



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1465A -

ANNO: 2015

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Pinto

MATERIA: Idraulica. Prof.Revelli

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

29.09.14

# IDRAULICA

## FLUIDO

2 tipi

### LIQUIDI

grande resistenza alle variazioni di volume

Piccole, grandi, polle... tutti termini in vngpi

es. piscina → tutto di acqua sembra + solida

es. mucchio di sabbia sembra + liquida

### GAS

piccola resistenza alle variazioni di volume

Corpo materiale, formato da un gruppo di particelle dotato di grande mobilità

↳ qualcosa di intermedio tra solidi-gas

non si fa molto riferimento alla  $T^{\circ}$  (si parla in generale di fluidi freddi) ma di **COMPORTAMENTI DI INTERAZIONE**

Le considero piccole ma contengono le molecole. Non considero le discontinuità tra queste. Le uniche discontinuità che considero sono, ad esempio, quelle sui bordi. Le proprietà del continuo valgono ovunque eccetto che sui bordi.

Definisco la **PARTICELLA DI FLUIDO** che si muove all'interno di un sistema

corso sul CONTINUO LIQUIDO.

(MASSA, TEMPO e LUNGHEZZA)

MECCANICA DEL CONTINUO

↳ grandezze fondamentali

→ **DEFORMAZIONE** facile

anche sotto l'azione di forze di piccola entità.

Se la velocità di deformazione è pari a zero ⇒ le forze spariscono (e viceversa)

↳ prima differenza dai solidi

**NB**: non si annullano le deformazioni, quelle non vanno, solo permanenti

es. liquido in contenitore, occupa la parte bassa x la f. di gravità. Poi rimane così

→ si parla di **FUNZIONI CONTINUE**

$dx, dy, dz$   
volume infinitesimale

### DENSITA' ( $\rho$ )

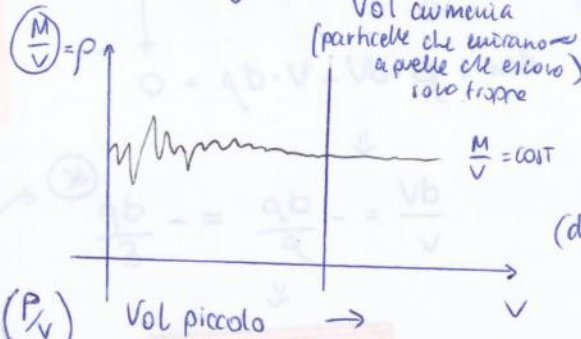
Come si misura

dimensioni

$$[\rho] = \left[ \frac{kg}{m^3} \right] = [M][L]^{-3}$$

**PESO SPECIFICO ( $\gamma$ )** ( $P_v$ )  
peso dell'unità di volume

$$[\gamma] = \left[ \frac{N}{m^3} \right]$$



Se V diventa piccolo (paragonabile con la scala delle molecole) ⇒  $\rho$  aumenta, vari

Se V aumenta, tantissime particelle la densità (numero di mol / tratto volume) si stabilizza (difficile da definire)

non mi interessa il numero di mol per questo motivo, ormai il sistema si è stabilizzato

Qui la particella ha un vol / il rapporto  $M/V$  diventa così!

legame tra  $\gamma$  e  $\rho$ :  **$\gamma = g \cdot \rho$**  (dove  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ )

Il valore dipende dal tipo di fluido (dipende grandemente) e dalle condizioni

temperatura ( $T = T_{amb}$ )  
pressione

$$P = P(\rho, T)$$

$\Delta$  no!

**NB**: se le T cambiano molto ⇒ questo potrebbe non essere vero

Imp!  $\exists$  le **EQUAZIONI DI STATO** che indicano

come variano le caratteristiche del fl. In generale noi tratteremo fluidi freddi in funzione della T e della P

Ricavo  $V$  dalla densità e dal peso specifico:

$$V = \frac{M}{\rho}, \quad V = \frac{P}{\gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{\rho} = \frac{P}{\gamma} \Rightarrow \gamma = \frac{P \cdot \rho}{M}$$

$$\gamma = g \cdot \rho$$

↓

FLUIDI COMPRESSIBILI

- oceani
- aria

→ grande o velocità fluido  $\sim \rho \propto c$

FLUIDI INCOMPRESSIBILI

- $p$  in gioco non così grandi
- $c \rightarrow \infty$

**MECCANICA DEI FLUIDI INCOMPRESSIBILI**

Fluidi che non variano volume all'applicat. di  $P$  e  $T$

Le variazioni di  $p$  sono **ISTANTANEE** su tutta la massa

$(c_{Aria} = 340 \text{ m/s})$

$(c_{A20} = 1100 \text{ m/s})$

↙      ↘

↳ CELERITÀ :  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

(con cui si muovono) (quante  $\Delta p$ )

si hanno velocità caratteristici con cui queste onde si p. muovono. Quando si ha a che fare con fluidi incompressibili

$c \rightarrow \infty$

Δ COLPO D'ARIE

$v$  all'interno del sist. è paragonabile a  $c$

⇒ non posto più considerarla

↓

• Considero 2 cilindri coassiali che possano ruotare. (uno dentro l'altro)

Cilindro dentro:  $r_i$

" esterno:  $r_e$

Nell'intercapedine → fluido.

(i) Metto in rotazione il cilindro esterno.

⇒ anche quello interno si mette in rotazione.

↓

**PERCHÉ?**

A causa degli **ATTRITI**

↓

→ Metto in rotazione. Il fluido e il cilindro interno sono fermi.

→ Allo stato in finite simo si mette in movimento al I strato di fluido. "qualcosa" è passato dalla parete al 1° strato.

→ Questo "qualcosa" passa di strato in strato fino ad arrivare al cilindro interno dove di nuovo il fluido si attacca alla parete e mette in rotazione.

↓

Qualcosa che va avanti tangenzialmente

**SISTEMA DI FORZE**

dato da **SFORZI TANGENZIALI**

NB: movimento tangenziale delle particelle causa  $v_r$  movimento trasversale

↓

Il cilindro interno si può muovere (⇔) dall'esterno vs l'interno vi è una trasmissione di

⇒ Se il fluido si muove → **SFORZI TANGENZIALI (TENSIONI)** → **il cilindro si muove**

↓

NB: per tenere fermo il cilindro interno?

Applico una **COPPIA (T)** contraria al moto

↓

Pari alla somma degli sforzi tangenziali agenti sul cilindro interno

↳ quanto vale T?

**ATTRITI (DISSIPAZIONI)**

movimento della "qualcosa" come rotano i cilindri

NB: **PRESSIONE** sforzi normali. SPINGE + TIRA

Per far notare qualcosa senza gli sforzi di natura tangenziale

↓

= 3 =

$\mu = \frac{du}{dn}$  (rapporto sforzo-deformazione)  
 indica come si deforma il sistema

**LEGGE DI NEWTON**

$[\nu] = \frac{m}{s}$  (spaciti i Newton  $\Rightarrow$  scoprire la parte di massa)

$\tau = \mu \frac{du}{dn}$

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$

**VISCOSITÀ CINEMATICA**

Ogni qual volta si hanno variazioni di velocità trasversale  $\Rightarrow$  si avranno degli sforzi  $\tau$  ( $\tau$ )

**MECCANICA DEI FLUIDI NEWTONIANI**

il modello che lega sforzo-def è LINEARE ( $\mu = \text{cost}$ ) indipendente dagli sforzi  $\tau$  e normali

30.09.14

**NB**: nel corso VISCOSITÀ COSTANTE

Suppongo di avere un VOLUME in EQUILIBRIO

(il complesso di forze che agisce su  $V$  ha risultante sia delle  $F$  che dei momenti nulla)



Forze che agiscono genericamente su un volume  $V$  (2 specie):

**FORZE di MASSA** (es. f. gravità, f. d'inerzia...) tutte le  $F$  esterne che si esercitano a distanza su tutte le particelle (in proport. alla loro massa)

**FORZE di SUPERFICIE**: forze che agiscono sul volume attraverso la sup (esterna che interna) - una sup qualsiasi generica  
 es. fluido diviso in 2 parti considero un elemento infinitesimo. Si può dire che è ancora in equilibrio?



$d\vec{F}$  = forza elementare che agisce sulla sup  $d\Omega$

$\vec{n}$  = direzione normale di  $d\Omega$

$\Rightarrow$  la somma di tutte  $d\vec{F}$  darà la forza finale che mantiene in eq.

Quando applicherò una forza tale da riappiattare quello che vi era prima. Forze che si trasmettono attraverso la sup da una parte all'altra

Se sul corpo agisce un sist di  $F$  da far rimanere in eq.  $\Rightarrow$  su ogni  $d\Omega$  agisce una  $\vec{\sigma}$   
 $\lim_{d\Omega \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{d\Omega} = \vec{\sigma}$  SFORZO UNITARIO che agisce sulla linea sup =  $\vec{\sigma}$  elementare di  $\Omega$ , rappresenta lo sforzo sull'aerola.

Arrivo a calcolare lo sforzo in ogni punto (si può parlare di "punto" dato che siamo nel continuo)

fa riferimento alla sup che ha per normale  $\vec{n}$  (" $n$ " è l'etichetta della sup). Questo perché  $\vec{\sigma}$  dipende dalla posizione del punto e dalla giacitura.

(Sforzi di trazione pochi, più frequenti quelli di compressione.)

Lo sforzo ammette 2 componenti:  
 • normale  $\rightarrow$  COMPRESSIONE  
 • tangenziale  $\rightarrow$  TRAZIONE

**!** sforzi entranti = positivi  
 sforzi uscenti = negativi

TABELLA I

Grandezze	Simbolo	Dimensioni	Unità di misura
<b>Geometriche:</b>			
Lunghezza	$L$	$L$	m
Area	$A$	$L^2$	$m^2$
Volume	$W$	$L^3$	$m^3$
<b>Cinematiche:</b>			
Tempo	$t$	$T$	s
Velocità	$v, V$	$LT^{-1}$	ms
Accelerazione	$A, g$	$LT^{-2}$	$m/s^2$
Portata	$Q$	$L^3T^{-1}$	$m^3/s$
Viscosità cinematica	$\nu$	$L^2T^{-1}$	$m^2/s$
<b>Dinamiche:</b>			
Massa	$m$	$M$	kg
Forza	$F$	$LT^{-2}M$	N (newton)
Sforzo	$\sigma, \tau$	$L^{-1}T^{-2}M$	$N/m^2$
Densità	$\rho$	$L^{-3}M$	$kg/m^3$
Peso specifico	$\gamma$	$L^{-2}T^{-2}M$	$N/m^3$
Viscosità	$\mu$	$L^{-1}T^{-1}M$	$Ns/m^2$
Pressione	$p$	$L^{-1}T^{-2}M$	$N/m^2 = Pa$ (Pascal)
Modulo di elasticità	$\epsilon, E$	$L^{-1}T^{-2}M$	$N/m^2$
Tensione superficiale	$\sigma$	$T^{-1}M$	$N/m$
Potenza	$P$	$L^2T^{-3}M$	W (watt)
Energia	$E$	$L^2T^{-2}M$	J (joule)

TABELLA II

Fluido (alla pressione atmosferica di 10330 $kg/m^3$ )	$\theta$ (°C)	$\rho$ ( $kg/m^3$ )	$\gamma$ ( $N/m^3$ )
<b>Gas</b>			
Idrogeno	20	0,0837	0,821
Azoto	20	1,166	11,434
Ossigeno	20	1,331	13,052
Aria secca	0	1,293	12,679
Aria secca	15	1,226	12,022
<b>Liquidi</b>			
Acqua	15	1000	9806
Acqua di mare	15	1030	10100
Glicerina	15	1264	12395
Mercurio	20	18546	132871
Alcool etilico	15	794	7786
Alcool metilico	15	798	7825
Tetracloruro di carbonio	20	1594	15631
Acqua ossigenata	15	1465	14366
Benzina Avio	15	720	7060
Benzina Auto	15	740	7256
Combustibili liquidi pesanti	15	880 + 970	8629 + 9512
Oli vegetali	15	900 + 920	8825 + 9082
Toluolo	13	870	8531

$\frac{du}{dn}$   
 ↓  
 TABELLA III  
 VISCOSITÀ DINAMICA  
 ↓  
 VISCOSITÀ CINEMATICA  
 ↓

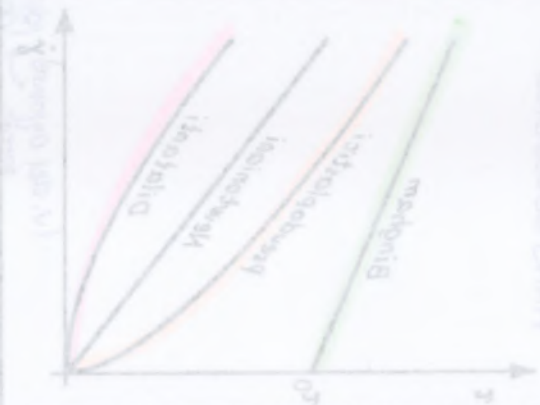
Fluido	$\gamma$ ( $N/m^3$ )	$\mu \cdot 10^6$ ( $Ns/m^2$ )	$\nu \cdot 10^4$ ( $m^2/s$ )
<b>Gas</b>			
Idrogeno	0,821	9,12	1,09
Azoto	11,434	17,36	0,149
Ossigeno	13,052	20,10	0,151
Aria secca	11,846	18,24	0,151
<b>Liquidi</b>			
Acqua	9.788	1.005	0,01008
Mercurio	132.832	1.566	0,00115
Glicerina pura	12.366	799.189	6,35
Alcool etilico	7.786	590	0,00746
Gasoline	6.658	299	0,00440
Kerosene	7.845	1.867	0,0233
Nafta	9.218	1.053.000	11,2
Nafta	9.512	7.894.000	81,4
Olio crudo	8.438	7.845	0,0918

FLUIDI A COMPORTAMENTO DIPENDENTE DAL TEMPO		FLUIDI A COMPORTAMENTO INDIPENDENTE DAL TEMPO	
<p><b>FLUIDI EFASIVISSIMI</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Certe ampiezze di iniezione di calore non producono alcun effetto sulla temperatura del fluido.</li> <li>• La temperatura del fluido è costante e indipendente dalle ampiezze di iniezione di calore.</li> </ul>	<p><b>FLUIDI EFASIVISSIMI</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Certe ampiezze di iniezione di calore non producono alcun effetto sulla temperatura del fluido.</li> <li>• La temperatura del fluido è costante e indipendente dalle ampiezze di iniezione di calore.</li> </ul>	<p><b>FLUIDI EFASIVISSIMI</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Certe ampiezze di iniezione di calore non producono alcun effetto sulla temperatura del fluido.</li> <li>• La temperatura del fluido è costante e indipendente dalle ampiezze di iniezione di calore.</li> </ul>	<p><b>FLUIDI EFASIVISSIMI</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Certe ampiezze di iniezione di calore non producono alcun effetto sulla temperatura del fluido.</li> <li>• La temperatura del fluido è costante e indipendente dalle ampiezze di iniezione di calore.</li> </ul>
<p><b>FLUIDI A COMPORTAMENTO INDIPENDENTE DAL TEMPO</b></p> <p><b>FLUIDI A COMPORTAMENTO INDIPENDENTE DAL TEMPO</b></p> <p><b>FLUIDI A COMPORTAMENTO INDIPENDENTE DAL TEMPO</b></p> <p><b>FLUIDI A COMPORTAMENTO INDIPENDENTE DAL TEMPO</b></p>	<p><b>FLUIDI A COMPORTAMENTO INDIPENDENTE DAL TEMPO</b></p> <p><b>FLUIDI A COMPORTAMENTO INDIPENDENTE DAL TEMPO</b></p> <p><b>FLUIDI A COMPORTAMENTO INDIPENDENTE DAL TEMPO</b></p> <p><b>FLUIDI A COMPORTAMENTO INDIPENDENTE DAL TEMPO</b></p>	<p><b>FLUIDI A COMPORTAMENTO INDIPENDENTE DAL TEMPO</b></p> <p><b>FLUIDI A COMPORTAMENTO INDIPENDENTE DAL TEMPO</b></p> <p><b>FLUIDI A COMPORTAMENTO INDIPENDENTE DAL TEMPO</b></p> <p><b>FLUIDI A COMPORTAMENTO INDIPENDENTE DAL TEMPO</b></p>	<p><b>FLUIDI A COMPORTAMENTO INDIPENDENTE DAL TEMPO</b></p> <p><b>FLUIDI A COMPORTAMENTO INDIPENDENTE DAL TEMPO</b></p> <p><b>FLUIDI A COMPORTAMENTO INDIPENDENTE DAL TEMPO</b></p> <p><b>FLUIDI A COMPORTAMENTO INDIPENDENTE DAL TEMPO</b></p>

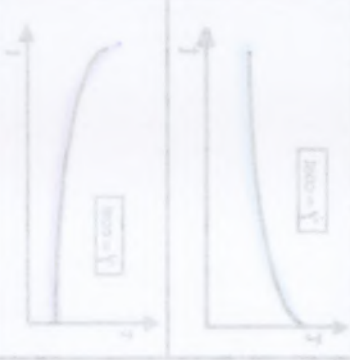
# EQUAZIONI E CURVE TEOLOGICHE

## Comportamento

Il fluido si comporta come un fluido newtoniano e il suo comportamento è descritto dalla legge di Newton. La curva di sforzo tangenziale in funzione della velocità di deformazione è una retta che passa per l'origine.



