



**Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 1454A -**

**ANNO: 2015**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Castiglione**

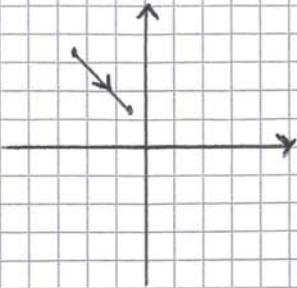
**MATERIA: Idraulica + Eserc. Prof.Ridolfi**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

# PARTICLE TRACKING



$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{u}{m} ; \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{v}{m}$$

• PARTO DA  $x_1, y_1$

• CALCOLO  $u = u(x_1, y_1)$

$v = v(x_1, y_1)$

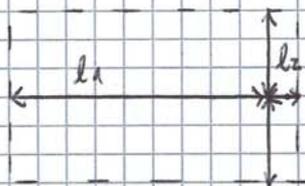
• SPOSTAMENTI  $\Delta x = \frac{u}{m} \Delta t$

$\Delta y = \frac{v}{m} \Delta t$

• NUOVO PUNTO  $x_2 = x_1 + \Delta x$

$y_2 = y_1 + \Delta y$

• RIPETO



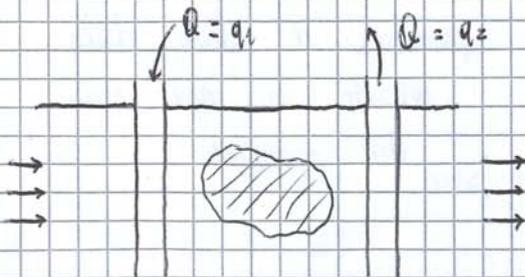
$$l_2 = 62 \text{ m} \approx 60 \text{ m}$$

$$l_1 = 268 \text{ m} \approx 270 \text{ m}$$

$$l_2 = 18 \text{ m} \approx 20 \text{ m}$$

ESERC. N° 3

$Q = q$

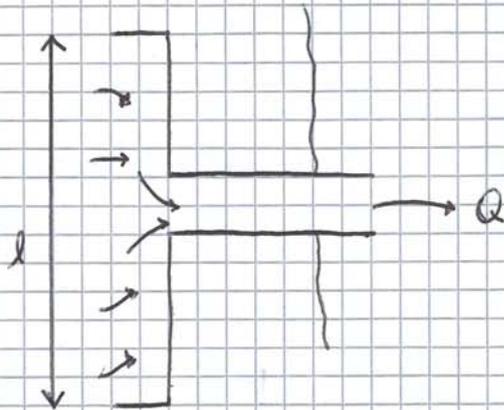


$$q = -q_2$$

$$\textcircled{b} \quad \ln\left(\frac{R}{R_{HP}}\right) = \frac{2\pi K S}{Q} \underbrace{(H - h_P)}_{\Delta}$$

$$\Delta = 4,6 \text{ m} \quad \rightarrow \quad h_P = H - \Delta = 22,4 \text{ m}$$

Exerc. N° 3



$$Q = A(x) v(x) = (h \cdot l) \left( K \frac{dh}{dx} \right)$$

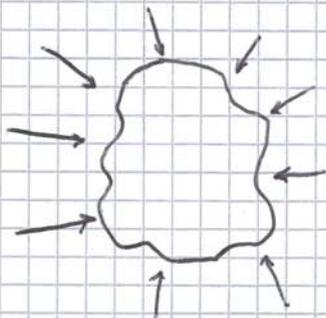
$$\int_{h_0}^{h(x)} h \cdot dx = \frac{Q}{kl} \int_0^x dx \quad \rightarrow \quad \frac{h^2(x) - h_0^2}{2} = \frac{Q}{kl} x$$

Deve essere determinata l, dato per h = H e x = L

La densità dipende dalla <sup>temperatura</sup>  $V$ , ma in maniera poco rilevante. Ad esempio l'acqua da  $0^\circ\text{C}$  a  $20^\circ\text{C}$  varia del 0.5%, quindi viene considerata costante.

La densità dipende anche dallo stato tensionale, ma anche questo viene considerato costante.  
 $\rho = \rho(\theta, \text{stato tensionale}) \rightarrow \rho = \text{costante} \rightarrow \text{il fluido è incomprimibile.}$

Supponiamo di prendere un volume di fluido a cui applichiamo una variazione di pressione isotropa



$$\Delta V \propto \Delta p V$$

$$\Delta V = - \frac{1}{\epsilon} \Delta p V$$

↓  
 modulo di comprimibilità e compressione cubica

Il segno meno è dovuto al fatto che una variazione di pressione positiva comporta una riduzione del volume.

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V} = - \frac{\Delta p}{\epsilon}}$$

La massa, durante questa operazione, rimane costante

$$m = \rho V = \text{costante}$$

$$dm = d\rho V + \rho dV = 0 \rightarrow \boxed{\frac{dV}{V} = - \frac{d\rho}{\rho}}$$

Dalle due relazioni ottemo:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\rho}{\epsilon}$$

Nel caso dei liquidi  $\epsilon = 0(10^9) \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ ,  $d\rho = 0(10^4) \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$ .  
 (Note: An arrow points from the text "dell'ordine" to the coefficient 0 in the first equation.)

Vedendo che  $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{10^5}$  lo considero costante

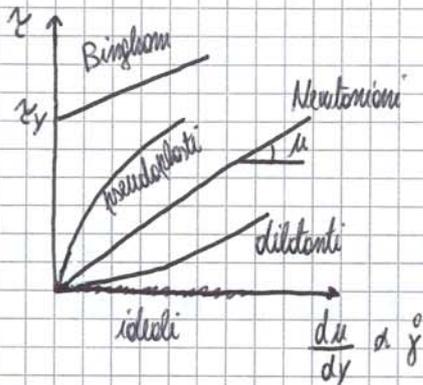
Consideriamo un'altra situazione:



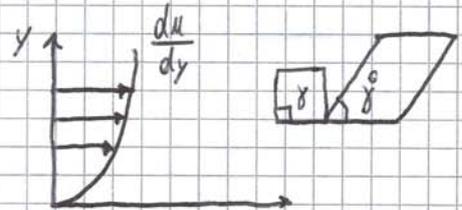
Quando un corpo si muove su un fluido sposta parte del fluido, che a sua volta ne sposta altra creando uno spostamento del tipo del disegno

Finendo con  $y$ , possiamo scrivere:  $\tau = \mu \frac{du}{dy} \rightarrow$  i fluidi che rispettano questa legge vengono chiamati Newtoniani

Introduciamo il piano REOLOGICO:



La presenza di un gradiente della velocità, comporta una variazione della forma del nostro elemento infinitesimo dipende quindi dalla elasticità di deformazione



5 fluidi ideali hanno bisogno di un solo parametro.

5 fluidi definiti come Bingham hanno la caratteristica di avere una tensione tangenziale iniziale.

5 fluidi dilatanti sono miscugli di particelle solide e miscele di liquidi

5 fluidi tixotropici sono dei fluidi che con il tempo diminuiscono la viscosità. Quelli reopettici aumentano invece la viscosità con il tempo.

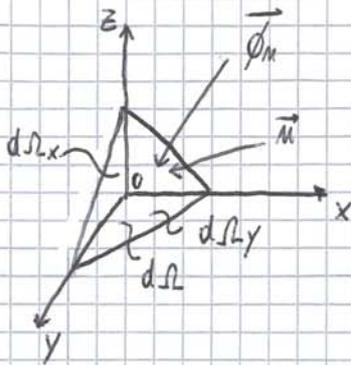
Alcuni fluidi si comportano come dei solidi e sono gli elasto-viscosi e per questi vale

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\mu} + \frac{\tau^0}{E} \rightarrow \text{modulo di elasticità tangenziale}$$

Cio che notiamo:  $\tau \propto \dot{\gamma}$  fluidi  
 $\tau \propto \gamma$  solidi

La viscosità fin ora definita è una viscosità dinamica

Cauchy ha ragionato su questo problema:



formata dal normale normale  $n$  con le direzioni dei tre assi coordinati

$\hat{m}_x =$  angolo direttore (ottuso)  $\rightarrow \cos \hat{m}_x < 0$

$$d\Omega_x = -\cos \hat{m}_x d\Omega$$

$$d\Omega_y = -\cos \hat{m}_y d\Omega$$

$$d\Omega_z = -\cos \hat{m}_z d\Omega$$

Tutte le forze di massa (inerzia, peso) sono proporzionali alla massa

$$F. \text{ massa } \propto dm = \rho \, dx \, dy \, dz$$

(vengono trascurate perché infinitesime del 3° ordine, rispetto a quelle superficiali che sono del 2° ordine)

Consideriamo le forze superficiali ( $d\vec{F}$ )

$$\vec{F}_n d\Omega - \vec{F}_x \cos \hat{m}_x d\Omega - \vec{F}_y \cos \hat{m}_y d\Omega - \vec{F}_z \cos \hat{m}_z d\Omega = \vec{0}$$

equilibrio delle trazioni

$$\boxed{\vec{F}_n = \vec{F}_x \cos \hat{m}_x + \vec{F}_y \cos \hat{m}_y + \vec{F}_z \cos \hat{m}_z}$$

TEOREMA DEL TETRAEDRO DI CAUCHY

La forza normale lungo una superficie orientata è uguale alla somma degli sforzi normali delle tre superfici normali lungo gli assi.

$$\begin{cases} \Phi_{nx} = \Phi_{xx} \cos \hat{m}_x + \Phi_{yx} \cos \hat{m}_y + \Phi_{zx} \cos \hat{m}_z \\ \Phi_{ny} = \Phi_{xy} \cos \hat{m}_x + \Phi_{yy} \cos \hat{m}_y + \Phi_{zy} \cos \hat{m}_z \\ \Phi_{nz} = \Phi_{xz} \cos \hat{m}_x + \Phi_{yz} \cos \hat{m}_y + \Phi_{zz} \cos \hat{m}_z \end{cases}$$

PROIEZIONI DEGLI SFORZI

SECONDO GENERICHE DIREZIONI

Tutte queste relazioni possono essere scritte in una matrice:

$$\begin{pmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} & \Phi_{xz} \\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy} & \Phi_{yz} \\ \Phi_{zx} & \Phi_{zy} & \Phi_{zz} \end{pmatrix}$$

Quelli sulle diagonali sono sforzi normali. Gli altri sforzi tangenziali.

Consideriamo il tutto da un altro punto di vista:

$$|\vec{\Phi}_n| = \sigma_n \quad (\text{in quanto sono nulle le tensioni tangenziali})$$

↓  
 sforzo che agisce sulla superficie  
 che ha come normale  $n$

$$|\vec{\Phi}_x| = \sigma_n ; |\vec{\Phi}_y| = \sigma_n ; |\vec{\Phi}_z| = \sigma_n$$

Dal teorema del tetraedro:

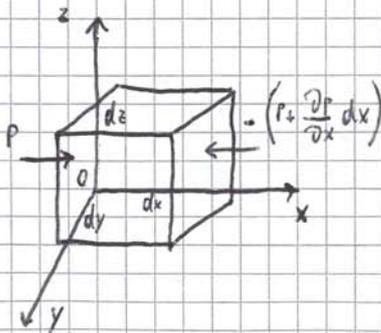
$$\begin{aligned} \textcircled{X} \quad \sigma_n \cos \hat{m}_x &= \sigma_x \cos \hat{m}_x \\ \textcircled{Y} \quad \sigma_n \cos \hat{m}_y &= \sigma_y \cos \hat{m}_y \\ \textcircled{Z} \quad \sigma_n \cos \hat{m}_z &= \sigma_z \cos \hat{m}_z \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z \quad \left( \begin{array}{l} \text{questi sono i termini} \\ \text{sulla diagonale} \end{array} \right) = p$$

Una caratteristica della statica dei fluidi è che la pressione è isotropa (uguale in tutti i punti)

Vogliamo trovare l'equazione differenziale che descrive:

$$p = p(x, y, z)$$

Considero un punto all'interno di un fluido, costruisco gli assi cartesiani e poi considero il punto attorno al parallelepipedo (forma semplice)

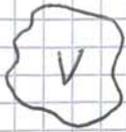


$$dV = dx dy dz \rightarrow p dV = dm$$

$$\vec{F} \cdot dm = \vec{F} p dx dy dz$$

↓  
 forza di massa, poiché il punto ha una propria massa  
 e si trova in un campo di forze

3) Se consideriamo un volume di fluido



$$\rho \vec{F} = \text{grad } p$$

$$\int_V \rho \vec{F} dV = \int_V \text{grad } p dV$$

equazione globale della statica dei fluidi

L'integrale a primo membro non è altro che la forza peso  $\vec{P}$ , in quanto  $\rho dV = dm$ .

