



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1460A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Rubinetto

MATERIA: Gasdinamica, Prof.Iuso

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

GASDINAMICA

CAPITOLO 0 - INTRODUZIONE

0.1: LA PARTICELLA

- la Mole e la mole: definizioni:
 - la Mole, o Grande Mole o kilomole, contiene $6,023 \cdot 10^{26}$ molecole \Rightarrow Mol
 - la mole invece, contiene $6,023 \cdot 10^{23}$ molecole \Rightarrow mol

[in condizioni normali, 1 mol \rightarrow 22,4 l; 1 Mol \rightarrow 22,4 m³]

CONDIZIONI NORMALI:

$$T = 0^\circ\text{C}, \quad P = 760 \text{ mmHg}$$

● La Particella:

deve essere abbastanza grande per fare analisi statistiche

deve essere abbastanza piccola per poter considerare le proprietà puntiformi (P, p, T, μ , etc...)

un parametro che ci viene incontro per capire cosa voglio dire "grande" o "piccolo", è la DENSITÀ VOLUMETRICA ovvero il n° di molecole per unità di volume.

che si indica con n , e si calcola come

$$n = \frac{N_A}{V_{\text{standard}}} = \frac{6,023 \cdot 10^{26} \frac{\text{molecole}}{\text{Mole}}}{22,4 \frac{\text{m}^3}{\text{Mol}}} = 2,7 \cdot 10^{25} \frac{\text{molecole}}{\text{m}^3}$$

ora, in condizioni standard, è facile trovare un buon compromesso, ad esempio $1 \mu\text{m}^3$ piccolo abbastanza per considerare le ptz puntiformi e grande abbastanza da contenere $27.000.000$ molecole

ma ad esempio, in alta atmosfera, le molecole sono molto rarefatte, e ciò vuol dire che le analizzeremo in altro modo.

per inciso, una molecola ha l'ordine di grandezza di 1 \AA , cioè 10^{-10} m .

● 3l Libero cammino medio.

in GENERALE, il libero cammino medio (mean free path), si calcola

$$l = \frac{m \text{ molecola}}{\sigma \rho}$$

m: massa molecolare
 σ : sezione d'urto
 ρ : densità.

Se il gas è monocomponente, la formula si semplifica:

$$l = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$$

d: diametro molecola
 n : densità volumica.

l'aria ha un libero cammino medio di circa $6,35 \cdot 10^{-5} \text{ mm}$.

(volendo, un cubo di lato l, contiene ≈ 7000 molecole. quindi è abbastanza grande per fare statistiche.

0.2 AGITAZIONE TERMICA

possiamo scomporre la velocità di una particella come:

$$V = \bar{V} + V'$$

dove \bar{V} è la velocità MEDIA o MOTO BARICENTRALE

e V' è la velocità fluttuante

nota che \bar{V} è una MEDIA di TUTTE le PARTICELLE e non la media temporale del moto di una singola particella!

- questa classificazione può essere fatta per tutte le componenti:

$$u = \bar{u} + u' \quad v = \bar{v} + v' \quad w = \bar{w} + w'$$

- DEFINIZIONE: l'energia CINETICA TRASLAZIONALE GLOBALE come

$$E_t = \frac{1}{2} m (\bar{u}\bar{u} + \bar{v}\bar{v} + \bar{w}\bar{w}) \quad \text{- con le velocità TOTALI}$$

- DA NON CONFONDERE CON: ENERGIA CINETICA INTERNA MEDIA CAOTICA

$$E_{tc} = \frac{1}{2} m (\bar{u}'\bar{u}' + \bar{v}'\bar{v}' + \bar{w}'\bar{w}') \quad \text{- con le fluttuazioni}$$

- e con EN. CINETICA TRASLAZIONALE BARICENTRALE

$$E_{tb} = \frac{1}{2} m (\bar{u}\bar{u} + \bar{v}\bar{v} + \bar{w}\bar{w}) \quad \text{- con le velocità medie}$$

RAPIDI CALCOLI 1

legame fra EN CINETICA TRASL. GLOBALE, INTERNA MEDIA CAOTICA e BARICENTRALE

- ① Sapendo che devo mediare il prodotto $\bar{u}\bar{u}$, proviamo a calcolarlo:

$$\bar{u}\bar{u} = (\bar{u} + u')(\bar{u} + u') = \bar{u}\bar{u} + 2\bar{u}u' + u'u'$$

però dato che \bar{u} è considerato una costante, e che $\bar{u}' = 0$, rimane che:

$$\bar{u}\bar{u} = \bar{u}\bar{u} + \overline{u'u'}$$

- ② Sostituendo alla definizione di E_t ,

$$E_t = \frac{1}{2} m (\bar{u}\bar{u} + \overline{u'u'} + \bar{v}\bar{v} + \overline{v'v'} + \bar{w}\bar{w} + \overline{w'w'})$$

- ③ e separando i termini medi da quelli fluttuanti:

$$E_t = \frac{1}{2} m (\bar{u}\bar{u} + \bar{v}\bar{v} + \bar{w}\bar{w}) + \frac{1}{2} m (\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'})$$

\Downarrow

$$E_t = E_{tb} + E_{tc}$$

0.4 GRANDEZZE TERMODINAMICHE

- Abbiamo definito l'ENERGIA INTERNA MOLARE come

$$E = \frac{L}{2} RT$$

- Definiamo ora l'ENTALPIA MOLARE come

$$H_{mol} = E + RT,$$

ovvero

$$H_{mol} = \frac{L+2}{2} RT$$

Ora, difficilmente ci metteremo a contare quante molecole ci sono o stanno parlando, preferiamo invece considerare le QUANTITÀ SPECIFICHE, ovvero per UNITÀ DI MASSA:

→ ENERGIA INTERNA:

$$e = \frac{E}{M} = \frac{L}{2} \frac{R}{M} T$$

→ ENTALPIA

$$h = \frac{H_{mol}}{M} = \frac{L+2}{2} \frac{R}{M} T$$

- Calore Specifico a Volume costante

ora, dato che l'unico parametro "libero" che ho è la temperatura, dalla Termodinamica sappiamo che:

$$C_v = \left(\frac{dq}{dT} \right)_{V=const} = \frac{dE}{dT} = \frac{L}{2} \frac{R}{M}$$

- Calore Specifico a Pressione costante

$$C_p = \left(\frac{dq}{dT} \right)_{P=const} = \frac{dh}{dT} = \frac{L+2}{2} \frac{R}{M}$$

- γ

γ è definito come $\frac{C_p}{C_v}$

ALCUNE RELAZIONI fra le GRANDEZZE:

$$C_v = \frac{1}{\gamma-1} \frac{R}{M}$$

$$C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{M}$$

$$\gamma = \frac{L+2}{L}$$

0.5 COMPRESSIBILITÀ

la compressibilità β , viene definito così:

$$\beta = - \frac{dV}{V} \cdot \frac{1}{dP}$$

ed indica la capacità che ha il gas di comprimersi ovvero:

APPLICANDO una pressione dP , quanto varia (in %, ecco perché dV/V) il Volume?

β piccolo \Rightarrow RIGIDO

- Ora, è più comodo ragionare con la densità: moltiplicando e dividendo per $m \rightarrow$

$$\beta = \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{dP}$$

RAPIDI CALCOLI 2

LEGAME fra MACH e DENSITÀ:

- per definizione, la velocità del suono è

$$a = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}$$

- mentre, una variazione di pressione dP provoca una variazione di velocità dV con questa legge, lungo una linea di corrente:

$$dP = -\rho V dV \quad (\text{cioè, se da un lato ho -pressione, la velocità aumenta})$$

- dividendo queste a sx e dx per $d\rho$:

$$\frac{dP}{d\rho} = -\frac{\rho}{d\rho} V dV$$

che, vuol dire: $a^2 = -\frac{\rho}{d\rho} V dV$

- ora volendo dividere a sx e dx per V^2 , ottengo:

$$\frac{1}{M^2} = -\frac{\rho}{d\rho} \frac{dV}{V}$$

- e, sistemando l'equazione, isolando la variazione di densità %:

$$\left[\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dV}{V} \right]$$

Come si può leggere questa formula?

proviamo, ad esempio, a raddoppiare la velocità:

$$dV = 2V - V \rightarrow = V$$

la formula rimane:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2$$

A MACH = 0,1; la densità aumenta dell'1%

a Mach 0,3: \rightarrow 9% - vuol dire che, convenzionalmente, si fissa il limite del comprimibile a $M=0,3$.

etc...

• il NUMERO di REYNOLDS:

$$Re = \frac{\rho v l}{\mu} \quad \text{confronta le } \frac{\text{Forze Inerziali}}{\text{Forze Viscose}}$$

Re BASSI: vince la VISCOSITÀ

Re ALTI: vincono le FORZE INERZIALI

- legame $Re \sim M \sim Kn$

• facciamo il rapporto

$$\frac{M}{Re} = \frac{V/a}{\frac{\rho v l}{\mu}} = \frac{\mu}{\rho a l}$$

ora, sappiamo che $M = \rho v a t$

quindi

$$\frac{M}{Re} = \frac{\rho v a t}{\rho a l} = \frac{v t}{l}$$

ρ va via, ed $\frac{l}{L}$ è il m° di Knudsen:

$$\frac{M}{Re} = \frac{v t}{l} \cdot Kn$$

$$\text{ma: } v t = \sqrt{\frac{3 R T}{\mu}} \quad \text{e } a = \sqrt{\frac{R T}{\mu}}$$

$$\text{quindi: } \frac{M}{Re} = \sqrt{\frac{3}{8}} Kn$$

0.6.2 Conducibilità Termica λ

• Fenomenologia legata alla conducibilità:

abbiamo visto come l'energia interna sia data da diversi effetti: traslazionale, rotazionale, vibrazionale, etc...

noi evidenziamo solo gli effetti della traslazionale:

$$e = e_t + e_i$$

e ne prendiamo solo la parte coattica:

$$e' = e'_t + e'_i$$

$$\text{noi però abbiamo più olisto come } e'_t = \frac{\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'}}{2}$$

questo, è una ENERGIA CINETICA per UNITÀ di massa. moltiplicando per ρ , ottengo quella per unità di volume, utile poi per valutare le portate!

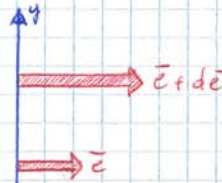
$$\rho e'_t = \rho \left(\frac{\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'}}{2} \right) + \rho e_i$$

il q_x è la quantità di energia per unità di superficie lungo la direzione x, quindi

- moltiplico per u' < indica la direzione del flusso
- medio < avere il calcolo su + particelle:

$$q_x = \overline{\rho e'_t u'} = \left[\rho \left(\frac{\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'}}{2} \right) + \rho e_i \right] u'$$

• Richiamando la legge di Fourier, riuscirei a ricondurmi ad un λ per farlo, analizziamo un caso così:



e facciamo un bilancio dei flussi di energia, che equivorra a stabilire q_y :

$$q_y = -m(\bar{e} + d\bar{e}) \cdot n \cdot v_{at} + m\bar{e} n v_{at} = -m n d\bar{e} v_{at}$$

• moltiplico e divido de per dy , e ricordo che $dy \approx l$ (libro cammino medio)

$$d\bar{e} = \frac{d\bar{e}}{dy} \cdot l$$

• ora, dalla definizione di energia interna, so che

$$de = C_v dT$$

quindi:

$$q_y = -\lambda \frac{dT}{dy} = -m n C_v \frac{dT}{dy} l v_{at}$$

dT/dy va via, $m \cdot n = \rho$ quindi

$$\lambda = \rho C_v l v_{at}$$

• ma ricorda che $\rho l v_{at} = \mu$!

quindi:

$$\lambda = C_v \mu$$

E' IMPORTANTISSIMO sapere che LA CONDUCEBILITÀ TERMICA e LA VISCOSITÀ sono STRETTAMENTE LEGATE!

Ciò non sorprende, dato che hanno origine dallo stesso fenomeno!

dato che nei gas normalmente è nato il C_p :

BIATOMICI:

$$\Rightarrow \lambda = 1,45 \mu C_p$$

• il NUMERO DI PRANDTL

$$Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} \quad \text{confronta } \frac{\text{Quantità di moto Coattica}}{\text{Energia coattica}}$$

ovvero: Conduce meglio la QUANTITÀ di MOTO (Pr ALTO) o il Calore (Pr BASSO?)

• FORMULA di EUCKEN:

$$Pr = \frac{2L+4}{2L+9} \approx \frac{4,8}{98,5}$$

RAPIDI CALCOLI 3

CALCOLO della VARIAZIONE di ENTROPIA. [Cv e v]

- ipotesi di gas in un campo senza viscosità. il lavoro sarà quello "classico":

$$\delta L = -p \delta V$$

- Prendiamo il I principio e sostituiamoci dentro il δL trovato

$$de = \delta q + \delta L = \delta q - p \delta V$$

- Ricaviamo il δq dal II principio e sostituiamolo nel primo: (ipotesi di transf. reversibile: $\delta S_{int} = 0$)

$$dS = \frac{\delta q}{T} \Rightarrow \delta q = T dS$$

$$\Rightarrow de = \delta q - p \delta V = T dS - p \delta V$$

- il nostro "target" è dS : isoliamolo!

$$dS = \frac{de}{T} + \frac{p \delta V}{T}$$

- Sostituiamo a $de = C_v dT$ per avere la variabile x l'eq. differenziale.

inoltre, avendo dV sopra, sarebbe utile averlo anche sotto: usiamo l'eq. di stato

$$pV = \frac{R}{M} T \Rightarrow \frac{p}{T} = \frac{R}{M V}$$

quindi

$$dS = C_v \frac{dT}{T} + \frac{R}{M} \frac{dV}{V}$$

- Integrando:

$$S_2 - S_1 = C_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \frac{R}{M} \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \quad \text{MODO 1}$$

RAPIDI CALCOLI 3 bis

calcolo variazione di entropia [Cp e p]

- prendiamo la scrittura del I+II principio che include l'entalpia:

$$T dS = dh - v dp$$

quella con il lavoro tecnico, in modo da poter poi integrare dp !

- ora: DIVIDO TUTTO per T: così isolo dS :

$$dS = \frac{dh}{T} - \frac{v}{T} dp$$

- con la DEF di entalpia e con l'eq. di stato, trovate variabili da integrare:

$$dh = C_p dT \quad pV = \frac{R}{M} T \Rightarrow \frac{v}{T} = \frac{R}{M p}$$

$$\Rightarrow dS = C_p \frac{dT}{T} - \frac{R}{M p} dp$$

- e quindi:

$$S_2 - S_1 = C_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{R}{M} \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \quad \text{MODO 2}$$

- imponendo a δ la variazione di entropia, si trovano facilmente i legami dell'isentrope:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

- DATO CHE posso usare le DEFINIZIONI di GRANDEZZE TOTALI a mio piacimento, posso pure dire che:

$$\Delta s_2 - \Delta s_1 = \Delta s_2 - \Delta s_1 = C_p \ln\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right) - \frac{R}{M} \ln\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)$$

CAPITOLO 1: EQUAZIONI

- TERMINOLOGIA e TIPI di EQUAZIONI:

- FORMA INTEGRALE**: + usiamo un VOLUME FINITO di CONTROLLO + utile per valutare le AZIONI GLOBALI su questo volume!
+ Valuteremo il RATE of CHANGE: ovvero come CAMBIANO le CONDIZIONI dentro il volume: poi lo vediamo meglio...
- FORMA DIFFERENZIALE**: + usiamo un VOLUME DIFFERENZIALE $dv = dx dy dz$ + si usa per i DETTAGLI del CAMPO
- FORMA EULERIANA**: + preso un volume fisso cosa accade dentro? + dette anche:
• EQUAZIONI in FORMA CONSERVATIVA
• EQUAZIONI di DIVERGENZA
- FORMA LAGRANGIANA**: + SEGUIAMO un Volume IMPERMEABILE in tutto il suo moto e nella sua evoluzione + la caratteristica di queste equazioni è la DERIVATA TOTALE, così fatta:
$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla(\phi)$$

 σ , in modo + intellegibile:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

per ricordarlo:

EULERO STA SUL PONTE, LAGRANGE SULLA BARCA



- CONVENZIONI e FLUSSI

il FLUSSO USCENTE è POSITIVO! (x ricordarlo, basta pensare a folla e ai puppi)

ed in genere, il flusso di una grandezza (scure o VETTORIALE) si calcola come

$$P = \phi \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n})$$

per la convenzione scelta prima, \vec{n} è diretto verso l'esterno!

1.2 PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI UTILI

In pratica ci occorre conoscere il **TEOREMA DI GAUSS**

• Dobbiamo parlare di **SUPERFICIE** ⇒ **VOLUME**

CASO 1: GRANDEZZA VETTORIALE:

$$\int_S (\vec{A} \cdot \vec{n}) dS = \int_{Vol} \nabla \cdot \vec{A} dVol$$

il **FLUSSO** diventa **DIVERGENZA!** il - di cancellati è sparito perché in Analisi II i matematici segnano \vec{n} come **ENTRANTE** i fluidodinamici come **uscente!**

CASO 2 SCALARE

$$\int_S (\phi \vec{n}) dS = \int_{Vol} (\nabla \phi) dVol$$

lo scalare diventa **GRADIENTE**

• **RIPASSO** delle **NOTAZIONI**:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{è uno SCALARE}$$

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k} \quad \text{è un VETTORE}$$

1.3 EQUAZIONI EULERIANE e LAGRANGIANE DIFFERENZIALI

• **EQUAZIONE** di **MASSA** e **CONTINUITÀ**.

DIMOSTRAZIONE 1

equazione di **MASSA**: **Integrale** → **Diff (Euleriana e Lagr.)**

① Partiamo dall'equazione **Eu. int.**

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{Vol} \rho dVol = - \int_S \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

② Applichiamo **Gauss** all'integrale di superficie:
FLUSSO → **DIVERGENZA**.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{Vol} \rho dVol = - \int_{Vol} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dVol$$

③ Porto tutto al primo membro e sfrutto la **linearità** dell'integrale: (= **PRISTINO DENSO**)

$$\int_{Vol} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right] dVol = 0$$

④ ho ottenuto la **FORMA DIFFERENZIALE EULERIANA**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

⑤ Sviluppo la **divergenza**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho z)}{\partial z} = 0$$

⑥ calcolo le derivate; e riconosco la **derivata totale!**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} &= -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \vec{v} \cdot (\nabla \rho) = -\rho (\nabla \cdot \vec{v}) \end{aligned}$$

⑦ **ECCO** la **FORMA DIFFERENZIALE LAGRANGIANA**

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{v}$$

• **EQUAZIONE** di **QUANTITÀ** di **MOTO**:

DIMOSTRAZIONE 2

equazione **Q.d.M. Int** → **Diff Eu** → **Diff Lagr.**

① Partiamo dalla "solita" equazione **Integrale Euleriana**:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{Vol} \rho \vec{v} dVol = - \int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS - \int_S \rho \vec{n} dS + \int_{Vol} \rho \vec{f} dVol$$

② Il calcolo di **GAUSS** è più complicato, specialmente per il 1° termine del secondo membro.