Il fluido si comporta come un fluido newtoniano e il suo comportamento è descritto dalla legge di Newton. La curva di sforzo tangenziale in funzione della velocità di deformazione è una retta che passa per l'origine.



Il fluido si comporta come un fluido newtoniano e il suo comportamento è descritto dalla legge di Newton. La curva di sforzo tangenziale in funzione della velocità di deformazione è una retta che passa per l'origine.

Il fluido si comporta come un fluido newtoniano e il suo comportamento è descritto dalla legge di Newton. La curva di sforzo tangenziale in funzione della velocità di deformazione è una retta che passa per l'origine.

Il fluido si comporta come un fluido newtoniano e il suo comportamento è descritto dalla legge di Newton. La curva di sforzo tangenziale in funzione della velocità di deformazione è una retta che passa per l'origine.

proiezione di  $\phi_n$  in direzione  $x$

$$\phi_{nx} = \phi_{xx} \cos n\hat{x} + \phi_{yx} \cos n\hat{y} + \phi_{zx} \cos n\hat{z}$$

(Passaggio dai vettori agli scalari)

$$\phi_{ny} = \phi_{xy} \cos n\hat{x} + \phi_{yy} \cos n\hat{y} + \phi_{zy} \cos n\hat{z}$$

$$\phi_{nz} = \phi_{xz} \cos n\hat{x} + \phi_{yz} \cos n\hat{y} + \phi_{zz} \cos n\hat{z}$$

⇓

TENSORE degli SFORZI

$$\begin{pmatrix} \phi_{xx} & \phi_{yx} & \phi_{zx} \\ \phi_{xy} & \phi_{yy} & \phi_{zy} \\ \phi_{xz} & \phi_{yz} & \phi_{zz} \end{pmatrix}$$

9 componenti di sforzo  $\phi_{xx} \dots \phi_{zz}$  che descrivono la distribuzione degli sforzi sulla terna.

9 componenti degli sforzi agenti sulle 3 generiche giaciture

componenti degli sforzi alle 3 giaciture fondamentali

Ma  $\rightarrow \phi_{xy} = \phi_{yx}$

Questo si deduce scrivendo le 3 eq di equilibrio alla rotazione rispetto ai 3 assi

$\phi_{zx} = \phi_{xz}$

$\phi_{zy} = \phi_{yz}$

$\Rightarrow$  matrice simmetrica  $\Rightarrow$  TENSORE SIMMETRICO

Le sei componenti rimaste si possono scrivere con

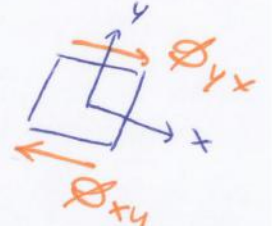
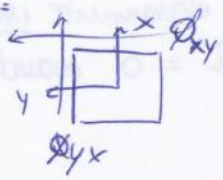
$\phi_{xx} \rightarrow$  sforzo normale in direzione  $x = \sigma_x$   
 $\phi_{yy} = \sigma_y$   
 $\phi_{zz} = \sigma_z$

3 componenti NORMALI

Gli altri  $\rightarrow$  sforzi in una direzione proiettati in una ad essa  $\perp \rightarrow \tau$

3 componenti TANGENZIALI

$\phi_{yx} = \tau_z = \phi_{xy} \rightarrow$  pedice "z" perché causano una rotazione intorno a z  
 componenti  $\tau_y$  agenti normalmente all'asse delle z nei piani normali a x, y  
 $\phi_{xz} = \phi_{zx} = \tau_y$   
 $\phi_{yz} = \phi_{zy} = \tau_x$



$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z \end{pmatrix}$$

L'effetto è una rotazione intorno all'asse z per questo gli ultimi termini arrivano da un equilibrio alla rotazione.



# STATICA dei FLUIDI

## FLUIDO in quiete

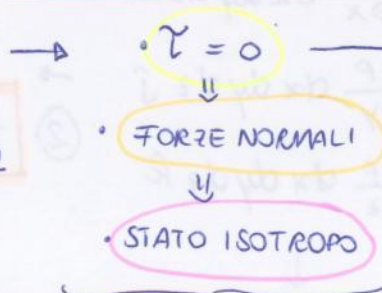
le singole particelle NON subiscono alcun spost. relativo

Sia x EQ ASSOLUTO che RELATIVO

rispetto una terna fissa      rispetto terna di assi mobili

NO deformat di massa fluida

no  $\tau \Rightarrow$  gli sforzi sono diretti  $\perp$  all'elemento



Tensore degli sforzi =  $\begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}$

LO SFORZO in un generico punto di fluido in quiete ha modulo indipendente dall'orientamento passante per il punto stesso.

Lo stato di sforzo di un FLUIDO in QUIETE è determinato e conosce la distrib di PRESSIONE

Bisogna capire come varia  $p = p(x, y, z, t)$  statico! Non varia nel tempo

Ricerca delle EQ INDEFINITE (cioè valide in ogni punto)

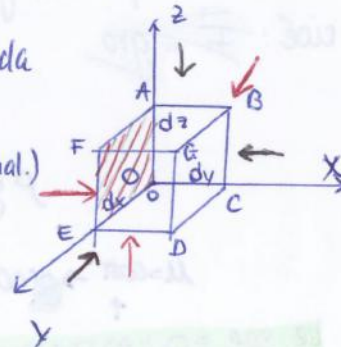
si studia con un modello di eq. differenziali del 1° ordine.

Considero un cubo infinitesimo di una massa fluida in EQUILIBRIO ( $\rho, p$ ). Su questo agiscono:

$\Rightarrow$  F. MASSA + di SUP sono in eq (quiete  $\Rightarrow$  dirette normal.)

F. MASSA acc dovuta al  $\vec{F}$  = campo f. di massa (intensità del campo)

①  $\rho \vec{F} dx dy dz$  ← FORZA DI MASSA



(se  $\vec{F} = \vec{g}$ )  $\Rightarrow$  FORZA PESO

## F. SUPERFICIALE

Vi sono 6 forze in totale (ognuna per ogni faccia)

• Direzione  $\hat{i}$   $\rightarrow$  2 sforzi

$\frac{p \cdot dy \cdot dz}{(AOEF)} - \frac{(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy dz}{(BCDE)} = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \hat{i}$  ← variazione di p moltiplicata per lo spaz

• Direzione  $\hat{k}$   $\rightarrow$  2 sforzi

$\frac{p \cdot dx \cdot dy}{(EDCO)} - \frac{(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy) dx dz}{(ABGF)} = - \frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz \hat{j}$

• Direzione  $\hat{j}$   $\rightarrow$  2 sforzi

$\frac{p \cdot dx \cdot dz}{(ABCO)} - \frac{(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz) dx dy}{(FEDE)} = - \frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz \hat{k}$

$\underline{\underline{g}}$

NB: l'equazione trovata è un eq. del 1° ordine. → necessaria una condizione al contorno.

$$\rho \vec{F} = \text{grad } p$$

(caso gravitazio.:  $\vec{F} = -\text{grad } gz$ )

$$-\rho \text{grad } gz = \text{grad } p$$

$$-\text{grad}(\rho gz) = \text{grad } p$$

$$\text{grad}(\gamma z + p) = 0$$

⇓

$$\gamma z + p = \text{cost}$$

⇓

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost}$$

LEGGE di STEVINO

$$z + \frac{p}{\gamma} = h$$

ricordo che sup. ISOBARICHE sono sup. ORIZZONTALI

⚠ Di fluido si dice PESANTE quando il campo di forze di massa è un campo gravitazionale

misurata al di sopra di un qualsivoglia piano orizz. di riferimento

$z$  = QUOTA GEODETICA

$\frac{p}{\gamma}$  = ALTEZZA PIEZOMETRICA

↓

Due grandezze la cui somma è costante per ogni punt

↓

$h$  = CARICO PIEZOMETRICO o QUOTA PIEZOMETRICA

Per conoscere il valore di  $p$  (che qui mostra appunto che dipende solo da  $z$ ) bisogna individuare la costante ma per conoscerla ho bisogno di sapere la pressione in un punto

Se conosco la posizione di un punt → conosco la pressione (e viceversa)

A TUTTI I PUNTI di un FLUIDO PESANTE INCOMPRESSIBILE in QUIETE compete la stessa  $h$

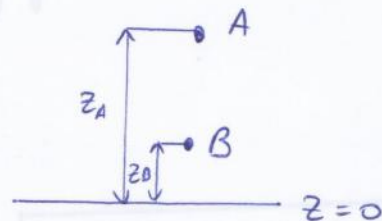
• Considero 2 punti (A, B) in una massa fluida per questi conosco  $z_A, z_B$

$h_A = h_B$  per Stevino

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} \Rightarrow p_B = p_A + \gamma(z_A - z_B)$$

⇓

La PRESSIONE aumenta LINEARMENTE al DIMINUIRE della QUOTA GEODETICA (con fattore di prop. pari al peso specifico del fluido)



(sub)

EQUAZIONE GLOBALE per l'EQ. STATICO

So che:

Integro:  $\rho \vec{F} = \text{grad } p$  passo da un integrale di volume  $\rightarrow$  ad uno di sup.

$$\int_W \rho \vec{F} dW = \int_W \text{grad } p dW$$

$$\int_W \text{grad } p dW = \int_W \left( \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k} \right) dW = - \int_A p (\hat{i} \cos n\hat{x} + \hat{j} \cos n\hat{y} + \hat{k} \cos n\hat{z}) dA =$$

$$= - \int p \vec{n} dA$$

$A$  = superficie di contorno di  $W$   
 $W$  = volume considerato

$\Downarrow$

$$\int_W \rho \vec{F} dW + \int p \vec{n} dA = 0$$

$\vec{R}$  forze di massa agenti sulle singole particelle di  $W$

$\vec{R}$  sforzi elementari agenti su singoli elementi della sup  $A$

$\Downarrow$   
 $\vec{G}$

$\Downarrow$   
 $\vec{\Pi}$

$\rightarrow$  SPINTA che  $A$  esercita su  $W$

$$\vec{G} + \vec{\Pi} = 0$$

$\Leftarrow$  La risultante delle forze di massa agenti sopra un generico volume di fluido in quiete è uguale ed opposta alla spinta agente

$\uparrow$

EQUAZIONE GLOBALE EQ. STATICO

NB: Non vi sono gli sforzi relativi ai punti interni del volume  $W \Rightarrow$  l'equilibrio è indipendente dalla distribuzione di  $p$  interna

↓  
Per la legge di Stevino

⇒ Tutti i punti di un fluido pesante incomp. in quiete hanno la stessa  $h$  (quota piez) ⇐  
Valore di  $h$  determinato quando si assegna la  $p$  in un punto di data quota  $z \Rightarrow$  distribuzione della  $p$  totalmente nota

LEGGE di STEVINO

↳ sup isobar di  $z =$  piani ORIZZONTALI

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost}$$

→ cost = quota del piano orizzontale ove  $p = 0$

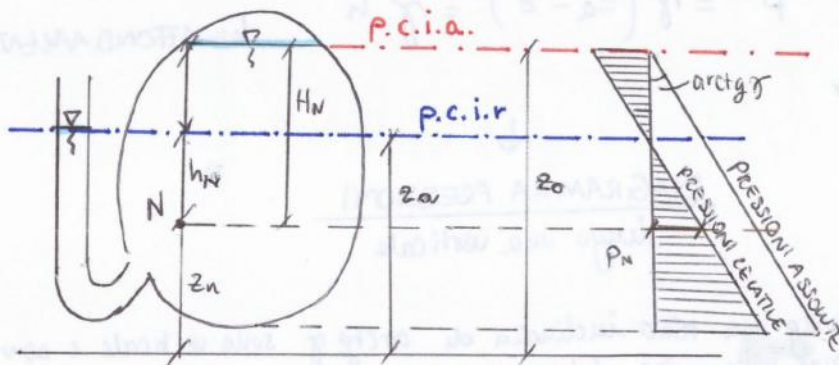
$$p_B = p_A + \gamma (z_A - z_B)$$

← la pressione aumenta linearmente al diminuire della quota geodetica.

⇓

Considero un QUALSIASI RECIPENTE CHIUSO con del liquido ( $\gamma =$  suo peso s.)  
e  $p_N^*$  (= PRESSIONE ASSOLUTA) in N (quota  $z_N$ ) con  $p_N^* > p_{ATM}$

$$p_a^* = 102,000 \text{ Pa}$$



Da  $z_N$  in su  $\rightarrow$  la pressione diminuisce. Essendo che  $p_N^* > p_{ATM} \Rightarrow \exists$  un  $p_N^* / p^* = p_{ATM} = p_a^* (z_a)$

$$\text{Se } p_B = p_A + \gamma (z_A - z_B)$$

PIANO dei CARICHI IDROSTATICI

$$\rightarrow z_a = z_N + \frac{p_N^* - p_a^*}{\gamma}$$

Individuabile con un PIEZOMETRO (tubo collegato al contenitore in comunicazione con l'atmosfera)

Si alza fino a  $z_a$  poiché nella  $p_a^*$  è la  $p$  della sup libera

Salendo ancora di quota si arriverà ad un punto in cui la  $p$  si annulla ( $z_0$ ):

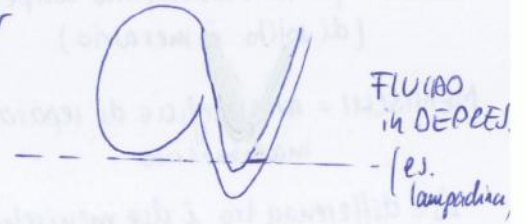
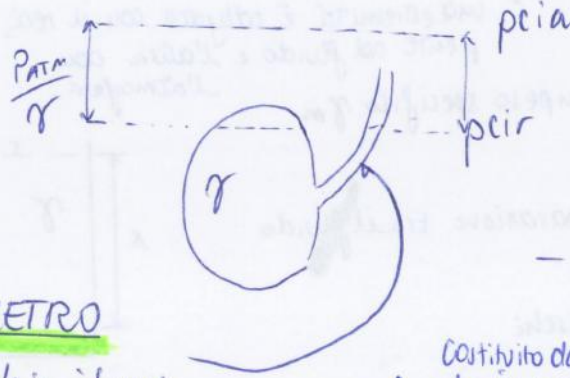
PIANO dei CARICHI IDROSTATICI ASSOLUTO

$$\rightarrow z_0 = z_N + \frac{p_N^*}{\gamma}$$

→ Dovrebbe corrispondere allo sup libera del liquido nel contenitore. Sopra di questa vi dovrebbe essere il vuoto. ( $\exists$  p negative sui fluidi)

————— 12a —————

La cosa da capire in primis è la posizione del p.cir.  
 Da qui ricavo la costante.  
 So che su p.cir ho  $P_{ATM}$  e  $p^*=0$



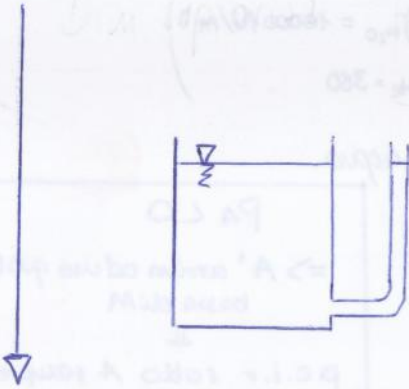
PIEZOMETRO

porta fuori dal serbatoio il p.cir

Costituito da un tubo (verticale o inclinato) aperto in sommità e collegato all'altra estremità col contenitore col liquido

\* Guarda dimostrazione sul libro sul perché due fluidi con densità  $\neq$  hanno come sup di disconti =

1.10.14



Principio dei vasi comunicanti. Esempio della legge di Stevin  
 Se serbatoio aperto  $\Rightarrow$  p.cir coincide con la superficie libera  
 Nel caso di un serbatoio chiuso è comodo avere un sistema come questo  $\leftarrow$  in qui il p.cir viene palesemente indicato

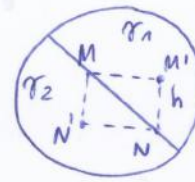
Is: La sup di separazione è orizzontale

Hp: ipotizzo che la sup. di separazione sia netta.

