NUMERO: 1458A - ANNO: 2015

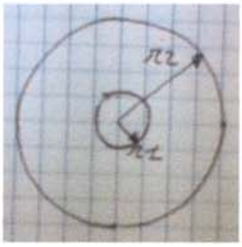
A P P U N T I

STUDENTE: Ottone

MATERIA: Propulsione Spaziale, Prof.Casalino

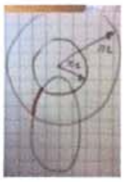
Propulsione del 18-03-2014

Vediamo le varie manovre con cui avremo a che fare. Partiamo con trasferte tra orbite circolari e per prima vediamo la trasferta di hohmaan.



Vediamo quanto ci costa traferirsi tra due orbite circolari; abbiamo orbita di partenza con raggio r1 e l'orbita di arrivo di raggio r2; vogliamo una traiettoria che ci porti da r1 a r2. La nostra traiettoria avrà delle particolarità ; dobbiamo fissare i requisiti della nostra generica orbita di trasferimento e cioè: se devo passare dall'orbita 1 il suo periastro (il punto più vicino) dovrà essere più basso di r1 (rp<r1)

Allo stesso modo il punto più lontano, se devo arrivare al raggio r2, dovrà essere ra (apoastro) maggiore di r2 (ra>r2) ; questi sono i requisiti che possiamo fissare per la nostra missione, il chè vuol dire essenzialmente che se io disegno un ellisse dovrà avere il punto più vicino più basso di r1 e il punto più lontano più alto di r2; quindi la mia ellisse potrebbe essere cosi:



e la trasferta sarà il tratto in rosso; se fosse rp>r1 allora la mia traiettoria sarebbe tutta esterna a r1 e allora non va bene per collegare le due trasferte, cosi come ra<r2 allora ellisse sarebbe troppo corta e non si intersecherebbero.

Queste due eq si posso esprimere come vincoli dei parametri orbitali; infatti sappiamo che possiamo esprimere ra ed rp come :

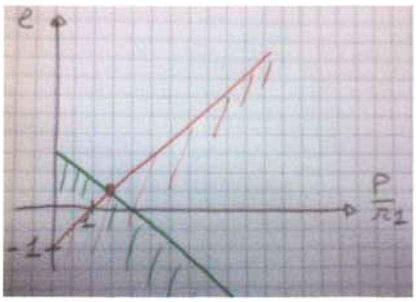
periastro $$r_p = a(1-e) = \frac{p}{1+e} \le r_1$$

apoastro $$r_a = a(1+e) = \frac{p}{1-e} \ge r_2$$

possiamo tradurre queste eq in due disequazioni (ponendole maggiori o minori alle condizioni scritte sopra) e risolvendole come risultato ricaviamo:

$$\left[\frac{p}{r_1} \le 1+e \qquad \frac{p}{r_1} \ge (1-e)\frac{r_2}{r_1}\right]$$

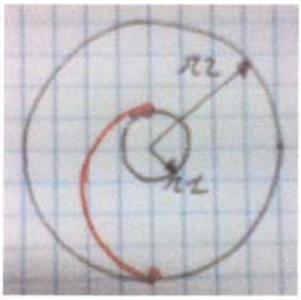
Questo si può tradurre in forma grafica abbastanza facilmente e si ha:



- se disegniamo la prima eq a sinistra ricavando la e abbiamo la curva rossa che parte da -1 (p/r1=0) passa da 1 (con e=0) ed è una linea inclinata di 45° e si esclude la parte di sotto.

- l'altra curva (la verde) per p/r1=0 parte da e=1, e poi avrà una pendenza diversa a seconda del valore di r2/r1; nel caso di r2>r1 (caso che sto considerando) avremo andamento riportato in figura e anche di questa prendiamo solo la parte positiva e non consideriamo quella negativa. Scopriamo che abbiamo tutto un campo possibile di trasferte, cioè qualunque valore accoppiata a p ed e prendiamo li dentro va bene per fare la nostra trafertta; tra tutte le traferte possibili quella che avrà costo minore rispetto alle altre è la trasferta di homan e che corrisponde alla minima eccentricità possibile cioè all'incrocio delle due curve (il punto in rosso).

Che aspetto ha questa trasferta? Essendo sulle due curve limite è proprio sul punto dove le due disuguaglianze sono soddisfatte con l'uguale quindi vuol dire che siamo in una situazione in cui rp=r1 e ra=r2; quindi trasferta di hofman è un ellisse :



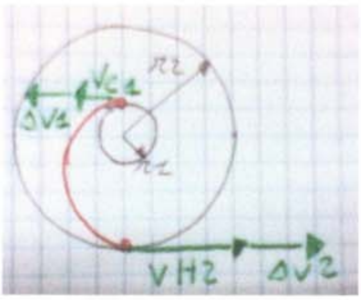
mezza ellisse che parte tangente all'orbita 1 e arriva tangente all'orbita 2;

punto più vicino è periastro mentre il punto più lontano è l'apoastro.

La circonferenza ha sempre velocità verticale e questa orbita di hofman è sempre tangente sia all'orbita di partenza che quella di arrivo.

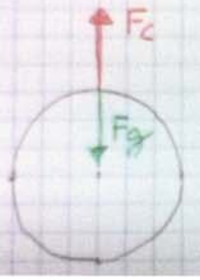
È una mezza ellisse.

L'unica domanda che ci facciamo è di valutare il costo della nostra trasferta, cioè calcolare quale ΔV devo dare per immettermi nella trasferta di hofman e quale ΔV devo dare per uscire dalla trasferta di hofman ed immettermi nell'orbita di arrivo. L'idea è :



- se siamo sull'orbita r1 e non facciamo niente continueremo a girare costantemente (nel problema dei due corpi) nel raggio r1; allora per cambiare la traiettoria dovremmo cambiare la nostra velocità e immaginiamo di cambiarla con un impulso: a certo istante diamo una botta col nostro motore che duri un tempo molto molto molto corto cosi da trascurarlo e con questa manovra cambiamo la nostra velocità di un ΔV1. Quello che facciamo è: supponendo di avere una velocità su orbita circolare che chiamiamo VC1, noi diamo una variazione di velocità ΔV1 e andiamo ad acquisire una velocità VH1= VC1+ΔV1 (dove H sta per hohmaan)(ΔV pagata dal propellente). In modo analogo quando arriviamo nel punto due avremo una velocità pari a VH2; se non facessimo niente allora proseguiremmo e percorreremmo l'altra metà dell'ellisse e continueremmo indefinitamente a muoverci sulla nostra ellisse e allora per trasferirci sull'orbita circolare r2 dovremo cambiare la nostra velocità e quindi con le stesse ipotesi di sopra diamo un ΔV2 che fa cambiare istantaneamente la nostra velocità VH2 e otteniamo VC2 (velocità circolare su orbita 2) pari a VC2=VH2+ ΔV2.

Ora dobbiamo fare i conti. Partiamo dall'orbita circolare: è caratterizzata da una velocità chiamata velocità circolare e possiamo ricavarla ad esempio in questa maniera:



$$F_c = \frac{m \cdot V_c^2}{r}$$

$$F_g = m \cdot \frac{\mu}{r^2}$$

se siamo su orbita circolare cè un equilibrio tra la forza centrifuga Fc (forza centrifuga che si ha su moto rotatorio) che è equilibrata dalla forza di gravità Fg.

$$\frac{\cancel{m} \cdot V_c^2}{\cancel{r}} = \cancel{m} \cdot \frac{\mu}{r^{\cancel{2}}}$$

Equilibrando le due forzo quello che si ricava e che:

$$\boxed{V_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}}}$$

In alternativa (regola generale), tipicamente, se ci serve la velocità in un punto, io la ricavo dalla eq dell'energia; io so che l'energia è:

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu}{2a} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r}$$

se conosco l'orbita (a) , conosco la posizione (r) mi ricavo la V. tipicamente il modulo della velocità si ricava dall'energia. Con orbita circolare si ha che r=a e troviamo il risultato.

(in orbita bassa la V è di 8 Km/sec). (ΔV per un lancio è 10 km/s perché 8 sono per la velocità dell'orbita e 2 sono per vincere le resistenze)(per la terra in orbita attorno al sole la sua velocità è 30 Km/s)

Per il nostro caso $\boxed{V_{C1} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}}$ $\boxed{V_{C2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}}}$ nelle due orbite abbiamo che:

Per trovare la velocità di homan dobbiamo utilizzare proprio l'equazione dell'energia e scriviamo che per homan l'energia vale:

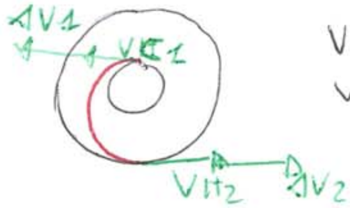
$$\mathcal{E}_H = -\frac{\mu}{2a_H} = -\frac{\mu}{r_1 + r_2}$$

siccome la ah (di homan) è proprio uguale a r1+r2 (semiasse della trasferta di homan essendo tangente alle orbite r1 e r2 conincide con la somma delle 2).

Se conosco l'energia e il raggio è possibile ricavare il raggio. Infatti si ha:

$$\mathcal{E} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{r_1 + r_2}$$

quindi se metto r1 e l'energia di homan qua trovo la VH1 e se metto r2 trovo la VH2.



$V_{H1} = V_{C1} + \Delta V_1$

$V_{C2} = V_{H2} + \Delta V_2$

Facendolo:

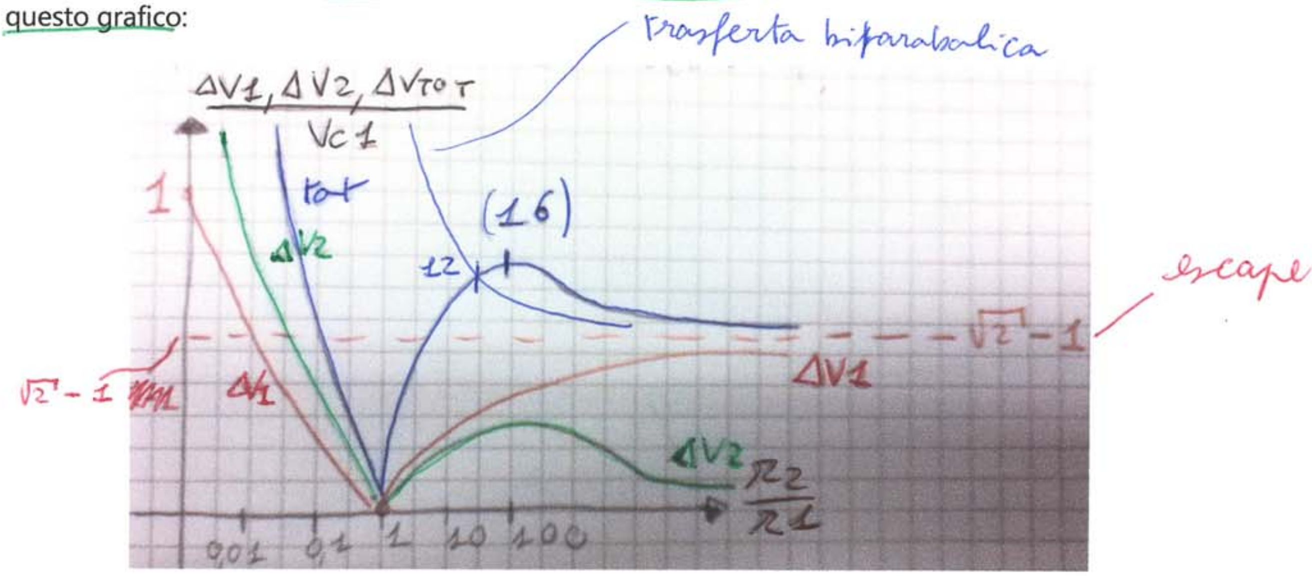
$$V_{H1} = \sqrt{2\left(-\frac{\mu}{r_1+r_2} + \frac{\mu}{r_1}\right)} \qquad V_{H2} = \sqrt{2\left(-\frac{\mu}{r_1+r_2} + \frac{\mu}{r_2}\right)}$$

Ora con queste grandezze è possibile calcolare i ΔV1 e ΔV2 che per il parallelismo delle orbite sono anche a loro volta paralleli, quindi stiamo spingendo parallelamente alla velocità senza perdite di disallineamento, stiamo spingendo quando ci troviamo in orizzontale senza perdite per gravità e quindi questa manovra è la più efficiente possibile. Nel punto uno tra l'altro stiamo fornendo la velocità minima per arrivare al raggio r2 (se avessimo orbita con periastro più alto il ΔV sarebbe più alto, perché ha più energia).

La trasferta ti homan ha il minimo ΔV1 che consente di arrivare al raggio r2 e il ΔV2 e il minimo che si deve dare quando arriviamo da r1 (che sarebbe anche il minimo ΔV per passare da r2 a r1).

Questa in termini di tempo è anche la più lunga missione tra quelle che non tornano indietro ma anche la meno costosa in termini di ΔV. Questa vale per orbite circolari.

Nel Caso di orbite ellittiche si ha variazione di questa manovra caso per caso. Tipicamente orbite dei pianeti quasi circolari e in prima approssimazione va bene. Riportiamo i risultati in forma grafica, dove in funzione del rapporto r2/r1 possiamo trovarci i ΔV della trasferta di homan. Si ha questo grafico:



Si adatta scala logaritmica. Per r1=r2 non si hanno ΔV perché l'orbita è sempre la stessa. Man mano che r2>r1 si vede che il ΔV1 (rossa) tende a crescere perché più lontano voglio andare più alta deve essere l'energia della mia orbita più alta deve essere la mia V1 e più alto il ΔV1 che cresce asintoticamente ad un limite. Mentre se r2 tende a 0 allora VH1 tende a 0 anche lei e quindi il mio ΔV diventa via via più grande e sarà pari a VC1 al ridursi di VH1; quindi ΔV tende a crescere fino a 1. (si è adimensionato i ΔV con ΔV1). Per il ΔV2 (verde) è più sottile: si vede che cresce, ha un massimo e poi tende a diminuire per r2>r1, mentre per r2<r1 cresce sempre e tende a infinito. Sommando i due (linea blu) vediamo che si ha un massimo intorno a 16 e vediamo che è molto

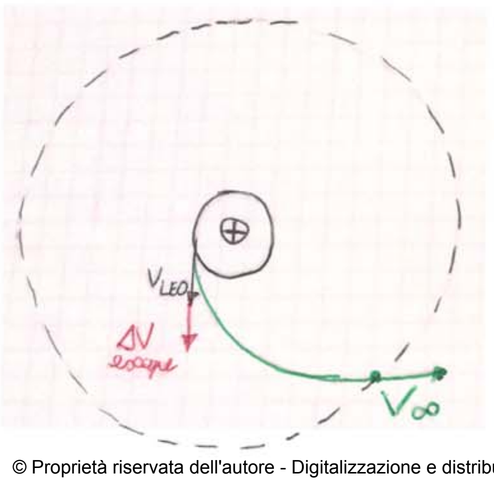
costoso a fare manovre, a frenare, che tendono verso il corpo principale; se vogliamo andare a raggi bassi i nostri ΔV diventano molto molto grandi, non è questione di distanze. Se vogliamo allontanarci, costa di più per esempio andare a urano che non andare a nettuno o a plutone. Questo costare di più o di meno deriva proprio dalle perdite per gravità: se voglio andare su plutone do una gran botta all'inizio per andare molto lontano e quindi mi allontanerò dal sole molto velocemente, quindi la gravità mi frena poco; quando arrivo a plutone ho ancora una velocità abbastanza alta e cosi mi costa poco il ΔV2 che cosi è piccolo e costa poco circolarizzare la mia orbita. Se invece dobbiamo andare a saturno noi dobbiamo spingere di meno all'inizio e quindi la velocità è bassa e mentre noi saliamo (ci allontaniamo dal sole) la gravità ci frena un bel po' e quando arriviamo a saturno il nostro ΔV2 sarà grande perché la gravità ci ha frenato tanto. Nell'orbita di homan non ci sono perdite di gravità alla partenza e all'arrivo ma nella trasferta ci sono perché aumentiamo di raggio e le perdite non possono essere evitate, homan però minimizza tutto.

-Cè ancora un aspetto da analizzare: se devo fare trasferta interplanetaria la trasferta di homan ci dice cosa fare per andare da un orbita all'altra ma il mio problema e che non sono in orbita intorno al sole come con la terra, ma sono dentro campo gravitazionale della terra quindi per raggiungere marte devo prima allontanarmi a sufficienza dalla terra e poi fare una traiettoria interplanetaria che mi porti vicino a marte e una volta qui marte con la sua gravità mi attirerà verso di se e dovrò fare un'altra manovra a seconda della missione; quindi il nostro problema se è una trasferta interplanetaria oltre al tratto eliocentrico (quello in cui ci muoviamo intorno al sole) devo considerare anche le fasi dette di evasione, quando ci allontaniamo dalla gravità terrestre e quando ci facciamo catturare da campo gravitazionale di marte. Trattiamo il problema di evasione.

Il modello che utilizziamo è quello delle coniche raccordate (patched-conic approxtimation).

Assume che la traiettoria di un corpo sia fatta da coniche raccordate, cioè che in vari pezzi della traiettoria e nei vari pezzi in cui la traiettoria viene scomposta, il satellite sia soggetto soltanto alla trazione di un corpo e che quindi si muove secondo traiettorie del problema dei due corpi cioè segua una conica. Si sfrutta il concetto di sfere di influenza: si suppone che ogni pianeta abbia attorno a se una sfera all'interno della quale il corpo che stiamo seguendo sia soggetto solo alla trazione di quel pianeta; una volta uscito da qui il mio satellite (o sonda) sarà soggetto solo alla for4za del sole, poi entrerà nella sfera d'influenza di marte e da quel momento in poi si considera soltanto l'influenza di marte. Questa è una approssimazione.