MOTIVO PER CUI **ANNAZZIAMO** UNA **COMPONENTE** per **VOLTA**:

$$\rho \vec{v} = \rho u \vec{i} + \rho v \vec{j} + \rho w \vec{k}$$

quindi: **lungo x**:

$$- \int_S \rho u (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \Rightarrow - \int_{Vol} \nabla \cdot (\rho u \vec{v}) dVol$$

e, analogamente:

$$y) - \int_S \rho v (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \int_{Vol} \nabla \cdot (\rho v \vec{v}) dVol$$

$$z) - \int_S \rho w (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \int_{Vol} \nabla \cdot (\rho w \vec{v}) dVol$$

③ Un altro membro che verrà proiettato lungo le direzioni, sarà il secondo:

$$- \int_S \rho \vec{n} dS = - \int_{Vol} \nabla \rho dVol$$

($\nabla \rho$ scalare → **gradiente**)

questo **gradiente** avrà **3 componenti**:

$$x) \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad y) \frac{\partial \rho}{\partial y} \quad z) \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

④ **ABBIAMO** ORA **SOLI** integrali di volume, ma **lungo 3 direzioni**:

$$x) \frac{\partial}{\partial t} \int_{Vol} \rho u dVol = \int_{Vol} \left[-\nabla \cdot (\rho u \vec{v}) - \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho f_x \right] dVol$$

$$y) \frac{\partial}{\partial t} \int_{Vol} \rho v dVol = \int_{Vol} \left[-\nabla \cdot (\rho v \vec{v}) - \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho f_y \right] dVol$$

$$z) \frac{\partial}{\partial t} \int_{Vol} \rho w dVol = \int_{Vol} \left[-\nabla \cdot (\rho w \vec{v}) - \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho f_z \right] dVol$$

⑤ Portando e **I** membro e uguagliando a 0, ottengo la **FORMA DIFFERENZIALE EULERIANA**

$$x) \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho f_x = 0$$

$$y) \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \nabla \cdot (\rho v \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial y} - \rho f_y = 0$$

$$z) \frac{\partial}{\partial t} (\rho w) + \nabla \cdot (\rho w \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial z} - \rho f_z = 0$$

1.5 LA VELOCITÀ LIMITE

• l'equazione dell'energia, rielaborata in modo da tenere l'ENTALPIA TOTALE in evidenza, era questa:

$$g \frac{DH}{Dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + g \dot{q} + g \left(\vec{V} \cdot \vec{V} \right) + Visc + Cond.$$

• in un **flusso ADIABATICO**, trascurando le forze di campo, ottengo che:

$$g \frac{DH}{Dt} = \frac{\partial P}{\partial t}$$

nota la Derivata PARZIALE rispetto al tempo. Vuol dire che una particella CAMBIA l'ENTALPIA TOTALE \Leftrightarrow Campo NON STABILE-NAEIO.

ma se la pressione è invariante nel tempo:

CAMPO OMOENTALPICO: $H = \text{Cost.}$ nel tempo e nello spazio!

la chiamerò H_0 [ENTALPIA DI ARRESTO]

[da qui tutte le definizioni di grandezze totali, in primis la T_0]

• VELOCITÀ LIMITE

Vediamo ora, in un campo **ADIABATICO** ed **ISOENTROPICO**, qual è la **VELOCITÀ MASSIMA** che il gas può raggiungere.

DIMOSTRAZIONE 4

VELOCITÀ LIMITE

① Prendiamo l'equazione dell'entalpia Totale, e sostituiamo $h = c_p T$ e $H = c_p T_0$

$$h + \frac{V^2}{2} = H \Rightarrow c_p T + \frac{V^2}{2} = c_p T_0$$

② moltiplico entrambi ora per $\frac{\gamma R}{M}$ la temperatura approssimo la velocità del suono a^2 ed a_0^2 !

$$c_p T \frac{\gamma R}{M} + \frac{V^2}{2} = c_p T_0 \frac{\gamma R}{M}$$

$$\Rightarrow \frac{c_p a^2}{\frac{\gamma R}{M}} + \frac{V^2}{2} = \frac{c_p a_0^2}{\frac{\gamma R}{M}}$$

③ ora, sapendo che $c_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{M}$

ricaviamo che $\frac{c_p}{\frac{\gamma R}{M}} = \frac{1}{\gamma-1}$, liberandoci di quel pesante coefficiente:

④ l'equazione, sostituendo, rimane:

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma-1}$$

⑤ Da qui si capisce che, se la temperatura, e course dell'espansione, tendesse a 0, ho la **VELOCITÀ LIMITE**: un massimo che non posso superare!

$$\frac{V_c^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma-1}$$

TUTTA L'ENERGIA CINETICA è stata usata in V .
 \Rightarrow Non ci sono fluttuazioni critiche!

⑥ N.B: in queste condizioni, $M \rightarrow \infty$, ecco perché:

$$T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)$$

T_0 è costante ed è finito

$T \rightarrow 0$

Senza che $M \rightarrow \infty$, perché x avere un numero moltiplicando uno zero passo solo fare $0 \cdot \infty$

6

1.6 LE GRANDEZZE CRITICHE

DEFINIZIONE

Le **CONDIZIONI CRITICHE** sono quelle che ci sarebbero in UN DATO PUNTO se il flusso RAGGIUNGESSE ISOENTROPICAMENTE ed ADIABATICAMENTE il $M=1$!

e in pratica:

ho una particella che si muove con un dato M, V, p, T ...

- Rallentando o accelerando questa particella, RAGGIUNGERÒ $M=1$. il flusso si scalderà o raffredderà!

\Rightarrow chiamo questa temperatura T^*

da qui, definirò tutte le grandezze in primis

$$a^* = \sqrt{\frac{\gamma R T^*}{M}}$$

poi, con questa nuova velocità del suono, definirò pure M^*

DIMOSTRAZIONE 5

Legame fra a_0 ed a^*

① prendiamo il legame tra a^2, V^2 ed a_0^2

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma-1}$$

② Dato che stiamo volutando il corpo critico, stiamo dicendo che raggiungiamo $M^*=1$

il che vuol dire:

$$a = a^* \quad V = a^*$$

cioè quel "caso intermedio" fra $a=a_0$ e $V=V_{lim}$ per il quale $M=M^*=1$

③ Quindi:

$$\frac{a^{*2}}{\gamma-1} + \frac{a^{*2}}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma-1}$$

④ risolvendo, voglio trovare $\frac{a^*}{a_0}$

$$\frac{2a^{*2} + (\gamma-1)a^{*2}}{2(\gamma-1)} = \frac{a_0^2}{\gamma-1} \Rightarrow \frac{a^{*2}(\gamma+1)}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \frac{a^*}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$$

• **Considerazioni Su Crocco:**

$$T \nabla s = \nabla H + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$

- Per semplicità considero un campo **Stazionario**
- Si capisce meglio se isoliamo $\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$ questo termine, se nullo, indica un campo **irrotazionale**.

$$\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla H - T \nabla s$$

① Con GRADIENTI di ENTALPIA ed ENTROPIA che NON SI BILANCIANO, fatto l'IPOTESI di IRROTAZIONALITÀ

② Ipotesizzando un CAMPO IRROTAZIONALE, ho che $\nabla H = T \nabla s$ che altro non è che pura termodinamica!

• **Casi di FLUSSI NON STAZIONARI**

③ Se ho un CAMPO ORTOENTROPICO ed IRROTAZIONALE, ho che $\nabla H = 0$, $\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = 0$

$$T \nabla s = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

cioè, l'unica ragione per cui il campo di moto cambierebbe nel tempo, è uno SAVIUSRO ENTROPICO ($\nabla s \neq 0$)

④ ORTOENTROPICO ed ORTOENTROPICO $\nabla H = 0$ $\nabla s = 0$

$$\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} : \text{una Rotazionalità può essere causata da variazioni temporali nel campo!}$$

1.8 DERIVAZIONE DI EULERO - BERNOULLI

DIMOSTRAZIONE 8

Eulero - Bernoulli.

① Prendiamo l'equazione della q.d.m, trascurando le forze di volume e la viscosità.

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p$$

② Considerando un caso **Stazionario**, rimane che la Derivata totale è:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot (\nabla \vec{v})$$

③ e quindi l'eq. diventa:

$$\rho \vec{v} \cdot (\nabla \vec{v}) = -\nabla p$$

④ ora, ricordando le proprietà differenziali, ho che

$$\vec{v} \cdot (\nabla \vec{v}) = -\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

⑤ Considero il campo **IRROTAZIONALE** e **SOSTITUISCO**:

$$\rho \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\nabla p$$

⑥ ora sostituisco ai gradienti ∇ gli integrali \int , ottenendo, quindi, la mia equazione

$$-\rho d \left(\frac{v^2}{2} \right) = dp$$

↓ ↓ (se $\rho = \text{cost.}$)

$$\rho \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) = P_2 - P_1 \quad \text{c.v.d.}$$

N.B.

- se il campo fosse **ROTAZIONALE**, E-B varrebbe comunque e SOLO sulla LINEA DI CORRENTE.
- Nel caso di moto compressibile, conviene usare i MACH e le definizioni dell'ISENTROPICITÀ!

1.9 POTENZIALE DELLA VELOCITÀ

ASSUNZIONI

- fluido **INVISCIDO**
- fluido **IRROTAZIONALE**

⇒ ci si permetterà di **DEFINIRE** ϕ , potenziale della velocità!

$$\vec{v} = \nabla \phi$$

- fluido **STAZIONARIO**

⇒ toglieremo di mezzo tutti i $\frac{\partial}{\partial t}$

- fluido **ISENTROPICO** [adiab + reversibile]

⇒ ci permetterà di usare le **proprietà totali** senza molte rogne; in particolare Q_0 !!

OBIETTIVO: trovare delle equazioni SOLO in funzione di ϕ , in modo da poter dire:

"Trovato ϕ , so tutto del campo"

DIMOSTRAZIONE 9

EQUAZIONE POTENZIALE DELLA VELOCITÀ.

① Presentiamo la notazione usata:

$$\vec{v} = \nabla \phi = \phi_x \vec{i} + \phi_y \vec{j} + \phi_z \vec{k}$$

$$\text{dove } \phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\text{e } \phi_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}; \phi_{xy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \text{ etc...}$$

② Riscriviamo l'eq. della continuità **EULERIANA DIFFERENZIALE** con **FLUSSO STAZIONARIO**.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial(\rho \phi_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \phi_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \phi_z)}{\partial z} = 0$$

applicando la derivata composta:

$$\rho (\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz}) + \phi_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \phi_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \phi_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

rimane che per ora non sappiamo trattare tenendolo da parte!

la classica "struttura" che useremo per fare gli equilibri, zero questa:

un condotto rettangolare, quindi $A_1 = A_2$

Per tutte le future discussioni ipotizzeremo **FLUSSI STAZIONARI** quindi tutti i termini $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

quindi, sostituendo:

$$-A_1 u_1^2 \rho_1 + A_2 u_2^2 \rho_2 = -(-A_1 p_1 + A_2 p_2)$$

Ava via, e resta:

$$A u_1^2 \rho_1 + p_1 = u_2^2 \rho_2 + p_2$$

e quindi

$$p + u^2 \rho = \text{cost.}$$

2.1 EQUAZIONI FLUSSO 1D GENERICHE

• MASSA:

l'equazione integrale era:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{el}} \rho dV = - \int_S \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

ora, ipotizzando un caso stazionario, e suddividendo S in $A_1 + A_2 + A_3$

$$0 = \int_{A_1} \rho (\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1) + \int_{A_2} \rho (\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2) + \int_{A_3} \rho (\text{flussi 1D})$$

ora, $v_1 = u_1$ e $v_2 = u_2$ quindi:

$$A_1 \rho_1 u_1 - A_2 \rho_2 u_2 = 0$$

ora $A_1 = A_2$ quindi:

$$\rho \cdot u = \text{cost.}$$

• QUANTITÀ DI MOTO:

per ora trascuriamo la viscosità, la riprenderemo nel FLUSSO di FAVINO (2.6)

l'equazione euleriana integrale era:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{el}} \rho \vec{v} dV = - \int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS - \int_S p \vec{n} dS + \int_{V_{el}} \rho \vec{f} dV$$

perché stazionario

perché le trascuriamo.

quindi:

$$\int_S \rho \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \int_S p \vec{n} dS$$



analizziamo i 2 membri:

$$\int_S \rho \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n}) = \int_{A_1} \rho_1 \vec{u}_1 \cdot (\vec{u}_1 \cdot \vec{n}) + \int_{A_2} \rho_2 \vec{u}_2 \cdot (\vec{u}_2 \cdot \vec{n})$$

ora ho senso tenere solo l'eq. lungo x, quindi:

$$x): A_1 \rho_1 u_1 \cdot (-u_1) + A_2 \rho_2 u_2 \cdot (u_2)$$

perché son viciosi u_1 e u_2

concordi u_1 e u_2

$$-A_1 p_1 + A_2 p_2$$

dipende dal verso di \vec{n} !

• ENERGIA.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{el}} \rho (e + \frac{v^2}{2}) dV = - \int_S \rho (e + \frac{v^2}{2}) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS - \int_S p (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS + \int_{V_{el}} \rho \vec{q} \cdot \vec{v} dV + \int_{V_{el}} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV$$

di tutto questo ombaccaron, rimane solo:

$$\int_S \rho (e + \frac{v^2}{2}) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \int_S p (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS + \int_{V_{el}} \rho \vec{q} \cdot \vec{v} dV$$

Susscriviamo i 3 membri:

1) $\vec{v} \cdot \vec{n}$ fa $-u_1$ nella faccia 1, perché u è discorde con ed u_2 nella faccia 2.

$$\text{quindi: } \int_S \rho (e + \frac{v^2}{2}) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = -\rho_1 A_1 (e_1 + \frac{u_1^2}{2}) u_1 + \rho_2 A_2 (e_2 + \frac{u_2^2}{2}) u_2$$

2) analogamente a sopra per il membro $\vec{v} \cdot \vec{n}$: quindi:

$$- \int_S p (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = -(-p_1 u_1 + p_2 u_2) = p_1 u_1 - p_2 u_2$$

3) lo semplifichiamo, e chiameremo tutto il colore fornito nel condotto \dot{Q}

quindi; dividendo per A:

$$\rho_1 u_1 (e_1 + \frac{u_1^2}{2}) + p_1 u_1 + \frac{\dot{Q}}{A} = \rho_2 u_2 (e_2 + \frac{u_2^2}{2}) + p_2 u_2$$

alcuni altri modi per scrivere l'equazione

↓ DIVIDO = \times per $\rho_1 u_1$, ed a destra per $\rho_2 u_2$, tutto sommato!

$$e_1 + \frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{\dot{Q}}{\rho_1 u_1 A} = e_2 + \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2}$$

RICORDA la relazione $h = e + \frac{p}{\rho}$.

DEFINIZIONE $\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{\rho u A}$ sono $\frac{J/sec}{kg/sec} = \frac{J}{kg}$: quanto calore da ad ogni kg di fluido che passa?

che si chiamerà **energia specifica**.

quindi:

entropie statiche:

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} + \dot{q} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

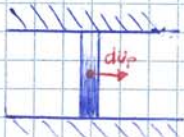
entropie totali:

$$H_1 + \dot{q} = H_2$$

2.3 L'URTO RETTO - FENOMENOLOGIA

• avviene SOLO SE la corrente viaggia + veloce del suono.

per capire bene come si forma fisicamente, c'è un apparecchio che si chiama **TUBO D'URTO**



immaginiamo che un pistone, inizialmente fermo, dia un colpo verso DESTRA.

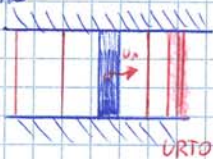
⇒ la **PERTURBAZIONE** che si genererà a VALLE, cioè a SINISTRA, sarà un' **ESPANSIONE** → **T** ↓

questa viaggerà verso sinistra alla velocità del suono, cioè $a = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T}$

⇒ A DESTRA, invece la **COMPRESSIONE**, che viaggia alla temperatura iniziale T , lascia alle spalle una temperatura **maggiore** **T** ↑

⇒ **AL COLPETTO SUCCESSIVO**, a destra il suono **ANDRÀ PIÙ VELOCE** di prima, perché **T** ↑, e **Raggiungerà l'altra onda**

A sinistra invece la seconda perturbazione andrà **più lenta** della prima.



URTO

le **VARIE ONDE** a dx **NON SI SUPERERANO**, perché **DAVANTI** alla **PRIMA ONDA** ho **T** ↑, e quindi la seconda rallenta e si unisce alla prima!

• è interessante vedere come **A CHIUSO** dell'urto le proprietà cambino!

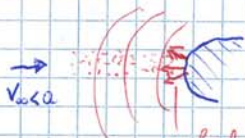
ρ cambia
 p cambia
 T cambia
 p_0 cambia

PERÒ T_0 **COSTANTE.**

• **LO SPESORE** dell'urto è circa quello del **libero cammino medio**

■ **SUL PROFILO AURE**

SUBSONICO



molecole **REBIBAZATE** sopra il B.d.A.

• le molecole **RIESCONO** a **RISALIRE** verso monte e il **SEGNALE** viene percepito prima dal profilo

⇒ le linee di corrente **pli curvano** attorno **"dolcemente"**

SUPERSONICO



le onde riflesse si **ACQUAQUANO** davanti al profilo! perché **NON RIESCONO** a **RISALIRE** la **CORRENTE**

⇒ le linee di corrente **DEVIERANNO** improvvisamente attraversando lo **SHOCK WAVE.**

2.4 EQUAZIONI DELL'URTO RETTO

DIMOSTRAZIONE 11

LEGAME FRA M_1 e M_2 nell'urto retto.

① **Rappettiamo** le equazioni di Q.d.m. e massa, (così da far apparire sia p che ρ in rapporto [⇒ **vel. del suono**])

$$\frac{Q.d.m.}{massa} \Rightarrow \frac{\rho_1 u_1^2 + p_1}{\rho_1 u_1} = \frac{\rho_2 u_2^2 + p_2}{\rho_2 u_2}$$

⇒ dividiamo per il denominatore ambo i termini di ciascuna frazione, ed evidenziamo $u_1 - u_2$, il salto di velocità.

$$u_1 + \frac{p_1}{\rho_1 u_1} = u_2 + \frac{p_2}{\rho_2 u_2} \Rightarrow u_1 - u_2 = \frac{p_2}{\rho_1 u_2} - \frac{p_1}{\rho_2 u_1} \quad \boxed{A}$$

② prendiamo la relazione della velocità del suono

$$a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$$

e **RICAVIAMOCI** $\frac{p}{\rho}$, da **SOSTITUIRCI** poi in A!

$$\frac{p}{\rho} = \frac{a^2}{\gamma}$$

③ **Sostituendo:**

$$u_1 - u_2 = \frac{p_2}{\rho_1 u_2} - \frac{p_1}{\rho_2 u_1} = \frac{1}{\gamma} \frac{a_2^2}{u_2} - \frac{1}{\gamma} \frac{a_1^2}{u_1} \quad \boxed{B}$$

teniamocela da parte. tra un paio di paragrafi la riutilizzeremo.

