



Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1456A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Damiani

MATERIA: Metodi Matematici x L'Ingegneria + Eserc.
Prof.Fagnani-Pellerey

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

4/03/14

Franco Pellerrey] Probabilità 3h

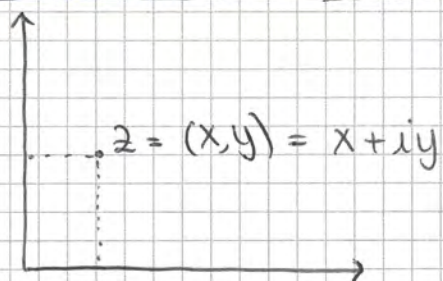
Francesca Ceragioli] Analisi 4,5h

Fabio Fagnani]

Analisi { Analisi complessa
 Distribuzioni
 Trasformate Fourier/Laplace

• ANAUSI COMPLESSA

1.1. Richiami sui numeri complessi



$1 = (1, 0)$ unità reale
 $i = (0, 1)$ unità immaginaria
 $x = \text{Re } z$
 $y = \text{Im } z$

Operazioni di somma e prodotto

- Somma

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

- Prodotto

$$i^2 = -1$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 =$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i (x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$\text{Re } z_1 z_2 \qquad \qquad \text{Im } z_1 z_2$

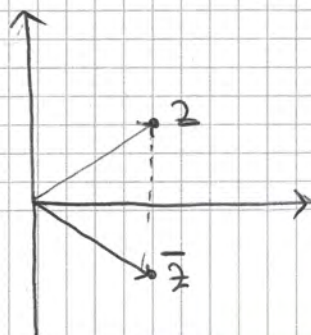
Con le operazioni di somma e prodotto otteniamo un campo che viene indicato con il simbolo \mathbb{C} .

- coniugato

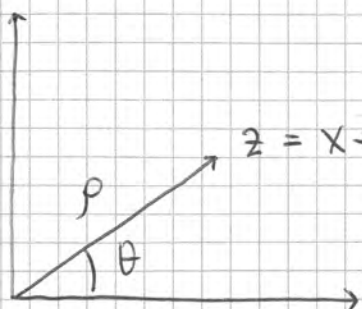
$$z \in \mathbb{C} \quad z = x + iy$$

$$\bar{z} = x - iy$$

↓
 riflessione rispetto all'asse x



• Rappresentazione trigonometrica ed esponenziale



$$z = x + iy \iff \begin{cases} \rho = |z| \\ \theta = \arg(z) \text{ argomento di } z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

$$z = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$$

$$0 \leq \arg(z) < 2\pi$$

↳ multipli di 2π

$$\Rightarrow z = \rho e^{i\theta}$$

$$z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1} \quad z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$$

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \Rightarrow \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Con la notazione esponenziale, il prodotto di due numeri vede moduli e argomenti moltiplicarsi e sommarsi, rispettivamente, senza mescolarsi. (somma \rightarrow notazione cartesiana, prodotto \rightarrow notazione esponenziale)

Esercizio calcolare le radici di $z^3 = 1 + i$

\rightarrow teorema fondamentale dell'algebra: ogni polinomio di grado n ha esattamente n radici contate con le rispettive molteplicità

$$z^3 = 1 + i$$

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

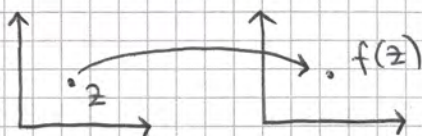
$$z = \rho e^{i\theta} \rightarrow z^3 = \rho^3 e^{3i\theta}$$

$$\rho^3 e^{3i\theta} = \sqrt{2} e^{i\pi/4} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \rho^3 = \sqrt{2} \\ 3\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

4.2 Funzioni elementari su \mathbb{C}

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$



Due dimensioni in partenza, due dimensioni in arrivo.
 Il grafico della funzione giace in uno spazio a 4 dimensioni.

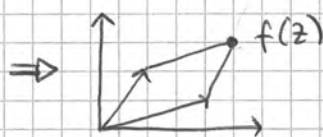
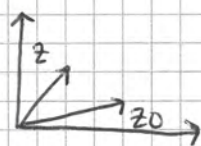
→ Funzioni non visualizzabili a livello grafico

Esempio

$\gamma, z_0 \in \mathbb{C}$ parametri fissati

$$f(z) = \gamma z + z_0 \quad \text{funzioni affini}$$

- caso $\gamma = 1$ $f(z) = z + z_0$ la trasformazione prende z e somma z_0



→ Piano complesso traslato di z_0

Traslazione \Rightarrow trasformazioni rigide (isometria)

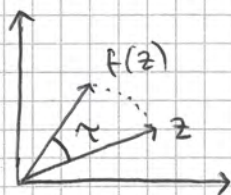
- caso $z_0 = 0$ $f(z) = \gamma z$ $\gamma = r e^{i\tau}$ $z = \rho e^{i\theta}$

$$f(z) = \rho \cdot r e^{i(\theta + \tau)}$$

se $|\gamma| = 1$ \rightarrow non cambia il modulo

\rightarrow l'argomento cambia di un fattore di rotazione τ

\Rightarrow rotazioni del vettore z intorno all'origine (isometria)



Altri esempi

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

- funzioni polinomiali ($a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$)

$$f(z) = z^2$$

$$z = \rho e^{i\theta}$$

$$z^2 = \rho^2 e^{2i\theta}$$

Fenomeno di arrotolamento e di espansione

- funzioni razionali

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}$$

$$f: \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m = 0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z}{b_0 + b_1 z} \quad \text{funzioni conformi}$$

- Non conservano le distanze, conservano gli angoli
- Una retta viene trasformata in un'altra retta o in una circ. e una circ. viene trasformata in un'altra circ. o in una retta (l'insieme rette+circ. viene trasformato in se stesso)

Riflessione rispetto a γ

$$f(z) = \gamma z \quad \gamma = e^{i(\pi - \theta)}$$

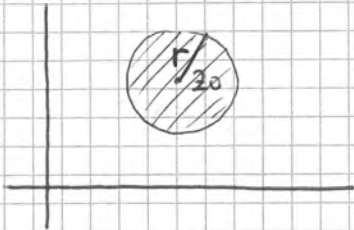
Rotazione di angolo α centrata in $w_0 = x_0 + iy_0$

$$f(z) = \gamma(z + w_0) = \gamma z + \gamma w_0, \quad \gamma = e^{i\alpha}$$

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$$

cerchio che contiene i punti di \mathbb{C} che distano meno di r da z_0

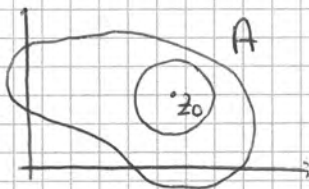
↓
cerchio aperto centrato in z_0 e raggio $r \rightarrow$ intorno, palla, disco



Definizione

z_0 si dice interno ad A se
 $\exists r > 0$ tale che $B_r(z_0) \subseteq A$.

Quindi non solo il punto, ma anche un suo intorno sono contenuti in A .

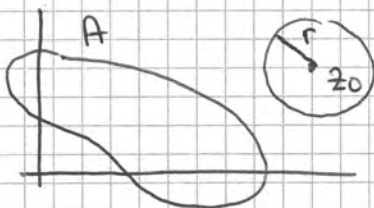


Definizione

z_0 si dice esterno ad A se è interno al complementare di A .

$$A^c = \{z \in \mathbb{C} \mid z \notin A\}$$

In altri termini deve esistere $r > 0$ tale che $B_r(z_0) \subseteq A^c$, o equivalentemente $B_r(z_0) \cap A = \emptyset$ (l'intorno di z_0 non interseca A)



Definizione

z_0 si dice punto di frontiera per A se non è né interno né esterno ad A .

Si osservi che z_0 è di frontiera per A se e solo se presa una

qualsunque palla $B_r(z_0)$: $B_r(z_0) \cap A \neq \emptyset$
 $B_r(z_0) \cap A^c \neq \emptyset$

$$\partial A = \partial A^c$$

Verifichiamo che la palla $B_r(z) \subseteq A$ (Ricorda! Palle aperte, non contengono il bordo)

In effetti se $w \in B_r(z)$ si può scrivere

$$w = \rho e^{i\theta} + z \quad \rho < r \quad \text{parametrizzazione di } B_r(z)$$

$$\operatorname{Im} w = \operatorname{Im}(\rho e^{i\theta}) + \operatorname{Im}(z) = \rho \sin\theta + y$$

$$\rho \sin\theta + y \geq -\rho + y > 0 \Rightarrow \operatorname{Im} w > 0$$

$$\Rightarrow w \in A$$

Quindi $B_r(z) \subseteq A$

$$\text{quindi } \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\} \subseteq \overset{\circ}{A}$$

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\} \subseteq \overset{\circ}{A^c} \quad \text{stesso ragionamento applicato all'altro semipiano}$$

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0\} \subseteq \partial A \quad \rightarrow \text{da fare per esercizio}$$

Quindi

$$\overset{\circ}{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

$$\partial A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0\}$$

$$\overset{\circ}{A^c} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$$

Osservazione $A = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$ A è dato dall'unione dei punti interni e della frontiera

Se avessimo considerato

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

avremmo avuto

$$\overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{A}$$

$$\partial B = \partial A$$

$$\overset{\circ}{B^c} = \overset{\circ}{A^c}$$

ma $B = \overset{\circ}{B}$ non contiene la frontiera

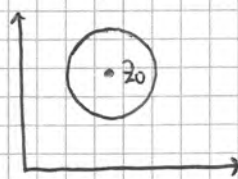
IV) $A = B_r(z_0)$

$$\overset{\circ}{A} = B_r(z_0)$$

$$\partial A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$$

↳ crf di frontiera

$$\overset{\circ}{A^c} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > r\}$$



$$\partial A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0\}$$

$$\partial A \neq A, \quad A \cap \partial A \neq \emptyset$$

$A, B \subseteq \mathbb{C}$ aperti $\Rightarrow A \cup B, A \cap B$ aperti

$A, B \subseteq \mathbb{C}$ chiusi $\Rightarrow A \cup B, A \cap B$ chiusi

Notazione

$$A \subseteq \mathbb{C} \quad \bar{A} = A \cup \partial A \quad \text{chiusura di } A$$

esercizio $\overset{\circ}{A}$ è un aperto (è il più grande aperto contenuto in A)

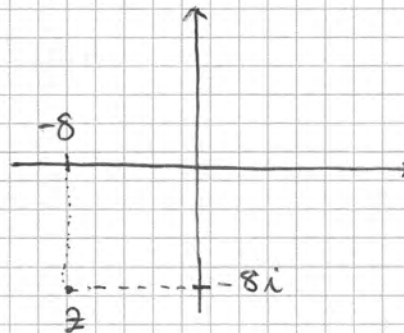
\bar{A} è un chiuso (è il più piccolo chiuso contenente A)

ESERCITAZIONE

1) Sia $z = -8 - 8i$

$$\operatorname{Re} z = -8$$

$$\operatorname{Im} z = -8$$



Passare dalla

notazione algebrica a quella trigonometrica

$$|z| = \rho = \sqrt{(-8)^2 + (-8)^2} = 8\sqrt{2}$$

$$z = 8\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) \quad \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z = 8\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \quad \theta = \arg(z)$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{notazione esponenziale}$$

$$z = 8\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

2) $z = 5e^{i\frac{5\pi}{6}}$ scriverlo in forma algebrica

$$z = 5 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + i \frac{5}{2}$$

6) Dato l'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} \mid -1 \leq \operatorname{Re} z \leq 1, \operatorname{Im} z = 0\}$

Rappresentare gli insiemi

$iA, -iA, A+i, A-i$ Da fare

7) Sia $z = \frac{1-i}{i}$ calcolare z^9 → conviene utilizzare la formula esponenziale

$$(z)^9 = (\rho e^{i\theta})^9 = \rho^9 e^{9i\theta}$$

$$z = \frac{1-i}{i} \cdot \frac{i}{i} = -1-i = \sqrt{2} e^{i(-\frac{3}{4}\pi)}$$

$$z^9 = 2^{9/2} e^{i(-9 \cdot \frac{3}{4}\pi)} = 16\sqrt{2} e^{i(-\frac{27}{4}\pi)} = 16\sqrt{2} e^{i(-\frac{3}{4}\pi)}$$

$$-\frac{27}{4}\pi = 6\pi - \frac{3}{4}\pi$$

$a, b \in \mathbb{R}$

$$e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b) =$$

$$= e^a (\cos(b+2k\pi)) + i \sin(b+2k\pi) =$$

$$= e^a e^{ib+2k\pi} = e^{a+ib+2k\pi}$$

→ l'esponenziale complesso è periodico di periodo $2k\pi \cdot i$

7) 26/06/12

Risolvere in \mathbb{C} $e^{2z-\bar{z}} = 1$

$$e^{2z-\bar{z}} = e^0$$

$$2z-\bar{z} = 0 + 2k\pi \cdot i \quad \text{ricordati del periodo!}$$

$$z = x+iy$$

$$\bar{z} = x-iy$$

$$2(x+iy) - x+iy = 0 + i2k\pi$$

$$2x+2iy - x+iy = 2k\pi \cdot i$$

$$x+3iy = 2k\pi i$$

Due numeri complessi sono uguali se hanno rispettivamente uguali parte reale e parte immaginaria

$$\begin{cases} x=0 \\ 3y=2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{2}{3}\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

21/03/14

Connessione

Definizione: $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto si dice connesso se
 $\forall z_1 \in A$ e $\forall z_2 \in A \exists$ spezzato che collega z_1 e z_2
 interamente contenuta in A .

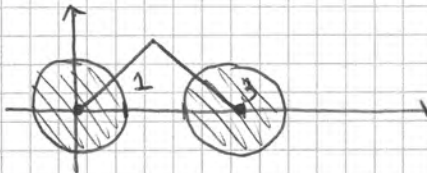
Esempio

\mathbb{C} è connesso

$B_r(z_0)$ sono connesse

Insieme connesso \rightarrow contiene il segmento che unisce due
 elementi, (quindi ogni insieme connesso è connesso)

Esempio | $A = B_1(0) \cup B_1(3)$



Definizione: un aperto connesso è detto dominio

Una regione è un sottoinsieme di \mathbb{C} ottenuto partendolo da
 un dominio e aggiungendoci una parte della frontiera

Tutti i domini sono regioni.

Esempio | $A = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ è aperto, è connesso ma non
 connesso

quindi è un dominio (quindi anche una regione)

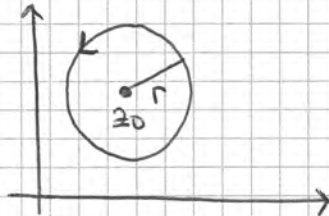
Esempio | $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z \geq 0\}$ \rightarrow è una regione (ma non un
 dominio)

Posso avere curve diverse che hanno lo stesso supporto.

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \quad \gamma(t) = z_1 + t^2(z_2 - z_1) \rightarrow \text{stesso supporto}$$

Curva inversa \rightarrow va da z_2 a z_1

Esempio



$$z_0 = x_0 + iy_0$$

$$\gamma(t): [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\gamma(t) = z_0 + re^{it} = x(t) + iy(t)$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + r \cos t \\ y(t) = y_0 + r \sin t \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{PARAMETRIZZAZIONE DI UNA CRF} \\ \text{percorsa in senso ANTICLOCKWISE} \end{array}$$

$$\gamma(t) = z_0 + re^{-it} \rightarrow \text{percorsa in senso } \text{clockwise}$$

$$\gamma(t) = z_0 + re^{2it} \quad t \in [0, 2\pi] \quad : \text{stesso supporto, ma due curve diverse, qui percorro due volte la CRF}$$

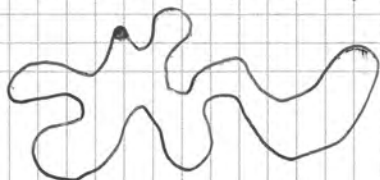
Definizione $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ curva si dice chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$

si dice semplice se è iniettiva, cioè se $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$
 Una curva chiusa non può mai essere semplice.

Una curva γ si dice C^1 a tratti se le sue componenti $x(t)$ e $y(t)$ sono continue e C^1 tranne che in un numero al più finito di punti dove possono esserci punti angolosi.

Definizione γ curva ~~si dice~~ in \mathbb{C} , C^1 a tratti, si dice CURVA DI JORDAN se è chiusa e

$$\forall t_1 \neq t_2 \text{ t.c. } \{t_1, t_2\} \neq \{a, b\} \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$$



2.1 Funzioni di variabile complessa: limiti e continuità

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ regione di \mathbb{C}

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$$

$z_0 \in \bar{\Omega}$ (chiusura di Ω)

si dice che $f(z)$ tende ad $l \in \mathbb{C}$ quando z tende a z_0 se

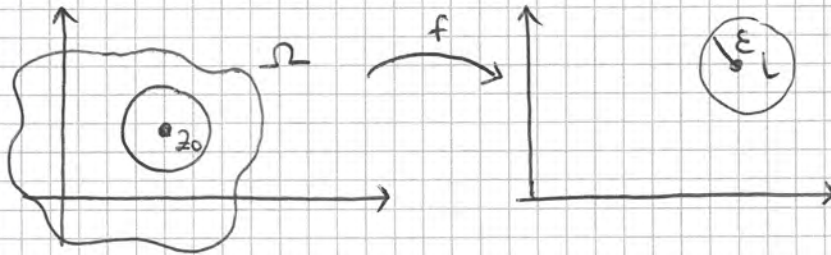
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$$

$$z \in \Omega \setminus \{z_0\}$$

Osservazione

$|z - z_0| < \delta \Leftrightarrow z \in B_\delta(z_0)$ z è contenuto nella palla di centro z_0 e raggio δ

$|f(z) - l| < \varepsilon \Leftrightarrow f(z) \in B_\varepsilon(l)$ $f(z)$ è contenuta nella palla di centro l e raggio ε



Notazione $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$

Osservazione $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) - l = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - l| = 0 \rightarrow$ poiché si tratta di modulo e come se la funzione andasse da Ω in \mathbb{R} , quindi è resa più semplice

consideriamo Re e Im

$$z = x + iy \quad z_0 = x_0 + iy_0 \quad l = \text{Re}l + i \text{Im}l$$

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

$$|f(z) - l| = \sqrt{(u(x, y) - \text{Re}l)^2 + (v(x, y) - \text{Im}l)^2}$$

equivalentemente $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \sqrt{(u(x, y) - \text{Re}l)^2 + (v(x, y) - \text{Im}l)^2}$

posso esprimere $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - l|$ come

\Rightarrow diventa un limite classico in due variabili

• Differenziabilità

$$D \subseteq \mathbb{R}^2$$

Considero una funzione $u(x,y)$ definita su D e considero $(x_0, y_0) \in D$.

Definizione $u(x,y)$ si dice **DIFFERENZIABILE** in (x_0, y_0) se $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$u(x,y) = \underbrace{u(x_0, y_0) + \alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0)}_{\text{piano tangente in } (x_0, y_0)} + w(x,y)$$

dove $w(x,y) = o(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})$ per $(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)$

Inoltre, se questo vale, si ha che

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \beta = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$\alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0) = \langle (\alpha, \beta), (x-x_0) + (y-y_0) \rangle \quad \text{prodotto scalare}$$

↓
GRADIENTE

Vorrei poter mostrare che la derivabilità in campo complesso implica la differenziabilità in campo reale.

• Proposizione

Se u è C^1 su Ω (derivate parziali esistono continue), allora u è differenziabile in ogni punto di Ω .

Tornando a f , osserviamo la seguente catena di equivalenze:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \iff \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) = 0$$

$$\iff \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = 0$$

dove $f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) = w(z)$ per la definizione di o

dove $w(z) = o(z - z_0)$ per $z \rightarrow z_0$

Quindi u e v sono differenziabili in (x_0, y_0) e vale

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \alpha \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\beta$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \beta \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = \alpha$$

Quindi la derivabilità implica la differenziabilità

Inoltre

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = \operatorname{Re} f'(z_0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\operatorname{Im} f'(z_0)$$

Queste relazioni accoppiano u e v e creano condizioni appropriate per avere la derivabilità!

Sono dette CONDIZIONI DI CAUCHY-RIEMANN (CR)

Se imponiamo le condizioni di Cauchy-Riemann oltre

a quelle di differenziabilità, impliciamo la derivabilità. Non basta che u e v siano differenziabili per implicare che f sia derivabile, u e v devono rispettare anche le condizioni di Cauchy-Riemann.

Vale il seguente risultato

• Teorema

Ω dominio

$z_0 \in \Omega$

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

$z = x + iy, z_0 = x_0 + iy_0, f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$

sono fatti equivalenti

(1) f è derivabile in $(x_0, y_0) = z_0$

(2) u e v sono differenziabili in (x_0, y_0) e valgono le condizioni di Cauchy-Riemann

Gli autovalori devono essere concordati
(cosa che non accade nel caso del complesso coniugato)

ESERCITAZIONE

Esercizio 1) scomporre in \mathbb{C} il polinomio

$$p(z) = z^3 + 8$$

• Teorema fondamentale dell'algebra

$p(z)$ polinomio di grado n in \mathbb{C} ha n radici (se contate con la rispettiva molteplicità)

z_0 è una radice di $p(z)$ se $p(z_0) = 0$.

Se z_0 è radice di $p(z)$ allora $(z - z_0)$ divide $p(z)$, cioè $p(z)$ si può scrivere come

$$p(z) = (z - z_0) q(z) \quad \text{con } q \text{ polinomio di grado } n-1$$

Quindi se il polinomio ha n radici distinte si può scrivere come prodotto di n fattori di primo grado

$$p(z) = a (z - z_1) (z - z_2) \dots (z - z_n)$$

in \mathbb{R} $p(x) = x^2 + 1$ non si scompone

$$\text{in } \mathbb{C} \quad p(z) = (z - i) (z + i)$$

z_0 ha molteplicità μ_0 come radice di $p(z)$ se $(z - z_0)^{\mu_0}$ divide $p(z)$ e $(z - z_0)^{\mu_0 + 1}$ non divide $p(z)$

Se z_1, \dots, z_k sono le radici distinte di $p(z)$

$$\Rightarrow p(z) = a (z - z_1)^{\mu_1} \cdot (z - z_2)^{\mu_2} \dots (z - z_k)^{\mu_k}$$

dove $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k = n$ (grado del polinomio)

$$p(z) = z^3 + 8$$

$$z_1 = -2 \quad p(z_1) = 0$$

$z - (-2)$ divide $p(z)$

$$\rightarrow p(z) = (z + 2) q(z)$$

$$P(1-i) = -2(-2-2i) + 2(-4) + 4(1-i) + \alpha = 0$$

$$+4 + 4i - 8 + 4 - 4i + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$P(z) = 2z^4 - 2z^3 + 4z$$

$$P(z) = 2z \underbrace{(z^3 - z^2 + 2)}_{Q(z)}$$

$Q(z)$ ha $(1-i)$ come radice

$$Q(z) = [z - (1-i)] R_2(z)$$

$Q(z)$ è a coeff. reali $\rightarrow \overline{(1-i)}$ è radice = $1+i$ e quindi anche di $R_2(z)$

$$Q(z) = [z - (1-i)] [z - (1+i)] S(z)$$

$$Q(z) = [(z-1)^2 - (i)^2] S(z)$$

$$Q(z) = (z^2 - 2z + 2) S(z)$$

$$(z^3 - z^2 + 2) = (z^2 - 2z + 2) S(z)$$

$$\begin{array}{r|l} z^3 - z^2 + 2 & z^2 - 2z + 2 \\ z^3 - 2z^2 + 2z & \hline \hline // +z^2 - 2z + 2 & z + 1 \end{array}$$

$$Q(z) = (z - (1-i)) (z - (1+i)) (z+1)$$

$$P(z) = 2z [z - (1-i)] [z - (1+i)] (z+1)$$

Es. 3) Determinare dominio e zen' di

$$f(z) = \frac{\sin 2\pi z}{8 - z^3}$$

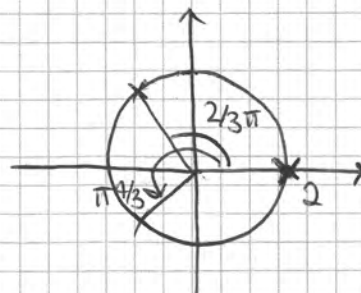
$$\text{dom} f = \{z \in \mathbb{C} : 8 - z^3 \neq 0\}$$

gli zen' di $\sin 2\pi z$ sono

$$\sin 2\pi z = 0 \quad 2\pi z = 0 + k\pi$$

$$z = \frac{k}{2}$$

zen' della funzione
 $k \in \mathbb{Z} \setminus \{4\}$



es. 5) $i\bar{z} = |z|$

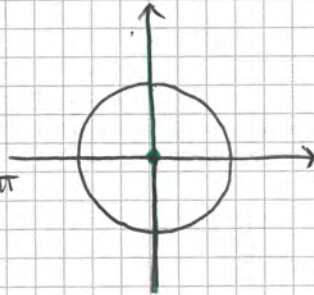
$z = \rho e^{i\theta}$ $|z| = \rho$ $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$ $i = e^{i\pi/2}$

$e^{i\pi/2} \rho e^{-i\theta} = \rho$

$\rho e^{i(\pi/2 - \theta)} = \rho$ $e^{i(\pi/2 - \theta)} = e^0 \Rightarrow \theta = \pi/2 \rightarrow \text{asse } y$

$\rho = 0 \rightarrow \text{origine}$

$\begin{cases} \rho = \rho \\ \pi/2 - \theta = 0 + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \forall \rho \\ \theta = \pi/2 + 2k\pi \end{cases}$



es. 6) $e^{|z-1|} = e^z$

$|z-1| = z$

$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = x + iy$

$\begin{cases} x = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ iy = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 > 0 \\ x > 0 \\ x^2 = (x-1)^2 + y^2 \end{cases}$

ESERCITAZIONE 1

18/03/20

f si dice **conomorfa** in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se f è derivabile in ogni punto di Ω .

