



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1452A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Boltri

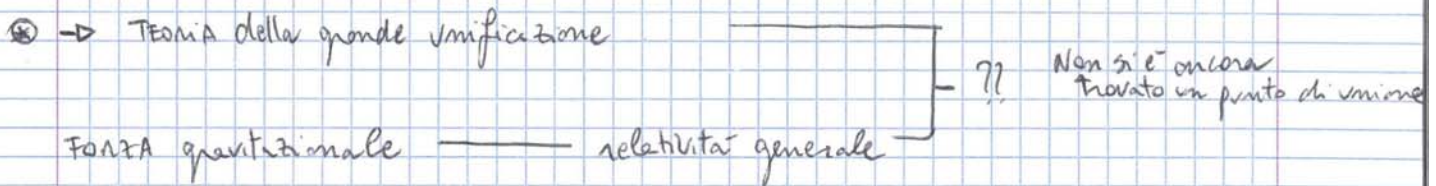
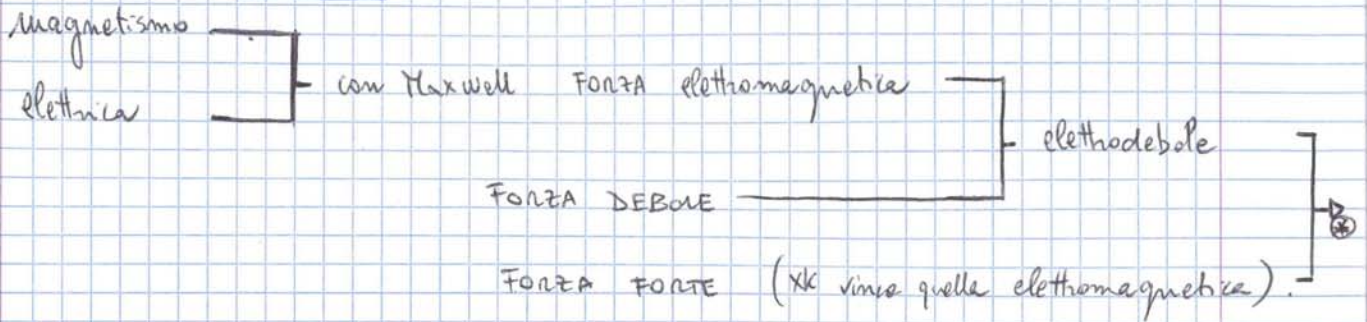
MATERIA: Fisica II. Prof.Ummarino

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

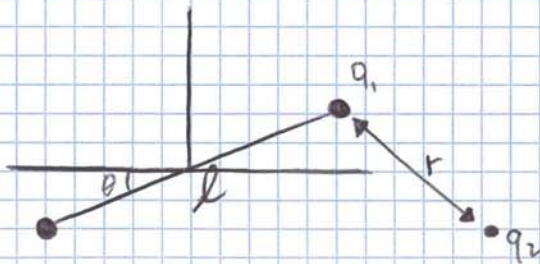
FORZE MICROSCOPICHE



ELETTROSTATICA

All'inizio studio dei fenomeni che non dipendono dal tempo.

Esperimento di Coulomb (con un pendolo a torsione)



l'asticella gira e crea momento

$$M = F \cdot l = K\theta$$

quindi: $F = \frac{K\theta}{l}$

con k costante elastica del filo.

Dopo svariate prove trovo che la FORZA elettrostatica \vec{e} vale a

$$F = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \vec{r} = \frac{k q_1 q_2}{r^3} \vec{r} \text{ Forza lungo la congiungente dei 2 centri.}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} = \epsilon_0 \text{ cost. dielettrica nel vuoto}$$

Scriviamo la forza in componenti cartesiane.

$$F = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$$

Farendo la somma di tutti i contributi otteniamo $\vec{E} = \int dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2}$