Andiamo a vedere che succede dentro questa sfera:



immaginiamo di essere su orbita bassa intorno a nostro corpo con una velocità Vleo (low eath orbit) (orbita terrestre bassa) e di voler raggiungere la sfera d'influenza della terra (tratteggiata) ad una distanza abbastanza grande (per pianeti come terra è a un milione di km dove attrazione sole prevale sulla terra). Questa distanza si approssima con l'infinito. Quello che facciamo anche qui è dare un ΔV di escape (evasione) (immaginamo di darlo parallelo alla velocità per evitare perdite di disallineamento e di gravità), ci metteremo su una traiettoria che sarà una parabola o iperbole (perché di stanza è infinita) è raggiungo il mio confine della sfera d'influenza con una velocità che chiamiamo Vinfinito.

Ora ci chiediamo qual è il minimo ΔV che dobbiamo dare per raggiungere l'infinito? Se V∞=0 stiamo evadendo su una parabola e arriviamo a distanza infinito senza velocità; quella che è la velocità di escape sulla parabola si ottiene dall'equazione dell'energia , e siccome per la parabola la energia=0 si ricava:

$$\mathcal{E} = \frac{V_\infty^2}{2} - \frac{\mu}{r_\infty} = 0 \qquad \boxed{\Delta V_{esc,\,par} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{leo}}}}$$

Con la μ quella del pianeta come anche le velocità (stiamo vedendo le cose dal punto di vista planetocentrico; quindi la gravità è quella del pianeta e tutte le velocità sono relative al pianeta).

Se invece siamo su una iperbole e la nostra V∞ è diversa da 0 possiamo sempre ricavare dall'equazione dell'energia:

$$\mathcal{E} = \frac{V_\infty^2}{2} - \underbrace{\frac{\mu}{r_\infty}}_{=0} = \frac{(V_{LEO} + \Delta V_{esc})^2}{2} - \frac{\mu}{r_{leo}}$$

Termine tende a zero perché il raggio è molto grande; e i termini a sinistra dovranno essere uguali a quelli a destra perché l'energia si conserva. (la velocità si ricava quasi sempre dall'energia; scrivo energia all'inzio e alla fine e conoscendo i raggi e una velocità trovo altra velocità).

Come risultato otteniamo che il ΔV vale:

$$\Delta V_{esc} = \sqrt{V_\infty^2 + \frac{2\mu}{r_{leo}}} - V_{leo} = \sqrt{\underbrace{V_\infty^2}_{0} + 2V_{leo}^2} - V_{leo}$$

dove il secondo termine dentro la radice è pari alla Vleo al quadrato. (deriva dalla formula della velocità scritte sopra).

Troviamo che per evadere serve una velocità pari a radice 2 la velocità circolare e quindi si ha:

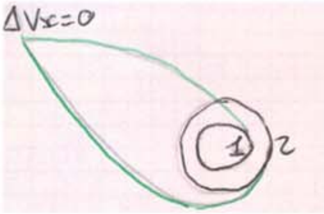
$$\Delta V_{esc\,P} = (\sqrt{2} - 1)\, V_{leo}$$

per la parabola. Per distanze più grandi il ΔV sarà più grande. (per terra sono 3,5 km/s).

Quindi l'asintoto a cui tendeva ΔV1 è proprio quella dell'escape.(escape parabolico è mettersi su circonferenza di raggio infinito).

- tornando a homan cè una zona dove è molto costoso andare perché diamo un ΔV1 relativamente piccolo per cui la mia velocità è bassa, salgo piano, ho tante perdite, arrivato al punto 2 dovrò dare una bella botta, cosi avrà ΔV1 grande un ΔV2 grande e se li sommo costa parecchio; abbiamo le perdite di gravità che consumano molto mentre vado da 1 a 2. Allora si può avere questa idea: se

Se voglio salire più velocemente arriverò più lontano e quindi l'idea e di non fare più una trasferta di homan ma una manovràa che sale molto velocemente fino a una grande distanza dal mio corpo e , arrivati sufficientemente lontano freno e torno indietro; abbiamo questo:



si può pensare che ho tante perdite di gravità però nel tratto di ritorno queste perdite ci fanno accelerare, quindi se salgo e scendo il termine di gravità non conterà in questo tratto. L'unica spesa è quella di andare più lontano rispetto a quanto devo. Conviene perché la spesa per andare più lontano è più piccola delle perdite che io ottengo e quindi in alcuni casi possiamo fare questa trasferta biparabolica. Parto con prima parabola, arrivo a ΔVx =0 e poi mi trasferisco su altra parabola che andrà su nuova orbita con periastro uguale a 2.

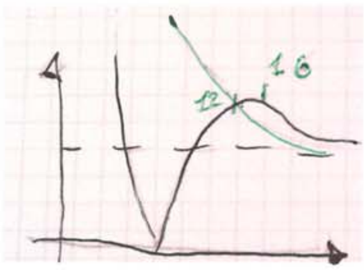
Cosi avremo che i ΔV delle orbite saranno:

$$\Delta V_1 = (\sqrt{2} - 1)\, V_{c1}$$
$$\Delta V_2 = (\sqrt{2} - 1)\, V_{c2}$$

ilo nostro ΔVx=0 perché su parabola a distanza infinita la velocità è zero, cosi a distanza infinita con una variazione infinitesima in velocità ci possiamo aggiustare il nostro periastro come vogliamo. (noi faremo manovre a distanza molto grande ma finita, il ΔV sarà presente ma molto piccolo e allora ci va bene).

Idea quindi è vai molto lontano dal sole partendo da r1, una volta che siamo a distanza molto grande con praticamente spesa pari a zero possiamo variare la parabola per arrivare a r2 cosi poi ci mettiamo i orbita circolare.

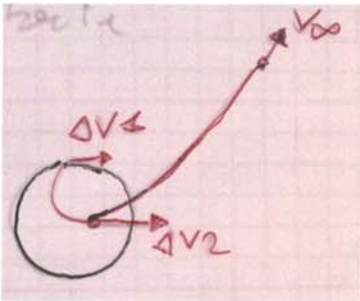
Se diagrammassimo come prima questo andamento si ha:



Abbiamo curva che incrocia l'altra in 12 (è grafico con i ΔV in funzione di r2/r1). Scopriamo che la manovra parabolica per r>12 diventano convenienti. (non si usa homan se nostro raggio è >12). Dal punto di vista energetico non va bene ma siccome abbiamo grande energia quando saliamo di raggio, abbiamo cosi meno perdite di gravità cosi la spesa energetica in più non corrisponde una spesa di ΔV più alta, anzi corrisponde un ΔV più basso.

-In modo analogo anche per l'escape possiamo pensare una cosa simile; se voglio evadere è conveniente avvicinarsi (al corpo principale) e poi evadere. Si chiama manovra di Oberth (o aiuto gravitazionale del sole). Idea è questa: mi trovo su orbita di raggio r1 , e per evadere invece di mettermi su un iperbole posso

OBERTH



pensare di frenare, portarmi a un raggio più basso, qua dare ΔV2 è evadere poi sulla mia iperbole arrivando poi con v infinito.

Idea è poiché devo cambiare la mia energia, sappiamo che ci conviene farlo dove la velocità è alta e quindi vicino al sole a raggi bassi, quindi se parto da r1, mi avvicino al sole, do gran botta e poi evado.

Idea è anche questa:mentre io scendo di quota (e lo faccio con v relativamente bassa) le perdite di gravità mi accelerano (qui diventano aiuti di gravità) e poiché scendo con una velocità relativamente bassa mi accelerano tanto e arrivato nel punto due io do una gran botta per cui da qul punto in poi salirò molto velocemente e la gravità che mi frenerà agirà per poco tempo, quindi io guadagno più velocità mentre scendo di quanta ne perdo mentre salgo (perché scendo lentamente, do impulso e salgo velocemente). Per cui uno può calcolarsi il ΔV:

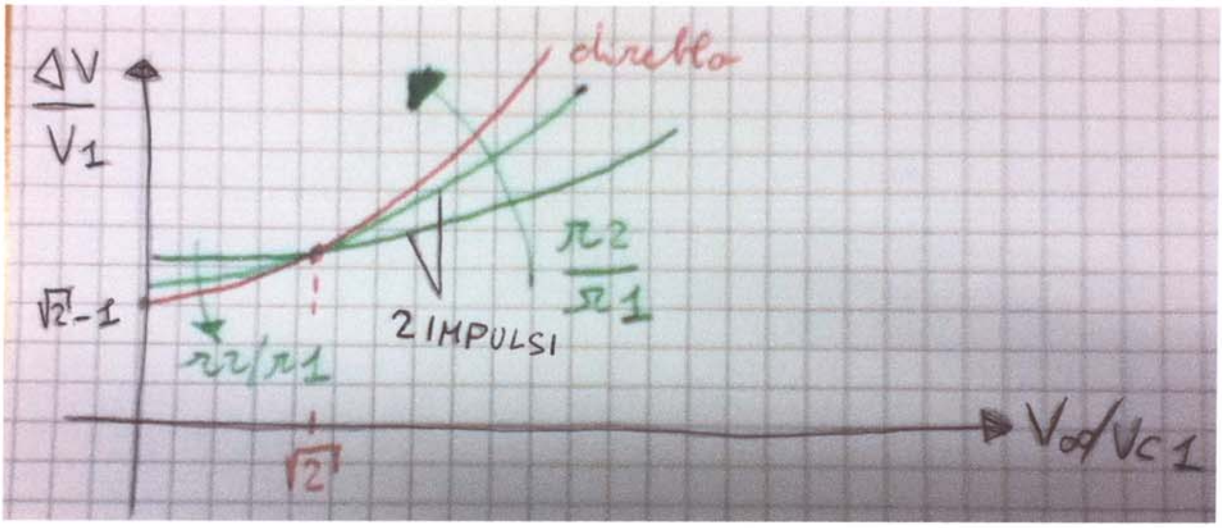
$$\boxed{\Delta V_1 = \Delta_{H1} (r_1 \to r_2)}$$

$$\boxed{\Delta V_2 = V_{IP} 2 - V_{H2}(r_1 \to r_2)}$$

In questo caso il ΔV1 è il ΔVdi homan nel punto 1 per la trasferta da r1 a r2 (stesse formule di prima). Il ΔV2 sarà pari alla velocià che voglio avere sull'iperbole nel punto 2meno la velocità di homan nel punto 2 con trasferta da r1 a r2. La velocità sull'iperbole si calcolerà al solito dall'energia e si ricava formula scritta qui: (velocità che devo avere all'escape per una certa energia).

$$\boxed{V_{IP} = \sqrt{V_\infty^2 + 2 V_{C2}^2}}$$

Ora vediamo il grafico che cosa fa:



In funzione della v infinito su VC1 abbiamo ΔV/VC1. Per escape classico abbiamo curva rossa (al posto di rleo mettiamo r1). Questo è escape classico con un impulso (passerá da ~~radice 2~~ $\sqrt{2}$). Lo chiamiamo diretto.

Confrontiamo questo con uno a due impulsi e a seconda del raggio r2 ho un costo che ha andamenti cosi (curve verdi). Vediamo che se la nostra Vinfinito è sufficientemente grande allora ci conviene fare escape a due impulsi (prima frenare avvicinarsi ed evadere). Per esempio se vogliamo evadere dal sistema solare ma vogliamo farlo con una velocità sufficientemente grande allora la manovra ottimale è avvicinarsi il più possibile al sole e dare una gran botta.

trasferte hohmann + manovre di evasione

Propulsione del 21-03-14

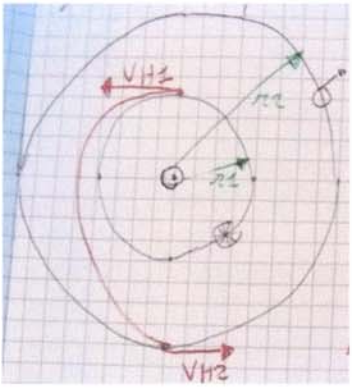
Mettiamo insieme le trasferte di homan e le manovre di evasione. Consideriamo ora le trasferte interplanetarie. Noi facciamo alcune ipotesi per studiarle; assumiamo che:

-orbite dei pianeti sono circolari e complanari;

-le dimensioni della sfera d'influenza siano trascurabili rispetto alle distanze in gioco dal punto di vista eliocentrico. (distanza sole terra 150 milioni di km mentre sfera d'influenza terra 1 milione di km).

Con queste ipotesi noi seguiamo un approccio particolare. Tipicamente il modo di procedere sarebbe: sappiamo quando partiamo, quindi conosciamo il pianeta e la partenza, sappiamo quando arriviamo, conosciamo pianeta di arrivo e quando arriviamo, e poi calcoliamo l'orbita tra queste due posizioni risolvendo il problema di lambert; poi si può variare la data di partenza, la data di arrivo e guardiamo se costo missione aumenta e diminuisce. Cosi a seconda dell'orbita su cui devo arrivare calcoliamo il ΔV.

Noi con ipotesi di sopra possiamo procedere in senso contrario: sapremo con ipotesi di sopra che la trasferta più economica sarà quella di homan quindi ci limitiamo a studiare questa trasferta; fatto questo potremo dire quando possiamo partire e quando arriveremo (perché pianeti in questa trasferta dovremmo essere ad una certa posizione relativa tale che arrivando nell'orbita finale il pianeta si trova allo stesso punto). Quindi il nostro schema sarà:



abbiamo sole schematizzato con cerchiolino con puntino dentro, il pianeta di partenza indicata con cerchio e un quadrato e l'orbita del pianeta di arrivo indicato con cerchio.

La trasferta di homan parte da orbita circolare della terra, percorre metà ellisse e partendo da 1 con velocità VH1 percorre mezza ellisse e arriva al punto 2 con velocità VH2. Importante: queste velocità sono riferite al sistema eliocentrico; sono le velocità che la sonda deve avere rispetto al sole.

Tramite eq della scorsa lezione si può scrivere che:

$$\left[V_{H1} = \sqrt{2\left(-\frac{\mu_\odot}{r_1+r_2} + \frac{\mu_\odot}{r_2}\right)} \right] \qquad \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \xi$$

È importante sottolineare che la μ è quella riferita al sole perché stiamo considerando il sole e quindi tutte le grandezze fisiche sono del sole.

Quindi il problema che dobbiamo porci è: come dobbiamo evadere dalla sfera d'influenza in modo che la nostra velocità rispetto al sole sia VH1? La risposta è relativamente semplice se pensiamo alla composizione della velocità: se io sono in moto con la terra, che si muove con velocità chiamata VC1, e rispetto alla terra ho una velocità quando evado che chiamiamo V∞1, la mia velocità rispetto al sole sarà VC1+V∞1,cioè in generale possiamo scrivere che la velocità eliocentrica (rispetto al sole) è uguale alla velocità planetocentrica (la velocità relativa) più la velocità del pianeta:

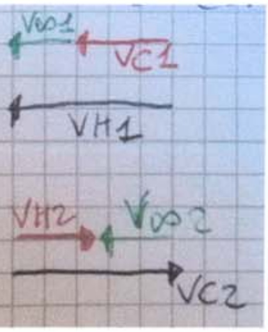
$$\left[\bar{V}_{eliocentrica} = \bar{V}_{\substack{planetocentrica\\ relativa}} + \bar{V}_{pianeta}\right]$$

$$\left[\bar{V}_{eliocentrica} = \bar{V}_{\substack{planetocentrica\\ relativa}} + \bar{V}_{pianeta}\right]$$

inteso come vettori. Ma la velocità eliocentrica che noi vogliamo è VH, la V del pianeta è VC (ci sta per circolare perché per nostra ipotesi orbita è circolare) e la V relativa al pianeta e quella quando sto uscendo dalla sfera d'influenza e quindi è la V∞. in formule VH=VC+V∞

Quindi scopriamo che: se siamo nel problema dei due corpi, quando io voglio fare una trasferta di homan e devo dare un ΔV1=VH1-VC1, quando siamo nelle trasferte interplanetarie e devo evadere dal pianeta immettermi nella trasferta eliocentrica di homan che ci porta al pianeta di arrivo, quello chè pari alla differenda di VH e VC è la V∞ quindi quella eq trasformata in una scalare (perché tutti i vettori sono paralleli tra loro) :

$$\left[\begin{aligned} V_{\infty 1} &= V_{H1} - V_{C1} \\ V_{\infty 2} &= V_{C2} - V_{H2} \end{aligned}\right]$$



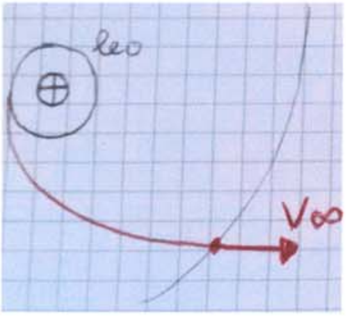
quello che ci dice eq e che per fare una trasferta di homan io devo evadere con una V∞1 che sarà pari a quanto scritto sopra; e in modo analogo arrivato su marte abbiamo V∞2.

Nel caso generico quando si risolve il problema di lambert noi ritroviamo la V1 e non la VH1 e dovremo fare attenzione ai vettori. Non avremo V di homan ma un'altra.

Una volta ottenuta la V∞ possiamo, in base all'orbita di partenza, ricavare qual è il ΔV che effettivamente devo dare; per esempio per la terra si ha:

$$\left[\Delta V_1 = \sqrt{V_{\infty 1}^2 + 2V_{leo}^2} - V_{leo}\right] \quad \text{dove} \quad \left[V_{leo} = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_{leo}}}\right]$$

Abbiamo messo Vleo perché consideriamo orbita bassa. Abbiamo pensato ad un evasione del tipo:



-abbiamo terra, orbita leo, confine della sfera d'influenza, e noi evadiamo e arriviamo alla sfera d'influenza con V∞. In questo caso la μ è riferita al pianeta(perché siamo da punto di vista geocentrico).