④ **Prendiamo ora l'EQUAZIONE dell'ENERGIA** scritta come **RELAZIONE** fra **VELOCITÀ** del suono:

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{v^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma-1}$$

e, sapendo la relazione che c'è fra a_0 ed a^* ,

$$\left[\frac{a^*}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} \right]$$

scriviamo l'equazione in **FUNZIONE** di a^*

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{v^2}{2} = a^{*2} \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}$$

⑤ **isoliamoci ora** a^2 , da **sostituire** poi nell' **EQUAZIONE** **B**

$$a^2 = -\frac{v^2}{2} (\gamma-1) + a^{*2} \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \cdot (\gamma-1) = a^{*2} \frac{\gamma+1}{2} + \frac{v^2 \gamma-1}{2}$$

DIMOSTRAZIONE 12

RANKINE HUGONOT.

il nostro obiettivo è trovare una relazione fra pressioni e densità. **NOTA** che la **RELAZIONE** che **TROVEREMO** vale per **Qualsiasi trasformazione ADIABATICA**

① Cominciamo dal rapporto fra $\frac{Qdm}{massa}$, isolando $u_1 - u_2$ anche qui:

$$\frac{\rho_1 u_1^2 + P_1}{\rho_1 u_1} = \frac{\rho_2 u_2^2 + P_2}{\rho_2 u_2}$$

$$\Rightarrow u_1 - u_2 = \frac{P_2}{\rho_2 u_2} - \frac{P_1}{\rho_1 u_1}$$

② ora **moltiplica** $\times dx$ ed $\times x$ per $u_1 + u_2$, ottenendo così

$$(u_1 - u_2)(u_1 + u_2) = \left(\frac{P_2}{\rho_2 u_2} - \frac{P_1}{\rho_1 u_1} \right) (u_1 + u_2)$$

$$\Downarrow$$

$$u_1^2 - u_2^2 = \left(\frac{P_2 u_1}{\rho_2 u_2} + \frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_1 u_2}{\rho_1 u_1} \right)$$

③ prendiamo i 2 termini a destra più complicati, e li **abbiamo**. **moltiplica e dividi** per $\frac{\rho_1}{\rho_1}$ e $\frac{\rho_2}{\rho_2}$ con lo stesso pedice della velocità e numeratore:

$$\frac{P_2 u_1}{\rho_2 u_2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_1} \Rightarrow \frac{P_1}{\rho_1} \frac{u_1 \rho_1}{u_1 \rho_2} \leftarrow \text{el'eq. di continuità } \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \Rightarrow = \frac{P_2}{\rho_2}$$

analogamente

$$\frac{P_1 u_2}{\rho_1 u_1} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_2} = \frac{P_1}{\rho_1}$$

④ quindi l'eq. diventa:

$$u_1^2 - u_2^2 = \left(\frac{P_2}{\rho_2} + \frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_1}{\rho_1} \right)$$

e raccogliendo prima $\frac{1}{\rho_1}$ e $\frac{1}{\rho_2}$:

$$u_1^2 - u_2^2 = \frac{1}{\rho_1} (P_2 - P_1) + \frac{1}{\rho_2} (P_2 - P_1)$$

e poi $(P_2 - P_1)$

$$\Rightarrow u_1^2 - u_2^2 = \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \cdot (P_2 - P_1) \quad \boxed{A}$$

⑤ ora prendiamo l'equazione delle **entalpie statiche**:

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

⑥ ricordiamo come $h = c_p T$, e come $T = \frac{P \cdot M}{\rho \cdot R}$

con un paio di passaggi, troviamo che $c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{M}$

mettendo tutto assieme

$$h = c_p T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{M} = \frac{P \cdot M}{\rho \cdot R} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho}$$

⑦ Sostituiamo l'h trovata,

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{P_1}{\rho_1} \right) + \frac{u_1^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{P_2}{\rho_2} \right) + \frac{u_2^2}{2}$$

ed isoliamo $u_1^2 - u_2^2$:

$$u_1^2 - u_2^2 = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right)$$

⑧ Ci siamo, basterà sostituire $u_1^2 - u_2^2$ in **A** e risolvere per $\frac{P_2}{P_1}$

$$\Rightarrow \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right) = \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) (P_2 - P_1)$$

passaggi che basterà perdere

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad \text{c.v.d.}$$

• **RAPPORTO fra DENSITÀ e cavallo dell'URTO:**

la fortuna vuole che sia facile ricavarla!

Basterà prendere l'eq. di **CONTINUITÀ**

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2}$$

moltiplichiamo sopra e sotto per u_1 e riconosciamo che $u_1 u_1 = a_1^2$

$$\Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1 \cdot u_1}{u_2 \cdot u_1} = \frac{u_1^2}{a_1^2} = M_1^2$$

e quindi, sarà semplice prendere la relazione di $M^2 f(\gamma)$

$$\Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1^2 (\gamma + 1)}{2 + M_1^2 (\gamma - 1)} \quad \lim_{M_1 \rightarrow \infty} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} = 6 \text{ [Aria]}$$

• **PRESSIONI**

Sostituendo la $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ appena trovata in Rankine Hugonot,

troviamo che

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \quad \lim_{M_1 \rightarrow \infty} = \infty$$

• **TEMPERATURE**

dall'equazione di stato, ricorriamo che,

$$T = \frac{P \cdot M}{\rho \cdot R} \Rightarrow \text{facciamo il rapporto } \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

e sostituiamo le relazioni di sopra:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \right] \cdot \left[\frac{2 + M_1^2 (\gamma - 1)}{M_1^2 (\gamma + 1)} \right] \quad \lim_{M_1 \rightarrow \infty} = \infty$$

DIMOSTRAZIONE 14

TEMPERATURE in RAYLEIGH.

① scrivendo il rapporto attraverso l'equazione di stato, ottengo che:

$$T = \frac{P}{\rho} \frac{M}{R} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

② ora $\frac{P_2}{P_1}$ già lo abbiamo calcolato, sostituiamo

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}$$

dall'eq. di MASSA, ho che $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{u_2}{u_1}$

③ anche qui, nessuno mi vieta di scrivere che $u = a M$, così appare il Mach.

quindi, dato che andrò via un bel po' di calcoli, diciamo già che $a = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}$

Risultate

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{a_2 M_2}{a_1 M_1} = \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

④ sostituiamo ciò che abbiamo appena trovato e risolviamo per T_2/T_1

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{\gamma M_1^2 + 1}{\gamma M_2^2 + 1} \right) \left(\frac{M_2}{M_1} \right) \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\gamma M_1^2 + 1}{\gamma M_2^2 + 1} \right) \left(\frac{M_2}{M_1} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{\gamma M_1^2 + 1}{\gamma M_2^2 + 1} \right)^2 \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2$$

⑤ e, dato che

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

troviamo anche la Relazione delle densità:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2 \left(\frac{\gamma M_1^2 + 1}{\gamma M_2^2 + 1} \right)$$

Sapendo $\frac{P_2}{P_1}$ e $\frac{T_2}{T_1}$ è facile trovarsi i rispettivi

rapporti delle grandezze totali

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_2}{P_1} \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{T_2}{T_1} \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)}$$

in teoria, in questa equazione conosciamo già T_{01} , T_{02} e M_1 e POTREMMO ricavare M_2 . non lo si fa, Tè spido a risolvere (questa eq. per M_2 ...)

ENTROPIA

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - \frac{R}{M} \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right)$$

n. b: in questo caso dato che $T_{02} \neq T_{01}$, non ho nessun vantaggio ad usare le grandezze di arresto!

DIAGRAMMA di MOLLIER - Rayleigh.

per poter fare un diagramma di Mollier che rappresenta in ASCISSE l'entropia (s) ed in ordinate l'ENTALPIA ($h = c_p T$), occorreranno alcune derivate per una analisi qualitativa!

$$\frac{dT}{ds} = \frac{T}{c_p} \frac{(\gamma M^2 - 1)}{(M^2 - 1)}$$

indicherò la PENDENZA della curva LOCALE: ovvero, preso un punto ad un dato s ed ad una data T, vediamo come si comporterà la curva.

$$\frac{du}{ds} = - \frac{u}{c_v} \frac{1}{\gamma(M^2 - 1)}$$

invece, mi dirà se ANDANDO VERSO DESTRA il flusso ACCELERA o RALLENTA!

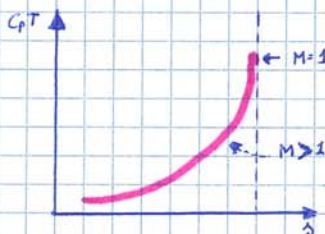
RAMO 1: Ingresso Supersonico

ovvero $M > 1$

quel che avviene è che

$$\frac{dT}{ds} = \frac{T}{c_p} \frac{(\gamma M^2 - 1)}{(M^2 - 1)} \text{ è sempre } > 0$$

in particolare, per $M \rightarrow 1$, $\frac{dT}{ds} \rightarrow \infty$: tangente verticale! quindi il grafico sarà così!



$\frac{du}{ds}$ è negativo: andando a destra, la VELOCITÀ DIMINUISCE.

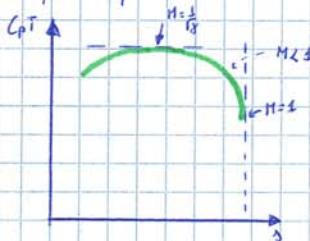
RAMO 2: Ingresso Subsonico

$M < 1$

in $\frac{dT}{ds}$ il denominatore è sempre -, invece il numeratore

è < 0 se $M < \sqrt{\frac{1}{\gamma}}$, ed è > 0 se $M > \sqrt{\frac{1}{\gamma}}$.

anche qui ho una tg verticale per $M \rightarrow 1$



mentre $\frac{du}{ds}$ è sempre +, quindi andando a destra il flusso accelera.

• EQUAZIONI

ENERGIA: avendo $q=0$, il flusso è **Adiabatico**

quindi: $H_1 = H_2 \Rightarrow T_{01} = T_{02}$

CONTINUITÀ: il fatto che $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$, lo sfrutteremo più avanti

La **QUANTITÀ di ROTAZIONE** ci permette di quantificare gli effetti delle viscosità.

All'atto pratico a noi serve la forma **integrale**, quindi:

$$\int_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = - \int_S p \vec{n} dS - \vec{F}_{visc}$$

ora, a noi interessa la componente x dell'equazione, quindi:

$$\int_S \rho u (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = - \int_S p_x dS - \int_S \tau_w dS$$

Come già fatto, risolvere gli integrali vettoriali è una pazzaggine...

$$-\rho_1 u_1^2 A_1 + \rho_2 u_2^2 A_2 = p_1 A_1 - p_2 A_2 - \int_S \tau_w dS$$

Ora dividiamo tutto per A :

$$p_2 + \rho_2 u_2^2 - p_1 - \rho_1 u_1^2 = \frac{-1}{A} \int_S \tau_w dS$$

ORA: geometricamente, abbiamo che $A = \frac{\pi D^2}{4}$ e che

$$dS = 2\pi R dx = \pi D dx \text{ trattasi di Superficie laterale!}$$

$$\text{quindi } -\frac{1}{A} \int_S \tau_w dS = -\frac{4}{\pi D^2} \cdot \int_0^L \tau_w \pi D dx = -\frac{4}{D} \int_0^L \tau_w dx$$

la formula finale su cui fare i commenti sarà:

$$p_2 - p_1 + \rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 = -\frac{4}{D} \int_0^L \tau_w dx$$

• **GRANDEZZE** che potrebbero confondere le idee:

• definiamo il C_f come la **NORMALIZZAZIONE di τ_w**

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho \bar{U}^2}$$

NOTA il -! serve per avere un numero positivo!

nota come \bar{U} è la velocità media del flusso in una sezione del condotto, e ρ la densità nella stessa sezione.

• MENTRE λ è definita come **NORMALIZZAZIONE di $\frac{dp}{dx}$**

che è una cosa completamente diversa!

$$\lambda = \frac{dp/dx}{\frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 / D}$$

• Le semplificazioni dell'**INCOMPRESSIBILE**

dato che $\rho = \text{cost}$, dall'equazione di continuità ho che

$$u_1 = u_2$$

\Rightarrow l'eq. della Q.D.M si semplifica:

$$p_2 - p_1 = -\frac{4}{D} \tau_w L$$

Nota come $\tau_w = \text{cost}$, ciò è una conseguenza del fatto che il flusso è **CONGELATO**

$\Rightarrow U$ non cambia con $x \rightarrow \frac{\partial U}{\partial r}$ idem $\rightarrow \tau_w$ idem!

ora, sostituiamo a primo membro la definizione di λ

$$dp = p_2 - p_1 = -dx = L$$

$$\text{quindi } \frac{p_2 - p_1}{L} = \lambda \rightarrow p_2 - p_1 = \lambda \left(L \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 \right)$$

mentre a destra, sostituisco $\rightarrow \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho \bar{U}^2} = -C_f$

$$\rightarrow \tau_w = -C_f \left(\frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 \right)$$

quindi:

$$\frac{\lambda}{D} \left(L \cdot \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 \right) = + \frac{4}{D} C_f \left(\frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 \right) L$$

$$\boxed{\lambda = 4C_f} \text{ - solo } \times \text{ l'incompressibile!}$$

nei condotti, $Re = \frac{\bar{U} D}{\nu}$



è stato provato come, anche sperimentalmente

LAMINARE : $\lambda = \frac{964}{Re}$

BASSA TURBOLENZA $\lambda = \frac{0.32}{Re^{1/4}}$

ALTA TURBOLENZA $\lambda = \frac{0.16}{Re^{1/5}}$

● **DIAGRAMMI di MOLLIER - FANNO**

andando a vedere come si comportano le derivate avremo che

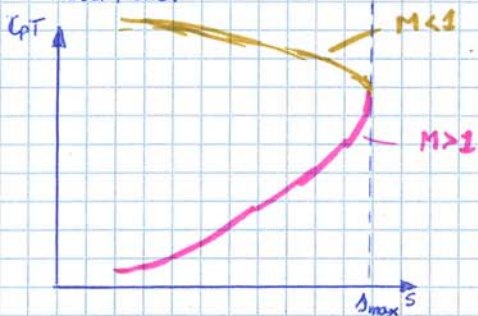
$$\frac{dT}{ds} = \frac{T}{C_p} \gamma \frac{M^2}{M^2-1}$$

indicherò la pendenza del diagramma di mollier.

$$\frac{du}{ds} = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{T}{M} \cdot \frac{M^2}{M^2-1}$$

indicherò cosa avviene alla velocità andando verso destra.

RISULTA CHE:



SUPERSONICO

Con $M > 1$:
 $\frac{dT}{ds} > 0$: curva che sale
 $\lim_{M \rightarrow 1} \frac{dT}{ds} = +\infty$: Asintoto verticale
 $\frac{du}{ds} < 0$: il flusso rallenta con la lunghezza del tubo.

+ VAI = DESTRA + il tubo è lungo!

SUBSONICO

Con $M < 1$:
 $\frac{dT}{ds} < 0$: curva che scende
 $\frac{du}{ds} > 0$: il flusso ACCELERA!
 ⇒ sembra streamo ma in realtà



l'aumento di spessore di strato limite causa un "convergente".

⇒ Per $M=1 \rightarrow L^*$ LUNGHERA di CHOCKING!

SE $L > L^*$:

Supersonico: URTO \rightarrow Subsonico

Subsonico: RALLENTA prima dell'INGRESSO.

● **GRANDEZZE * di CHOCKING.**

Rimangono costanti lungo il condotto, e corrispondono a $M_2 = 1$

quindi:

$$T_0 = T_0^*$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{2 + \gamma - 1}{2 + (\gamma - 1) M^2}$$

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right]^{1/2}$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M^2}{\gamma + 1} \right]^{1/2}$$

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{P}{P^*} \cdot \frac{(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)}{(1 + \frac{\gamma-1}{2})}$$

● **VALORE di L^* legato a C_p .**

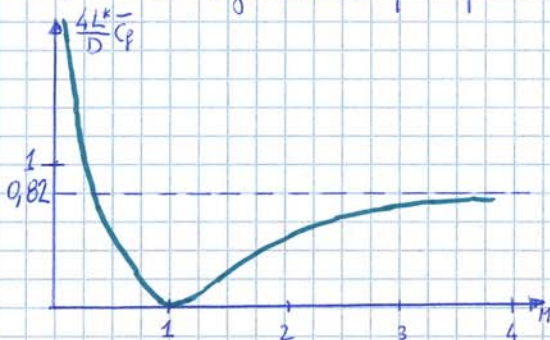
riprendendo il legame fra C_p e M_1, M_2 :

$$\frac{4}{D} \int_0^L C_p dx = \left[-\frac{1}{\gamma M^2} - \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left(\frac{M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right) \right]_{M_1}^{M_2}$$

ora, usando un C_p medio, che chiameremo \bar{C}_p , e sostituendo a $M_2 \rightarrow 1$ e a $L \rightarrow L^*$, trovo una relazione:

$$\frac{4L^*}{D} \bar{C}_p = \frac{1-M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left(\frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2} \right)$$

Ora, volendo diagrammare questa funzione:



a cosa serve:

⇒ SE SO M di ingresso, e sapendo che \bar{C}_p ha un dato valore, TROVO L^*

⚠ il fatto che $\frac{4L^*}{D} \bar{C}_p$ sia asintotico a 0,82 per $M \rightarrow \infty$, implica che:

$$\frac{4L^*}{D} \bar{C}_p = 0,82$$

IL C_p è 0,005 per Reynolds Alti, altrimenti te lo danno!

quindi $\frac{L^*}{D} \approx 40$! un tubo, per quanto alto sia il M di ingresso, ANDRÀ in CHOCKING se è lungo 40 volte il suo diametro!

QUANTITÀ di MOTO.

Euler, Integrale, Stazionaria:

$$\int_S \rho \vec{V} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = - \int_S p \vec{n} dS$$

avremo le 2 direzioni, **NORMALE** e **TANGENZIALE**.

in direzione **NORMALE**:

$$\int_S \rho \vec{u} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = - \int_S p \vec{n} dS \quad N$$

qui si prende la componente

FACCE; piano Q d m

- (A) $A_A \cdot \rho_1 u_1 (-u_1)$ (D) $A_D \rho_2 u_2 (+u_2)$
- (B) $A_B \cdot \rho_1 u_1 (+u_1)$ (F) $A_F \rho_1 u_1 (-u_1)$
- (C) $A_C \rho_2 u_2 (+u_2)$ (E) $A_E \rho_2 u_2 (-u_2)$

⇒ (B) va via con (F) (C) va via con (E).

FACCE, pressioni: $[\int_S p \cdot \vec{n} dS]$

(A) p è una SCALARE, n è NEGATIVO (va verso sinistra) quindi

$-A_A p_1$

(D) idem, con N positivo però:

$+A_D p_2$

(B), (C), (E), (F) non hanno \vec{p} lungo \vec{N}

l'eq. resto, elidendo A_A e A_D :

$\rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2$ cioè proprio quelle dell'URTO RETTO

in direzione **TANGENZIALE**

$$\int_S \rho w (\vec{V} \cdot \vec{n}) = - \int_S p \vec{n} dS$$

Q. d. m., faccie

- (A) $A_A \cdot \rho_1 w_1 (-w_1)$ (D) $A_D \rho_2 w_2 (+w_2)$
- (B) $A_B \rho_1 w_1 (w_1)$ (F) $A_F \rho_1 w_1 (-w_1)$
- (C) $A_C \rho_2 w_2 (w_2)$ (E) $A_E \rho_2 w_2 (-w_2)$

anche qui, (B) e (F), (C) ed (E) si elidono due a 2!

pressioni:

(A) e (D) non hanno p lungo \vec{T} .

rimangono (B) $p_1 A_B (+$ perché n ↑) (F) $-p_1 A_F (-$ perché n ↓)

che si ELIDONO - idem (C) ed (E).

Rimane: $\rho_1 w_1 (-w_1) + \rho_2 w_2 (w_2) = 0$

ma $\rho_1 w_1 = \rho_2 w_2$: si elidono ⇒ $w_1 = w_2$ fondamentale!

ENERGIA.

Euler, Integrale. STAZIONARIA, adiabatica:

$$\int_S \rho \cdot (e + \frac{V^2}{2}) (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = - \int_S p (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS$$

ci son solo le forze di pressione che lavorano!

Quindi: come sempre, sia a 1° che a 2° membro,

(B) ed (F) si elidono, (C) ed (E) pure. rimangono le faccie (A) e (D)

energia: (no, in effetti, la V totale, sia u che w!)

- (A) $A_A \rho_1 \cdot (e_1 + \frac{u_1^2}{2}) \cdot (-u_1)$
- (D) $A_D \rho_2 (e_2 + \frac{u_2^2}{2}) (+u_2)$

lavoro pressioni: (il - ce lo mettò dopo!)

- (A) $A_A p_1 (-u_1)$ (D) $A_D p_2 (+u_2)$

Metto tutto assieme; elido le aree:

$$\rho_1 u_1 (e_1 + \frac{u_1^2}{2}) + p_1 u_1 = \rho_2 u_2 (e_2 + \frac{u_2^2}{2}) + p_2 u_2$$

ora: ① $V^2 = u^2 + w^2$: i w vanno via e quindi posso scrivere $V^2 \rightarrow u^2$.

② divido per $\rho_1 u_1$ a sx e $\rho_2 u_2$ a Dx, tutto e lo stesso numero!

$$e_1 + \frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} = e_2 + \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2}$$

e vedole ENALPIE STATICHE ($h = e + \frac{p}{\rho}$)

$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$ e TOTALI: $H_1 = H_2$ (mb, solo se mi tengo V e non u²)

quindi TUTTO come l'URTO RETTO!!