$\gamma_1 < \gamma_2$  (questione di stabilità. Se così non fosse alla prima vibrazione sarei in una situazione instabilità)

Suppongo per ASSURDO che non sia orizzontale.

$MM', NN'$  = distanze orizzontali



$\Downarrow$   
 $P_M = P_{M'}$

$P_N = P_{N'}$

Ma:

$P_{N'} = P_M + \gamma_2 h$

$P_N = P_{M'} + \gamma_1 h$

E allo stesso piano orizzontale  $\Rightarrow P_M + \gamma_2 h = P_{M'} + \gamma_1 h$

$\Downarrow$   
 $h(\gamma_2 - \gamma_1) = 0$

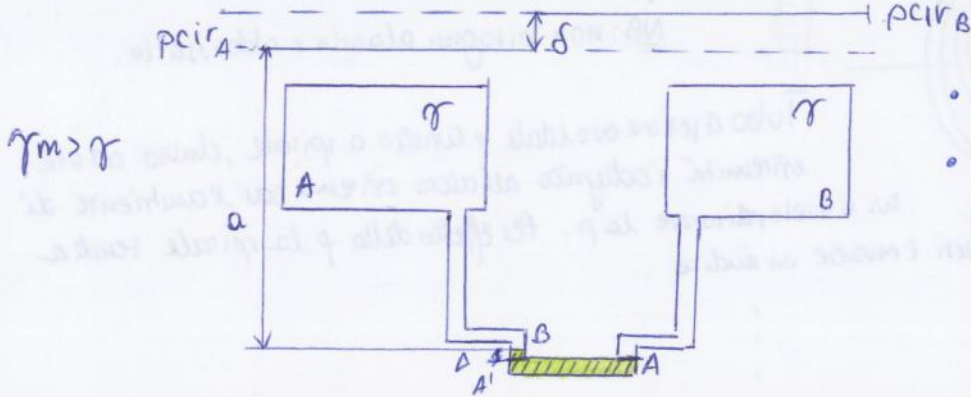
$\gamma_2 = \gamma_1 \rightarrow$  stesso fluido

$h = 0 \rightarrow$  SUP ORIZZONTALE

c.v.d

# MANOMETRO DIFFERENZIALE

$\Delta$  = distanza fra i due menischi  $\rightarrow$  non indica la posizione del p.c.i. MA  
 differenza tra il p.c.i. di un serbatoio (A) con  $\gamma$  e un serbatoio (B) pieno dello stesso fluido



$\gamma_m > \gamma$

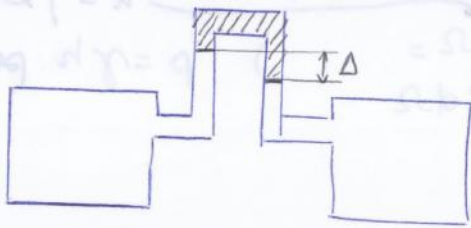
- $P_A = \gamma(a + \Delta + \delta)$
- $P_B = \gamma a$
- $P_{A'} = P_B + \gamma_m \Delta = \gamma a + \gamma_m \Delta$
- $P_A = P_{A'} \text{ (stessa p.c.i.)}$
- $\Downarrow$
- $\gamma(a + \Delta + \delta) = \gamma a + \gamma_m \Delta$
- $\gamma a + \gamma \Delta + \gamma \delta = \gamma a + \gamma_m \Delta$

Differenza tra i due piani

$$\delta = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} \approx 12$$

$\Rightarrow$  il dislivello è deducibile dalla sola lettura manometrica  $\Delta$  indipendentemente dalla quota del p.c.i.

$\hookrightarrow$  Manometro differenziale con  $\gamma_m < \gamma$



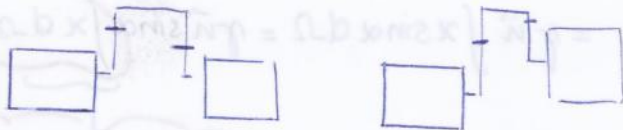
NB con due liquidi  $\neq (\gamma_1, \gamma_2)$  ho:

$$\delta = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma_2}{\gamma_2} + h \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2}$$

per questo  $\rightarrow$  non si parla + di manometri diff.

si capovolge il tubo ad U in cui il fluido manom. occupa la parte + alta.

$$\delta = \Delta \frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma}$$



Come liquido manometrico si usa spesso il TOLUENO ( $\gamma_m = 8530 \text{ N/m}^3$ )

NB: si ha  $\Delta > \delta$  e tanto è + grande quanto + prossimi sono i valori  $\gamma$  e  $\gamma_m$ .

Per l'ultima disposizione si può usare anche l'aria come fluido manom., qui  $\gamma_m$  trascurabile rispetto  $\gamma$ .

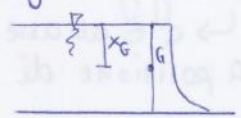
$\Rightarrow \delta = \Delta$

Individuato il volume

**MODULO**:  $|\vec{S}| = \rho h_g \Omega$

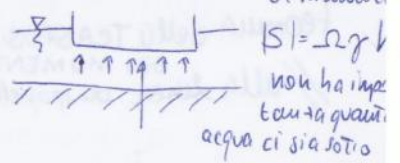
la spinta dipende dall'affondamento del baricentro rispetto al pcir

es: diga



**DIREZIONE**: normale alla superficie

es2



**VERSO**:  
pcir → sopra la sup ⇒ verso positivo  
pcir → sotto la sup ⇒ verso negativo

Devo trovare il punto di applicazione

Considero il punto C

(\*) (centro di spinta) →  $C(\xi, \eta)$

La spinta su una sup. piana è una F. diretta normalmente alla sup stessa, con modulo pari al prodotto della p nel baricentro per l'area della sup

Momento di S rispetto alla linea di sporda

$S \cdot \xi = \int_{\Omega} p \cdot x \cdot d\Omega$

Momento di tutte le spinte elementari rispetto alla linea di sporda (y)

(\*) Considero due assi cartesiani:  
• x ≡ retta di max pendenza del piano su cui è l'area  
• y ≡ retta di sporda

$= \int_{\Omega} \rho x^2 \sin \alpha d\Omega = \rho \sin \alpha \int_{\Omega} x^2 d\Omega$

$= \rho \sin \alpha I_y$  → Momento d'inerzia della superficie calcolato rispetto alla linea di sporda

Le coordinate di C rispetto agli s.e.

$S \cdot \eta = \int_{\Omega} p y d\Omega = \rho \sin \alpha \int_{\Omega} x y d\Omega$

si trovano uguagliando i momenti della risultante con gli integrali dei momenti delle 2 spinte elementari rispetto x,y

$= \rho \sin \alpha I_{xy}$  → Momento centrifugo  $I_{xy}$  di A rispetto i due assi x e y

$\xi = \frac{\rho \sin \alpha I_y}{S} = \frac{\rho \sin \alpha I_y}{\rho h_g \Omega}$

( $h_g = x_G \sin \alpha$ )

$\xi = \frac{I_y}{x_G \Omega} = \frac{I}{M}$  Momento statico della sp calcolata rispetto alla linea di sporda

NB: C non coincide con G

Ciò avviene solo se

•  $I = 0 \Rightarrow M.V!$

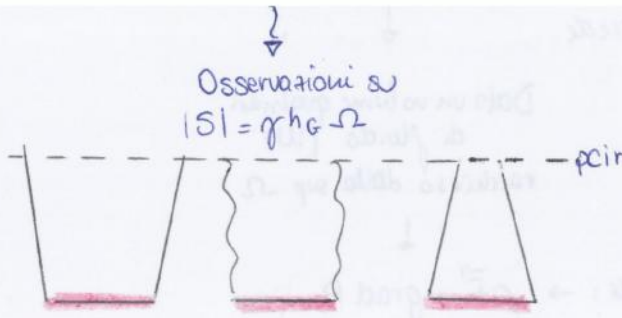
•  $M \rightarrow \infty$  (Momento statico sup calcolato rispetto alla linea di sporda)

$M = x_G \Omega$   
↳  $x_G \rightarrow \infty$  quando  $\alpha = 0$

$\eta = \frac{\rho \sin \alpha I_{xy}}{S} = \frac{\rho \sin \alpha I_{xy}}{\rho x_G \sin \alpha \Omega} =$

$\eta = \frac{I_{xy}}{M}$  Momento statico della sp calcolata rispetto alla linea di sporda

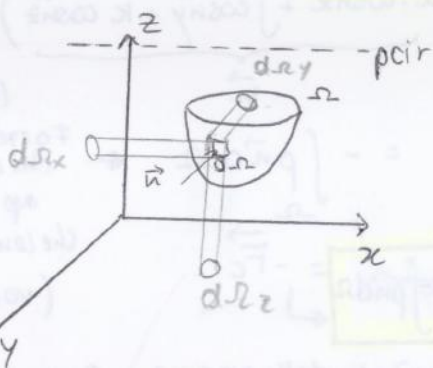
PARADOSSO di ERATOSTENE



Osservazioni su  
 $|S| = \gamma h_G \Omega$

Considero 3 contenitori, di ugual base, riempiti di un liquido qualsiasi. La spinta sul fondo è uguale a tutti e 3 i casi.

SPINTE su SUPERFICI CURVE



Considero una superficie curva e di questa ne prendo un elemento infinitesimo.

sempre stessa formula

$$d\vec{S} = p \vec{n} d\Omega$$

$$\vec{S} = \int_{\Omega} d\vec{S} = \int_{\Omega} p \vec{n} d\Omega \quad \text{integro}$$

Prendo  $d\Omega$ , la proietto sui 3 piani

$$d\vec{S} = (dS_x, dS_y, dS_z)$$

(1) metodo

$$\begin{cases} dS_x = p \cos \hat{n}_x d\Omega \\ dS_y = p \cos \hat{n}_y d\Omega \\ dS_z = p \cos \hat{n}_z d\Omega \end{cases}$$

Questi rappresentano le proiezioni  $d\Omega_x, d\Omega_y, d\Omega_z$  dell'area infinitesima sui 3 piani

$$\begin{cases} dS_x = p d\Omega_x \\ dS_y = p d\Omega_y \\ dS_z = p d\Omega_z \end{cases}$$

spinta su superficie piana

Spinta agente su  $\Omega_x$   
 proiezione della sup curva su  $yz \rightarrow S_x = \int_{\Omega_x} dS_x = \int_{\Omega_x} p d\Omega_x$  ← componente della spinta proiettata su  $yz$   
 $= \gamma h_{G_x} \Omega_x$

**NB**:  $S_x, S_y$  applicate ai centri di spinta (di solito non sono su un unico piano ortogonale) SONO 2 FORZE ORIZZONTALI non complanari (di solito)

Spinta agente su  $\Omega_y$   
 proiett. della sup. curva su  $xz \rightarrow S_y = \int_{\Omega_y} dS_y = \int_{\Omega_y} p d\Omega_y = \gamma (h_G)_y \Omega_y$

peso del volume  $\rho V$  di fluido costituito da una colonna cilindrica verticale limitata da una parte dalla curva e dall'altra dal piano di carichi idrostatici.  $\Rightarrow \rho g$

$S_z = \int_{\Omega_z} dS_z = \int_{\Omega_z} p d\Omega_z = \gamma \int_{\Omega_z} h d\Omega_z = \gamma W$

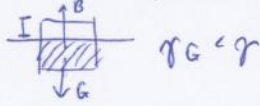
Area  $[L^2]$   $\rightarrow$  Vol contenuto tra la sup e il pcir  $= Vol \cdot \gamma = \underline{\underline{peso!}}$



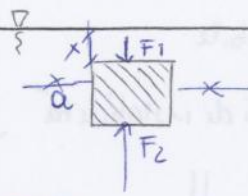
↳ corpo immerso in un liquido.

Questo esercita sullo sp. ac. centro delo una SPINTA che può valutarsi applicando l'eq. globale dell'eq.  
 $S = -G$

NB: quando il corpo non è totalmente immerso  
 => il baricentro non coincide col baricentro della spinta di archimede



## SPINTA di ARCHIMEDE



$$F_1 = \gamma \times a^2$$

$$F_2 = \gamma (x+a) a^2$$

$$F_2 - F_1 = \gamma \times a^2 + \gamma a^3 - \gamma \times a^2 = \gamma a^3$$

Legge di Archimede  
 SPINTA DI ARCHIMEDE

Spinta

di un corpo con lo stesso vol di w

si tratta di p. vol. di w  
 liquido  $\gamma$

Se vince  $G \rightarrow$  corpo scende  
 $B \rightarrow$  " sale



## BUOYANCY

CASI:

- $P$  (peso corpo) > peso liq spostato => AFFONDA e si appoggia sul fondo
- $P =$  peso liquido spost. CONDIZ. EQUILIBRIO PERFETTAMENTE.
- $P <$  peso liquido spost il corpo sale fino a emergere (GALLEGGIAMENTO)

## GALLEGGIAMENTO

STABILITÀ

• Spostamento orizzontale

• Permane nonostante lo spost. orizzontalmente?  
 si!

L'equilibrio è indifferente!



• Spostamento verticale

-> abbasso rispetto al pcir: cambia la spinta, il corpo tende a risalire (e viceversa)

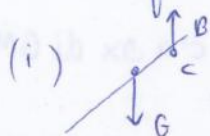
EQUILIBRIO STABILE

• Rotazioni: se il corpo ruota di un angolo infinitesimo

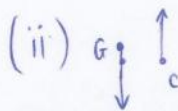
-> il baricentro rimane nello stesso posto

-> il p. di applicazione della spinta di archimede si sposta

=> Si verificano 3 situazioni

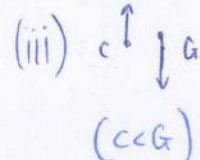


← COPPIA (antioraria) Fu sì che il corpo ritorni nella situazione di equilibrio. La coppia nasce poiché G e B non è più allo stesso asse. STABILE ( $C > G$ )



Sempre coppia antioraria ( $C < G$ ). La coppia ri porta al sist. in equilibrio

STABILE



Coppia oraria. Il corpo ruota ancora di più. Il nuovo sist. di forze non riporta il corpo all'e. INSTABILE

libera, ed osserviamo che ogni piccola rotazione avviene attorno ad uno degli infiniti assi giacenti in questa superficie. Tra questi, ammissa la simmetria dello scafo rispetto ad un piano verticale longitudinale, acquistano particolare importanza l'asse longitudinale (attorno al quale si verifica il moto di **rollio**) e l'asse trasversale (moto di **beccheggio**).

Poiché il pericolo di instabilità è, come evidente, assai più nunciato per il moto di rollio, è per esso che viene ricercata la condizione di stabilità.

La sezione trasversale dello scafo, che contiene (in condizioni di riposo) i punti  $G$  e  $C$  allineati, taglia in  $O$  la traccia della superficie di galleggiamento; la piccola rotazione considerata avviene attorno all'asse d'inclinazione longitudinale che passa per  $O$ .

Nella posizione inclinata dello scafo, esaltata in Fig. 2.24 b), il baricentro  $G$  rimane nella stessa posizione rispetto allo scafo, ma il centro di carena viene a trovarsi in  $C'$ , cioè nel centro del nuovo volume immerso.

Per le piccole oscillazioni considerate il volume di carena rimane il medesimo: infatti la parte immersa a destra per ragioni di simmetria è equivalente a quella emersa a sinistra.

Evidentemente, perché l'equilibrio del galleggiante sia stabile, occorre che la coppia delle forze peso e spinta sia tale da riportare il galleggiante alla posizione iniziale.

Da semplici considerazioni appare sufficiente che la retta di azione della spinta applicata in  $C'$  intersechi l'asse di galleggiamento in un punto superiore al baricentro  $G$  dello scafo. Questo deve avvenire per tutte le oscillazioni della nave, ed anche, al limite, per un'oscillazione infinitesima, il punto intersezione tende infatti ad abbassarsi col diminuire dell'angolo di inclinazione, portandosi ad una posizione limite  $M$ . Questo punto è detto **metacentro**; il suo significato compare la prima volta in un trattato navale di P. ROUGIER (1746).

Per calcolare la posizione del metacentro si procede nel seguente modo. Si consideri il galleggiante in posizione inclinata; le parti immerse ed emerse della carena, che sono per ipotesi due cucci equivalenti, determinano rispetto all'asse d'inclinazione di traccia  $O$  due momenti uguali e dello stesso segno, tenendo conto del diverso verso di rotazione.

Calcoliamo il momento di ciascun cucci: indicato con  $\delta A$  l'angolo di inclinazione del galleggiante, l'elemento  $dA$  della superficie

SPOSTAMENTI VERTICALI

SPOSTAMENTI ORIZZONTALI

2.12. Galleggiamento. L'abbassamento di un galleggiante dalla sua posizione di galleggiamento determina un aumento del volume di liquido spostato, quindi della spinta di sostentamento: perciò esso tende a salire e a riprendere la primitiva posizione. Per un sollevamento, nel caso inverso, prevarrà l'azione del peso. Quindi la posizione di galleggiamento è di **equilibrio stabile** rispetto a spostamenti verticali. E' chiaro che l'equilibrio risulta **indifferente** per spostamenti orizzontali.