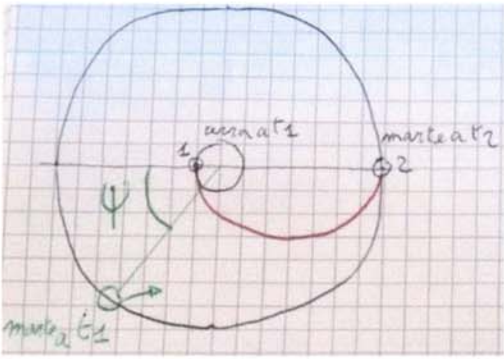
Quindi le trasferte si trattano come nel problema dei due corpi, solo che quelli che nel problema dei due corpi sono i ΔV (le variazioni di velocità che devo effettivamente dare), qua sono le V∞ con (cui) esco o entro nelle sfere d'influenze; gli effettivi ΔV che devo dare dipendono poi dall'orbita da cui parto come abbiamo visto per le manovre di evasione.

La μ che andiamo a mettere dipende dal punto di vista che stiamo considerando; se la mia traiettoria è quella sopra allora la traiettoria si svolge intorno alla terra e allora metto la μ della terra. (basta vedere la traiettoria rispetto a che pianeta o corpo è).

Usiamo le stesse formule della scorsa lezione: basta fare attenzione al sistema di riferimento.

SECONDA PARTE

Ora passiamo alla seconda parte del problema e cioè: se voglio andare su marte devo fare in modo che alla fine della mia traiettoria di homan marte sia li quindi ci si chiede: dove deve essere marte quando io parto per fare in modo che sia al posto giusto quando io arrivo? Lo schemino che adottiamo è questo:



-abbiamo orbita terra, orbita di marte e la mia trasferta di homan è quella rossa che parte da 1 e arriva da 2.

La terra quando io parto al tempo t1 si trova nel punto 1, mentre marte al tempo t2 si trova in 2. Quindi chiedo che partendo io al tempo t1 da terra al tempo t2 chiedo che marte sia a 2. Ci chiediamo dove sarà marte al tempo t1? L'idea è che più orbita è bassa e più è alta la velocità angolare e quindi più basso è il periodo quindi terra gira veloce mentre marte gira lento e la nostra sonda su orbita homan viaggerà con v intermedia tra le due. Ora se marte a t2 si trova li vuol dire che a t1 si troverà davanti alla terra. Chiamiamo ψ l'angolo che mi dice quanto marte è avanti rispetto alla terra all'istante di partenza. (angolo tra pianeta di arrivo e pianeta di partenza all'instante di partenza). Nel caso in cui io salgo di orbita il pianeta di arrivo dev'essere più avanti mentre se scendessi di orbita deve essere più iindietro; questo perché marte e più lento e deve partire in vantaggio rispetto alla terra per farli arrivare nello stesso punto.

[se orbita bassa V alta e la terra gira più veloce]

Quanto vale questo angolo per fare la trasferta di homan? È facile da ricavare perché osservando la figura vediamo che da punto 1 a 2 ci sono 180° e sono uguali alla somma dell'angolo ψ più l'angolo che marte percorre tra t1 e t2 e siccome velocità angolare di marte è fissa (per orbita circolare) l'ngolo sarà la ω2*(t2-t1) dove (t2-t1) è la durata dell'orbita di homan τH:

$$\boxed{\pi = \psi + \omega_2 \cdot \tau_H}$$

con $$\boxed{\tau_H = t_2 - t_1 = \pi \cdot \sqrt{a_H^3/\mu_\odot}}$$

$$\boxed{\text{o anche } \frac{T_H}{2}}$$

Con parametri riferiti al sole. Possiamo ancora vedere τH come il periodo della trasferta di homan diviso 2.

Unica incognita che abbiamo è ψ. Tutti altri parametri sono noti e inoltre la velocità angolare è data da:

$$\boxed{\omega = \frac{V}{r} = \frac{\sqrt{\mu/r}}{r} = \sqrt{\frac{\mu}{r^3}}}$$

Si nota che la velocità angolare è direttamente parente del fatto che il periodo è 2π/ la velocità angolare.

Quindi possiamo stabilire quanto marte dev'essere davanti a noi nota la velocità dell'altro pianeta e la durata della nostra trasferta.

Immaginiamo ora che marte si trovi nel punto giusto e quindi potrei partire oggi e fare una trasferta di homan; se partissi domani marte non sarebbe più nella posizione giusta perché la terra si sposterebbe più avanti e dopo qualche tempo marrte e la terra vedrebbero ridotto il loro angolo. Quindi non si può fare trasferta di homan ma potrei farne una più costosa trovandola con problema di lambert. Più aspetto e più missione costa. Di solito cè una finestra di lancio dove fare lancio. Che succede se perdiamo questa finestra di lancio? Quanto tempo si dovrà aspettare per fare un'altra missione con trasferta di homan? Possiamo rifarla tutte le volte che si presenta questa configurazione: terra girando più veloce riacchiapperà marte quindi bisogna solo aspettare che la terra recuperi un giro su marte. Questo tempo di attesa per il ripresentarsi della stessa configurazione prende il nome di periodo sinodico (tempo necessario affinchè la stessa configurazione relativa dei pianeti si ripresenti)(pianeti riassumono la stessa posizione relativa). Per calcolarlo bsta fare semplice ragionamento: la terra sarà ψ gradi dietro a marte quando avrà recuperato un giro, quindi posso osservare che la stessa configurazione si ripeterà quando l'angolo percorso dalla terra ω1 per il periodo sinodico τs sarà pari all'angolo percorso da marte ω2*τs più 2π se la terra e più veloce o meno 2π nel caso in cui l'orbita r1>r2. In formule:

$$\left[\omega_1 \cdot \tau_s = \omega_2 \cdot \tau_s \pm 2\pi\right]$$

con $\underbrace{(-)\ r_2 < r_1}$ e $\underbrace{(+)\ r_2 > r_1}$

$$\left[\tau_s = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}\right]$$

La terra percorre 740° e marte 380° cosi terra ha fatto giro più pezzettino, marte ha fatto stesso pezzettino e quindi se eravamo a certo ψ siamo spostati del pezzettino ma sempre allo stesso ψ(Io faccio un giro più un pezzo e marte fa un pezzo). Cosi ricaviamo il valore di τs(sopra). (usiamo il modulo per toglierci di mezzo il +o- e tenendo solo la differenza tra le due ω).

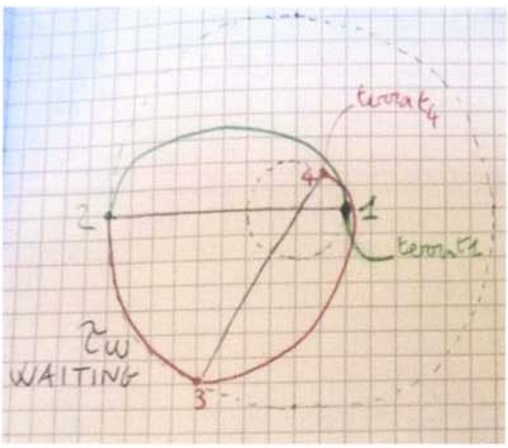
Il risultato mostra come il periodo sinodico tende a essere grande quando le orbite dei due pianeti sono vicine perchè vanno circa con la stessa velocità. Se invece i due pianeti sono molto lontani tra di loro, allora il periodo sinodico tende ad essere uguale al periodo del pianeta più veloce, ad esempio: se io prendo il raggio r2 molto molto grande, allora ω2 tende a zero e il periodo allora è legato solo a ω1. Se devo andare a saturno ad esempio ci posso andare ogni anno perché se ho disegno di sotto:

$$\left[\tau_s = \frac{1}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}}\right]$$

siccome saturno e molto lontano e gira lento dopo che è passato un anno la terra ritorna praticamente allo stesso punto perché saturno si è spostato di pochissimo e allora si può rifare la missione subito. Quindi dalla formula si vede che se le due orbite sono molto lontane il periodo sinodico è quello del pianeta più veloce perché è come se l'altro fosse fermo. Se invece le due orbite sono vicine se perdo l'attimo posso dover aspettare parecchio tempo.

-cè ancora un punto da risolvere e riguarda le missioni di andata e ritorno: se io mando un uomo su marte vorrei anche che tornasse indietro e allora ci si pone il problema di quanto tempo devo aspettare su marte prima di tornare indietro con una trasferta di homan? Se non volessi homan potrei partire anche subito ma pagherei un casino.

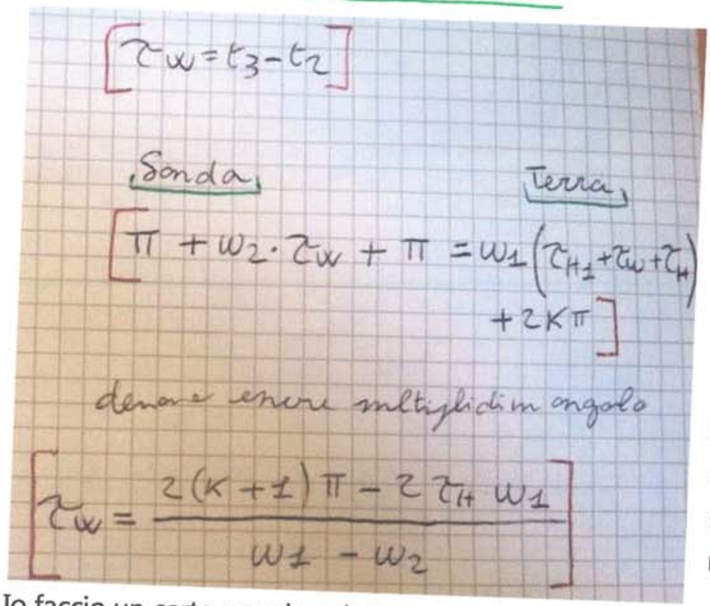
Lo schema cui facciamo riferimento è il seguente:



-immaginiamo di partire dal punto 1, arriviamo a punto 2, aspettiamo un po' fino al punto 3, e poi rifacciamo la trasferta di homan e arriviamo al punto 4.

Il tempo che aspettiamo su marte lo chiamiamo τw tempo di attesa o di waiting (il tempo t3-t2; tempo che devo aspettare su marte prima di tornare indietro).

Come lo troviamo? Il punto chiave è che quando io ritorno, se la terra a t1 si trovava in 1, quando noi ritorniamo vogliamo che la terra a t4 sia dove noi arriviamo (stesso ragionamento di prima). Quindi tutto quello che devo fare e che la sonda e la terra si trovino al tempo t4 nello stesso punto. Peraltro anche la sonda al tempo t1 era a 1 e at4 sarà a 4. Allora quale sarà l'angolo percorso dalla sonda? L'angolo percorso dalla sonda sarà:



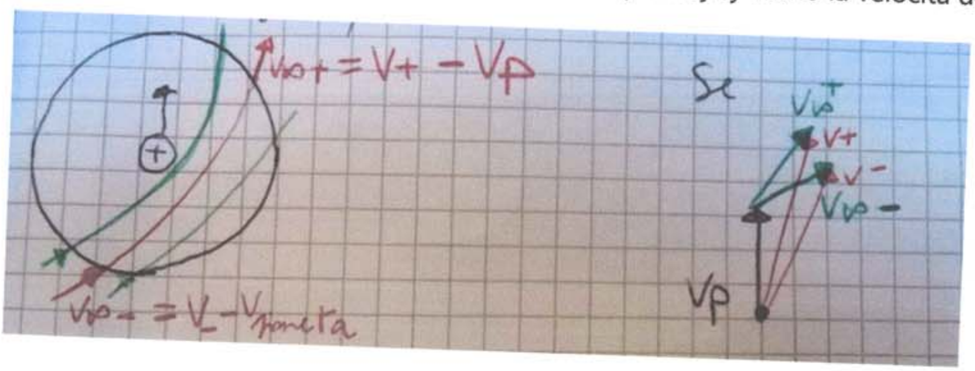
-la sonda percorre π (la prima trasferta di homan) più la ω_2 per τw più l'altra trasferta di homan cioè π per tornare indietro. Questo è l'angolo percorso dalla sonda che dovrà essere uguale a quello percorso dalla terra: quest'ultimo siccome la terra si muove su orbita circolare avrà velocità angolare ω1 mentre il tempo impiegato è quello per la trasferta di homan, quello di attesa più l'altro tempo di homan per tornare indietro, e siccome sono angoli dovranno essere uguali a meno di un multiplo di 2π e cioè 2πk.

Io faccio un certo angolo, e la terra dovrà aver fatto un tot numero di giri in più o in meno rispetto a me più lo stesso angolo. Risolvendo ricaviamo τw. Dobbiamo scegliere il più piccolo valore di k che rende il τw positivo.

Quale sarà valore di k? L'idea è questa: se vado molto lontano, già durante la trasferta di homan la terra avrà fatto 2 o 3 giri quindi valore di k può essere molto grande ma tanto si va a cercare numericamente perché il valore è più o meno casuale, non cè una regola generale.

-Piccolo cenno sulle manovre di fly-by (non è tema di esame).

L'idea è questa: quando entriamo nella sfera d'influenza di un pianeta abbiamo una V∞ che è la nostra velocità meno quella del pianeta (è la definizione di velocità relativa). Se entriamo dentro la sfera con questa velocità V∞ e non facciamo niente, questa velocità ci fa percorrere una iperbole e noi usciamo con una V∞ diversa(gli diamo pedice + per indicare che la velocità è quella dopo il fly-by; la velocità invece prima di entrare nella sfera d'influenza gli diamo pedice meno). Anche questa velocità composta con quella del pianeta ci dà la velocità eliocentrica, quindi possiamo ancora vederla come la velocità rispetto al sole dopo il flyby meno la velocità del pianeta.



Ora se la velocità del pianeta fosse quella disegnata (vettore) avremo le altre velocità disegnate. Si può vedere che per la conservazione dell'energia, la V_∞ sarà la stessa in modulo, perché l'energia è invariata, mentre quello che capiterà sarà una variazione di questa velocità che ci farà passare da una velocità $V-$ a una $V+$ che è diversa anche in modulo. Quindi possiamo cambiare la nostra velocità eliocentrica passando vicino a un pianeta. Questo è un modo per ottenere dei ΔV senza propulsione. Tipicamente se passiamo dietro al pianeta la nostra velocità aumenta perché il pianeta ci tira e quando ci allontaniamo abbiamo una velocità più alta mentre se passiamo davanti al pianeta lui ci frena, e quindi perdiamo energia rispetto al sole. Ovviamente il guadagno o meno di energia dipende dalla rotazione che noi otteniamo, dipende da quanto è grande angolo tra le velocità; se l'angolo tende a zero la velocità non ruota e non cambia niente, mentre se quell'angolo diventa grande la velocità ruota di tanto e la V cambia di tanto. Ovviamente per farlo ruotare tanto bisogna passare vicino al pianeta e quindi la rotazione ricevuta sarà tanto più alta quanto più vicino passiamo dal pianeta. (se sfera d'influenza è piccola entra in uno dei differenti punti disegnati non cambia niente). Inoltre più è alta V_∞ e meno sarà ruotata (se passiamo molto veloci ci devia poco mentre se passiamo più lenti ha più effetto perché stiamo più tempo sotto l'effetto della gravità). Quindi mi serve passare vicino al pianeta e inoltre la V_∞ ha un certo intervallo buono dove ha effetto curvatura, ci occorre un pianeta massiccio ed è anche molto importante la velocità del pianeta : il guadagno di energia che possiamo ottenere è molto alto se la velocità del pianeta è alta e cioè se il pianeta è vicino al sole). Quindi tipicamente la metà per questa manovra è giove e poi venere e poi la terra.

-nelle manovre interplanetarie guardare le cose dal punto di vista eliocentrico mi dice quanto vale la V_∞ con cui devo evadere dal mio pianeta. A seconda del valore che esce mi vado a studiare la mia evasione come abbiamo fatto la volta scorsa. Ma uno si può chiedere se evado con un orbita a parabola e arrivo a $V_\infty=0$ e poi dopo do il mio ΔV finale che mi mette nell'orbita di homan? Quindi le nostre possibilità sono:

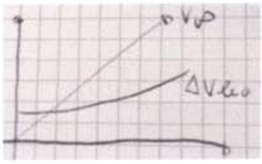
$$\left\{\begin{array}{l} \text{Evasione con } \boxed{V_\infty = V_H - V_C} \\ \quad // \quad \text{con } V_\infty = 0 \text{ e poi } \boxed{\Delta V = V_H - V_C} \\ \text{con } \boxed{\Delta V_{ev\ iperbole}} \text{ e } \boxed{\Delta V_{ev\ par} + \Delta V_{eliocentrico}} \end{array}\right.$$

La parabola avrà un ΔVparabolico più un ΔV eliocentico mentre l'altro avrà un ΔV di evasione di un iperbole. Quindi le due alternative sono dare un ΔV grande alla partenza per arrivare a infinito con la V_∞ richiesta, oppure evadere con un ΔV più piccolo e arrivare a infinito con una $V_\infty=0$ e poi dare un nuovo ΔV per avere la V richiesta. Quale costa di più? Facendo i conti vediamo che conviene la prima, infatti:

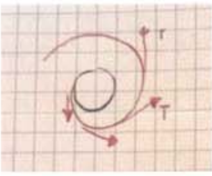
$$\boxed{\Delta V_{ev\ iper} < \Delta V_{ev\ par} + V_{\infty\ iper}}$$

Conviene evadere direttamente sull'iperbole. Noi dimostriamo questo teoricamente e cioè: la mia velocità iniziale Vleo e la mia velocità finale V_∞ (guardando le cose dal punto di vista della terra) sono le stesse, quindi la mia variazione di velocità è la stessa e il ΔV che devo spendere e la

variazione di velocità più le perdite; noi scriviamo sempre che Vfinale= ΔV(mc
il ΔV è più piccolo se le perdite sono più piccole, le perdite di cui stiamo par
gravità e abbiamo più perdite di gravità se salgo lentamente quindi su par
che se la V∞ e sufficientemente grande , il costo in termini di ΔV può essere a
della v∞, cioè se vogliamo evadere dalla terra von V∞=10 ci costa meno di dieci ; qu
grande e la V∞ e tanto più noi risparmiamo evadendo sull'iperbole. Abbiamo andamento di
tipo:



-Tutte queste considerazioni fatte finora valgono per manovre impulsive. Nella propulsione elettrica ha accelerazioni molto basse che non si possono considerare impulsive. Ci vogliono mesi di spinta e cosi la mia traiettoria terra marte cambia. Tutte queste manovre impulsive valgono come base per la propulsione elettrica (come limite a cui tendiamo se la nostra accelerazione è alta). Qua abbiamo variazione graduale della velocità che fa cambiare anche posizione :

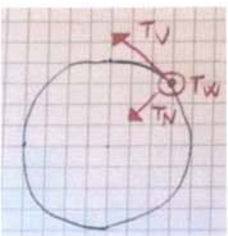


idea è che se io inizio ad accelerare, la mia velocità aumenta e le forze d'inerzia centrifughe aumenta e cosi iniziamo ad allontanarci dal sole come in figura e abbiamo cosi una spirale (se continuo a spingere in modo continuo parallelamente alla velocità). Però cosi abbiamo cambiato il raggio e di conseguenza abbiamo perdite per gravità e le cose si complicano anche perché la direzione della mia spinta può variare nel tempo. Noi ci occupiamo dei principi che sono i seguenti: quello che si può tirar fuori e che esistono delle equazioni che descrivono l'evoluzione nel tempo la derivata dei parametri orbitali. Ci sono delle equazioni che danno la derivata del semiasse rispetto al tempo dell'eccentricità e cosi via per tutti i parametri orbitali. Tipicamente sono le soluzioni trovate da gauss (eq planetarie di gauss). Se noi chiamiamo α i parametri orbitali :

$$\left[\alpha = (a \; e \; i \; \Omega \; \omega \; M)\right] \qquad \left[\dot{\alpha} = f\left(\alpha, \frac{\vec{T}}{m}\right)\right]$$

Avrò delle equazioni che mi danno la derivata di α in funzione dei parametri stessi α (come la spinta cambia l'orbita dipende dall'orbita stessa) e dipende dalla spinta che la scriviamo come T/m inteso come vettore (spingere in una direzione ha effetto diverso rispetto ad un'altra).