1) Verificare i punti in cui $|z|^2 = f(z)$ è derivabile

$f(z) = x^2 + y^2$ $u(x,y) = x^2 + y^2$

$v(x,y) = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$ $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$$\text{C.R. } \begin{cases} -4x = 0 \\ -4y + 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1/2 \end{cases}$$

f è derivabile solo in $z = \frac{1}{2}i$

$$(4) f(z) = 2 \operatorname{Re} z + z^2 + 2 \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$\rightarrow f(z) = z + \bar{z} + z^2 + 2$$

La funzione non è derivabile ($\Delta \bar{z}$ non è derivabile in nessun punto di \mathbb{C})

$$\bar{z} = f(z) - z - z^2 - 2$$

↓

non derivabile quindi nemmeno il secondo membro lo sarebbe

Se per assurdo $f(z)$ fosse derivabile in un punto z_0 , allora anche $f(z) - z - z^2 - 2$ sarebbe derivabile in z_0 , quindi anche \bar{z} .

(5) Sia f olomorfa in $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso.

$$\operatorname{Im} f = c \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che $f(z) = \text{costante}$.

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + ic$$

Imponiamo che f sia derivabile in $\Omega \Leftrightarrow$ condizioni di Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \forall (x+iy) \in \Omega$$

$\nabla u = 0$ in $\Omega \Rightarrow u = \text{costante} = k \in \mathbb{R}$ in Ω
nell'ipotesi in cui Ω sia connesso.

(Se Ω non è connesso non possiamo dire che $\nabla u = 0 \Rightarrow$ costante)
 $\Rightarrow u = \text{costante su } \Omega$)

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i$$

ESERCIZI

(1) Determinare i punti in cui $f(z) = 2 - z^2 \bar{z}$ è derivabile

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= 2 - (x+iy)^2 (x-iy) = \\ &= 2 - (x^2 + 2ixy - y^2)(x-iy) = \\ &= 2 - (x^3 - ix^2y + 2ixy^2 + 2xy^2 - xy^2 - iy^3) = \\ &= 2 - (x^3 + ix^2y + xy^2 - iy^3) = \\ &= (2 - x^3 - xy^2) + i(-x^2y - y^3) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -3x^2 - y^2 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2xy \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -x^2 - 3y^2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x^2 - y^2 = -x^2 - 3y^2 \\ -2xy = 2xy \end{cases}$$

$\Rightarrow f(z)$ è derivabile solamente in $z = 0$

(2) Sia $f(z)$ olomorfa in \mathbb{C}

Dimostrare che se anche $\overline{f(z)}$ è olomorfa in \mathbb{C}

allora $f(z) = \text{costante}$.

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$$

$f(z)$ olomorfa

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\overline{f(z)} \text{ olomorfa} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\text{Ma } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Perché (2) \Rightarrow u e v sono differenziabili in ogni punto z_0 e valgono le condizioni di Cauchy Riemann
 Applicando il teorema 1 ($2 \rightarrow 1$) $\Rightarrow f$ è derivabile in ~~ogni~~ z_0
 $\forall z_0 \in D$

(1) \Rightarrow (2)

folowwafa \Rightarrow u e v sono differenziabili in ogni punto $z_0 \in D$ e in ogni z_0 ~~si~~ valgono le condizioni di C.R.

La differenziabilità non è equivalente a essere C^1 .

(la funzione potrebbe essere derivabile ma non continua)

Dimostrare che u e v sono di fatto C^1 è molto difficile

La novità sta nel fatto che in campo complesso la derivabilità di f ~~implica~~ sul dominio implica che u e v siano di classe C^1 e non semplicemente differenziabili in un punto.

Osservazione: Se avete $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ e volete studiarne la derivabilità, avete a disposizione due strade

1) Riconoscete che f è derivabile appartenendo a famiglie note (polinomi, razionali, esponenziali, trigonometriche e loro composizioni)

2) Scrivere $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$, $z = x + iy$, studiare la regolarità di u e v (C^1) e verificare CR.

Esempio

$$f(z) = |z|^2 + 2\operatorname{Re}z$$

$$f(z) = \bar{z} - 2|z|$$

Studiare i punti dove sono derivabili

del tipo $u(x,y) = a(x^2 - y^2) + bxy$

(4) Per studiare i polinomi armonici di ogni grado si può procedere nel modo seguente

a) Dato un grado k si considerano i polinomi omogenei di grado k

$$u(x,y) = \sum_{j=0}^k a_j x^j y^{j-k}$$

e si determinano le condizioni di armonicità

b) si osserva che un generico polinomio di grado n $u(x,y)$ è armonico \Leftrightarrow le sue componenti omogenee di vari gradi sono esse stesse armoniche.

Supponiamo che $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ sia olomorfa

$$f(z) = u(x,y) + i v(x,y) \quad z = x + iy$$

Supponiamo che u e v siano di classe C^2 (in realtà non serve ipotizzarlo)

Valgono le condizioni CR in ogni punto del dominio

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} & \text{derivato rispetto } \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} & \text{derivato rispetto } \frac{\partial}{\partial y} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

Sommando termine a termine

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Teorema di} \\ \text{Schwarz} \\ \rightarrow \text{le derivate} \\ \text{miste sono uguali} \end{array} \right)$$

similmente si verifica che

$$\Delta v = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} & \text{derivato rispetto } \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} & \text{derivato rispetto } \frac{\partial}{\partial y} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

Dalla funzione ottenuta ne faccio la derivata n'petto a y

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 2x + k(y)$$

Usando la seconda condizione di Cauchy-Riemann otteniamo:

$$2x + k'(y) = 2x + 1$$

$$\Rightarrow k'(y) = 1$$

$$\Rightarrow k(y) = \int 1 dy = y + k$$

Quindi

$$V(x,y) = (2y+1)x + y + k = 2xy + x + y + k$$

• Procedura generale per trovare V

- si parte da una delle due CR

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$V(x,y) = -\int \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

si determina $V(x,y)$ a meno di un addendo che dipende solo da y

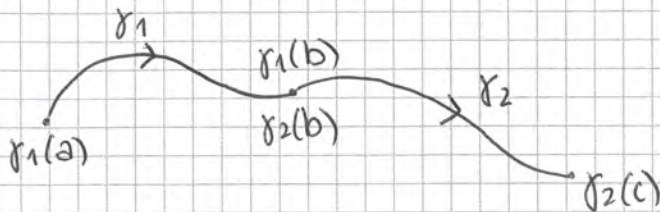
- usando la seconda CR si determina tale addendo a meno di costanti additive

Quindi i $V(x,y)$ che si ottengono sono una famiglia di funzioni parametrizzate da una costante additiva e vengono chiamate i **COMPLEMENTI ARMONICI** di $u(x,y)$.

Se partissi da una funzione $u(x,y)$ non armonica si presenterebbero problemi nell'imporre la seconda condizione di CR, poiché otterrei una funzione dipendente dall'altra variabile e quindi non integrabile.

Questa procedura è applicabile se quando $\partial = 0$ o comunque quando il dominio è rettangolare.

La curva concatenata è continua e regolare (C^1 a tratti) se γ_1 e γ_2 lo sono, al massimo si avrà un punto di non derivabilità nel punto b (punto di concatenazione)



3) Riparametrizzazione

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\xi: [c, d] \rightarrow [a, b] \quad C^1 \text{ strettamente crescente}$$

$$\gamma \circ \xi: [c, d] \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{curva regolare}$$

$\gamma(\xi(s)) \rightarrow$ viene cambiata la velocità di percorrenza ma non il verso di percorrenza, poiché ξ è strettamente crescente.

Riparametrizzazione

Regolarità sulla curva ξ

\rightarrow deve essere strettamente crescente

(la riparametrizzazione di senso non cambia la ~~curva~~ curva di partenza, mentre l'inversione del senso sì)

• Integrale

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{curva regolare}$$

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

$$\int_a^b \gamma(t) dt := \int_a^b x(t) dt + i \int_a^b y(t) dt$$

Valgono le usuali regole del calcolo integrale + th. fondamentale del calcolo integrale

Esempio]

$$\int_0^{2\pi} R e^{it} dt = \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} \frac{R}{i} e^{it} dt = \frac{R}{i} (e^{i2\pi} - e^{i0}) = 0$$

Esprimiamo tutto in componenti

$$\begin{aligned} f(z(t)) z'(t) &= \\ &= [u(x(t), y(t)) + i v(x(t), y(t))] [x'(t) + i y'(t)] = \\ &= u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t) + \\ &\quad + i [v(x(t), y(t)) x'(t) + u(x(t), y(t)) y'(t)] \end{aligned}$$

L'integrale quindi è composto da una parte reale e da una immaginaria

$$\int_{\gamma} f(z) dz = A + iB$$

$$A = \int_a^b [u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t)] dt$$

$$B = \int_a^b [v(x(t), y(t)) x'(t) + u(x(t), y(t)) y'(t)] dt$$

Osservazione

$$A = \int_{\gamma} \overrightarrow{(u, -v)} dt$$

$$B = \int_{\gamma} \overrightarrow{(v, u)} dt$$

Possono essere interpretati come due integrali di linea lungo γ dove i campi, però, non sono $\overrightarrow{(u, v)}$ ma $\overrightarrow{(u, -v)}$ in un caso e $\overrightarrow{(v, u)}$ nell'altro.

Esempio

$$f(z) = z^2 + 1$$

$$\gamma(t) = 1 + t(i-1) \quad t \in [0, 1]$$



$$\gamma'(t)$$



$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 ([1 - t(i-1)]^2 + 1) (i-1) dt =$$

↳ a z sostituisco l'espressione della curva

Dimostrazione

(1) e (2) sono diretta conseguenza delle proprietà di linearità e additività dell'usuale integrale di Riemann

$$(3) \int_{\gamma \circ z} f(z) dz = \int_c^d f(\gamma(z(s))) (\gamma \circ z)'(s) ds = \\ = \int_c^d f(\gamma(z(s))) \gamma'(z(s)) \cdot z'(s) ds$$

Poniamo $t = z(s) \rightarrow dt = z'(s) ds$

$$\Rightarrow \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \cdot dt = \int_{\gamma} f(z) dz$$

$$(4) \int_{-\gamma} f(z) dz = \int_{-a}^{-b} f(-\gamma(t)) (-\gamma)'(t) dt = \quad f_{\gamma}(t) = \gamma(-t) \\ = - \int_{-b}^{-a} f(\gamma(-t)) \gamma'(-t) dt$$

pongo $s = -t \rightarrow ds = -dt$

$$\Rightarrow \int_b^a f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds = - \int_a^b f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds = - \int_{\gamma} f(z) dz$$

ESERCITAZIONE

25/03/13

$U: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, U è armonica su Ω se
 $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad \forall x, y \in \Omega$

$f(z)$ è olomorfa su $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso

$\Rightarrow \operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ sono armoniche su Ω

$U: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ funzione armonica

$V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ armonica coniugata di U se $f = U + iV$ è olomorfa su \mathbb{C}

esempio $U(x, y) = 3x$ è armonica su \mathbb{R}^2

$V(x, y) = 1$ è armonica

Tuttavia $U + iV = 3x + i = f(x) \rightarrow f(z)$ non è olomorfa

1) Trovare l'armonica coniugata v di $u(x,y) = \sinh x \cdot \sin y$ tale che $v(0,\pi) = 3$

i) Verificare che u è armonica

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cosh x \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sinh x \cdot \cos y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sinh x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sinh x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$

ii) Determinare v tale che $u+iv$ sia olomorfa

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \cosh x \cdot \sin y \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\sinh x \cos y \end{cases}$$

$$v(x,y) = \int (\cosh x \cdot \sin y) dy = -\cosh x \cdot \cos y + g(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\sinh x \cdot \cos y + g'(x)$$

$$-\sinh x \cdot \cos y + g'(x) = -\sinh x \cos y$$

$$g'(x) = 0$$

$$\rightarrow g(x) = k \quad k \in \mathbb{R}$$

$$v(x,y) = -\cosh x \cos y + k$$

Impongo che $v(0,\pi) = 3$

$$v(0,\pi) = 1 + k = 3 \quad \rightarrow \quad k = 2$$

$$v(x,y) = -\cosh x \cdot \cos y + 2$$

2) TEST: stabilire se $f(z) = x^2 + i(x^3 - 3xy^2)$ è olomorfa in \mathbb{C}

\rightarrow non lo è

$u(x,y) = x^2$ non è armonica, con le ~~le~~ condizioni di Cauchy Riemann stabilire se è derivabile in qualche punto

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} [2(\cos t - i \sin t) + 3] (-\sin t + i \cos t) dt = \\
 &= \int_0^{2\pi} [(2\cos t + 3) - 2i \sin t] (-\sin t + i \cos t) dt = \\
 &= \int_0^{2\pi} [-2\cos t \sin t - 3\sin t + 2\sin t \cos t] + i(2\sin^2 t + 2\cos^2 t + 3\cos t) dt = \\
 &= i \int_0^{2\pi} 2 dt = 4\pi i.
 \end{aligned}$$

calcolare

$I = \int_{\gamma} e^{\pi z} dz$ con γ segmento di estremi i e $i/2$

$\gamma(t) = i + t(\frac{i}{2} - i) \quad \dot{\gamma}(t) = -it \quad t \in [-1, -1/2]$

$= i - \frac{i}{2}t \quad \gamma'(t) = -i/2$

$I = \int_0^1 e^{\pi(i - i/2t)} \cdot (-i/2) dt = -\frac{i}{2} e^{\pi i} \int_0^1 e^{-\frac{i}{2}\pi t} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-\frac{i}{2}\pi t}}{-\frac{i}{2}\pi} \right]_0^1$

es 1 $I = \int_c \bar{z} dz$ $C = \{z = t^2 + it, t \in \mathbb{R}, t \in [0, 2]\}$ $x = t^2$ $y = t$ $x = y^2$

es 2 $I = \int_{\gamma} \bar{z} dz$ γ ha come sostegno l'ellisse $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$
percorso in senso orario

parametrizzazione ellisse $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sqrt{2} \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$

28/03/14

TEOREMA di GREEN

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio

campo $\vec{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \vec{F}(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) \quad C^1$

curva di Jordan in $\Omega \quad \gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$

ipottizziamo che $\text{Int}(\gamma) \subseteq \Omega$ (se Ω è semplicemente connesso o è autovalutata)

Allora

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \iint_{\text{Int} \gamma} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

Teorema che collega i bordi e gli interni

ciò che abbiamo appena dimostrato è il seguente

• Teorema di Cauchy-Goursat

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio

$\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ curva di Jordan $\text{Int} \gamma \subseteq \Omega$

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa

Allora $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$

• Corollario

Se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ è semplicemente connesso

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa

γ_1, γ_2 curve regolari $\gamma_i: [a_i, b_i] \rightarrow \Omega$

$\gamma_1(a) = \gamma_2(a), \gamma_1(b) = \gamma_2(b)$

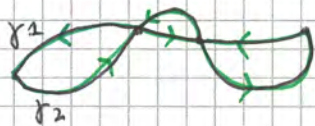
$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$

Dimostrazione (concatenano le due curve in modo da formare una curva di Jordan, sulla quale se essere nullo l'integrale)

$$\int_{-\gamma_2 \vee \gamma_1} f(z) dz = \int_{-\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_1} f(z) dz = 0$$

perché $-\gamma_2 \vee \gamma_1$ forma una curva di Jordan

Il teorema è valido anche se le due curve si intersecano (in un numero finito di punti)



In questo caso bisogna decomporre la curva chiusa in sotto-curve di Jordan

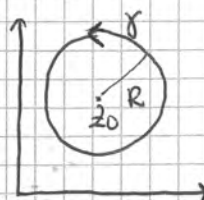
Esempio 1

$z_0 \in \mathbb{C}$

$R > 0$

$\gamma(t) = z_0 + R e^{it}$

$f(z) = (z - z_0)^k$



Se $k < 0$ non si può applicare Cauchy-Goursat perché il punto z_0 non è contenuto nel dominio.

$$\text{supp}(r_i) \cap \text{supp}(r_j) = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$(\text{supp } \gamma := \text{Im } \gamma := \{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\})$$

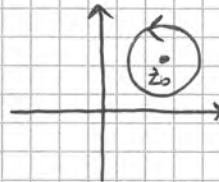
Esempio 1

1) $D = B_r(z_0)$

$\partial D = \text{supp } \gamma$

con $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$

$\gamma(t) = z_0 + R e^{it}$



Le parte quindi sono domini con bordo

2) $D = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$ dove $0 < r < R$

$\partial D = \{z \mid |z - z_0| = r\} \cup \{z \mid |z - z_0| = R\}$

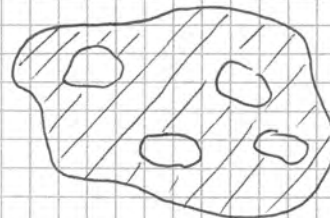


$\gamma_1(t) = z_0 + r e^{it}$

$\gamma_2(t) = z_0 + R e^{it}$

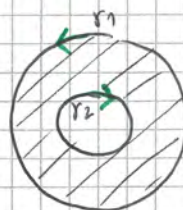
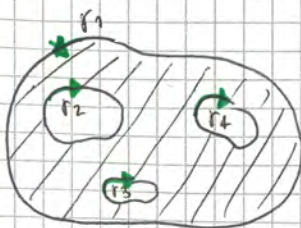
$\partial D = \text{supp}(\gamma_1) \cup \text{supp}(\gamma_2) \rightarrow$ dominio con bordo

"Tipico" dominio con bordo



• Orientamento positivo

Dato un dominio con bordo $D \subseteq \mathbb{C}$, si dice che le curve di Jordan $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ che parametrizzano la frontiera sono orientate positivamente se, percorrendole, l'insieme D risulta essere alla sinistra delle curve stesse.



$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} f(z) dz = \sum_{i=1}^3 \int_{\gamma_i} f(z) dz = 0$$

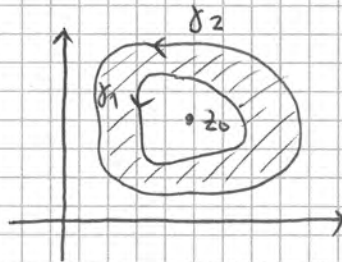
Proposizione

$f: \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa

γ_1, γ_2 Jordan in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ percorse in senso antiorario

$z_0 \in \text{Int}(\gamma_1), z_0 \in \text{Int}(\gamma_2)$

$$\text{Allora } \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$



Dimostrazione

$$D = \text{Int}(\gamma_2) - \overline{\text{Int}(\gamma_1)} \subseteq \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$$

è un dominio con bordo dato da γ_2 e $-\gamma_1$ (con orientamento positivo)

Dall'estensione di Cauchy-Goursat so che

$$0 = \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{-\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

Esempio

$$\int_{\gamma} (z-z_0)^k dz = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq -1 \\ 2\pi i & \text{se } k = -1 \end{cases}$$

\forall curva di Jordan in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ tale che $z_0 \in \text{Int} \gamma$

$$\int_{\gamma} (z-z_0)^{-1} dz = \begin{cases} 0 & \text{se } z_0 \notin \text{Int} \gamma \\ 2\pi i & \text{se } z_0 \in \text{Int} \gamma \end{cases}$$

→ Algoritmo per capire se un punto si trovi o meno all'interno di una curva, se è esterno l'integrale viene zero, se è interno viene $2\pi i$.

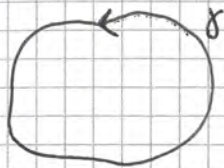
γ Jordan percorsa in senso antiorario

Osservazione 1

La formula di Cauchy ~~esattamente~~ continua a valere anche se Ω non è semplicemente connesso, purché $\text{Int}(\gamma) \subseteq \Omega$

Osservazione 2

La formula di Cauchy dice che una funzione olomorfa può essere ricostruita all'interno di una curva di Jordan a partire dai valori che assume sul supporto della curva

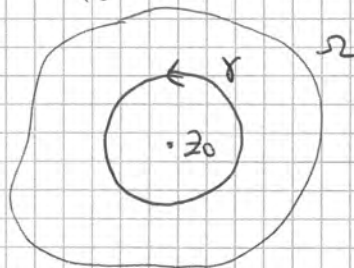


$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Le funzioni olomorfe sono "rigide": il comportamento sulla frontiera ne determina completamente e in modo univoco il comportamento all'interno

Applico la formula di Cauchy in un caso particolare in cui $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$ ($\gamma(t)$ circ. centrata in z_0)

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} r i e^{it} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

PROPRIETÀ DELLA MEDIA

Una funzione olomorfa, in ogni punto, assume il valore dato dalla media integrale unilaterale circ. centrata in quel punto.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

ESERCITAZIONE

01/04/24

TEOREMA DI CAUCHY-GOURSAT

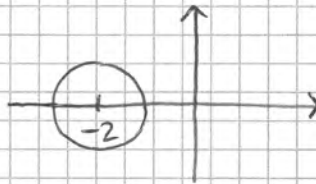
Sia D aperto connesso $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa $\Omega \subset D$ dominio con bordo tale $\bar{\Omega} \subset D$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} f(z) dz = 0$$

es. 1)

$$I = \int_C \frac{z^{12}}{e^{\cos z}} dz$$

$$C = \{z : |z+2| = 1\}$$

percorso una volta in
senso antiorario

Esaminiamo la funzione integranda

→ è rapporto di due funzioni olomorfe

Possibili problemi dove si annulla il denominatore

$$e^z = 0$$

$$e^a + ib = 0$$

$$e^a e^{ib} = 0$$

 $e^a = 0$ non ha soluzioni

$$\Rightarrow e^{\cos z} \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

quindi $f(z) = \frac{z^{12}}{e^{\cos z}}$ è olomorfa su \mathbb{C}

Posso applicare il teorema di Cauchy-Goursat

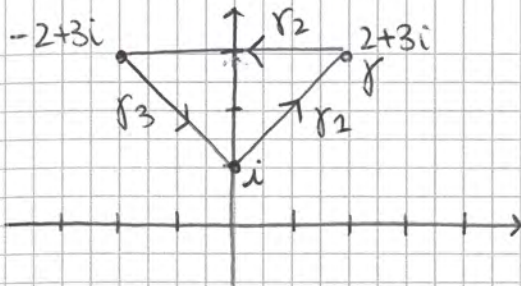
$$I = 0$$

$$2) I = \int_{\gamma} (2 - iz) dz$$

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\gamma(t) = t + i(t - t^2)$$

 $f(z) = 2 - iz$ è olomorfa su tutto \mathbb{C} (polinomio di I grado)



Posso vedere γ come frontiera dell'insieme

$f(z) = \frac{e^z + |z|^2}{z}$ non è olomorfa, non posso applicare Cauchy-G.

$$I = \int_{\gamma} \left(\frac{e^z}{z} + \frac{|z|^2}{z} \right) dz = \int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz + \int_{\gamma} \frac{|z|^2}{z} dz$$

posso applicare C.G. poiché $\frac{e^z}{z}$ è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, quindi posso definirlo su un insieme contenente γ e che non contenga lo zero.

$\frac{e^z}{z}$ è olomorfa su $\{z: \text{Im} z > 0\}$

$$\gamma \subseteq \{z: \text{Im} z > 0\}$$

quindi $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz = 0$ per C.G.

$\int_{\gamma} \frac{z \cdot \bar{z}}{z} dz = \int_{\gamma} \bar{z} dz$ da qui devo applicare la definizione di integrale

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

$$\gamma_2(t) = i + t(2+3i-i) \quad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_1(t) = i + t(2+2i) = 2t + i(2t+1)$$

$$\gamma_3(t) = 2+2i$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \bar{z} dz &= \int_0^1 \overline{\gamma_1(t)} \cdot \gamma_1'(t) dt = \int_0^1 (2t-i)(2t+1)(2+2i) dt = \\ &= (2+2i) [t^2 - it - it^2]_{t=0}^{t=1} = (2+2i)(1-2i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_2(t) &= 2+3i + t(-2+3i - (+2+3i)) = \\ &= 2+3i + 4t = -4t+2 + 3i \quad t \in [0, 1] \end{aligned}$$

$$I = \int_{\gamma} \frac{-i/4}{z-(1+2i)} dz + \int_{\gamma} \frac{i/4}{z-(1-2i)} dz$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{è olomorfa su } B_1(2i+1) \rightarrow \text{C.G.}}$
 $\int_{\gamma} = 0$

$$I = -\frac{i}{4} \int_{\gamma} \frac{1}{z-(1+2i)} dz$$

Diversi modi per risolverlo - integrale di linea
 - formula integrale di C.G.