3.2 θ · β · MACH

In base a quanto abbiamo visto, per calcolare la grandezza in 2 BASTERÀ ricondursi all'URTO NORMALE.

dove:

$$M_{1n} = M_1 \sin \beta \qquad M_2 = \frac{M_{1n}}{\sin(\beta - \theta)}$$

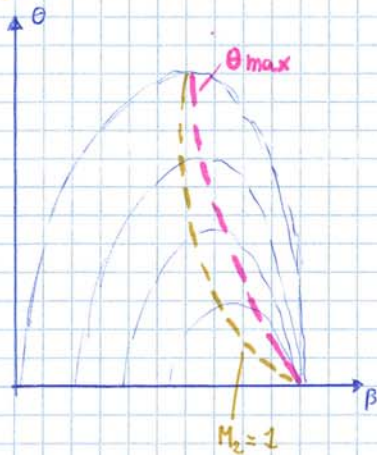
Quindi: $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1) M_{1n}^2}{(\gamma - 1) M_{1n}^2 + 2}$

etc. etc.

in pratica, alle relazioni dell'urto normale, sostituisce M_{1n} e il picco è fatto.

infine: **DISEGNARE** le componenti di tutti i θ_{max}

e $M_2 = 1$:



$M_2 = 1$ segna il confine fra urti forti e deboli.
 più β è piccolo, + l'urto è debole!
 quindi, nei problemi, occhio a questi dettagli!

3.3 POLARE DELL'URTO [STROFOIDE]

• Che cos'è:

è una curva che, data una corrente in ingresso, **DESCRIVE TUTTE LE POSSIBILI CONDIZIONI e VALLE DELL'URTO.**

in **FORMA DIMENSIONALE** gli assi indicano w e v ~~mass~~ che sono le velocità lungo x ed y della corrente

la relazione si ottiene come:

$$v_2^2 = (v_1 - u_2)^2 \frac{v_1 u_2 - a^*^2}{\frac{2}{\gamma+1} v_1^2 - v_1 u_2 + a^*^2}$$

non occorre ricordarselo, né tantomeno ricavarlo.

quella che si usa, però, è la **FORMA NORMALIZZATA** che ci dà delle visualizzazioni più chiare per le alte velocità.

Per ottenerla, **divido a dx ed sx per a^*^2 .**

ecco cosa viene fuori

$$\left(\frac{v_2}{a^*}\right)^2 = \left(M_1^* - \frac{u_2}{a^*}\right)^2 \frac{\frac{u_2}{a^*} M_1^* - 1}{\frac{2}{\gamma+1} M_1^{*2} - \frac{u_2}{a^*} M_1^* + 1}$$

in questo modo, possiamo ricordare alcune proprietà delle grandezze *.

$$M = \frac{2}{\left[\frac{\gamma+1}{M_1^*} - (\gamma-1)\right]} \quad M_1^* = \frac{M^2(\gamma+1)}{2+M^2(\gamma-1)}$$

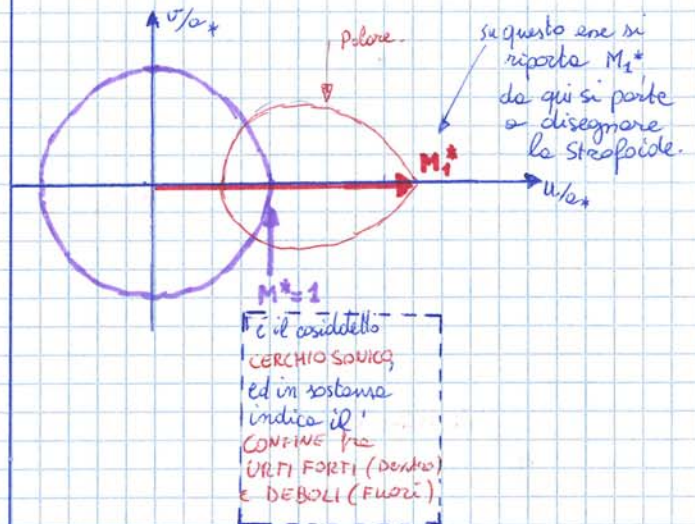
notiamo anzitutto che

$M^*(M=1) = 1$ il che non ci porta a scomodi ragionamenti sulla velocità del suono

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M^* = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = 2,449 \text{ [Aria]}$$

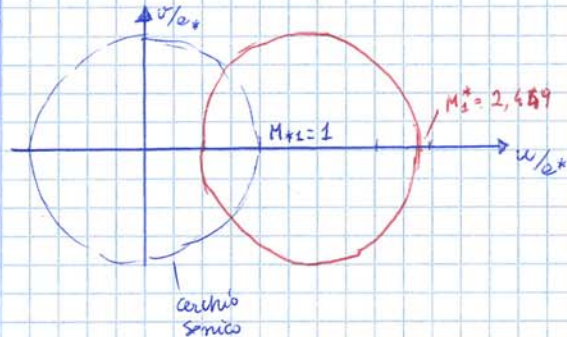
il che vuol dire che il mio profilo è **LIMITATO** nello SPAZIO

• COME SI PRESENTA il GRAFICO.



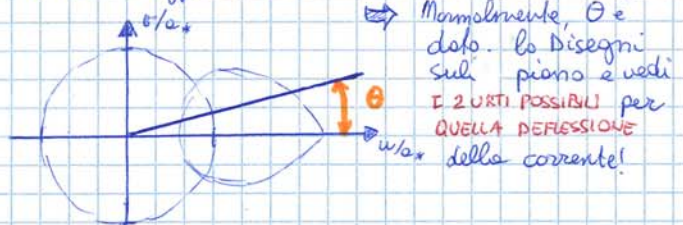
• CERCHIO di $M_1 = \infty$

con $M_1 = \infty$, ho $M_1^* = 2,449$. la polare dell'urto con questo ingresso zero:

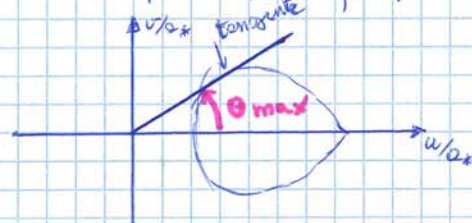


• UTILIZZO DELLA STROFOIDE.

dove si legge θ .



di conseguenza, θ_{max} sarà la **TANGENTE** alla STROFOIDE presente per l'origine!

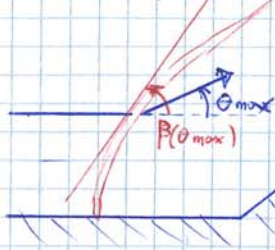


⇒ **DOPPOCHÉ SI ALLINEA ALLA PARETE, ACCELERANDO**
 → mano a mano che ci allontaniamo dalla parete,

β calerà, θ aumenterà

Per ora siamo sempre nel caso di **URTI FORTI**.

● **CASO 3:** $\beta \Rightarrow \theta_{max}$

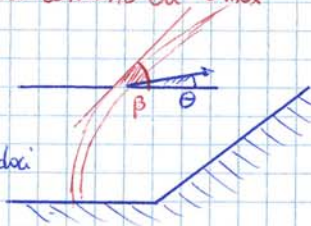


Subito dopo l'urto si deflette di θ_{max} , poi si allinea o parete accelerando

● **CASO 4:** Ancora un po' più lontano di θ_{max}

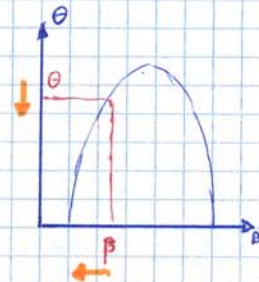
A questo punto siamo entrati nel **RANGO degli URTI DEBOLI**,

β aumenterà allontanandosi da parete



PERÒ in questo ramo, θ cala sempre di più

lo vediamo bene dal $\theta - \beta$ Mech:



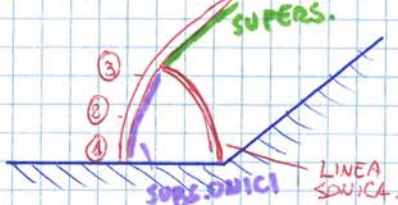
● **CASO 5** molto lontano.

β diventa M , θ diventa \emptyset e l'urto diventa **EVANESCENTE**

⇒ **LINEA DI MACH!**

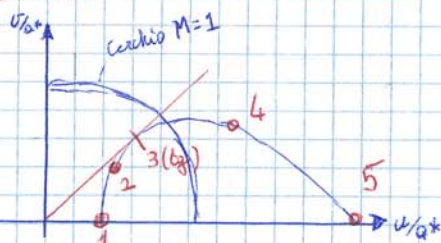
NOTA COME nei casi 1, 2, e 3 eravamo nel caso di **URTO FORTE**: quindi M_2 **SUBSONICO**, mentre in 4, 5 era un **URTO DEBOLE**

Considerato che **A VALLE** la corrente si riuniforma, vuol dire che 1, 2 e 3 dovranno diventare **SUPERSONICI** prima o poi!



⇒ questo è il motivo per cui nasce la **LINEA SONICA**, cioè il punto in cui 1, 2, e 3 superano la velocità $M=1$!

□ **TUTTO CIÒ PÙ, naturalmente, essere letto sulla STROFOIDE.**



il nostro θ **GEOMETRICO**, invece, risulta **UTILIZZABILE!**

● **ENTROPIE nell'URTO CURVO DISTACCATO.**

Considerato che da ① a ⑤ abbiamo vari **RANGE** di urti,

dall'URTO RETTO in ①

all'URTO **EVANESCENTE** in ⑤

l'**ENTROPIA VARIA** da filetto fluido a filetto fluido.

Questo vuol dire che c'è un ∇s , **gradiente di entropia!**

se andiamo a richiamare il **TEOREMA DI CROCCO**,

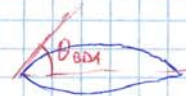
$$\nabla \times \vec{v} = \nabla H - \nabla s$$

ora, l'urto è **adiabatico**, quindi $\nabla H = 0$.

TUTTAVIA, il campo risulta **ROTAZIONALE**.

● **ALL'ATTO PRATICO:** ⇒ **profili d'ala supersonici.**

il comportamento dell'urto è dettato dal θ del **BORDO DI ATTACCO**.

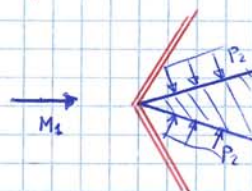


PROFILLO TOZZO: $\theta_{BDA} > \theta_{max}$
 ⇒ **URTO CURVO DISTACCATO**



PROFILLO SOTTILE: $\theta_{BTA} < \theta_{max}$
 ⇒ **URTO OBLIQUO.**

⇒ **RESISTENZA D'ONDA.**



dopo l'urto p si alza. questo vuol dire che la

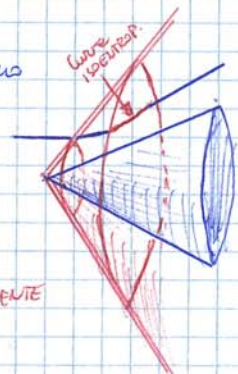
COMPONENTE ORIZZONTALE di p parte alla

WAVE DRAG!

● **CORPI 3D:** ⇒ **CONI**

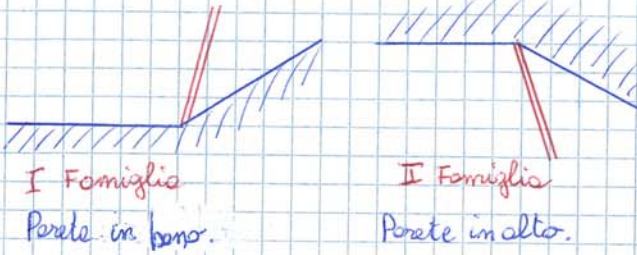
senendo uno spazio continuo e comunicante, l'urto è **meno INTENSO e MENO INCLINATO!**

quello che survive è che i **FILETTI FLUIDI**, dopo l'urto, **curvano e comprimono ISOENTROPICAMENTE** il **FLUSSO**



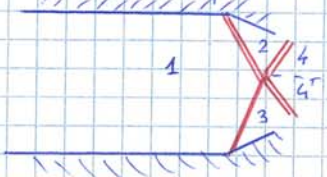
3.6 INTERAZIONI FRA URTI

● FAMIGLIE di URTI



■ FAMIGLIE DIVERSE

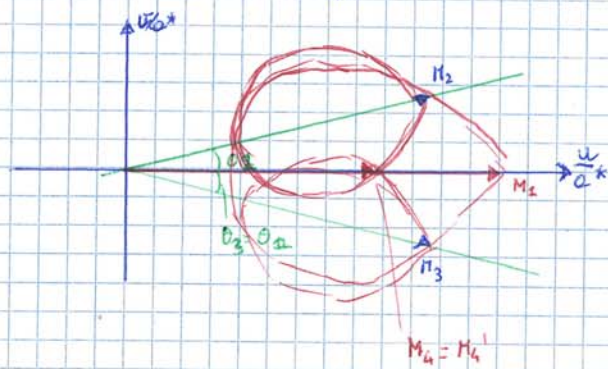
il caso semplificato è quello simmetrico,



SAPPIAMO GIÀ TUTTO!

i θ sono SEMPRE
 ϕ_i stepi, considerato
che l'uscita è omole.

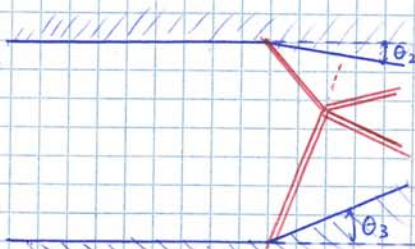
puoi procedere con i θ - β -Mach in modo
TRIPLICAZIONE, oppure usare le Strofoidi.



da qui puoi immediatamente vedere i β !

● CASO GENERICO

● Conosciamo M_1, θ_2, θ_3 - Non sappiamo
nient'altro.



● Ci manca un
dato x Chiedere
il problema.
Come avvengono
gli urti per arrivare
a ϕ e ϕ' ?

Possiamo IMPORRE, con il buon senso, che P_4 e P_4'
siano uguali.

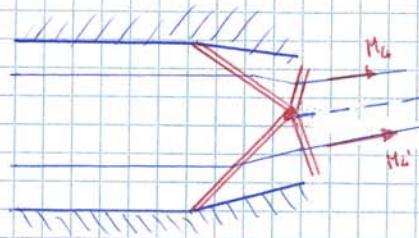
Inoltre, DOBBIAMO imporre che i M_4 e M_4' abbiano
la STESSA DIREZIONE

⚠ Non possiamo dire niente sul MODULO di
 M_4 e M_4'

infatti in generale stanno diversi!

quindi, ecco cosa avviene:

17

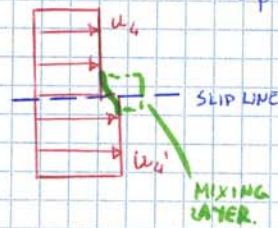


θ_2 e θ_3 li conosco

la direzione di ϕ e ϕ' rispetto all'orizzontale
è chiamata Φ

l'interfaccia, cioè la linea tratteggiata,
si chiama SUP LINE oppure CONTACT LINE.

e quel che avviene in pratica è questo:



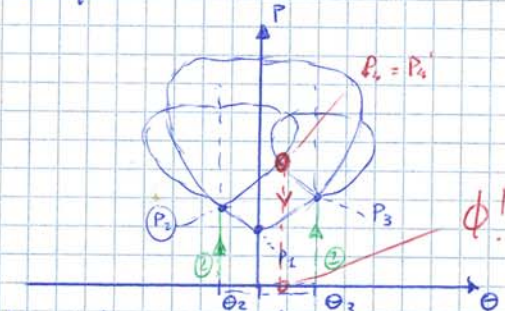
⇒ nell'interfaccia, a
causa della viscosità
finora trascurata,
il profilo risulterà
"smussato": questo si
chiama MIXING LAYER
oppure SHEAR LAYER.

(dal momento che c'è sforzo di taglio = SHEAR)

Come trovare Φ ?

l'unico modo per trovarlo evitando di andare a
"tentativi" è quello di USARE LE CARDIOIDI!

questo perché già Relazionano le P con le θ ! (e quindi
con Φ).



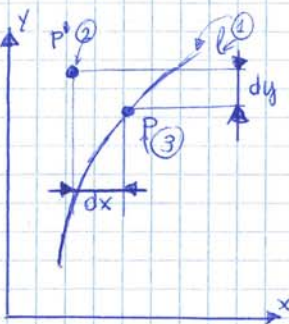
- 1) tracci la cardioidi di P_1
- 2) Con θ e θ , trovi i punti 2 e 3. Nota come i θ
hanno segni opposti!
- 3) tracci la cardioidi di P_2 e P_3 , e DOVE SI INCONTRANO
troverai $P_4 = P_4'$, oltre che Φ !

A questo punto, con Φ , hai tutte le deflessioni
che ti servono per risolvere il problema!

3.9 ESPANSIONE - EQUAZIONI

● BACKGROUND MATEMATICO

prendiamo un piano fisico (cioè semplicemente x e y)



① ipotizziamo di avere una LINEA l , sulla quale CONOSCIAMO le VELOCITÀ punto per punto.

② Ipotizziamo ora un punto P' , fuori da l .

③ Partendo da un punto P appartenente alla linea, vogliamo calcolare la velocità in P' . Come si fa?

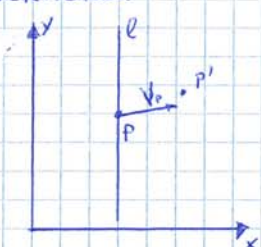
Chiamo dx e dy le distanze fra P e P'

⇒ Con uno sviluppo di Taylor in 2D, troncato al primo ordine, avremo che:

$$u(P') = u(P) + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + o(\dots)$$

$$v(P') = v(P) + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + o(\dots)$$

ora, volendo ricondarci ad un caso a noi più simile, la mostra l sarà una LINEA VERTICALE.



il "giocchetto" è utile perché ora TUTTE LE DERIVATE $\frac{\partial}{\partial y}$ son note! e come incognite ho solo $\frac{\partial}{\partial x}$.

● LINEE CARATTERISTICHE

⚠ da prendere con le pinze:

def. ①: LINEE ATTRAVERSO LE QUALI le GRANDEZZE SONO DETERMINATE (= sono un numero finito)

M_A le LORO DERIVATE NO! ($\frac{\partial \phi}{\partial t} = \infty, \infty$ esempi)

IN ALTRE PAROLE, ATTRAVERSO LE LINEE CARATTERISTICHE, LE GRANDEZZE SONO DISCONTINUE

DIMOSTRAZIONE 18

Linee caratteristiche = linee di MACH.

① Richiamiamo l'equazione del POTENZIALE della VELOCITÀ, ove però poniamo $\phi_z = 0$ analizzandoci il caso 2D

$$\left(1 - \frac{\phi_x^2}{a^2}\right) \phi_{xx} + \left(1 - \frac{\phi_y^2}{a^2}\right) \phi_{yy} - 2 \frac{\phi_x \phi_y}{a^2} \phi_{xy} = 0$$

② Ora, sostituiamo le relazioni fra ϕ e velocità, quindi $\phi_x \rightarrow u$ $\phi_y \rightarrow v$ $\phi_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$ $\phi_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\phi_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial v}{\partial y} - 2 \frac{uv}{a^2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

③ Con il "giocchetto" della l verticale dove conosciamo tutto,

POSSO DIRE CHE:

CONOSCO: u, v perché le prendo da l

$\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ perché la linea è verticale e le der. lungo y son note

⇒ INCOGNITA $\frac{\partial u}{\partial x}$: me la ricavo!

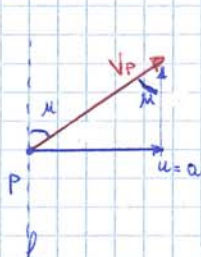
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial v}{\partial y} + 2 \frac{uv}{a^2} \frac{\partial u}{\partial y}}{\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)}$$

⑤ PER QUELLO che abbiamo detto sulle linee caratteristiche che,

LA linea caratteristica è quella in cui $\frac{\partial u}{\partial x} = \infty$ quindi dove

$$1 - \frac{u^2}{a^2} = 0 \Rightarrow u^2 = a^2 \Rightarrow u = a$$

⑥ FISICAMENTE a che cosa corrisponde:



disegniamo la fisica del problema:

COMPON. ORIZZONTALE: $u = a$ (imposta)

velocità completa è V_P

noi vorremmo vedere in CHE POSIZIONE è l disegnata come in figura, i.e. μ , e vedo quanto velocissimo!

$$\mu = \arcsin \frac{V_P}{V_P} = \arcsin \frac{a}{V_P} = \arcsin \frac{1}{M}$$

QUINDI: LINEA CARATTERISTICA = LINEA DI MACH!