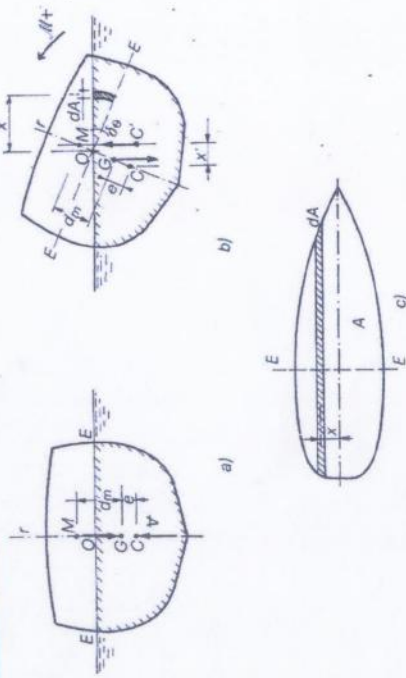


Fig. 2.24

ROTAZIONI

Per l'equilibrio rispetto alla rotazione va esaminato quanto segue, con speciale riferimento agli scafi delle navi.

Sia  $O$  il baricentro,  $C$  il centro di spinta o centro di carena (centro del volume  $V$  spostato, detto volume di carena) ed entrambi giacciono sull'asse  $v$  di simmetria (asse di galleggiamento) in condizione di riposo (Fig. 2.24 a), per cui si ha l'equilibrio delle forze

$$F_C = \gamma V = G$$

Consideriamo la superficie di galleggiamento (o di livello dell'acqua), formata dall'intersezione dello scafo con la superficie

$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$   
 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$

In generale, se  $\delta(x)$  è una distribuzione di Dirac, allora si ha:  
 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

In generale, se  $\delta(x)$  è una distribuzione di Dirac, allora si ha:  
 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

In generale, se  $\delta(x)$  è una distribuzione di Dirac, allora si ha:  
 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$

In generale, se  $\delta(x)$  è una distribuzione di Dirac, allora si ha:  
 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$

In generale, se  $\delta(x)$  è una distribuzione di Dirac, allora si ha:  
 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$

In generale, se  $\delta(x)$  è una distribuzione di Dirac, allora si ha:  
 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$

In generale, se  $\delta(x)$  è una distribuzione di Dirac, allora si ha:  
 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$

11

... ..

$$f(x) = \int_a^x g(t) dt$$

... ..

$$f(x) = \int_a^x g(t) dt$$

... ..

$$f(x) = \int_a^x g(t) dt$$

... ..

$$f(x) = \int_a^x g(t) dt$$

... ..

$$f(x) = \int_a^x g(t) dt$$

... ..

$$f(x) = \int_a^x g(t) dt$$

... ..

$$f(x) = \int_a^x g(t) dt$$

... ..

$$f(x) = \int_a^x g(t) dt$$

... ..

12

$$f(x) = \int_a^x g(t) dt$$

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..



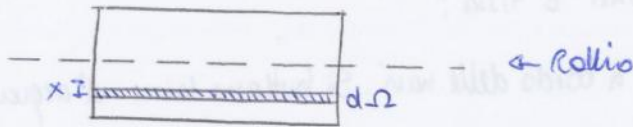
Fig. 1.1

... ..

$$f(x) = \int_a^x g(t) dt$$

... ..

Guardo da sopra



$x \sin d\theta \sim x d\theta$  (arcodici è rotato)

$dV = x d\theta d\Omega$  ← Volume che ora subisce la spinta di Archimede

SPINTA ELEMENTARE di GALLEGGIAMENTO

Spinta di Archimede che nasce in più

$dF_c = \gamma x d\theta d\Omega = \gamma dV$

Se vi è una forza  $F$  ⇒ vi è un momento (rispetto 0)

$dM = dF_c \cdot x = \gamma x^2 d\theta d\Omega$

MOMENTO TOTALE →  $M = \int \gamma x^2 d\theta d\Omega = \gamma d\theta \int x^2 d\Omega =$

Se ognuno provoca un momento elemento intero per trovare quello complessivo

$M = \gamma d\theta \cdot I$

Momento della sp di galleggiamento rispetto all'asse di rotto

$M = \gamma V_c x'$

Questo è responsabile dello spostamento della spinta di Archimede dal pnt c=c'

NB: non è cambiato il vol di carena ma è cambiata la distribuzione delle F

non riesco a calcolarlo allora penso che lo stesso momento sia cambiato no spost. l'c in c'

Considero il triangolo rettangolo MĈC'

$x' = \overline{CM} \sin d\theta = \overline{CM} d\theta$

$\Rightarrow M = \gamma V_c \overline{CM} d\theta$

siamo nell'infinitesimo

Uguaglio i 2 momenti →  $\gamma d\theta I = \gamma V_c \overline{CM} d\theta$

$\overline{CM} = \frac{I}{V_c}$

$d_m > 0$   
Il punto M è + alto li G ⇒ EQUILIBRIO

**DISTANZA METACENTRICA**

$\overline{GM} = \overline{CM} - \overline{CG} = d_m = \frac{I}{V_c} - e > 0$

NB: Sottomarini no sp di fluttazione  $I_0 = 0$   
↓  
 $e < 0$   
(bancentro più basso del centro di spinta)

- braccio dello spostamento di c
- indica quanto è forte la coppia che riporta su la barca. Più è grossa ⇒ più torna in ep. velocemente. (⇒ Distinzione tra NAVI DUCE - NAVI MOEBIDE)

tornano velocemente su equilibrio  
es. navi militari  $d_m \sim 90 \text{ cm}$

tornano + lentamente in ep  
es. navi croce di equilibri ha tempo di resistenza

### MOTO VARIO

tutte le grandezze dependono sia dallo spazio che dal tempo

⚠ Bisogna tener conto del s.r. potrebbe o non potrebbe essere fermo

### MOTO PERMANENTE

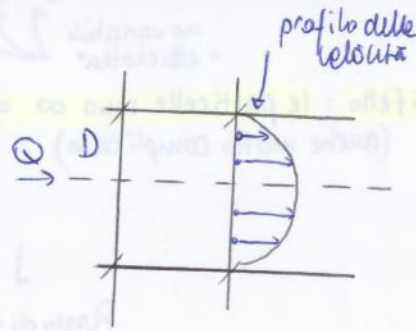
le grandezze dependono solo dallo spazio

### MOTO UNIFORME

le grandezze non dependono né dallo spazio né dal tempo

### Esempio

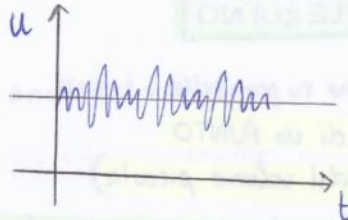
Tubo. Diametro cost.  
Flusso costante nel tempo  
**NO** moto uniforme da un punt di vista matematico



In realtà è un esempio di m.v.

**MOTO MEDIAMENTE UNIFORME** poiché in qualsiasi punt del tubo il profilo di velocità  $\bar{v}$  è identico.

Piccole oscillazioni di velocità



**MOTO PERMANENTE in MEDIA**

### FLUIDO FERMO

il vettore  $v$  è  $\emptyset$

### MOTO PIANO

La terza componente del vettore  $v$  è uguale a  $\emptyset$

**NS:** **TRAIETTORIA** ↔ **LINEE di CORRENTE**

↓  
Coincidono?

→ Sì se non vi è la **DIPENDENZA dal tempo** ←  
(moto vario no!: es. onda piena di un fiume)

Derivare secondo l'Approccio

↓

**LAGRANGIANO** ↔ **EULERIANO**

← è facile una variabile - **TEMPO** → **DERIVATA TOTALE**

→ NON con immediato **2 VARIABILI** (→ derivare parziali) ↓ **valore LOCALE**

**REGOLA DI DERIVAZIONE EULERIANA**

↓

$\vec{x} = (x, y, z)$

Fisso l'attenzione all'istante  $t$   
Qui vi è una **grandezza** (in questo punto  $\vec{x}$  e all'istante  $t$ )

↓

$f(x, y, z, t)$

All'istante  $(t + \Delta t)$  la particella si trova in un nuovo punto:

$\vec{x} + \Delta \vec{x} = (x, y, z) + (u, v, w)\Delta t$   
ora ↓  
 $f(\vec{x} + \Delta \vec{x}, t + \Delta t)$

⇒ possibile descrivere gli spostamenti in ogni istante

Prendo questa funzione e la sviluppo in serie di Taylor. **fino al primo ordine**

↓

$f(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t, t + \Delta t)$

↓

La sviluppo in serie di Taylor

↓

$= f(x, y, z, t) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \underbrace{O(\Delta t^2)}_{\text{tutti i termini di grado maggiore}}$

↓

porto qst a sx

$\frac{f(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t, t + \Delta t) - f(x, y, z, t)}{\Delta t}$

↓

**DERIVATA limite rapporto incrementale** →  $\frac{Df}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0}$

↓

$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z}$

↙ ↘

linee luogo dei punti successivamente occupati dalle singole particelle fluide in moto

Curva tangente in ogni punto al vettore velocità in quel punto

Se istante per istante taglio il tubo con una superficie di area  $\Omega$ , composta da infinitesime parti  $d\Omega$  ognuna con normale  $\vec{n}$   
 $\vec{u} =$  componente normale di  $\vec{v}$

All'istante  $dt$  attraversa la superficie  $d\Omega$  il volume che la attraversa è:

$dQ = u_n d\Omega = \vec{u} \cdot \vec{n} d\Omega$

Volume di parti celle che istante per istante passa attraverso il tubo  
 solo la componente normale fa passare attraverso il tubo

**PORTATA ELEMENTARE**  
 Volume per unità di tempo passato per unità di superficie  
 $\frac{kg}{s} = \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m^3}{s}$

$Q = \int_{\Omega} u_n d\Omega = \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{n} d\Omega$  ← PORTATA  $\frac{m^3}{s}$

$G = \rho Q$  ← PORTATA in MASSA

**SEZIONE TRASVERSALE**

sezione  $\perp$  al tubo di flusso  
 ( $\Rightarrow$  tutti gli elementini hanno la stessa  $\vec{n}$ )

$\vec{u} \cdot \vec{n} = |\vec{u}|$

$Q = \int_{\Omega} |u| d\Omega$

$\rightarrow Q = U \Omega$

Media della grandezza calcolata in  $\Omega$   
 (rapporto fra portata e sezione)

$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} u d\Omega$

$\leftarrow \frac{m^3}{s} \cdot \frac{1}{m^2} = \frac{m}{s}$

**VELOCITÀ MEDIA**

~ Ripasso algebra

$a(a \cdot b) = a \partial b + b \partial a$

$X = Y + Z$

$Z = X - Y$

13.10.14



L'equazione di continuità si può riscrivere come:  $\rightarrow$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{u} = 0$$

esplicitazione del termine  $\rho \vec{u}$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div } \vec{u} = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \vec{u} = 0$$

Definita la condizione alla quale devono soddisfare il

- vettore velocità
- densità

del fluido in OGNI PUNTO del campo di moto

Casi particolari:

• MOTO PERMANENTE:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{div } \rho \vec{u} = 0$

Nei fluidi incompressibili il campo vettore velocità è  $\downarrow$  SOLENOIDALE

• Fluido incompressibile:  $\rho = \text{cost} \Rightarrow \text{div } \vec{u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

↓  
Data la forma LOCALE (chiede il vettore  $\vec{u}$  in ogni punto del sistema) è possibile ottenere quella GLOBALE

**EQUAZIONE GLOBALE**

perché la cerco? Più comoda!



W = volume finito  
 $\Omega$  = contorno di W

Considero un volume di fluido W e di quanto ne prenda un elemento  $d\Omega$  il cui integrale esteso su  $\Omega$  darà l'intera sup. componente velocità normale  $\rightarrow w_n = \vec{u} \cdot \vec{n}$

Nell'istante  $dt$ :  $\rho w_n d\Omega dt = \rho \vec{u} \cdot \vec{n} d\Omega dt$  ← Massa che passa attraverso

Attraverso l'intera sup di contorno passa, nell'intervallo  $dt$ , la massa:

$$dt \int_{\Omega} \rho w_n d\Omega = dt \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} d\Omega$$

Massa tot che attraversa tutta la sup

$$U - E = dt \int_{\Omega} \rho w_n d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_W \rho dW dt$$

Differenza tra massa entrante ed uscente

variazione che ha subito la massa nello stesso intervallo di tempo

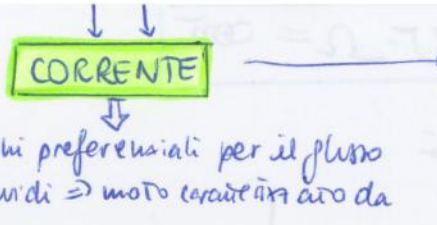
NB: W e  $\Omega$  sono fissi nel tempo  $\Rightarrow$  posso scambiarli

NB2:  $dt$  è indipendente da  $\Omega$  e W  $\Rightarrow$  posso semplificarlo

$$\int_{\Omega} \rho w_n d\Omega = \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dW$$

**EQUAZIONE GLOBALE DI CONTINUITA**  
valida per qualunque volume del campo di moto

in generale:  
 moti caratterizzati dal fatto che tutte le traiettorie hanno sensibilmente la stessa direzione



NB: Nel caso di MOTO PERMANENTE  $\Rightarrow$  il concetto di corrente coincide con quello di TUBO di FLUSSO

TRAJETTORIE sensibilmente RETTILINEE + //

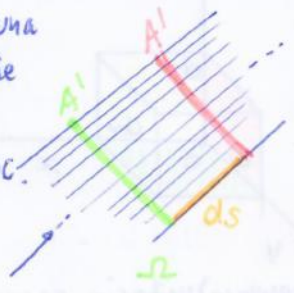
Le variazioni delle traversi sono piccole

$\Rightarrow$  CORRENTI GRADUALMENTE VARIATE

**Equazione di continuità applicata alla corrente**

NB: A volte è possibile conoscere solo una direzione per descrivere il tutto.

Immagino di tagliare una corrente con una superficie che in ogni suo punto risulta  $\perp$  al vettore veloc.



A = SEZIONE TRASVERSALE della CORRENTE

Massa contenuta tra A-A':  $\rho \cdot \Omega \cdot ds$

$\Omega = \Omega(s, t)$   
 $Q = Q(s, t)$

Considero una parte della corrente (una sezione)

$E: \rho Q dt$  ( $\rho Q$  portata in massa, se moltiplico per  $dt$  è la portata riferita al tempo  $\Rightarrow$  lamina)

$U: \left[ \rho Q + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds \right] dt$

$U - E = \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds dt - \frac{\partial \rho \Omega}{\partial t} dt ds$

differenza fra la massa uscente e quella entrante

Ne esce più di quanto ne entra

diminuzione di massa

**$\frac{\partial \rho Q}{\partial s} + \frac{\partial \rho \Omega}{\partial t} = 0$**

Forma generale della **EQUAZIONE di CONTINUITA** applicata ad una **CORRENTE** di un qualunque fluido

Casi particolari:

MOTO PERMANENTE  
 Fluido incomp.  $\rho = \text{cost}$

$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$

$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0$  (poiché  $\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$ )

**COSTANZA della PORTATA** lungo la corrente

$\frac{dQ}{ds} = 0 \Rightarrow Q = \text{costante}$ . la portata è la stessa per tutto lo scap / tutte le sezioni

velocità media  $\rightarrow v \cdot \Omega = \text{cost}$

$$\rho \vec{F} - \left( \frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z} \right) = \frac{D\vec{u}}{Dt} \rho$$



$$\rho \left( \vec{F} - \frac{D\vec{u}}{Dt} \right) = \frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z}$$

**EQUAZIONE della DINAMICA di un FLUIDO QUALSIASI**

(forma locale indefinita)

Lo cerco anche quella GLOBALE \*

quante incognite ci sono? scrivo le eq scalari

A questa va associata 2<sup>a</sup> eq. indefinita che si basa sulla 2<sup>a</sup> eq cardinale delle dinami (Eq. dei momenti)

=> esprime la condizione di simmetria del tensore degli sforzi cioè l'uguaglianza a 2 a 2 delle componenti  $\tau_{ij} \Leftarrow$

$F_x, F_y, F_z =$  componenti  $\vec{F}$   
 $\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{Dv}{Dt} \vec{i} + \frac{Dw}{Dt} \vec{j} + \frac{Dz}{Dt} \vec{k} = \vec{A}$

10 incognite  
 ↓  
 10 equazioni

Mene servono altre 7

$$\begin{cases} \text{(I)} & \rho \left( F_x - \frac{Du}{Dt} \right) = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial z} \\ \text{(II)} & \rho \left( F_y - \frac{Dv}{Dt} \right) = \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial z} \\ \text{(III)} & \rho \left( F_z - \frac{Dw}{Dt} \right) = \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \end{cases}$$

Forma scalare dell'EQUAZIONE INDEFINITA del MOVIMENTO di un FLUIDO

Suppongo che il campo di  $\vec{F}$  sia noto

$$\text{(IV)} \quad \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \vec{u}$$

EQ CONTINUITA (sempre valida)

$$\text{(V)} \quad \rho = f(\dots)$$

Eq. di stato, se fluido incomp.  $\rho = \text{cost}$  legame tra  $\rho$ , lo stato di sforzo e la T.