FORMULA INTEGRALE DI CAUCHY

$f: D \rightarrow \mathbb{C}$ D dominio semplicemente connesso

$\Omega \subset D$, $\bar{\Omega} \subset D$

$z_0 \in \Omega$ $\partial\Omega$ di Jordan

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

Quindi

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i \cdot f(z_0)$$

$$\int \frac{1}{z-(1+2i)} dz$$

Quindi $f(z) = 1$

$f(z_0) = 1$

$$I = \int_{\gamma} \frac{1}{z-(1+2i)} dz \cdot \left(-\frac{i}{4}\right) = 2\pi i \cdot f(z_0) \cdot \left(-\frac{i}{4}\right) =$$

$$= -\frac{i}{4} \cdot 2\pi i \cdot 1 = \frac{\pi}{2}$$

Alternativamente, senza ricorrere alla scomposizione in fratti posso applicare direttamente la formula integrale ponendo

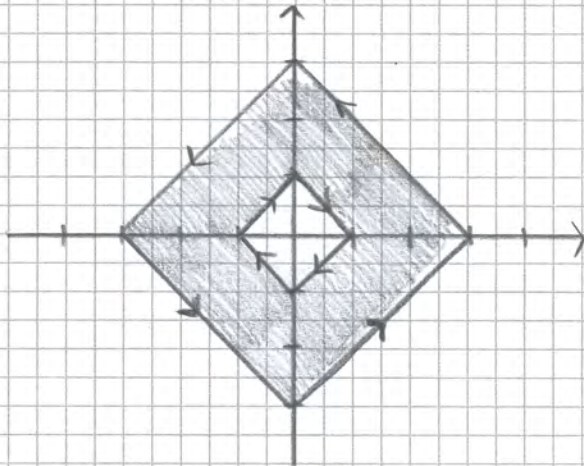
$$I = \int_{\gamma} \frac{1}{\underbrace{[z-(1+2i)]}_{z-z_0} [z-(1-2i)]} dz$$

$f(z)$

$$f(z) = \frac{1}{[z-(1-2i)]}$$

$$\begin{cases} x < 0, y < 0 \\ 1 \leq -x - y \leq 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 0, y < 0 \\ -3 - x \leq y \leq -1 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0, y > 0 \\ 1 \leq -x + y \leq 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 0, y > 0 \\ 1 + x \leq y \leq 3 + x \end{cases}$$



$$4z^2 + 2z(i-1) - i = 0$$

$$z = \frac{-(i-1) \pm \sqrt{(i-1)^2 + 4i}}{4}$$

2/4/14

Lunghezza di una curva

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ curva regolare



Per misurarla suddividendo la curva in punti intermedi e approssimandola a una somma di spezzare

$$a = t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = b$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \quad \text{approssimazione per difetto} \\ \rightarrow \text{devo infiniti punti}$$

Si definisce quindi la lunghezza della curva γ

$$L(\gamma) := \sup \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$$

Allora $|\int_{\gamma} f(z) dz| \leq M \cdot L(\gamma)$

Dimostrazione

$$|\int_{\gamma} f(z) dz| = |\int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt$$

$$\leq \int_a^b M |\gamma'(t)| dt = M L(\gamma)$$

□
Essendo una costante posso portarla fuori dall'integrale

FORMULA DI CAUCHY

Teo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio semplicemente connesso

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa

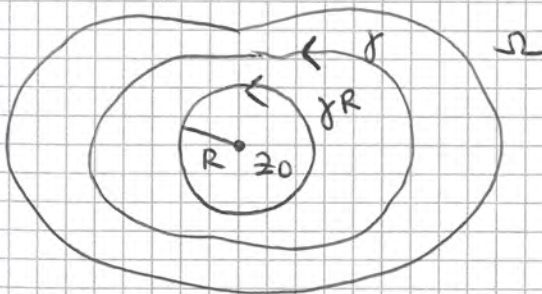
$z_0 \in \Omega$

$\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ curva di Jordan tale che $z_0 \in \text{Int}(\gamma)$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

Dimostrazione

Possiamo variare la curva di Jordan su cui integro $f(z)$, poiché il valore dell'integrale non cambia. z_0 deve comunque essere contenuto nell'interno della curva ↳ per il corollario al teorema di Cauchy-Goursat



Sappiamo che l'integrale non cambia se modifichiamo la curva di Jordan mantenendo z_0 al suo interno.

Considero quindi

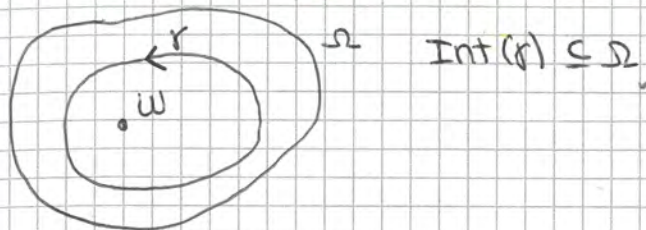
$$\gamma^R: [0, 2\pi] \rightarrow \Omega$$

$$\gamma^R(t) = z_0 + R e^{it}$$

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma^R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad \forall R$$

garantito dal corollario al teorema di C.G.

• formula di Cauchy per le derivate



$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz$$

Abbiamo ipotizzato che fosse lecito scambiare segno di integrazione (in γ) e derivazione rispetto a w

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz$$

$$\frac{d}{dw} \frac{1}{z-w} = \frac{1}{(z-w)^2}$$

$$\frac{d}{dw} (z-w)^{-2} = -2 \cdot (z-w)^{-3} \cdot (-1) = 2 (z-w)^{-3}$$

$$\frac{d^2}{dw^2} \frac{1}{z-w} = \frac{2}{(z-w)^3}$$

$$\frac{d^k}{dw^k} \frac{1}{z-w} = k! (z-w)^{-(k+1)}$$

Teorema: Formula di Cauchy generalizzata

Ω dominio

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa

Allora f è derivabile infinite volte su Ω

Inoltre se γ è una curva di Jordan e $w \in \text{Int}(\gamma)$

$$f^{(k)}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d^k}{dw^k} \frac{f(z)}{z-w} dz = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^{k+1}} dz$$

$$f^{(k)}(w) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^{k+1}} dz$$

Funzioni analitiche \rightarrow concetto molto più forte di C^∞ ,
Sono esprimibili come somme di serie di potenze

Esempio | $z_n = \frac{1+i}{n} + e^{(i-1)n}$

$$\frac{1+i}{n} = \frac{1}{n} + \frac{i}{n} \rightarrow 0 + i0 = 0$$

Alternativamente $\left| \frac{1+i}{n} \right| = \frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$$e^{(i-1)n} = e^{-n} e^{in} = e^{-n} \cos n + i e^{-n} \sin n \rightarrow 0 + i0$$

Alternativamente $|e^{(i-1)n}| = e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Data una successione complessa (z_n) , si può considerare la successione delle somme parziali

$$\left(\sum_{k=1}^n z_k \right)$$

☞ tale successione prende il nome di **SERIE** associata a (z_n) . Se esiste il limite L della serie, la serie si dice **CONVERGENTE** e L è detto **SOMMA DELLA SERIE**.

Notazione |

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = L$$

(Viene anche ~~indicato~~ ^{utilizzato} per indicare la serie stessa)

Le proprietà algebriche delle serie complesse sono analoghe a quelle reali

Osservazione | $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge $\Rightarrow z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Se una serie converge allora il termine generale è infinitesimo

Importante ⚠

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ diverge}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \text{ converge se } p > 1$$

Definizione | (z_n) successione. Si dice che

$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ **CONVERGE ASSOLUTAMENTE** se converge la serie

a termini reali non negativi $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$

$$|w| = |1 - z^2| = |z|^2 < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$$

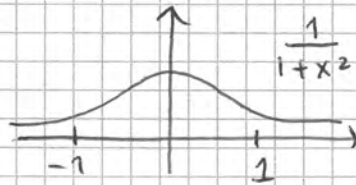
Quindi ~~la serie converge~~ la serie converge se $|z| < 1$

e la somma è data da

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^{2k} = \frac{1}{1-w} = \frac{1}{1+z^2}$$

$$z = x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k} \quad |x| < 1$$



La funzione $\frac{1}{1+x^2}$ regolare in \mathbb{R}

nasconde delle irregolarità in \mathbb{C} (vedi $\pm i$) che giustificano il fatto che essa si possa sviluppare in serie di Taylor solo per $|x| < 1$.

La serie geometrica è un caso particolare di **SERIE DI POTENZE** che in generale sono delle serie del tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k) (z - z_0)^k$$

dove (a_n) è una successione data di numeri complessi

$z_0 \in \mathbb{C}$ (centro della serie)

$z \in \mathbb{C}$ parametro

(serie geometrica $a_n = 1 \forall n$)
(caso particolare $z_0 = 0$)

• TEOREMA

$\exists R \in [0, +\infty]$ tale che

$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$ converge assolutamente se $z \in B_R(z_0)$

e non converge se $|z - z_0| > R$

R è detto ~~raggio~~ il raggio di convergenza della serie di potenze e può essere calcolato nel modo seguente

$$\text{se } \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \Rightarrow R = \frac{1}{L} \quad (\text{con } \infty = 1/0 \text{ e } 0 = 1/\infty)$$

$$f: B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

La somma della serie è quindi una funzione che vale in $B_r(z_0) \subset \mathbb{C}$

• TEOREMA

f è olomorfa su $B_r(z_0)$ (quindi C^∞) e la derivata k -esima nel punto z_0 vale

$$f^{(k)}(z_0) = a_k \cdot k! \quad \forall k=0, 1, 2, \dots$$

Dimostrazione (idee)

Il primo passo consiste nel mostrare che f è olomorfa e che la derivata è ancora somma di una serie di potenze, ottenuta derivando la serie di potenze originale termine a termine

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z-z_0)^{k-1}$$

(k non modifica il raggio di convergenza)

$$f': B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$$

Una volta che si sia dimostrato che la funzione derivata continua a convergere nello stesso intervallo, si può facilmente iterare questo primo passo e ottenere che tutte le derivate successive di $f(z)$ sono somme di serie di potenze.

$$f^{(s)}(z) = \sum_{k=s}^{\infty} k(k-1)\dots(k-s+1) a_k (z-z_0)^{k-s}$$

Quando pongo $z = z_0$ l'unico contributo me lo dà il termine noto $k=s$

$$\rightarrow f^{(s)}(z_0) = s! a_s$$

$$\text{quindi } a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k \quad \mapsto \text{SERIE DI TAYLOR}$$

Partendo da una serie di potenze, siamo passati alla somma della serie f , che abbiamo scoperto essere esprimibile come serie di Taylor, che coincide con la serie di potenze di partenza.

in generico punto su $\gamma(t)$.

Sappiamo che (formula di Cauchy per le derivate)

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} dw$$

Considero la serie di Taylor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k =$$

↳ sostituisco l'espressione data dalla formula di Cauchy

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} dw (z-z_0)^k \right]$$

Scambio sommatoria e integrale → scambio da più straffone

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[\sum_{k=0}^{\infty} f(w) \frac{(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}} \right] dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z_0} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^k \right) dw$$

$(w-z_0) (w-z_0)^k$
↳ estraggo il termine che non dipende da k

serie geometrica: converge se

$|w-z_0| = R - \epsilon$ (circonferenza γ)

poiché $z \in \text{Int}(\gamma)$

↳ perché w piace sotto crf di centro z_0 e raggio $R - \epsilon$

$$\left| \frac{z-z_0}{w-z_0} \right| < 1$$

$$\rightarrow |z-z_0| < R - \epsilon = |w-z_0|$$

Quindi la serie geometrica converge

$$\rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} dw = \frac{f(w)}{w-z_0} \cdot \frac{w-z_0}{w-z_0 - z + z_0}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z_0} \cdot \frac{w-z_0}{w-z} dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = f(z) \quad \text{per la formula di Cauchy poiché } z \in \text{Int}(\gamma)$$

Abbiamo quindi dimostrato che la serie di Taylor coincide

con $f(z)$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k = f(z)$$

$$a_{n_0} \neq 0 \quad a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1} = 0$$

Quindi

$$f(z) = \sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k \quad a_{n_0} \neq 0$$

\rightarrow posso far partire la serie da a_{n_0} poiché i termini precedenti sono nulli e non danno contributo.

$$= (z-z_0)^{n_0} \sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^{k-n_0}$$

pongo $h = k - n_0$

$$= (z-z_0)^{n_0} \sum_{h=0}^{+\infty} a_{h+n_0} (z-z_0)^h$$

$\hookrightarrow \varphi(z)$

$(z-z_0)^{n_0}$ si annulla esclusivamente in z_0

$$p(z_0) = a_{n_0} \neq 0 \quad (\text{per costruzione})$$

$\varphi(z)$ è una serie di potenze che non si annulla in z_0

$$|\varphi(z_0)| > 0$$

Essendo una funzione continua, per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno in cui la funz. mantiene lo stesso segno

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : |\varphi(z)| > 0 \quad \forall z \in B_\varepsilon(z_0) \quad (\text{teorema fermi del segno})$$

Quindi in $B_\varepsilon(z_0)$ f ha come unico zero il punto z_0 , essendo prodotto di $(z-z_0)^{n_0}$, che si annulla solo in z_0 , e $\varphi(z_0)$ che non si annulla in $B_\varepsilon(z_0)$.

\Rightarrow Quindi z_0 è uno zero isolato di $f(z)$

Funzioni e singolarità: sviluppi di Laurent

21/04/24

Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ dominio

$f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfe

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

g non è nulla o capzero su D , quindi gli zeri di g sono isolati.

$$Z_p = \{ z \in D \mid g(z) = 0 \} \quad \text{Insieme degli zeri di } g(z)$$

a_k e la funzione $h(z)$.

Sappiamo che

$$a_k = b_{k+n_0} = \frac{\tilde{h}^{(k+n_0)}(z_0)}{(k+n_0)!}$$

Sappiamo che le derivate di una funzione olomorfa possono essere espresse come integrali lungo curve di Jordan. Per la formula di Cauchy generalizzata

Sia γ una curva di Jordan in $B_\delta(z_0)$ tale che $z_0 \in \text{Int}(\gamma)$, percorsa in senso antiorario

$$\tilde{h}^{(k+n_0)}(z_0) = \frac{(k+n_0)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\tilde{h}(z)}{(z-z_0)^{k+n_0+1}} dz$$

Dalla formula generalizzata di Cauchy

Quindi abbiamo che

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\tilde{h}(z)}{(z-z_0)^{k+n_0+1}} dz \quad a_k = \frac{\tilde{h}^{(k+n_0)}(z_0)}{(k+n_0)!}$$

Per costruzione ~~è~~ sappiamo che $h(z) = \frac{\tilde{h}(z)}{(z-z_0)^{n_0}}$

Quindi posso scrivere

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{h(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$$

$$\frac{\tilde{h}(z)}{(z-z_0)^{k+n_0+1}} = \frac{\tilde{h}(z)}{(z-z_0)^{n_0} \cdot (z-z_0)^{k+1}} = \frac{h(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$$

\Rightarrow Collegamento tra la funzione e i suoi coeff. dello sviluppo di Laurent.

Nel caso in cui $h(z)$ sia olomorfa in z_0 posso esprimerla mediante il suo sviluppo di Taylor

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

con $a_k = \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!}$ con $\frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$

Collegamento tra a_k , derivate e integrali

$$\int_{\gamma} h(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(h, 0)$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$h(z) = \frac{e^z}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{n!}$$

pongo $k = n-2$
 $n = k+2$

$$h(z) = \sum_{k=-2}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+2)!}$$

$$a_k = \frac{1}{(k+2)!} \quad k = -2, \dots$$

per $k = -1$

$$\operatorname{Res}(h, 0) = a_{-1} = \frac{1}{1!} = 1$$

Quindi

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2} dz = 2\pi i$$

Esempio | sviluppo di Laurent per funzioni non MEROMORFE

Consideriamo

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f(z) = e^{1/2 z}$$

Sappiamo che $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \quad \forall w \in \mathbb{C}$

Ponendo $w = 1/2 z$

$$f(z) = e^{1/2 z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{-n}}{n!}$$

Se pongo $k = -n$ ottengo

$$\sum_{k=0}^{-\infty} \frac{z^k}{(-k)!}$$

I termini dello sviluppo di Laurent
sono tutti negativi

nb: $k < 0 \Rightarrow -k > 0$ $(-k)!$ è lecito

l'ordine della singolarità.

Se $n_0 = 1 \rightarrow$ polo semplice

3) Se $a_k \neq 0$ per infiniti $k < 0$, la singolarità è detta ESSENZIALE (non è possibile scrivere la funzione come rapporto di due funz. olomorfe)

Ad esempio $e^{\frac{1}{z}}$ dove 0 è singolarità essenziale.

In ogni caso, comunque, $a_{-1} = \text{Res}(f, z_0)$ è detto residuo (è zero per le discontinuità eliminabili)

Gli sviluppi di Laurent su corone circolari perenni che non sono interpretabili in questa maniera

ESERCITAZIONE

$$1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-2i)^n}{(-i)^{2n+1} e^{-n} (n^3+3)}$$

Determinare l'insieme di convergenza

$S(z)$ è una serie di potenze, di centro $2i$

$$c_n = \frac{1}{(-i)^{2n+1} e^{-n} (n^3+3)}$$

l'insieme di convergenza è la parte interna del cerchio di raggio R e centro z_0

Sappiamo che $S(z)$ converge in $|z-z_0| < R$ e diverge per $|z-z_0| > R$, mentre non sappiamo cosa accade sui punti della frontiera $|z-z_0| = R$.

Raggio di convergenza

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{(-i)^{2n+1} e^{-n} [n^3+3]}{(-i)^{2(n+1)} e^{-n+1} [(n+1)^3+3]} \right|$$

Il modulo di $(-i)^{2n+1}$ e $(-i)^{2(n+1)}$ è sicuramente 1

l'insieme di convergenza della serie è il cerchio di centro z_1 e raggio $\frac{1}{e}$, compreso il bordo

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| \leq 1/e\}$$

$$2) \sum_{n=1}^{+\infty} z^2 (\operatorname{Im} z)^{n+3}$$

Determinare l'insieme di convergenza e la somma della serie
Non è una serie di potenze \Rightarrow l'insieme di convergenza non sarà quindi un cerchio

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} z^2 (\operatorname{Im} z)^{n+3} &= z^2 \sum_{n=1}^{+\infty} (\operatorname{Im} z)^n (\operatorname{Im} z)^3 = \\ &= z^2 \cdot (\operatorname{Im} z)^3 \sum_{n=1}^{+\infty} (\operatorname{Im} z)^n \end{aligned}$$

Pongo $y = \operatorname{Im} z$

$$z^2 (\operatorname{Im} z)^3 \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} y^n}$$

serie geometrica di cui conosco insieme di convergenza e somma.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y^n \quad R_1 = 1, \text{ non converge per } |y| = 1$$

Insieme di convergenza: $|y| < 1$



$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Somma della serie

$$S = z^2 (\operatorname{Im} z)^3 \cdot \left[\frac{1}{1 - (\operatorname{Im} z)} - 1 \right] =$$

$$= z^2 (\operatorname{Im} z)^3 \cdot \frac{1 - 1 + \operatorname{Im}(z)}{1 - \operatorname{Im}(z)} = \frac{z^2 \cdot (\operatorname{Im} z)^4}{1 - \operatorname{Im}(z)}$$

La somma della serie non è una funzione olomorfa ovunque

di $f(z) = \frac{1}{iz^2 - z^5}$

(A) $f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{i - z^3}$

volei arrivare alla forma $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$

↓
voglio ricondurlo alla somma della serie geometrica

$f(z) = \frac{1}{iz^2} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{z^3}{i})}$

$\frac{1}{1 - \frac{z^3}{i}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z^3}{i}\right)^n$ valida per $|\frac{z^3}{i}| < 1 \rightarrow |z| < 1$

$f(z) = \frac{1}{iz^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z^3}{i}} = \frac{1}{iz^2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z^3}{i}\right)^n =$
 $= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{i} \frac{z^{3n-2}}{i^n}$

B) $|z| > 1 \rightarrow \frac{1}{|z|} < 1$

$f(z) = \frac{1}{-z^5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{iz^2}{z^5}} = -\frac{1}{z^5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{i}{z^3}}$

$= -\frac{1}{z^5} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{i}{z^3}\right)^n$

dove $|\frac{i}{z^3}| < 1$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-i}{z^{3n+5}}$

$|\frac{1}{z}| < 1 \rightarrow |z| > 1$

$z = 0$ che tipo di singolarità è?

→ polo di ordine 2 / polo doppio

$$\int_{\gamma} f(z) dz + \sum_{i=1}^n -2\pi i \operatorname{Res}(f, z_i)$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}(f, z_i)$$

Residuo: termine a_{-1} dello sviluppo di Laurent

→ come si calcolano i residui senza conoscere lo sviluppo di Laurent?

• Calcolare i residui

- caso di poli semplici

z_0 polo semplice per $f(z)$

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

Moltiplico entrambi i membri per $(z-z_0)$

$$(z-z_0)f(z) = a_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k+1}$$

estensione per continuità di $f(z)$

$$\boxed{a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)f(z)}$$

- caso di poli multipli

z_0 polo di ordine superiore (ordine k_0)

$$f(z) = \sum_{k=-k_0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$$

$$g(z) = (z-z_0)^{k_0} \cdot f(z) = \sum_{k=-k_0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^{k+k_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-k_0} (z-z_0)^n$$

Ipotesizziamo che $g(z)$ sia l'estensione per continuità in z_0 di $(z-z_0)^{k_0} f(z)$

$$\boxed{a_{-1} = a_{(k_0-1)-k_0} = \frac{g^{(k_0-1)}(z_0)}{(k_0-1)!}}$$

Esempi

1) Sia $f(z) = \frac{e^z + z^2}{(z^2 - z)(z - 5)} = \frac{e^z + z^2}{z(z-1)(z-5)}$

Parametrizzo γ_M^2 :

$$\gamma_M^2(t) = t \quad t \in [-M, M]$$

considero $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$

$$\int_{\gamma_M^2} f(z) dz = \int_{-M}^M \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$$

$$\int_{\gamma_M^1} f(z) dz + \int_{\gamma_M^2} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i)$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_M^2} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) - \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_M^1} f(z) dz$$

Si osserva che

$$|(1+z^2)^2| = |1+z^2|^2 \geq (|z|^2 - 1)^2 \quad (|z-w| \geq |z| - |w|)$$

quindi

$$\left| \frac{1}{(1+z^2)^2} \right| \leq \frac{1}{(|z|^2 - 1)^2} = \frac{1}{(M^2 - 1)^2} \sim M^{-4} \quad (\text{per } M \rightarrow +\infty)$$

su γ_M^1

↳ semicirco di raggio M

$$\left| \int_{\gamma_M^1} f(z) dz \right| \leq L(\gamma_M^1) \sup_{\gamma_M^1} |f(\gamma_M^1(t))| \rightarrow \text{tende a zero per } M \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_M^2} f(z) dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i)$$

dove $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$

PRINCIPIO DELL'ARGOMENTO: APPLICAZIONE DEL TEOREMA DEI RESIDUI

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa

Sia γ una curva di Jordan tale che $\text{Int}(\gamma)$ sia dentro D tranne per un insieme finito di punti.

Supponendo che tali punti siano poli per f , allora si ha che

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \cdot \#$$

dove $\# = \text{zeri di } f \text{ dentro } \text{int}(\gamma) - \text{poli di } f \text{ dentro } \text{Int}(\gamma)$
 con zeri e poli contati con le loro molteplicità
 (se un polo ha molteplicità 5 sottraggo per 5)

Considero la curva $f \circ \gamma$ (potrebbe non essere di Jordan)
 posso suddividere in più curve di Jordan, quelle senza
 singolarità all'interno danno contributo = 0

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{f \circ \gamma} \frac{1}{z} dz$$

↙

$$\int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{1}{f(\gamma(t))} (f \circ \gamma)'(t) dt$$

Pongo $f(\gamma(t)) = z$
 $dz = (f \circ \gamma)'(t) dt$

Abbiamo il risultato che dipende da quante volte giro in
 senso antiorario attorno alla singolarità

$$\int_{f \circ \gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \cdot (\text{n}^\circ \text{ di volte che } f \circ \gamma \text{ gira intorno a } 0 \text{ in senso antiorario})$$

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z-1} dz = 2\pi i \cdot I_{\gamma}(1) = 2\pi i \cdot 3 = 6\pi i$$

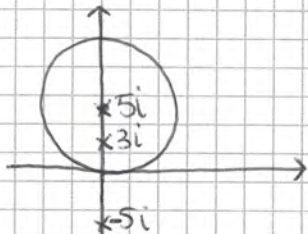
Se ho una curva che non è semplice posso ricondormi alla formula integrale di Cauchy spezzandola in curve semplici

ES. 4 10/2/10

$$I = \int_{\gamma} \frac{\cos(iz)}{(z^2+25)(z-3i)} dz$$

γ è la curva percorsa in senso antiorario con sostegno

$$C = \{z : |z-5i| = 5\}$$



Cerco le singolarità della funzione

$$z^2+25=0 \quad z=5i \quad z=-5i$$

$$z-3i=0 \quad z=3i$$

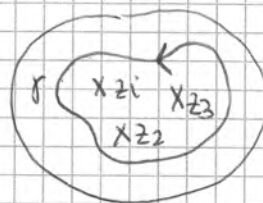
→ Teorema dei Residui

$f: D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa

considero γ curva di Jordan $\gamma \subseteq D$

$\text{Int } \gamma$ contiene al più un numero finito di punti in cui f non è olomorfa, cioè che non stanno in D .