• Cosa vuol dire questo?

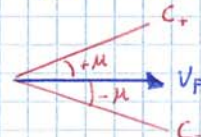
presa V_P , e presa la linea caratteristica,

Se calcolo la componente di V \perp a l , ottengo

a , ma soprattutto SONO LE UNICHE 2

DIREZIONI (perché ho 2 μ , uno sopra e uno sotto

la velocità) ATTRAVERSO LE QUALI non posso calcolare la derivata parziale della velocità perché farebbe ∞ !

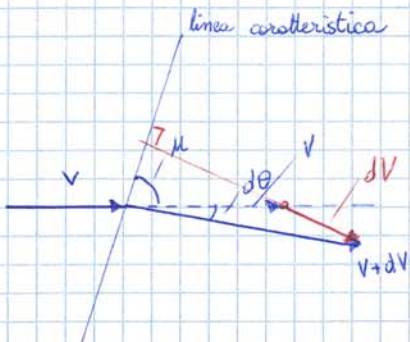


DIMOSTRAZIONE 20

LEGAME MACH - DEFLESSIONE

1) Attraversando una linea caratteristica la velocità si DEFLETTE di $d\theta$ e cambia MODULO ($V \rightarrow V+dV$)

facciamo un disegno grande e chiaro.



NOTA CHE L'AUMENTO dV sia \perp alla linea caratteristica!

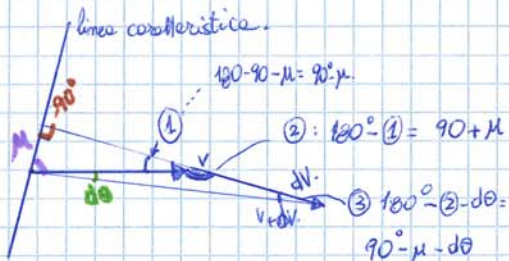
2) ma vorremo applicare il teorema dei SENI di LARNOU al TRIANGOLO con i lati

$V, V+dV, dV$.

per farlo ci occorrono tutti gli angoli:

abbiamo già $d\theta$.

GUARDA il DISEGNO:



3) Appliciamo il teorema dei SENI ai lati

$V+dV$ e V , (ricorda: $\frac{\text{LATO A}}{\sin(\text{angolo opposto A})} = \frac{\text{LATO B}}{\sin(\text{angolo opposto B})}$)

$$\frac{V+dV}{V} = \frac{\sin(90^\circ + \mu)}{\sin(90^\circ - \mu - d\theta)}$$

4) Appliciamo i penaggi trigonometrici. LIBERIAMOCI dei 90°

$$1 + \frac{dV}{V} = \frac{\cos(\mu)}{\cos(-\mu - d\theta)} = \frac{\cos(\mu)}{\cos(\mu + d\theta)}$$

sono cos. perché - dall'argomento

ricorda l'ADDIZIONE dei COSENI

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

quindi

$$1 + \frac{dV}{V} = \frac{\cos\mu}{\cos\mu \cos d\theta - \sin\mu \sin d\theta}$$

5) $d\theta$ è PICCOLO:

$$\cos d\theta \rightarrow 1$$

$$\sin d\theta \rightarrow d\theta$$

quindi

$$1 + \frac{dV}{V} = \frac{\cos\mu}{\cos\mu - d\theta \sin\mu}$$

6) divido SOPRA E SOTTO per $\cos\mu$...

$$1 + \frac{dV}{V} = \frac{1}{1 - d\theta \tan\mu}$$

7) sviluppo di Taylor al primo ordine:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(\dots)$$

$$1 + \frac{dV}{V} = 1 + d\theta \tan\mu$$

SIAMO A BUON PUNTO... abbiamo M (che è legato a M) $d\theta$, ma potremmo ancora V ...

8) leghiamo M ed M : $\tan\mu = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}$

$$\Rightarrow \frac{dV}{V} = d\theta \tan\mu = \frac{d\theta}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

9) Rimane, per concludere, da trovare il legame fra $\frac{dV}{V} = M$!

ovviamente, $V = Ma$.

applico il log, perché dovrei trovare $\frac{dV}{V}$

$$\log V = \log M + \log a$$

e DIFFERENZIO (= banalmente, derivo ogni termine)

$$\frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} + \frac{da}{a}$$

10) devo ora trovare $\frac{da}{a}$ per farlo, mi occorre sfruttare la velocità del suono totale a_0 (quella che ho a T_0)

faccio il rapporto

$$\frac{a}{a_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

11) differenzio l'a appena trovato, così da avere il da!

$$da = a_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (\gamma-1) \cdot M \cdot dM$$

der. di dentro parentesi!

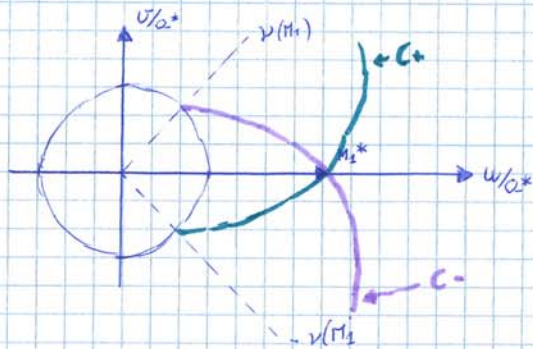
$$= -\frac{a_0}{2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{3}{2}} (\gamma-1) \cdot M \cdot dM$$

non dimentici - da!

12) ho trovato ora il rapporto $\frac{da}{a}$!

$$\frac{da}{a} = \frac{-\frac{a_0}{2} (\gamma-1) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot M \cdot dM}{a_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{2}}} = -\frac{(\gamma-1)}{2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1} M dM$$

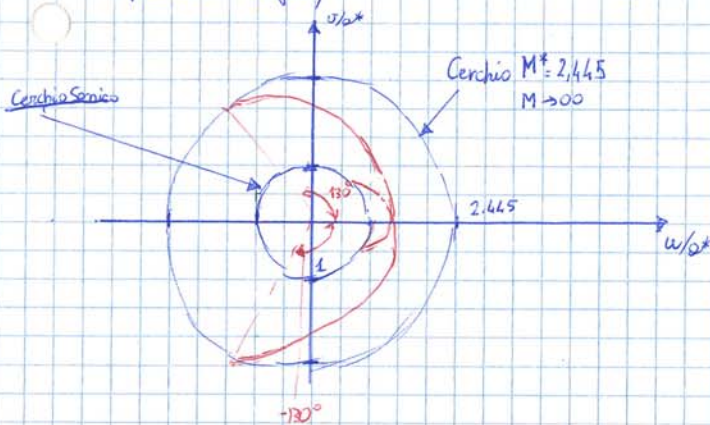
• Sul piano odografico, cioè si traduce in questo modo:



• infine, occorre sottolineare che DATO che siamo sul PIANO con GRANDEZZE NORMALIZZATE, M^* può al massimo essere 2,449 (nel caso dell'aria).

⇒ le epicloidi avranno una fine, che, INDIPENDENTE dal M_1^* iniziale, SI ATTESTA a $\pm 130^\circ$

(fuori il LIMITE per $M \rightarrow \infty$ della funzione di Prandtl-Meyer)

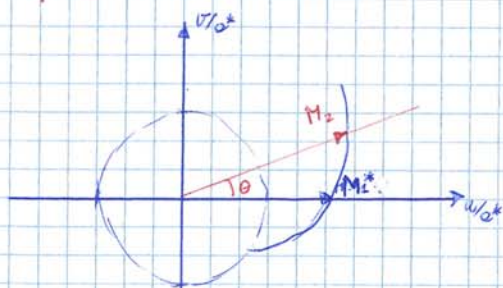


Questo è SOLO UN LIMITE MATEMATICO, ma in realtà non avremo una corrente che "torna indietro".

Perché? A parte che ci sono VISCOSITÀ, FORZE CENTRIFUGHE, etc...

MA per $M \rightarrow \infty$, $T \rightarrow 0$ (se $T_0 = \text{cost}$, $0 \cdot \infty = \text{num!}$) e quindi non posso raggiungere lo 0 assoluto!

• USO DEL PIANO ODOGRAFICO = LA RISOLUZIONE dei PROBLEMI...



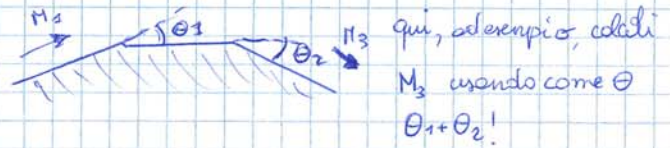
① TRACIA L'EPICICLOIDE GIUSTA, cioè quella relativa alla FAMIGLIA CONSIDERATA!

(in questo caso, $\frac{u}{a^*}$ Fam. II)

② TRACIA la Θ che hai e trova M_2^* ! (sull'epicloide)

20

N.B. Se hai PIÙ ESPANSIONI in SEQUE, trattale come UNA SOLO. lo puoi fare perché tutto è isentropico!

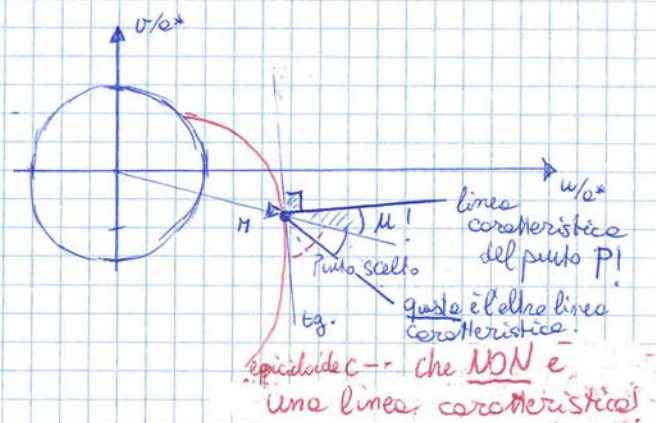


• LINEE CARATTERISTICHE sul piano FISICO ED ODOGRAFICO.

• in generale, nel piano ODOGRAFICO le LINEE di MACH sono disegnate in 2 MODI EQUIVALENTI:

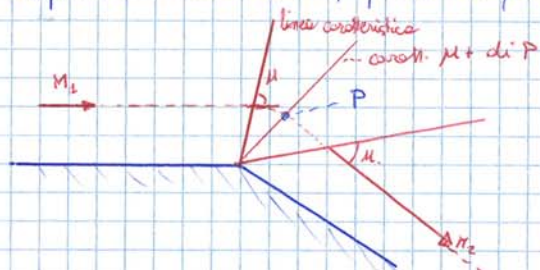
① dal MACH considerato tracci 2 linee inclinate di $\pm \mu$

② tracciando la PERPENDICOLARE alla TANGENTE dell'EPICICLOIDE, verrà già la linea caratteristica non disegnata.



EPICICLOIDE \neq LINEA CARATTERISTICA!

il punto interessante è che, prendendo quest'ocaso:



prendiamo un generico punto all'interno del fascio di espansione

che avrà un MACH DUE linee caratteristiche

una, quella inclinata di $+\mu$ sarà l'onda di espansione

l'altra, quella inclinata di $-\mu$ non ha un significato fisico particolare.

• TUTTI i PUNTI appartenenti alla caratteristica μ di P, hanno LO STESSO MACH, la stessa grandezza.

⑥ ora: $\frac{p_1}{p_2}$: Valgono le relazioni dell'isentrofica...

quindi basterà dividere sopra e sotto per p_0 :

$$\frac{p_1/p_0}{p_2/p_0} = \frac{(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2)^{-\frac{1}{\gamma-1}}}{(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2)^{-\frac{1}{\gamma-1}}}$$

⑦ invece, a_1/a_2 è banalmente il rapporto delle radici delle temperature, come visto tante volte...

$$a_1/a_2 = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

ma, volendolo legare **ESCLUSIVAMENTE** al M locale sfruttando l'isentrofica:

$$\frac{a_1}{a_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \sqrt{\frac{T_1/T_0}{T_2/T_0}} = \frac{(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2)^{-\frac{1}{2}}}{(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2)^{-\frac{1}{2}}}$$

⑧ quindi, mettendo tutto assieme:

$$\frac{l}{h} = M_2 \left[\frac{(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2)^{\frac{1}{2}(\frac{\gamma}{\gamma-1} + \frac{1}{2})}}{(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2)^{\frac{1}{2}(\frac{\gamma}{\gamma-1} + \frac{1}{2})}} \right]$$

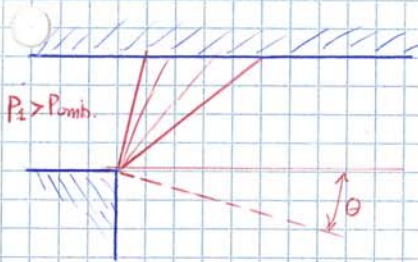
in particolare, per l'aria:

$$\frac{l}{h} = M_2 \left[\frac{(1 + 0,2 M_1^2)^3}{(1 + 0,2 M_2^2)^3} \right]$$

● **GETTO SOTTOESPANSO**

nella trattazione, consideriamo un getto simmetrico. Per semplificare, immaginiamo che al posto dell'angolo di simmetria ci sia una parete.

Ora partiamo con un disegno:



● il getto è sottoespanso, quindi, per mettersi "in regola" con l'ambiente esterno, deve avvenire un'espansione.

Chiaro che la corrente non deflette di 90°...
→ si FORMA una **SLIPLINE** il cui angolo è regolato dalla condizione $P_2 = P_{amb}$.

→ per **ALCOU** sappiamo che si tratta di un'isentrofica

⇒ Pressioni totali = ⇒ $P_{01} = P_{02}$

P_{02} è nota. P_2 è imposta → calcoli M_2 → $\gamma(M_2)$ → θ !

● ora, purtroppo nella realtà dei fatti, **LE ESPANSIONI** si **RIFLETTONO** sulla **"PARETE"** di sopra e sulle **SLIPLINE**.

⇒ il GAS si **ESPANDE** + del meccanismo!



● riflettendo sopra e sotto, la slipline si curva verso l'alto... IL FASCIO inizia a **CONVERGERE**, ed AVVIENE una **COMPRESSIONE**.

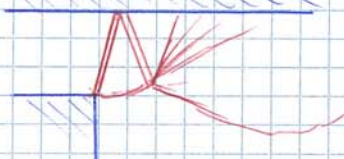


lesion converge:

la compressione, riportata a condizioni di **SOTTOESPANSIONE**. il **CICLOSI RIPETE!**

● **GETTO SOVRAESPANSO.**

● Anche un'espansione all'uscita, avrà un **URTO OBLIQUO**.



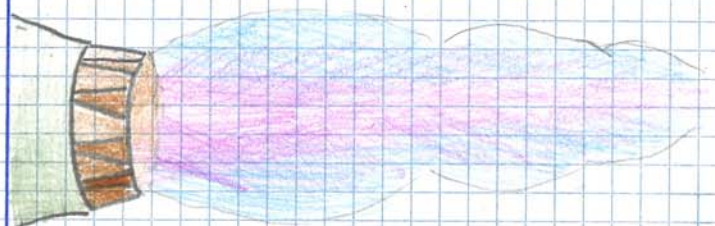
esso si rifletterà, e comprimerà ulteriormente il gas

⇒ troppo compresso ⇒ **ESPANSIONE!**

il **ANGOLO** del β del primo urto, può essere svolto così:

conosco $P_2 = P_{amb}$ → dal rapporto P_2/P_1 , ricavo i **MACH NORMALI** che me lo permettono.

→ da M_{1n} , e conoscendo M_1 , trovo $\sin \beta$ → β ! e, del θ - R -Mach, pure il θ !



CAPITOLO 4 - FLUSSI LINEARIZZATI

4.1: INTRODUZIONE ED EQUAZIONI

• per la prima volta in questo corso, introduciamo l'ipotesi di PICCOLE PERTURBAZIONI!

SE noi abbiamo PROFILI SOTTILI ed α piccoli. Vedremo poi cosa implica questo.

• PERTURBAZIONE: ipotizziamo che $V_{\infty} = (V_{\infty}, 0, 0)$, cioè V_{∞} è // ad x .

la velocità generica in un punto lo posso scrivere come

$$V = \begin{cases} V_{\infty} + u' \\ v' \\ w' \end{cases}$$

o, in alternativa, usando il potenziale delle velocità,

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ V_y &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ V_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{aligned}$$

ora mentre queste Φ sono maiuscole e sono quelle già scritte 2 o 3 volte, introduco ϕ minuscolo, POTENZIALE di PERTURBAZIONE.

me risulta che

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = V_{\infty} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = V_{\infty} + \phi_x \quad \text{OCCHIO}$$

$$V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \phi_y$$

$$V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \phi_z$$

e le derivate seconde? essendo V_{∞} una costante, corrispondono:

$$\phi_{xx} = \phi_{xx} \quad \phi_{yy} = \phi_{yy} \quad \phi_{zz} = \phi_{zz} \quad \phi_{xy} = \phi_{xy} \dots \text{etc.}$$

DIMOSTRAZIONE 22

EQUAZIONE delle PERTURBAZIONI.

① Prendiamoci la "giga equation" dei potenziali delle velocità:

$$\begin{aligned} (1 - \frac{\Phi_x^2}{a^2}) \phi_{xx} + (1 - \frac{\Phi_y^2}{a^2}) \phi_{yy} + (1 - \frac{\Phi_z^2}{a^2}) \phi_{zz} - 2 \frac{\Phi_x \Phi_y}{a^2} \phi_{xy} \\ - 2 \frac{\Phi_x \Phi_z}{a^2} \phi_{xz} - 2 \frac{\Phi_y \Phi_z}{a^2} \phi_{yz} = 0 \end{aligned}$$

② Sostituiamo ai potenziali della velocità, i potenziali di perturbazione. fa attenzione che $\Phi_x = V_{\infty} + \phi_x$!

inoltre, moltiplica tutto per a^2 .

$$\begin{aligned} (a^2 - (V_{\infty} + \phi_x)^2) \phi_{xx} + (a^2 - \phi_y^2) \phi_{yy} + (a^2 - \phi_z^2) \phi_{zz} - 2 \phi_x \phi_y \phi_{xy} \\ - 2 (V_{\infty} + \phi_x) \phi_z \phi_{xz} - 2 \phi_y \phi_z \phi_{yz} = 0 \end{aligned}$$

③ Ora torniamo alle velocità. rimane più chiaro!

$$\begin{aligned} (a^2 - (V_{\infty} + u')^2) \frac{\partial u'}{\partial x} + (a^2 - v'^2) \frac{\partial v'}{\partial y} - (a^2 - w'^2) \frac{\partial w'}{\partial z} - 2 (V_{\infty} + u') v' \frac{\partial u'}{\partial y} \\ - 2 (V_{\infty} + u') w' \frac{\partial u'}{\partial z} - 2 v' w' \frac{\partial v'}{\partial z} \end{aligned}$$

④ per rendere l'equazione UTILIZZABILE, a non ci piace. sarebbe meglio avere a_{∞} .

per liberarci di a , ricordiamo l'equazione dell'energia scritte con le velocità e le velocità del suono. ovvero:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} = \text{cost.}$$

in particolare, prendiamo i generici valori locali $[a^2 \rightarrow a^2; V^2 \rightarrow (V_{\infty} + u')^2 + v'^2 + w'^2]$ e confrontiamoli con quelli a monte, ben noti! $[a^2 \rightarrow a_{\infty}^2; V^2 \rightarrow V_{\infty}^2]$

⑤ Sostituiamo ed isoliamo a^2 :

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{(V_{\infty} + u')^2 + v'^2 + w'^2}{2} = \frac{a_{\infty}^2}{\gamma-1} + \frac{V_{\infty}^2}{2}$$

$$\Rightarrow a^2 = a_{\infty}^2 - \frac{(\gamma-1)}{2} (2u'V_{\infty} + u'^2 + v'^2 + w'^2)$$

⑥ Sostituendo l' a^2 trovato e riordinando, troviamo una equazione UNIVERSALMENTE VALIDA, dal momento che NON ABBIAMO FATTO ASSUNZIONI!

$$\begin{aligned} (1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = M_{\infty}^2 \left[(\gamma+1) \frac{u'}{V_{\infty}} + \left(\frac{\gamma+1}{2} \right) \frac{u'^2}{V_{\infty}^2} + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) \frac{v'^2 + w'^2}{V_{\infty}^2} \right] \frac{\partial u'}{\partial x} \\ + M_{\infty}^2 \left[(\gamma-1) \frac{u'}{V_{\infty}} + \left(\frac{\gamma+1}{2} \right) \frac{v'^2}{V_{\infty}^2} + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) \frac{w'^2 + u'^2}{2} \right] \frac{\partial v'}{\partial y} \\ + M_{\infty}^2 \left[(\gamma-1) \frac{u'}{V_{\infty}} + \left(\frac{\gamma+1}{2} \right) \frac{w'^2}{V_{\infty}^2} + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) \frac{u'^2 + v'^2}{2} \right] \frac{\partial w'}{\partial z} \\ + M_{\infty}^2 \left[\frac{u'}{V_{\infty}} \left(1 + \frac{u'}{V_{\infty}} \right) \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + \frac{u'}{V_{\infty}} \left(1 + \frac{u'}{V_{\infty}} \right) \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + \frac{v' w'}{V_{\infty}^2} \left(\frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \right] \end{aligned}$$

probabilmente l'equazione più brutta che abbia mai visto.