Nel secondo membro, essendo presente una derivata in un integrale, possiamo <sup>utilizzando il</sup> ~~reciprocamente~~ <sup>teorema di</sup> ~~Green~~ Green

$$-\int_S (p \cos \hat{m}_x i + p \cos \hat{m}_y j + p \cos \hat{m}_z k) d\Omega = -\int_S p \vec{m} d\Omega = -\vec{F}_c$$

↓  
superficie

Il segno meno è dovuto al verso in diretta verso l'interno del volume

In definitiva:

$$\vec{P} + \vec{F}_c = 0$$

EQUAZIONE GLOBALE  
NELL'EQUILIBRIO STATICO

(opposto dell'esterno verso l'interno)

In un fluido in condizioni statiche la somma della forza peso con le forze di contorno è nulla

Facciamo delle ipotesi:

1) consideriamo la forza peso e non, come fatto fin ora, una generica forza di massa

$$\vec{F} = -\text{grad}(gz) \rightarrow \rho \text{grad}(-gz) = \text{grad } p$$

2)  $\rho = \text{costante}$  (fluido incomprimibile)

$$\text{grad}(-gz) = \text{grad } p \rightarrow \text{grad}\left(z + \frac{p}{\rho}\right) = 0 \rightarrow z + \frac{p}{\rho} = \text{costante}$$

Questa equazione così importante la scriviamo:

$$h = z + \frac{p}{\rho} = \text{costante}$$

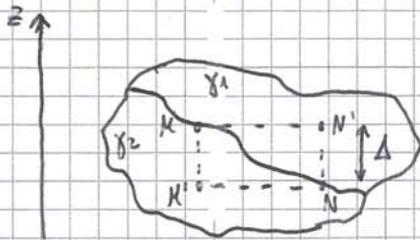
con  $h = \text{carica piezometrica}$

Consideriamo il caso in cui in un recipiente è presente olio ed acqua



L'olio è meno pesante quindi si trova sopra

Possiamo ottenere una superficie che non è orizzontale in quiete tra olio ed acqua?



$$P_M = P_{N'}$$

$$P_N = P_{M'}$$

$$P_N = P_{N'} + \Delta \gamma_1$$

$$P_{M'} = P_M + \Delta \gamma_2$$

$$\rightarrow P_{N'} + \Delta \gamma_1 = P_M + \Delta \gamma_2$$

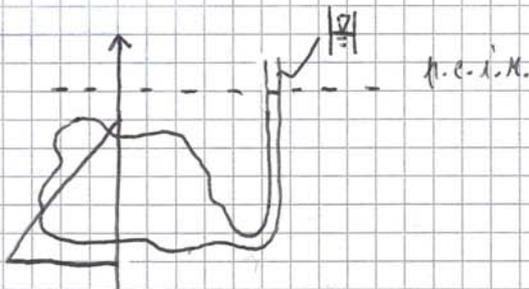
↓

$$\Delta \gamma_1 = \Delta \gamma_2$$

↓

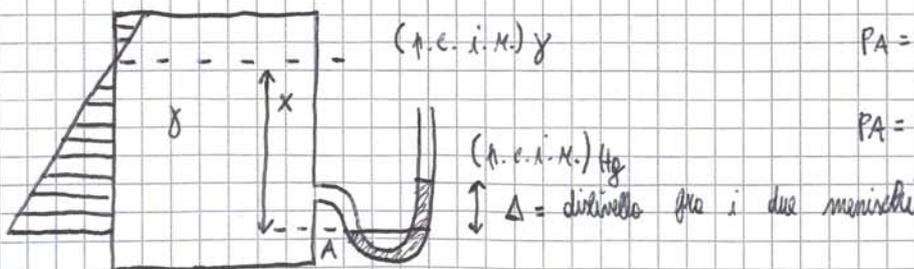
questo può verificarsi solo se i due liquidi sono uguali

Consideriamo un fluido, in cui inseriamo un tubicino (manometro)



questo rappresenta una quota in cui sono presente solo la pressione atmosferica e quella relativa sono nulle

Caso del manometro con dentro mercurio (fluido pesante)



$$P_A = \gamma_M \Delta$$

$$P_A = x \gamma = \gamma_M \Delta \rightarrow$$

$$x = \frac{\gamma_M}{\gamma} \Delta$$

la pressione relativa può essere negativa e questo vuol dire che è minore di quella atmosferica

Definiamo il momento statico:



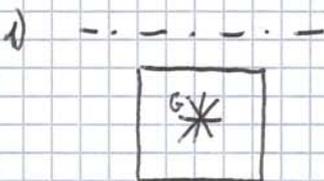
$$M_s = \int_{\Omega} x d\Omega = x_G \Omega$$

$$I = \int_{\Omega} x^2 d\Omega \quad (\text{momento d'inerzia})$$

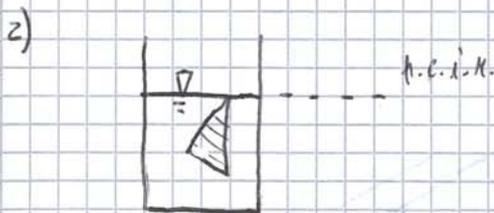
Quindi ricavo:  $S = \underbrace{y \sin \alpha}_{p_G} \underbrace{x_G \Omega}_{M_G}$

Ricavo quindi:  $S = p_G \Omega$

Osservazioni:

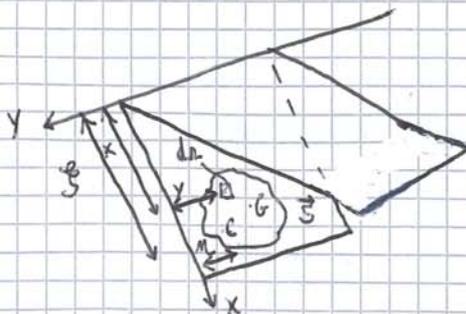


Se non cambia il baricentro la spinta non varia o scende dall'inclinazione



$S =$  risultante geometrica del solido delle pressioni

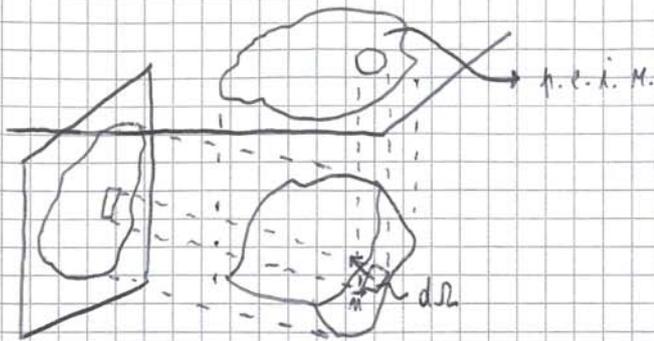
3) Se il centro di spinta non coincide con  $G$ , questo infatti coincide con il baricentro del volume delle pressioni. La spinta è applicata al centro di spinta



04/10/2014

# SPINTE SUPERFICIE CURVE

Consideriamo il caso delle superfici curve



$$\vec{dS} = p d\Omega = h \gamma d\Omega \vec{n}$$

$\vec{n}$  = normale entrante

Nel caso in cui immergiamo gli assi:

$$dS_x = h \gamma (d\Omega \cos \alpha) \rightarrow dS_x = h \gamma d\Omega_x$$

La componente di  $dS$  lungo l'asse  $x$  la posso considerare come la spinta sulla superficie piana della proiezione della superficie curva sul piano  $x=0$

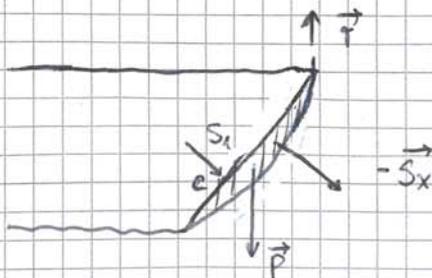
$$S_x = \int_{\Omega_x} h \gamma d\Omega_x$$

Stesso caso vale riferendoci agli altri assi:

$$S_y = \int_{\Omega_y} \gamma h d\Omega_y ; \quad S_z = \int_{\Omega_z} \gamma h d\Omega_z$$

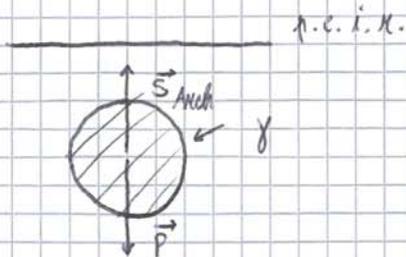
Nel caso della proiezione lungo l'asse  $z$ , questa va a coincidere con il piano dei corredi idrostatici. Le spinte su superfici curve possono ricondursi quindi a tre spinte su superfici piane.

Consideriamo il caso in cui abbiamo un bacino di acqua limitato da un lato da una parete e tirato da un tirante



Il principio può essere dimostrato anche attraverso l'equazione globale:

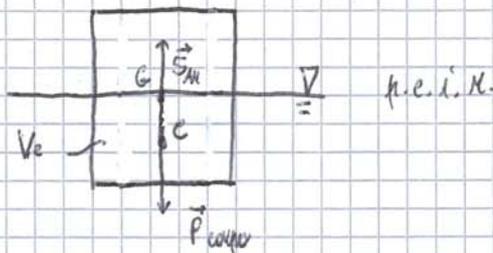
$$\vec{P} + \vec{F}_e = 0$$



Suppongo che la sfera abbia lo stesso  $\gamma$  del fluido esterno

$$\begin{aligned} \vec{F}_e &= \vec{S}_{Arch} \\ \vec{F}_e &= -\vec{P} \end{aligned} \rightarrow \vec{S}_{Arch} = -\vec{P}$$

## BALLE GIANTI



La parte che sta sotto e viene lo spirito di Archimede prende il nome di volume di corono o vaso

$C$  = baricentro del volume di corono (dipende dalla geometria)

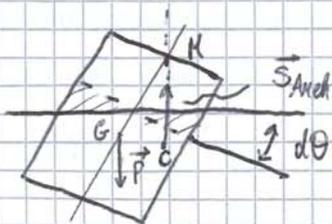
$G$  = baricentro del corpo (dipende dalla distribuzione delle masse)

$$\gamma V_e = \vec{P}_{corpo}$$

condizioni di galleggiamento

Da questa relazione nasce il problema di soluzioni stabili e non stabili, proprio perché non vedremo mai un galleggiante dritto verticalmente.