=> Ora ho 5 EQUAZIONI! Quelle che mancano sono quelle che legano gli sforzi alle deformazioni.

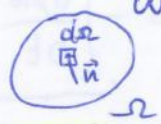
(=> **Reologia**: da piena ricavo le altre 5 equazioni)

Necessario indicare il tipo di fluido. In base a questo saranno noti i legami tra sforzi e def.

Prima di trattare il caso dei fluidi Newtoniani => cerchiamo la forma globale di eq.

\* Cerco la **forma globale** di equilibrio. Prendo quella locale e lo **integro** su una qualsiasi parte del  $V$

Considero il volume  $W$  racchiuso dalla  $sp \Omega$  e considero un elementino  $d\Omega$  con normale  $\vec{n}$  entrante e integro la forma locale.



Se vale punto per punto vale su tutto il volume

$$\int_W \rho \vec{F} dW - \int_W \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} dW = \int_W \left( \frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z} \right) dW$$

**EQUAZIONE GLOBALE per QUALSIASI FLUIDO della DINAMICA**

Per qualunque volume finito  $\Omega$  di fluido in movimento, è nulla la risultante delle seguenti forze:  
 $\vec{P}, \vec{F}_c, \vec{I}, \vec{M}$

$$\int_{\Omega} \rho \vec{F} dW + \int_{\Omega} \vec{\phi}_n d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} dW + \int_{\Omega} \rho \vec{u} u_n d\Omega = 0$$



Osservazioni:

- Equazione vettoriale
- Tutte le grandezze sono FORZE → il comportamento di un qualsiasi fluido si studia tramite l'eq di F
- (1) è il peso ( $\vec{P}$ ). Qui non vi è il campo di moto. Questione geometrica.  $\int_{\Omega} \rho \vec{F} dW = \vec{P}$
- (3) è la somma delle F al contorno (con parte normale e parte tang. dovute alle  $\sigma$  e alle  $\tau$ ) ( $\vec{F}_c$ )
- (2) Il termine ( $\vec{I}$ ) sono le inerzie locali, come calcolata la quantità di moto all'interno del ritt.

• L'ultimo termine:

$$\int_{\Omega} \rho \vec{u} u_n d\Omega = \vec{M}$$

↳  $u_n d\Omega =$  PORTATA =  $dQ$

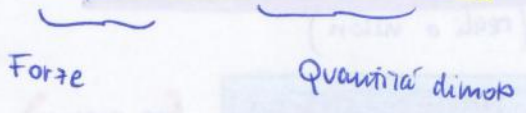
↳  $\rho dQ =$  MASSA che passa attraverso  $\Omega$  nell'istante di tempo

↳  $\vec{u} \rho Q =$  QUANTITÀ DI MOTO

Flusso di quantità di moto attraverso la superficie di contorno ( $\vec{M}$ )

Vale per qualsiasi fluido

$$\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{I} + \vec{M} = 0$$



Casi particolari:

**MOTO PERMANENTE**:  $\vec{I} = 0$  (fluido incompressibile)  
 (non vi sono variazioni nel tempo)

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_e + \Omega_u$$

$$\int_{\Omega} \rho \vec{u} u_n d\Omega = \int_{\Omega_0} + \int_{\Omega_e} \vec{M}_e + \int_{\Omega_u} -\vec{M}_u$$

$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{F}_c + \vec{I} + \vec{M}_e - \vec{M}_u = 0$$

Indipendente dalle caratteristiche del moto interno.

(pag 8)

$$p = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zy} & \tau_{yx} \\ \tau_{zy} & \sigma_y & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - p & \tau_{zy} & \tau_{yx} \\ \tau_{zy} & \sigma_y - p & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{xz} & \sigma_z - p \end{vmatrix}$$

NB: Si vede come all'annullarsi del movimento, ci si tiene a  $\sigma$  de deviatore  $\Rightarrow$  gli sforzi normali  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  tendono precisamente a  $p$ .

TENSORE degli sforzi  
lo separo in 2 parti

solo  $p$   
ISOTROPO  
tutte le spire sono di natura normale

DEVIATORE degli sforzi  
(parte dinamica)

La parte che vi sarebbe se il fluido fosse fermo

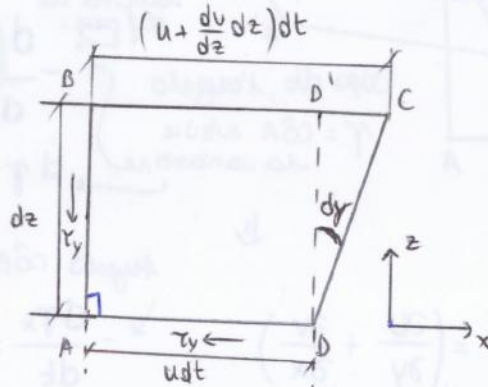
(parte statica)

Se dimostro che questo è  $\sigma$  rimane solo la parte statica

Devo stabilire il rapporto tra le componenti del deviatore,  $\mu, (u, v, w)$ . Ma prima riesamino la relazione di Newton per un'interpretazione cinematica.

Considero un moto permanente piano

con un'unica componente della velocità ( $u$ ) solo in funzione di  $z$ , direzione  $x$



relazione di Newton per un'interpretazione cinematica.

$$u = u(z)$$

Velocità delle particelle  
Particelle a  $z \neq$  hanno  $u \neq$

NB: AB trasla e si inclina.  
Se non vi fosse la relazione  $u = u(z) \Rightarrow$  sarebbe solo traslato.

Sia  $\overline{AB}$  una fila di particelle che in un dato istante sono allineate ( $z =$ )

Considero il piano  $xz$

Dopo un  $dt$  di tempo da  $A \rightarrow D, B \rightarrow C$  (non  $D'$  poiché  $u = u(z)$ )  $\Rightarrow$  nuovo allineamento  $\overline{DC}$

$\widehat{BAD} = 90^\circ \rightarrow \widehat{CDn}$  (si deforma punto qualunque  $dx$ )  $< 90^\circ$ , diminuito di  $\gamma$

Variatione infinitesima dell'angolo retto  $\widehat{BAD}$

$$\Rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = \text{velocità angolare} \rightarrow \text{dipende da } u = u(z)$$

diminuzione

$$-d\gamma = \frac{\overline{BC} - \overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{(u + \frac{du}{dz} dz) dt - u dt}{dz} = \frac{du}{dz} dt \Rightarrow -\frac{d\gamma}{dt} = \frac{du}{dz}$$

la trovo via geometrica



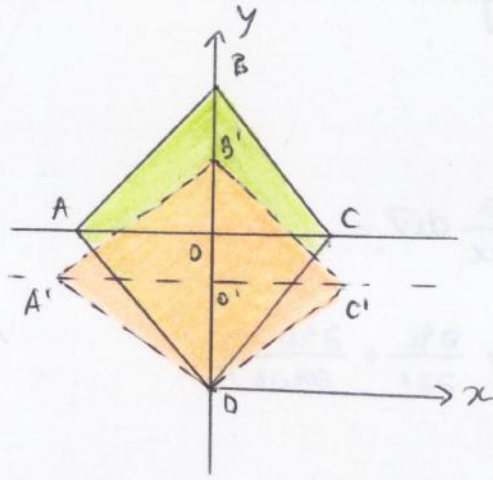
impongono la rotazione intorno all'asse  $y$

Fluidi Newtoniani

se ho un termine del genere delle  $\tau$

(cioè se ho la variaz. della  $v$  lungo la  $z$  della direzione)

Prendi la derivata della velocità in direzione  $z$  a quella della  $v$ .



(QUADRATO)  
 • Considero un rombo infinitesimo ABCD  
 Se corpo immerso nel campo di moto, nascono delle  $\tau$  e delle  $\sigma$ . Qui considero gli allungamenti/restrizioni (non  $\sigma$ ) e quindi delle modifiche nella distanza di parti celle  $\neq$ . (Considero le distanze come es. diagonale)  
 $AC \rightarrow A'C'$   
 l'allungamento dipende dalla rotazione degli assi.

Sforzo normale  $\sigma_y - p$ ? (sulla diagonale AC)  
 sui lati del triangolo ACD agiscono le forze:

AD  $\cdot \tau_z$

CD  $\cdot \tau_z$

AC  $\cdot (\sigma_y - p)$

Per l'equilibrio:  $2\tau_z \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}(\sigma_y - p)$

$\sigma_x - p = -\tau_z$   
 (sottraendo)

$\sigma_y - \sigma_x = 2\tau_z$

Ma di questa sono responsabili le  $\tau$

Collegate alle variazioni di velocità  $\perp$

Che correlazione c'è tra  $\tau$  e  $\sigma$ ?

Ricavo geometricam:

$\epsilon_x = \frac{CC'}{OC} = \frac{CC'}{CD} = \frac{d\tau_z}{2} = -\epsilon_y$

$\frac{d\tau_z}{dt} = \frac{d}{dt} (\epsilon_x - \epsilon_y)$

$\frac{d\epsilon_x}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}$

Qui no direzioni  $\perp$

NB: 3  $\sigma$   $\rightarrow$  ridondanti  
 Ne bastano 2!

$$\begin{cases} \sigma_x - p = -2\mu \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{u} \\ \sigma_y - p = -2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{u} \\ \sigma_z - p = -2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{u} \end{cases}$$

VISCOSITÀ

$\tau \rightarrow$  direzioni  $\perp$   
 $\sigma \rightarrow$  no "  $\perp$

Forma + semplice nel caso di fluidi incompressibili ( $\rho = \text{cost}$ )  
 $\Rightarrow$  qui  $\operatorname{div} \vec{v} = 0 \Rightarrow$  si annulla il termine moltiplicando per  $\frac{2}{3}$

L'assenza di sforzi  $\tau$  e in grado di assorbire lavoro assicura la CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

**FLUIDO PERFETTO**

Anche se in movimento, non variano  $\tau$   
 NO  $\tau$  → NO attriti → NO dissipazioni

le particelle non ruotano durante moto/diminuiscono dimensioni ma non rotano  
 ↓  
 sforzi solo di natura normale

$\mu = \text{VISCOSITÀ} = 0$   
 DIN.

Risolvo l'eq:

(come legge di Newton  $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ )  
**EQUAZIONE di EULERO**  
 (in forma locale)

$\rho \left( \vec{F} - \frac{D\vec{u}}{Dt} \right) = \text{grad } p$

Abbiamo trascurato il termine:  $(-\mu \nabla^2 \vec{u})$   
 ↓  
 che peso ha?  
 → dopo pag. 54

**EQUAZIONE di EULERO**  
 (in forma globale)

$\vec{G} + \vec{\Pi}_i + \vec{I} + \vec{M}_e - \vec{M}_u = 0$

Integro

**DINAMICA dei FLUIDI PERFETTI**

Hp:

- (i) **Fluido perfetto** →  $\rho \left( \vec{F} - \frac{D\vec{u}}{Dt} \right) = \text{grad } p$
- (ii) **Incompressibilità** →  $\rho = \text{cost}$  →  $\rho \vec{F} = -\rho g \text{ grad } z = -\gamma \text{ grad } z = -\text{grad } p$
- (iii)  **$\vec{F} = -\text{grad } g z$**  (assunta come terna di riferimento che ha l'asse z verticale diretto verso l'alto)

$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } p$

Eq di Eulero  
 $\rho \vec{F} - \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \text{grad } p$

$-\text{grad } \rho g z - \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \text{grad } p$

$(\rho g = \gamma)$

$+\text{grad } (\gamma z + p) = -\rho \frac{D\vec{u}}{Dt}$

Rapporto cambiato di segno fra z e acc.

Divido per  $\gamma$

$\text{grad} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{\rho}{\gamma} \frac{D\vec{u}}{Dt}$   
 h

Eq ~ a quella della statica  
 ↓  
 Dinamica del f. perfetto è il grad di qualcosa che costante

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{p}{\rho} \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \frac{u^2}{2} \quad (v = \text{modulo velocità})$$

- Ricorda:
- $z$  = quota geodetica
  - $\frac{p}{\rho}$  = altezza piezometrica
  - $z + \frac{p}{\rho} = h$  = quota piezometrica

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2g} \right) = - \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Hp: (iv) Moto permanente (\*)  
 $\rightarrow = 0$

h + termine con la velocità

CARICO TOTALE (H)

$$H = z + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2g} = h + \frac{u^2}{2g}$$

- Ora:
- $\frac{u^2}{2g}$  = altezza cinetica [L]

lungo la traiettoria, il carico totale è COSTANTE

$$\frac{\partial H}{\partial s} = 0$$

$$H = \text{cost}$$

è una lunghezza  
 dimensionalmente è una lunghezza

ALTEZZA CINETICA (termine cinetico)

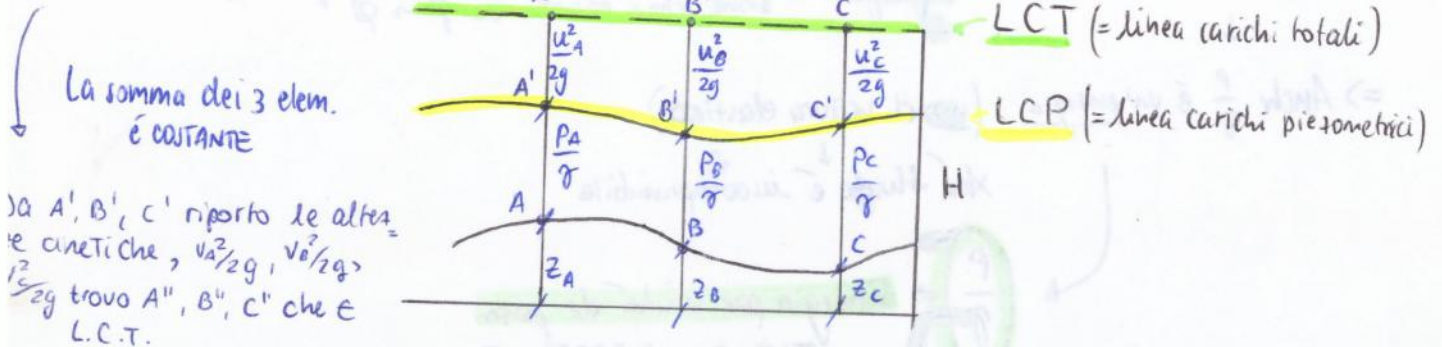
TEOREMA di BERNOULLI

Nel moto permanente (\*) di un fluido perfetto pesante incompressibile il carico totale si mantiene costante lungo ogni traiettoria.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA TEOREMA di BERNOULLI

- Considero una traiettoria qualsiasi

con riferimento del s.r.  $z=0$ . A partire da questo misuro le quote  $z_A, z_B, z_C$  dei punti. Da A, B, C riportiamo i segmenti pari alle altezze piezometriche  $\frac{p_A}{\rho}, \frac{p_B}{\rho}, \frac{p_C}{\rho} \Rightarrow$  trovo A', B', C' che  $\in$  LCP, la distanza di questi da  $z=0$  è h.



- Individuo 2 linee
- LCT - luogo dei punti che unisce il carico totale che compete alla particella man mano che si muove lungo la traiettoria (linea orizzontale).
  - LCP - linee che unisce il piano dei carichi idrostatici relativi di ogni punto.

$\Rightarrow$  la distanza tra  $z$  e la LCT è costante ed è uguale ad H.

Tra LCP e LCT vi è una distanza pari al termine cinetico.

NB: LCP può salire e può scendere. L'importante è che LCT sia orizzontale.