⑦ PERÒ, per fortuna, INTRODUCIAMO L'IPOTESI dei PROFILI SOTTILI!

u', v', w' sono MOLTO MINORI di V_{∞} , quindi:

$$\frac{u'}{V_{\infty}} \approx 0 \quad \frac{v'}{V_{\infty}} \approx 0 \quad \frac{w'}{V_{\infty}} \approx 0, \text{ e analoghe ragioni}$$

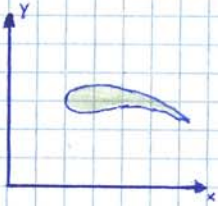
$\frac{u'^2}{V_{\infty}^2} \approx 0 \dots \text{etc.}$ INSOMMA, SPARISCE TUTTO il secondo membro. Rimane:

$$(1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

• **RELAZIONE fra INCOMPRESSIBILE ed ALTO COMPRESSIBILE**

ora che abbiamo dimostrato che, in ogni caso, $C_p = -\frac{2u'}{V_\infty}$, vediamo gli effetti che la compressibilità ha sul profilo.

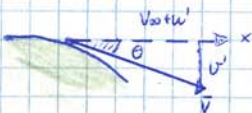
⇒ **Geometria e condizione di tangenza.**



prendiamo un profilo nel piano fisico. esso avrà una forma che può essere "matematizzata"

$y = f(x)$

facciamo ora uno "zoom" su un tratto di parete:



la velocità deve rispettare la **CONDIZIONE DI TANGENZA**

quindi, occorre che $\tan \theta = \frac{df}{dx}$

scomponendo la velocità in componenti:

$\tan \theta = \frac{v'}{V_\infty + u'} \approx \frac{v'}{V_\infty}$
piccolo risp. a V_∞ .

• introduciamo ora il **Potenziale di perturbazione**, ove $\phi_y = v'$

verrà che, in generale, $\phi_y = \frac{\partial \phi}{\partial x} V_\infty$ **Cond. di tangenza.**

DIMOSTRAZIONE 24

Relazione fra C_{pz} e C_{pc} .

① Prendiamo l'equazione del potenziale delle velocità linearizzata, e scriviamola per il 2D ($\phi_{z,z} = 0$)

$(1 - M_\infty^2) \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$

② introduco un **coefficiente** $\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}$, **occhio** che è **TUTTA** un'altra cosa che il β della compressibilità (⇒ **0.5**) quindi

$\beta^2 \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$

③ Crea un piano **TRASFORMATO** per il compressibile, con assi ξ (al posto di x) e η (al posto di y).



Con queste conversioni di coordinate

$\xi = x$

$\eta = \beta y$

[RISCALAMO y per adattarlo al compressibile.

il profilo avrà una nuova forma $\eta = g(\xi)$

④ Il potenziale di perturbazione cambierà in

$\bar{\phi} = \beta \phi$

le derivate necessarie per la conversione di coordinate sono

$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \beta$

⑤ Calcoliamoci ora le derivate prime e seconde da sostituire nell'equazione dei potenziali

$\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \xi} = \frac{1}{\beta} \bar{\phi}_\xi$

$\phi_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \eta} = \bar{\phi}_\eta$

ci occorrono le derivate seconde; da sostituire:

$\phi_{xx} = \frac{\partial \phi_x}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\phi}_\xi}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\phi}_\xi}{\partial \xi} = \frac{1}{\beta} \bar{\phi}_{\xi\xi}$

face l'ho da prima, moltiplico e divido per β

$\phi_{yy} = \frac{\partial \phi_y}{\partial y} = \frac{\partial \bar{\phi}_\eta}{\partial y} = \frac{\partial \bar{\phi}_\eta}{\partial \eta} = \beta \bar{\phi}_{\eta\eta}$

⑦ Infine sostituiamo nell'eq. del pot. della velocità

$\beta^2 (\phi_{xx}) + \phi_{yy} = 0$

$\beta^2 (\frac{1}{\beta} \bar{\phi}_{\xi\xi}) + \beta \bar{\phi}_{\eta\eta} = 0 \Rightarrow \bar{\phi}_{\xi\xi} + \bar{\phi}_{\eta\eta} = 0$

che è l'equazione di Laplace ⇒ si può fare un'analisi fra i 2 campi!

⑧ Ora, prendiamo la condizione di tangenza.

DAL MOMENTO che NON ABBIAMO scelto l'axe x , V_∞ non viene risolto, quindi la condizione di tangenza rimane, in analogia a quanto definito prima

$\bar{\phi}_\eta = V_\infty \frac{\partial g}{\partial \xi}$

Indichiamo V_∞ questa e dall'eq. in (x, y) ,

$V_\infty = \bar{\phi}_\eta = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \eta} \quad V_\infty = \phi_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$

e confrontiamole: $\bar{\phi}_\eta \frac{\partial \xi}{\partial y} = \phi_y \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)$

dato che $\phi_y = \bar{\phi}_\eta$, vanno via. rimane che:

$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}$

⑨ infine relazioniamo il C_{pc} -- $\bar{\phi}_\xi$ è la velocità u' nel piano trasformato, che chiamo \bar{u}

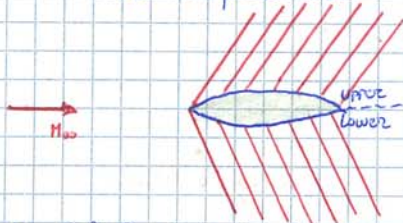
$C_{pc} = -\frac{2u'}{V_\infty} = -\frac{2\phi_x}{V_\infty} = -\frac{2\bar{\phi}_\xi}{V_\infty} \frac{1}{\beta} = -\frac{2\bar{u}}{V_\infty \beta}$

⑤ analogamente, per il ventre:

$$\phi = \text{cost.} \iff \frac{\partial y}{\partial x} = -\tan(\mu_0)$$

cambia solo il segno.

quindi siamo in questo caso



questa è la forma che ha $\phi = \text{cost.}$ su ogni linea, il POTENZIALE di PERTURBAZIONE non cambia.

⑥ Conoscendo ora ϕ in modo così approfondito, non dobbiamo dimenticarci del target, cioè u' , in modo da calcolare il C_p !

Ricordiamo che

$$u' = \phi_x \quad \text{e} \quad v' = \phi_y$$

⑦ noi sappiamo che ϕ ha una certa forma sul dorso ed un'altra sul ventre. **ORA ANALIZZIAMO SOLO IL DORSO:**

$$u' = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial (\beta(x-ly))}{\partial x} = \beta \cdot \frac{\partial (x-ly)}{\partial x} = \beta$$

lasciamo β
moltiplica sopra e sotto per $\frac{\partial (x-ly)}{\partial x}$

$$v' = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial (\beta(x-ly))}{\partial y} = \beta \cdot \frac{\partial (x-ly)}{\partial y} = -\beta l$$

⑧ quindi risolvendo il sistema (cioè isolando e uguagliando)

$$u' = -\frac{v'}{l}$$

⑨ infine, ponendo la condizione di tangenza; ed ipotizzando θ piccoli, possiamo dire che $\frac{\partial \text{profilo}}{\partial x} = \tan \theta \approx \theta$.

quindi $\theta = \frac{v'}{V_{\infty}} = -\frac{u'}{V_{\infty}}$

sost. u' trovato

⑩ ti accorgi che, isolando $-\frac{u'}{V_{\infty}}$, viene qualcosa di molto simile al C_p : con un 2 veico posto!

$$\Rightarrow C_{p_u} = + \frac{2\theta}{\lambda}$$

⑪ per il lower, i passaggi sono gli stessi, ma il cambia segno.

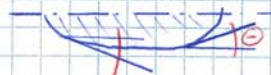
$$C_{p_l} = - \frac{2\theta}{\lambda}$$

⑫ posso curare la discrepanza dei segni imponendo un modo distinto per risolvere θ :

UPPER:



LOWER:



in breve: θ è POSITIVO se SI ALLONTANA DALLA CORRENTE!

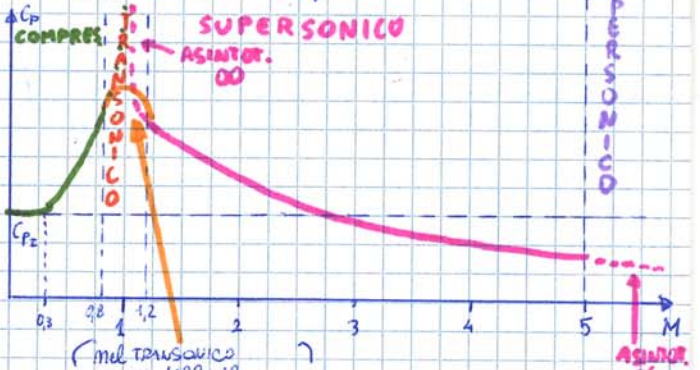
[sopra ci si allontana se si sale, sotto se si scende]

Così verrà:

$$C_p = \frac{2\theta}{\lambda} \quad \text{C.V.D.}$$

N.B.: θ si misura SEMPRE dalla CORRENTE A MONTE da riciclare nei profili con incidenza!

• Commenti: possiamo ora vedere l'andamento del C_p nel supersonico, vedendo a riprendere il profilo in (4.2)

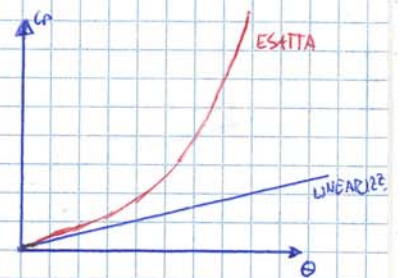


nel transonico non è difficile immaginare che le curve si raccordino. (il COME è complicato)

(l'iperfonico ha altre leggi, che vedremo!)

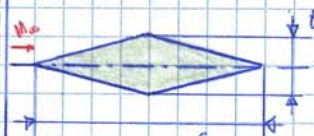
• CAMPO DI VALIDITÀ delle TEORIE LINEARIZZATE

finché i θ sono piccoli, la teoria esatta (utili espansioni) e quella linearizzata vanno d'accordo, ma poi DIVERGONO!



• Sono facili da dimostrare, ma ecco alcuni esempi.

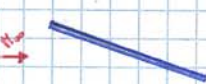
ROMBO INCIDENZA NULLA:



$$C_{D0} = \frac{4}{\lambda} \left(\frac{t}{c}\right)^2$$

$$C_i = C_{T0} = 0$$

LAMINA PIANA INCIDENZA α :



$$C_{D2} = \frac{4\alpha}{\lambda \sqrt{M^2 - 1}}$$

lineare

$$C_p = \frac{4\alpha^2}{\lambda \sqrt{M^2 - 1}} = \alpha C_u$$

quadratico

● PORTANZA

per come abbiamo definito gli angoli, $\theta_u = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_u - \alpha$
 e $\theta_c = \alpha - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_c$ possiamo calcolare la portanza:

DIMOSTRAZIONE 26

C_e Supersonico

① Ci scriviamo i c_p upper e lower

$$C_{p,u} = \frac{2\theta_u}{\lambda} = \frac{2}{\lambda} \left(\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_u - \alpha \right)$$

$$C_{p,c} = \frac{2\theta_c}{\lambda} = \frac{2}{\lambda} \left(\alpha - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_c \right)$$

② integriamo il ΔC_p sulla lunghezza adimensionata:

$$C_L = \int_0^1 (C_{p,c} - C_{p,u}) d\left(\frac{x}{c}\right) \text{ e sostituiamo.}$$

$$③ C_L = \int_0^1 \frac{2}{\lambda} \left(\alpha - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_c - \left(\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_u - \alpha \right) \right) d\left(\frac{x}{c}\right)$$

④ l'integrale $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_c$ e quello di $-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_u$

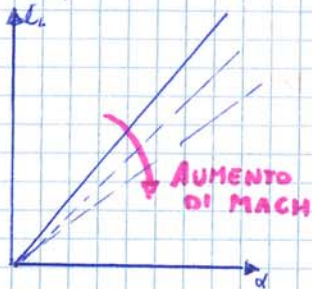
Parrebbero ENTRAMBI 0, perché:

$$\int_0^1 \left(\frac{dy}{dx}\right) d\left(\frac{x}{c}\right) = \int_0^1 d\left(\frac{y}{c}\right) = \left[\frac{y}{c}\right]_0^1 = y\left(\frac{1}{c}\right) - y(0) = 0$$

⑤ quindi:

$$C_L = \int_0^1 \frac{4\alpha}{\lambda} d\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{4\alpha}{\lambda} \Rightarrow \boxed{C_L = \frac{4\alpha}{\lambda} \sqrt{M_\infty^2 - 1}} \text{ c.v.d.}$$

● **NOTA** come il C_L NON DIPENDE dalla forma, ma SOLO da α e MACH. È identico a quello della lamina piana.



● RESISTENZA

prima di cominciare la dimostrazione, occorre fare attenzione ad una cosa:

lo abbiamo accennato sugli angoli θ_u e θ_c, però è bene ribadire che nel dD, i c_p si SOMMANO, non si sottraggono!



$$dD = dD_u + dD_c = (P - P_{\infty})_u \sin \theta_u dS + (P - P_{\infty})_c \sin \theta_c dS$$

tratto da superficie

DIMOSTRAZIONE 27

C_D supersonico

① Come visto, la "fettina" dS ha una dD uguale a:

$$dD = (P - P_{\infty})_u \sin \theta_u dS + (P - P_{\infty})_c \sin \theta_c dS$$

② però:

$$dS \approx dx$$

θ_u e θ_c non piccoli nella teoria linearizzata, quindi

$$\sin \theta_u \rightarrow \theta_u \quad \sin \theta_c \rightarrow \theta_c$$

③ posso Adimensionare dividendo tutto per ρ_∞ · c, e rimane

$$dC_D = C_{p,u} \theta_u d\left(\frac{x}{c}\right) + C_{p,c} \theta_c d\left(\frac{x}{c}\right)$$

④ Integro:

$$C_D = \int_0^1 [C_{p,u} \theta_u + C_{p,c} \theta_c] d\left(\frac{x}{c}\right)$$

⑤ però; dato che C_p = $\frac{2\theta}{\lambda}$, ottengo che

$$C_D = \frac{2}{\lambda} \int_0^1 [\theta_u^2 + \theta_c^2] d\left(\frac{x}{c}\right)$$

⑥ Sostituendo gli angoli:

$$C_D = \frac{2}{\lambda} \int_0^1 \left[\left(\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_u - \alpha\right)^2 + \left(\alpha - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_c\right)^2 \right] dx$$

↓ sviluppo i quadrati:

$$C_D = \frac{2}{\lambda} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_u^2 - 2\alpha \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_u + \alpha^2 + \alpha^2 - 2\alpha \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_c + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_c^2 \right] d\left(\frac{x}{c}\right)$$

⑦ accoppiamo 2α², il cui integrale fa $\left[2\alpha^2 \left(\frac{x}{c}\right)\right]_0^1 = 2\alpha^2$

• Come prima, gli integrali $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) d\left(\frac{x}{c}\right)$ fanno 0, anche se son moltiplicati per 2α, che è una costante.

⇒ RIMANE (posto fuori x)

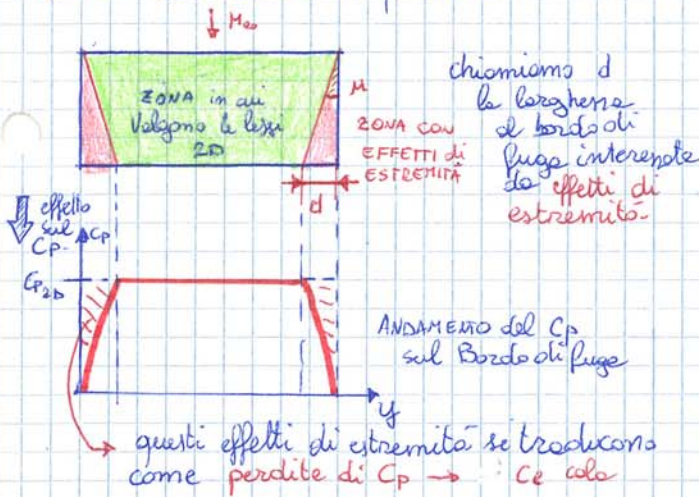
$$\boxed{C_D = \frac{4\alpha^2}{\lambda} + \frac{2}{\lambda} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_u^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_c^2 \right] dx} \text{ c.v.d.}$$

● Non abbiamo ancora parlato di viscosità! QUESTA È SOLO WAVE DRAG!!

● Partiamo dalla D di una lamina piana, e comunque un effetto che tiene conto della forma! può aumentare o diminuire; non lo sappiamo!

⇒ C_D (forma, α, Mach)

vediamo cosa accade in questo caso:



CALCO di CL

$$\Delta C_L = \frac{1}{2} C_{L2D} \frac{b}{c} = \frac{1}{2} C_{L2D} \frac{c}{d}$$

considerato che $b/c = A$, cioè Allungamento dove più l'ala è allungata, meno perdono

ora, dato che $d = c \cdot \tan(\mu)$

$$\Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{1}{\tan \mu} = \sqrt{M_{\infty}^2 - 1}$$

e quindi $\Delta C_L = \frac{1}{2} \frac{C_{L2D}}{A \cdot \sqrt{M_{\infty}^2 - 1}}$

calcoliamo la % di EFFICIENZA

$$\frac{C_L}{C_{L2D}} = \frac{C_{L2D} - \Delta C_L}{C_{L2D}} = 1 - \frac{1}{2A \sqrt{M_{\infty}^2 - 1}}$$

⇒ il profilo rende di più a M alti e con notevole allungamento.

⇒ ha un caso "estremo", cioè quello in cui $2A \sqrt{M_{\infty}^2 - 1} = 1$ (che porterebbe a un $C_L/C_{L2D} = 0$)

che corrisponde a:



! NON-HO RESISTENZA INDOTTA NEL SUPERSONICO

questo perché l'informazione legata alle Di riesce nel vortice a staffa dietro il BORDO di fuga, che però, essendo il moto SUPERSONICO, non riesce a "risalire".

⇒ Soluzione: ALA CON RASTREMAZIONE:



sostanzialmente, perché questo accade, occorre che

$$90^\circ - \lambda - \mu > 0 \text{ cioè che ci sia un "buco" fra le M.}$$

per valutare l'effetto della rastremazione:

$$n = \frac{c \lambda}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \text{ coefficiente che tiene conto di } \mu \text{ e di } \lambda.$$

$C_p^* = \frac{C_{p2D}}{\sqrt{1-n^2}}$ stiamo analizzando il Cp! andrà integrato x le altre grandezze!

⇒ CONSIDERAZIONI SULL'ALA A FRECCIA



quindi, in teoria, sarebbe SVANTAGGIOSO.

