (GPS GLONASS) → segretezza della posizione del ricevitore: sistema ad «una via»;
- **misure di codice:** posizionamento istantaneo di bassa precisione;
- **misure di fase:** posizionamento di precisione;
- **Più frequenze:** contenere e/o modellare l'effetto legato alla rifrazione del segnale e per posizionamento tempo reale di precisione

Il sistema NAVSTAR GPS – segmento di controllo

NAVIGATION Satellite Timing And Ranging Global Positioning System

- progettato per il **posizionamento tridimensionale** in ogni istante e in ogni luogo del nostro pianeta di oggetti, anche in movimento.
- **segmento di controllo** composto da **18 stazioni** di cui la principale (**Master Control Station**) è situata a Colorado Springs

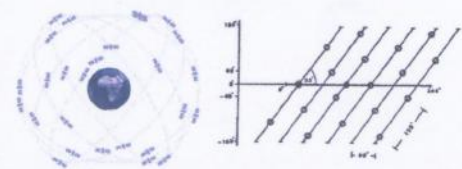


Il sistema NAVSTAR GPS – segmento spaziale

La **costellazione satellitare** deve garantire la disponibilità di almeno 24 satelliti per il 95% del tempo con almeno 4 in vista

- orbita ad altezza di circa 20.200 km
- inclinazione piano dell'orbita rispetto al piano equatoriale di 55°
- periodo orbitale 12 ore siderali (11 ore 56 minuti locali)
- Satelliti di vari «blocchi»: l'ultimo è il blocco IIF

Attualmente 31 satelliti disponibili rispetto ai 24 previsti.



GPS $f_0 = 10,23 \text{ MHz}$