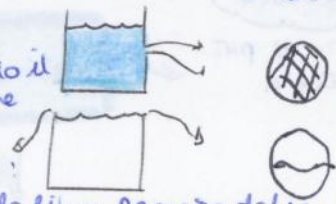


Studio dei processi di efflusso di liquidi attraverso fori aperti nelle pareti dei recipienti

**FORONOMIA**

LUCE = foro aperto nella parete o nel fondo di un recipiente  
 GETTO/VENA LIQUIDA = corrente che ha origine da una luce

- Luce a battente = se H<sub>2</sub>O riempie tutto il foro. Tutto il loro contorno o quota superiore del pelo libero
- Luce a stramazzo = strabocca solo la parte inferiore soggiace al pelo libero. Bagnata dal liq. effluente



Luce a spigolo vivo

(non tocca la parete)



Luce spessa/grassa  
(la parete interferisce)

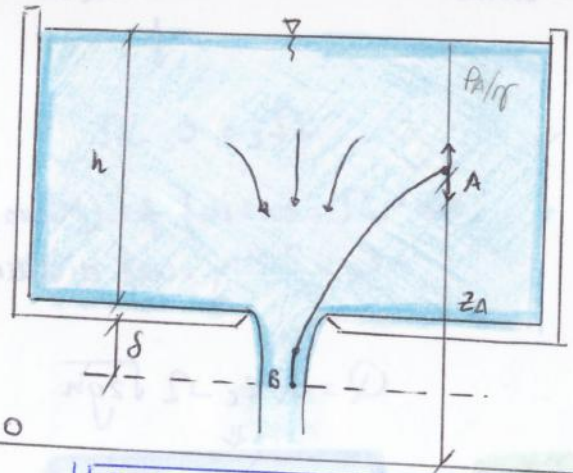
→ Bordo affilato, la vena si stacca vincendo l'aderenza ←  
 Esempio:

Luce in parete sottile con foro sferico in fondo

Verso la luce convergono traiettorie che arrivano da ogni punto del recipiente.

Quelle sul fondo arrivano alla luce con direzione orizzontale solo dopo che abbandonano il bordo si piegano per effetto:

- della gravità
- delle pressioni all'interno del liquido.



**SEZIONE CONTRATTA**  
 prima sezione trasversale della corrente dove avviene la convergenza delle traiettorie  
 Ha Area inferiore a quella della luce.  
 • LUCE CIRCOLARE → la sua contratta dista mezzo diametro dal piano della luce.

Per la FORTE CURVATURA, in corrispondenza della LUCE, la quota piezometrica (=> p e la pressione) crescono dal bordo verso l'interno. Valore MAX al centro. =>  $P/r = 0,6 h$  (h = affondamento della luce sotto liquido)

→ Applico BERNOLLI ad una generica traiettoria (A → B). Presuppongo una STAZIONARIETÀ del movimento. Si può ipotizzare il liquido perfetto: la v ha valori moderati (no in prossimità della luce) => piccolo sforzo

$$z_A + \frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2g}$$

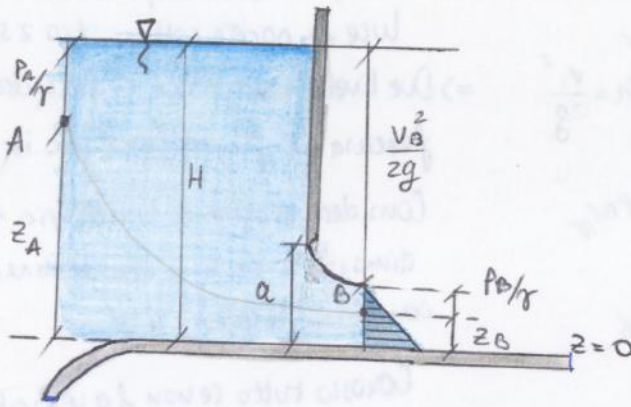
(termini molto lontanissimi dalla luce => v trascurabile)

poiché piano orizz. la contratta con l'atm. coincide corrente gradualm. variata le traiettorie sono tutte rettilinee e // X => vi è una distribuzione idrostatica di pressioni.

Le traiettorie convergono nel buco → **SEZIONE CONTRATTA** (le traiettorie sono tutte rettilinee e // X => vi è una distribuzione idrostatica di pressioni. In B ho una  $P_B = 0$ ). Proiezione teorema di Bernoulli in direzione ⊥ al moto. la ret. contratta teoricamente δ ma ingegneristi si e bisogna risolvere l'eq di Stokes, difficili da trovare.

$$\left(\frac{P_B}{\rho} = 0\right) \rightarrow \frac{v_B^2}{2g} = z_A - z_B + \frac{P_A}{\rho} = h + \delta$$

Esempio 2: presa a pelo libero da un serbatoio



(Abbatente)

Qui si ha una LUCE TRIANGOLARE sul lato del serbatoio.

↓  
Dimostrare che:

$$Q = a \cdot b \cdot m \cdot \sqrt{2g(H - c_c a)}$$

NB: valore m  $\Rightarrow$  tabelle  
a, b = lati rettangolo

Conviene arrivare fino al punto B (seguendo la traiettoria) dove si hanno solo traiettorie rettilinee //.

NB: Un sistema del genere può servire per il controllo dei sistemi agricoli. Controllo flumi per sistemi agricoli avviene di solito con paratoie, luce su parete sottile di sezione rettangolare. Per aumentare/diminuire i flussi è necessario alzare/abbassare la paratoia.

Ho sempre una **SEZIONE CONTRATTA** poco dopo la luce. Posta in un piano verticale + appoggia su un solido.

Qui: traiettorie rettilinee e// ( $\Rightarrow$  corrente gradualmente variata)

$\Rightarrow$  **DISTRIBUZIONE IDEO STATICA** delle P è **TRIANGOLARE** (la p si annulla in corrispondenza del pelo libero della corrente)

Applico BERNOULLI alla traiettoria AB:  $H = z_A + \frac{p_A}{\gamma} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g}$

$\Rightarrow$  Altezza cinetica in B =  $\frac{v_B^2}{2g} = \left(z_A + \frac{p_A}{\gamma}\right) - \left(z_B + \frac{p_B}{\gamma}\right)$   $\leftarrow$  CIOÈ DISLIVELLO tra i PELI D'ACQUA del SERBATOIO e nella SEZIONE CONTRATTA

$\Rightarrow$  VELOCITÀ uniformemente distribuita

Si ass. la larghezza della paratoia + a = altezza paratoia

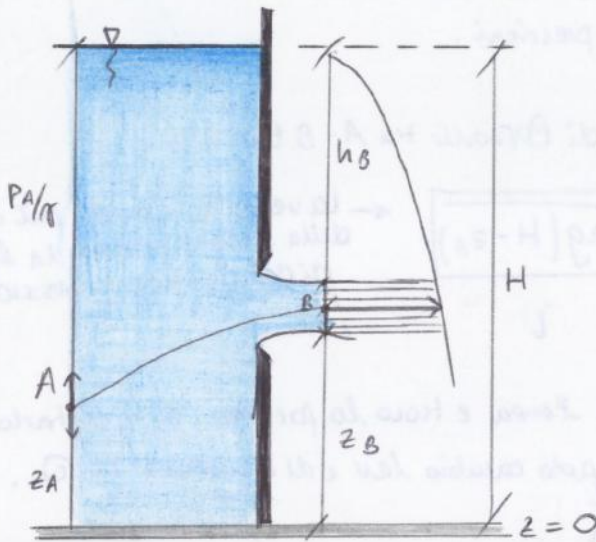
• paratoia compresa tra 2 pareti verticali  $\Rightarrow$  no contrazioni della luce.

Sperimentalmente si cavano  $c_c \sim 0,61$

$$\frac{v^2}{2g} = H - \left(z_B + \frac{p_B}{\gamma}\right) = H - c_c a$$

$$\Rightarrow Q = mab \sqrt{2g(H - c_c a)}$$

Esempio 4



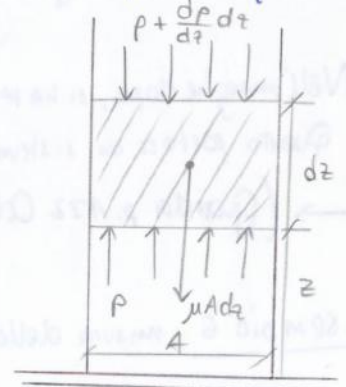
No 2 serbatoi a livello  $\neq$ . Di 2° non ha nessun fluido.

No sezione contratta, flusso a vena libera nell'atmosfera. le traiettorie sono deviate verso il basso  $\Rightarrow$  non si può più dire a priori che la  $p_B = 0 \Rightarrow ?$

$\Rightarrow$  Si dimostra comunque che  $p_B = 0 \Leftarrow$

Considero una parte della vena fluente

Colonna di liquido a geometria verticale e liquido in quiete



Colonnina di liquido isolata dalla vena liquida in corrispondenza della sezione contratta.

Questo non è sorretto dal liquido sottostante. Agisce la forza peso e invece nel declino della traiettoria strato soggetto a  $g \Rightarrow$  ad una forza d'inerzia (opposta a  $g$ )

$-dm g = -\rho g A dz = -\gamma A dz = \rho A dz$   $dm = \rho V = \rho A dz$

Forze all'equilibrio (alla traslazione verticale):

$G = P = \gamma A dz$  }  $\rightarrow$  Spinta di Archimede  
+ Altre 2 pressioni

Equilibrio alla traslazione verticale:

$\vec{F}$  verso il basso  $\rightarrow$

(reazione d'appoggio)  
Forze verso l'alto

$$\underbrace{\left(p + \frac{dp}{dz} dz\right) A}_{\vec{P}} + \underbrace{\gamma A dz}_{\vec{G}} = \underbrace{p A}_{\vec{P}} + \Rightarrow \frac{dp}{dz} + \gamma = 0 \xrightarrow{sz} z + \frac{p}{\gamma} = cost$$

$+\gamma A dz \leftrightarrow$  Somma  $\vec{F}$  d'inerzia dovute al movimento del sist

In tutti i punti della sezione la  $p$  è nulla  $\Downarrow$   
Ho dim  $p_B = 0$   
 $\Rightarrow$  Calcolo il carico piez.

$\frac{dp}{dz} = 0 \Rightarrow p = cost$

Applico Bernoulli

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{u_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{u_B^2}{2g} = 0$$

$\underbrace{z_A + \frac{p_A}{\gamma}}_{h_A} \quad \underbrace{z_B + \frac{p_B}{\gamma}}_{h_B}$

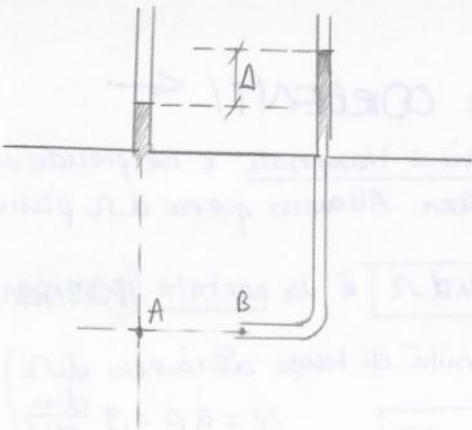
Conosco h in un punto lontano (A) dove le traiettorie non sono ancora deviate

$$u_A = \sqrt{2g(h_B - h_A)}$$

Velocità della corrente (velocità con cui va l'onda colto in contatto alla corrente)

Se collego un piet. in A il livello andrà in corrispondenza di  $h_A + \frac{u_A^2}{2g} \Rightarrow$  la diff. tra i due livelli permette di calcolare la velocità

Esempio 7 (5.18)  $\rightarrow$  Corrente uniforme in un tubo.



Piezometro nel punt A e in B oppure un manometro differenziale

- A  $\rightarrow$  punto la p è distribuita ancora idrostaticamente.
- B  $\rightarrow$  piet con forellino. Qui liquido in quiete. Il foro non impedisce la brusca deviazione delle traiettorie  $\Rightarrow$  annulla la velocità

$$u_A = \sqrt{2g\Delta}$$

Dove è valido il teorema di Bernoulli?

- moto permanente
- lungo la traiettoria

Quante traiettorie ho in un fluido?

$\infty$

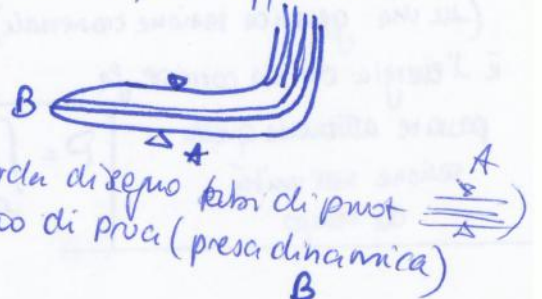
2 tubi sono incorporati in un unico apparecchio  $\rightarrow$  tubo di Pitot (modello di PRANDTL)

### TUBO DI PITOT

Per calcolare il flusso dovrei calcolare tutte le velocità.

Per qst il teorema non aiuta a capire cosa succede all'interno, dovrei applicarlo  $\infty$  volte.

La presa di pressione è realizzata nel punto A (guarda disegno tubo di pitot) con una fessura aperta, abbastanza lontana dal punto di presa (presa dinamica) B. Corpo cavo, dentro vi sono 2 tubicini.



- B  $\rightarrow$  presa dinamica
- A  $\rightarrow$  presa statica

→ Nel MP di vorticità di Bernoulli

$\rho, H$  sono costanti lungo la traiettoria  $\Rightarrow$  la potenza è costante lungo ogni traiettoria

$\Downarrow$

Complessivamente la potenza che fluisce attraverso la sezione della corrente è costante

(è costante lungo la corrente che considero)

Nel MOTO PERMANENTE di una CORRENTE di un

fluido perfetto incomp.

la potenza si mantiene COSTANTE

(stesso valore in tutte le sezioni trasversali)

ipotesi che:

$\Rightarrow$  La corrente sia gradualmente variata:  $\Leftarrow$

$\Downarrow$

Scrivo l'integrale:

$$P = \gamma \int_{\Omega} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) u d\Omega + \underbrace{\gamma \int_{\Omega} \frac{u^2}{2g} u d\Omega}_{P_{cin}}$$

Se la corrente è gradualmente variata  $\Rightarrow z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost} \Rightarrow P = \gamma \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) Q + P_{cin}$

$$Q = \int_{\Omega} u d\Omega$$

$$Q = \int_{\Omega} u d\Omega$$

$$P = \gamma \int_{\Omega} \frac{u^2}{2g} u d\Omega$$

( $P_{cin}$  = POTENZA CINETICA) dipende dalla DISTRIBUZIONE di VELOCITÀ nella sez. TRASVERSALE (in alcuni casi si ricava sperimentalmente)

COEFFICIENTE di CORIOLIS

(coeff. di raggruppamento delle potenze cinetiche)

$$\alpha = \frac{\gamma \int_{\Omega} \frac{u^2}{2g} u d\Omega}{\gamma \int_{\Omega} \frac{u^2}{2g} u d\Omega}$$

$\leftarrow$   $P_{cin}$  corrente effettiva della corrente

$\leftarrow$   $P_{cin}$  che avrebbe una corrente se tutti i punti avessero la stessa velocità (coincide con quella media)

( $U = u$  media)

$$(\alpha - 1) \sim 3(\beta - 1)$$

$\Downarrow$

Sono spartiti tutti i termini che riguardano le velocità delle singole particelle.

$$P = \gamma \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) Q + \alpha \gamma \frac{U^2}{2g} Q$$

$$P = \gamma \left( z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} \right) Q$$

$H$  (cost)

$\exists$  un carico totale della corrente ( $H$ ) costante per tutta la corrente

$$P = \gamma H Q$$

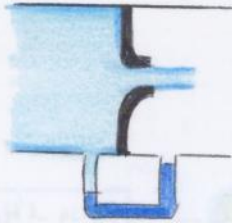
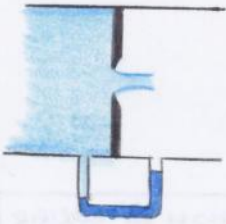
TEOREMA di BERNOULLI

esteso ad

una CORRENTE

Esempio 5.16

**DIAPRAMMI + SOCCAGLI**



DIAPRAMMA

SOCCAGLIO

Riduciamo al massimo l'imbuto a scapito della precisione. Ovviamente l'eq di continuità è sempre valida. Il principio alla base è come quello del venturimetro: costringo la corrente a passare per una sezione ristretta (OSTACOLATA) in guisa di provocare un incremento di altezza cinetica a spese della quota piezometrica.

↳ Il manometro diff. misura l'abbassamento della piez e da qui deduco la portata.

⚠ Importante ai fini pratici per gli scambi di energia tra corrente liquida e macchina

Data una corrente, la potenza di quota è data da:

**POTENZA DI UNA CORRENTE**

$$P = \gamma Q H$$

POTENZA

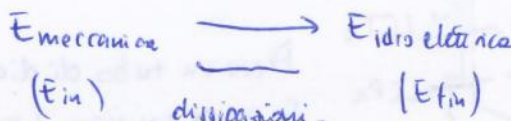
↓  
Energia per unità di tempo  
↓  
Produzione di energia idroelettrica

La corrente viene utilizzata per la produzione di energia  
Ad esempio tramite l'applicazione di turbine + alternatori ecc...