PERÒ, nel TRANSONICO (⇒ 4.6) ci sono dei vantaggi, per cui ALA A FRECCIA VARIABILE

4.6. TRANSONICO

● M_∞ Critico:

● lungo il dorso del profilo la velocità aumenta, e momentaneamente, più il Cp è NEGATIVO, più la velocità locale è ELEVATA.

il M_{∞cr} è quello che PORTA LOCALMENTE ad avere M=1.



con M_∞ compresi fra M_{∞cr} e M_∞=1 siamo nel "Vizio" del transonico: [DRAG RISE]

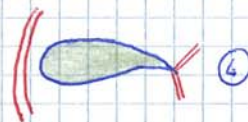
⇐ vizio che avanza all'aumento di Mach



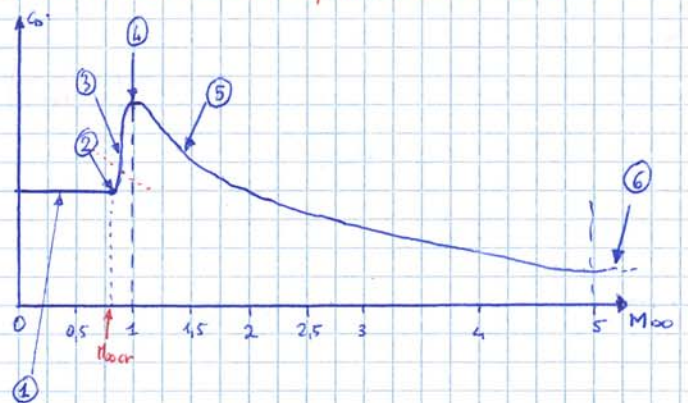
⇐ vizio che si genera, e poi avanza all'aumento di Mach.

⇒ Finché:

$$M_{\infty} = 1$$



● ANDAMENTO del C_D in funzione di MACH:



① Incomprensibile ed alto compressibile: il C_D NON DIFENDE dal MACH!

⚠ sebbene il Cp > Cp_i, la DISTRIBUZIONE RESTA TALE PERCUÌ RESTA IL PARADOSSO di D'ALEMBERT.

②, ③ e ④ sono rappresentati sopra:

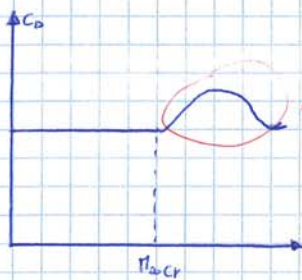
⑤ come visto, nel supersonico C_D ∝ 1 / (M_∞² - 1)

⑥ IPERSONICO

4.7 METODI COSTRUTTIVI - TRANSONICO

REGOLA delle AREE di WITHCOMB

avevamo visto come era l'andamento del C_D in funzione del $M_{0.5}$.



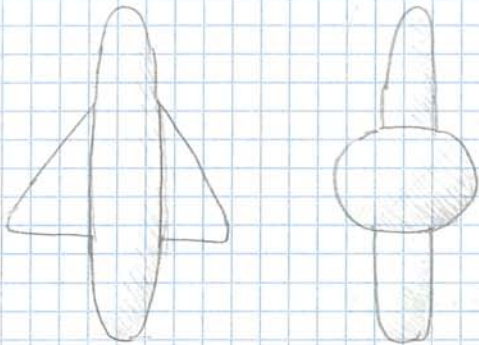
questo è il C_D CONCRETO noi vogliamo solo il WAVE DRAG.

quindi, un aspetto che inizia a manifestarsi solo con $M_{0.5} > M_{0.5}^{tr}$.

Ciò che è stato scoperto è il seguente dato:

WITHCOMB: la forma del corpo conta poco, quel che conta è la DISTRIBUZIONE delle AREE.

Che vuol dire, in pratica, che questi 2 corpi hanno circa lo stesso C_{DW} .



⇒ qual è la DISTRIBUZIONE di AREE OTTIMALE? è quella che CORRISPONDE AL FUSO di SEARS-HACK.



$$\frac{r(x/L)}{r_{max}} = \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]^{0.75}$$

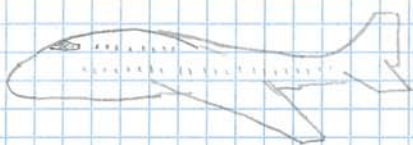
il C_D corrispondente a questo fusò è:

$$C_{DW} = \frac{24V}{L^3} \quad \text{dove } V \text{ è il volume del corpo}$$

All'atto pratico, come addegniamo un velivolo a questa distribuzione?

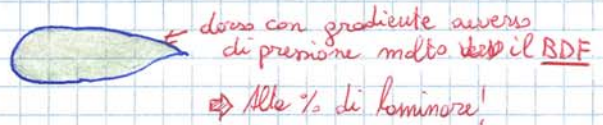
sostanzialmente il punto "Bretto" che dà + problemi, è l'innesto delle ali: lo si rende meno brusco riducendo il diametro delle fusoliere.

ad esempio, il B-747

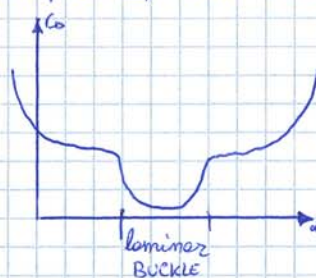


PROFILI ALARI

Un profilo con un'ampia percentuale di flusso laminare sul dorso, riduce più di per sé la DRAG. ⇒ Profili laminari.

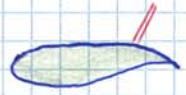
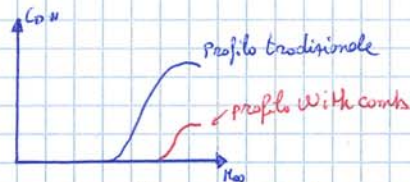


in pratica, il $C_D(\alpha)$ ha questa forma:



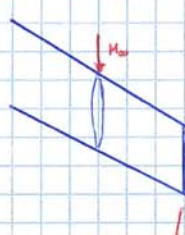
curva: se usciamo dalla laminar BUCKLE la resistenza è molto peggiore!

Secondo Withcomb un profilo che provoca un urto + o valle, fa sì che l'urto sia più debole.



Se il velivolo è propettato a attraversare presso il muro del suono, questo profilo è meglio. Se invece, il velivolo vola molto tempo in supersonico, tendo di più al ROMBO!

FRECCIA



1) A parità di S, un'ala e freccia è più affusolata perché c è + lungo!

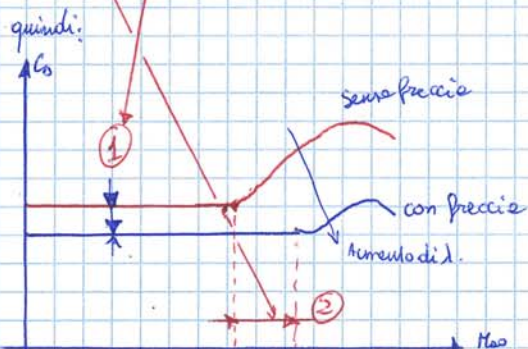
questo FA CALARE il C_D NEL SUO COMPLESSO,

2) Inoltre, il $M_{0.5}$ è quello NORMALE AL BDA, non quello $M_{0.5}$:

$$M_{0.5n} = M_{0.5} \cos \Lambda$$

quindi, A parità di $M_{0.5}$, l'aumento di Λ provoca un calo di $M_{0.5n}$

⇒ POSSO ANDARE + VELOCE



② la forza peso, è pure uguale a

$$F = (p - p_{\infty}) \cdot A$$

Quindi, eguagliando i 2:

$$(p - p_{\infty}) = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \cdot \sin^2 \alpha$$

③ e ADIMENSIONANDO otteniamo il C_p !

$$C_p = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2} = 2 \sin^2 \alpha \quad \text{c.v.d.}$$

questo risultato, molto semplice e diretto non certo per il moto ipersonico, si dimostra molto valido!

nel 1955, LEES corregge la formula tenendo conto dell'urto che si forma e monte.

$$C_p = C_{p \max} \sin^2 \theta$$

Comunque, senza andare a complicare la vita, commentiamola!

LEGGE del SENO QUADRO di NEWTON

$$C_p = 2 \sin^2 \theta$$

⚠️ attenzione, nei calcoli, solo la **FACCIA LAMBIATE** da CORRENTE

⇒ quindi non quelle in ombra.

RAPIDI CALCOLI 9

CONFRONTO NEWTON - URTO OBLIQUO

• riprendiamo la relazione del C_p ottenuta portando $M_{\infty} \rightarrow \infty$

$$C_p = \frac{2}{\gamma + 1} \sin^2 \beta$$

$$\beta = \theta \cdot \frac{(\gamma + 1)}{2}$$

• A cause dell' AUMENTO dei GDL per le alte T, $\gamma \rightarrow 1$, quindi:

$$\beta \rightarrow \theta \quad \Rightarrow \quad C_p = 2 \sin^2 \theta \quad \text{c.v.d.}$$

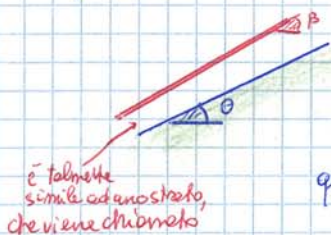
• Commento su β_2 / β_1

avevamo visto come $\frac{\beta_2}{\beta_1}$, per mach che $\rightarrow \infty$,

$$\beta_2 \rightarrow \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \beta_1$$

se ora $\gamma \rightarrow 1$, $\frac{\beta_2}{\beta_1} \rightarrow \infty$ questo si spiega perché

θ e β sono quasi uguali e quindi:



continua ed entrano poi in uno strato che non si "inspessisce" quindi $\beta_2 \rightarrow \infty$!

THIN SHOCK LAYER

LAMINA PIANA IPERSONICA



$$C_L = C_p \cos \theta$$

$$C_D = C_p \sin \theta$$

quindi $C_L = 2 \sin^2 \theta \cos \theta$
 $C_D = 2 \sin^3 \theta$

cioè varia con quadrato e cubo di α .
 nel superonico, era lineare e quadratico!

CAPITOLO 5: LO STRATO LIMITE

5.1 EQUAZIONE Q.D.M

⚠️ l'equazione delle CONTINUITÀ, resta identica al caso inviscido e senza scambi termici

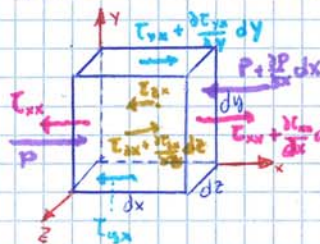
Per l'analisi degli effetti viscosi, PRENDIAMO L'EQUAZIONE in FORMA DIFFERENZIALE LAGRANGIANA:

Quante quantità di moto scambiano le forze viscosi?

DIMOSTRAZIONE 30

Quantità di Moto delle forze viscosi.

① Disegniamo il cubetto $dx dy dz$, e tracciamo le tensioni parallele ad x ricorda la convenzione: T_{ij} - direzione per dare il nome alle tensioni!



ⓐ) Sulle facce E ed ad uno dei 3 piani formati dagli assi, tracciamo lo spiro di taglio in direzione $-x$

ⓑ) Sulle facce opposte, in direzione $+x$, metti gli incrementi

ⓒ) Non dimenticare P sulle facce yz e il suo incremento in quella opposta!

② Applicando il bilancio della q dm, hoche

$$m \frac{Du}{Dt} = \sum F_x \quad F_x \text{ contiene: } - \text{Pressioni}$$

$$- \text{Sforzi viscosi}$$

$$- \text{Forze di volume}$$

③ ogni pressione e T va moltiplicata per l'area della faccia dove è applicata! quindi

$$\left(-T_{xx} + p + T_{xx} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} dx + p - \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz +$$

$$\left(-T_{xy} + T_{xy} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz + \left(-T_{zx} + T_{zx} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy$$

$$+ g_x \cdot \rho dx dy dz = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \right) \rho dx dy dz$$

forze di volume

5.2 EQUAZIONE DELL'ENERGIA

in forma Lagrangiana differenziale, era:

$$\frac{D}{Dt} \left(\rho + \frac{v^2}{2} \right) \cdot \rho dx dy dz = -\nabla \cdot (\rho \vec{V}) + \rho \vec{q} + \rho (\vec{f} \cdot \vec{V}) + L_{visc} + Q \cdot \lambda$$

dovremmo analizzare questi 2 termini!

DIMOSTRAZIONE 31

IL LAVORO degli SFORZI VISCOSI

1) Andiamo ora il lavoro lungo l'asse x. il nostro target è una POTENZA. che si ottiene:

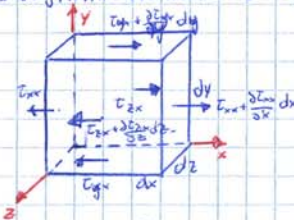
$$L_t = F \cdot V \quad \text{forza} \cdot \text{velocità}$$

o sua volta, la Forza si ottiene come

$$F = T \cdot Area$$

quindi, una volta trovate le T, esse andranno moltiplicate prima per dx e poi per l'area!

2) Disegniamo di nuovo il cubetto elementare.



le frecce sono sempre le stesse. (lasciamo per il momento p, che tanto lo abbiamo già calcolato)

3) Come detto in 1), ecco come facciamo:

$$x) \left(-T_{xx}u + T_{xx}u + \frac{\partial(T_{xx}u)}{\partial x} dx \right) dy dz + (-T_{xy}u + T_{xy}u + \frac{\partial(T_{xy}u)}{\partial y} dy) dx dz + (-T_{xz}u + T_{xz}u + \frac{\partial(T_{xz}u)}{\partial z} dz) dx dy$$

ed analogamente, le altre facce:

y) ...

z) ... etc.

4) queste 3, SOMME, sono uguali a L_{visc} . Validato poi, moltiplico $dx dy dz$.

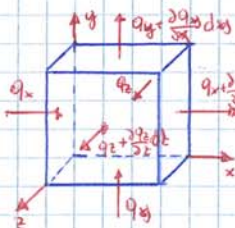
DIMOSTRAZIONE 32

ENERGIA TERMICA SCAMBIATA.

1) una piccola introduzione sulle grandezze utilizzate:

"q" è la quantità di calore scambiato per UNITÀ di SUPERFICIE per UNITÀ di TEMPO, e per questo motivo, dovrà essere MOLTIPLICATA per la Area per dare una POTENZA! [$\frac{J}{s \cdot m^2}$]

2) Il cubetto, stavolta, è semplice. SEGNI: (+) entrante (-) uscente



le frecce sia sopra che sotto, da ampie lati, SEGUONO GLI ASSI!!

3) in base alla convenzione adottata (+ entrante, - uscente):

$$\left(q_x - q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy dz + \left(q_y - q_y - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx dz + \left(q_z - q_z - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) dx dy = Q \cdot \lambda$$

4) le solite cose vanno via rimane:

$$\left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] dx dy dz$$

5) Sono 3 incognite in più, MA ME NE POSSO LIBERARE in fretta con la LEGGE di FOURIER:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$$

6) i meno si elidono, e rimane:

$$Q_{i,j} = \lambda \left[\frac{\partial T}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial y^2} + \frac{\partial T}{\partial z^2} \right] dx dy dz = \lambda (\nabla^2 T) dx dy dz$$

è costante. M NO, ma 1 si! lo ripetiamo. = Somma dei secondi!

Ora che abbiamo tutto, posso scrivere l'equazione COMPLETA dell'energia:

$$\rho \left(\frac{D}{Dt} \left(\rho + \frac{v^2}{2} \right) \right) = -\nabla \cdot (\rho \vec{V}) + \rho \vec{q} + \rho (\vec{f} \cdot \vec{V}) + \lambda \nabla^2 T + \frac{\partial (\tau_{ij} \cdot u_j)}{\partial x_i}$$

↑
lavoro
< 4, 1, 2.

COMMENTO sul termine

$$\frac{\partial (\tau_{ij} \cdot u_j)}{\partial x_i}$$

è una derivata composta, e va "smontata"

A) $u_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}$ è il LAVORO di DEFORMAZIONE. te ne accorgi perché: il GRADIENTE di τ deforma le molecole.

LAVORO sull'ENERGIA INTERNA.

B) $\tau_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ cambia la Velocità della molecola: quale velocità, se cambia, che diventa? → proprio calore → LAVORO di DISSIPAZIONE

DISSIPAZIONE ENERGIA.

Ⓢ Eq. a.d.m lungo X

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{dP_c}{dx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$$

questo è l'unico termine che si vede da subito essere trascurabile!

però, vediamo meglio questo termine:

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right)$$

questo termine è DECISAMENTE più piccolo dell'altro, e meno male...

quindi:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{dP_c}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

N.B. μ non lo tiro fuori dalla derivata perché, in generale, μ DIPENDE da T che varia con y, lo vedremo!

Ⓢ ENERGIA:

$$\rho \left[u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right] = \left(\frac{\partial (\dots)}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{yx}u + \tau_{xy}v + q_y)}{\partial y} \right)$$

qua c'è poco da dire, rimane tutto.

valoria, $\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$

questo oculo vediamo!

$$\tau_{yx} \cdot u + \tau_{xy} \cdot v + q_y$$

questo è più piccolo del suo "collega" a sinistra.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial (u^{1/2})}{\partial y}$$

da cui si vede che $\frac{\partial u}{\partial y} \ll \frac{\partial u}{\partial x}$

$$\tau_{yx} \cdot u = \mu \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \mu \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\partial (u^{1/2})}{\partial y}$$

trascurabile

$q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}$ ma T, ora vedremo perché, lo scriviamo in funzione dell'entalpia statica.

$$T = \frac{h}{C_p}$$

$$\Rightarrow q = -\frac{\lambda}{C_p} \frac{\partial h}{\partial y} = -\mu \frac{\lambda}{\mu C_p} \frac{\partial h}{\partial y}$$

divido e moltiplico per μ

quindi è poi il NUMERO di PRANDTL. e quindi $Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda}$

raccolgo μ nelle parentesi:

$$\rho \left[u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial (u^2/2)}{\partial y} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right)$$

5.4: COUETTE



flusso in un canale a pareti piane e parallele. le 2 pareti hanno due temperature diverse, quella superiore T_c quella inferiore T_w

quella superiore T_c
quella inferiore T_w

questo tipo di flusso, semplifica ulteriormente le analisi, perché

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad \text{il flusso si ripete uguale e se stesso in ogni sezione.}$$

quindi, ad esempio, $u = u(y)$
 $P_c = \text{cost.}$
etc...

• LA PARTE SUPERIORE SI MUOVE A VELOCITÀ U_c

è un caso MOLTO SIMILE ALLO STRATO UMITE. è quindi importante analizzarlo.

$v=0$: dove vuoi che vada il flusso?

quindi:

• EQ. ENERGIA:

$$\rho \left[u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial (u^2/2)}{\partial y} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right)$$

$\frac{\partial}{\partial x} = 0$ perché $v=0$

quindi:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial (u^2/2)}{\partial y} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right) = 0$$

raccolgo $\frac{1}{\mu}$, e metto l'esponente sotto un'unica derivata!

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left(Pr \frac{u^2}{2} + h \right) \right) = 0$$

perché questa equazione venga soddisfatta, occorre che l'esponente sia costante. ora, per semplificarci la vita, richiediamo semplicemente che:

$$Pr \frac{u^2}{2} + h = \text{cost.}$$

è intuitivo volere che ci sia un CONTINUO SCAMBIO fra ENERGIA CINETICA ed ENTALPIA.

per trovare il valore di questa costante, mi basterà andare alla parete inferiore, dove $u=0$

$$\Rightarrow \text{cost} = H_w \quad \text{entalpia totale di parete!}$$

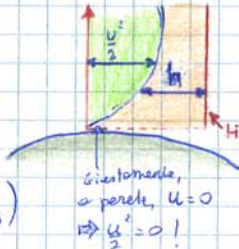
• Commenti della soluzione trovata:

$H = \text{cost.}$, in primis potremmo dire che la TEMPERATURA nel PUNTO di ARRESTO è UGUALE a T_e .
 è una cosa che non vedremo più, già per il fatto che $Pr \neq 1$!

inoltre, per vedere la relazione fra profilo di temperatura e di velocità, questo semplifica ENORMEMENTE la cose!