Andiamo a interpretare ste formule; supponiamo che la nostra orbita sia:



in un dato punto individuiamo tre componenti di spinta: la componente lungo la velocità Tv, la componente perpendicolare alla velocità Tn e la componente normale al piano dell'orbita Tw uscente dal piano del pc.

Che cosa fanno queste componenti di spinta? Che parametri cambiano?

Sappiamo già che la Tv va a cambiare l'energia che è legata al semiasse e quindi cambia il semiasse ma non forma in

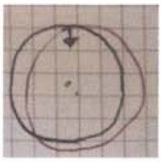
cambia solo questo, tende anche a cambiare l'eccentricità e quindi la questo modo

Idea è questa: se siamo al periastro e spingiamo alla punta andiamo a dare una trasferta di homan e orbita diventa come sopra.

TV

Cambiando eccentricità andiamo anche a cambiare la posizione del peristro e cioè ω. Quindi scopriamo che spingere parallelo alla velocità cambia l'energia (le dimensioni dell'orbita) ma anche la forma e l'orientamento nel piano.

La componente Tn cambia in modo analogo la forma ma non le dimensioni, ad es:



se orbita è circolare come in figura, se spingiamo in un punto perpendicolare alla velocità, la nostra orbita diventerà una cosa del genere (linea rossa). L'energia non è cambiata e quindi il semiasse non cambia perché se spingo perpendicolare alla velocità il modulo della velocità non cambia sono tutte perdite per disallineamento. TN

La componente Tw invece tende a cambiare l'inclinazione e la posizione del moto.

Riscritte :

$$\begin{bmatrix} T_V \rightarrow \dot{a},\ \dot{e},\ \dot{\omega} \\ T_N \rightarrow \dot{e},\ \dot{\omega} \\ T_W \rightarrow \dot{i},\ \dot{\Omega} \end{bmatrix}$$

eccentricità e

Ora il problema è chiedersi: dato che io voglio ottenere un certo cambiamento di a di e ed ecc in quale direzione devo spingere? Siccome effetti sono diversi a seconda del punto in cui mi trovo sull'orbita è intuitivo pensare che la direzione in cui devo spingere cambierà a seconda di dove mi trovo sull'orbita. Tutto molto più complicato rispetto alle manovre impulsive.

Primo criterio cè lo dà la tabellina: scopriamo che se vogliamo cambiare il piano dell'orbita, l'inclinazione e Ω devo spingere perpendicolare al piano; se voglio cambiare l'energia devo spingere parallelo alla velocità; quello più problematico e se voglio cambiare l'eccentricità devo spingere un po' uno e un po' l'altro.

Da un punto di vista più specifico invece non possiamo trattare il caso più generico e andiamo a vedere quella che si chiama l'approssimazione di Edelbaum che è la base per lo studio delle traiettorie con la propulsione elettrica. Quest'approssimazione considera orbite quasi circolari perché molte delle orbite che noi usiamo (satelliti o pianeti) sono quasi tutte con eccentricità piccola; se io voglio andare da un satellite a un altro poiché la mia spinta è piccola il cambiamento di eccentricità che io ottengo sarà piccolo, quindi se parto da un orbita circolare l'orbita è sempre quasi circolare perché la mia spinta essendo piccola non riesce a cambiare l'eccentricità in modo significativo. Per altro alla quasi circolarità si può aggiungere anche la piccola inclinazione per lo stesso motivo: la mia spinta potrà cambiare la mia inclinazione di poco, per cui il cambio d'inclinazione che posso ottenere quando faccio un giro è piccola.

Quindi abbiamo $e \approx 0$ e $i \approx 0$ (la i il prof la considera senza puntino, se lo mette considera la i puntato)(i senza punto è circa 0 perché i punto è circa 0)(io parto da inclinazione 0, poiché la mia accelerazione è piccola e le variazioni sono piccole l'inclinazione rimarrà sempre vicino a 0, per lo meno se faccio un pochi giri attorno, se ne faccio mille o più alla fine si ottengono grandi variazioni d'inclinazione mentre non voglio ottenere variazioni di eccentricità).

Se adottiamo queste semplificazioni le eq.di gauss si semplificano e otteniamo le eq di Edelbaum, le quali sono:

$$\left[\dot{a} = 2 \cdot T_V/m \cdot \frac{a}{V}\right]$$

$$\left[\dot{e} = \left[2 \cos\nu \frac{T_V}{m} - \mathrm{sen}\,\nu \frac{T_N}{m}\right] / V\right]$$

$$\left[\dot{\omega} = -\dot{\Omega} + \left(2\,\mathrm{sen}\,\nu \frac{T_V}{m} + \cos\nu \frac{T_N}{m}\right) / eV\right] \quad *$$

le eq fuori dal piano sono

$$\left[\dot{i} = \cos(\omega + \nu) \frac{T_W}{m} \cdot \frac{1}{V}\right]$$

$$\left[\Omega = \mathrm{sen}(\omega + \nu) \frac{T_W}{m} \cdot \frac{1}{iV}\right] \quad \otimes$$

$$\left[M = \sqrt{\mu / a^3}\right] = \dot{\nu}$$

Con ecc la *

e incl la $\otimes$

L'effetto dipende da v cioè dove mi trovo sulla mia orbita (v è l'anomalia cioè l'angolo tra dove mi trovo e il periastro). Le prime tre sono le equazioni nel piano. Mentre le equazioni fuori dal piano sono le altre 3.

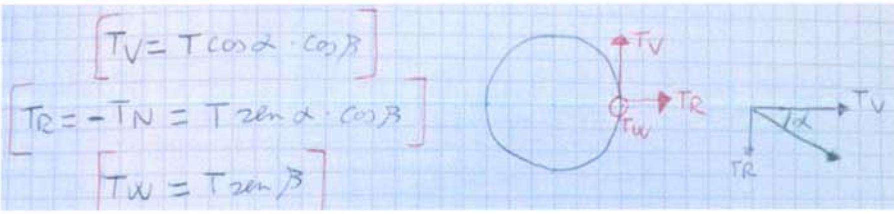
Se l'orbita è quasi circolare M(anomalia media) e v punto coincidono.

Il punto critico e che la nostra orbita è quasi circolare ed $e \approx 0$ e il termine di ω punto tende a infinito; se e è piccola quel termine diventa molto grande e lo stesso e che se l'inclinazione i è molto piccola la Ω punto diventa molto grande perché se l'orbita è circolare il periastro non è definito quindi basta uno "sputino" per cambiare la mia orbita e sparare il periastro dove voglio, cosi se la mia orbita è piana ne basta uno sputino per far variare la mia orbita. Non essendo definito il punto appena io faccio qualcosa ed e non è più zero il periastro finisce dove voglio e quindi la derivata può assumere qualunque valore. (se prima con inclinazione salivo e scendevo passando dallo zero scenderà e salirà).

Quindi queste singolarità capitano quando passo per i=0 ed e=0. Il problema e che stiamo proprio trattando il caso in cui e=0 e i=0 quindi sembra che stiamo facendo le cose sbagliate. In realtà questi problemi sono soltanto apparenti perché sono legati al fatto che il mio periastro non è definito e il mio nodo ascendente non è definito quando l'orbita è circolare o non inclinata. Io posso fare un cambio di variabili e mandare via quelle singolarità, addirittura edlbaum ottiene i risultati semplicemente ignorando le equazioni ω punto e Ω punto.

Quindi ignorando queste eq ed utilizzando cambio delle variabili otteniamo eq di edlbaum. Lui si è posto questo problema: in che direzione devo spingere se voglio cambiare solo il semiasse a, in che direzione devo spingere se voglio cambiare solo l'eccentricità e in che direzione devo spingere se voglio cambiare soltanto l'inclinazione e si chiede che effetti hanno queste tre cose se io faccio un giro completo intorno al mio corpo, cioè: qualè la mia massima variazione di a che io posso ottenere in un giro? Qual è la mia massima variazione di e che posso ottenere facendo un giro completo? Qual è la massima variazione di i che io posso ottenere facendo un giro completo? E nel risolvere questo problema trovo anche istante per istante in quale direzione devo spingere per massimizzare una delle tre variazioni (a,e,i).

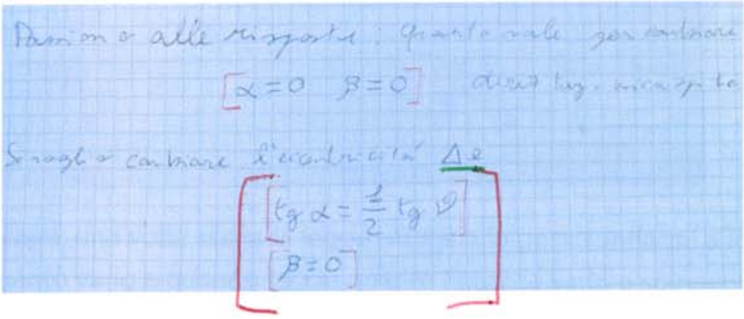
Il risultato di questi problemi è il seguente:



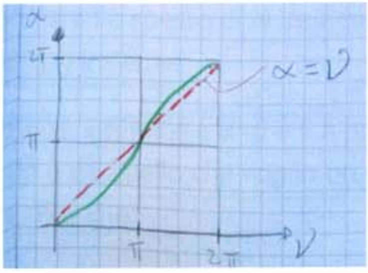
Noi possiamo scrivere le tre componenti di spinta attraverso due angoli dove α è l'angolo nel piano e β quello fuori dal piano. Però anziché la componente Tn che punta verso il centro, uso una componente Tr=-Tn che punta all'esterno. La componente normale diventa quella radiale. L'angolo α è l'angolo di disallineamento, se è uguale a 0 spingiamo parallelo alla velocità.

Detto questo possiamo passare alle risposte: quale angolo devono avere α e β se voglio cambiare solo a? se voglio cambiare il semiasse vuol dire che voglio cambiare l'energia e quindi bisogna cambiare il modulo della velocità e se voglio cambiare quest'ultimo devo spingere allineato alla velocità per cui α=0 e β=0 e quindi la spinta è in direzione tangenziale.

Un po' più sottile è il caso in cui voglio cambiare l'eccentricità: sembra un po' una contraddizione con le nostre ipotesi di piccola eccentricità, in realtà questa trattazione va bene finchè io voglio ottenere dei Δe piccoli, se diventano troppo grandi la mia orbita non è più circolare e quello che sto facendo non ha più senso. Se voglio cambiare solo Δe su può dimostrare che la tgα=(1/2)tgν e sempre β=0. In formule:



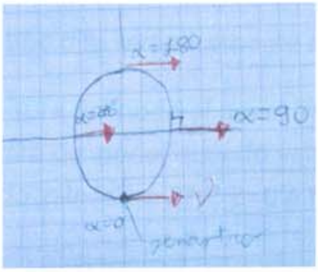
Andando a tracciare la variazione di α in funzione di ν si ha:



-l'andamento è la linea verde. Con buona approssimazione può essere approssimato con α=ν (linea tratteggiata).

L'angolo corretto sarebbe spingere α=arctg((1/2)tgν) però la differenza tra questa soluzione e quella più semplice è minima per cui molto spesso in prima approssimazione si dice che se si vuole cambiare l'eccentricità devo spingere con α=ν.

Questo è molto facile da implementare perché se prendiamo un orbita eccentrica :



-dove ν parte dal periastro e cresce in quel senso (vale per piccole eccentricità); vuol dire che a ν=0 io spingo con α=0, se siamo a ν=90 allora spingo con α=90 e cosi via fino alla fine del giro.

La direzione della spinta è costante nello spazio, spingo sempre verso destra: cioè se voglio cambiare l'eccentricità in questa direzione devo spingere in quell'altra, cioè devo spingere in direzione perpendicolare alla direzione della linea dei nodi lungo cui sto cambiando l'eccentricità, o se vogliamo se si vuole aumentare l'eccentricità devo accelerare il perigeo , frenare all'apogeo e spingere perpendicolare alla velocità nei punti intermedi. Questa è una manovra per cambio di eccentricità: direzione della spinta costante e in particolare perpendicolare alla linea delle apsidi o in generale perpendicolarmente alla direzione in cui noi vogliamo cambiare il vettore eccentricità cioè quello che punta verso il periastro.

La stessa relazione, data solo una costante che sfasa la roba, cè l'ho se io voglio cambiare non il modulo di e ma la direzione del vettore e cioè se voglio ruotare la mia orbita senza cambiare l'eccentricità, la cosa e praticamente la stessa cambia solo la direzione della spinta per come voglio cambiare la linea delle aspidi.

Zola...

L'ultima domanda che ci si pone e cosa devo fare se voglio cambiare solo i? la risposta è facile e cioè β=+o-90°. Ha il + e il – nel senso che: se voglio aumentare l'inclinazione devo spingere verso l'alto quando io sto salendo di latitudine e verso il basso quando io sto scendendo e di nuovo verso l'alto quando sto salendo, cioè:

Tutte queste analisi sono fatte se io compio un giro attorno al mio corpo principale; ma se io voglio fare una missione lunga per cui faccio moltissimi giri attorno al mio corpo principale, non devo far altro che mettere insieme i risultati di un giro con quelli del secondo e del terzo e cosi via. Quindi edelbaum considera una missione multirivoluzione (cioè che fa un gran numero di giri attorno al corpo principale) in cui gradualmente , giro per giro, si cambiano a ed i , semisse ed inclinazione, e in cui alla fine io ottengo grandi variazioni sia di semiasse ed inclinazione (ad esempio per passare da orbita leo a quella geo).

Qual è il probelma di queste missioni? È scegliere, giro per giro, quale β assumere perché non sta scritto che il β che uso vada bene per tutti i giri. Noi possiamo, mediando quello che succede su un giro, giro per giro sceglermi il β più conveniente e quello più conveniente dipenderà da quanto efficacemente io riesco a cambiare il piano nel punto dove sono, o quanto efficacemente una spinta fuori dal piano mi cambia l'inclinazione, e in modo analogo quanto efficacemente una spinta parallela alla mia velocità mi cambia il mio semiasse, e la risposta l'abbiamo in un certo senso già vista: noi sappiamo che conviene cambiare il piano, che richiede una rotazione della velocità, dove la V è bassa, quindi la risposta è semplice: adotta un β piccolo alla partenza (ad esempio vado da orbita bassa a orbita alta) perché abbiamo V grande e qui conviene accelerare per allontanarci dal corpo principale e solo dopo che ci siamo allontanati, la nostra velocità è diventata bassa, e allora qui conviene cambiare la velocità. Man mano che ci allontaniamo dal sole cambiamo il β,all'inizio basso e alla fine alto. In questo modo si ricava che la soluzione ottimale prevede che :

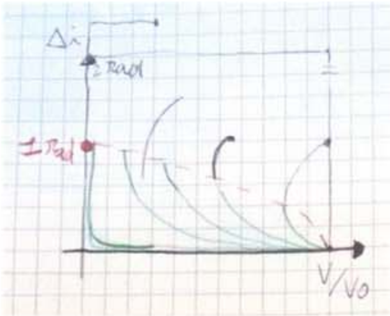
$$\boxed{V \operatorname{sen}\beta = V_0 \cdot \operatorname{sen}\beta_0}$$

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen}\beta}{\sqrt{r}} = \frac{\operatorname{sen}\beta_0}{\sqrt{r_0}}}$$

Che il prodotto della velocità per il senβ sia costante e che per esempio sia uguale ai valori iniziali.

Questa è la soluzione dal puinto di vista matematico ma a noi interessa quella dal punto di vista teorico: quando voglio cambiare contemporaneamente semiasse e inclinazione e lo faccio a bassa spinta, la soluzione ottimale prevede di avere un angolo fuori dal piano piccolo ai raggi bassi e via via crescente ai raggi alti con una proporzionalità tra senβ e la radice del raggio.