Analizziamo di inclinazione:



Il baricentro del corpo non varia, ma varia quella del corono o secondo del volume sommerso

Di un corpo immerso definiamo il volume di corono (sommerso) che è separato dalla superficie di galleggiamento da quello emerso

Ponendo uguali i due momenti (lo coppia che tocca la punta di Archimede, non proprio uguale alla punta)

$$\gamma V_c \bar{GK} d\theta = \gamma d\theta I_x \rightarrow \boxed{\bar{GK} = \frac{I_x}{V_c}}$$

↓  
distanza metacentrica

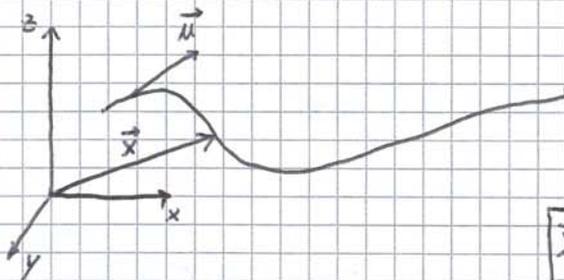
Ma una nave  $\bar{GK} = 0(1)m$

06/10/2014

**CINEMATICA:** argomento della meccanica in cui le grandezze fondamentali sono lo spazio e il tempo

La descrizione della velocità di un fluido è un problema che può essere affrontato dal punto di vista lagrangiano:

considera un fluido costituito da tante particelle che si muovono ciascuna con la propria velocità  $\vec{u}$  e con la propria traiettoria

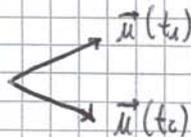


$$\vec{u} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} ; \vec{A} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

$\vec{x} = \vec{x}(x_0, y_0, z_0, t)$

APPROCCIO LAGRANGIANO

Subito invece affronta il problema considerando il campo di moto, ovvero il vettore velocità che dipende dallo spazio e dal tempo (trascura la traiettoria).



$\vec{u} = \vec{u}(x, y, z, t)$

APPROCCIO EULERIANO O PUNTO DI VISTA  
EULERIANO

In questo modo definisco l'accelerazione in maniera diversa:

$$\vec{A} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + |\vec{v}| \frac{\partial \vec{u}}{\partial s} = \frac{D\vec{u}}{Dt}$$

della velocità

accelerazione sostanziale

accelerazione convettiva che coinvolge la variazione  
nello spazio

accelerazione locale, poiché guarda la variazione della velocità in un punto

Questo risultato ottenuto può essere applicato ad una grandezza come la densità:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + |\vec{v}| \frac{\partial \rho}{\partial s}$$

ma può anche essere applicato alla temperatura, alla viscosità.

Riferendolo ad una generica grandezza:

$$\frac{D\cdot}{Dt} = \frac{\partial \cdot}{\partial t} + |\vec{v}| \frac{\partial \cdot}{\partial s}$$

↓  
modulo del campo di moto

Riferendo il tutto lungo i tre assi:

$$A_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$A_y = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$A_z = \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

Nel caso in cui vogliamo ricavare le traiettorie dal punto di vista Euleriano, basta utilizzare queste relazioni:

$$dx = u(x, y, z, t) dt$$

$$dy = v(x, y, z, t) dt$$

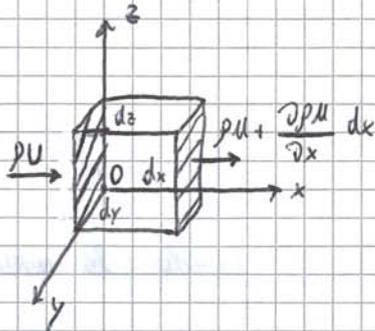
$$dz = w(x, y, z, t) dt$$

Da qui definisco la velocità media della sezione:

$$U = \frac{Q}{\Omega}$$

Una sezione è trasversale se  $|\vec{U}| = \vec{U} \cdot \vec{n}$ , ovvero quella <sup>sezione</sup> in cui  $d\Omega$  è perpendicolare alla velocità in ogni punto.

Consideriamo un parallelepipedo attorno al punto 0.



$$dV = dx dy dz$$

$$\vec{u}(x, y, z, t)$$

Lungo la superficie considerata entro la seguente massa:

$$\rho u dt dy dz$$

Nella superficie opposta, in uscita abbiamo:

$$\left( \rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx \right) dy dz dt$$

BILANCIO DELLA MASSA CHE ATTRAVERSA LA SUPERFICIE DI CONFINO LUNGO L'ASSE X:

$$\rho u dt dy dz - \left( \rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx \right) dy dz dt = - \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx dy dz dt$$

Lungo gli altri assi:

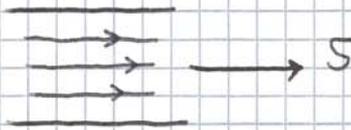
$$\textcircled{Y} - \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy dx dz dt$$

$$\textcircled{Z} - \frac{\partial \rho w}{\partial z} dz dx dy dt$$

$$\int_{\Omega} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} d\Omega = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

EQUAZIONE GLOBALE  
DI CONTINUITÀ

CORRENTI: quando le particelle di un fluido si muovono tutte in una stessa direzione

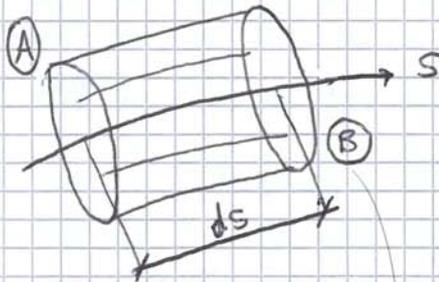


Le traiettorie sono sensibilmente rettilinee e parallele



In questo <sup>caso</sup>  $\forall$  le grandezze sono funzione di  $S$  e del tempo  $\rightarrow f(S, t)$

Consideriamo una corrente:



Massa che entra dalla sezione A:

$$\rho Q dt$$

Massa che esce dalla sezione B:

$$\left( \rho Q + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial S} ds \right) dt$$

$$\text{entra} - \text{esce} = \boxed{- \frac{\partial(\rho Q)}{\partial S} ds dt}$$

04/10/2016

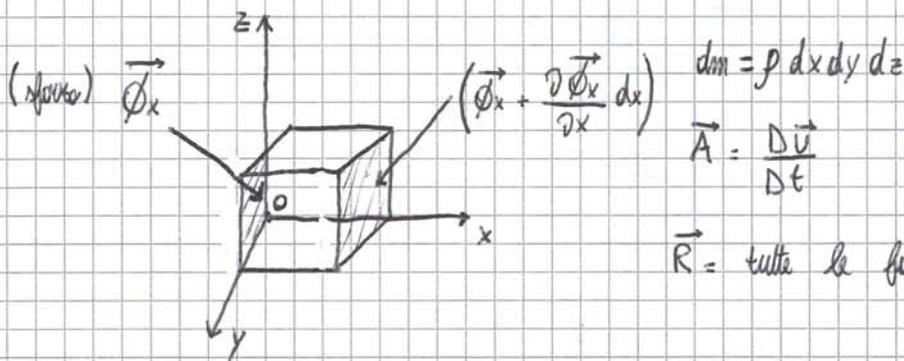
# DINAMICA

Principio della conservazione della quantità di moto:

$$\vec{R} = m \vec{A}$$

$$m \frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{d}{dt} m \vec{U}$$

Consideriamo un punto 0 della nostra massa fluida:



Essendo presente una massa troveremo le forze di massa:

$$\vec{F} \rightarrow \vec{F} \rho dx dy dz$$

Avendo un contorno troveremo le forze di superficie:

$$\vec{\Phi}_x dy dz - \left( \vec{\Phi}_x + \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} dx \right) dy dz = - \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} dx dy dz$$

N.B. il segno meno è dovuto al fatto che, considerando sempre le normali entranti, queste hanno segno opposto.

$$\textcircled{y} - \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} dy dx dz ; \textcircled{z} - \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z} dz dx dy$$

In definitiva:

$$\rho \vec{F} dx dy dz - dx dy dz \left( \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z} \right) = \rho dx dy dz \frac{D\vec{U}}{Dt}$$

$$\rho (\vec{F} - \vec{A}) = \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z}$$

EQUAZIONE INDEFINITA DELLA  
DINAMICA DEL FLUIDO

$$\rho \vec{A} = \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right) = \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{\rho u \frac{\partial \vec{u}}{\partial x}}_{\frac{\partial(\rho u \vec{u})}{\partial x} - \vec{u} \frac{\partial \rho u}{\partial x}} + \rho v \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \rho w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}$$

$$= \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left( \frac{\partial \rho u \vec{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \vec{u}}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \vec{u}}{\partial z} \right) - \vec{u} \underbrace{\left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right)}_{\text{div } \rho \vec{u}}$$

Secondo dell'equazione della continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{u} = 0 \rightarrow \text{div } \rho \vec{u} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

otengo: *ho inglobato primo e terzo termine*

$$\rho \vec{A} = \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \left( \frac{\partial \rho u \vec{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \vec{u}}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \vec{u}}{\partial z} \right)$$

avendo forse:

$$- \int_V \rho \vec{A} dV = - \int_V \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} dV - \int_V \underbrace{\left( \frac{\partial \rho u \vec{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \vec{u}}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \vec{u}}{\partial z} \right)}_* dV = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{u} dV + \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} d\Omega$$

$$* - \int_{\Omega} \underbrace{\rho \vec{u} (u \cos \hat{m}_x + v \cos \hat{m}_y + w \cos \hat{m}_z)}_{N_n} d\Omega$$

Dalla mia equazione di partenza ho ottenuto:

$$\int_V \rho \vec{F} dV - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{u} dV + \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} d\Omega + \int_{\Omega} \vec{F}_c d\Omega = 0$$



Osservazione:

gli operatori possono essere lineari e non lineari (due mondi diversi)

Un operatore è lineare se vale:  $L(u+v) = L(u) + L(v)$

Nel caso in cui è lineare si può applicare il principio della sovrapposizione degli effetti altrimenti  $\hat{N}$  entra nel campo dei problemi complessi

TEOREMA DI BERNOULLI

Ipotesi:

1) fluido perfetto

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } p$$

2) campo della gravità (unica forza di massa)

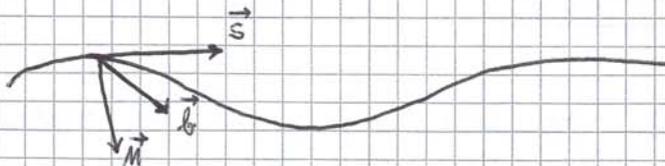
$$\vec{F} = -\text{grad}(gz)$$

3)  $\rho = \text{costante}$

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } p \rightarrow \rho(-\text{grad}(gz) - \vec{A}) = \text{grad } p \rightarrow \gamma \text{grad}(z) + \rho \vec{A} + \text{grad } p = 0$$

$$\rightarrow \text{grad}(z) + \frac{1}{\gamma} \vec{A} + \text{grad}\left(\frac{p}{\gamma}\right) = 0 \rightarrow \text{grad}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{1}{\gamma} \vec{A}$$

Considero una certa traiettoria e una forma di riferimento intrinseca (tangente, normale e binormale)



L'equazione viene proiettata lungo i tre assi:

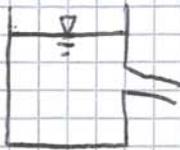
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) &= -\frac{1}{\gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} \right) \rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{u^2}{2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial n} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) &= -\frac{1}{\gamma} \left( \frac{u^2}{R} \right) \rightarrow \text{accelerazione centripeta} \\ \frac{\partial}{\partial b} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) &= 0 \end{aligned} \right.$$

08/10/2016

Applicazioni del Teorema di Bernoulli:

FOROMETRIA

luci a sottobattente



luci a stroncotto

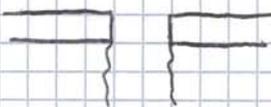


Essendo questi problemi di difficile riduzione mi limito a voler conoscere la portata (Q)

Considero un serbatoio in cui applico un foro nel fondo:



La caduta dell'acqua varia dalla forma dello spigolo:

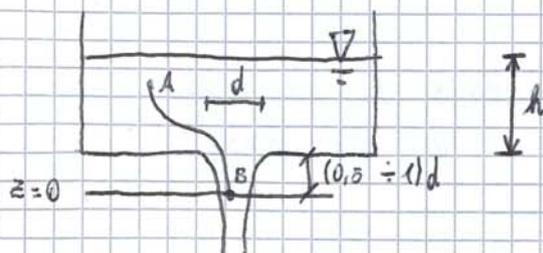


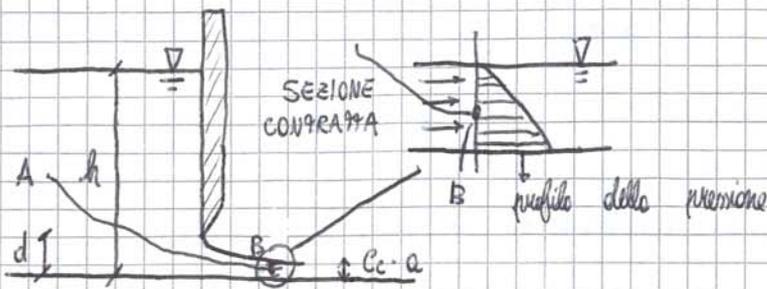
spigolo vivo → diverso limite dell'acqua

Le variabili molto importanti, che influenzano nel getto, sono  $\vec{A}$ ,  $\vec{g}$ ,  $S$  (teniamo superficie)

Un ruolo molto importante ce lo ha la sezione del foro, con quella circolare che è la più semplice

Considero quindi per il serbatoio una sezione circolare e gli spigoli vivi.