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_i \in \text{Int } \gamma} \text{Res} f(z_i)$$



$$I = 2\pi i [\text{Res} f(5i) + \text{Res} f(3i)]$$

Calcolo dei residui

→ polo semplice

$$f(z) = \frac{p(z)}{z-z_0} \quad \begin{array}{l} p(z) \text{ olomorfa} \\ p(z_0) \neq 0 \end{array}$$

Metodo alternativo per il calcolo dei residui nei poli semplici

$$f(z) = \frac{n(z)}{d(z)} \quad n(z_0) \neq 0 \quad z_0 \text{ polo}$$

$$d(z_0) = 0 \quad d'(z_0) \neq 0$$

$$\text{Res } f(z_0) = \frac{n(z_0)}{d'(z_0)}$$

$$\text{Res } f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot \frac{n(z)}{d(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot \frac{n(z)}{d(z) - d(z_0)}$$

$$= \frac{n(z_0)}{d'(z_0)}$$

$$\text{Res } f(-2i) = \frac{z^2|_{-2i}}{\frac{d}{dz} [(z^2+4)(z+6i)]|_{-2i}} = \frac{z^2|_{-2i}}{[2z(z+6i) + (z^2+4)]|_{-2i}}$$

$$= \frac{-4}{-4i(-2i+6i) + (-4+4)} = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Res } f(-6i) = \frac{z^2|_{-6i}}{[2z(z+6i) + (z^2+4)]|_{-6i}} = \frac{-36}{-32} = \frac{9}{8}$$

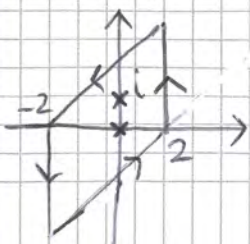
$$I = 2\pi i \left[-\frac{1}{4} + \frac{9}{8} \right] = 2\pi i \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{4}\pi i$$

calcolo dei residui nel caso di poli multipli

$$I = \int_C \frac{e^{\pi z}}{z(z-i)^2} dz$$

$$C = \partial \{ z = x+iy : |y-x| \leq 2, |x| \leq 2 \}$$

$$-2 \leq y-x \leq 2 \rightarrow x-2 \leq y \leq x+2$$

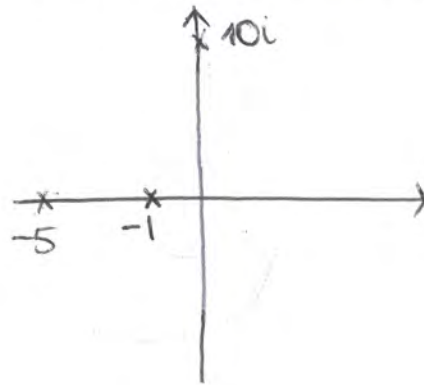


$z = i$ polo doppio
 $z = 0$ polo semplice

Calcolare $\int_{\gamma} \frac{1}{(z+1)(z+5)(z-10i)} dz = I_R$ al variare di R reale

con γ_R con sostegno $|z|=R \rightarrow$ cir di raggio $R \in \mathbb{R}$ e centro $(0,0)$

Poli della funzione $z = -1$
 $z = -5$
 $z = 10i$



Se $0 < R < 1$ la funzione è olomorfa nell'int(γ)

$$\rightarrow I_R = \int_{\gamma} \frac{1}{(z+1)(z+5)(z-10i)} dz = 0$$

Se $1 < R < 5$

$$\rightarrow I_R = \int_{\gamma} \frac{1}{(z+1)(z+5)(z-10i)} dz = 2\pi i$$

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0)$$

Se $5 < R < 10$

$$\rightarrow I_R = 2\pi i [\text{Res}f(-1) + \text{Res}f(-5)]$$

$$\text{Res}f(-1) = \lim_{z \rightarrow -1} \cancel{(z+1)} \frac{1}{(z+1)(z+5)(z-10i)} = \frac{1}{4(-1-10i)}$$

$$\text{Res}f(-5) = \lim_{z \rightarrow -5} \cancel{(z+5)} \frac{1}{(z+1)(z+5)(z-10i)} = -\frac{1}{4(-5-10i)}$$

Se $R > 10$

$$\rightarrow I_R = 2\pi i [\text{Res}f(-1) + \text{Res}f(-5) + \text{Res}f(+10i)]$$

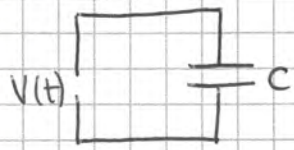
$$\text{Res}f(+10i) = \lim_{z \rightarrow 10i} \cancel{(z-10i)} \frac{1}{(z+1)(z+5)(z-10i)} = \frac{1}{(10i+5)(10i+1)}$$

30/04/14

TEORIA DELLE DISTRIBUZIONI

→ teoria che nasce dal campo fisico

ES. 1] CARICA DI UN CONDENSATORE



Corrente che scorre nel circuito

$$i(t) = C \cdot V'(t)$$

$$V'(t) = \frac{1}{C} i(t)$$

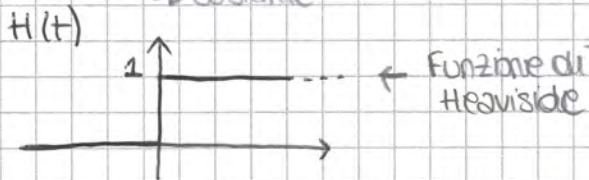
ipotezzando che $v(s) = 0$ per $s \ll 0$

$$V(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{C} i(s) ds \quad (\text{poiché } v'(t) = \frac{1}{C} i(t))$$

ipotezziamo invece che

$$V(t) = \bar{V} \cdot H(t) \quad \text{con } H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ 1 & \text{se } t > 0 \end{cases} \quad \text{funzione di Heaviside}$$

\bar{V} costante



Com'è l'andamento della corrente? $i(t) = C \cdot V'(t)$

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq 0 \\ +\infty & \text{se } t = 0 \end{cases} \rightarrow \text{pico infinito quando } t = 0$$

\bar{V} e C non giocano alcun ruolo nella corrente, non compaiono.

$$V(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{C} i(s) ds \rightarrow \text{cosa accade quando integro sul pico?}$$

Sicuramente \bar{V} non compare, inoltre qualunque teoria dell'integrazione mi afferma che $v(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{C} i(s) ds = 0$, a tappero.

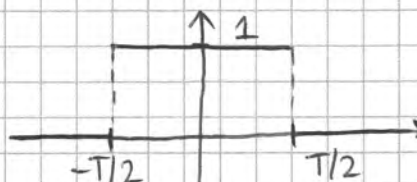
⇒ I fenomeni impulsivi non vengono descritti adeguatamente da questa teoria matematica.

ES. 2] DISTRIBUZIONI DI CARICHE

Introduciamo la funzione porta (di ampiezza T)

$$P_T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P_T(x) = \begin{cases} 1 & -T/2 \leq x \leq T/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Le distribuzioni non sono definite istante per istante, ma è sufficiente che esse siano mediabili localmente.

Funzioni TEST

→ rappresentano i profili di integrazione locale, cambiando la funzioni test cambio la teoria delle distribuzioni.

• CLASSICO

(Funzioni a supporto compatto)

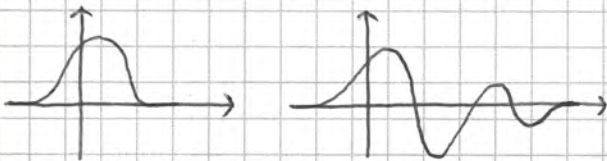
$\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice FUNZIONE TEST se

(i) $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$

(ii) ha supporto limitato, cioè $\exists r > 0$ t.c. $\phi(x) = 0$ se $|x| > r$

Notazione] $\text{supp}(\phi) = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid \phi(x) \neq 0\}}$ ← chiusura dell'insieme
 supporto chiuso e limitato compatto

esempi



I punti di attacco devono avere tutte le derivate nulle
 → sicuramente non sono analitiche

$\phi(x) = 0$ è una funzione a supporto compatto (funzione banda)

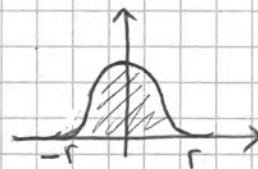
$$\tilde{\phi}_r(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{r^2-x^2}} & |x| < r \\ 0 & |x| \geq r \end{cases}$$

$\tilde{\phi}_r$ è C^∞ a supporto compatto

$$\lim_{x \rightarrow r^+} \tilde{\phi}_r(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -r^-} \tilde{\phi}_r(x) = 0$$

è sempre una funzione test

$$\phi_r(x) = \frac{\tilde{\phi}_r(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}_r(x) dx} \rightarrow \text{normalizzata}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_r(x) dx = 1 \quad \text{diventa una distribuzione di probabilità}$$

si definisce

\mathcal{D} l'insieme delle funzioni test

$$0, \phi_r, \tilde{\phi}_r \in \mathcal{D}$$

Convergenza in \mathbb{D}

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo

$$f_n: I \rightarrow \mathbb{R}, f: I \rightarrow \mathbb{R}$$

Si dice che f_n converge a f puntualmente su I se

$$\forall x \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

cioè

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ t.c. } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$$

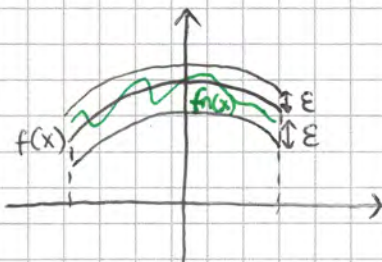
\hookrightarrow dipende da x

Per introdurre un concetto di uniformità nella convergenza, bisogna imporre che \bar{n} non dipenda da x .

Si dice che f_n converge a f uniformemente su I se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ t.c. } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}, \forall x \in I$$

$\rightarrow \bar{n}$ non dipende da x .



Modo equivalente per caratterizzare la convergenza uniforme.

Definisco la NORMA INFINITO

$$f: I \rightarrow \mathbb{R} \quad \|f\|_{\infty} := \sup_{x \in I} |f(x)|$$

Si dice che f_n converge uniformemente a f se

$$\|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

Operativamente quando abbiamo una successione di funzioni f_n ,

i) prima si determina il limite puntuale $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$

ii) si studia $\|f_n - f\|_{\infty}$ guardando se è infinitesima

$$T(\Phi_n) \rightarrow T(\Phi) \Leftrightarrow T(\Phi_n) - T(\Phi) \rightarrow 0$$

Poiché T è lineare si può scrivere $T(\Phi_n - \Phi) \rightarrow 0$, che implica che

$$\Phi_n - \Phi \xrightarrow{\mathcal{D}} 0, \text{ quindi basta vedere che } \Phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \Rightarrow T(\Phi_n) \rightarrow 0$$

(definizione alternativa di continuità)

Lo spazio è isotropo, la continuità in un punto implica la continuità in tutti i punti.

Notazione | $T(\Phi)$

$\langle T, \Phi \rangle$ (non è un prodotto scalare)

• Esempi di distribuzioni

Es 1 | **Delta di Dirac** → segnale impulsivo, rappresentabile i fenomeni puntiformi

$$x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\delta_{x_0}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle \delta_{x_0}, \Phi \rangle := \Phi(x_0)$$

Verifica della linearità

$$\langle \delta_{x_0}, \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 \rangle = \lambda_1 \Phi_1(x_0) + \lambda_2 \Phi_2(x_0) = \lambda_1 \langle \delta_{x_0}, \Phi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \delta_{x_0}, \Phi_2 \rangle$$

Verifica della continuità

$$\Phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \Rightarrow \langle \delta_{x_0}, \Phi_n \rangle \rightarrow 0 ?$$

$$\langle \delta_{x_0}, \Phi_n \rangle = \Phi_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ poiché converge uniformemente quindi anche puntualmente}$$

$\langle \delta_{x_0}, \Phi_n \rangle = \Phi_n(x_0)$, poiché per ipotesi $\Phi_n \rightarrow 0$ uniformemente in \mathcal{D} e la convergenza uniforme implica quella puntuale, si ha che $\Phi_n(x_0) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, quindi

Definizione | I intervallo $\subseteq \mathbb{R}$ $\langle \delta_{x_0}, \Phi_n \rangle \rightarrow 0 \Rightarrow$ continuità.

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **LOCALMENTE INTEGRABILE** su I se

$\forall [a, b] \subseteq I$ si ha che

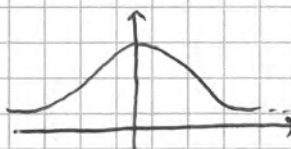
$$\int_a^b |f(x)| dx < +\infty$$

$R^1_{loc}(I)$ insieme delle funzioni localmente integrabili su I

$R^1(I)$ funzioni assolutamente integrabili su I . $R^1(I) \subseteq R^1_{loc}(I)$

Esempio | $I = \mathbb{R}$

$$\frac{1}{1+x^2}$$



per essere sicuro che quello che ho scritto è una distribuzione

→ deve essere integrabile

→ lineare

→ continua

Si noti che $\exists r : \phi(x) = 0$ se $|x| > r$

$$\text{Quindi } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x)dx = \int_{-r}^{+r} f(x)\phi(x)dx$$

Si può dimostrare che, essendo $f \in R^1_{loc}(\mathbb{R})$ e ϕ continua, anche il prodotto $f \cdot \phi \in R^1_{loc}(\mathbb{R})$, quindi l'integrale ha senso e

la definizione è ben posta $\langle T_f, \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 \rangle = \lambda_1 \langle T_f, \phi_1 \rangle + \lambda_2 \langle T_f, \phi_2 \rangle$

Linearità di $T_f \rightarrow$ esercizio $\langle T_f, \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)[\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2]dx = \lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi_1(x)dx + \lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi_2(x)dx = \lambda_1 \langle T_f, \phi_1 \rangle + \lambda_2 \langle T_f, \phi_2 \rangle$

Continuità \rightarrow sfruttiamo il fatto che sia lineare, dobbiamo

dimostrare $\phi_n \rightarrow 0 \Rightarrow \langle T_f, \phi_n \rangle \rightarrow 0$?

$$|\langle T_f, \phi_n \rangle| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi_n(x)dx \right|$$

La convergenza di ϕ_n a ϕ garantisce che le ϕ_n abbiano supporti equilimitati, quindi sappiamo che $\exists r > 0$:

$$\phi_n(x) = 0 \quad \forall |x| > r \quad \forall n$$

$$\Rightarrow |\langle T_f, \phi_n \rangle| = \left| \int_{-r}^{+r} f(x)\phi_n(x)dx \right| \leq \int_{-r}^{+r} |f(x)| |\phi_n(x)| dx$$

$$\leq \int_{-r}^{+r} |f(x)| \|\phi_n\|_{\infty} dx = \|\phi_n\|_{\infty} \int_{-r}^{+r} |f(x)| dx$$

considero il sup

Per la convergenza uniforme, $\|\phi_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ e poiché so che $\int_{-r}^{+r} |f(x)| dx < +\infty$ poiché è localmente integrabile

$$\text{ottenso che } \|\phi_n\|_{\infty} \int_{-r}^{+r} |f(x)| dx = 0$$

Quindi per confronto

$$|\langle T_f, \phi_n \rangle| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

ESEERCITAZIONE

6/05/14

• Integrale improprio

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2 - 2\pi i \omega t} dt \quad \omega, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} e^{-\alpha t^2} e^{-2\pi i \omega t} dt$$

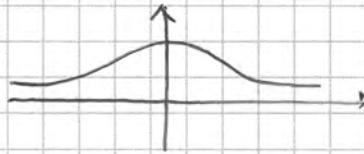
$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} e^{-\alpha \left[t^2 + \frac{2\pi i \omega t}{\alpha} \right]} dt$$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} e^{-\alpha \left[\left(t + \frac{i\omega\pi}{\alpha} \right)^2 + \frac{\omega^2\pi^2}{\alpha^2} \right]} dt$$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} e^{-\frac{\alpha\omega^2\pi^2}{\alpha^2}} \int_{-R}^{+R} e^{-\alpha \left[t + \frac{i\omega\pi}{\alpha} \right]^2} dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} dt$$

$$\rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx dy$$



$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{B_R(0)} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx dy$$

$B_R(0)$ → circ di raggio R e centro 0

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-\alpha(\rho^2)} \rho d\rho d\theta$$

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta \end{aligned}$$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho e^{-\alpha \rho^2} d\rho$$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} 2\pi \left[\frac{e^{-\alpha \rho^2}}{-2\alpha} \right]_0^R = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\pi e^{-\alpha R^2} - \pi}{-\alpha} = \frac{\pi}{\alpha}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\alpha x^2} \cdot e^{-\alpha y^2} dx dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha y^2} dy = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2} dt \right)^2 = \frac{\pi}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Ne considero il modulo

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\frac{w\pi}{\alpha}} e^{-\alpha(R+it)^2} i dt \right| &\leq \int_0^{\frac{w\pi}{\alpha}} |e^{-\alpha(R+it)^2}| dt \\ &= \int_0^{\frac{w\pi}{\alpha}} |e^{-\alpha(R^2-t^2+2Rit)}| dt = \int_0^{\frac{w\pi}{\alpha}} e^{-\alpha R^2} |e^{-\alpha 2Rit}| e^{\alpha t^2} dt \\ &= e^{-\alpha R^2} \underbrace{\int_0^{\frac{w\pi}{\alpha}} e^{\alpha t^2} dt}_{\text{costante}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Quindi

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} e^{-\frac{w^2\pi^2}{\alpha}} \int_{-R}^R e^{-\alpha z^2} dz = e^{-\frac{w^2\pi^2}{\alpha}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iat}}{1+t^2} dt \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

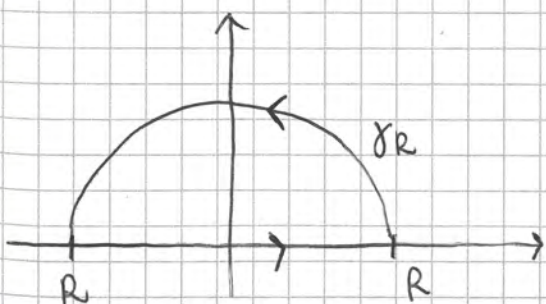
$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{e^{iat}}{1+t^2} dt$$

Controlliamo la convergenza

$$\left| \int_{-R}^R \frac{e^{iat}}{1+t^2} dt \right| \leq \int_{-R}^R \left| \frac{e^{iat}}{1+t^2} \right| dt = \int_{-R}^R \frac{1}{1+t^2} dt \quad \text{per } R \rightarrow +\infty \text{ converge}$$

$$\downarrow \text{converge} \quad = \arctan t \Big|_{-R}^R = \arctan R - \arctan(-R)$$

$$\xrightarrow{R \rightarrow +\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$



$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{iat}}{1+t^2} dt = 2\pi i \operatorname{Res} f(i)$$

$$= 2\pi i \frac{e^{iat}}{t+i} \Big|_{t=i} = \pi e^{-\alpha}$$

$$\alpha < 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha t}}{1+t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i(-\alpha)t^2}}{1+t^2} dt$$

pongo $s = -t$
 $ds = -dt$

$$\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{e^{i(-\alpha)s}}{1+s^2} (-ds) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(-\alpha)s}}{1+s^2} ds = \pi e^{-(-\alpha)} = \pi e^{-|\alpha|}$$

9/05/14

Derivata di una distribuzione

Nel caso delle distribuzioni non è possibile partire dalla nozione di rapporto incrementale non essendo presente il parametro legato al tempo.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1
 $f, f' \in \mathcal{R}'_{loc}(\mathbb{R})$

Si possono considerare T_f e $T_{f'}$ ← distribuzione regolare

$\phi \in \mathcal{D}$ $\phi(x) = 0$ se $|x| > r$ (supporto compatto)

$$\langle T_{f'}, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \phi(x) dx = \int_{-r}^r f'(x) \phi(x) dx = f(x) \phi(x) \Big|_{-r}^r - \int_{-r}^r f(x) \phi'(x) dx$$

↑ potrebbe $\phi(x)$ e al supp. compatto posso scrivere ↑ (r)
↑ integrazione per parti ↑ nullo perché $\phi(x)$ è nulla in r e $-r$.

$$= - \langle T_f, \phi' \rangle$$

$$\Rightarrow \langle T_{f'}, \phi \rangle = - \langle T_f, \phi' \rangle$$

Questo risultato suggerisce la seguente definizione:

Sia $T \in \mathcal{D}'$.

Si definisce **derivata di T** la distribuzione T' data da

$$\langle T', \phi \rangle := - \langle T, \phi' \rangle$$

Osservazione | Se $T = T_f$ con $f \in C^1$

$$\langle T_{f'}, \phi \rangle = - \langle T_f, \phi' \rangle = \langle T_{f'}, \phi \rangle$$

Quindi, nel caso di distribuzioni regolari $T_{f'} = T_f'$

Ho definito il concetto della derivata di una distribuzione, senza il vincolo di derivabilità.

$$\text{Quindi } \langle T'_H, \Phi \rangle = \Phi(0) = \langle \delta_0, \Phi \rangle$$

$\Rightarrow \boxed{T'_H = \delta_0}$ La derivata della funzione di Heaviside è la δ di Dirac in 0.

Se $c \in \mathbb{R}$ costante, se moltiplico Heaviside per una costante

$$T'_{cH} = c\delta_0$$

→ la costante c non viene persa, permette di "graduare" l'azione della δ , cosa che, tornando ai problemi affrontati all'inizio della trattazione (condensatore, distribuzione di carica) era uno dei punti critici.

In generale vale il risultato seguente.

• Proposizione

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 tranne che in un punto x_0 dove presenta un salto di ampiezza $l = f(x_0^+) - f(x_0^-)$. Supponiamo anche che $f' \in \mathcal{R}'_{loc}(\mathbb{R})$.

Allora

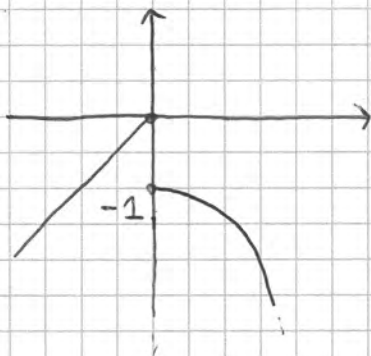
$$\boxed{T'_f = T'_{f'} + l\delta_{x_0}}$$

I salti creano δ quando si deriva.

Esempio | Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ -e^x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

N.B. Disegna la funzione



T'_f ? → osservo che f è derivabile per $x \neq 0$ e vale $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ -e^x & \text{se } x > 0 \end{cases}$

$$\text{Quindi } T'_f = T'_{f'} - \delta_0$$

$$= -\langle T, (\psi\phi)' - \psi'\phi \rangle = -\langle T, (\psi\phi)' \rangle + \langle T, \psi'\phi \rangle$$

lineare

$$= \langle T', \psi\phi \rangle + \langle \psi'T, \phi \rangle = \langle \psi T', \phi \rangle + \langle \psi'T, \phi \rangle$$

$$= \langle \psi T' + \psi'T, \phi \rangle = \langle (\psi T)'\phi \rangle$$

$$\Rightarrow (\psi T)' = \psi T' + \psi'T$$

■

Le due ~~per~~ operazioni non commutano, le parentesi sono importanti

Esempio 1

$$\psi(x) = \sin x \quad T = \delta_{\pi/2}$$

$$\psi T, (\psi T)', \psi'T, \psi T'$$

$$\langle \psi T, \phi \rangle = \langle T, \psi\phi \rangle = \langle \delta_{\pi/2}, \sin(x)\phi(x) \rangle = \phi(\pi/2) = \langle \delta_{\pi/2}, \phi \rangle$$

$$\text{Quindi } \sin x \delta_{\pi/2} = \delta_{\pi/2}$$

$$(\sin x \delta_{\pi/2})' = \delta'_{\pi/2}$$

$$\psi' = \cos x$$

$$\cos x \delta_{\pi/2} = 0$$

$$\psi T' \rightarrow \langle \sin x \delta'_{\pi/2}, \phi \rangle = \langle \delta'_{\pi/2}, \sin x \phi(x) \rangle$$

$$= -(\cos x \phi(x) + \sin(x) \phi'(x)) \Big|_{x=\pi/2} = -\phi'(\pi/2)$$

$$= \langle \delta'_{\pi/2}, \phi \rangle$$

$$\Rightarrow \sin x \delta'_{\pi/2} = \delta'_{\pi/2}$$

In generale, se $\psi \in C^\infty$

$$\psi \delta_{x_0} = \psi(x_0) \delta_{x_0}$$

(dimostrazione per esercizio)

Determinare inoltre

$$\langle \psi \delta_{x_0}, \phi(x) \rangle = \langle \delta_{x_0}, \psi(x) \phi(x) \rangle$$

$$\psi \delta_{x_0}' =$$

$$= \psi(x_0) \phi'(x_0) = \langle \psi(x_0) \delta_{x_0}, \phi(x_0) \rangle$$

$$\langle \psi(x) \delta'_{x_0}, \phi(x) \rangle = \langle \delta'_{x_0}, \psi(x) \phi(x) \rangle = -(\psi(x) \phi(x))' \Big|_{x_0}$$

$$= -\psi'(x_0) \phi(x_0) - \psi(x_0) \phi'(x_0)$$

$$= -\langle \psi'(x_0) \delta_{x_0}, \phi(x) \rangle + \langle \psi(x_0) \delta'_{x_0}, \phi(x) \rangle$$

Si può considerare T_{fn}

$$\langle T_{fn}, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) \phi(x) dx = \int_{-1/2n}^{1/2n} n \cdot \phi(x) dx = n \int_{-1/2n}^{1/2n} \phi(x) dx$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n} \int_{-1/2n}^{1/2n} \phi(x) dx}_{\text{è la media integrale di } \phi \text{ in } [-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]}$$

Teorema della media integrale

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Per il teorema della media integrale, essa è sempre uguale al valore della funzione in un punto dell'intervallo, e quindi uguale a $\phi(c_n)$ dove $c_n \in [-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]$

$$\langle T_{fn}, \phi \rangle = \phi(c_n)$$

Per $n \rightarrow +\infty$, $c_n \rightarrow 0$ e $\phi(c_n) \rightarrow \phi(0)$

Quindi $\hookrightarrow c_n \rightarrow 0$ poiché l'intervallo $(-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n})$ si restringe sempre di più

$$\langle T_{fn}, \phi \rangle = \phi(c_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \phi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle$$

Quindi

$$T_{fn} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \delta_0$$

$T_{qfn} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} q \delta_0 \Rightarrow$ la δ è quindi l'oggetto adatto per modellizzare le distribuzioni di carica

Esempio | Sia $X_n \in \mathbb{R}$ successione di numeri reali t.c. $X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ e consideriamo

$T_n = \delta_{X_n}$ a cosa converge?