Sembra semplice ma cè piccola complicazione: immaginiamo di fissare l'orbita iniziale e quindi di scegliere Vo, allora possiamo porci il problema in questo modo: io scelgo il βo e poi inizio a seguire la legge di edelbaum e quindi comincio a spingere con quel βo, poi man mano che il mio raggio aumenta cambio il β secondo quella legge li;la mia orbita diventerà sempre sempre più grande e il mio β diventerà sempre sempre più grande. Attenzione però che arrivati ad un certo punto, ci sarà un certo r per cui il nostro senβ=1 cioè β=90°, da questo punto se io continuassi ad accelerare il β non sale più e non posso più salire ulteriormente di raggio. Se voglio andare a raggi più alti dovrò partire con un βo più piccolo e osi quando arrivo al ragigo di prima questo non è più 1 ma sarà più piccolo e così posso salire ancora di più. A rigore ci sono zone di raggio finale ed inclinazione che non riusciamo a raggiungere con questo tipo di soluzione; se faccio il disegno:



- lo faccio in funzione della variazione di inclinazione con V/Vo; l'idea è che se parto con certo βo posso trovare diverse curve verdi che si fermano quando si raggiunge β=90. Con βo piccolo salgo di più mentre con βo più grande salgo di meno. Curva tratteggiata rossa è dove si ha tg β=90. Cè limite oltre il quale non si può andare. Ma se diciamo che vogliamo andare oltre quel limite? Ad esempio nei punti neri li? Voglio variazione d'inclinazione maggiore rispetto a qeulla che ottengo scegliendo βo e andando dritto? L'unica soluzione è una manovra dove prima io salgo di quota e poi torno indietro; ad esempio sul grafico se voglio andare oltre la mia orbita ottimale e quella nera più spessa. Superata la quota, li cambia il piano fortemente e poi torna indietro, perché in quel punto li mi conviene di più andare a raggi molto molto alti dove non pago il cambio di piano (lo pago poco) e poi torno indietro; quindi ci sono accanto le soluzioni dirette in cui io salgo sempre di raggio,e soluzioni in cui prima salgo e poi scendo quando sono a raggi bassi e voglio grandi cambiamenti d'inclinazione, per cui mi costerebbe tanto . Ad esempio immaginiamo che r1=r2 (voglio solo cambiare l'inclinazione ma non il semiasse), è ovvio che la soluzione di cambiare piano spingendo con β=90° non è ottimale perché li la mia velocità è alta , spendo molto per ruotarlo; la soluzione cui incominciamo ad accelerare, ci allontaniamo dal corpo, e quando siamo lontani dal corpo ho velocità basse, usiamo β=90 e cambiamo il piano e poi torniamo indietro; spendiamo meno a fare cosi che non a cambiare il piano a raggi bassie quindi ci sono diverse soluzioni in cui fintanto che Δi è limitato salgo direttamente, man mano che salgo cambio il piano sempre di più e arrivo a destinazione; ci sono casi in cui devo superare la quota a cui devo arrivare, una volta che l'ho superata posso cambiare il piano e poi torno indietro.

È da sapere il concetto, il come conviene spingere e cosi via. La trattazione matematica non la chiede.

Se vogliamo cambiare di tanto il nostro piano, andiamo all'infinito, cosi la velocità è zero ,possiamo cambiare il nostro piano e torniamo indietro.

Il valore più alto sul grafico è pari ad 1 radiante; quindi se vogliamo cambiare il nostro piano di un radiante è evadere (V=0 quindi raggio infinito) la soluzione ottimale è quella: partiamo con β infinitesimo, lo facciamo salire fino a 90 quando il raggio tende ad infinito e arriveremo con l'inclinazione di un radiante. Se voglio fare 2 radianti la soluzione ottimale è proprio questa: vado ad infinito, cambio il radiante e poi torno indietro e trovo due radianti. Quindi su grafico ci sarà un punto pari a 2 rad.

Qualunque punto che sia al di sopra di quello, cioè se vogliamo cambiare più di due radianti, la soluzione ottimale è sempre questa: andiamo all'infinito, qui cambiamo di tutte le radianti che vogliamo perhcè la nostra velocità è nulla e torniamo indietro; questo mi costerà meno più di qualunque altra scelta se il nostro cambio è maggiore di due radianti. Quindi ricapitolando quello che conviene fare per andare in un qualunque punto al di fuori del limite tratteggiato è: non fare niente , arrivati all'infinito cambiamo il piano di quanto vogliamo e poi torniamo indietro.

La conclusione di questo dal punto di vista grafico è molto semplice perché malgrado ci siano tutte queste possibili combinazioni alla fine quello che interessa a noi propulsionisti e quanto mi costa in termini di ΔV la missione, e questo si trova con una formula molto semplice per tutti i casi (sia che salga diretto, che vada su e poi torni indietro) e si scrive:

$$\left[\Delta V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2 V_1 V_2 \cos\frac{\pi}{2}\Delta i}\right] \quad \text{con } \Delta i < 2\,rad$$

$$\Delta i = 0, \quad \left[\Delta V = |V_1 - V_2|\right] \qquad \Delta i = 2\,rad, \quad \left[\Delta V = V_1 + V_2\right]$$

$$V_2 = 0 \text{ e } \Delta i = 0 \text{ escape} \quad \left[\Delta V = V_1\right]$$

Dove V1 è la velocità dell'orbita circolare alla partenza , V2 è la velocità circolare sull'orbita di arrivo e Δi è la variazione che noi vogliamo ottenere; questo nel caso di Δi<2rad. Se è maggiore di 2 rad vale la relazione per Δi=2rad.

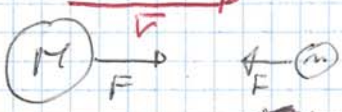
Se Δi=0 si ha ΔV=|V1-V2|; approssimazione che si può usare tra orbite circolari complanari: partiamo da orbita bassa con V=8km/s e vogliamo andare su orbita alta dove la velocità è V=3Km/s allora il ΔV=5km/s ; le perdite sulla traiettoria di homan sono due volte il ΔV).

Se Δi=2rad allora ΔV=V1+V2. Notiamo ancora che se voglio V2=0 e Δi=0 (cioè l'escape) cioè arrivare a raggio infinito senza cambiare di piano il nostro ΔV=V1 (voglio evadere da un orbita bassa dalla terra allora mi costa 8Km/s)(costa il doppio rispetto propulsione chimica).

Notiamo che se vogliamo Δi=2 rad quello che faccio è escape dall'orbita 1 e poi torno indietro sull'orbita due.

PROPULSIONE SPAZIALE CASALINO

Nello spazio si usa la propulsione elettrica.
La propulsione è la capacità di generare una forza (spinta) che va ad influenzare il moto del nostro sistema.
La spinta serve a determinare il moto di un certo sistema (per farlo andare dove vogliamo noi).
Primo richiamo, **orbita**: ogni oggetto è soggetto a influenza di diverse forze, ma considerando un nostro corpo influenzato solo da un altro corpo (probl 2 corpi) si ha:



- (terra e satelliti ecc) questi due corpi si scambiano forza di Newton che è pari a

$$\boxed{F = -\gamma \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \frac{\overline{r}}{r}}$$

altrattiva; cost gravitaz. universale; di distanza; versore

(r va da M a m se è la forza subita da m)
(r va da m a M se scrivo forza subita da M)

Newton ha fatto vedere che con corpi di simmetria sferica si può esprimere moto tra i due (corpo piccolo m corpo grande) come

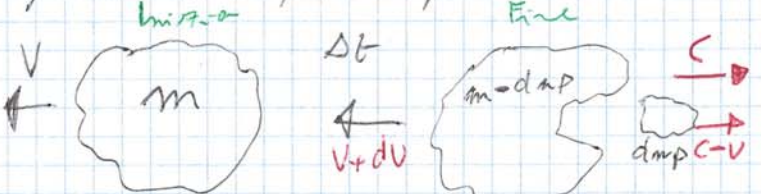
$$\boxed{\ddot{\overline{r}} = \frac{d^2 \overline{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{\overline{r}}{r}}$$

con μ parametro gravitazionale (del pianeta; caratteristica del corpo a cui ruota attorno)

La soluzione di questa equazione è una traiettoria **conica**; specificando posizione e velocità iniziali (r_0 e V_0) si può integrare eq e trovare $r(t)$ e $V(t)$. Noi facciamo riferimento a ellisse (chiusa).
A noi interessa sapere che siamo sottoposti a certa forza, percorriamo una certa orbita fissata dalle condizioni iniziali e la si percorre indefinitamente (nei due corpi).
Abbiamo una propulsione quando? Abbiamo 2 tipi di propulsione: **primaria** (cambiare l'orbita) e **ausiliaria** (genera spinta che annulla altre forze per mantenere la stessa orbita).
Siccome orbita dettata da posizione e velocità devo intervenire con una spinta perché agisce con acc e può variare la V.
(serve spinta che cambi V o che eviti che altre forze cambino V).

Come si realizza questa forza? Sulla terra tutti i sistemi propulsivi sono basati su azione e reazione. Nello spazio dobbiamo portarci noi dietro il propellente. Ci portiamo dietro il mezzo per lo scambio di q d m. Buttiamo propellente da una parte così noi andiamo dall'altra. Questo prop dovrà accelerarlo con me.

Dobbiamo portarci dietro il minor propellente possibile perché ②
pesa e dobbiamo portarcelo dietro (immissione a serbatoi motore ecc).
Vediamo la relazione tra la spinta ottenuta e la quantità di propellente consumata che sarà la base dei nostri studi:
Immaginiamo un sistema isolato composto da massa m con una parte della quale può essere buttata via:



- $t=0$ sistema ha massa m che si muove a V;
- Δt espelliamo una massa dmp con una velocità C rispetto alla massa m e di conseguenza con una velocità $C-V$ rispetto al sistema fisso.

Siccome siamo in un sistema isolato la q.d.m. rimane costante per cui si ha:

$$\underbrace{m\cdot V}_{\text{inizio}} = \underbrace{(m-dm)(V+dV) - dmp\cdot(C-V)}_{\text{fine}}$$

Con un po' di semplificazioni si ha:

$$0 = m\,dV - \cancel{dmp}\cdot V - \overbrace{dmp\cdot dV}^{\text{ordine superiore}=0} - dmp\cdot c + \cancel{dmp}\cdot V$$

si ottiene così

$$\boxed{m\cdot dV = dmp\cdot c}$$ questa per un'espulsione del propellente discreta

In realtà il propellente viene buttato in modo continuo, quindi, tipicamente, scriviamo la massa espulsa in un intervallo di tempo dt come una portata $\dot{m}p\cdot dt$ cioè:

$$\boxed{dmp = \dot{m}p\cdot dt}$$

con portata di propellente

e se dV è la variazione di velocità misurata nell'intervallo dt la scriviamo come $dV = \frac{dV}{dt}dt$ e così otteniamo

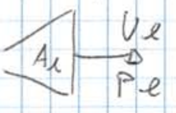
$$\boxed{m\frac{dV}{dt} = \dot{m}p\cdot c}$$ simile alla legge di Newton (formalmente)

e in analogia chiamiamo

$$\boxed{\dot{m}p\cdot c = T}$$ con T = spinta

definizione della spinta di un sistema propulsivo spaziale
(C è la velocità a cui acceleriamo il propellente rispetto a noi)
C velocità efficace di scarico
Come mai c'è sta efficace? finché propellente è discreto la velocità di scarico e quella efficace di scarico sono le stesse. Quando si

buttà propellente in modo continuo (gas che esce da ugello) c'è ③
sottigliezza: nel momento che il gas esce dall'ugello, è ancora in contatto con il sistema della massa m grazie alle forze di pressione che il propellente che sta uscendo dall'ugello scambia col propellente che è ancora dentro l'ugello che a sua volta scambia con pareti dell'ugello e quindi col mio sistema. Nella realtà se uno va a misurare la spinta che agisce sul sistema, quando questo scarica un gas e lo fa a $P \neq 0$, in questo caso la spinta è diversa; l'espressione corretta per gas che esce da ugello si ha:



$$\boxed{T = \dot{m}_p V_e + A_e (P_e - P_0) = \dot{m}_p \cdot c}$$

che è compatibile con $\dot{m}_p$; nella realtà definiamo la c (velocità efficace di scarico) come il rapporto tra la spinta e la portata di propellente.

Quindi c non è proprio la velocità a cui stiamo buttando il propellente, però nel nostro campo è molto vicina perché nello spazio $P_0 = 0$ e la P_e che ha il propellente all'uscita dei propulsori spaziali è molto molto piccola, quindi per noi va bene così in prima approssimazione.

(Prendiamo per c la velocità a cui il propellente viene buttato via).

La spinta che si ha, insieme alle altre forze, andrà a determinare l'acc. del mio sistema.

Finora abbiamo visto cosa capita in un certo istante. Ora vediamo effetto cumulativo nel tempo della spinta (non spingiamo un istante solo). Spingiamo per certo tempo della manovra; vediamo grandezze che esprimono l'effetto della manovra, sono due:

- Impulso totale

$$\boxed{I_t = \int_{t_0}^{t_f} T\,dt \underset{T=cost}{=} T \cdot \Delta t}$$

- con $T = cost$ è il prodotto della spinta per la durata della manovra Δt.
- ci dice: effetto di una spinta per certo tempo sarà diverso a seconda del tempo e l'effetto ottenuto spingendo per un tempo uguale sarà diverso se la spinta è grande o piccola.

Ci da una misura di quanto potremo variare la nostra velocità (spinta piccola tempo grande = a spinta grande e tempo piccolo).

Effetto del cambiamento di V qui non lo vediamo perché dipende oltre che dalla spinta anche dalla massa.

Prima misura effetto della spinta.

Importante perché ci serve per definire l'impulso specifico che è correlato a quanto propellente consumiamo. (4)

Il passo necessario quindi è calcolare il consumo di propellente

$$\boxed{m_p = \int_{t_0}^{t_f} \dot{m}_p \, dt \underset{\dot{m}_p = cost}{=} \dot{m}_p \Delta t}$$

quanto propellente consumo in tutta la manovra.

Con queste definiamo:

- Impulso specifico [s]

$$\boxed{I_{sp} = \frac{I_t}{m_p g_0} = \frac{I_{totale}}{\text{peso propellente consumato}}}$$

effetto / spesa

$g_0 = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$

- peso che il propellente avrebbe sulla terra.

Isp è una sorta di misura di quanto efficacemente noi stiamo sfruttando il nostro propellente (se ho 1 kg di prop. e l'impulso specifico vale 1000 s, io potrò avere un certo impulso totale e quindi ottenere un certo cambiamento di velocità del sistema; se con lo stesso kg il mio Isp fosse di 2000 s, si vede che con stesso propellente avrei un effetto doppio). Possiamo vedere che I_t è prodotto della massa del propellente per l'impulso specifico, quindi tanto più alto è Isp e tanto più io ottengo con la stessa quantità di propellente.

Isp mi dice quanto propellente mi serve in base all'effetto che voglio ottenere, e poiché il portarsi dietro il propellente è l'effetto più importante della Propulsione, è ovvio che questa eq ci dice quanto propellente ci dobbiamo portare dietro.

- Altra considerazione: con T = cost e $\dot{m}_p$ = cost abbiamo relazione semplici e se valgono insieme Isp diventa:

$$\boxed{I_{sp} = \frac{T \cdot \Delta t}{g_0 \cdot \dot{m}_p \Delta t} = \frac{c}{g_0}}$$

con T = cost, $\dot{m}_P$ = cost

in un certo istante in cui valgono queste condizioni Isp vale sopra. Questa eq mostra che Isp non è altro che la velocità efficace di scarico C diviso g_0 (Isp e C sono la stessa cosa a meno di g_0). Isp ha dimensione di un tempo [s]; C è una velocità [m/s] [Km/s] siccome sono legate da g_0 significa che se Isp vale 1000 s la C = 10000 m/s (c'è fattore 10).

Isp può essere visto come un tempo caratteristico; se la $I_{sp} = \frac{T \cdot \Delta t}{m_p \cdot g_0}$ e rigirandola si ha:

5

$$\left[\Delta t = I_{SP} \cdot \dot{m}_p \cdot g_0 \cdot \frac{1}{T}\right]$$

idea è questa: immaginiamo di avere certa quantità di propellente (1 Kg) e di voler generare una spinta pari al peso che questo Kg di propellente ha sulla terra (9,81); questa eq ci dice che se io voglio generare una spinta pari al peso, con quella massa di propellente posso mantenere quella spinta per un tempo $\Delta T = I_{SP}$ (pari a I_{SP}). Dire che il mio impulso specifico vale 1000 S vuol dire che io posso generare con 1 Kg di propellente una forza pari a 1 Kg per 1000 S. (ci dice per quanto tempo, una certa quantità di propellente può generare una forza pari al suo peso) (altro modo di misurare efficienza del propellente; se prop ha I_{SP}↑ genera questa spinta per un tempo molto lungo e viceversa).

Possiamo ricavare la massa di propellente come

$$\left[m_p = \frac{I_t}{g_0 I_{SP}} = \frac{I_t}{C}\right]$$

fissato effetto (I_t da ottenere) la quantità di propellente che mi serve è tanto più piccola tanto più grande è I_{SP}.

Più è alto I_{SP} meno m_p serve.

– I_t impreciso; noi vogliamo variare la velocità che dipende da T e da m (che varia perché consumiamo propellente). Tipicamente sappiamo la massa iniziale ma non sappiamo quanto consumiamo e quindi non si sa il valore della massa media e quindi non sappiamo quanto I_t serve.