$h \gg d$

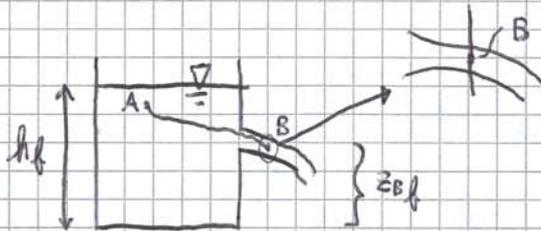
$$H_A = H_B \rightarrow \underbrace{z_A + \frac{P_A}{\gamma}}_h + \frac{U_A^2}{2g} \stackrel{\approx 0}{=} z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{U_B^2}{2g}$$

$$= \underbrace{Ce \cdot a}_{\substack{\text{altezza sezione} \\ \text{contratta}}} + \frac{U_B^2}{2g}$$

$$U_B = \sqrt{2g(h - Ce \cdot a)}$$

$Q = (C_r U_B)(Ce \cdot a \cdot b)$  PORTATA

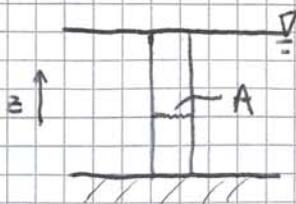
Consideriamo il caso in cui il foro, anziché nel fondo, sia a metà recipiente:



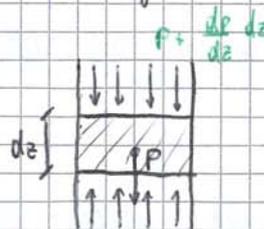
$$H_A = H_B \rightarrow \underbrace{z_A + \frac{P_A}{\gamma}}_{hf} + \frac{U_A^2}{2g} \stackrel{\approx 0}{=} z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{U_B^2}{2g} = 0$$

$$hf = z_B + \frac{U_B^2}{2g}$$

Il problema nasce dal fatto che  $P_B = 0$  e  $z_B + \frac{P_B}{\gamma} = \text{costante}$ , ma  $z_B$  varia. Ragioniamo:



$\vec{P} + \vec{F}_c = 0$



$$PA = \gamma dz A + (P + \frac{dP}{dz} dz) A \rightarrow$$

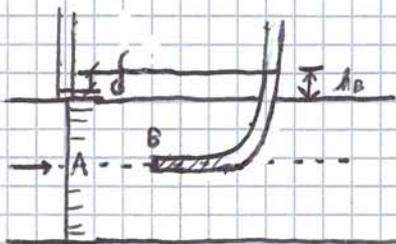
Si considera una colonna poggiate in un recipiente che contiene liquido a quiete e se ne isola una strati

13/10/2014

Introduzione parlando di:

- 1) Mulinelli
- 2) Anemometro a filo caldo
- 3) Anemometro laser doppio
- 4) PIV

TUBO DI PIVOT



A e B sono vicini → dimensioni trascurabili

B = punto di ristagno →  $U_B = 0$   
 A = punto in cui la corrente non è disturbata dal tubo

Una corrente investe questo tubo, che si riempie di fluido

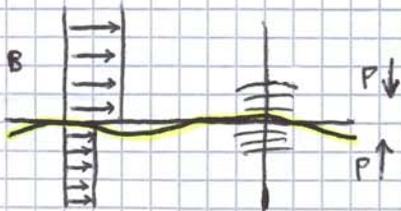
$$H_A = H_B \rightarrow \underbrace{z_A + \frac{P_A}{\gamma}}_{h_A} + \frac{U_A^2}{2g} = \underbrace{z_B + \frac{P_B}{\gamma}}_{h_B} + \frac{U_B^2}{2g} = 0 \rightarrow U_A = \sqrt{2g(h_B - h_A)}$$

$\delta$   
 ↓  
 distanza menischi dei piezometri

KELVIN - HELMHOLTZ

con profili di velocità

Consideriamo due fluidi ideali che si muovono stratificati, uno sopra l'altro. Se sono perfetti, non si creano tensioni tangenziali.



Supponiamo che ci sia una perturbazione sinusoidale tra la superficie di separazione.

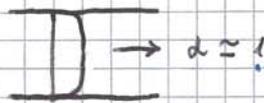
Mettonoci su una cresta notiamo che in un punto aumenta la velocità e questo implica la diminuzione di qualcosa presente nel Teorema di Bernoulli e ciò deve essere necessariamente la pressione, restando costante l'altezza.

$$\text{costante} \Big|_s = \gamma \left[ \left( z + \frac{r}{\gamma} \right) Q + \alpha \frac{v^2}{2g} \underbrace{\frac{v \Omega}{Q}} \right] = \gamma \left[ Q \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g} \right) \right]$$

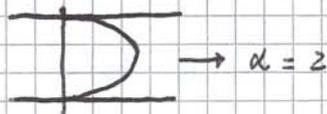
essendo  $\gamma$  e  $Q$  costanti  $\rightarrow H = \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g} \right) = \text{costante}$   
 ↓  
 carico totale riferito a tutta la sezione

di flusso

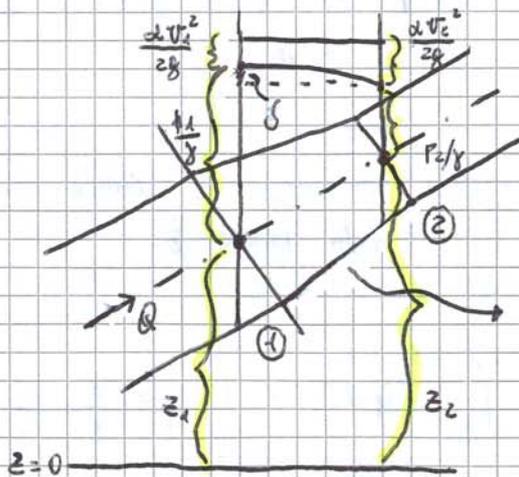
Nel caso  $\nabla$  turbolento:



Nel caso di flusso laminare:



ES. VENTURIMETRO



questo tratto è debolmente convergente  
 ↓  
 carico totale  $H$  rimane costante

$$S = h_1 - h_2 = \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} - \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$$

$$v_1 = \frac{Q}{\Omega_1} ; v_2 = \frac{Q}{\Omega_2}$$

$$v_1 = v_1(Q, \Omega_1) ; v_2 = v_2(Q, \Omega_2)$$

Bisogna stare attenti a non far bollire in B il liquido, altrimenti ovvero delle bolle di gas

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{u} - \frac{1}{3} \mu \text{grad div } \vec{u}$$

EQUAZIONE INDEFINITA  
DI EQUILIBRIO DEL MOTO DI UN  
FLUIDO VISCOSO di

Nella nostra applicazione  $\rho = \text{costante} \rightarrow$  fluido incompressibile  $\rightarrow$  dell'equazione  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$

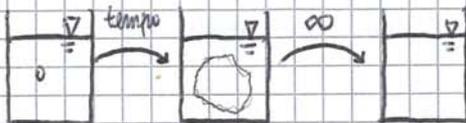
$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{u}$$

con  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  (LAPLACIANO)

EQUAZIONE NAVIER-STOKES

↓  
termine diffusivo

Es.



Nel caso in cui mettiamo dell'inchiostro in un liquido questo si diffonde dopo un po' di tempo e all'infinito non recupererà più quella struttura.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla^2 c \text{ (FICK)}$$

integrata

Sviluppando l'equazione  $\nabla$  di Navier-Stokes riesce a definire meglio le forze di contatto

$$\vec{P} + \vec{\pi} - \underbrace{\mu \int_{\Omega} \frac{\partial \vec{u}}{\partial m} d\Omega}_{\vec{F} \text{ (tangenziali)}} + \vec{I} + \vec{K}_e - \vec{K}_v = 0$$

$$\vec{P} + \underbrace{\vec{\pi} - \vec{T}}_{\vec{F}_c} + \vec{I} + \vec{K}_e - \vec{K}_v = 0$$

$\vec{F}_c =$  forze di contatto

$\vec{\pi} =$  forze normali, definite attraverso l'equazione di Eulero

La viscosità proviene quindi dalle forze tangenziali

$$\tau = \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}}$$

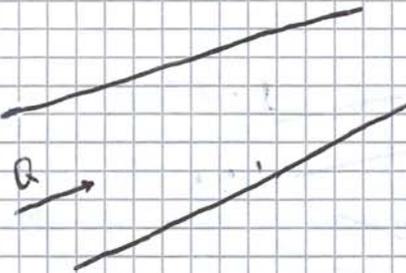
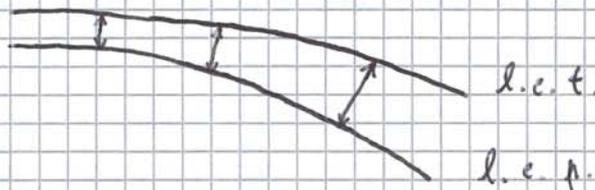
4 gradienti spaziali di velocità nascono dal fatto che il fluido è in contatto con la superficie - annulla la sua velocità percorrendo il tubo

$$-\frac{\partial H}{\partial s} = i(s)$$

pendenza motrice  
(costante piezometrica)

il segno meno è dovuto al fatto che l'energia diminuisce lungo il tubo e quindi con questo ottengo una pendenza motrice positiva

Nel caso in cui le condotte non sono perfettamente cilindriche la l.e.t. può assumere andamento curvilineo. Di ciò ne risente anche la l.e.p., in quanto diminuendo la sezione aumenta il termine cinetico



In quanto cosa quindi:

$$i = i(\text{geometria, fluido, ...})$$

$$-\frac{\partial H}{\partial s} = i \rightarrow H(s) = H_0 - \int_0^s i(s) ds$$

Nel caso visto inizialmente, caso particolare:

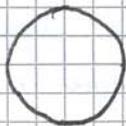
$$i \neq i(s) \rightarrow H(s) = H_0 - s \cdot i$$

$$\tau = \gamma \cdot R$$

Le tensioni tangenziali dipendono dalle proprietà del fluido, dall'inclinazione dello  $\lambda$  e dalla geometria del tubo

Nel punto di vista idraulico la sezione più efficace è il cerchio, in quanto l'area è molto più grande del perimetro e quindi necessita di meno energia

Il rettangolo invece è presente in quei casi in cui il sistema presenta molto energia



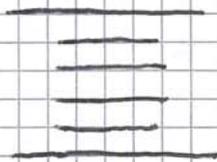
$$R = \frac{D}{4}$$



## MOTI DEL FLUIDO

MOTO LAMINARE:

Le traiettorie sono parallele, come delle lamine sovrapposte



Questo moto è facilmente perturbabile, dando vita al moto turbolento, <sup>molto</sup> problematico in meccanica dei fluidi

Reynolds ha definito un parametro, in cui include tutti i parametri caratterizzanti il passaggio dal moto laminare a quello turbolento

$$Re = \frac{V D \rho}{\mu}$$
 con  $V =$  velocità media } proprietà della sezione  
 $D =$  diametro

numero adimensionale  
 proprietà del fluido

Il numero di Reynolds è definito:

$$\frac{\rho U l}{\mu}$$
 scala tipica delle lunghezze      scala tipica delle velocità

La scala dipende dal tipo di problema che stiamo analizzando

$$\frac{\rho U l}{\mu} = \frac{\rho U}{\nu}$$
 → utilizzabile se le lunghezze e le velocità hanno delle scale comparabili

Il numero di Reynolds è il rapporto tra le forze di inerzia e le forze viscosive

Il passaggio al moto turbolento è legato quindi a delle forze viscosive < delle forze di inerzia

Il problema poteva essere analizzato partendo da un modello matematico. Consideriamo esempio l'equazione di Navier-Stokes

**modello** (equazioni differenziali)

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{U}$$

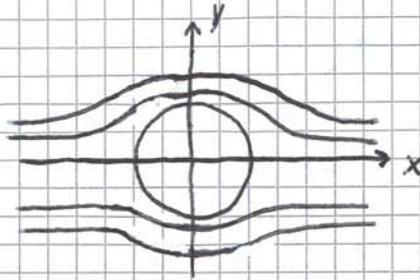
problema fisico

$l, \mu, \rho, \nu, \rho \mu^2$

grandezze utili a definire il mio problema

Normalizzando tutte le grandezze allo propria scala, ottengo un numero adimensionale che mi varia da 0 a 1 (range) e mi permette anche di confrontare problemi diversi

Nel caso in cui  $Re \rightarrow 0$ , abbiamo soltanto deviate con esponenti pari e questo implica un problema con simmetria

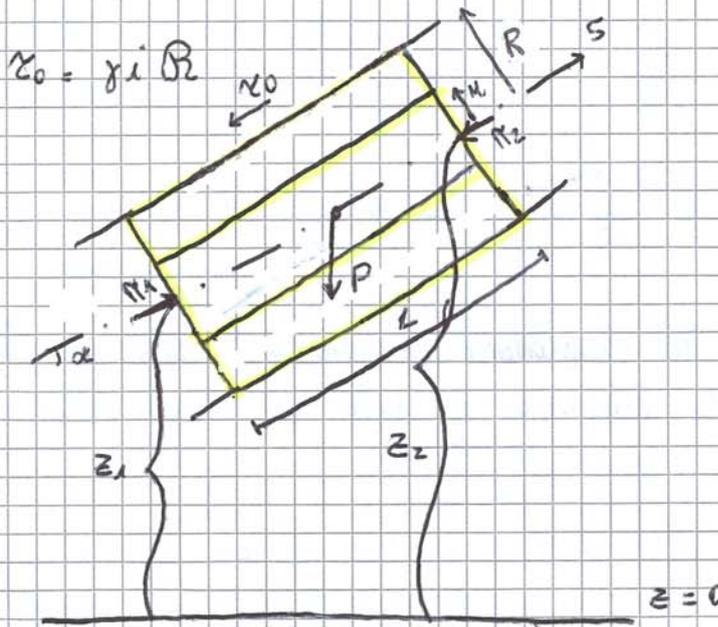


### MOTO LAMINARE

- 1) mezzi porosi
- 2) nongue
- 3) teoria della lubrificazione

Tra tutti i tipi di moto possibili consideriamo il moto uniforme di una corrente cilindrica a sezione circolare

$$\vec{P} + \vec{\pi} - \vec{T} + \vec{I} + \vec{K}_e - \vec{K}_u = 0$$



Consideriamo due cilindri con  $R > r$

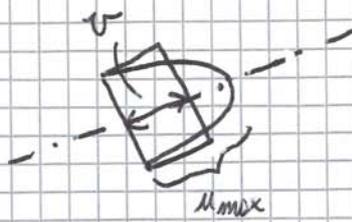
$$\vec{P} = \underbrace{\rho}_{\text{densità}} \underbrace{\Omega}_{\text{volume}} \underbrace{g}_{\text{gravità}} = \rho \pi R^2 L \frac{z_2 - z_1}{L} = \rho \pi R^2 (z_2 - z_1) \quad p_1 \pi R^2 - p_2 \pi R^2 = \pi_1 - \pi_2$$

$$\vec{K}_e = \vec{K}_u \rightarrow \vec{K}_e - \vec{K}_u = 0$$

$$\vec{T} = \rho \pi R^2 \left[ \left( z_1 + \frac{r_1}{\gamma} \right) - \left( z_2 + \frac{r_2}{\gamma} \right) \right] = \rho \pi R^2 \Delta L \quad \left( \text{resistenza al moto incontrata dal liquido nel cilindro} \right)$$

$$v_{max} = \frac{\gamma i}{4\mu} \frac{D^2}{4} = \frac{\gamma i D^2}{16\mu}$$

valore massimo in corrispondenza dell'asse del condotto



per Teorema di Cauchy  
i metà del volume  
racchiuso parabolico  
(velocità media)

$$v = \frac{\gamma i D^2}{32\mu} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$Q = v \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\gamma i D^4 \pi}{128\mu}$$

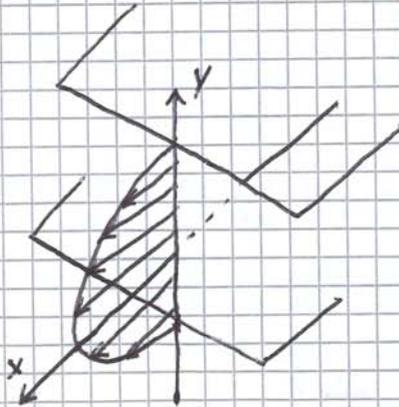
↓  
portata

si ottiene integrando la velocità dell'intera  
sezione trasversale:  $\int_0^{D/2} v \cdot 2\pi r dr$

$$i = \frac{128\mu Q}{\gamma D^4 \pi}$$

Legge di Poiseuille (energia che deve spendere per spostare  
una corrente di un'unità di lunghezza)

Consideriamo due lastre parallele  
un moto tra



$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{U}$$

$$\vec{A} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{U}}{\partial z}$$

$\frac{\partial}{\partial t} = 0$     $\frac{\partial}{\partial x} = 0$     $\frac{\partial}{\partial y} = 0$     $\frac{\partial}{\partial z} = 0$

si annullano perché il moto è  
permanente, uniforme e non nulla  
v e w

Dalla geometria scelta, il termine non lineare, è nullo

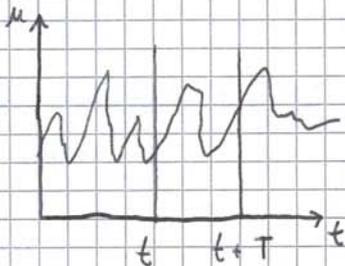
22/10/2016

# TURBOLENZA

Le caratteristiche generali sono:

- caoticità
- non linearità (si passa nettamente dal moto laminare a quello turbolento)
- dissipativo (spende molta energia per spostare un corpo da una parte all'altra del)
- diffusivo (una caratteristica è che la turbolenza rompe le simmetrie)
- isotropico (la turbolenza ha bisogno di tutto il mondo tridimensionale)

La velocità media è quella che si ottiene mediando nel tempo <sup>infinita</sup> la turbolenza.



$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(t) dt$$

La media di una grandezza la definisco come:

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t) dt$$

Il limite di questa definizione data da Reynolds è nella scelta dell'intervallo. Questo deve essere così grande che qualunque intervallo scelga in seguito questo deve dare lo stesso risultato. Arrivo al punto in cui penso che questo intervallo non esiste.

Questo problema viene risolto, notando che, scegliendo intervalli sempre più grandi, le curve si appiattiscono.



La variabile  $z$  serve a guidare il sistema

Nel caso in cui consideriamo due processi si può ottenere un numero di correlazione diverso, ma questo non implica nulla.

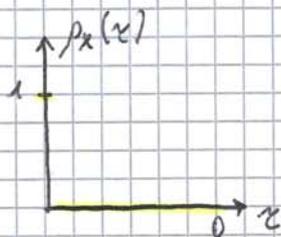
↳ due processi possono essere confrontati se i valori vengono normalizzati.

$$\frac{\overline{x(t)y(t+z)}}{\sqrt{\overline{x^2}}\sqrt{\overline{y^2}}} = \text{cross-correlazione}$$

Da qui si può definire l'autocorrelazione:

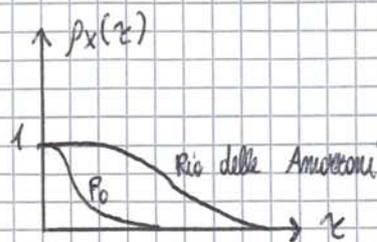
$$\frac{\overline{x(t)x(t+z)}}{\overline{x^2}} = \rho_x(z)$$

↳ segnali che sono puramente casuali hanno questo andamento dell'autocorrelazione:



Diagonalmente l'autocorrelazione ottengo la memoria del segnale, che risulta maggiore se tende meno velocemente a zero.

Esempio del Po e del Rio delle Amazzoni influenzati dalle piogge



$$M = \int_0^{\infty} \rho(z) dz$$

↓  
 scala integrale → indica la memoria del segnale, indica l'inertio del sistema

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - g \delta_{i3}$$

perché  $g$   $i$  non mette  $x$   
lungo  $z$  (3<sup>a</sup> direzione)

24/10/2016

Nell'equazione precedente è stata introdotta il  $\delta$  di Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\frac{\partial (\bar{u}_i + u_i)}{\partial x_i} = 0$$

La media temporale è un operatore lineare: la derivata della media è uguale alla media della derivata

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i + u_i) = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \cancel{u_i}}{\partial x_i} = 0 \rightarrow \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

Risolve l'equazione chiamando diversamente ogni termine:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - g \delta_{i3}$$

(1)            (2)            (3)            (4)            (5)

$$(1) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial (\bar{u}_i + u_i)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \cancel{u_i}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}$$

$$(3) \tilde{p} = \bar{p} + p$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{p} + p)}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + 0 \right)$$

Il problema della chiusura nel mondo turbolento è legato che la non-correlazione doppia, scritta in funzione delle altre variabili, presenterebbe la non-correlazione tripla e il problema andrebbe avanti all'infinito.

Da qui nascono i modelli di chiusura, che mi permettono di scrivere:

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} = f(\overline{u_i}, \overline{p})$$

Ritorno l'equazione precedente:

$$\underbrace{\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}}_{\text{derivata euleriana della velocità } i\text{-esima}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ -\overline{u_i u_j} + \nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right] - g \delta_{i3}$$

gradiente spaziale delle tensioni

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}) - g \delta_{i3}$$

$$\text{con } \tau_{ij} = \overline{p} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u_i u_j}$$

tensioni alle pressioni  
↓  
legge

tensioni viscoso

tensioni di Reynolds, tipiche del moto turbolento

$$-\rho \overline{u_i u_j} = -\rho \begin{pmatrix} \overline{u_1^2} & \overline{u_1 u_2} & \overline{u_1 u_3} \\ \overline{u_1 u_2} & \overline{u_2^2} & \overline{u_2 u_3} \\ \overline{u_1 u_3} & \overline{u_3 u_2} & \overline{u_3^2} \end{pmatrix}$$

Le tensioni di Reynolds sono le più rilevanti ed esistono anche nei fluidi ideali.

Queste tensioni non esistono microscopicamente, ma nascono nel momento in cui decomponiamo quanto accade macroscopicamente.