Studiamo l'azione di tale distribuzione su una funzione test

$$\langle \delta_{X_n}, \phi \rangle = \phi(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 = \langle 0, \phi \rangle$$

$$\delta_{X_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$$

Poiché le ϕ sono funzioni a supporto limitato il $\lim \rightarrow \infty$ porta al valore zero

avremo che $\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \phi(x_0) = 0$.

$\rightarrow \delta_{x_0}$ è nulla su $\mathbb{R} \setminus \{x_0\} \Rightarrow N_{\delta_{x_0}} = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$

• Proprietà del supporto

1) $N_{\lambda T + \mu S} \supseteq N_T \cap N_S$

Quindi $\text{supp}(\lambda T + \mu S) \subseteq \text{supp}(T) \cup \text{supp}(S)$

Il supporto della combinazione lineare è contenuto nell'unione dei supporti

2) $N_{T(x-x_0)} = N_T + x_0$ perché $\langle T(x-x_0), \phi(x) \rangle = \langle T, \phi(x+x_0) \rangle$

$\text{supp}(T(x-x_0)) = \text{supp}(T) + x_0$

$T = \delta_{\bar{x}}$

$T(x-x_0)?$

$\langle T(x-x_0), \phi \rangle = \langle T, \phi(x+x_0) \rangle = \phi(\bar{x}+x_0) = \langle \delta_{\bar{x}+x_0}, \phi \rangle$

$\Rightarrow \delta_{\bar{x}}(x-x_0) = \delta_{\bar{x}+x_0}$

$\text{supp} \delta_{\bar{x}}(x-x_0) = \{\bar{x}+x_0\}$

$\text{supp} \delta_{\bar{x}} = \{\bar{x}\}$

3) $N_{T'} \supseteq N_T$

$\text{supp}(T') \subseteq \text{supp}(T)$

Convolutione

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

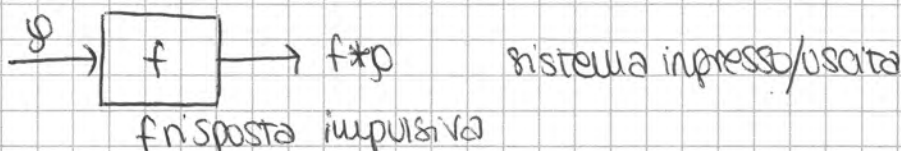
$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Convolutione di f e g : $f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y) dy = (g * f)(x)$

(è commutativo)

In matematica serve a regolarizzare \rightarrow Sono filtri che possono tagliare certe frequenze



$$(3) T: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\langle T, \phi \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \phi(x) dx + \int_{-2}^3 e^{ix} \phi(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[-1,1]} x^2 \phi(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[-2,3]} e^{ix} \phi(x) dx$$

somma di due distribuzioni regolari

T è somma di due distribuzioni regolari \rightarrow è una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$

$$(4) T: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle T, \phi \rangle = 1$$

non è una distribuzione poiché non è lineare

In particolare non è vero che $\langle T, 0 \rangle = 0$.

$$(5) T: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle T, \phi \rangle = \int_0^1 x \cdot \phi'(x) dx \quad \text{non è una distribuzione regolare}$$

- è lineare

- convergenza $\phi_n \rightarrow \phi$

$$T\phi_n^{(p)} \rightarrow T\phi^{(p)}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \phi'(x) dx &= x\phi(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \phi(x) dx \\ &= 1 \cdot \phi(1) - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,1]}^{(x)} \phi(x) dx \\ &= \langle \delta_1, \phi \rangle - \langle T_{\mathbb{1}_{[0,1]}^{(x)}}, \phi \rangle \in \mathcal{D}' \end{aligned}$$

$$(5) (Tx^2)'$$

$$\langle T', \phi \rangle = -\langle T, \phi' \rangle$$

$$\text{se } f \in C^1 \quad Tf$$

$$f' \in C \quad Tf' \Rightarrow (Tf)' = Tf' \quad \text{nel caso di distribuzioni regolari}$$

$$\text{Quindi } (Tx^2)' = T_{2x}$$

$$f(x) = e^x \mathbb{1}_{[0,1]}(x) = e^x \rho_1(x - 1/2) = e^x [H(x) - H(x-1)]$$

$$= e^x H(x) - e^x H(x-1)$$

$$(TH)' = \delta_0$$

$$(T_{H(x-1)})' = \delta_1$$

$$e^x \in C^\infty \rightarrow T_{e^x H} = e^x T_H$$

$$\langle T_{e^x H}, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x H(x) \phi(x) dx = \langle T_H, e^x \phi \rangle = \langle e^x T_H, \phi \rangle$$

$$h \in C^\infty \quad T \in \mathcal{D}'$$

$$(hT)' = h'T + hT'$$

sfruttando la linearità dell'integrale

$$T_f = T_{e^x H - e^x H(x-1)} \stackrel{\downarrow}{=} T_{e^x H} - T_{e^x H(x-1)} = e^x T_H - e^x T_{H(x-1)}$$

$$(T_f)' = (e^x T_H - e^x T_{H(x-1)})' = (e^x T_H)' - (e^x T_{H(x-1)})'$$

$$= (e^x)' T_H + e^x (T_H)' - (e^x)' T_{H(x-1)} - e^x (T_{H(x-1)})'$$

$$= e^x T_H + e^x \delta_0 - e^x T_{H(x-1)} - e^x \delta_1$$

$$\langle f(x) \delta_{x_0}, \phi \rangle = \langle \delta_{x_0}, f(x) \phi(x) \rangle = f(x_0) \phi(x_0)$$

$$\boxed{f(x) \delta_{x_0} = f(x_0) \delta_{x_0}}$$

$$\rightarrow e^x T_H + e^x \delta_0 - e^x T_{H(x-1)} - e^x \delta_1$$

$$= e^x T_H + \delta_0 - e^x T_{H(x-1)} - e \delta_1$$

ricordando che $f' = e^x [H(x) - H(x-1)]$ ottengo lo stesso risultato precedente

$$(7) \quad f(x) = \sqrt[3]{x}$$



$$(Tf)' = T_{f'}$$

$$f \in \mathcal{R}'_{loc}$$

$$f' = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3} x^{2/3}$$

$$\rightarrow (Tf)' = T_{f'}$$

$$(T_{\frac{1}{3} x^{2/3}})' = T_{\frac{1}{3}}$$

$$-\frac{T}{2} < x-y < \frac{T}{2}$$

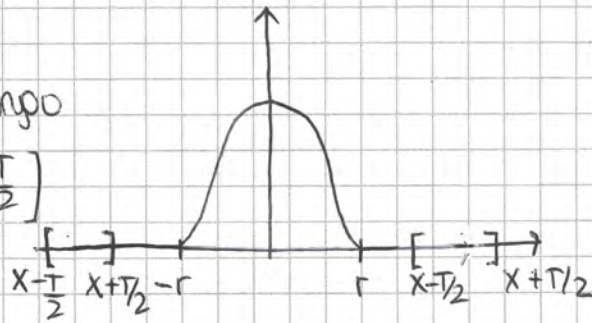
$$-\frac{T}{2} < y-x < \frac{T}{2}$$

→ $x - \frac{T}{2} < y < x + \frac{T}{2}$ → in questo intervallo $P_T(x-y)$ vale 1

$$(P_r * P_T)(x) = \int_{x-T/2}^{x+T/2} P_r(y) dy$$

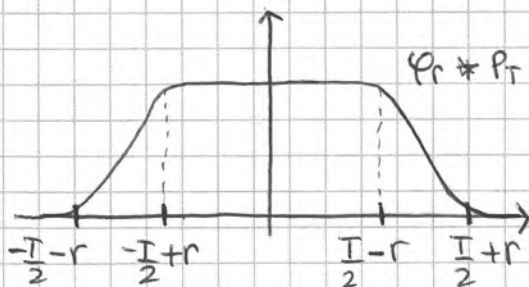
Supponiamo che $T > 2r$

Man mano che x si sposta lungo l'asse, l'intervallo $[x - \frac{T}{2}, x + \frac{T}{2}]$ può inglobare o meno il supporto di P_r .



$$(P_r * P_T)(x) = \int_{x-T/2}^{x+T/2} P_r(y) dy = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -T/2 - r \\ 1 & \text{se } -T/2 + r < x < T/2 - r \\ 0 & \text{se } x > T/2 + r \end{cases}$$

Cosa capita negli intervalli intermedi?



$P_r * P_T$ è \mathcal{D}

La convoluzione è un'operazione regolarizzante

La convoluzione $P_r * P_T$ ha dato come risultato una "porta smussata", ne ha eliminato le discontinuità.

In generale se $f \in \mathcal{R}'_{loc}$ qualunque e la si convolve con P_r funzione test

$$(P_r * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) P_r(x-y) dy$$

di fatto l'integrale è tra

$$-r < x-y < r$$

la funzione test "media" $f(x)$

$$-r < y-x < r$$

anche nei suoi punti di discontinuità
→ la regolarizza.

$$\rightarrow x-r < y < x+r$$

$\tilde{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R})$ ($\varphi \in C^\infty$, poiché nel caso di distribuz. regolari si hanno operazioni con integrali, la regolarità è conservata)

Se ipotizziamo che S è a supporto compatto, allora $\tilde{\varphi}$ è una funzione test. In effetti, se supponiamo che $\text{supp}(S) \in [a, b]$ e

$\text{supp}(\varphi) \in [c, d]$, allora $\text{supp}(x \mapsto \varphi(x+y)) = [c-y, d-y]$

Quindi se $d-y < a$ o $c-y > b$

$$y > d-a \quad \text{o} \quad y < c-b$$

$$\tilde{\varphi}(y) = 0$$

$$\text{supp } \tilde{\varphi} \subseteq [c-b, d-a]$$

Supporto della distribuzione traslata

$$\begin{aligned} c &< x+y < d \\ c-y &< x < d-y \end{aligned}$$

In tal caso la definizione è ben posta.

Quindi $T * S$ ha senso se S è a supporto compatto.

~~Perché per avere la distribuzione~~

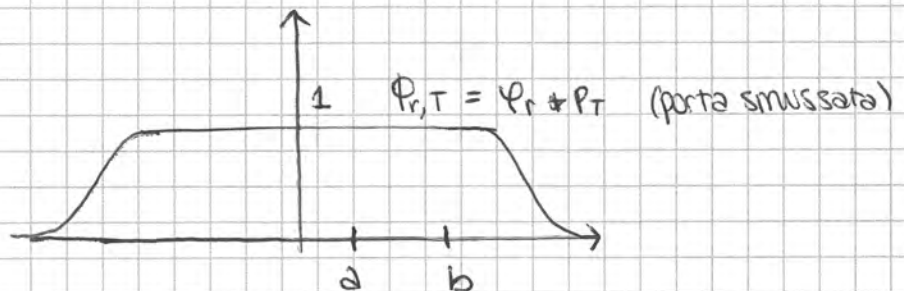
Cosa si può fare se invece è T a essere a supporto compatto?

• Distribuzioni a supporto compatto

$T \in \mathcal{D}'$ a supporto compatto e $\varphi \in C^\infty$.

Vogliamo dare un senso a $\langle T, \varphi \rangle$.

$$\text{supp}(T) \subseteq [a, b]$$



poniamo

$$\langle T, \varphi \rangle := \langle T, \varphi \varphi_{r,T} \rangle$$

$\varphi \varphi_{r,T}$ è una distribuzione perché il prodotto tra una funzione C^∞ e una distribuzione è ancora una distribuzione.

Perché φ_r nell'intervallo in cui appiisce T ($[a, b]$) vale 1, di fatto non modifica φ in quell'intervallo, la rende semplicemente a supporto compatto in modo che T possa aprirvi.

$\varphi_{r,T}$ è detta funzione di taglio.

È una buona definizione, nel senso che se prendiamo un'altra $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\delta_{x_0} * T = T * \delta_{x_0} = T(x - x_0)$$

per esercizio → verificare per la simmetria della convoluzione

Esempio

$$\delta'_{x_0} * T$$

$$\begin{aligned} \langle \delta'_{x_0} * T, \varphi \rangle &= \langle \delta'_{x_0}(y), \langle T(x), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= -\frac{d}{dy} \langle T(x), \varphi(x+y) \rangle \Big|_{y=x_0} \\ &= -\langle T(x), \varphi'(x+x_0) \rangle \\ &= \langle T'(x), \varphi(x+x_0) \rangle \\ &= \langle T'(x-x_0), \varphi(x) \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta'_{x_0} * T = T'(x-x_0)} \quad \text{derivata traslata.}$$

in particolare

$$\delta'_0 * T = T'$$

Per esercizio: caratterizzare $\delta^{(k)}_{x_0} * T \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Considero $T \in \mathcal{D}'$

$$\varphi_r \in \mathcal{D} \quad \text{supp}(\varphi_r) = [-r, r] \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_r(x) dx = 1$$

$T \varphi_r * T$ è una distribuzione regolare e

$$\begin{array}{ccc} T \varphi_r * T & \xrightarrow{\quad} & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ \delta_0 & & \end{array} \quad r \rightarrow 0$$

per $r \rightarrow 0$ converge a δ_0

Una distribuzione qualunque può essere approssimata a una regolare grazie alla convoluzione.

$$\delta^{(k)}_{x_0} * T$$

so che date due distribuzioni $S * T' = S' * T$, so inoltre che $\delta'_{x_0} * T = T'(x-x_0)$

$$\delta''_{x_0} * T = \delta'_{x_0} * T' = T''(x-x_0)$$

per induzione posso dire che $\delta^{(k)}_{x_0} * T = T^{(k)}(x-x_0)$

quindi

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \hat{f}(k/T) e^{-i \frac{k}{T} 2\pi x} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i 2\pi \omega x} dx$$

Quindi, se ciò che ho fatto fosse vero, si avrebbe

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i 2\pi \omega x} dx$$

dove

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx$$

Analogia con la serie di Fourier \rightarrow funzione espressa mediante il prodotto tra un coefficiente e un'armonica.
È una decomposizione spettrale in armoniche dove il periodo non è fissato

\rightarrow i coefficienti sono sempre dati da un prodotto scalare.

L'uguaglianza precedente non sarà sempre vera,

tuttavia sarà sempre sensato

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx$$

$\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è ben definita ed è detta la **trasformata di Fourier** di f .

NOTAZIONE $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$

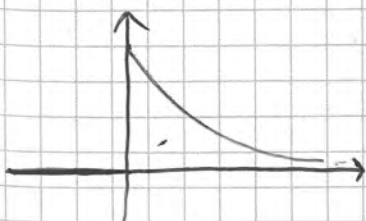
Si osservi in effetti che

$$|f(x) e^{-i 2\pi \omega x}| = |f(x)|$$

$f(x) e^{-i 2\pi \omega x}$ è assolutamente integrabile $\forall \omega \in \mathbb{R}$.

Esempio

$$f(x) = e^{-\alpha x} H(x) \quad \alpha > 0 \quad (\alpha \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0)$$



$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i 2\pi \omega x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} e^{-i 2\pi \omega x} dx \end{aligned}$$

$$= e^{-2\pi i \omega x_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2\pi i \omega y} dy$$

$$= e^{-2\pi i \omega x_0} \mathcal{F}(f)(\omega)$$

20/05/24

ESERCITAZIONE

(1) $f(x) = \log|x|$

T_f esiste?

$$\int_0^1 \log|x| dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 \log x dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[x \log x \Big|_{\delta}^1 - \int_{\delta}^1 x \frac{1}{x} dx \right]$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left\{ -\delta \log \delta - [1 - \delta] \right\} = 1$$

Quindi $\exists \int_0^1 \log|x| dx$ $\log x \in R^1_{loc}$

Si può parlare di distribuzione regolare associata a $\log|x|$: $T \log|x|$

$$\frac{\log x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \sqrt{x} \log x \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 0$$

quindi $\log x = \mathcal{O}((\sqrt{x})^{-1}) \in \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \rightarrow \exists \int_0^1 \log x dx$

calcolo la derivata della distribuzione

$$(T \log|x|)'$$

$$\frac{d}{dx} \log|x| = \frac{1}{x} \notin R^1_{loc}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx \text{ diverge}$$

Ne calcolo la derivata applicando la definizione

$$\langle (T \log|x|)', \varphi(x) \rangle = - \langle T \log|x|, \varphi'(x) \rangle$$

$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} \log|x| \varphi'(x) dx$$

$$\varphi \in \mathcal{D}, \text{supp } \varphi \subseteq [-R, R]$$

$$\text{supp } \varphi' \subseteq [-R, R]$$

$$= \int_{-R}^R \log|x| \varphi'(x) dx$$

$$= - \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[\int_{-R}^{-\delta} \log|x| \varphi'(x) dx + \int_{\delta}^R \log x \varphi'(x) dx \right]$$

$$T_n = \delta_{\frac{1}{n}}$$

$\varphi \in \mathcal{D}$

$$\langle \delta_{\frac{1}{n}}, \varphi \rangle \rightarrow \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow \varphi(0) \rightarrow \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

$\frac{1}{n} \rightarrow 0$, continuità \nearrow

Quindi $\delta_{\frac{1}{n}} \rightarrow \delta_0$

$$(2) T_n = n\delta_{-n} + \delta_{e^{-n}}$$

$$\begin{aligned} \langle T_n, \varphi \rangle &= \langle n\delta_{-n} + \delta_{e^{-n}}, \varphi \rangle \\ &= n\langle \delta_{-n}, \varphi \rangle + \langle \delta_{e^{-n}}, \varphi \rangle \\ &= n\varphi(-n) + \varphi(e^{-n}) \end{aligned}$$

φ è una funz. test a supporto compatto, quindi $\varphi(-n) = 0$

$$\langle T_n, \varphi \rangle = n\varphi(-n) + \varphi(e^{-n}) \rightarrow \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle \quad e^{-n} = 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

Quindi $T_n \rightarrow \delta_0$

$$(3) T_n = \delta_{(-2)^{3n} \log 2n}$$

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \varphi((-2)^{3n} \log 2n)$$

per n grande $(-2)^{3n} \log 2n \notin \text{supp } \varphi$,
quindi anche se $(-2)^{3n}$ ~~si~~ oscilla,
poiché in valore assoluto $\rightarrow +\infty$,
esce dal supporto della funz. test.

$$\text{Quindi } \langle T_n, \varphi \rangle = \varphi((-2)^{3n} \log 2n) = 0$$

$T_n \rightarrow 0$

$$(4) T_n = \delta_{(-1)^n}$$

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \varphi((-1)^n)$$

$$T_n \rightarrow T \text{ se } \forall \varphi \langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$$

La distribuzione non converge se $\exists \hat{\varphi} : \langle T_n, \hat{\varphi} \rangle$ non converge

Test

• $f = \text{sign } x^3 - \text{sign } x^4 + \text{sign } x^5$

A $(Tf)^{(2)} = 2\delta_0'$

B $(Tf)^{(2)} = (\delta_3)' - (\delta_4)' + (\delta_5)'$

C $4\delta_0' = (Tf)''$

D Tf non derivabile

• $T_n = e^x \text{sign}$

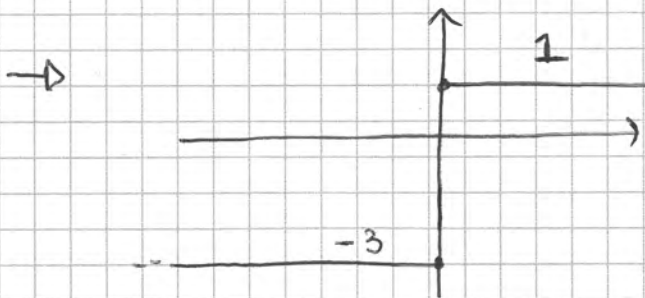
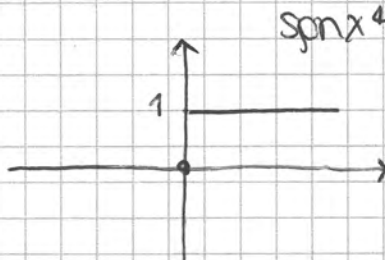
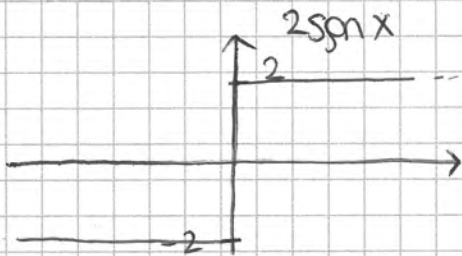
A $T_n \rightarrow 0$

B T_n non ammette limite

C $T_n \rightarrow \delta_0$

D $T_n \rightarrow 1$

$f = \text{sign } x^3 - \text{sign } x^4 + \text{sign } x^5 = \text{sign } x - \text{sign } x^4 + \text{sign } x$
 $= 2 \text{sign } x - \text{sign } x^4$



Quindi
 $(Tf)' = 4\delta_0$
 $(Tf)'' = 4\delta_0'$

$T_n = e^x \text{sign}$

$T_n = f(x) \delta_{x_n} = f(x_n) \delta_{x_n}$

$T_n = e^{ln n} \delta_{ln n} = n \delta_{ln n}$

Quindi T_n non converge.

$$(2) p_n(x) = \frac{\psi(nx)}{\int_{\mathbb{R}} \psi(nx) dx}$$

$$\text{con } \psi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$T_{p_n} \rightarrow \delta_0$$

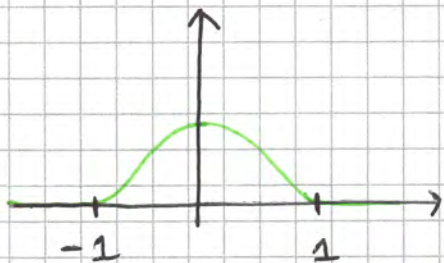
Disegno $\psi(x)$

$$\text{se } x \in (-1, 1) \\ \psi'(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} \left(-\frac{1}{(x^2-1)^2} \right) 2x = -e^{\frac{1}{x^2-1}} \cdot \frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \psi(x) = 0$$

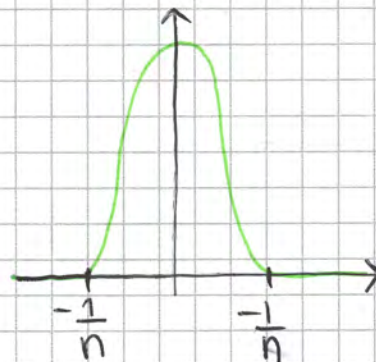
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \psi'(x) = 0$$

→ il pezzo costante e il pezzo esponenziale si incollano bene, la derivata prima è continua.
In realtà $\psi(x) \in C^\infty$



$$p_n(x) = 0 \quad \text{se } |nx| \geq 1 \rightarrow |x| \geq \frac{1}{n}$$

$$p_n(0) = \frac{\psi(0)}{\int_{\mathbb{R}} \psi(nx) dx} \rightarrow +\infty$$



$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} p_n(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi(nx)}{\int_{\mathbb{R}} \psi(nx) dx} dx \\ &= \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \psi(nx) dx} \cdot \int_{\mathbb{R}} \psi(nx) dx = 1 \end{aligned}$$

Vogliamo mostrare che $T_{f_\sigma} \rightarrow \delta_0$ per $\sigma \rightarrow 0$

cioè che $\langle T_{f_\sigma}, \varphi \rangle \rightarrow \langle \delta_0, \varphi \rangle$ per $\sigma \rightarrow 0$, che è equivalente a

$$|\langle T_{f_\sigma}, \varphi \rangle - \langle \delta_0, \varphi \rangle| \rightarrow 0$$

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_\sigma(x) \varphi(x) dx - 1 \cdot \varphi(0) \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_\sigma(x) \varphi(x) dx - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_\sigma(x) dx}_{1} \cdot \varphi(0) \right|$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_\sigma(x) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right|$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right|$$

poniamo $\frac{x}{\sigma} = y \rightarrow x = \sigma y \rightarrow dx = \sigma dy$

$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2}} [\varphi(\sigma y) - \varphi(0)] \sigma dy \right|$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{-\sigma^*} + \int_{-\sigma^*}^{\sigma^*} + \int_{\sigma^*}^{+\infty} \right|$$

$$\leq \left| \int_{-\infty}^{-\sigma^*} \right| + \left| \int_{-\sigma^*}^{\sigma^*} \right| + \left| \int_{\sigma^*}^{+\infty} \right|$$

$$\left| \int_{-\sigma^*}^{\sigma^*} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2}} [\varphi(\sigma y) - \varphi(0)] \sigma dy \right|$$

$$\leq \int_{-\sigma^*}^{\sigma^*} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} |\varphi(\sigma y) - \varphi(0)| dy$$

↓ th. di Lagrange

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma^*}^{\sigma^*} e^{-\frac{y^2}{2}} |\varphi'(y\sigma)| \cdot |\sigma y| dy$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\varphi'\|_\infty \int_{-\sigma^*}^{\sigma^*} e^{-\frac{y^2}{2}} \sigma |y| dy$$

$T \in \mathcal{D}'?$ → mostrare linearità e continuità

$$\langle T, a\varphi + b\psi \rangle = a\langle T, \varphi \rangle + b\langle T, \psi \rangle \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\varphi, \psi \in \mathcal{D}, \exists R / \text{supp } \varphi, \text{supp } \psi \subseteq [-R, R] \quad R \in \mathbb{N}$$

$$\langle T, a\varphi + b\psi \rangle = \sum_{n=-R}^R [a\varphi(n) + b\psi(n)] = a \sum_{n=-R}^R \varphi(n) + b \sum_{n=-R}^R \psi(n)$$

↓
la somma finita è lineare

$$= a\langle T, \varphi \rangle + b\langle T, \psi \rangle \rightarrow \text{è lineare}$$

Il treno di impulsi è una somma infinita di δ , ma applicandolo a una funzione test, che ha supporto compatto per definizione, diventa una somma finita.