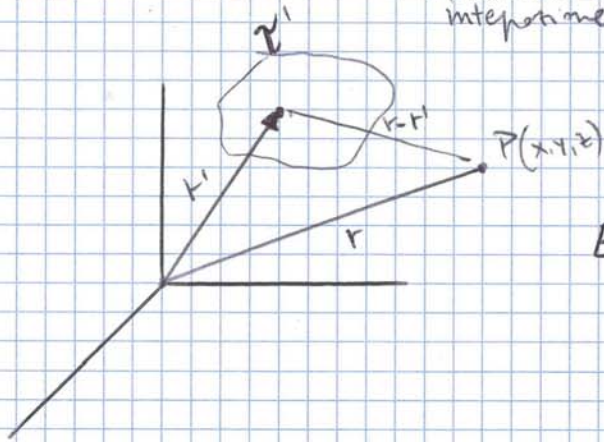
$$dq = \lambda d\tau$$

$\lambda =$ densità di carica

• Formule

$$E_x(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dx' \int dy' \int dz' \frac{\lambda(x', y', z') (x-x')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$$

↑
variabili di integrazione



$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \frac{\lambda(r')}{|r-r'|^2}$$

] Campo generico (vettoriale)

$$E_y(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dx' \int dy' \int dz' \frac{\lambda(x', y', z') (y-y')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$$

$$E_z(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dx' \int dy' \int dz' \frac{\lambda(x', y', z') (z-z')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$$

[Utilizziamo la formula con la densità di carica perché matematicamente la carica diventa infinita al tendere a zero di y ; mentre la densità di carica rimane costante.

Risolvo l'integrale $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \sin \theta_{max} \rightarrow \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \sin \left[\arcsin \frac{l}{\sqrt{l^2+y^2}} \right]$

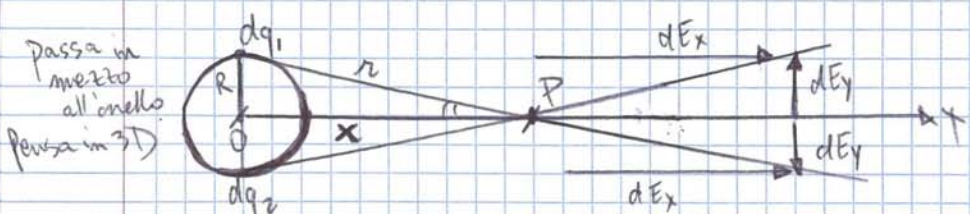
$\rightarrow \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2+y^2}} \rightarrow \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2+y^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \cdot \frac{2l}{\sqrt{l^2+y^2}} =$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y \sqrt{l^2+y^2}} \quad \text{generico}$$

(N.B) con $y \gg \gg \gg 2l \quad E_y \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y^2}$ Sostanzialmente abbiamo fatto un limite $\lim_{2l \rightarrow 0}$

Facciamo il limite opposto con quindi $l \gg \gg y$ otteniamo $E_y \approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}$
 Utilizziamo la formula precedente perché un oggetto infinitamente lungo avrebbe carica infinita, mentre invece la densità λ rimane comunque costante.

ANELLO OMOGENEO CARICO



$dE_x = dE \cos \theta$

$$E = E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{x^2+R^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{x dl}{(x^2+R^2)^{3/2}} \rightarrow \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}} \int dl$$

(risolvere sapendo che è una circonferenza)

(perché $2\pi R l = q$)

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi R \cdot \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

con $x \gg \gg R$ trascuro R quindi $E_x \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$

Quando l'oggetto è visto "da lontano" rispetto le caratteristiche di un oggetto puntiforme e infatti il campo è rappresentato dalla legge di Coulomb.

Il potenziale è uno scalare quindi è più facile da gestire

POTENZIALE ELETTRICO legato all'esistenza di campi conservativi → CAMPI elettrostatici

La linea di forza è il luogo dei punti del piano tangenti al campo elettrico

Escono dalla carica positiva.

Equazioni differenziali delle linee di forza $\frac{dx}{E_x(x,y,z)} = \frac{dy}{E_y(x,y,z)} = \frac{dz}{E_z(x,y,z)}$

Risolve dando le equazioni di 2 spetti tridimensionali, la cui intersezione da come risultato una curva.