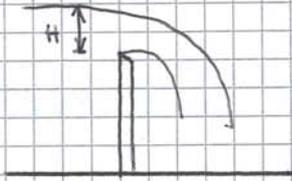
Un sistema è invertibile quando il determinante delle dimensioni delle grandezze è diverso da zero.

Sistema in cui le grandezze fondamentali sono per esempio  $l, t, m$   
 $y = f(Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N)$  (N+1)

Sistema in cui le grandezze fondamentali sono  $Q_1, Q_2, Q_3$   
 $\frac{Y}{Q_1^{\alpha_1} Q_2^{\beta_2} Q_3^{\gamma_3}} = f \left( Q_1, Q_2, Q_3, \underbrace{Q_4}_{\pi_4}, \dots, \underbrace{Q_N}_{\pi_N} \right)$  (N-3)

Dal combinarsi del sistema si nota come le grandezze in gioco si riducono di tre e questo è il risultato del Teorema di Buckingham (Teorema Piagge)

Es.

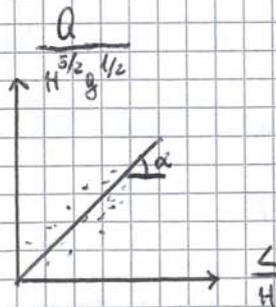


ha interesse vedere la portata di liquido sopra lo strarico

$$Q = f(H, g, \angle, \chi)$$

↓  
 dipende da un liquido e contatto con la parete

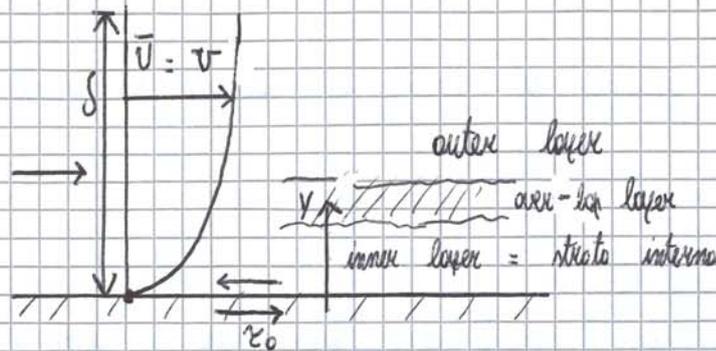
$$\frac{Q}{H^{5/2} g^{1/2}} = f_2 \left( \frac{\angle}{H} \right)$$



dall'esperienza viene una serie di punti ma l'andamento millimetrico

$$\frac{Q}{H^{5/2} g^{1/2}} = \alpha \frac{\angle}{H}$$

Considerare una superficie liscia con sopra un fluido in moto turbolento



il fluido è in contatto con

Questo problema viene risolto da Millikan utilizzando il Teorema  $\pi$ . Consideriamo  $\sqrt{\text{superficie}}$

$$v = v(y, \rho, \nu, z_0)$$

In questa relazione sono presenti due grandezze dipendenti dalla massa, mentre la nostra incognita non dipende dalla massa

$$\left[ \frac{z_0}{\rho} \right] = \left[ \frac{L^2}{T^2} \right] \quad \text{il loro rapporto è indipendente dalla massa}$$

definisco  $u_* = \sqrt{\frac{z_0}{\rho}}$ , che diventa la scala tipica delle velocità

$$v = v(y, \nu, u_*) \quad \text{grandezze del numero di Reynolds}$$

$$\frac{v}{u_*} = f\left(\frac{y u_*}{\nu}\right) = f(y_+)$$

$y_+$  →  $\frac{y}{\nu/u_*}$  → scala tipica delle lunghezze

Nella zona lontana della superficie, outer layer, l'osservazione corretta da fare è l'indipendenza della velocità dalla viscosità, ma in questa zona entra in gioco la scala globale

$$v = v(y, \rho, \underbrace{z_0}_{u_*}, \nu, \delta) \rightarrow v = v(y, u_*, \delta)$$

$$\frac{v}{u_*} = F\left(\frac{y}{\delta}\right) = F(\xi)$$

03/11/2016

Consideriamo l'equazione globale della dinamica e cerchiamo di scriverla in termini medi:

$$\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{I} + \vec{K}_e - \vec{K}_u = 0$$

Nel caso di  $\vec{P}$  questo numero invariato, in quanto è la sommatoria di tutte le forze di massa e quindi coincide con il suo valore medio.

Le forze e contorni sono così definite:

$$\vec{F}_c = \int_{\Omega} \vec{\Phi}_m d\Omega$$

↳ Entero

Navier-Stokes

$$\vec{\sigma} - \mu \int_{\Omega} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{m}} d\Omega$$

$$\vec{\Phi}_m = \vec{\Phi}_m + \vec{\Phi}_m'$$

↳ termine medio

↳ termine di agitazione turbolenta (scarto)

$$\vec{F}_c = \int_{\Omega} (\vec{\Phi}_m + \vec{\Phi}_m') d\Omega$$

Applichiamo l'operatore medio

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \left[ \int_{\Omega} (\vec{\Phi}_m + \vec{\Phi}_m') d\Omega \right] dt$$

Gli integrali sono invertibili quando sono invertire i termini di integrazione.

Per fare ciò suppongo che  $\Omega$  non vari nel tempo

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (\vec{\Phi}_m + \vec{\Phi}_m') dt \right] d\Omega \rightarrow \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{T} \left( \int_t^{t+T} \vec{\Phi}_m dt + \int_t^{t+T} \vec{\Phi}_m' dt \right) \right] d\Omega$$

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \vec{F}_c dt = \int_{\Omega} \vec{\Phi}_m d\Omega$$

$\vec{\Phi}_m$

↳ la media degli scarti nel tempo è nulla (è una proprietà)

$$= \rho \int_{\Omega} \overline{v_i v_i'} d\Omega = \overline{M_i} \rightarrow \text{termine turbolento}$$

in definitiva:

$$\overline{P} + \overline{F_c} + \overline{I} + \overline{K_e} - \overline{K_i} + \overline{M_i} = 0$$

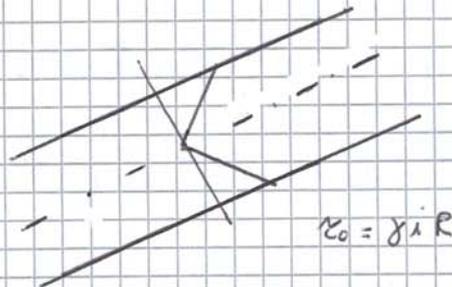
Da questa equazione si evince come non è possibile separare i termini turbolenti da quelli medi

Nel caso in cui il fluido non è incomprimibile:

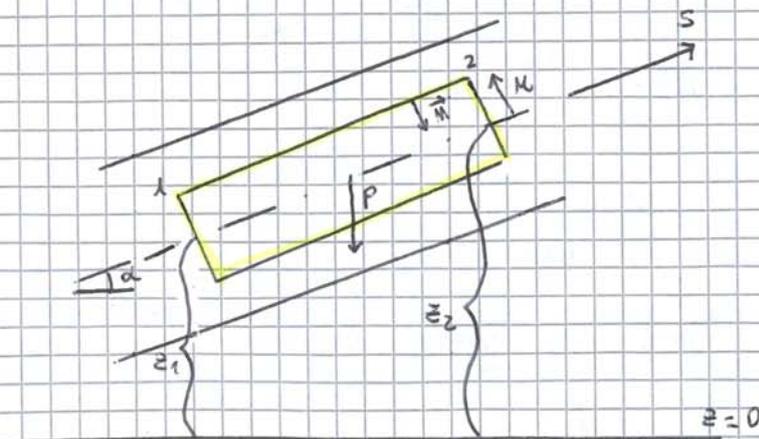
$$\rho = \overline{\rho} + \rho'$$

e questo porterà anche ad un termine turbolento delle inerzie locali.

Nel caso del moto laminare si erano definite facilmente le tensioni tangenziali:



Nel caso di una corrente uniforme in moto turbolento



$$-\gamma \pi r^2 (z_2 - z_1) + \pi r^2 (p_1 - p_2) + \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} 2\pi r L - \rho \overline{u'v'} 2\pi r L = 0$$

$$-\gamma \pi r^2 \left[ \left( z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left( z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \right] = 2\pi r L \left[ -\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \overline{u'v'} \right]$$

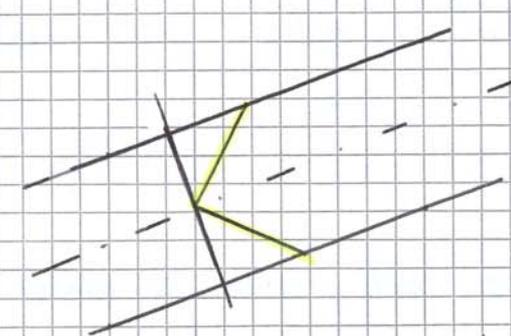
$iL$

$$\gamma \pi r^2 iL = 2\pi r L \left[ -\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \overline{u'v'} \right] \rightarrow \text{tensioni di Reynolds (legge dello striscio)}$$

$\downarrow$   
 variazione di energia che il fluido subisce passando dalla sezione 1 alla sezione 2 =  $T =$  resistenza opposta dal fluido circostante al movimento del cilindretto considerato

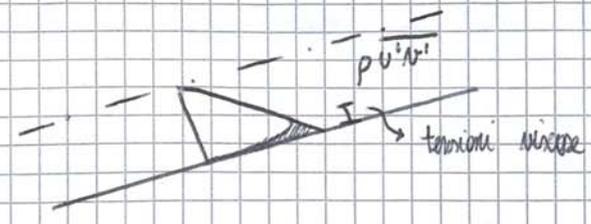
$\pi r^2 L =$  volume  
 $\gamma \pi r^2 L =$  peso  
 $i =$  pendenza motrice

$$\gamma = \frac{\gamma \pi r^2 i L}{2\pi r L} = \gamma i \frac{r}{2} \rightarrow \text{valore in modo lineare anche nel caso del moto}$$



da poter tracciare il moto turbolento

Le tensioni visose contano tanto solo lungo le pareti, mentre quelle di Reynolds contano tantissimo lungo tutta la superficie



Nel caso delle lastre piane parallele infinitamente lunghe:

$$v = \frac{1}{3} \frac{\gamma i}{\mu} R^2 \rightarrow i = \frac{3\mu v}{\gamma R^2}$$

Non sarà presente il diametro, ma il raggio idraulico.

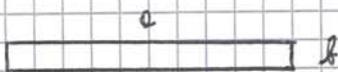
Scrivendo il diametro in funzione del raggio idraulico, posso estendere il grafico a qualunque sezione

$$R = \frac{\Omega}{P} = \frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2} = \frac{D}{4}$$

$$\lambda = \frac{i a R}{v^2 / 2g} = \frac{2g a i R}{v^2} = \frac{8g a R}{v^2}$$

$$\lambda = \frac{8g R}{v^2} \cdot \frac{3\mu v}{\gamma R^2} = \frac{24\mu}{\rho v R} \cdot \frac{a}{a} = \frac{96}{Re} \quad \text{moltiplico e divido per } a, \text{ in quanto } D = 4R$$

N.B.

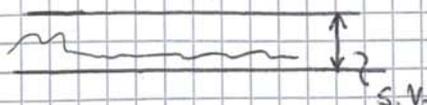


$$R = \frac{ab}{2a + 2b} \approx \frac{h}{2}$$

Ho ottenuto una fascia compresa tra la sezione emiccolare e quella rettangolare lunga e tutte le altre sezioni potranno compiere tra questi due estremi perché sono quelle più portevoli

Nel caso del moto turbolento si ottiene una curva particolare definita CURVA DELLA PARETE LISCIA e DEL TUBO LISCIO

Una parete liscia in realtà non esiste, ma in questo caso si parla di parete idraulicamente liscia, quando il sotto strato viscoso sommerge la rugosità e il fluido scorre tranquillamente



Un diagramma di Moody vale per qualsiasi sezione e condizione che il moto sia uniforme e non ci siano variazioni temporali.