T è continua?

$\forall \varphi_n \rightarrow \varphi$ uniformemente

$T\varphi_n \rightarrow T\varphi$?

$\varphi_n \rightarrow \varphi$ uniformemente $\exists [-R, R]$ $\text{supp } \varphi_n \subseteq [-R, R]$

$$\langle T, \varphi_n \rangle = \sum_{k=-R}^R \varphi_n(k) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \quad \sum_{k=-R}^R \varphi(k) = \langle T, \varphi \rangle$$

$\forall k \quad \varphi_n(k) \rightarrow \varphi(k)$ perché $\varphi_n \rightarrow \varphi$

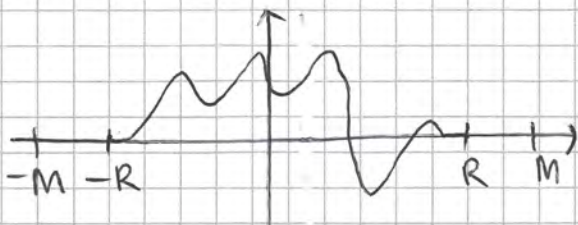
⇒ il treno di impulsi è una distribuzione

$$T_M = \sum_{k=-M}^M \delta_k \quad T_M \rightarrow T \quad \text{questa successione di distribuzioni tende al treno di impulsi}$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle T_M, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$$

$$\langle T_M, \varphi \rangle - \langle T, \varphi \rangle \rightarrow 0$$

$$\sum_{k=-M}^M \varphi(k) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(k) = \sum_{k=-M}^M \varphi(k) - \sum_{k=-R}^R \varphi(k) \xrightarrow{\text{per } M \text{ grande } R} \sum_{k=-R}^R \varphi(k) - \sum_{k=-R}^R \varphi(k)$$



se $-a < x < +a$ $p_a(x) * p_a(x) = \int_{-a/2}^x 1 \cdot dx = x + a/2$

TEST

$(Tf)' = ?$

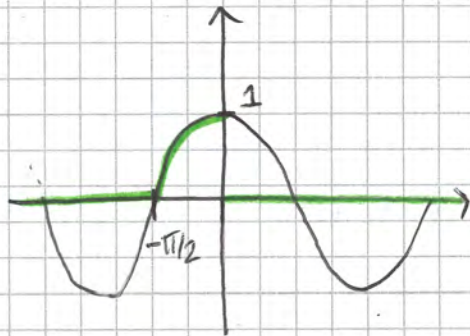
$f(x) = (\cos x) \mathbb{1}_{[-\pi/2, 0]}(x)$

A $T(-\sin x) \mathbb{1}_{[-\pi/2, 0]} + \delta_{-\pi/2} + \delta_0$

B Tf non è derivabile

C $T(-\sin x) \mathbb{1}_{[-\pi/2, 0]} - \delta_0$

D $T-\sin x$



27/05/14

TRASFORMATE DI FOURIER

$f \in R^1(\mathbb{R})$ $\lambda \neq 0$

$\mathcal{F}(f(\lambda x))(w) = \frac{1}{|\lambda|} \mathcal{F}(f)\left(\frac{w}{\lambda}\right)$

$\lambda = -1$

$\mathcal{F}(f(-x))(w) = \mathcal{F}(f)(-w)$

- Corollario: f pari $\Rightarrow \mathcal{F}(f)$ pari
- f dispari $\Rightarrow \mathcal{F}(f)$ dispari

Proposizione

$f \in R^1(\mathbb{R})$, Allora

\hat{f} : trasformata di Fourier $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$

- 1) \hat{f} è continua su tutto \mathbb{R}
- 2) $\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|\hat{f}\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$
- 3) $\lim_{w \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(w) = 0$

Lemma di Riemann-Lebesgue

$$\|\hat{f}\|_{\infty} = \sup_{w \in \mathbb{R}} |\hat{f}(w)| \quad \rightarrow \quad |e^{-2\pi i w x}| = 1$$

$$|\hat{f}(w)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i w x} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \|\hat{f}\|_1$$

$$\text{Quindi } \|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|\hat{f}\|_1$$

Il punto (3) non viene dimostrato in tale generalità

• Proposizione

Sia $f \in \mathbb{R}^1$, derivabile con $f' \in \mathbb{R}^1$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(f')(w) = 2\pi i w \mathcal{F}(f)(w)$$

(derivare \rightarrow moltiplicare per $2\pi i w$)

• Lemma

$f \in \mathbb{R}^1$ derivabile con $f' \in \mathbb{R}^1$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

Dimostrazione della proposizione 1

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f')(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-2\pi i w x} dx \\ &= \underbrace{f(x) e^{-2\pi i w x}}_{\substack{\text{è nullo per il lemma} \\ \text{di cui sopra}}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (-2\pi i w) e^{-2\pi i w x} dx \\ &= -(-2\pi i w) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i w x} dx \\ &= 2\pi i w \mathcal{F}(f)(w). \end{aligned}$$

• Corollario

$f \in \mathbb{R}^1$ derivabile con $f' \in \mathbb{R}^1$

$$\Rightarrow \lim_{w \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(w) = 0$$

Dimostrazione

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{2\pi i w} \mathcal{F}(f')(w) \text{ dalla proposizione precedente}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \omega} \left(f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx \right) \\
 &= - \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx \\
 &= - \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}(f)(\omega)
 \end{aligned}$$

GENERALIZZAZIONE

• Corollario 1

Sia $f \in \mathcal{R}^1$ derivabile k volte con $f', f'', \dots, f^{(k)} \in \mathcal{R}^1$
 $\Rightarrow \mathcal{F}(f^{(k)})(\omega) = (2\pi i \omega)^{(k)} \mathcal{F}(f)(\omega)$

• Corollario 2

Sia $f \in \mathcal{R}^1$, $x^j f(x) \in \mathcal{R}^1$ per $j=1, 2, \dots, k$
 $\Rightarrow \mathcal{F}(f)$ è di classe C^k e vale

$$\mathcal{F}(x^k f(x))(\omega) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^k \frac{d^k}{d\omega^k} \mathcal{F}(f)(\omega)$$

Derivare rispetto a $x \rightarrow$ moltiplicare per ω

Moltiplicare per $x \rightarrow$ derivare rispetto a ω

Trasformata di Fourier \rightarrow scambia la regolarità della funzione con il comportamento della ~~trasf.~~ transf. all'infinito

Si osservi che il corollario 1 implica che

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{(2\pi i \omega)^k} \underbrace{\mathcal{F}(f^{(k)})(\omega)}_0 \quad f \in C^k$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^k}\right) \text{ per } \omega \rightarrow \pm \infty$$

Se invece $f \in \mathcal{R}^1$

$$f(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{k+2}}\right) \text{ per } x \rightarrow \pm \infty$$

$$\rightarrow x^j f(x) \in \mathcal{R}^1 \quad \forall j=1, 2, \dots, k$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(f) \text{ è di classe } C^k$$

Tanto più la funzione è regolare, tanto più la sua trasformata va velocemente a zero all'infinito (fisicamente: se una funzione è regolare non ha energia ad alte frequenze)

Tanto più velocemente va a zero la funzione all'infinito, tanto più è regolare la sua trasformata

$e^{-x} \notin \mathcal{Y}$ ($x \rightarrow -\infty \rightarrow +\infty$)

$e^{-|x|} \notin \mathcal{Y}$ poiché non è C^∞ (non è derivabile nell'origine)

$\frac{1}{1+x^6} \in C^\infty$ ma $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^6 \cdot \frac{1}{1+x^6} = 1 \rightarrow \notin \mathcal{Y}$

Esercizio / Dire, mostrando la risposta, quali delle seguenti funzioni

sono in \mathcal{Y}

- 1) $\sin x$ 2) $(\sin x)e^{-x^2}$ 3) $\cos e^{-x^2}$ 4) $(\sin e^{5x^2}) \cdot e^{-x^2}$

5) $\frac{1}{1+e^{x^2}}$

• Proprietà elementari di \mathcal{Y}

Osservazione 1:

$\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ e tale che $x^h \phi^{(k)}(x)$ è limitato su $\mathbb{R} \forall h, k$

Allora $\phi \in \mathcal{Y}$

infatti, possiamo scrivere

$$x^h \phi^{(k)}(x) = \frac{1}{x} \underbrace{x^{h+1} \phi^{(k)}(x)}_{\text{limitato}} \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow \pm\infty$$

↓
infinitesimo

Osservazione 2

$\phi \in \mathcal{Y} \implies \phi \in \mathcal{R}^1$

Basta notare che $x^2 \phi(x)$ è limitata, quindi $\phi(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Quindi, per confronto asintotico

per $x \rightarrow \pm\infty$

ϕ è assolutamente integrabile

• Proposizione

$\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{Y}$, Allora

1) $\lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 \in \mathcal{Y} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

2) $\phi_1(x-x_0) \in \mathcal{Y} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

3) $\phi_1(x) e^{-2\pi i x x_0} \in \mathcal{Y}$ (non cambia niente anche se $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e non più da $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

4) $\phi_1'(x) \in \mathcal{Y}$

5) $x \phi_1(x) \in \mathcal{Y}$

Teorema

La trasformata di Fourier di una funzione rapidamente decrescente è ancora rapidamente decrescente.

$$\phi \in \mathcal{S} \Rightarrow \hat{\phi} \in \mathcal{S}$$

(risceude dai due corollari riguardanti regolarità e derivabilità delle trasformate di Fourier)

Teorema (inversione)

$$\forall \phi \in \mathcal{S}$$

$$\text{Si ha che } \phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(w) e^{2\pi i w x} dw \quad \leftarrow \text{ posso vederla come } \mathcal{F}(\hat{\phi})(-x)$$

(la trasformata di Fourier è invertibile su \mathcal{S})

Esempio

$$\mathcal{F}(e^{-\alpha x^2}) \quad \alpha > 0$$

$$f(x) = e^{-\alpha x^2}$$

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-2\pi i x w} dx$$

Ne considero la derivata

$$\mathcal{F}(x^k f(x))(w) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^k \frac{d^k}{dw^k} \mathcal{F}(f)(w)$$

$$\frac{d}{dw} \hat{f}(w) = -2\pi i x \mathcal{F}(f(x))(w)$$

$$= -2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} e^{-2\pi i w x} dx \quad \leftarrow \frac{d}{dw} \hat{f}(w) = -2\pi i \mathcal{F}(x f(x))(w)$$

$$= -2\pi i \cdot \frac{1}{-2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\alpha x) e^{-\alpha x^2} e^{-2\pi i w x} dx$$

$$= \frac{\pi i}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-\alpha x^2})' e^{-2\pi i w x} dx$$

$$= \frac{\pi i}{\alpha} 2\pi i w \hat{f}(w) \quad \leftarrow \text{trasformata della derivata} \leftrightarrow \text{moltiplico per } 2\pi i w$$

Quindi

$$\frac{d}{dw} \hat{f}(w) = - \underbrace{\frac{2\pi^2 w}{\alpha}}_{a(w)} \hat{f}(w)$$

→ equazione differenziale ordinaria omogenea

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(\omega) e^{-2\pi i \omega x} d\omega dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \hat{\phi}(x) dx = \langle T_f, \mathcal{F}(\phi) \rangle$$

Quindi possiamo dire che

$$\langle \mathcal{F}(T_f), \phi \rangle := \langle T_f, \mathcal{F}(\phi) \rangle \quad \text{nel caso regolare}$$

In generale, se $T \in \mathcal{D}'$ è una qualunque distribuzione, vorremmo poter definire $\mathcal{F}(T)$ come una nuova distribuzione tale che

$$\langle \mathcal{F}(T), \phi \rangle := \langle T, \mathcal{F}(\phi) \rangle$$

Ha senso?

T accetta solamente funzioni test, ma la trasformata di Fourier di una funzione test non è una funzione test.

Proposizione

Se $\phi \in \mathcal{D} \setminus \{0\} \Rightarrow \hat{\phi}$ non è mai a supporto compatto

Quindi la definizione precedente proposta in questo modo non va bene.

Funziona però se T è a supporto compatto, in quanto $\mathcal{F}(\phi) \in C^\infty$

↳ le distribuzioni a supporto compatto agiscono anche su funzioni C^∞

Esempio / $T = \delta_{x_0}$

$$\langle \mathcal{F}(\delta_{x_0}), \phi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \mathcal{F}(\phi) \rangle = \hat{\phi}(x_0)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\omega) e^{-2\pi i x_0 \omega} d\omega$$

$$= \langle T_{e^{-2\pi i x_0 \omega}}, \phi(\omega) \rangle$$

$$\rightarrow \mathcal{F}(\delta_{x_0}) = T_{e^{-2\pi i \omega x_0}}$$

Abuso di notazione

$$\mathcal{F}(\delta_{x_0}) = e^{-2\pi i x_0 \omega}$$

$$\mathcal{F}(\delta_0) = 1$$

→ il lemma di Riemann-Lebesgue qui fallisce.

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \mathcal{F}(\delta_0) = 1 \neq 0$$

Quindi le distribuzioni temperate estendono il concetto di distribuzione normale ad un dominio più ampio.

Quindi posso pensare alle distribuzioni temperate come ad una sottoclasse di tutte le distribuzioni, cioè quelle distribuzioni $T: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ che possono essere estese al dominio più grande \mathcal{Y} mantenendo la continuità.

\mathcal{D} è denso in \mathcal{Y} , quindi quelle distribuzioni che ammettono estensione, hanno estensione unica.

\mathcal{Y}' è l'insieme delle distribuzioni temperate.

$$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{Y} \subseteq C^\infty$$

$$\mathcal{D}' \supseteq \mathcal{Y}' \supseteq \text{distribuzioni a supporto compatto}$$

Le distribuzioni a supporto compatto apriscono su C^∞ , restringendole apriscono su \mathcal{Y} e restringendole ancora apriscono su \mathcal{D} .

Le distribuzioni che apriscono su \mathcal{D} , in alcuni casi possono essere estese a \mathcal{Y} e possono essere estese a C^∞ .

Salendo di classe, le distribuzioni, i derivati che posso misurare, sono sempre meno.

Su \mathcal{Y}' posso fare trasformate di Fourier.

\mathcal{F} su \mathcal{Y}'

• **Proposizione**

$$\Phi_n, \phi \in \mathcal{Y}$$

$$\Phi_n \xrightarrow{\mathcal{Y}} \phi \Rightarrow \hat{\Phi}_n \xrightarrow{\mathcal{Y}} \hat{\phi}$$

Dato $T \in \mathcal{Y}'$, definisco $\mathcal{F}(T) \in \mathcal{Y}'$ come

$$\langle \mathcal{F}(T), \phi \rangle := \langle T, \mathcal{F}(\phi) \rangle$$

Il secondo membro ha senso in quanto $\mathcal{F}(\phi) \in \mathcal{Y}$ e $T \in \mathcal{Y}'$

f quindi, all'infinito, ha crescita al più ~~esponenziale~~ polinomiale
 casi particolari sono lenta di un

- f limitata (sin x, cos x, 1(x))
- f polinomio
- x sin x, x^5 cos x ...

Proposizione

Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è a crescita lenta
 $\Rightarrow T_f \in \mathcal{S}'$

Dimostrazione parziale

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \phi(x) dx$$

$$|f(x)\phi(x)| = |f(x)| |\phi(x)| \leq (A|x|^m + B) |\phi(x)|$$

$$= A|x^m \phi(x)| + B|\phi(x)|$$

$\hookrightarrow \in \mathcal{R}'$ $\hookrightarrow \in \mathcal{R}'$

Per confronto $f \cdot \phi \in \mathcal{R}'$

Andrebbe verificata la linearità (ovvia) e la continuità (più complicata)

$\mathcal{F}(T_1)$ $\mathcal{F}(1)$ non ha senso $\mathcal{F}(1) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \omega x} dx$

$$\langle \mathcal{F}(T_1), \phi \rangle = \langle T_1, \mathcal{F}(\phi) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\phi)(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\omega) e^{-2\pi i \omega x} d\omega dx$$

integrale doppio che non posso scambiare, non posso invertire non essendo la funz. integranda assolutamente integrabile

Posso riscrivere l'integrale come

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\phi)(x) \cdot e^{2\pi i x \cdot 0} dx = \phi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle$$

↑

sto applicando la trasformata di Fourier inversa e la valuto in 0.

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)(w) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}\right)(w)$$

$$= \frac{1}{a^2} \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)(w)$$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{|a|} \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\left(\frac{w}{a}\right) \stackrel{a>0}{=} \frac{1}{a} \pi e^{-2\pi|a|w} = \frac{\pi}{a} \pi e^{-2\pi|a|w}$$

$$(3) \mathcal{F}(H(x-2)e^{-2x})(w) = \mathcal{F}(H(x-2)e^{-2(x-2+2)})(w)$$

$$= \mathcal{F}(H(x-2)e^{-2(x-2)}e^{-4})(w) = e^{-4} \mathcal{F}(H(x-2)e^{-2(x-2)})(w)$$

$$= e^{-4} \cdot e^{-2\pi i \cdot 2w} \mathcal{F}(H(x)e^{-2x})(w)$$

$$= e^{-4} \cdot e^{-4\pi iw} \frac{1}{2+2\pi iw}$$

$$(4) \mathcal{F}(xe^{-x}H(x))(w) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dw} \mathcal{F}(e^{-x}H(x))(w)$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dw} \frac{1}{1+2\pi iw} = -\frac{1}{2\pi i} \cdot -1 \cdot \frac{1}{(1+2\pi iw)^2} \cdot 2\pi i$$

$$= \frac{1}{(1+2\pi iw)^2}$$

$$(5) \mathcal{F}(1_{[a,b]}(x))(w)$$

$$= \mathcal{F}\left(p_{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right)(w) = e^{-2\pi i \frac{a+b}{2} w} \mathcal{F}(p_{b-a}(x))(w)$$

$$= e^{-\pi i(a+b)w} \frac{\sin(\pi(b-a)w)}{\pi w}$$

$$(6) \mathcal{F}(\sin x p_{2\pi}(x))(w)$$

$$= \mathcal{F}\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} p_{2\pi}(x)\right)(w)$$

$$= \mathcal{F}\left(\frac{1}{2i} e^{ix} p_{2\pi}(x) - \frac{1}{2i} e^{-ix} p_{2\pi}(x)\right)(w)$$

Tutti i polinomi sono a crescita lenta.

$$T_{x^{100}+x} \in \mathcal{S}'$$

$$\mathcal{F}(s_0' + x^{100} + x)(w) = \mathcal{F}(s_0')(w) + \mathcal{F}(x^{100})(w) + \mathcal{F}(x)(w)$$

$$= 2\pi i w \mathcal{F}(s_0)(w) + \mathcal{F}(x^{100} \cdot e^0)(w) + \mathcal{F}(x \cdot e^0)(w)$$

$$1 = e^{2\pi i w} \rightarrow \mathcal{F}(1) = \delta_0$$

$$\mathcal{F}(\delta_0) = 1$$

$$\rightarrow 2\pi i w \mathcal{F}(s_0)(w) + \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^{100} \cdot \frac{d^{100}}{dw^{100}} \delta_0 + \left(-\frac{1}{2\pi i}\right) \delta_0'$$

$$= 2\pi i w + \frac{1}{(2\pi)^{100}} \delta_0^{100} - \frac{1}{2\pi i} \delta_0'$$

$$(9) \mathcal{F}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)(w)$$

$$\frac{x^2}{1+x^2} \text{ è a crescita lenta} \quad \left|\frac{x^2}{1+x^2}\right| \leq 1 \cdot \tilde{r}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\right)(w) = \mathcal{F}\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)(w)$$

$$= \mathcal{F}(1) - \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(w) = \delta_0 - \pi e^{-2\pi|w|}$$

TRASFORMATE E DISTRIBUZIONI

6/06/14

$$\mathcal{F}: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$$

$$\mathcal{F}(\hat{T}) = \hat{\hat{T}}$$

$$\langle \hat{\hat{T}}, \varphi \rangle := \langle \hat{T}, \hat{\varphi} \rangle$$

Le distribuzioni temperate e le trasformate delle distr. temperate godono delle stesse proprietà poiché la trasformata è un'operazione chiusa.

Esempio

$$\mathcal{F}(\delta_{x_0})(\omega) = \mathcal{F}(\delta_0(x-x_0))(\omega) = e^{-2\pi i x_0 \omega} \mathcal{F}(\delta_0)(\omega)$$

$$= e^{-2\pi i x_0 \omega} T_1 = T_1 e^{-2\pi i x_0 \omega} \rightarrow \text{distribuzione associata alle armoniche}$$

Esempio Trasformata di Fourier della distribuzione associata a $H(x)$

$\mathcal{F}(T_H)$

Si osservi che

$\int_{-\infty}^{+\infty} H(x) e^{-2\pi i \omega x} dx$ non ha senso

Sappiamo che $T_H = \delta_0$ e $1 = \mathcal{F}(\delta_0) = \mathcal{F}(T_H) = 2\pi i \omega \mathcal{F}(T_H)$

per le proprietà delle trasformate di Fourier

Quindi

$2\pi i \omega \mathcal{F}(T_H)(\omega) = T_1 = 1$

Quindi vorremmo poter scrivere

$\mathcal{F}(T_H)(\omega) = T \frac{1}{2\pi i \omega}$ non ha senso

$\frac{1}{2\pi i \omega}$ può ricordare un'altra distribuzione \rightarrow valore principale $\frac{1}{x}$

v.p. $(\frac{1}{x})$

$\langle \text{v.p.}(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right]$

$T_{\log x} = \text{v.p.}(\frac{1}{x})$

$x \cdot \text{v.p.}(\frac{1}{x}) = T_1 \rightarrow x \cdot \text{v.p.}(\frac{1}{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} x dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} x dx \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1 = T_1$ per definizione

Confrontiamo con quello che abbiamo

$2\pi i \omega \mathcal{F}(T_H)(\omega) = T_1$

$\omega \cdot \text{v.p.}(\frac{1}{\omega}) = T_1$

$\omega [2\pi i \mathcal{F}(T_H)(\omega) - \text{v.p.}(\frac{1}{\omega})] = 0$

Non siamo in un'algebra in cui vale la legge di annullamento del prodotto

$\omega \delta_0 = 0? \quad \varphi(\omega) \delta_0 = \varphi(0) \delta_0$

$$\sum_{k=-n}^n \mathcal{F}(\delta_k) = \sum_{k=-n}^n T e^{-2\pi i k w} = T \sum_{k=-n}^n e^{-2\pi i k w}$$

$$T \sum_{k=-n}^n e^{-2\pi i k w} \rightarrow ? \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

Teorema

$$\mathcal{F}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k$$

$$\text{cioè } T \sum_{k=-n}^n e^{-2\pi i k w} \xrightarrow{|T|} \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k$$

La trasformata del treno di impulsi è il treno di impulsi

Primo passo della dimostrazione

$$e^{-2\pi i w} \mathcal{F}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k\right) = \mathcal{F}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k\right)$$

TRASFORMATA DI LAPLACE

$$f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx \quad s \in \mathbb{C}$$

$$f \in R_{loc}^+([0, +\infty[)$$

$$\Omega_f = \{s \in \mathbb{C} \mid x \mapsto f(x) e^{-sx} \in R_{loc}^+([0, +\infty[)\}$$

insieme di convergenza

$$\mathcal{L}(f): \Omega_f \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{trasformata di Laplace di } f.$$

Esempio

$$f(x) = H(x)$$

$$x \mapsto H(x) e^{-sx} = H(x) e^{-\operatorname{Re}[sx]} e^{-i\operatorname{Im}[sx]}$$

$$|H(x) e^{-sx}| = H(x) e^{-\operatorname{Re}[sx]} \text{ è integrabile su } [0, +\infty[\iff \operatorname{Re} s > 0$$

Quindi

$$\Omega_H = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > 0\}$$

$$\mathcal{L}(H)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} dx = -\frac{1}{s} e^{-sx} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s}$$

$$f(x) = e^{-x^2}$$

$$\Omega f = \Omega$$

Esempio 1

$$f(x) = e^x$$

$$|e^x e^{-sx}| = e^{\operatorname{Re}(1-s)x} \in \mathbb{R}^1$$

$$\operatorname{Re}(1-s) < 0$$

$$\operatorname{Re} s > 1$$

Esempio 1

$$f(x) = e^{x^2} \rightarrow \text{non ammette trasformata di Laplace}$$

$$\Omega f = \emptyset$$

Definizione 1

$f \in \mathbb{R}^1_{\text{loc}}([0, +\infty[)$ si dice **L-trasformabile** se $\Omega f \neq \emptyset$