- MACCHINE MOTRICI (turbine) ricevono energia
- MACCHINE OPERATE (pompe) cedono energia

Pompa: sistema che compie il lavoro opposto. Riceve energia e tira su l'acqua.

Data una potenza ⇒ QUANTA ENERGIA RICAVO?



Il rapporto tra le due è il

**RENDIMENTO**

$$0 \leq \eta \leq 1$$

- fluido non perfetto
- dissipazioni di tipo elettrico
- " " " meccanico

$\gamma Q H$  (W) = MAX potenza/energia ricavabile da una corrente ( $\eta = 1$ )

$$P = \eta \gamma Q H$$

Se il moto è (uniforme)

In questo caso detta cui che  
**CADENTE**  
**PIEZOMETRICA**

$$J = -\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{p}{\rho} \right)$$

Come varia l'energia  
man mano che mi  
sposto

perdite di  
carico distribuite

LCT LCP  
(coincide la loro inclinazione)

In generale

$$H(s) = H_0 - \int_0^s J(s) ds$$

$H_0 =$  carico totale  
nella sezione  
di ascissa  $s=0$

Quanto vale l'energia  
per passare da un punto ad  
un altro

Se moto uniforme ( $J = \text{cost}$ )

$$H(s) = H_0 - Js$$

Data nella figura la condot  
di lunghezza  $L$ , la LCT si ab  
bassa di  $LJ$ . Si ricorresse il disti  
lo  $Y$  disponibile:

$$Y = LJ + \frac{v^2}{2g}$$

Quanto vale l'energia  
per passare da una sezione  
e l'altra

legame tra  $J$  e i termini "?"  
delle eq. globali e locali

Per l'energia: quella potenziale  
si trasforma solo in parte  
( $\frac{v^2}{2g}$ ) in cinetica. La restante  
viene dissipata. La  $v$  vale

$$v = \sqrt{2g(Y - LJ)}$$

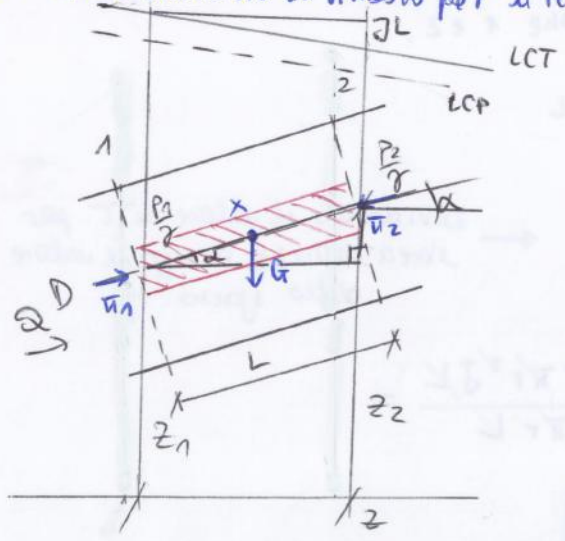
inferiore a quella teorica.  
 $\Rightarrow$  PERDITE  $\Leftarrow$   
di CARICO

legame tra  $J$  e la VISCOSITÀ

Provo ad applicare l'eq globale ad un caso  
facile.

NB: Prima stabilisco un simbolo per il termine "?":

$$\vec{T} = -\mu \int_{\Omega} \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} d\Omega = \text{Integrati di tutti gli sforzi tangenziali alle resistenze del fluido secondaria}$$



Considero un tubo che prendo 2 sezioni distanti "L"  
(moto uniforme)

Prendo un cilindro coassiale di diam:  $r$ .

Adesso visono sia le forze al contorno di natura tangenziale che normale.

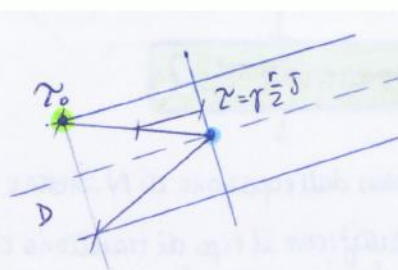
Proietto l'eq globale nella direzione del moto

• Al centro: velocità  $v$  ( $r=0$ )

• Sulla parete:  
 $r = \frac{D}{2} \Rightarrow \tau_0 = \gamma \frac{D}{4} J$

man mano che ci spostiamo verso il centro  $\Rightarrow$  ANDAMENTO LINEARE

Dipendenza lineare col raggio



$$\tau = \gamma \frac{r}{2} J$$

Andamento lineare

Possibile generalizzare a casi + diff: si

Otterrei lo stesso risultato

$$\tau_0 = \gamma \frac{D}{4} J$$

Ho trovato il legame tra J e la viscosità

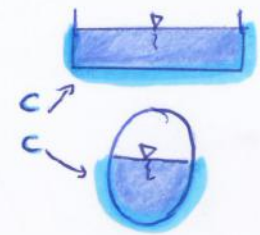
Riprendo la definizione di  $\tau$  prima delle semplificazioni:  $\tau = \frac{\gamma \pi r^2 J L}{2 \pi r L}$

Area (area verso cui passa la corrente)  
 $\Downarrow$   
 PORTATA

DISSIPAZIONI

perimetro (superficie la quale la corrente dissipa) "contorno bagnato"

no perimetro poiché queste definizioni valgono anche per i fiumi



Concettualmente:

$$R = \frac{Q}{C} \leftarrow \text{flusso} \leftarrow \text{attrito}$$

$$\tau = \gamma \frac{Q}{C} J$$

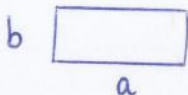
RAGGIO IDRAULICO  
 $R$  della sezione

$$\tau = \gamma R J$$

Con facendo posso trattare casi  $\neq$  paragonando solo i raggi idraulici

↳ Caso particolare: sezione circolare  $R = \frac{\pi D^2}{4 \pi D} = \frac{D}{4} \leftarrow$  metà del raggio

↳ Caso particolare: sezione rettang.



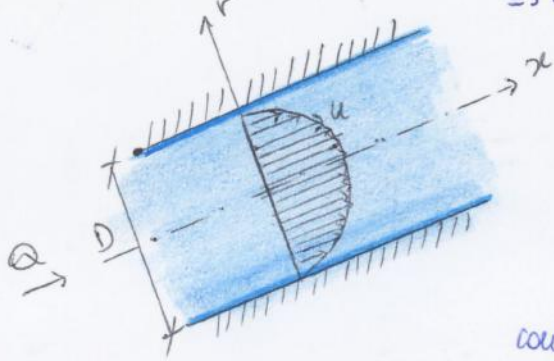
$$R = \frac{a \cdot b}{2(a+b)} \approx \frac{b}{2}$$

quando  $b \ll a \left( \frac{a-b}{2(a+b)} \right)$

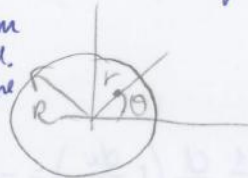


**MOTO LAMINARE**

→ movimento in cui sono nulle le componenti di rotazione  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$   
 ⇒ traiettorie effettive delle singole particelle fluide = traiettorie moto medio



Lavoro con le coord. cilindriche



$0 < r < R$

dove  $r$  = generica posizione di un punto rispetto al centro

$\vec{u} = (u(r), 0, 0)$

In questo caso particolare, considero solo la componente  $u$  della velocità ⇒  $v = w = 0$

2 condizioni al contorno:  $\begin{cases} u(r=0) = 0 \\ \frac{du}{dr} \Big|_{r=R} = 0 \end{cases}$

Considero l'eq di N-Stokes e la proietto nella direzione del moto ( $x$ )

NB:  $F$  = campo di gravità  $\rho(\vec{F} - \frac{D\vec{u}}{Dt}) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{u}$

$\frac{D\vec{u}}{Dt} ?$   
 $-\frac{\partial}{\partial x} \left( z + \frac{p}{\rho} \right) = -\frac{\mu \nabla^2 u}{\rho}$

$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$   
 (moto unif.)

variabili  
 $u$  non ha componente lungo  $x$ . Mi aspetto che la velocità cambi andando dai bordi vs il centro ⇒  $\mu \frac{\partial w}{\partial x} = 0$   
NON da sezione a sezione

$-\frac{\partial}{\partial x} \left( z + \frac{p}{\rho} \right) = -\frac{\mu \nabla^2 u}{\rho} = J$

$\nabla^2 u = -\frac{\rho J}{\mu}$

Utilizzo le coordinate cilindriche per riscrivere il Laplaciano

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$   
 Per una crf di raggio  $r$  la  $u$  non cambia lungo questa

$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = -\frac{\rho J}{\mu}$  Eq del 2° ordine ⇒ 2 condizioni al contorno

Riscrivo U come:

$$\begin{cases} \tau_0 = \gamma \frac{D}{4} J \\ U = \gamma \frac{D^2}{32\mu} J \end{cases} \Rightarrow \frac{\tau_0}{U} = \frac{8\mu}{D}$$

$\tau_0$  per MOTO LAMINARE UNIF. in CONDOTTO CIRCOLARE

v. media

$$\tau_0 = \frac{8\mu U}{D}$$

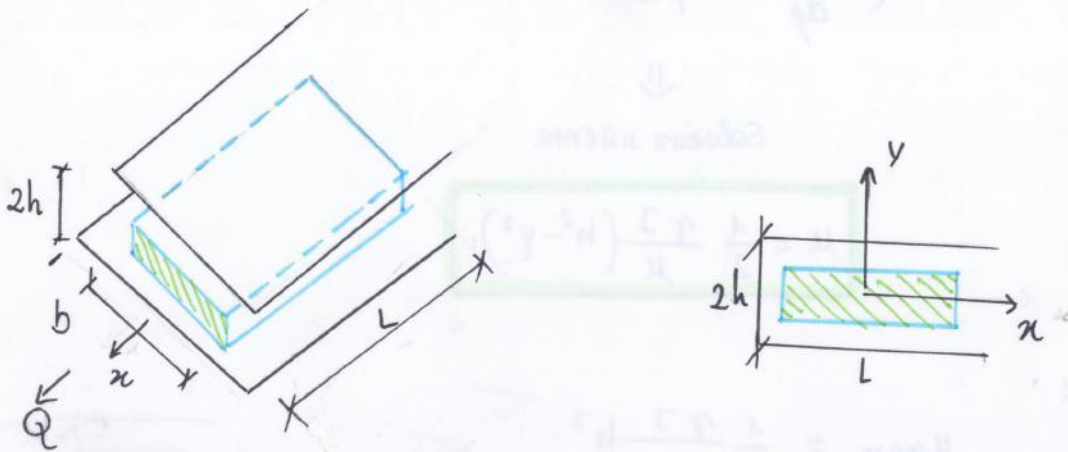
tipo di fluido  
geometria condotto

NB: non compare l'inclinazione del condotto  
 ↓  
 La perdita di energia non dipende dall'inclinazione del condotto.  
 Interesse solo all'inclinazione del p.c.i.r.

Questa soluzione è stata possibile solo perché il termine  $\frac{Du}{Dt}$  è pari a zero!

**MOTO LAMINARE (II)**

HP: (i) Fluido tra 2 lastre // poco distanti ma  $\infty$  estese (non interessa cosa succede ai bordi)



Considero un elemento compreso tra le 2 lastre.

comp. prima

$$\vec{u} = (u, v, w)$$

per Hp (i) lastre indefinite

$$u = u(x, y, z) = u(y)$$

sempre uguale lungo la traiettoria

OSSERVAZIONI

- Di mais è stato possibile arrivare ad una soluzione
- Osservo le due velocità medie: si assomigliano

$$\text{● } U = \frac{1}{32} \frac{\gamma J}{\mu} D^2 \quad R = \frac{D}{4}$$

$$\text{■ } U = \frac{1}{3} \frac{\gamma J}{\mu} h^2 \quad R = h$$

} Tramite R posso confrontarle

**VELOCITÀ MEDIA**  
nei condotti  
percorsi ad moto laminare

$$U = \text{numero } \frac{\gamma J R^2}{\mu}$$

⚠ Il raggio idraulico non identifica sé la geometria del problema

questo #  
dipende dalla geometria

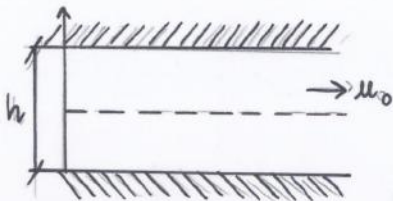
Questo # può essere ricavato analiticamente solo nel caso di sezione triangolare equilatera

- Sezione circolare: quella che presenta minor dissipazioni perché minore contorno bagnato
- Sezione rettangolari larghe: max dissipazioni perché max contorno bagnato

Taylor-Couette

27.10.16

**Flusso di Couette** = flusso laminare di un fluido tra 2 pareti piane //



$$\begin{cases} J = -\frac{\mu}{\gamma} \cdot \frac{d^2 u}{dy^2} \\ y=0 \quad u=0 \\ y=h \quad u=u_0 \end{cases} \rightarrow \text{condizioni al contorno}$$

$$u = -\frac{1}{2} \frac{\gamma J}{\mu} y^2 + y \left( \frac{u_0}{h} + \frac{1}{2} \frac{\gamma J h}{\mu} \right)$$

NB: se  $J=0 \Rightarrow$  non c'è una differenza di energia tra inizio e fine. Il moto avviene per puro trascinamento non viene immessa energia.

$$u = y \frac{u_0}{h}$$

$\Rightarrow$  il moto è laminare  $\Leftarrow$

- MOMENTO del 3° ordine : SKEWNESS
- MOMENTO del 4° ordine : KURTOSIS (cosa succede negli estremi equazione periano) le code

CONOSCERE STATISTICAMENTE una grandezza = CONOSCERNE una DISTRIBUZIONE di PROBABILITÀ o una SERIE di VALORI

TURBOLENZA  
STATISTICAMENTE  
STAZIONARIA

se la grandezza non dipende dal tempo  $\langle u(t) \rangle = f(t)$   
 $\langle u'(t) \rangle = f(t)$

MEDIA TEMPORALE

↳ nasce dalla difficoltà di misurare  $N$  realizzazioni  
⇒ + comodo misurare la grandezza una sola volta per un tempo sufficientemente lungo

$$\Rightarrow \bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

• SCARTO RISPETTO ALLA MEDIA

$$u'(t) = u(t) - \bar{u}$$

• SCARTO QUADRATICO MEDIO

$$\bar{u}'^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (u'(t))^2 dt$$

⇕  
MEDIA D'INSIEME = MEDIA TEMPORALE

Posso scambiare le due medie se ci sono le condizioni di ERGODICITÀ per definizione di moto ergodico ⇒ suppongo che il fluido si muova di moto turbolento ergodico

⇕  
CONDIZIONI di ERGODICITÀ

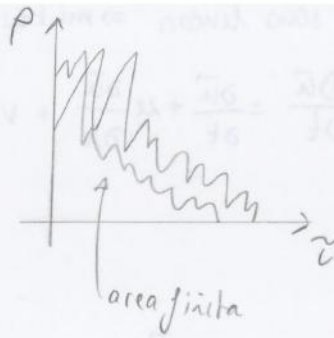
Misure = statisticamente stazionarie  
La scala integrale del segnale è finita, cioè il COEFF. di AUTOCORRELAZIONE è INTEGRABILE

## SCALA INTEGRALE FINITA

$\rho$  si avvicina allo 0 all'aumentare di  $\tau$

ovvero i punti ad una certa distanza  $\tau$  diventano correlati

$\Rightarrow$  il segnale diventa ergodico



Con le eq. di Navier-Stokes

$$\begin{cases} \rho \left( \vec{F} - \frac{D\vec{u}}{Dt} \right) = \text{grad } p - \mu \Delta \vec{u} \\ \text{div}(\vec{u}) = 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$   
quanto valgono le teorie integrali medie?

## DECOMPOSIZIONE di REYNOLDS

$$\begin{cases} u = \bar{u} + u' \\ v = \bar{v} + v' \\ w = \bar{w} + w' \end{cases}$$

Ognuno ha 2 componenti:  
MEDIA + TURBOLENZA

termini della velocità di agitazione turbolenta

Dimostrare che:

$$\bar{u}' = 0$$

In condizioni di ergodicità:

$$\langle u \rangle = \bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

Scompongo ciascuna grandezza in 2 componenti: una media e una componente di agitazione turbolenta.  
Se inserisco queste grandezze nell'eq di Navier-Stokes  $\Rightarrow$  posso trovare le eq del moto medio?

$$\begin{cases} \langle \rho \left( \vec{F} - \frac{D\vec{u}}{Dt} \right) \rangle = \langle \text{grad } p - \mu \Delta \vec{u} \rangle \\ \text{div}(\vec{u}) = 0 \end{cases}$$

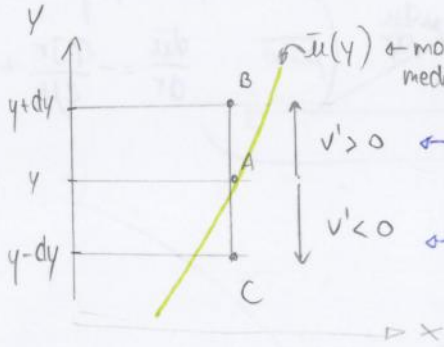
Facendo la media di queste eq, la componente di agitazione turbolenta spariscono  
 $\Downarrow$   
trovo l'equazione del moto medio

Eq di continuità:

$$0 = \langle \text{div}(\vec{u}) \rangle = \langle \text{div}(\bar{\vec{u}} + \vec{u}') \rangle = \text{div} \langle \bar{\vec{u}} + \vec{u}' \rangle = \text{div} (\langle \bar{\vec{u}} \rangle + \langle \vec{u}' \rangle) = \text{div} \bar{\vec{u}} = 0$$

per il moto medio:  $\text{div} \bar{\vec{u}} = 0$

Noi siamo nel caso **ANISOTROPO** perché?