La scala in cui ondeggi il problema è molto più grande di quella della scala reale e questo riduce tanti problemi.

05/11/2014

Considerazioni sul diagramma:

1)  $i \propto U^f, Q^p, D^g$

Un moto laminare:

$$\lambda = \frac{c}{Re} \rightarrow \lambda \propto \frac{1}{D U}$$

$$\rightarrow i \propto \frac{1}{D U} \frac{U^2}{D} \rightarrow \boxed{i \propto \frac{U}{D^2}}$$

$$\lambda = \frac{\Delta i}{\frac{U^2}{2g}} \rightarrow i \propto \lambda \frac{U^2}{D}$$

$$Q \propto U D^2 \rightarrow U \propto \frac{Q}{D^2} \rightarrow \boxed{i \propto \frac{Q}{D^4}}$$

Nella zona del moto turbolento di parete completamente scabra:

$$\lambda = \text{costante} \rightarrow \boxed{i \propto \frac{U^2}{D}}$$

Le dissipazioni sono proporzionali al quadrato della velocità:

$$U \propto \frac{Q}{D^2} \rightarrow \boxed{i \propto \frac{Q^2}{D^5}}$$

Combinare la geometria diventa un fattore importante

turbolento e parete

Con  $Re < 10^5$  abbiamo definito l'espressione di Blasius e quindi per un moto  $\lambda$  liscio

$$\lambda \propto \frac{1}{U^{0,25} D^{0,25}} \rightarrow i \propto \lambda \frac{U^2}{D} \rightarrow \boxed{i \propto \frac{U^{1,75}}{D^{1,25}}}$$

$$U \propto \frac{Q}{D^2} \rightarrow \boxed{i \propto \frac{Q^{1,75}}{D^{4,75}}}$$

Infine si ha un'ultima equazione:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.0 \log_{10} \left( \frac{3.41 D}{\epsilon_{20}} \right)$$

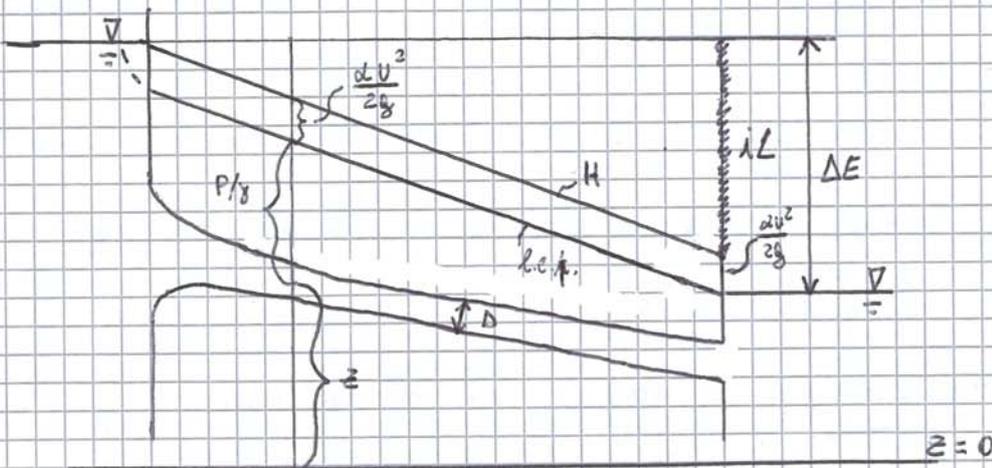
Due studiosi Colebrook / White sapendo che per la portata liscia vale:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{2.51}{R_2 \sqrt{\lambda}} \right)$$

hanno cercato un'equazione unica per il moto turbolento, ricavando:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left[ \frac{2.51}{R_2 \sqrt{\lambda}} + \frac{3.41 D}{\epsilon_{20}} \right]$$

Esempio: Supponiamo di avere due sabbatoi e voglio che l'acqua passi da un sabbatoio all'altro



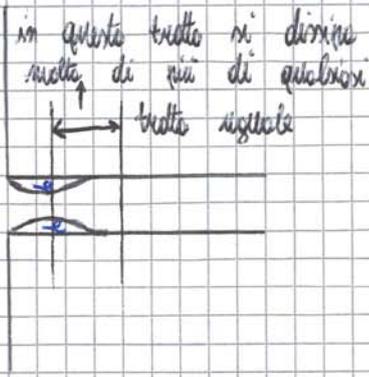
L'energia della corrente nell'ultima sezione della tubatura è data dall'energia del sabbatoio di valle più un termine cinetico

La pendenza motrice, che è la tangente della curva che voglio tracciare, è costante e la curva che ha la tangente costante è la retta e così definisco la linea dei coniugati totali.

La linea dei coniugati piezometrici è parallela perché il termine cinetico è costante

Nella superficie libera  $H = h$ , poiché le particelle accelerano e quindi  $H > h$ .

In una determinata sezione si misurano o definisce tutte le componenti



Queste diminuzioni localizzate comportano una variazione sia della linea dei corichi totali che della linea dei corichi piezometrici

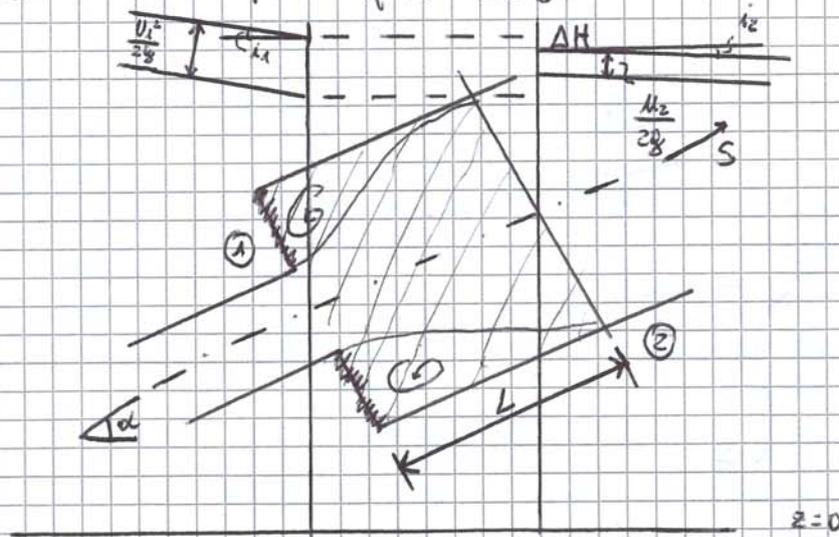
$$\Delta E_{loc.} = m \frac{V^2}{2g} \rightarrow \text{si intende il termine cinetico di valle}$$

coefficiente che dipende dalle variazioni di energia

10/11/2014

L'elemento chiave delle diminuzioni è il brusco allargamento.

Consideriamo un caso in cui è presente questo allargamento



DISSIPAZIONE  
DI BERDA

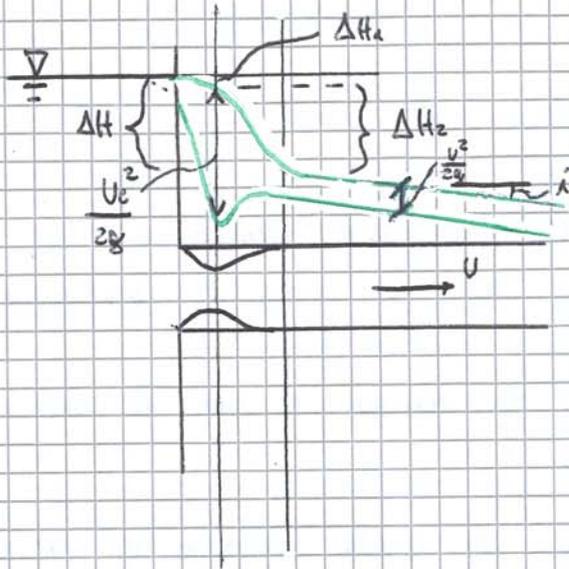
Consideriamo due sezioni, quella di ingresso e quella in cui il liquido si è ristretto alla nuova sezione

Si ricerca e determina, da quanto visto precedentemente, la linea dei corichi totali, le sue inclinazioni e l'andamento della prima linea dei corichi piezometrici

$$h_2 < h_1$$

a regime nullo

Consideriamo un riseratoio con un'apertura  $\surd$  ad una certa profondità



Si ha una contrazione della vena liquida e la velocità non è del valore nella sezione contratta e quello nella sezione piena

la caduta avviene  
forata

$$\Delta H_2 = \frac{(U_c - U)^2}{2g}$$

$$= \frac{U^2}{2g} \left( \frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \approx 0,4 \frac{U^2}{2g}$$

$$U_c = \frac{U}{C_c} \quad \text{con } C_c \approx 0,6$$

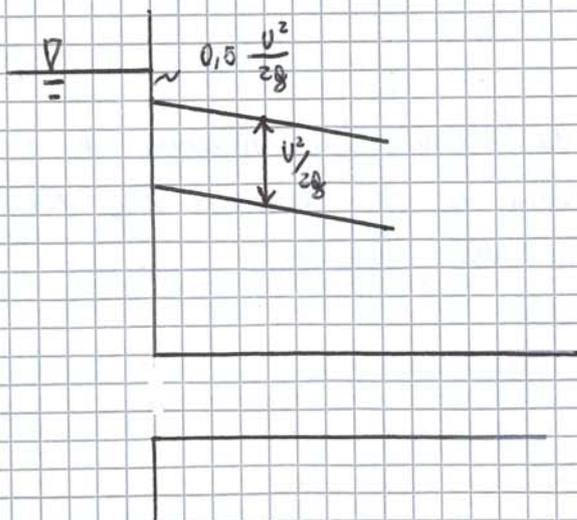
$$U_c = C_v U_{TOT}$$

$$\Delta H_1 = \frac{U_{TOT}^2}{2g} - \frac{U_c^2}{2g} = \frac{U_c^2}{2g C_v^2} - \frac{U_c^2}{2g} = \frac{U_c^2}{2g} \left( \frac{1}{C_v^2} - 1 \right) = \frac{U^2}{2g} \frac{1}{C_c^2} \left( \frac{1}{C_v^2} - 1 \right) =$$

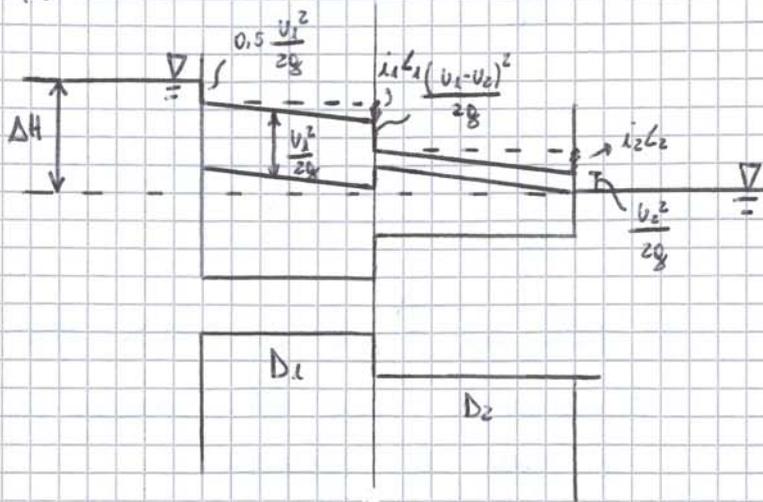
$$= 0,1 \frac{U^2}{2g}$$

diminuzione dovuta alla viscosità fino all'ovvio del liquido nella sezione contratta

$$\Delta H = \text{diminuzione totale dell'imbocco} = \Delta H_1 + \Delta H_2 = 0,5 \frac{U^2}{2g}$$