Proprietà di \mathcal{L}

$f, g \in \mathbb{R}^1_{\text{loc}}([0, +\infty[)$ \mathcal{L} -trasformabile

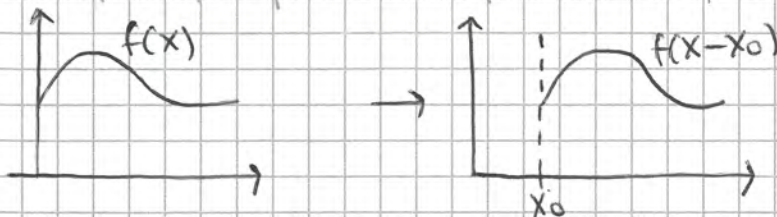
Proposizione

$$(1) \mathcal{L}(\lambda f + \mu g)(s) = \lambda \mathcal{L}(f)(s) + \mu \mathcal{L}(g)(s) \quad \text{Linearità}$$

$$(2) \mathcal{L}(e^{s_0 x} f(x))(s) = \mathcal{L}(f)(s - s_0) \quad \forall s \in \Omega f + s_0$$

$$(3) \mathcal{L}(H(x) f(x - x_0))(s) = e^{-x_0 s} \mathcal{L}(f)(s) \quad x_0 > 0, \forall s \in \Omega f$$

\hookrightarrow moltiplico per la Heaviside per fare f che per $x < 0$ sia nulla



(4) se f è derivabile in $]0, +\infty[$ con f' $\mathbb{R}^1_{\text{loc}}$ e $\exists \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0^+)$

Allora

$$\mathcal{L}(f')(s) = s \mathcal{L}(f)(s) - f(0^+) \quad \forall s \in \Omega f \cap \Omega f'$$

(5) $\mathcal{L}(f)$ è olomorfa su Ωf e

$$\mathcal{L}(f)'(s) = -\mathcal{L}(x f(x))(s) \quad \forall s \in \overset{\circ}{\Omega f}$$

Esempio 1

$$\mathcal{L}(x^k e^{s_0 x} H(x))(s) = \mathcal{L}(x^k H(x))(s-s_0) = \frac{k!}{(s-s_0)^{k+1}}$$

$$\forall s: \operatorname{Re}s > \operatorname{Re}s_0$$

Esercizio 1

Dato $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ determinare Ω_f e $\mathcal{L}(f)$

Suggerimento: usare la formula di Eulero + esempi precedenti

$$f' = 2f \quad x \in [0, +\infty[$$

$$\mathcal{L}(f') = 2\mathcal{L}(f)$$

$$s\mathcal{L}(f)(s) - f(0+) = 2\mathcal{L}(f)$$

$$(s-2)\mathcal{L}(f)(s) = f(0+)$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{f(0+)}{s-2}$$

Teorema

$f, p \in \mathcal{R}^2_{loc}([0, +\infty[)$ \mathcal{L} -trasformabili tali che

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(p)(s) \quad \forall s: \operatorname{Re}s = x_0 \in \Omega_f \cap \Omega_p$$

Allora

$$(1) \Omega_f = \Omega_p$$

$$(2) \mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(p)(s) \quad \forall s$$

$$(3) f(x) = p(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ dove entrambe sono continue}$$

Trasformata di Laplace inversa \mathcal{L}^{-1}

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{k!}{(s-s_0)^{k+1}}\right) = x^k e^{s_0 x} H(x)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-s_0)^k}\right) = \frac{1}{k!} x^{k-1} e^{s_0 x} H(x) \quad k \geq 1$$

Nell'esempio dell'equazione differenziale

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{f(0+)}{s-2}\right) = f(0+) e^{2x}$$

Più in generale, data $T \in \mathcal{D}'$, $\text{supp}(T) \subseteq [0, +\infty[$, T si dice

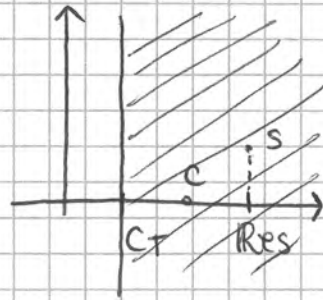
\mathcal{L} -trasformabile se $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che $e^{-cx} T(x) \in \mathcal{S}'$.

$c_T = \inf \{ c \in \mathbb{R} \mid e^{-cx} T(x) \in \mathcal{S}' \}$ è detto **ascissa di convergenza**

$\Omega_T = \{ s \in \mathbb{C} \mid \text{Re } s > c_T \}$ è l'insieme di convergenza, nel caso delle distribuzioni è sempre un semipiano aperto.

$$\mathcal{L}(T) : \Omega_T \rightarrow \mathbb{C}$$

si definisce nel modo seguente



Sia $s \in \Omega_T$ e sia $c_T \ll \text{Re } s$

$$\mathcal{L}(T)(s) = \langle e^{-cx} T(x), \psi(x) e^{-(s-c)x} \rangle$$

$$e^{-cx} T(x) \in \mathcal{S}'$$

$$\psi(x) e^{-(s-c)x} \in \mathcal{S}$$

La definizione è ben posta: non dipende da c

• Proprietà

$S, T \in \mathcal{D}'$, $\text{supp } S, \text{supp } T \subseteq [0, +\infty[$ \mathcal{L} -trasformabili

Allora

$$(1) \mathcal{L}(\lambda S + \mu T)(s) = \lambda \mathcal{L}(S)(s) + \mu \mathcal{L}(T)(s) \quad \forall s \in \Omega_S \cap \Omega_T$$

$$(2) \mathcal{L}(e^{s_0 x} T(x))(s) = \mathcal{L}(T)(s - s_0) \quad \forall s \in \Omega_T + s_0$$

$$(3) \mathcal{L}(T')(s) = s \mathcal{L}(T)(s)$$

$$(4) \mathcal{L}(T) \text{ è olomorfa su } \Omega_T \text{ e } \mathcal{L}(T)'(s) = -\mathcal{L}(xT(x))(s)$$

Dimostrazione della (3)

Osservazione: è diversa dalla formula delle funzioni.

considero $T \in \mathcal{S}'$

$$\mathcal{L}(T')(s) = \langle T'(x), \psi(x) e^{-sx} \rangle = - \langle T(x), \frac{d}{dx} (\psi(x) e^{-sx}) \rangle$$

\mathcal{L}^{-1} trasformata di Laplace inversa

ES | $\mathcal{L}^{-1}(\sum a_k s^k) = \sum a_k \delta_0^{(k)}$

ES | $\frac{p(s)}{q(s)}$ funzione razionale

$p(s) = l(s)q(s) + r(s)$ dove il grado di $r(s) <$ grado $q(s)$

$\frac{p(s)}{q(s)} = l(s) + \frac{r(s)}{q(s)}$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p(s)}{q(s)}\right) = \mathcal{L}^{-1}(l(s)) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{r(s)}{q(s)}\right)$

↓
delta

↓
decompone in fratti semplici

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-s_0)^k}\right)$

ELENCO DEI TEOREMI CON DIMOSTRAZIONE

- 1) f ologomorfa \Rightarrow valgono le condizioni di Cauchy-Riemann
- 2) Parte reale e immaginaria di un'ologomorfa sono armoniche
- 3) Cauchy-Goursat
- 4) formula di Cauchy
- 5) Ologomorfa \rightarrow sviluppo di Taylor
- 6) Teorema dei residui
- 7) formula della densità distribuzionale per poli con 1 salto

$$= (t+1)H(t+1) - 2tH(t) + (t-1)H(t-1)$$

$$\mathcal{L}(tH(t)) = \frac{1}{s^2}$$

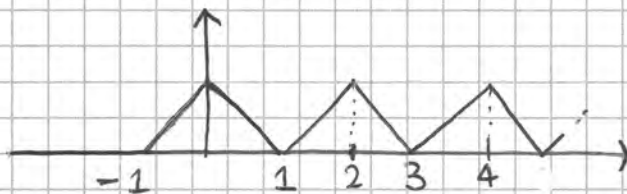
$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t))(s) &= e^s \cdot \mathcal{L}(tH(t)) - 2\mathcal{L}(tH(t)) + e^{-s} \mathcal{L}(tH(t)) \\ &= e^s \cdot \frac{1}{s^2} - 2 \cdot \frac{1}{s^2} + e^{-s} \cdot \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

Il grafico di partenza è il risultato della convoluzione di due porte

$$f(t) = p_1(t) * p_1(t)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(p_1(t) * p_1(t))(s) &= [\mathcal{L}(p_1(t))(s)]^2 \\ &= [\mathcal{L}(H(t+1/2) - H(t-1/2))]^2 \\ &= [e^{1/2s} \cdot \frac{1}{s} - e^{-1/2s} \cdot \frac{1}{s}]^2 \\ &= e^s \cdot \frac{1}{s^2} + e^{-s} \cdot \frac{1}{s^2} - 2 \cdot \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

(3)
 $\tilde{f}(t)$



Ricordando che

$f(t) * \delta_{x_0}$ corrisponde a una traslazione della funzione in x_0
possiamo scrivere che

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= f(t) + f(t) * \delta_2(t) + f(t) * \delta_4(t) + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} f(t) * \delta_{2k}(t) = f(t) * \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_{2k}(t) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(\tilde{f}(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s) \cdot \mathcal{L}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \delta_{2k}\right)(s)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k\right)(s) &= \left\langle \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k, \frac{1}{T} e^{-st} \right\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^T \delta_k(t) e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-s})^k \\ &= \frac{1}{1 - e^{-s}} \quad \text{Re } s > 0 \end{aligned}$$

$$s\mathcal{L}(y) - y(0) + \mathcal{L}(y) = \frac{1}{s-2}$$

$$(s+1)\mathcal{L}(y) = y(0) + \frac{1}{s-2}$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{y(0)}{s+1} + \frac{1}{(s-2)(s+1)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{y(0)}{s+1} + \frac{1/3}{s-2} + \frac{-1/3}{s+1}\right)$$

$$= y(0)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

$$= \left(y(0) - \frac{1}{3}\right)e^{-t}H(t) + \frac{1}{3}e^{2t}$$

$$= H(t) \left[\frac{8}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} \right]$$

$$(3) \begin{cases} y'' + 2y' - 3y = \delta_1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(y'' + 2y' - 3y) = \mathcal{L}(\delta_1)$$

$$\mathcal{L}(y'') + 2\mathcal{L}(y') - 3\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(\delta_1)$$

$$s\mathcal{L}(y') - y'(0) + 2s\mathcal{L}(y) - 2y(0) - 3\mathcal{L}(y) = e^{-s}$$

$$s[s\mathcal{L}(y) - y(0)] - y'(0) + 2s\mathcal{L}(y) - 2y(0) - 3\mathcal{L}(y) = e^{-s}$$

$$s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0) + 2s\mathcal{L}(y) - 2y(0) - 3\mathcal{L}(y) = e^{-s}$$

$$(s^2 + 2s - 3)\mathcal{L}(y) = e^{-s}$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{e^{-s}}{(s+3)(s-1)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{(s+3)(s-1)}\right)(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+3)(s-1)}\right)(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1/4}{s+3} + \frac{1/4}{s-1}\right) = -\frac{1}{4}e^{-3t}H(t) + \frac{1}{4}e^tH(t)$$

$$(4) f(x) = xH(-\pi x) + \mathbb{1}_{[1,2]}(x) - 2p_2(x-4) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = xH(-\pi x) + H(x-1) - H(x-2) - 2p_2(x-4)$$

$$f'(x) = H(-\pi x) + \cancel{x(-\pi\delta_0)} + \delta_1 - \delta_2 - 2(\delta_3 - \delta_5)$$

B ✓

$$(5) T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ distribuzione dispari} \quad T(-t) = -T(t)$$

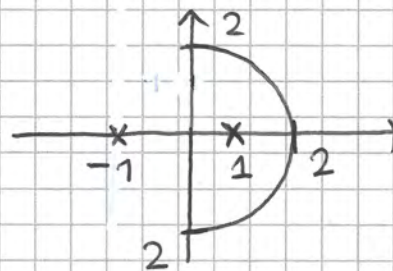
$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f(t))) = f(-t)$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathcal{F}(T))) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(-T)) = \mathcal{F}(-T(t)) = -\mathcal{F}(T) \quad \text{OK.}$$

(Esercizio)

$$i) A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2, \operatorname{Re} z \geq 0\}$$

$$I = \int_{\partial A} \frac{dz}{(z^2-1)^2}$$



$$(z^2-1)^2 = [(z+1)(z-1)]^2$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ z = -1 \\ z = +1 \end{array}$$

$$I = \int_{\partial A} \frac{dz}{(z+1)^2(z-1)^2} = \operatorname{Res} f(1)$$

$$f = \frac{1}{(z+1)^2}$$

$$I = \int_{\partial A} \frac{dz}{(z+1)^2(z-1)^2} = 2\pi i \cdot \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(z+1)^2} \right] \Big|_{z=1}$$

$$= 2\pi i \cdot (-2) \cdot \frac{1}{(z+1)^3} \Big|_{z=1}$$

$$= -4\pi i \cdot \frac{1}{8} = -\frac{\pi i}{2}$$

$$(6) F(s) = \frac{1}{(s-2i)^3}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-2i)^3}\right) = e^{2it} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right)(t)$$

$$= e^{2it} \cdot \frac{t^2 H(t)}{2}$$

7/3/14

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

Statistica $\left\{ \begin{array}{l} \text{descrittiva: insieme di metodi atti a riassumere grandi} \\ \text{quantità di dati (es. istat)} \\ \text{inferenziale: strumenti matematici che consentono di} \\ \text{dedurre informazioni su una popolazione a} \\ \text{partire da un campione ristretto (es. sondaggi)} \end{array} \right.$

Calcolo delle probabilità \rightarrow descrivere il comportamento di fenomeni il cui esito non è noto o prevedibile a priori (es. lancio del dado) \rightarrow ESPERIMENTO

• ANALISI COMBINATORICA

\rightarrow conteggi su possibili esiti di un singolo esperimento

- Considero un esperimento che si svolge in k istanti/fasi differenti

A ogni fase si possono avere n risultati.

$n_1 = n^{\circ}$ possibili risultati fase 1

\vdots

$n_k = n^{\circ}$ possibili risultati fase k

$x = n^{\circ}$ di possibili esiti dell'esperimento

$$x = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$$

per ogni risultato n_1 ho n_2 risultati della fase 2.
per ogni coppia $n_1 n_2$ ho n_3 risultati possibili.

Esempio] Cassetto camicie (4)

Cassetto pantaloni (3)

Cassetto maglie (7)

Cassetto piacerche (1)

\rightarrow n° di possibili abbinamenti $x = 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 1 = 84$

- n oggetti distinti (diversi, riconoscibili) da cui ne vengono estratti $k \leq n$, tenendo conto dell'ordine

Quanti sono i possibili ordinamenti ottenibili dall'estrazione?

$x = n^{\circ}$ di possibili estrazioni (con ordine)

$$x = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Esempio | Anagrammi della parola ESSERE

$$\# = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$$

$$P_n \approx \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_k!} = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} \quad \text{COEFF. MULTINOMIALE}$$

dove $n_1 + \dots + n_k = n$

Se $k = 2 \rightarrow$ COEFFICIENTE BINOMIALE

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \binom{n}{k, n-k} = C_{n,k}$$

\rightarrow combinazioni di k individui su un totale di n

Numero di possibili sottoinsiemi di k individui estratti da un totale di n individui, senza tenere conto dell'ordine

$$\# = \frac{\text{liste ordinate}}{\text{n° ordinamenti per ogni gruppo}} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} = \binom{n}{k}$$

Esempio | Gruppo di 20 persone, da cui ne vengono estratte 2

$$\text{Numero di coppie possibili} = \binom{20}{2} = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = 190$$

Esempio | Come prima, ma devo individuare un coordinatore di lavoro tra i due estratti.

Quante coppie con l'indicazione del coordinatore?

\rightarrow ho creato un ordinamento \Rightarrow disposizioni

$$\# = \frac{20!}{18!} = 20 \cdot 19 = 380$$

Esempio | Numero binario composto da 16 bit.

Quanti numeri contengono esattamente 4 uno?

$$\# = C_{16,4} = \binom{16}{4} = \frac{16!}{4! \cdot 12!} \quad \text{e' equivalente a estrarre 4 individui da un gruppo di 16}$$

Esempio | 20 impiegati, disponiamo di 5 uffici, ognuno con 4 scrivanie.

Numero possibili suddivisioni dei 20 nei 5 uffici?

Esempio] Dimostrare che $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \begin{matrix} a=1 \\ b=1 \end{matrix}$$

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1 \cdot 1$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

$\binom{n}{0}$ totale di numeri con 0 uno

$\binom{n}{1}$ totale di numeri con 1 uno

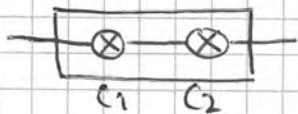
⋮

$\binom{n}{k}$ totale di numeri con k uno

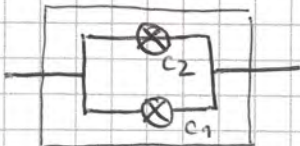
tutti i numeri che posso rappresentare in binario con n bit $\rightarrow 2^n$

Esempio] Sistemi serie / parallelo

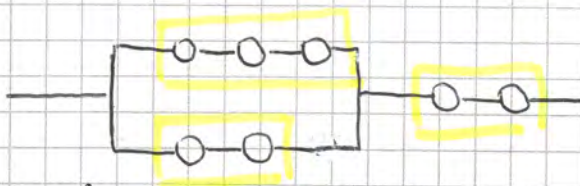
Rappresentazione di circuiti



funziona se entrambi funzionano
 \rightarrow sistema serie



funziona se almeno uno dei due funziona
 \rightarrow sistema parallelo



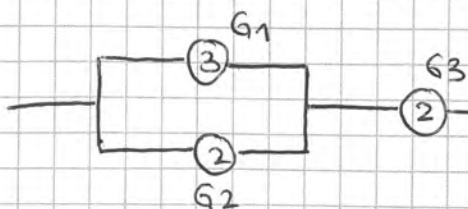
Dispongo di 7 componenti
 (C_1, C_2, \dots, C_7)

Li dispongo in maniera casuale nel sistema.

Quante disposizioni distinte posso ottenere?

\hookrightarrow soluzioni diverse livello di affidabilità del sistema

Posso vedere il sistema così



coeff. multinomiale

$$2! \binom{7}{3,2,2} = \frac{2! \cdot 7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \binom{7}{3} \binom{4}{2} \binom{2}{2} \cdot 2!$$

In questo caso però la disposizione dei tre gruppi è importante
 \rightarrow moltiplico per $2!$ (ogni volta che denuncio un gruppo ho 2 diverse disposizioni)

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$$

soluzioni: $x_i \geq 0$

Esempio $x_1 + x_2 = 4$

5
soluzioni: $\left. \begin{array}{l} 0 + 4 \\ 1 + 3 \\ 2 + 2 \\ 3 + 1 \\ 4 + 0 \end{array} \right\} = 4$

$$y_i = x_i + 1 \quad \text{se } x_i \geq 0 \rightarrow y_i \geq 1$$

$x_i = y_i - 1$ Introduciamo le variabili y_i per ricondurci al caso precedente

$$y_1 + y_2 + \dots + y_r - r = n$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_r = n + r$$

→ dal caso precedente abbiamo che le soluzioni (nelle y_i)

sono $\binom{n+r-1}{r-1}$

14/03/14

PROBABILITÀ

Descrivere fenomeni il cui esito non è prevedibile a priori.

↓
esperimento

Insieme di possibili risultati di un esperimento: $\Omega \rightarrow$ SPAZIO CAMPIONE

$A \subseteq \Omega$: sottoinsieme di possibili risultati

La probabilità è una proprietà che viene associata a un insieme di eventi, non ad un ~~es~~ evento solo.

$$A \subseteq \Omega \rightarrow P(A)$$

• Definizione classica

$P(A)$ = rapporto tra casi favorevoli al verificarsi di A sul totale di

casi possibili $\frac{N_A}{N}$, dove N_A : cardinalità di A e N

cardinalità di Ω , nell'ipotesi che tutti i casi siano equiprobabili

• Concezione frequentista

$P(A)$ = limite (supposto esistente) del rapporto tra casi favorevoli ad A

e totale di prove effettuate, supponendo che le prove siano

ripetibili e nelle stesse condizioni.

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_A}{N} \quad \text{dove } \begin{array}{l} N_A: \text{prove con esito } A \\ N: \text{prove effettuate} \end{array}$$

$$\mathcal{A} = \{ \emptyset, \Omega, \{a, b\}, \{c, d\} \}$$

i) $\Omega \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$ si $\bar{\Omega} = \emptyset \rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}$

$\overline{\{a, b\}} = \{c, d\} \rightarrow \{c, d\} \in \mathcal{A}$

iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ si

$\rightarrow \mathcal{A}$ è un'Algebra

Esempio] $\mathcal{A} = P(\Omega) = 2^\Omega$

Insieme delle parti: insieme di tutti i possibili sottoinsiemi

$\rightarrow \mathcal{A}$ è un'Algebra

Nota \mathcal{A} è un'Algebra

i) $\Omega \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$

iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ oppure $A \cap B \in \mathcal{A}$

Le due definizioni sono equivalenti

\rightarrow Lo si dimostra con le leggi di De Morgan

Sia Ω , siano $A, B \subseteq \Omega$

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$$

De Morgan

Dimostrazione

Siano $A, B \in \mathcal{A}$

$A \cup B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$ (sotto ipotesi di validità di i) e ii))

$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A}, \bar{B} \in \mathcal{A}$ (per la proprietà 2)

$\Rightarrow \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{\overline{A \cap B}} \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow \underline{\underline{A \cap B}} \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

Un evento è un oggetto che sta in una specifica algebra (≠ sottoinsieme)

σ -Algebra

Abbiamo Ω .

Consideriamo $\mathcal{A} = \{A_i, A_i \subseteq \Omega\}$, famiglia di sottoinsiemi

Definizioni $\Omega \rightarrow$ spazio campione $\mathcal{A} \rightarrow$ algebra $P \rightarrow$ probabilità $(\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow$ spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow$ spazio di probabilitàEsempio | Urna contenente palline $\{R_1, R_2, B\}$

Esperimento: estrarre una palla e osservarne il colore

$$\Omega = \{r, b\}$$

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{r\}, \{b\}\}$$

P	P_1	P_2	P_3	P_4
\emptyset	0	$1/2$	0	0
Ω	1	1	1	1
$\{r\}$	$1/3$	$1/2$	$1/2$	$2/3$
$\{b\}$	$1/3$	$1/2$	$1/2$	$1/3$

 $P_1(\{a\} \cup \{b\}) = 1$ ma $P_1\{r\} + P_2\{b\} = 2/3 \rightarrow P_1$ non è una $P_2(\emptyset \cup \Omega) = 1$ ma $P_2(\emptyset) + P(\Omega) = 3/2 \rightarrow P_2$ non è una P_3 è una probabilità, ma non descrive correttamente il mio esperimento. P_4 è una misura di probabilità e in questo caso sembra essere quella più adatta alla descrizioneAltro ragionamento \rightarrow avrei potuto di semplificare le due palline rosse

$$\Omega = \{r_1, r_2, b\}$$

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{r_1\}, \{r_2\}, \{b\}\}$$

$$P: P(\{r_1\}) = 1/3$$

$$P(\{r_2\}) = 1/3$$

$$P(\{b\}) = 1/3$$

$$P(\{r_1, r_2\}) = P(\{r_1\}) \cup P(\{r_2\}) = P(\{r_1\}) + P(\{r_2\}) = 2/3$$

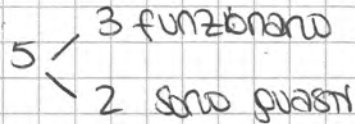
$$C = A \cup D$$

$$A = \{ \text{pari} \} \quad P(A) = 1/2$$

$$D = \{ \geq 4 \} \quad P(D) = 1/2$$

$$P(C) = P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$$

Esempio | 5 componenti indistinguibili in un'urna



Ne estraggo 2, tenendoci da parte (estrazione senza rimbussamento)

- 1) Probabilità entrambi guasti?
- 2) Probabilità almeno uno funziona?
- 3) Probabilità esattamente uno funziona?

$$\Omega = \{ (g, g), (g, f), (f, g), (f, f) \}$$

$$\Omega = 2^2 \text{ insieme delle parti}$$

Cardinalità di $\Omega = 5 \cdot 4 = 20$ 20 possibili estrazioni equiprobabili

$$P(\{2 \text{ guasti}\}) = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$$

$$P(\{almeno 1 funzionante\}) = 1 - P(\{entrambi guasti\}) =$$

$$1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

$$P(\{esattamente 1 funzionante\}) = \frac{12}{20} =$$

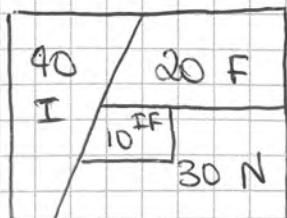
Esempio | stessa urna con rimbussamento

$$\# \Omega = 5 \cdot 5 = 25$$

$$P(\{entrambi guasti\}) = \frac{4}{25}$$

$$P(\{almeno uno funzionante\}) = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$$

Esempio | 100 studenti



- 40 inglese
- 20 francese
- 10 inglese + francese

Metodo alternativo

- estraggo le due coppie $\frac{\binom{8}{2} \binom{6}{2}}{2}$

19/03/14

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

Sia (Ω, \mathcal{A}, P) , consideriamo $A, B \in \mathcal{A}$, con $P(B) > 0$

Definizione: è detta PROBABILITÀ di A CONDIZIONATA a B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{(concezione assiomatica) Kolmogorov}$$

Questa è la probabilità che sia soddisfatto l'evento A sapendo che i possibili risultati sono solo quelli presenti nell'evento B .