Andiamo allora a valutare il ΔV propulsivo cioè la variazione di velocità (considerando se avessimo solo la spinta T che agisce parallela alla V).

come:

$$\left[\Delta V = \int_{t_0}^{t_f} \frac{T}{m}\, dt\right]$$

è il cambiamento di velocità che otterrei se l'unica forza agente fosse T e che agisce // a V. (si integra acc che è F/m)

Con la definizione di T si ha:

$$\Delta V = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\dot{m}_p \cdot c}{m}\, dt$$

sapendo poi che la portata di propellente non è altro che la diminuzione di massa nel tempo $\dot{m}_p = -\frac{dm}{dt}$

sostituendo e facendo un cambio di variabile si ottiene:

$$\left[\Delta V = -\int_{m_0}^{m_f} \frac{c}{m}\, dm\right]$$

il caso che trattiamo è $C = cost$ e otteniamo $\Delta V = + C \int_{m_f}^{m_0} \frac{dm}{m}$

e otteniamo come risultato:

$$\left[\Delta V = C \cdot \ln \frac{m_0}{m_f}\right]$$

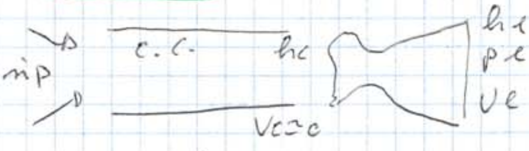
eq del razzo (Tsiolkovsky) – si ricava

$$\left[\frac{m_f}{m_0} = e^{-\frac{\Delta V}{C}}\right]$$

Eq importante per propulsione spaziale, mette in relazione quanta massa possiamo portare a destinazione rispetto a quanta massa avevamo alla partenza (la massa di propellente è $\boxed{m_p = m_0 - m_f}$). (6)
Mette quindi in relazione quanto propellente ci serve, con la ΔV (variaz di velocità) che vogliamo ottenere e l'impulso specifico ($c = g_0 \cdot I_{sp}$).
Eq fondamentale perché per ogni missione che si vuole compiere esiste un ben preciso valore di ΔV che consente di realizzarla. (se ho satellite a quota h e lo voglio portare a $H > h$ so che con qualche calcolo il ΔV vale TOT) (ogni missione ha ben deciso ΔV).
Quindi dato ΔV, dato carat del motore c, ci dice quanti Kg ci portiamo a destinazione a seconda dei mezzi che si hanno (stima budget di massa per una missione). Per vedere:

$\Delta V/c$	m_f/m_0
1	$e^{-1} = 0{,}35$
2	$e^{-2} = 0{,}1$
4	$e^{-4} = 0{,}01$

1 - se parto con 100 kg arrivo con 35 kg e 65 sono di propellente (dovremo tenere conto anche dei serbatoi) serbatoi
Al crescere di $\Delta V/c$ le cose peggiorano (90 kg di propellente)
Ci da anche importanza di I_{sp} (se $I_{sp} = 10\,\Delta V$ allora si porta a destinazione il 95% della massa).
Vediamo che con ΔV grandi la propulsione chimica non va bene perché ha un valore di c limitato, se vogliamo $\Delta > 10$ km/s serve la propulsione elettrica (altrimenti servirebbe ~~…~~ tantissima m_p per poco peso utile).
perché da $c \uparrow\uparrow$ rispetto alla chimica; così abbiamo limitato m_p.
Facciamo un confronto
- Chimica



- si hanno uno o più propellenti che vengono mandati in una camera di combustione. Reagiscono tra loro e producono gas caldi a certa $h_c = c_p \cdot T_c$ che vengono fatti espandere in un ugello dove $p\downarrow$ $T\downarrow$ e $V\uparrow$ fino a raggiungere valori finali pari a h_e, p_e, V_e.
Nella c.c. ho $V_c \simeq 0$. Ora applichiamo I principio tra ingresso (h_0) e l'uscita di cc e poi tra cc e ugello.
Nella 1° parte si ha che $\boxed{\dot m_p (h_c - h_0) = \dot m_p E_{ch}}$
mentre nell'ugello, il flusso di entalpia totale uscente è:
$$\dot m \left(h_e + \frac{V_e^2}{2} - h_c \right) = 0$$
Ora trascuriamo h_0 (perché fluido in ingresso è freddo e la E trascurabile) e h_e (si immagina espansione fino ad avere $p_e = 0$), in questo modo otteniamo:
$$\boxed{c \overset{\text{approssimata}}{=} V_e = \sqrt{2 E_{ch}}}$$
vediamo che la portata sparisce, la quantità di propellente non determina la velocità di uscita (ma l'energia liberata

che l'energia necessaria ad avere la spinta (E_K) sono legate alla stessa massa) (se prendo un 1 kg ci da certa energia che devo dare allo stesso kg di propellente che avevo e così al crescere di $\dot m_p$) (così vediamo che velocità a cui posso accelerare il fluido dipende soltanto dall'energia per unità di massa sviluppata dalla reazione).

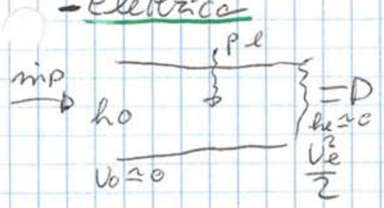
Si cerca combinazione dei propellenti per massimizzare la U (non rapporto stechiometrico).

Questo valore è finito una volta scelto propellente.

Quello che limita la chimica è che l'energia necessaria ad accelerare il propellente è contenuta nel propellente stesso, da un lato limita impulso specifico; però ha effetto positivo e cioè per far salire la spinta è sufficiente aumentare la portata di propellente perché:

$$\boxed{T = \dot m_p \sqrt{2E_{ch}}}$$ infatti se $\dot m_p \uparrow$ allora $T \uparrow$.

- Elettrica



• entriamo con un propellente (di solito ?) con $h_0 \simeq 0$, si fornisce della P elettrica al propellente e, più o meno direttamente, facciamo in modo che questa P_e si converta in E cinetica (fluisce con $V_e^2/2$). Ora l'eq diventa:

$$\boxed{\dot m_p \left(\cancel{h_e} + \frac{V_e^2}{2} - \cancel{h_0}\right) = \eta P_e}$$

si considera η perché nella conversione di E elettrica in E_K e allora qui si considera (nella chimica $\eta \simeq 1$) (e lo si trascura in 1° approssimazione).

e si ricava

$$\boxed{V_e = \sqrt{\frac{2\eta P_E}{\dot m_p}}}$$

osservando che $\boxed{T = \dot m_p \cdot V_e}$ si può riscrivere che $\frac{Tc}{2} = \eta P_E$ con ($c \simeq V_e$) $\boxed{V_e = \frac{2\eta P_E}{T}}$

Nella propulsione elettrica, la fonte di energia per l'acc del propellente è esterna al propellente (separata); ci occorre generatore (batterie, pannelli) di potenza che fornisce certa P_E che distribuisco ad una quantità di propellente che posso scegliere arbitrariamente (per ora) (a 1 g o a 1000 kg) e a seconda della quantità cambia Isp e cambia anche la spinta. Qua ho un parametro in più da scegliere.

Assegnata P_E posso ottenere qualunque valore di Isp richiesto da mp. (a fissata P_E, $\dot m_p \downarrow$ e $V_e \uparrow$; ~~oppure~~ assegnata $\dot m_p$ aumenti la P_E e Isp $\uparrow$ e aumenti anche T).

Il fatto è fonte di E ≠ da propellente e posso decidere quanta darne e a quanto propellente. C'è da tenere conto che il generatore ha un peso. Così se aumento Isp (per risparmiare propellente) devo aumentare la P però il peso del generatore sale. Dove sta la convenienza?

Oppure fissando la P_E devo ridurre la spinta però così la missione durerà di più (lo stesso contributo di velocità ~~...~~ lo ottengo in un tempo più lungo se la spinta è più corta).
Quindi scopriamo che la prop ~~chimica~~ elettrica consente in teoria di avere I_{sp} grandi a piacere ma ha controindicazioni legate alla dimensione del generatore.
Nel chimico tutto prop (velocità limitata ma cresce T a piacere) elettrico le due sorgenti di energia e la massa da acc sono slegate però avrò qualcosa che pesa per dare l'energia.
Nell'elettrica si evidenziano due aspetti: acc con propulsione elettrica limitata (spinte lunghe, valori piccoli rispetto alla chimica) e per ogni missione si ha un valore ottimale di impulso specifico. (così abbiamo diversi tipi di propulsori)
- Aspetti legati al fatto che il generatore di P ha certo peso.

1) Quando scriviamo la massa iniziale di un oggetto si ~~...~~ scompone come: carico utile, propellente e massa generatore, in formule:

$$\left[m_{0\,\text{init}} = m_{U\,\text{utile}} + m_{P\,\text{prop}} + m_{G\,\text{generat}} \right]$$

la massa del generatore si può scrivere come uguale ad un parametro α (livello tecnologico) per ~~proporzionale~~ la $P_{\text{elettrica}}$

$$m_G = \alpha \cdot P_E \quad \text{e sfruttando la potenza utile della spinta } \left(\frac{T\cdot c}{2}\right) \text{ si ha: } \left[m_G = \frac{\alpha}{\eta} \cdot \frac{T\cdot c}{2} \right]$$

$$\left(\frac{T\cdot c}{2} = \frac{1}{2}\dot{m}_p \cdot c^2\right)$$

(potenza minima per avere una spinta T con impulso specifico c)

Vediamo per prima cosa l'accelerazione che un propulsore può darci e cioè: $\frac{T}{m}$ che sarà sempre minore del rapporto tra la spinta e m_G

$$\frac{T}{m} < \frac{T}{m_G} \Rightarrow \text{da cui} \quad \left[\frac{T}{m} < \frac{T}{m_G} = \frac{2\eta}{c\cdot\alpha} \right]$$

mettendo come valori: $\eta = 0{,}5$; $c = 10^4\,m/s$ ($I_{sp} \simeq 1000\,s$) (meglio dei chimici); $\alpha \simeq 1\frac{kg}{kW} = 10^{-3}\frac{kg}{W}$ (siamo ottimisti)
si ottiene come valore

$$\frac{T}{m} < 0{,}1\ m/s^2 = \frac{g_0}{100} \quad (1 \text{ centesimo di } g_0).$$

Se dovessimo decollare non ci staccheremmo da terra (elettrica si può usare solo se siamo in orbita; qui gravità compensata da f centrifuga così la piccola accelerazione ci fa muovere).
I valori di accelerazione saranno intorno al mm^2/s.
Elettrica solo in orbita e i tempi di spinta sono lunghi,

2) Impulso specifico ottimale
Intendiamo come I_{sp} ottimale quello che rende massimo il carico utile m_U (fissata m_0)
(o quello che max m_U/m_0)

Per ogni missione ci sarà un valore di C che rende max questo mU.
Possiamo specificare il problema, cioè la missione; hanno un valore preciso di ΔV, però ragionare così (che c'è il log di mezzo) complica le cose dal punto di vista matematico, allora facciamo preventivamente un'analisi semplificata in cui invece di assegnare ΔV, si assegna It. Il nostro problema sarà: fissata m_0, α, η (caratt. razzo) e fissata It e Δt (durata missione) cerco C che rende max mU.
Possiamo vedere It come una opportuna massa media per il ΔV

$$\left[It = m_{media} \cdot \Delta V\right]$$

(anche se non sappiamo a priori la m media; la usiamo per semplicità).

(assegnare It e Δt implicitamente assegna la spinta perché $T = It/\Delta t$)
Ora rapportiamo la mU con m_0 e si ha:

$$\times\left[\frac{mU}{m_0} = \frac{m_0}{m_0} - \frac{mp}{m_0} - \frac{ms}{m_0}\right]$$

(stiamo trascurando i serbatoi, di solito pesa 1/10 del propellente che contiene; qua si consuma poco propellente, così li trascuro)

ora per def. abbiamo: T/m_0 acc iniziale

$$\left[mp = \frac{It}{C} = \frac{T \cdot \Delta t}{C}\right]^* \quad e \quad \left[ms = \frac{\alpha}{2\eta} \cdot T \cdot C\right]$$

* possiamo C↑ per mp↓ ma così generatore più grande. Ci sarà ottimo. C non può essere ∞ o 0 (mp∞ e ∞) ci deve essere minimo di massa che corrisponde a max mU.

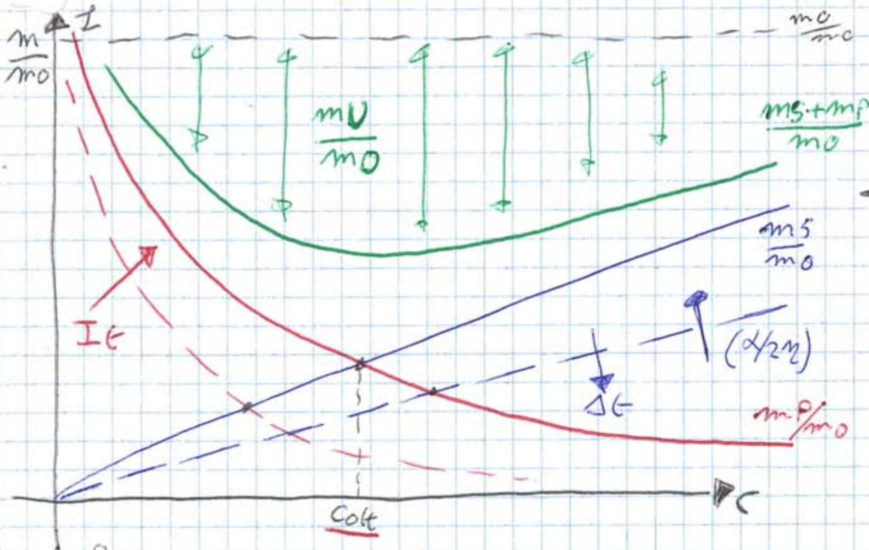
che sostituite alla × diventa

$$\left[\frac{mU}{m_0} = 1 - \frac{(T/m_0)\cdot\Delta t}{C} - \frac{\alpha}{\eta \cdot 2}(T/m_0)\cdot C\right]$$

Per cercare il massimo facciamo la derivata

$$\left[\frac{d(mU/m_0)}{dC} = 0\right] \Rightarrow \left(\frac{T}{m_0}\right)\left(\frac{\Delta t}{C^2} - \frac{\alpha}{2\eta}\right) = 0 \Rightarrow \left[C_{ott} = \sqrt{\frac{2\eta}{\alpha} \cdot \Delta t} = \sqrt{\frac{2\eta}{\alpha} \cdot \frac{It}{T}}\right]$$

Ora ci chiediamo come varia Cott al variare dei parametri (se cambia missione) / se cambia il tempo o la tecnologia ecc) usando un grafico:



- in grafico mettiamo curva m0 (cost), la curva del prop — e la massa del generatore —.
- Si dimostra che Cott è incrocio delle curve.
Infatti se $C = C_{ott}$ allora

$$\left[mp = ms = \sqrt{\frac{\alpha}{2\eta} \cdot T \cdot It}\right]$$

- Se sommo $ms + mp$ ho curva —;
Se poi faccio $m_0 -$ ↓ ho area ↕↕↕ che rappresenta carico utile.

Ora ci chiediamo:

1) Che succede se cambia il livello tecnologico? $\left(\frac{\alpha}{2\eta}\right)$ Che succede se generatore migliora? Se $\frac{\alpha}{2\eta}$ ↓ in pratica?
La $mp =$ cost (curva non cambia) ma la curva blu diminuirà la

pendenza e così il ~~...~~ Ctot cresce. Quindi se $\alpha/\eta \cdot 2 \downarrow$ il Ctot ↑ ms, mp ↓ e mu ↑.
Se riusciamo a fare il propulsore elettrico meglio (più leggero e efficiente) allora ci conviene adattare, per la stessa missione, Isp ↑ (è come dire: ms è qualcosa che pago in anticipo per poter poi risparmiare dopo; come abbonamenti) (meglio C ↑).

2) effetto del tempo (o durata della missione). Che succede se a parità di It, stessa tecnologia, voglio fare la stessa missione con un Δt ↑ (maggiore). Capita lo stesso effetto di $(\alpha/\eta \cdot 2)\downarrow$ e cioè la curva scende e si ha:

Ctot ↑, ms, mp ↓ e mu ↑

(effetto utile è: se abbiamo più tempo possiamo usare spinta più piccola così generatore si rimpicciolisce; nella realtà si ingrandisce un po' per ridurre il propellente perché sappiamo che la condizione ottimale è quella di avere consumo propellente = ms) (pagando lo stesso duriamo di più)

3) effetto. Che succede cambiando missione? Cambia It (ma la cambio a parità di tempo o di spinta? Teniamo la stessa spinta T, quindi implicitamente cambiamo anche Δt) (se cambio da marte a giove ci verrà più tempo).
Si vede subito che curva ms non cambia mentre cambia la curva mp. (Se It diminuisce la curva scende). Si vede che il Ctot ↓, ms e mp ↓ mentre mu ↑. (avrò bisogno di meno energia)
(Tanto più lontano e vicino voglio andare, tanto più tempo ci impiego, tanto più sono sfruttare il generatore che darà tanta energia e se voglio andare più lontano occorre C ↑, però così consumo di più, occorre gen più grande e meno carica utile ho).
Tanto più si va lontano, tanto più è ΔV tanto più grande C (bisogna mantenere ΔV e C dello stesso ordine oppure $\Delta V < C$ così da avere consumi bassi)

Questa è la nostra analisi. Ultima conseguenza è questa: la propulsione elettrica è caratterizzata dalla possibilità (teorica) se Δt ↑↑ di avere una massa del generatore che tende a zero quindi: se $\Delta t \to \infty$, Cott $\to \infty$, $T \to 0$ e $P_e \to 0$
(se devo andare a ∞ posso usare un generatore di Pe infinitesima che acc a $V \to \infty$ una quantità infinitesima di propellente) si può vedere:

$$\boxed{P = \frac{\dot{m}_p \cdot C^2}{2} = \frac{T^2}{2\dot{m}_p}}$$

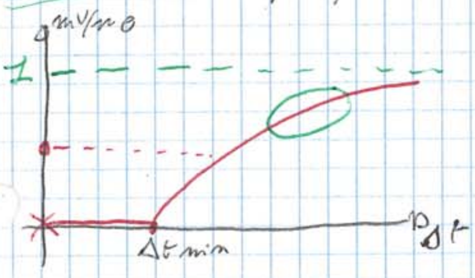
si possono far tendere a zero così consumo mp infinitesimo per tempo infinito tale che $mp = ms = 0$ e $mu \to mo$
Con Pe se si accettano tempi lunghi possiamo portare a destinazione quanta

massa vogliono, possiamo far crescere m_V fino al valore della m_0. (11)
(solo se $\Delta t \to \infty$).