Posso vedere H come un "capitale" da dividere fra **Energia cinetica** (e quindi velocità) e **entalpia Statica** (e quindi temperatura).

vedi subito come la T_{max} sia proprio a parete!



ERRORE COMUNE: Attraverso lo STRATO LIMITE (leggasi $\frac{\partial}{\partial x}$) la P_0 NON RIMANE COSTANTE! è la P che rimane costante!

gli effetti viscosi si "mangiano" la pressione dinamica!

PUNTO FERMO: nel punto di ARRESTO, QUALSIASI CASO lo stia analizzando, avrà P_0 !

• Andamento del profilo di T.

Sapendo già T_e e T_w , sono abbastanza facilitato nel capire come va il profilo di T.

$H = \text{cost.}$
 ↳ confronto i dati con le condizioni fuori S.L. (e)

$$h_e + \frac{u_e^2}{2} = h + \frac{u^2}{2}$$

↳ facciamo apparire la T; dividendo tutto per c_p :

$$T_e + \frac{u_e^2}{2c_p} = T + \frac{u^2}{2c_p}$$

io volevo T: lo isolo!

$$T = T_e + \frac{1}{2c_p} (u_e^2 - u^2)$$

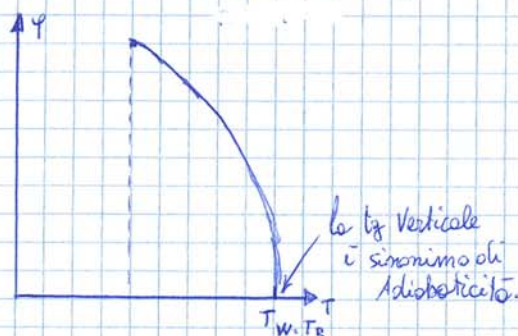
↳ raccordo T_e ;

$$T = T_e + \frac{u_e^2}{2c_p} \left(1 - \left(\frac{u}{u_e}\right)^2 \right)$$

definisco ora $\varphi = \frac{u}{u_e}$: è un parametro che mi aiuterà a confrontare S.L. CINEMATICO e TERMICO!

$$T = T_e + \frac{u_e^2}{2c_p} (1 - \varphi^2)$$

lo profichiamo: parabola con vertice in T_w



la T_e verticale è simbolo di Adiabatico.

5.5.2 S.L. ADIAB. - $Pr < 1$ (Busemann completo)

DIMOSTRAZIONE 36

Busemann - $Pr \neq 1$

① Prendiamo ancora una volta l'equazione dell'energia:

$$\rho \left(u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left(Pr \frac{h^2}{2} + h \right) \right)$$

② in un caso semplificato, come ad esempio il flusso di Couette (5.4), il termine a sinistra è nullo.

la soluzione è $Pr \frac{u^2}{2} + h = \text{cost.}$

che ci permette subito di vedere $T_w = T_e$.

② la soluzione generica dell'equazione è però **SIMILE**.

$$R \frac{u^2}{2} + h = \text{cost}$$

R è definito come FATTORE di RECUPERO,

$R = Pr$	in Couette
$R = \sqrt{Pr}$	in S.L. LAMINARE
$R = \sqrt{Pr}$	in S.L. TURBOLento.

④ Quanto vale questa costante? i dati che più ci sono utili sono quelli ("è") appena fuori dello S.L.

ma, in generale, posso calcolarla ovunque.

$$H_{rec} = \left(R \frac{u^2}{2} + h \right)$$

H_{rec} è la cosiddetta **ENTALPIA di RECUPERO**

esatto: H_{rec} è COSTANTE con y .

NON LO È ASSOLUTAMENTE CON X!!

Quando fai i conti, trovati le grandezze sopra il punto di parete che ti occorre.

⑤ A questo punto, T_{rec} è facile da calcolare:

$$T_{rec} = T_e + \frac{R u_e^2}{2c_p} \quad \text{c.v.d.}$$

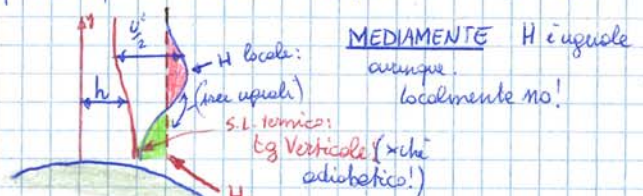
• Commenti:

→ l'**ENTALPIA TOTALE** si conserva fuori dallo Strato limite non dentro.

devi riuscire a calcolare le grandezze "e" nel punto di S.L. che vuoi analizzare!

→ il fatto che R sia < 1 , $\Rightarrow T_{rec} < T_0$

quindi, qualitativamente, ho qualcosa del genere:



MEDIAMENTE H è uguale ovunque. localmente no!

S.L. termico: T_e verticale (x è adiabatico!)

7) Quindi,

$H = C_p T (1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)$ - è l'entalpia ed il Mach nel generico punto dell'S.L.

$H_w = C_p T_w$ - entalpia a parete

$H_e = H_{0e} = C_p T_{0e}$ - pensate anche evitare di complicarsi la vita: si suppone che T_{0e} sia facile da calcolare.

8) Non sapremo mai M^2 in ogni punto dell'S.L., lo riarrangeremo!

$$M^2 = \frac{u^2}{a^2} = \frac{u^2}{a_{\infty}^2} \frac{V_{\infty}^2 a_{\infty}^2}{V_{\infty}^2 a_{\infty}^2} = \varphi^2 M_{\infty}^2 \frac{T_{0e}}{T}$$

moltiplica o dividiamo: $V_{\infty}^2 a_{\infty}^2$
 $\frac{a_{\infty}^2}{a^2} = \frac{T_{0e}}{T}$
 $\frac{V_{\infty}^2}{a_{\infty}^2} = M_{\infty}^2$
 $\frac{u^2}{V_{\infty}^2} = \varphi^2$

9) ora posso riprendere l'analogo dei campi.

$$\varphi = \frac{H - H_w}{H_e - H_w} = \frac{C_p T (1 + \frac{\gamma-1}{2} \varphi^2 M_{\infty}^2 \frac{T_{0e}}{T}) - C_p T_w}{C_p T_{0e} - C_p T_w}$$

C_p va via, il nostro obiettivo è T !

$$\varphi = \frac{T - \frac{\gamma-1}{2} \varphi^2 M_{\infty}^2 T_{0e} - T_w}{T_{0e} - T_w}$$

$$\rightarrow T = (T_{0e} - T_w) \varphi + \frac{\gamma-1}{2} M_{\infty}^2 T_{0e} \varphi^2 + T_w$$

10) Quanto coefficiente è ancora brutto. Lo sistemiamo così:

$$T_{0e} = T_{0e} (1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{\infty}^2)$$

$$\frac{\gamma-1}{2} M_{\infty}^2 = \frac{T_{0e}}{T_{0e}} - 1$$

11) il tutto rimane, raccogliendo le T simili:

$$T = T_w (1 - \varphi) + T_{0e} \varphi^2 + T_{0e} (\varphi - \varphi^2) \quad \text{c.v.d.}$$

5.6.2 SL NON ADAB. Pr ≠ 1

non stiamo a dimostrarlo, però anche qui useremo il **fattore di recupero**.

Tanto per cominciare, essendo **DIABATICO**, $T_{rec} \neq T_w$.

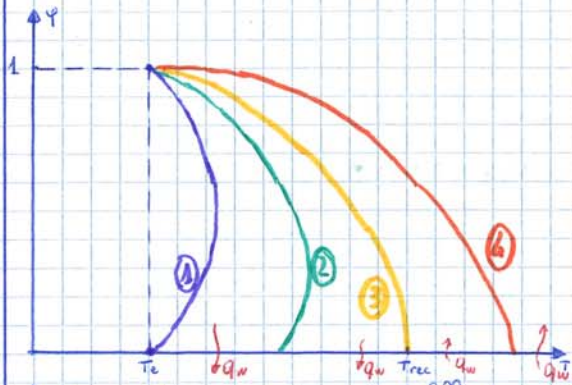
questo vuol dire che, il calcolo di T_{rec} è quello del caso adiabatico, cioè

$$T_{rec} = T_{0e} + \frac{R V_{\infty}^2}{2 C_p} = T_{0e} (1 + R \frac{\gamma-1}{2} M_{\infty}^2)$$

e, per ciò che concerne il Profilo di Temperature:

$$T = T_w (1 - \varphi) + T_{0e} \varphi^2 + T_{rec} (\varphi - \varphi^2)$$

GRAFICAMENTE, si osservano i vari casi:



fissiamo T_e , T_{rec} dipenderà dal flusso, ma lo fissiamo pure.

1) flusso ISOTERMO. particolare: $T_w = T_e$ non che zero a molto...

2) flusso con CALORE < 0: PARETE FREDDA.

TE NE ACCORGI CHE $T_w < T_{rec}$. la parete è fredda! il flusso scalda la parete.

3) flusso ADIABATICO. (è quello di 5.5)

4) flusso con PARETE CALDA: $T_w > T_{rec}$. il fluido assorbe calore dalla parete, $q_w > 0$

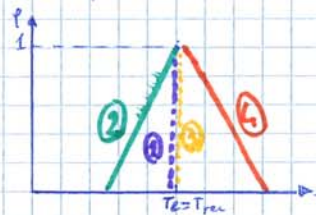
Semplificazione: $M < 0,3$

Succede che $T_{rec} \rightarrow T_{0e}$ e che la parabola diventa una retta infatti:

$$T = T_w (1 - \varphi) + T_{0e} \varphi^2 + T_{0e} (\varphi - \varphi^2)$$

$$\Leftrightarrow T = T_w (1 - \varphi) + T_{0e} \varphi$$

SOLO in questi casi, l'ISOTERMO e l'adiabatico coincidono



Come usare SCORCIATOIE:

isotermo = T_e e T_{rec} sono sulla stessa retta verticale

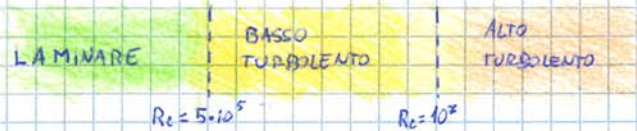
Adiabatico: la curva è sempre normale all'one della T .

5.7.1 Calcolo di C_{DI}

Dall'AERODINAMICA, risulta che:

$$C_{DI} = \begin{cases} 1,328 (Re)^{-0,5} & \text{se LAMINARE} \\ 0,074 (Re)^{-0,2} & \text{se BASSO TURBOLENTO} \\ 0,0295 (Re)^{-1/2} & \text{se ALTO TURBOLENTO} \end{cases}$$

I CAMPI per "decidere" che tipo di flusso ho, sono:



USO di C_D :

FAI MOLTISSIMA ATTENZIONE

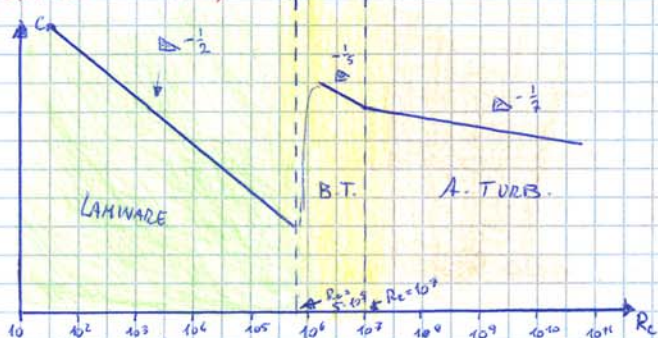
$$D = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 C_D S$$

la S è la SUPERFICIE "BAGNATA" dalla corrente.

Ciò vuol dire che, per una lamina piana, CONTA SIA SOPRA sia SOTTO! (e meno che non specifici che solo una faccia è bagnata).



GRAFICO $C_D(Re)$



la scala è BILOGARITMICA!

per trovare i rispettivi T_w , basterà fare $C_D(\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2)$

5.7.2: LEGAME $C_{DI}-C_{DC}$

Il C_{DC} , come il C_{DI} , dipende dal Reynolds, con lo stesso esponente.

il problema, sostanzialmente, è che per il C_{DI} posso tranquillamente usare i dati all'∞: cioè $\rho_{\infty}, M_{\infty}, U_{\infty}$.

Ma il C_{DC} , questi dati cambieranno da punto a punto nell'S.L.

DOVE MISURO LE GRANDEZZE?

Si è deciso il "punto nero": prendiamo il punto in

cui $u = \frac{1}{2} V_{\infty}$ [cioè $\psi = \frac{1}{2}$]. da lì si vede la T corrispondente, e si calcolano μ e ρ . (x la quale useremo ρ_{∞} e l'eq. di stato).

Vediamo in dettaglio i calcoli:

DIMOSTRAZIONE 40

legame C_{DI} e C_{DC} .

① Definiamo il fattore correttivo come:

$$T_{wc} = X T_{we}$$

oppure, analogamente,

$$C_{DC} = C_{DI} \cdot X$$

dalla definizione ricaviamo X : (con u, T , perché SE 1/20 - C_D ce un po' di approssimazione)

$$X = \frac{T_{wc}}{T_{we}}$$

② Richiamiamo le definizioni dei Pezici Bessi, LAMINARE, BASSO e ALTO TURBOLENTO

$$T_w = C_D \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 = (\dots) Re^{\delta} \cdot g = (\dots) (g/\mu)^{\delta} \cdot g = (\dots) g^{\delta+1} \mu^{-\delta}$$

nota del libro: NUMERI, V_{∞}, L_{∞}

$\delta = 0,5; 0,2, -1/2 \dots$

③ Come Accennato prima, le ρ e μ per il calcolo del Reynolds, le calcoliamo a $\psi = \frac{1}{2}$

il profilo di temperatura era:

$$T(\psi) = T_w (1-\psi) + T_{\infty} (\psi^2) + T_{rec} (\psi - \psi^2)$$

$$\Downarrow \psi = \frac{1}{2}$$

METODO DELLA SEZIONE RAPPRESENTATIVA

$$T^* = 0,5 T_w + 0,25 T_{\infty} + 0,25 T_{rec}$$

Si può vedere la T^* o metà S.L. come una media pesata di 3 temperature.

④ Ora vediamo di esplicitare X :

$$X = \frac{T_{wc}}{T_{we}} = \frac{(\dots) g^{\delta+1} \mu^{-\delta}}{(\dots) g_{\infty}^{\delta+1} \mu_{\infty}^{-\delta}}$$

⑤ Però:

$$\text{Eq. STATO: } \Rightarrow \frac{\rho_x}{\rho_{\infty}} = \frac{T_{\infty}}{T_x}$$

$$\text{Forma monomia: } \frac{\mu_x}{\mu_{\infty}} = \left(\frac{T_x}{T_{\infty}} \right)^{\omega} \quad \omega = 0,75 \text{ nell'ARIA}$$

⑥ quindi:

$$X = \left(\frac{T_{\infty}}{T_x} \right)^{\delta+1} \cdot \left(\frac{T_{\infty}}{T_x} \right)^{\omega \delta} = \left(\frac{T_{\infty}}{T_x} \right)^{\delta+1+\omega \delta}$$

⑦ sfruttando la relaz. di T^* viene:

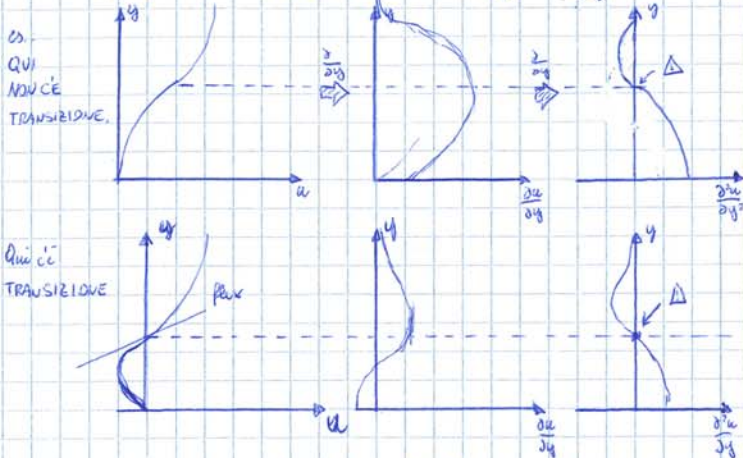
$$X = \left(\frac{T_w + T_{\infty}}{2 T_{\infty}} + R \frac{\delta-1}{2} \cdot \frac{M_{\infty}^2}{4} \right)^{\delta+1+\omega \delta} \quad \text{c.v.d.}$$

EXP
-0,125 LAM
-0,65 BT
-0,75 AT

5.10 TRANSIZIONE

TEOREMA di Rayleigh

Condizione NECESSARIA ma non SUFFICIENTE (= non è detto che accada) perché il FLUSSO si DESTABILIZZA, è che nel profilo ci sia presente un FLESSO. (ovvero $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$)



un modo rapido per controllare se c'è questa possibilità è controllare il segno della DERIVATA SECONDA A PARETE

$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} > 0$ allora c'è SICURAMENTE un punto in cui $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (perché presso u_e , ho $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$)

DIMOSTRAZIONE 41

Parametri che influenzano il segno di Der II.

1) Prendiamo l'eq. QDM. dello strato limite

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dP_c}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Sviluppiamo il termine viscoso: $\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

2) Valutiamo tutto a parete!

$$\left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \right)_w + \left(\rho v \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = -\frac{dP_c}{dx} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \right)_w \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w + \mu_w \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_w$$

note: $v=0$ at wall, $u=0$ at wall, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_w}{\delta}$

3) Isoliamo la derivata seconda.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_w = \frac{\rho_w v_w}{\mu_w} \left(\frac{u_w}{\delta} \right) + \frac{dP_c}{dx} \frac{1}{\mu_w} - \frac{v_w}{\mu_w} \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \right)_w$$

4) Prendiamo il pacchetto delle derivate a $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial y}$
cioè $-\frac{\rho_w v_w}{\mu_w}$

5) RIMANE:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_w = \frac{\rho_w v_w}{\mu_w} \left(\frac{u_w}{\delta} \right) + \frac{dP_c}{dx} \frac{1}{\mu_w} + \frac{v_w}{\mu_w} \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_w \frac{q_w}{\lambda_w}$$

C.v.d.

Per EVITARE che AVVENGA LA TRANSIZIONE, Vogliamo che quella derivata abbia SEGNO -!

Considerare che: $\mu > 0$ sempre. $\tau_w > 0$ sempre
 $\rho > 0$ sempre. $\lambda_w > 0$ sempre

QUINDI:

I) Termine: $U_w < 0$...



vuol dire forzare la parete e RISCOCCARE la SEPARAZIONE

è una TECNICA di CONTROLLO ATTIVA. ed è una cosa che si fa dall'alto pratico. Certo, deve volere la pena ($E_{pompa} < E_{risparmiata}$).

Evitare gli stelli, si fa pure il contrario! cioè soffi e rendi TURBOCENTO

II) Termine: $\frac{dP_c}{dx} < 0$.

non riuscirai mai a tenerlo negativo! perché prima o poi, la pressione sul profilo deve tornare ad aumentare.

PERO! puoi renderlo il meno POSITIVO possibile

⇒ n Profili laminari



III) Termine: $\left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_w \cdot q_w < 0$

questo termine è un po' più delicato.

NEI LIQUIDI, $\frac{\partial \mu}{\partial T} < 0$: conviene SCALDARE X rendere + stabile!

NEI GAS. $\frac{\partial \mu}{\partial T} > 0$: $q_w < 0$: la parete fredda stabilizza!

5.11 PUNTO DI ARRESTO

Per ciò che riguarda l'aspetto TERMICO, il punto più delicato del velivolo.

$T_w = T_{0_{\infty}}$, a meno di fenomeni dissociativi o ionizzazioni, che sono (per fortuna) ENDOTERMICI.

• Qualche grandezza

$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{V_{\infty}} \right) dy$... Spessore di SPOSTAMENTO. ⇒ tiene conto dello spostato

$\Theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{V_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{V_{\infty}} \right) dy$ Spessore di QUANTITÀ di MOTO

H fattore di forma: se piccolo, è PARASSO

$H_{AM} = 2.6$
 $H_{TURB} = 1.3$