Secondo la concezione classica $P(A|B) =$ rapporto tra casi favorevoli ad A su casi favorevoli a B , considerando solo i casi in B quali possibili risultati.

$P(A) = \frac{n_A}{N}$ probabilità di A

$$P(A|B) = \frac{\frac{n_{A \cap B}}{n_B} \cdot \frac{n}{n}}{\frac{n}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



→ risultato analogo a quello di Kolmogorov

Secondo la concezione frequentista

$P(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_A}{N}$

$P(A|B) =$ stesso limite, ma scartando tutti gli esiti non contenuti in B

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n_{A \cap B}}{n_B} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n_{A \cap B}}{n_B} \cdot \frac{n}{n} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Esempio: Lancio del dado equilibrato

A : { esce 2 }

B : { esce numero pari }

Osservazione: $P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Definizione di eventi indipendenti che non ~~esige~~ necessita del fatto che $P(B) > 0 \rightarrow$ definizione migliore

Esempio | estrazione di una carta da un mazzo da 52

$A = \{ \text{esce asso} \}$

$B = \{ \text{esce cuori} \}$

$C = \{ \text{esce una figura} \}$

(1) A e B sono indipendenti?

$$P(A) = 4/52 = 1/13$$

$$P(B) = 1/4$$

$$P(A \cap B) = 1/52$$

$$\frac{1}{52} = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{52} \rightarrow \text{sono indipendenti}$$

(2) A, C sono indipendenti?

$$P(A) = 1/13$$

$$P(C) = 12/52 = 3/13$$

$$P(A \cap C) = P(\emptyset) = 0$$

$$P(A) \cdot P(C) = 3/13^2 \neq 0 \rightarrow \text{non sono indipendenti}$$

Esempio | urna

U: $\{ R, R, B \}$ estraggo due volte con rimbussamento

$A_1 = \{ 1^\circ \text{ estraz. esce } R \}$

$A_2 = \{ 2^\circ \text{ estraz. esce } R \}$

sono indipendenti?

$$P(A_1) = 2/3$$

$$P(A_2) = 2/3$$

$$P(A_2 | A_1) = 2/3$$

senza rimbussamento

$$P(A_2 | A_1) = 1/2$$

Nota: facendo un condizionamento, fondamentalmente restringo lo spazio campione.

$$\Omega \rightarrow B = \Omega_B$$

$$A \rightarrow A_B = \{A \cap B, A \in \mathcal{A}\}$$

↓
intersezione di
due eventi nell'algebra
→ è ancora un evento

viene ristretta anche l'algebra, rimanendo comunque un'algebra

$$P_B: A_B \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$P_B: A \cap B \mapsto P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

La P_B così definita è essa stessa una funzione di probabilità (pode delle tre proprietà per essere definita tale).

Infatti: Sia $C \in A_B$

i) $P_B(C) \geq 0$

ii) $P_B(\Omega_B) = 1$

iii) $C_1, C_2 \in A_B$ e $C_1 \cap C_2 = \emptyset \Rightarrow P_B(C_1 \cup C_2) = P_B(C_1) + P_B(C_2)$

Verifica

i) $P_B(C)$

Se $C \in A_B$, allora $C = A \cap B$

Quindi $P_B(C) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$ poiché num ≥ 0 e den > 0 .

ii) $\Omega_B = B = B \cap \Omega$

Quindi $P_B(\Omega_B) = P(B|B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = 1$

iii) $C_1 = A_1 \cap B$ $C_2 = A_2 \cap B$

Se C_1 e C_2 sono tra loro disgiunti, anche A_1 e A_2 sono disgiunti

$$\begin{aligned} P_B(C_1 \cup C_2) &= \frac{P((C_1 \cup C_2) \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P((C_1 \cap B) \cup (C_2 \cap B))}{P(B)} \quad \text{sono disgiunti} \\ &= \frac{P(C_1 \cap B) + P(C_2 \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} \end{aligned}$$

Definiamo $B = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}$ \rightarrow si conviene per 2 insiemi

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n) &= P(B \cap A_n) = P(B) \cdot P(A_n | B) = \\ &= P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cdot P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) = \text{per ipotesi induttiva} \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

Tutte le volte che devo calcolare la probabilità di un'intersezione di più eventi, posso vederlo come prodotto di probabilità.

Unione \rightarrow somma
Intersezione \rightarrow prodotto

Esempio | Urna

$U = \{R_1, R_2, B\}$ 2 estrazioni con rimbussamento

$B = \{ \text{estraggo due rosse} \}$

$C = \{ \text{estraggo 1 rossa e poi 1 bianca in sequenza} \}$

$D = \{ \text{estraggo 1 rossa e 1 bianca senza tener conto dell'ordine} \}$

Qual è la probabilità di ognuno di questi eventi?

Introduco nuovi eventi

$A_1 = \{ \text{esce 1 rossa alla 1}^{\text{a}} \text{ estrazione} \}$

$A_2 = \{ \text{esce 1 rossa alla 2}^{\text{a}} \text{ estrazione} \}$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) = \\ &= 2/3 \cdot 2/3 = 4/9 \end{aligned}$$

$$P(C) = P(A_1 \cap \bar{A}_2) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2 | A_1) = 2/3 \cdot 1/3 = 2/9$$

$$\begin{aligned} P(D) &= P((A_1 \cap \bar{A}_2) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2)) = \begin{array}{l} \text{intersezione tra i due eventi} \\ \downarrow \\ \rightarrow \text{è vuota} \end{array} \\ &= P(A_1 \cap \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 \cap A_2) - P(\emptyset) = \\ &= 2/9 + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2 | \bar{A}_1) - 0 = \\ &= 2/9 + 1/3 \cdot 2/3 = 4/9 \end{aligned}$$

Senza rimbussamento

$$P(B) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) = 2/3 \cdot 1/2 = 1/3$$

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) = \\ = 1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/4 = 1/4 + 1/8 = 3/8$$

Esempio | Urna

$$U = \{R_1, R_2, B\}$$

2 estrazioni con rimbussolamento

$A_2 = \{ \text{rossa alla 2}^{\text{a}} \text{ estrazione} \}$

$$P(A_2) = ?$$

$C_R = \{ \text{rossa alla 1}^{\text{a}} \text{ estr.} \}$

$C_B = \{ \text{bianca alla 1}^{\text{a}} \text{ estr.} \}$

$$P(A_2) = P(C_R) \cdot P(A_2|C_R) + P(C_B) \cdot P(A_2|C_B) = \\ = 2/3 \cdot 2/3 + 1/3 \cdot 2/3 = 6/9 = 2/3$$

2 estrazioni senza rimbussolamento

$$P(A_2) = P(C_R) \cdot P(A_2|C_R) + P(C_B) \cdot P(A_2|C_B) = \\ = 2/3 \cdot 1/2 + 1/3 \cdot 1 = 1/3 + 1/3 = 2/3$$

Esempio | 2 dadi $\left\{ \begin{array}{l} \text{rosso} \\ \text{verde} \end{array} \right.$

Sia S la somma $B = \{ \text{somma} = 6 \}$

$$P(B) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

$A_1 = \{ \text{verde 1} \}$ }
 $A_2 = \{ \text{verde 2} \}$ } Partizione
 \vdots

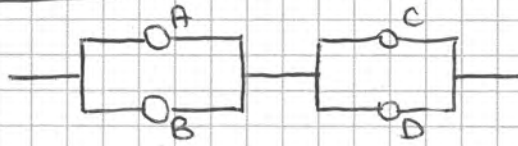
$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) = \dots = 5/6$$

• TEOREMA (FORMULA) di BAYES

Siano $A_1, A_2, \dots, A_n \in B$ come nel teorema precedente, con $P(B) > 0$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) \cdot P(B|A_j)}$$

Esempio | Multicomponente



Sia P_A la prob che A funzioni
 P_B " " B "
 P_C " " C "
 P_D " " D "

Supponiamo l'indipendenza tra i funz.

- (1) Qual è la probabilità che il sistema funzioni?
- (2) Qual è la probabilità che il sistema funzioni se D è guasto?
- (3) Qual è la probabilità che D sia guasto se il sist funziona?

$E_A = A$ funziona

$E_B = B$ "

$E_C = C$ "

$E_D = D$ "

$E_S =$ il sistema funziona

$$\begin{aligned}
 1) P(E_S) &= P[(E_A \cup E_B) \cap (E_C \cup E_D)] = \\
 &= P(E_A \cup E_B) \cdot P(E_C \cup E_D | E_A \cup E_B) = \\
 &= [P(E_A) + P(E_B) - P(E_A \cap E_B)] \cdot P(E_C \cup E_D) = \\
 &= (P_A + P_B - P_A P_B) \cdot (P_C + P_D - P_C P_D)
 \end{aligned}$$

↳ indipendenza tra i funzionamenti

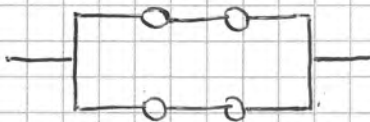
Se $P_A = P_B = P_C = P_D = 1/2$

$$= 3/4 \cdot 3/4 = 9/16$$

$$2) P(E_S | \bar{E}_D) = \frac{P(E_S \cap \bar{E}_D)}{P(\bar{E}_D)} = \dots = (P_A + P_B - P_A P_B) \cdot P_C$$

$$3) P(\bar{E}_D | E_S) = \frac{P[E_S \cap \bar{E}_D]}{P(E_S)} = \dots = \underline{\text{DA FARE}}$$

Esercizio



DA FARE

2 componenti da Urea → probabilità che funzionino 3/4

2 componenti da Curcio → probabilità che funzionino 1/2

Qual è la configurazione migliore che massimizza la probabilità che funzionino

Esercizio

Urna $\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ componenti non funzionanti} \\ 3 \text{ componenti funzionanti} \end{array} \right.$

Ne estraggo 2 senza rimbussamento

i) $P[\text{almeno 1 funz}]$

ii) $P[\text{2° estratto funziona}]$

iii) $P[\text{1° funziona} | \text{2° funziona}]$

$A_1 = \{1^\circ \text{ funziona}\}$

$A_2 = \{2^\circ \text{ funziona}\}$

$$\begin{aligned} \text{i) } P[\text{almeno 1}] &= 1 - P[\text{entrambi KO}] = 1 - P[\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2] = \\ &= 1 - P[\bar{A}_1] \cdot P[\bar{A}_2 | \bar{A}_1] \end{aligned}$$

oppure

$$P[\text{almeno 1}] = \frac{n_{\text{almeno 1 OK}}}{n}$$

$$n = \binom{5}{2} \quad n_{\text{almeno 1 OK}} = n_{\{1OK\}} + n_{\{2OK\}} = \binom{3}{1} \binom{2}{1} + \binom{3}{2} \binom{2}{0}$$

$$P[\text{almeno 1}] = \frac{\binom{3}{1} \binom{2}{1} + \binom{3}{2} \binom{2}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{9}{10}$$

ii) $P(A_2)$

poiché $\{A_1, A_2\}$ formano una partizione di Ω posso usare la formula delle probabilità totali

$$\begin{aligned} P[A_2] &= P[A_1] \cdot P[A_2 | A_1] + P[\bar{A}_1] \cdot P[A_2 | \bar{A}_1] = \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } P[A_1 | A_2] &= \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P[A_2]} = \frac{P[A_1] \cdot P[A_2 | A_1]}{P[A_2]} = \\ &= \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

04/04/14

VARIABILI CASUALI

- continuità misura probabilità

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) = f(x_0)$$

$$P: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P: \mathcal{A} \rightarrow P(\mathcal{A}) \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P(\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n) \quad \text{limite di una successione di eventi}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$? data $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ limitato al caso di successioni monotone

$\{A_n\} \uparrow$ se $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ per una successione crescente il limite è l'unione di tutti gli eventi

$\{A_n\} \downarrow$ se $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ per una successione decrescente il limite è l'intersezione

Dimostrazione (caso crescente)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P(\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n)$$

Definiamo $A_1' = A_1$

$$A_2' = A_2 - A_1$$

$$A_3' = A_3 - A_2$$

quindi $\bigcup_{i=1}^n A_i' = A_n$ gli eventi sono disgiunti \rightarrow unione = somma (o additività)

$$P(\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n') = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n') = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n P(A_i') = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n P(A_i) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$$

definizione di una successione (come limite delle somme parziali)

- Variabili casuali (o Aleatorie)

$(\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow$ riconducerci ad uno spazio standard in modo che non ci sia bisogno di definirlo ogni volta.

spazio campione: \mathbb{R}

σ -algebra: \mathcal{B} σ -algebra di Borel

\rightarrow si prendono tutti gli intervalli $(a, b]$, si considerano tutte le loro possibili unioni o intersezioni (anche infinite) e complementi

\mathcal{B} è definito come la più piccola σ -algebra che contiene tutti gli

Definizione | Dato uno spazio di probabilità (Ω, \mathcal{A}, P) è detta

VARIABILE CASUALE una funzione

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X: \omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{R}$$

tale che sia misurabile rispetto alla σ -algebra di Borel \mathcal{B}

cioè tale che $\forall B \in \mathcal{B} \rightarrow X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$$

$$P_X: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$: B \mapsto P_X(B) \in \mathbb{R}^+$$

$$P_X(B) = P[X^{-1}(B)] = P[\{\omega: X(\omega) \in B\}]$$

→ sposto l'insieme di probabilità
→ sono sicura che P_X sia una
funzione di probabilità da \mathcal{B} a \mathbb{R}
e inversa, perché è misurabile

→ a ogni possibile risultato associa un valore numerico

Esempio | Esperimento "estrazione di carte da un mazzo di 40, senza figure".

risultato = n° sulla carta (è un risultato numerico)

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) \quad \Omega = \{1\heartsuit, 1\spadesuit, \dots\} \quad 40 \text{ carte}$$

$$\mathcal{A} = 2^{-2} \quad P: \text{assegna } 1/40 \text{ a ogni carta}$$

$X = \text{n°}$ sulla carta estratta. È UNA VARIABILE CASUALE

$$P_X([5, 8]) = P[X^{-1}([5, 8])] = 16/40$$

Notazione | Le variabili casuali sono denotate con lettere maiuscole X, Y, Z, W

→ lettere maiuscole: esito prima che venga effettuato $X = x$.

→ lettere minuscole: risultati effettivamente osservati → realizzazioni (realizzazione di una variabile casuale $X = x$)

• funzioni di ripartizione (o distribuzione accumulata)

→ consentono di descrivere il comportamento di una variabile casuale.

Definizione | Data una variabile casuale X , è detta funzione di ripartizione di X la funzione

$$F_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$: t \mapsto F_X(t) \in \mathbb{R}$$

$$\text{definita così: } F_X(t) = P_X((-\infty, t]) = P[X^{-1}((-\infty, t])] = P[\{\omega: X(\omega) \leq t\}] = P[X \leq t] \text{ (probabilità di avere un valore } \leq t.)$$

• DISCRETE

X è detta discreta se l'insieme S dei possibili valori che essa può assumere è con cardinalità finita o al più numerabile (~ cardinalità numerica)

S = supporto della variabile $\text{supp}(X)$

Esempio] X = età individuo estratto inquestura $S = \{20, 21, \dots, 50\}$

Se X è discreta allora per descriverla si utilizza anche

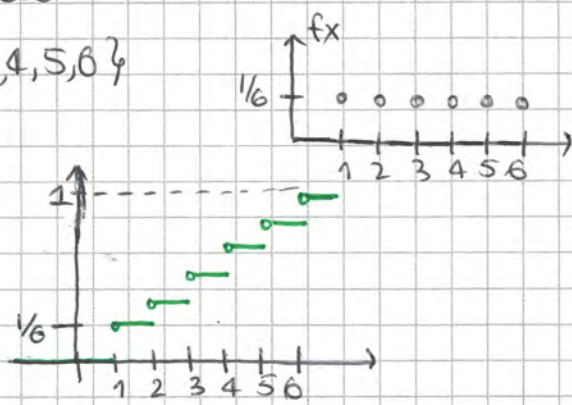
f_X : funzione di densità discreta di probabilità

$$f_X(t) = \begin{cases} P[X=t] & \text{se } t \in \text{supp}(X) \\ 0 & \text{se } t \notin \text{supp}(X) \end{cases}$$

Esempio] Dado equilibrato

X = n° ottenuto lanciando il dado

$$f_X(t) = \begin{cases} 1/6 & \text{se } t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ 0 & \text{se altrimenti} \end{cases}$$



$$F_X(0) = P[X \leq 0] = 0$$

$$F_X(0,9) = P[X \leq 0,9] = 0$$

$$F_X(1) = P[X \leq 1] = 1/6$$

$$F_X(1,5) = P[X \leq 1,5] = 1/6$$

Funzione di ripartizione costante a tratti → a gradini

Tutte le variabili aleatorie discrete hanno funzioni di ripartizione a gradini.

Rapporto tra F_X e f_X

$$F_X(t) = \sum_{\substack{s \in \text{supp}(X) \\ s \leq t}} f_X(s_i)$$

- Proprietà delle f_X

1) $f_X(t) \geq 0$

2) $\sum_{s_i \in \text{supp}(X)} f_X(s_i) = 1$

$\Rightarrow F_X(a) - F_X(a) = 0 \rightarrow$ per questo si ragiona sulla probabilità negli "intervalli" di un punto, non nel punto preciso

$P\{X \in [a, b]\} = ?$

$P[X \in [a, b]] = F_X(b) - F_X(a)$

$P[X \in [a, b]] = P[X = a] + P[X \in (a, b)] =$
 $= 0 + F_X(b) - F_X(a)$
 $= F_X(a) + \dots$

variabile assolutamente continua
 variabile discreta

• Variabili CASUALI MISTE

Se è in parte assolutamente continua e in parte discreta

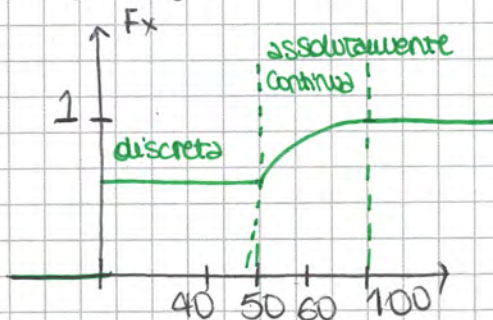
ES | contratto con committenza per realizzare lavoro

- subito 100 €
- restituisco in proporzione al tempo di realizzazione 10 € all'anno fino al 5°
- se al 5° anno non è concluso restituisco tutto

sia T una variabile casuale che descrive il tempo di realizzazione

$f_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{10} e^{-t/10} & t > 0 \end{cases}$

$X =$ guadagno



$T =$ tempo

$X = 100 - T \cdot 10$

$F_X(60) = P[X \leq 60] = P[100 - 10T \leq 60]$

$= P[10T \leq 40]$

$= P[T \geq 4] = \int_4^{\infty} f_T(t) dt = [-e^{-t/10}]_4^{\infty} = e^{-4/10}$

$F_X(50) = P[X \leq 50] = P[T \geq 5] = e^{-1/2}$

$F_X(40) = P[T \geq 5] = e^{-1/2}$

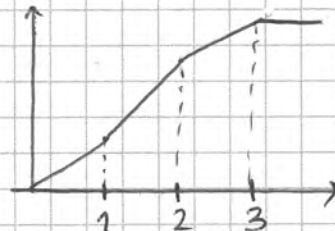
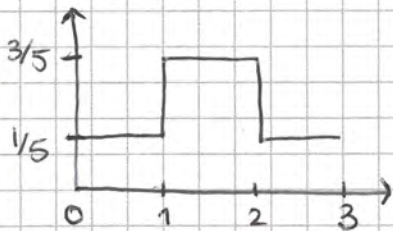
$P[X = 0] = P[T > 5] = e^{-1/2}$

$$2) P[X > 1,8] = \int_{1,8}^3 f_X = \int_{1,8}^2 f_X + \int_2^{+\infty} f_X = 0,2 \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1,6}{5}$$

$$3) P[X \in [0,5, 2,5]] = \int_{0,5}^{2,5} f_X = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = F_X(2,5) - F_X(0,5)$$

4) $F_X(t)$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/5 t & t \in [0, 1] \\ \frac{1}{5} + \frac{3}{5}(t-1) & t \in (1, 2) \\ \frac{4}{5} + \frac{1}{5}(t-2) & t \in [2, 3] \\ 1 & t > 3 \end{cases}$$



9/04/24

variabili casuali multidimensionali (vettori casuali)

Esempio] esperimento: estraggo una persona e ne misuro peso e altezza

$$(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

$$\downarrow (x, y)$$

$$(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2, P(x, y))$$

$$(x, y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$: \omega \rightarrow (x(\omega), y(\omega))$$

A ogni esperimento assegno due valori (o più)

$(x, y) \rightarrow$ vettore aleatorio BIDIMENSIONALE

Funzione di ripartizione congiunta

$$F_{(x, y)}(t, s) = P[X \leq t, Y \leq s]$$

$$= P[\{\omega : X(\omega) \leq t, Y(\omega) \leq s\}]$$

Conoscendo questa trovo tutte le probabilità a cui sono interessato

Esempio] $P[X \in (a_1, b_1], Y \in (a_2, b_2]]$

$$P[X \in A, Y \in B] = P[X=a, Y=b] = f(x,y)(a,b) = P[X=a] \cdot P[Y=b] = f_x(a) \cdot f_y(b)$$

X e y sono stocasticamente indipendenti se

$$f(x,y)(a,b) = f_x(a) \cdot f_y(b) \quad (\text{definizione equivalente})$$

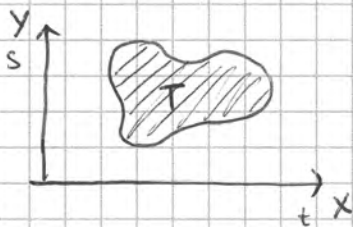
↑
funzione di densità
combinata

↑
funzioni di densità
marginali

Questo vale per le variabili casuali **discrete**.

$F(x,y)$ è **assolutamente continua** se

$$\exists f(x,y)(t,s) = \frac{\partial^2 F(t,s)}{\partial t \partial s} \quad \text{detta FUNZIONE DI DENSITA'}$$



$$P[(x,y) \in T] = \iint_T f(t,s) dt ds$$

X, Y sono stocasticamente indipendenti se e solo se

$$f(x,y)(t,s) = f_x(t) \cdot f_y(s) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$$

Esempio

moneta

T 1/2

C 1/2

la moneta

lancio il dado due volte

X = risultato del primo lancio = $\begin{cases} 0 & \text{se testa} \\ 1 & \text{se croce} \end{cases}$

Y = risultato del secondo lancio = $\begin{cases} 0 & \text{se testa} \\ 1 & \text{se croce} \end{cases}$

$$P[(X,Y) = (1,1)] = P[X=1] \cdot P[(X,Y) = (1,1) | X=1] = 1/2 \cdot 1/2 = P[X=1] \cdot P[Y=1] = 1/4$$

→ sono indipendenti

Esempio

2 Monete

$M_1 \begin{cases} T \rightsquigarrow 1/2 \\ C \rightsquigarrow 1/2 \end{cases}$

$M_2 \begin{cases} T \rightsquigarrow 1 \\ C \rightsquigarrow 0 \end{cases}$

estraggo una moneta e lancio due volte

$$\Phi(t) = (t - E[X])^2$$

$$E[\Phi(X)] = E[(X - E[X])^2] \quad \text{VARIANZA DI X}$$

• MEDIA

$$E[X] \begin{cases} \text{discrete: } \sum_{t \in \text{supp}(X)} t_i \cdot f_X(t_i) \\ \text{ass. Continue: } \int_{\mathbb{R}} t \cdot f_X(t) dt \end{cases}$$

→ riassume il comportamento della variabile (asiale, ci dice "più o meno" dove cade la X.

Esempio Lancio del dado equilibrato

$$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5$$

Il numero che si ottiene non è necessariamente uno dei valori assumibili

Esempio Tempo di vita medio della vespa

X = tempo di vita della vespa

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-t/10} & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} t \cdot f_X(t) dt = \int_0^{+\infty} t \cdot f_X(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{10} t e^{-t/10} dt =$$

$$= \dots = 10$$

Questa definizione di media deriva dalla statistica.

Es. Età media studenti in quest'aula

$$m = \frac{21 + 20 + 22 + \dots}{n} = \frac{n_{21} \cdot 21 + n_{22} \cdot 22 + \dots}{n}$$

$$= 21 \cdot \frac{n_{21}}{n} + 22 \cdot \frac{n_{22}}{n} + \dots =$$

$$= 21 f_{21} + 22 f_{22} + \dots = \sum t_i \cdot f(t_i)$$

Proprietà della media

1) Può anche non essere finita

Es. X che assume valori $\left\{ \frac{2^1}{2}, \frac{2^2}{2}, \dots, \frac{2^k}{2} \right\}$