Se poi noi cerchiamo di andare più velocemente e si riduce il Δt, la curva si alza fino ad intercettare l'altra a 0,5 e la somma delle due curve sarà 1 e anche con c_{ott} si porta carico utile che tende a zero. Quindi abbiamo queste conseguenze:

$\Delta t \to \infty \quad m_V \to m_0$

$\Delta t_{min} \to m_{V\,max} = 0$ (con Δt_{min} portiamo a destinazione niente) tempi più piccoli sono impossibili e quindi carico utile ha andamento crescente nel tempo; si ha:



il ΔT_{min} si ricava da:

$$m_p = m_s = \sqrt{\frac{\alpha}{2\eta} \cdot T \cdot I_t} = T\sqrt{\frac{\alpha}{2\eta}\Delta t}$$

e ponendola pari a $\frac{m_0}{2}$ si ricava:

$$\boxed{\Delta T_{min} = \frac{\eta}{2\alpha} \cdot \frac{1}{(T/m_0)^2}}$$

La prop. chimica ha tempi molto brevi e si piazza qui × ma ha influsso di carico utile che la può piazzare qui • e così vediamo che possiamo fare meglio della chimica oltre certo valore. Elettrica si piazza dove fa il giracchio ○.

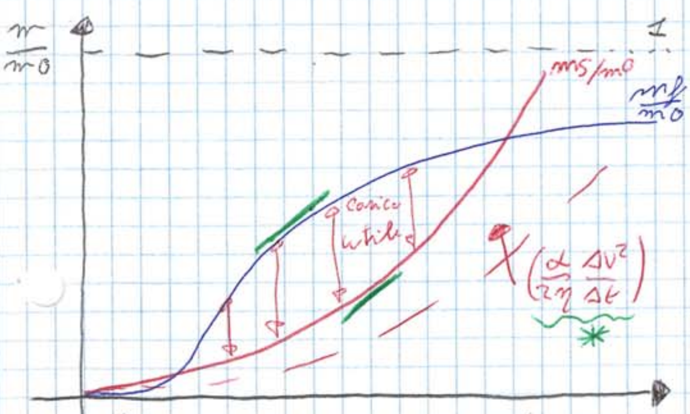
- Impostiamo i conti per un eventuale calcolo: assegno $\Delta V, m_0, \alpha, \eta, \Delta t$ cerchiamo $c \to \max m_V$, come prima ma impostiamo le cose così:

$$\boxed{\frac{m_V}{m_0} = \frac{m_f}{m_0} - \underbrace{\frac{m_s}{m_0}}_{\text{generatore}}} \quad \text{così} \quad \boxed{\frac{m_f}{m_0} = e^{-\frac{\Delta V}{c}}} \quad \text{mentre} \quad \overset{*}{\frac{m_s}{m_0}} = \frac{\alpha}{2\eta}\, m_p c^2 = \frac{\alpha}{2\eta}\frac{m_p}{\Delta t\, m_0} \cdot c^2$$

e $\boxed{\overset{\otimes}{m_p} = m_0 - m_f = m_0\left(1 - e^{-\frac{\Delta V}{c}}\right)}$ da cui $\boxed{\frac{m_s}{m_0} = \frac{\alpha}{2\eta}\frac{\left(1-e^{-\frac{\Delta V}{c}}\right)}{\Delta t}\left(\frac{c}{\Delta V}\right)^2 \cdot \Delta V^2}$ ⊛

(parto da * e sfruttando ⊗ arrivo a ↗)

Noi di ⊛ preferiamo usare come variabile $\frac{c}{\Delta V}$ per comodità, ora andiamo a tracciare le curve $m/m_0 = f(c/\Delta V)$ e si ha:



- m_s/m_0 è quasi una parabola (si incrocia due volte con m_f/m_0).
- il carico utile è la differenza delle due curve e il massimo si ha dove le due tg sono uguali (ottimo dove pendenza curve è la stessa //).
- Effetto dei contrasti di missione, durata, obiettivo e tecnologici si traducono nel cambiamento di *

Infatti $\left[\frac{m_S}{m_0} = \underbrace{\frac{\alpha}{2\eta}\frac{\Delta V^2}{\Delta t}}_{*} \cdot \left(1 - e^{-\Delta V/c}\right) \cdot \left(\frac{c}{\Delta V}\right)^2\right]$ (12)

contrarlo vuol dire alzare o abbassare quella curva.

Se tecnologia ↑, Δt ↑ o andare più vicino (ΔV↓) fanno spostare la curva in basso e quindi fa vedere che Isp ↑ e mU ↑.

($\Delta V = 1$ in $\Delta t = 1$ o $\Delta V = 2$ ma $\Delta t = 4$ è la stessa cosa).

Se il coeff * → 0 (perché $\Delta t \to \infty$) la curva diventa orizzontale e mai portiamo $mU \to \infty$ in $\Delta t \to \infty$ con Isp → ∞ e T → 0; se riduciamo Δt la curva si alza e si arriva a certo punto in cui la curva diventa tg all'altra e si avrà con ΔT min che corrisponde a $mU \to 0$.

– Abbiamo supposto che gen di potenza serva solo per la propulsione: ~~Parentesi meccanica spazi~~

abbiamo visto ms come penalità alla massa finale per ottenere carico utile, però molto spesso i satelliti hanno gen di potenza che servono per altri scopi (per far funzionare apparecchiature di bordo); si può pensare che se sposto satellite da orbita di parcheggio a orbita finale, il satellite non è operativo e potrei usare i pannelli solari che ho a bordo per scopo propulsivo, così la mia ms fa parte del carico utile mU (spesso generatore fa parte mU e allora analisi va tarata perché se gen è utile, conviene salire di Isp); inoltre nell'α dobbiamo considerare il peso del propulsore e mentre della chimica è trascurabile, qui il peso è rilevante e occorre tenerne conto)

Parentesi di Meccanica del volo spaziale:

Usiamo come rif grab. 2 corpi (M grande e m piccola con M >> m, r è la distanza tra i due corpi e m hanno V relativa a M pari a $\vec{V} = \dot{\vec{r}}$

e le eq del moto sono:

$$\left[\dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}\right]$$

La soluz. del moto di queste eq è una conica. Dipende dai valori iniziali.

Queste eq hanno 2 integrali primi (2 grandezze cost nel tempo) che energia e il momento angolare; l'energia specifica (unità di massa) è $\left[\mathcal{E} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r}\right]$ (E cinetica, E pot gravitaz)

La x è il lavoro che la forza gravitazionale farebbe nel caso portandolo dall'infinito al punto dove si trova cambiato di segno. (trasformo lavoro che forze gravit fanno su particella che accelera in E cinetica così se somma le due la Σ rimane costante) (campo gravitazionale è conservativo) (se ci avviciniamo acceleriamo mentre se ci allontaniamo deceleriamo)

Aspetto importante: quando $V = 0$ si ha r = max e scopriamo che il

valore di energia determina quali raggi possiamo assumere, in (73)
particolare si scopre che: se $\mathcal{E}<0$ allora $r<r_a$ (traiettoria chiusa; ellisse o cerchio) (non si raggiungerà mai $r\to\infty$ perché altrimenti $\mathcal{E}=0$ e non posso avere una $V^2<0$ quindi per $r\to\infty$ serve $\mathcal{E}=0$ o $\mathcal{E}>0$.)

Se $\mathcal{E}=0$ abbiamo parabola con $V\to0$, $\mathcal{E}>0$ iperbole con $V\to V_\infty\neq0$. (la $V_\infty\neq0$ si chiama eccesso iperbolico di V).

Con $\mathcal{E}<0$ distanza varia tra $r_p<r<r_a$ dove r_p periastro (più vicino al corpo) ed r_a apoastro (più lontano).

$$\boxed{\ddot{\bar{r}}=\dot{\bar{V}}=-\frac{\mu}{r^2}\frac{\bar{r}}{|r|}}$$

11/03/2014

Ancora richiami della meccanica del moto spaziale. Partendo da eq del moto del problema dei due corpi abbiamo visto che l'energia è costante:

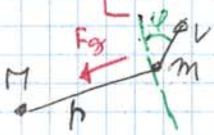
$$\boxed{\mathcal{E}=\frac{V^2}{2}-\frac{\mu}{r}}$$
grandezza

E cinetica più E potenziale non cambiano nel tempo e con i valori che assume abbiamo come orbite $\mathcal{E}\begin{cases}<0 & \text{ellittiche}\\=0 & \text{paraboliche}\\>0 & \text{iperboliche}\end{cases}$

Altra ~~...~~ che si conserva; ~~...~~

Deriva dal fatto che la forza agente su m ha direzione radiale e non fa momento rispetto al punto M di cui stiamo studiando il moto.

Quindi se non c'è momento applicato il momento angolare ~~si~~ conserva: è definito come $\boxed{\bar{h}=\bar{r}\times\bar{V}=\text{cost}}$ (uscente dal piano della lavagna).



(questo perché unica forza agente è la forza radiale che non fa momento). Possiamo anche scriverlo in modulo come

$$\boxed{h=r\cdot V\cdot\cos\varphi}_{=\text{cost}}$$

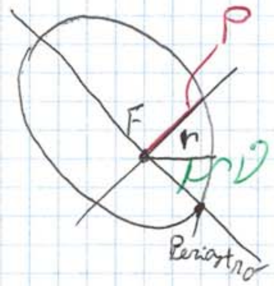
con φ angolo che forma la velocità rispetto all'orizzontale cioè la linea $\perp$ al raggio.

Questo ha due conseguenze: la prima è la conservazione del modulo e quindi abbiamo un legame tra il raggio e la componente $V\cdot\cos\varphi$ cioè la componente di velocità orizzontale, la seconda è che questa grandezza rimane costante come vettore e quindi in particolare è costante la sua direzione, ora però è immediato osservare che la direzione di h è $\perp$ al piano che contiene r e V quindi oltre che la direzione di h è costante anche che il piano che contiene r e V che si chiama piano orbitale è costante, cioè l'orbita giace su un piano e raggio e velocità sono sempre contenuti in questo piano che è detto il piano orbitale.

Abbiamo capito che, nel problema dei due corpi, il corpo piccolo si muove con $\mathcal{E}=\text{cost}$ e c'è legame tra raggio e modulo di V e momento angolare cost e quindi il piano in cui si muove rimane fisso e c'è un legame tra raggio e componente orizzontale di V.

Nella pratica si può risolvere eq e si ha che il risultato è una conica

Questo si può scrivere come r che è pari a una lunghezza P diviso (14)
$1+e\cdot\cos\vartheta$ cioè: $\times\left[r = \frac{P}{1+e\cos\vartheta} \right]$ per spiegarlo si fa riferimento a un ellisse (vale anche per parabola e iperbole):



- il fuoco F viene occupato dal corpo di massa M rispetto a cui ci muoviamo;
- angolo ϑ compreso tra periastro (dove r è minimo) e il punto generico in cui ci troviamo. Il termine P corrisponde alla lunghezza dove $\vartheta = 90°$ e quindi $r = P$ (si fa $\perp$ all'asse maggiore per il fuoco). Si chiama P semilatus rectum (metà dell'ampiezza misurata su angolo retto, $\perp$ all'asse maggiore). e è l'eccentricità e assume valori particolari a seconda del tipo di conica:

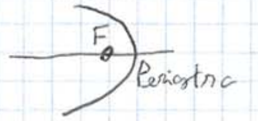
$0<e<1$ ellisse
$e=1$ parabola
$e>1$ iperbole

È facile vedere in $\times$ che a seconda dei casi si ha:

- $e<1$ per $\vartheta = 0°$ $\otimes\left[r = r_p = \frac{P}{1+e} \right]$ periastro e per $\vartheta = 180°$ $\otimes\left[r = r_a = \frac{P}{1-e} \right]$ apoastro

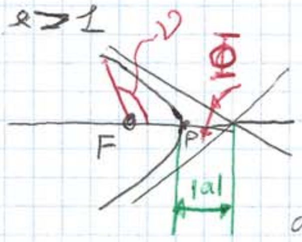
quindi il nostro corpo di massa m si muoverà continuativamente dal periastro all'apoastro e poi tornando indietro e percorre all'∞ l'ellisse.

- $e=1$



si nota che per $\vartheta \to 180°$ $r \to \infty$ mentre raggio del periastro vale $\left[r_p = \frac{P}{2} \right]$

- $e>1$



non c'è apoastro come nella parabola; la traiettoria tende asintoticamente a due rette che formano un angolo che chiamiamo Φ. Come si trova? basta vedere che quando andiamo a $r \to \infty$ il nostro angolo ϑ tende a $\pi - \Phi$ e allora è facile ricavare $\left[\cos\Phi = \frac{1}{e} \right]$ (tanto più è alta eccentricità tanto più il coseno tende a zero e tanto più iperbole tende ad aprirsi)(mentre se è bassa ><).

- Queste sono le caratteristiche geometriche delle orbite. Cosa ci serve ancora per le nostre analisi? Prima cosa che si può trovare è un legame tra il semiasse della nostra ellisse (se facciamo riferimento a questa) chiamato a nostro semiasse allora si ha $[2a = r_a + r_p]$ e se poi sostituiamo ~~...~~ questi valori $\otimes$ otteniamo che:

$[P = a\cdot(1-e)^2]$ c'è legame tra a e P; c'è particolare per ellisse si ha semiasse definito ma nella realtà si può estendere questa relazione anche alla parabola e all'iperbole dove però per la parabola si trova che $a \to \infty$ e per l'iperbole si ha che $a<0$.

L'ultima cosa è che si può vedere come ci sia un legame tra energia e il semiasse **a**; si può vedere che:

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{\mu}{2a}}$$

è una relazione fondamentale perché la useremo molte volte. Lega la forma dell'orbita all'energia cioè velocità e posizione (conoscendo $\mathcal{E}$ di un punto sappiamo che è la stessa in tutti i punti della nostra orbita e dato il raggio possiamo trovare la V o viceversa). Ci dice ammontare di energia per arrivare a certo punto con certa V.

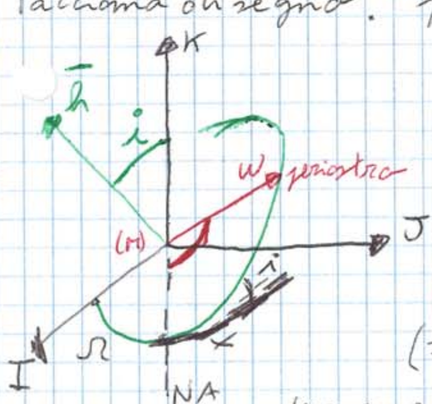
- Vediamo ora come descrivere un orbita. Se assegnamo al tempo t_0 il $\bar{r}_0$ e $\bar{V}_0$ possiamo integrare eq del moto e trovare la traiettoria nel tempo.

Avremo 6 parametri che definiscono la nostra orbita; il punto è che definire raggio e velocità non è comodo perché in ogni istante tutto cambia; modo più furbo di descrivere orbita è sfruttare le grandezze che rimangono costanti. Definiamo orbita con parametri orbitali e sono equivalenti di r e V (datigli uni o gli altri si ricavano gli altri; equivalenti tra loro). Ci sono diversi insiemi e noi usiamo i parametri orbitali classici che sono:

(a, e) forma e dimensioni orbita — e altri 3 che identificano la posizione dell'orbita nello spazio cioè l'orientamento dell'orbita, sono 3 angoli (i, Ω, ω)

e c'è sesto parametro che dice dove si trova il satellite sulla mia orbita ad un certo t, oppure a quale tempo il mio satellite si trova in certa posizione, si usa $\nu(t_0)$ o $t_p(\nu=0)$ tempo di passaggio al periastro.

Facciamo disegno: prendiamo riferimento fisso I, J, K con M al centro



orientamento definito dai 3 angoli; Ω definisce un angolo tra I e la direzione del nodo ascendente N.A; il piano della mia orbita è ottenuto dal piano IJ con una rotazione di un angolo i attorno a questa linea del nodo ascendente (si presegue questa linea x e piano orbita formerà un angolo i col piano IJK). La nostra orbita avrà poi un periastro che identifichiamo con un vettore di eccentricità che dal fuoco punta al periastro e l'angolo tra la linea dei nodi e questo vettore è ω.

- Ω longitudine del nodo ascendente (se piano IJ è piano equat. della terra allora è proprio una longitudine) dice dove si trova il punto in cui noi passiamo da sotto il piano di riferimento IJ a sopra l'equatore; Ω definisce angolo di quel punto che si chiama nodo ascendente.

- ω si chiama argomento del periastro e definisce dove si trova il periastro rispetto al nodo ascendente N.A.
- i è inclinazione che definisce angolo compreso tra il piano che contiene l'orbita e il piano di riferimento I, J.

Se mettiamo $\bar{h} \perp$ al piano dell'orbita, l'angolo tra $\bar{h}$ e $\bar{K}$ è i.

Nota V e r in certo punto si possono trovare i parametri orbitali:
[(ν va da periastro ad angolo dove mi trovo).
Così definisco forma, orientamento del piano e posizione del satellite sull'orbita.]