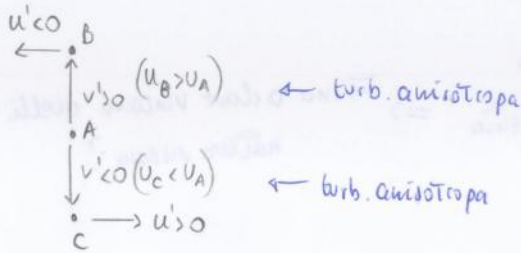
serivere ma  $v > 0$

$v' > 0$  ← la particella è spostata verso B

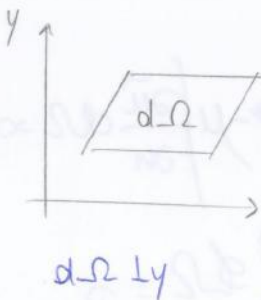
$v' < 0$  ← la particella è spostata verso C

La A simboleggia lungo  $u(y)$  e l'agitazione turbolenta la muove o verso B o verso C

⇒ A "spostata" in B ma avrà una  $u <$  alla  $u$  del piano B ⇒ il moto è rallentato e la particella rimane più indietro rispetto al moto ⇒  $u' < 0$



Citroviamo quindi in casi in cui **bisogna SEMPRE** conoscere il valore delle componenti di agitazione turbolenta (anisotropa) ⇒ per effetto di queste componenti la particella continua a muoversi nelle 3 direzioni dello spazio, spostandosi per ≠ traiettorie



$$s(x) = \frac{v(x)}{dt}$$

$\rho v' dt d\Omega$  → massa che attraversa  $d\Omega$  in  $dt$  per effetto di  $v'$

$\rho v' d\Omega$  → portata in massa per l'unità di tempo

$\rho v' u d\Omega = \rho v' (\bar{u} + u')$  → flusso di quantità di moto in direzione  $y$  per effetto della velocità  $u$

$$\overline{\rho v' (\bar{u} + u')} d\Omega = \overbrace{\rho \bar{u} v'}_{=0} d\Omega + \overbrace{\rho \overline{u' v'}}_{<0} d\Omega$$

flusso medio di quantità di moto (media di uno scarto) ← (x) ANISOTROPIA

⇒ **Le componenti di agitazione turbolenta creano degli ulteriori flussi di quantità di moto.** Il 2° termine è negat. Va in direzione opposta all'asse  $y$ : prendono parte dell'energia del moto medio e la portano via. ⇒ i flussi opposti al moto medio la rallentano ⇒ si appiattisce il profilo della velocità ⇒ la TURBOLENZA consuma + energia

NB: Per il tm della quantità di moto, se c'è un flusso di q.d.m ⇒ vi deve essere una variazione di forza applicate al sistema, cioè nascono sforzi  $\tau$

$$d\bar{F}_{xy} = -\rho \overline{u'v'} d\Omega$$

$$\bar{\tau}_x = \frac{d\bar{F}_{xy}}{d\Omega} = -\rho \overline{u'v'}$$

sforzi  $\tau_x$  che si oppongono al moto medio

$$\Rightarrow \bar{\tau}_z = -\mu \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \rho \overline{u'v'} \quad (\text{sforzi } \tau_x)$$

$$\bar{\sigma}_z = \rho \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \overline{u'^2} \quad (\text{sforzi normali})$$

==  $\tau_3$  ==

# ANALISI DIMENSIONALE

29.10.14

Fino ad adesso abbiamo parlato di grandezze e per ognuna di queste abbiamo indicato le unità di misura. Le grandezze fondamentali sono:  $L, M, T$ , tutte le altre sono grandezze derivate (es. Area  $= l^2 = m^2$ . Per avere l'area in ettari devo modificare  $l \rightarrow \lambda l$  con  $\lambda = 1/100 \Rightarrow A = \lambda^2 l^2$ )

⇓

**MISURARE** significa scegliere una grandezza fondamentale e indicare quante volte l'entità considerata è contenuta nella grandezza

Considero una generica grandezza derivata:  $[x] = [L^\alpha T^\beta M^\gamma]$

$$[Q_1] = [L^{\alpha_1} T^{\beta_1} M^{\gamma_1}]$$

$$[Q_2] = [L^{\alpha_2} T^{\beta_2} M^{\gamma_2}]$$

$$[Q_3] = [L^{\alpha_3} T^{\beta_3} M^{\gamma_3}]$$

In linea generica, ho bisogno di 3

grandezze ( $Q_1, Q_2, Q_3$ ) con le loro dimensioni e considerarle fondamentali

⇓  
Posso scrivere  $L, T, M$  in funzione di queste 3?

Modifico  $L, T, M \Rightarrow$

$$\begin{aligned} L &\rightarrow \lambda L \\ T &\rightarrow \tau T \\ M &\rightarrow \mu M \end{aligned} \Rightarrow \text{rischio di dimensioni del } Q_i$$

$$\begin{cases} q_1 = \lambda^{\alpha_1} \cdot \tau^{\beta_1} \cdot \mu^{\gamma_1} \\ q_2 = \lambda^{\alpha_2} \cdot \tau^{\beta_2} \cdot \mu^{\gamma_2} \\ q_3 = \lambda^{\alpha_3} \cdot \tau^{\beta_3} \cdot \mu^{\gamma_3} \end{cases}$$

Sistema lineare  
se trovo il valore di  $\alpha, \beta, \gamma$   
trovo il valore di  $q_i$

$$\rightarrow \begin{cases} \log q_1 = \alpha_1 \log \lambda + \beta_1 \log \tau + \gamma_1 \log \mu \\ \log q_2 = \alpha_2 \log \lambda + \beta_2 \log \tau + \gamma_2 \log \mu \\ \log q_3 = \alpha_3 \log \lambda + \beta_3 \log \tau + \gamma_3 \log \mu \end{cases}$$

Questo sistema quando ha soluzione?

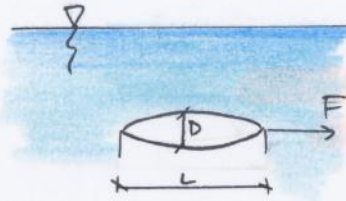
⇓  
Quando  $\det \neq 0$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Se con una fosse  $\Rightarrow$  le grandezze potrebbero non essere i ndi

Posso scegliere  $Q_i$  grandezze e sceglierle come fondamentali  $\Leftrightarrow$  il determinante della matrice  $\neq 0$

Considero uno specchio liquido (di acqua ferma)  
 All'interno vi è un corpo che voglio muovere con  
 una certa velocità  $u$ , trascinandolo con una  
 corda.



Lo applico il teorema  
 di Buckingham

gandessa  
 caratteristica  
 x la scabrezza

$$F = f(\rho, \mu, \delta, D, u) = \text{(diundi [L])}$$

dimensionalmente  
 indipendenti  $\leftarrow$  devono sparire dopo

$$\frac{F}{\rho^\alpha u^\beta D^\gamma} = f\left(\frac{\mu}{\rho^\alpha u^\beta D^\gamma}, \frac{L}{\rho^\alpha u^\beta D^\gamma}\right)$$

$$[\rho] = [L]^{-3} [T]^{-2} [M]^{-1}$$

$$[F] = [L]^{-1} [T]^{-2} [M]$$

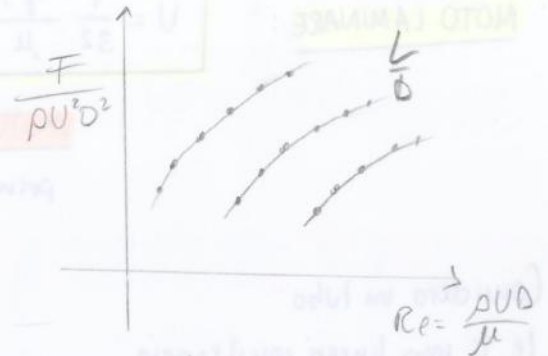
$$[u] = [L]^{-1} [T]^{-1} [M]^0$$

$$[D] = [L]^{-1} [T]^0 [M]^0$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ \gamma_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L: 1 = -3\alpha + 1\beta + 1\gamma \\ T: -2 = 0\alpha - 1\beta + 0\gamma \\ M: 1 = 1\alpha + 0\beta + 0\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

$$\frac{F}{\rho u^2 D^2} = f\left(\frac{\mu}{\rho u D}, \frac{L}{D}\right)$$



### MOTOCAMMINARE

grandezze meccaniche  
 di cui 3 indipendenti ( $D, u, \mu$ )

Ricorda  
 $(\tau_0 = \gamma R J)$

$$\tau_0 = f(D, u, \mu)$$

Diametro  $D$   
 velocità  $u$   
 viscosità dinamica  $\mu$

Essendo:

$$\tau_0 = k \cdot D^\alpha u^\beta \mu^\gamma \Rightarrow$$

$$\frac{\tau_0}{D^\alpha u^\beta \mu^\gamma} = k$$

$$\begin{matrix} \alpha = -1 \\ \beta = +1 \\ \gamma = +1 \end{matrix} \Rightarrow \frac{\tau_0}{D^{-1} u \mu} = k \Rightarrow \tau_0 = k \frac{\mu u}{D}$$

Assumiamo come incognita la resistenza unitaria della parete del condotto (o lo sforzo  $\tau_0$ ). Ci concentriamo sul MOTO LAMINARE. Escludiamo l'influenza della scabrezza e della dentata. Con ciò

$$\begin{cases} \tau_0 = [L]^x [T]^{-2} [M] \\ D = [L] [T]^0 [M]^0 \\ u = [L]^{-1} [T]^{-1} [M]^0 \\ \mu = [L]^{-1} [T]^{-1} [M] \end{cases} \begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = - \\ -\beta - \gamma = - \\ \gamma = 1 \end{cases}$$



$$\tau_0 = f(D, U, \rho)$$

Analisi dimensionale:

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \lambda_1 \quad (\lambda_1 = \text{costante})$$

$$\tau_0 = \lambda_1 \rho U^2$$

$\lambda$  = numero indice di resistenza  
 o RESISTENZA  
 $\lambda = 8 \lambda_1$

↳ Quanto vale? Tramite delle esperienze è possibile determinarne il valore. È sufficiente una sola esperienza con un solo tubo (in linea teorica)

In pratica:

È impossibile immaginare un moto con la sola componente turbolenta! Viserà sempre una componente laminare (a ricorso delle pareti)

Quando questo strato diventa sottilissimo / da non poter più essere considerato?

NB: Al posto di chiamare la costante  $\lambda_1$  uso  $\lambda$  ad essa proporzionale

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{\lambda}{8} \quad (\lambda = 8 \lambda_1)$$

Comodo per parlarne in relazione col moto laminare

$\lambda_1$  = Indice / Coeff. di resistenza idraulica  
 $\lambda$  = Indice di resistenza

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \rho U^2$$

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \rho U^2 = \gamma R J = \gamma \frac{D}{4} J$$

$$J = \frac{\lambda}{8} \frac{\rho U^2 4}{D} = \lambda \frac{U^2 / 2g}{D} \quad \left. \begin{array}{l} \text{termine cinetico} \\ \text{termine cinetico} \end{array} \right\}$$

perdita di energia di un tubo lungo quanto al diametro

$$\lambda = \frac{D \cdot J}{U^2 / 2g} \quad \left. \begin{array}{l} \text{termine cinetico} \\ \text{termine cinetico} \end{array} \right\}$$

Rapporto tra due energie  
 => resistenza in funzione dell'E<sub>cin</sub> del sist ←

$$J = \lambda \frac{U^2 / 2g}{D}$$

$$\Rightarrow \frac{U^2}{2g} = \lambda J D$$

Rapporto tra le  $\tau_0$

$$\frac{\tau_{0 \text{ TUBO}}}{\tau_{0 \text{ LAM}}} = \frac{\lambda}{8} \frac{\rho U^2 D}{\mu U} = \frac{\lambda}{64} \left( \frac{\rho U D}{\mu} \right)$$

↑  
costante

NUMERO di REYNOLDS

Rapporto tra le dissipazioni del moto turbolento e quello laminare.

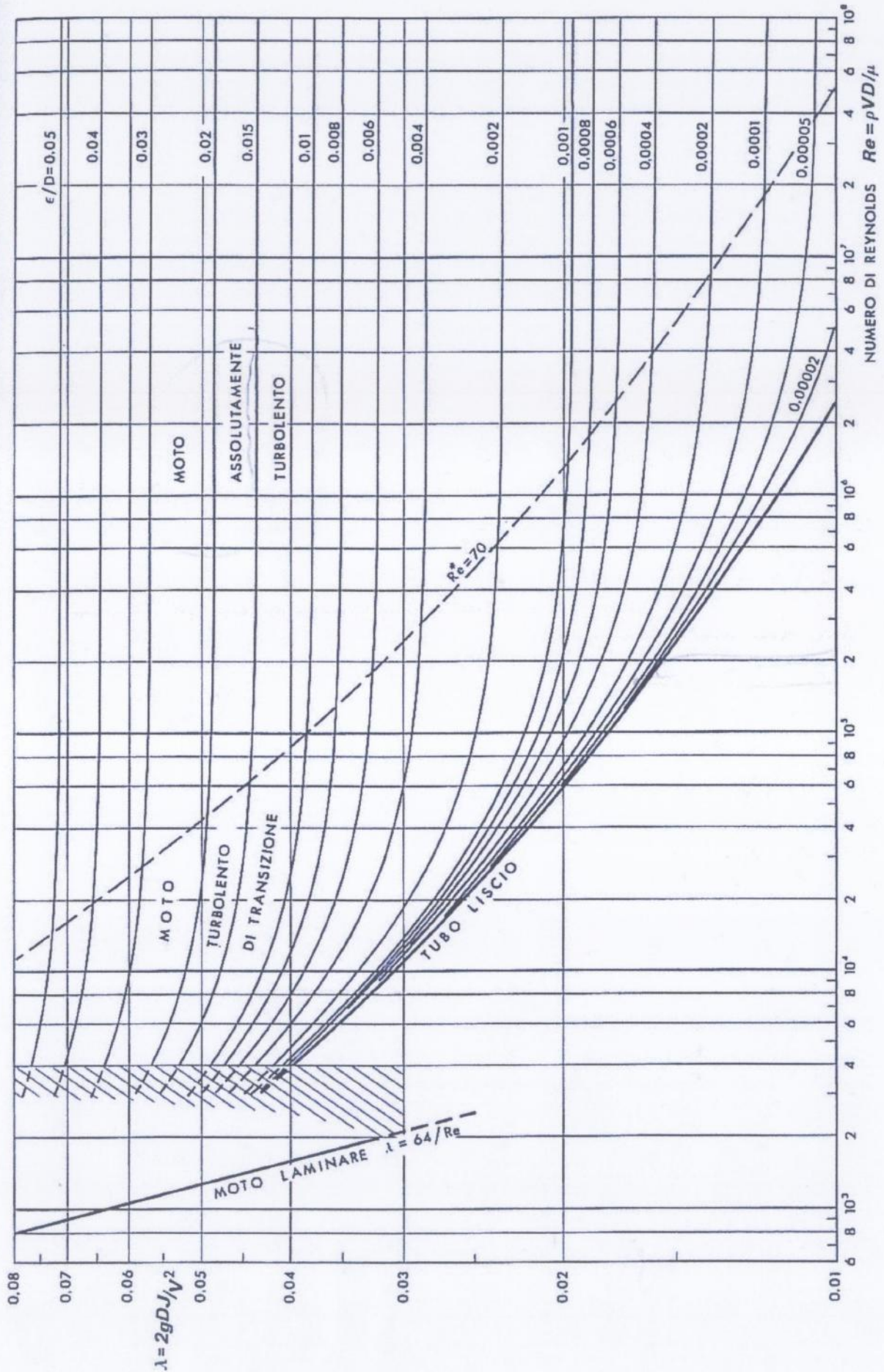


Fig. 7.11