Esempio 1:



in base alle dimensioni localizzate o distribuite presenti nella geometria si riesce a seguire la linea dei corredi totali e perso. minori

$$\Delta H = \frac{0.5 v_1^2}{2g} + \lambda_1 L_1 + \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} + \lambda_2 L_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$v_1 = \frac{Q}{A_1}; \quad v_2 = \frac{Q}{A_2}$$

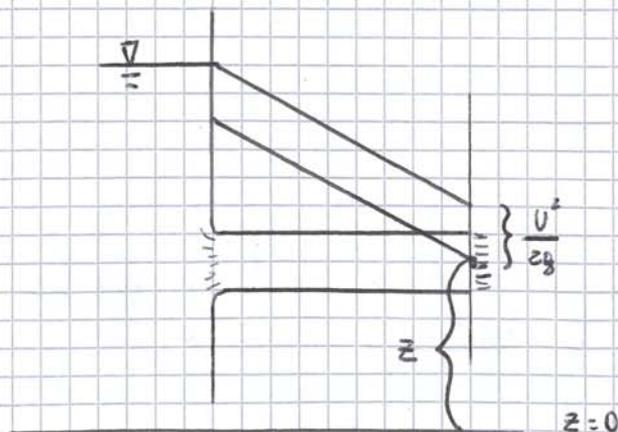
$$v = \chi \sqrt{Re} \rightarrow i = \frac{v^2}{\chi^2 Re}$$

$$\lambda \neq \lambda(Re) \rightarrow \text{Darcy} \rightarrow i = \beta \frac{Q^2}{D^5}$$

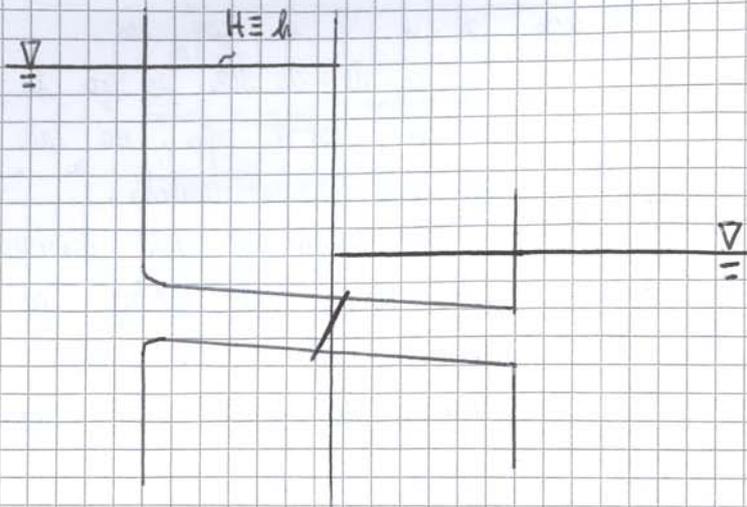
$$\lambda \neq \beta(D) \rightarrow M = 5,33$$

$$\lambda = \beta(D) \rightarrow M = 5$$

Esempio 2:



le traiettorie o velle sono rettilinee parallele e il getto è a contatto con l'atmosfera, la pressione è nulla



Chiudendo completamente la valvola le due linee dei corichi devono coincidere

12/11/2014

Nelle lunghe condotte il termine cinetico  $\frac{v^2}{2g} \approx 0(10^{-1})m$ , mentre la variazione del corico piezometrico  $\Delta h \gg \frac{v^2}{2g}$ , quindi il corico cinetico si può trascurare.

Una conseguenza di ciò è che  $H \approx h$  e che posso trascurare tutto ciò che è legato al termine cinetico, come ad esempio le dimensioni localizzate

Quando  $\frac{v^2}{2g} \leq 0,04 i$ , lo trascuro  
 $\frac{v^2}{2g} \leq 0,04 i \text{ mD}$   
 ↓  $i$  è espresso la lunghezza in diametri

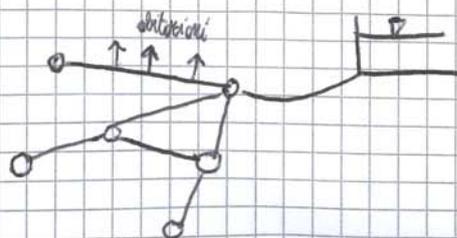
Sapendo che  $\lambda = \frac{2gDi}{v^2} \rightarrow i = \frac{\lambda v^2}{2gD}$

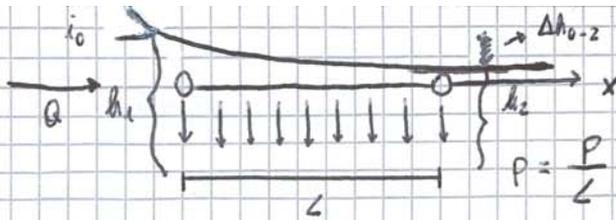
$$\frac{v^2}{2g} \leq 0,04 \frac{\lambda v^2}{2gD} \text{ mD} \rightarrow M \geq \frac{1}{0,04 \cdot \lambda} = 1000$$

" 0,025 (valore tipico)

Le condotte le posso considerare lunghe quando il mio ordine di grandezza della lunghezza è del migliaio

Un una rete idraulica ho dei nodi, che sono dei punti di raccolta e collegano le varie condotte, essendo dei nomi





Vorrei la portata non mi aspetta che il cosico non linearmente

$$i = - \frac{dh}{dx} = - \frac{dh}{dx}$$

$$h(x) = h_0 - \int_0^x i(x) dx$$

Faccendo ipotesi che nella condotta il moto sia turbolento di parete scabra

$$i = \beta \frac{Q^2}{D^5}$$

$$h(x) = h_0 - \int_0^x \frac{\beta}{D^5} (Q - Px)^2 dx = h_0 - \frac{\beta}{D^5} \left( Q^2 x + \frac{1}{3} P^2 x^3 - 2QP \frac{1}{2} x^2 \right)$$

↓  
perdita in una generica sezione

$$h = h_0 - \frac{\beta}{D^5} x \left( Q^2 + \frac{1}{3} P^2 x^2 - QPx \right) \quad \text{La curva è una cubica}$$

Le tangenti nei due estremi vengono calcolati:

$$i_1 = \frac{dh}{dx} \Big|_{x=0} \quad i_2 = \frac{dh}{dx} \Big|_{x=L}$$

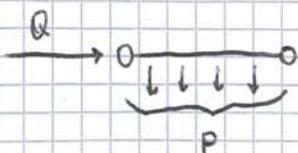
e mi permettono di ricavare la pendenza

$$P = pL$$

$$\Delta h_{0-2} = h(x=L) - h(x=0) = \frac{\beta}{D^5} L \left( Q^2 + \frac{1}{3} P^2 L^2 - QPL \right) = \frac{\beta}{D^5} L \left( Q^2 + \frac{1}{3} P^2 L^2 - QPL \right)$$

perdita di  $\frac{1}{3}$  cosico

Se  $Q = P$  la condotta è cieca:



$$\Delta h = \frac{\beta}{D^5} L \left( Q^2 + \frac{1}{3} Q^2 L^2 - Q^2 L \right) = \frac{\beta}{D^5} L \frac{1}{3} Q^2$$

verifica

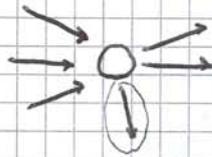
Le incognite nel problema di V sono le portate in ogni ramo e i costi parametrici nei nodi

1)  $Q_i$  ( $i = 1, \dots, m$ )

2)  $H_j = h_j$  ( $j = 1, \dots, m$ )

$m + m$  incognite

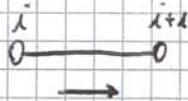
Ma un modo meglio:



$\sum Q_e = \sum Q_u$  (serie m equazioni) ↗ di continuità

Nei rami

$H_i - H_{i+1} = \frac{\beta_i}{D_i^{i,m}} Q_i < i$  ↖ non linearità



$i = 1, \dots, m$

Serie m equazioni di dispersione

Si crea un sistema di migliaia di equazioni, di cui la metà sono non lineari

Un altro problema è che nei nodi non è facile determinare quale portata è in ingresso e quale in uscita. Si deve quindi ipotizzare un verso di scorrimento nei nodi

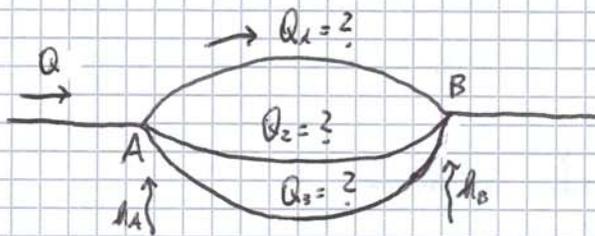
1° caso:

$$\begin{cases} Q_1 + Q_2 = Q_3 \\ h_1 - h_2 = \beta_1 \frac{Q_1^2}{D_1^5} L_1 \rightarrow Q_1 = f_1(h_M) \\ h_2 - h_M = \beta_2 \frac{Q_2^2}{D_2^5} L_2 \rightarrow Q_2 = f_2(h_M) \\ h_M - h_3 = \beta_3 \frac{Q_3^2}{D_3^5} L_3 \rightarrow Q_3 = f_3(h_M) \end{cases}$$

Nel secondo caso, nella seconda equazione ho invertito il primo membro

Sostituendo questi valori nella 1° equazione si riesce ad intuire in quale verso va la  $Q_2$

Esempio 3: condotte in parallelo



Il carico ai nodi estremi A e B sono evidentemente uguali per tutta la condotta e di conseguenza risultano pure uguali le perdite di carico  $h_A - h_B$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$h_A - h_B = \beta_1 \frac{Q_1^2}{D_1^5} L_1 = \beta_2 \frac{Q_2^2}{D_2^5} L_2 = \beta_3 \frac{Q_3^2}{D_3^5} L_3$$

1° condizione

2° condizione

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$\beta_1 \frac{Q_1^2}{D_1^5} L_1 = \beta_2 \frac{Q_2^2}{D_2^5} L_2$$

$$\beta_2 \frac{Q_2^2}{D_2^5} L_2 = \beta_3 \frac{Q_3^2}{D_3^5} L_3$$

→ esprimono l'uguaglianza delle perdite di carico di ciascuna condotta

Nei problemi di progettazione le incognite sono:

$D_i$ : diametri di ogni singolo ramo

$h_j$ : carichi piezometrici nei nodi

$Q_i$ : portate circolanti in tutti i rami

$$\forall \text{ nodo} \quad \sum Q_2 = \sum Q_u$$

$$\forall \text{ ramo} \quad h_{i+1} - h_i = P_i \frac{Q_i^2}{D_i^5} L_i$$

Il problema è radicalmente indeterminato, le incognite sono maggiori delle equazioni

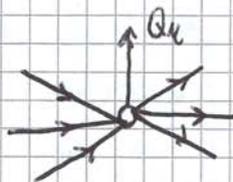
Ho infiniti diametri possibili. Le soluzioni vengono trovate con delle condizioni che la realtà mi impone (portate, carichi piezometrici, diametri disponibili) (vincoli) e la situazione

Nel caso in cui mancano i vincoli, entrano in gioco le condizioni economiche:

coefficienti costanti  $\leftarrow$

$$\forall \text{ tipo di tubo} \quad C = w_0 + w_1 D^E > 1 \quad \text{costo di una condotta}$$

Considero un generico nodo. Ho condotte con portate entranti e condotte con portate uscenti



$$\left[ \sum_l C_l + \sum_u C_u \right] = \min \quad \text{pongo il costo a il minimo possibile}$$

Si è ricavato:

$$\sum_l \frac{Q_l^2}{D_l^{m+E}} = \sum_u \frac{Q_u^2}{D_u^{m+E}} \quad \forall \text{ nodo}$$

Equazione che mi rende il problema determinato