Noti i parametri orbitali si possono calcolare r e V. Non riconosciamo formule per passare da una all'altra. Ragioniamo con parametri orbitali dati e quelli bisogno. Nostro compito è cambiare a, i ecc e siamo a posto. Ci sono due problemi che si possono porre; il primo è:

- Problema di Keplero

Dati r_1, V_1 a t_1, trovare r_2 e V_2 a t_2. Si ragiona così: posso trovare i parametri orbitali al tempo t_1 e poi posso trovare tutto al t_2. Però c'è un però ed è che eq che lega andamento posizione al tempo non è un eq che ha soluzione analitica. L'idea è partire da $\left[h = r \cdot V \cdot \cos\varphi\right]$ che si può scrivere come $\left[h = r \cdot r \cdot \dot{\nu}\right]$ e con $h = \text{cost}$ c'è un legame tra cambiamento dell'angolo ν dell'anomalia e il raggio ma r è dato da $r = \dfrac{P}{1 + e\cos\nu}$ e si ha un eq differenziale del tipo:

$$\left[\frac{d\nu}{dt} = \frac{h}{r^2}\right]$$ però non è risolubile

Facendo riferimento alle ellittiche quello che si trova e che per andare da t_1 a t_2 si ha:

$$\left[t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cdot \left[E_2 - e \operatorname{sen} E_2 - (E_1 - e \cdot \operatorname{sen} E_1)\right]\right]$$

l'angolo E prende il nome di anomalia eccentrica, ν è l'anomalia
le due grandezze sono legate dal fatto che

$$\left[\cos E = \frac{e + \cos\nu}{1 + e\cos\nu}\right]$$

Dati i dati iniziali si può calcolare parte della eq e la parte incognita E_2 si ricava si trova ν e si trova tutto a t_2. Eq va risolta per tentativi; si prende E tentativo calcolo t_2 e vede se è giusto o se è sbagliato. Ci pongo questa idea se prendo ~~E tentativo~~ $t_2 - t_1 = 100$ min prendo E_2 tentativo di $150°$ faccio conto e trovo che ci arrivo a $150°$ in 98 min, allora nuovo problema è voglio sapere, dato che sono a E_2 a 98

dove sono a 100? Abbiamo un nuovo problema dal punto in cui siamo arrivati, calcolare al tempo che vorremmo essere.
Noi non facciamo questo, abbiamo già tutto; di solito si esprime $E - e \operatorname{sen} E$ come M anomalia media (notiamo che con $e = 0$ i 3 angoli sono uguali $\nu = E = M$, allora M è anomalia che avrei se mi muovessi sull'orbita circolare. Spesso si da M al posto dell'anomalia ν.
Se facciamo giro completo orbita e si impone $\nu_1 = \nu_2 = 2\pi$ ci troviamo periodo dell'orbita scritto come

$$\left[T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\right]$$

per fare un giro completo

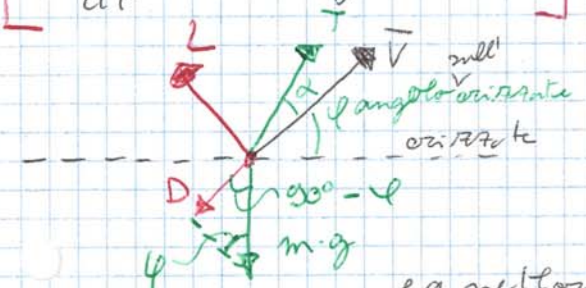
– Problema di Lambert o di Gauss

Consiste nel trovare l'orbita dati r_1, t_1 e r_2, t_2. Dobbiamo trovare V_1 e V_2 e cioè i parametri orbitali $(a, e, i, \Omega, \omega, \nu_0)$.
Si hanno più incognite. Più complicato ma ci sono algoritmi da usare.
Finiti i richiami.

Torniamo a eq del moto considerando ora altre forze che intervengono;

$$m\frac{dV}{dt} = T$$ così solo con propulsione; vediamo corpo soggetto a spinta, gravità e per completezza le forze aerodinamiche

$$\left[m\frac{dV}{dt} = \bar{T} + m\bar{g} + \bar{D} + \bar{L}\right]$$



Situazione schematizzata così:
- immaginiamo che corpo ha velocità V che forma con orizzonte angolo φ. Ci sarà $m\cdot\bar{g}$ ⊥ all'orizzonte; la D // a V e la L ⊥ alla V. Andiamo a scomporre questa eq vettoriale in due direzioni e scegliamo quelle // e ⊥ a V; quella ⊥ la analizziamo di meno; proiettiamo tutto sulla V (passiamo da vettoriale a scalare); la spinta T ha certa direzione identificata con angolo α rispetto a V. Divido per m e si ha:

$$\left[\frac{dV}{dt} = \frac{T}{m}\cos\alpha - \frac{D}{m} - g\cdot\operatorname{sen}\varphi\right]$$

isolando T/m si ha

$$\left[\frac{dV}{dt} = \frac{T}{m} - \frac{T}{m}(1-\cos\alpha) - \frac{D}{m} - g\operatorname{sen}\varphi\right]$$

integriamo tra t_0 e t_f e si ha:

$$\left[V_f - V_0 = \int_{t_0}^{t_f}\frac{T}{m}\,dt - \int_{t_0}^{t_f}\frac{T}{m}(1-\cos\alpha)\,dt - \int_{t_0}^{t_f} D/m\,dt - \int_{t_0}^{t_f} g\operatorname{sen}\varphi\,dt\right]$$

Il primo termine è il ΔV propulsivo (variazione di V che il mio motore darebbe se ci fosse solo T e se agisse // a V) (cioè variaz. di V in assenza delle perdite). A questo termine vanno tolte le perdite: (18)

$$\left[V_f - V_i = \Delta V - \text{Perdite}\right]$$

delle perdite si distinguono tre termini che hanno ciascuno un nome:

- perdite per disallineamento $\left[\int_{t_0}^{t_f} T/m\,(1-\cos\alpha)\,dt\right]$ legate alla presenza di $\alpha \neq 0$. (spinta non allineata con V).

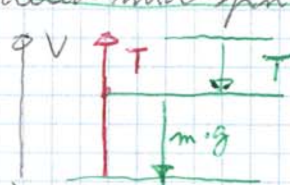
Queste perdite sono valute per cambiare piano dell'orbita (sono perdite se non voglio variare la V) così possono anche evitare altre perdite degli altri termini. (subito a halte e accelerare ma salta lì)

- perdite per resistenza $\left[\int_{t_0}^{t_f} D/m \cdot dt\right]$ dipende dove siamo; D dipende da V e ρaria quindi se voglio D↓ devo salire di quota velocemente per portarmi a ρ↓ ed evitare di avere V_f a quote basse (di solito si parte verticale per salire velocemente e avere ~~[illegible]~~ V piccole perché gravità mi sta frenando, e accelerare poi in quote più alte).

14/03/2014

- perdite per gravità $\left[\int_{t_0}^{t_f} g \operatorname{sen}\varphi\, dt\right]$ qual è idea di fondo di queste perdite? appare angolo φ che è il cosiddetto angolo sull'orizzonte, e le perdite sono zero quando $\varphi = 0$, cioè se io mi muovo in orizzontale le perdite per gravità non ci sono, il problema di queste perdite nasce quando ci si muove in verticale o comunque una componente di moto verticale. Perché? perché se la mia V è verticale ad esempio 90° e io spingo parallelamente alla V perché voglio aumentarne il modulo, ma frazione della mia spinta viene mangiata dalla gravità stessa; si ha:

$\varphi = 90$



$$T - m\cdot g = m\frac{dV}{dt}$$

abbiamo V e T parallela a V e ho anche la gravità che li tira verso il basso e soltanto la differenza $T - m\cdot g$ (peso) è pari al nostro $m\frac{dV}{dt}$. Spingo in verticale e una parte della spinta è inutile e serve unicamente a vincere la gravità ma non va ad accelerare il sistema. (ad esempio un razzo che ha $T = m\,g$ e in questa situazione razzo sta fermo; io sto consumando propellente ma razzo non accelera e il mio $V_f - V_0 = 0$ perché ΔV mangiato dalle perdite per gravità).

Es è salita in bicicletta e per vincere subito salita si fa una bella rincorsa e si fa salita velocemente, così sto sotto influenza di g il minor tempo possibile o se vado in pianura ho $\varphi = 0$ e siamo a posto.

Possiamo scrivere le cose in modo diverso per illustrare questo:

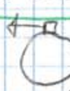
Si ha: $\boxed{P_g = \int_{t_0}^{t_f} g \cdot \operatorname{sen}\varphi \cdot \frac{V}{V}\, dt}$ moltiplico per $\frac{V}{V}$ così vediamo che $V \cdot \operatorname{sen}\varphi$ è proprio la componente verticale di velocità che indichiamo con $\boxed{V \operatorname{sen}\varphi = u}$, così possiamo far comparire questa componente di velocità u, o se vogliamo $\boxed{u = \frac{dr}{dt}}$ (variazione della distanza dal corpo) così otteniamo: 19

$$P_g = \int_{t_0}^{t_f} g/V \cdot \frac{dr}{dt}\, dt = \int_{r_0}^{r_f} \frac{g}{V}\, dr$$

e definendo opportunamente un g e un V medi scriviamo:

$$\boxed{P_g = \left(\frac{g}{V}\right)_{medio} \cdot \underbrace{\Delta r}_{(r_f - r_0)}}$$

Queste espressioni ci dicono cosa fare per ridurre perdite di gravità.

Primo caso è accelerare quando ci troviamo orizzontalmente: se ci muoviamo in orizzontale $\varphi = 0$ e $P_g = 0$, quindi devo cercare di spingere in questa situazione (ad esempio in orbita circolare siamo sempre orizzontale  la V è sempre $\perp$ al raggio, qui è comodo spingere così ma la fregatura è che appena cambiamo velocità l'orbita non sarà più circolare)

Secondo caso: se siamo legati a muoverci con certo φ, perché la missione impone di cambiare raggio (si parte da orbita r_0 e si arriva a r_f più grande) non possiamo muoverci in orizzontale e in questo caso se ragioniamo a φ fissato allora dobbiamo salire il più velocemente possibile {se g e φ fissate perché r tra cui mi muovo sono fissati} l'eq ci dice che se vogliamo perdite piccole devo salire velocemente così sto poco tempo sotto influenza della gravità (potremmo valutare impulso totale che la gravità ci dà che è pari a g proiettata su dove agisce per il tempo t, così se manovra è veloce staremo poco tempo sotto la gravità così tenderà a cambiare poco la mia velocità) (altra faccia della medaglia, se voglio andare veloce e metterci poco tempo devo andare veloce e le P_g saranno basse; se partiamo con razzo con $V_0 = 0$ e voglio arrivare a nuova quota con $V_f = 0$ per consumare la minor quantità di propellente possibile come devo fare? Noi sappiamo come calcolare la maggior quantità di propellente possibile che è partire con una spinta che è infinitesimamente maggiore del peso (trascuriamo variazione del peso; ragioniamo con $acc = cost$ e spinta varia in proporzione al peso) io inizierò ad

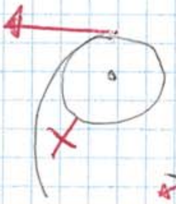
accelerare piano piano e salirà piano piano e ci metterà per arrivare (20)
al piano finale in tempo ∞ e avrà consumato una quantità di prop. infinita. La soluzione migliore invece è quella di dare una botta tale che la mia velocità diventa ~~...~~ ($T \uparrow\uparrow\uparrow$ per t piccolissimo) subito alta per salire e arrivare frenata dalla gravità alla quota a cui voglio arrivare, e questo rappresenta il tempo minimo che io posso impiegare per arrivarci là con $V_f=0$ e rappresenta la manovra più conveniente possibile, questo perché essenzialmente noi cambiamo subito la nostra velocità e mentre saliamo abbiamo una Vmedia più alta che non con la spinta infinitesimamente maggiore del peso e la nostra V è sempre infinitesima (così Pg più basse e abbiamo tempo minimo).

Se diamo botta ancora più grande richiamo le perdite però arriviamo a destinazione con V più alta di quella richiesta e quindi in realtà stiamo consumando di più perché poi dovrei correggere e consumo di meno. Le Pg si possono sempre minimizzare tenendo d'occhio la mia missione.

Altra faccia della medaglia perché questo discorso riguarda caso in cui noi vogliamo variare la velocità ma il fatto è che la velocità è collegata all'energia $\mathcal{E} = \frac{V^2}{2}$ e che succede se vario la V a $r=\text{cost}$? Cambio la mia energia; se sono ad un certo punto e dò un ΔV, la variaz. di $\mathcal{E}$ che ottengo è $[d\mathcal{E} = V \cdot dV]$ e vediamo che se voglio variare la mia $\mathcal{E}$ devo farlo, siccome io pago il mio ΔV, a parità di variazione di energia io ho la mia variazione di Velocità, e quindi la minima quantità di propellente, se ottengo questa variazione dove la mia velocità è elevata, viceversa se la velocità è bassa i cambiamenti di energia sono poco efficienti, perché a parità di $\Delta\mathcal{E}$ richiedono un ΔV maggiore che è esattamente quanto dicevamo per le perdite di gravità [(prima spingi quando sei a quote basse perché la mia velocità qui è alta, e poi sali; non è invece conveniente salire spingendo poco e poi spingere tanto dopo dove la mia V è bassa perché io sono salito di poco; questo in termini di ΔV)]

Quindi qua conviene sfruttare il disallineamento della spinta per fare in modo di tenermi a quote basse, dove la mia velocità è alta: posso disallineare la spinta per evitare di salire di quota (se accelero tendo a salire di quota e allora potrebbe

essere conveniente, specie se la spinta dura un tempo lungo (21)
iniziare a spingere verso il basso in modo da contrastare l'aumento di quota che io avrei se mi muovo con una componente non ~~[illegible]~~ troppo alta verso il basso, ma se io ~~[illegible]~~ mi muovo in orizzontale e spingessi in orizzontale tenderei ad avere una manovra che fa così:



si allontana dal sole, allora può essere conveniente spingere un po' verso il basso, in questo modo rispetto all'altro caso io ho il tempo più basso.

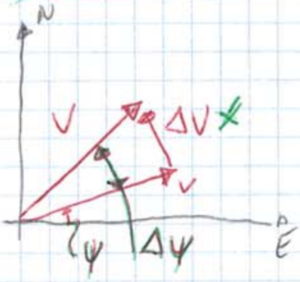
Stiamo parlando di una missione in cui continuiamo a spingere per un certo tratto, in questo modo io mi tengo più basso però in questo modo la mia velocità qua ✕ tende a diminuire molto più velocemente ~~[illegible]~~ ✱ perché tendo a salire di quota e la gravità mi frena, invece qua ✱ se io mi tengo basso la nostra velocità tende a rimanere più alta e allora in questo modo il mio cambiamento di energia diventa più efficiente, o se volete dopo quando poi smetto di spingere e anche con questo ho guadagnato velocità e poi a certo punto inizio a scendere di quota, se le due missioni arrivano a stessa quota, la seconda ha richiesto meno propellente perché durante la salita avrà una V media più alta perché prima io accelero e poi salgo rispetto al primo caso dove parto alto e poi la V tende a diminuire. Quindi tipicamente le nostre manovre (il cui scopo è cambiare il modulo di V e quindi l'energia e quindi l'energia è legata al semiasse della mia orbita) le idee sono: spingere se possibile parallelamente alla velocità, spingere se possibile quando mi sto muovendo in orizzontale, cercare di prima spingere il più possibile e poi salire di quota (per avere meno perdite di gravità) se devo salire di quota.

In alcuni casi conviene frenare, scendere di quota, e poi risalire, questo perché si pagano i ΔV e non i ΔE.

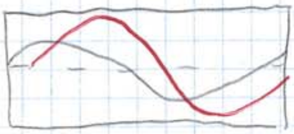
Molto spesso nostre missioni sono partire da orbita bassa e andare a orbita alta.

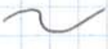
Questo è uno dei compiti che dobbiamo svolgere che è il cambiamento di energia che richiede dei cambiamenti di velocità e dove entrano in gioco le perdite.

-Altro tipo di manovra che può essere richiesto è quello di cambiare la direzione della velocità. Es tipico è passare da quota in un certo piano a un'orbita di un piano diverso. Chiediamoci cosa dobbiamo fare per variare la V di un certo angolo e senza variare il modulo. Si ha: abbiamo una velocità V e vogliamo ruotarla, mantenendone il modulo, di un certo angolo ψ.



La nostra operazione prende di variare il piano dell'orbita e tipicamente lo si fa spingendo nel piano Nord-Est o detto in altri termini se abbiamo la proiezione della nostra orbita rispetto alla terra:



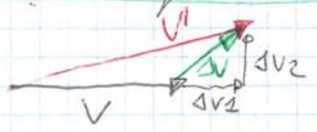
orbita ha traccia di questo tipo  e tipicamente noi vogliamo cambiare questa orbita intervenendo a cambiare la nostra velocità e renderla così ad esempio  (più inclinata); e quello che si fa è cambiare ψ heading angle.
La rotazione della V può essere anche in un altro piano (per noi la situazione è quella descritta sopra).

Il ΔV è la differenza tra la V iniziale e quella finale e sarà questo vettore × (non spingiamo parallelamente alla V); per trovare il ΔV basta vedere che quello è un triangolo isoscele perché ha 2 lati uguali e quindi:

$$\left[\Delta V = 2 \cdot V \operatorname{sen}\frac{\Delta\psi}{2}\right]$$

scopriamo un requisito opposto rispetto a prima; se nostro scopo è variare la direzione della velocità ci conviene farlo lontano dal corpo principale dove la nostra V è bassa (se modulo è grande, tanto più grande sarà la resistenza) (da dare a parità di angolo). Quindi se scopo è variare piano dell'orbita devo farlo qui ×  (distanza grande ha velocità piccola).

Ultimo aspetto da tenere in conto è che se io voglio cambiare la velocità sia in direzione che in modulo allora è facile vedere che conviene combinare le due manovre: se voglio passare da V_1 a V_2, il ΔV che devo dare è minimo se faccio contemporaneamente di modulo e direzione insieme (non ha senso ruotare prima la V e poi cambiarla, avrei due ΔV insieme). Per es:



la nostra velocità è V e vogliamo dare una componente ΔV_1 e poi una ΔV_2 così da portarci a V'.

Qua è facile vedere come
$$\left[\Delta V = \sqrt{\Delta V_1^2 + \Delta V_2^2} = \Delta V_1 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta V_2}{\Delta V_1}\right)^2}\right]$$

vediamo che se voglio variare di tanto una componente, ad esempio in $\Delta V_1 \gg$ e di poco ΔV_2, allora il ΔV che devo dare è sempre ΔV_1.
Se $\Delta V_1 = 10$ e $\Delta V_2 = 1$ $\Delta V \simeq 10{,}01$
se mischio manovre con $\Delta V_1 \parallel$ a V grande con un $\Delta V_2 \perp$ a V piccolo