Definizione di lavoro $W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$ ricordiamo che $F = q \cdot E$

$W_{AB} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$

Prendiamo il caso di un circuito chiuso $W = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = qE$
 ↑ FORZA ELETTROMOTRICE misurata in Volt = $\frac{J}{C}$

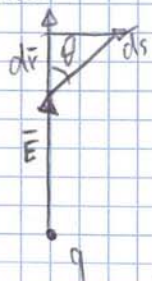
N.B. Se il campo è conservativo la forza elettromotrice è NULLA → $W_{cons} = qE = 0$

Ricordiamo che $\Delta W = - \Delta U$

quindi parlando di potenziale $V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$ Non ha senso parlare di potenziale in valore Assoluto.

Riassunto $\Delta W = - \Delta U = - q \Delta V$

1. CASO POTENZIALE generato da una CARICA PUNTFORME elettrostatico



$dV = - \vec{E} \cdot d\vec{s} = - E \cos \theta \frac{ds}{dr}$

quindi $dV = - \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \cdot dr$

Terminiamo all'integrale $V_B - V_A = \int_{r_A}^{r_B} - \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr$

$V_B - V_A = - \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_A}^{r_B} \rightarrow \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$

Indica la variazione di potenziale elettrostatico generato da una carica puntiforme

Significato fisico dell'ENERGIA Potenziale. (lo facciamo per n cariche puntiformi).

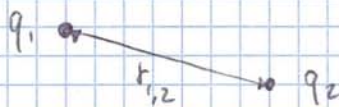
All'inizio non c'è nmt nello spazio

Il lavoro fatto per portare una carica dall'infinito al nostro spazio è nullo (non dobbiamo vincere nessuna forza)

$$W_1 = 0 \quad \bullet q_1$$

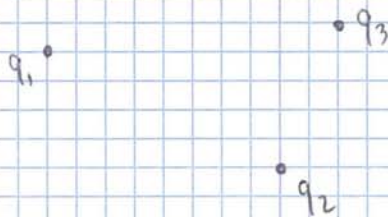
Per portare in un determinato punto una seconda carica devo vincere la forza del campo generato da q_1

$$W_2 = q_2 \int_{-\infty}^{r_{1,2}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} = q_2 \int_{-\infty}^{r_{1,2}} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr \rightarrow W_2 = - \frac{q_2 \cdot q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{1,2}}$$



Se prendiamo una terza carica dobbiamo considerare le 2 cariche precedenti:

$$W_3 = q_3 \cdot \int_{-\infty}^{r_{1,3}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} + q_3 \cdot \int_{-\infty}^{r_{2,3}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{s} = - \frac{q_3 \cdot q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{1,3}} - \frac{q_3 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{2,3}}$$



Sappiamo che $W_{tot} = W_1 + W_2 + W_3 = -U$

La cui formula generale è

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \frac{q_i \cdot q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{i,j}} \quad \text{con } i \neq j$$

Su una superficie equipotenziale, il gradiente ha direzione normale rispetto alla superficie stessa. $\vec{\nabla}V \cdot d\vec{s} = 0$

Esempio

$$V(x, y, z) = 2x^2 - 6xy - 3x + 5y^5$$

$$E_x = -4x + 6y + 3$$

$$E_y = 6x - 25y^4$$

$$E_z = 0$$

Dobbiamo fare le derivate parziali.

TEOREMA di STOKES

Se ho un campo vettoriale conservativo la circuitazione è pari all'integrale di superficie

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{e} = \int_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot \vec{n} dS$$

Utilità

N.B.

Passiamo da un integrale di linea a uno di superficie.

Rotore (legato alla notazione di un oggetto)

normale alla superficie (viva ad ogni punto)

rotore $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$

Deriva da un prodotto vettoriale.

Attenzione: Se ho un campo conservativo il rotore di E è nullo. (Valido sempre).

Esempio

$$\vec{E} = x^2 \hat{i} + y^2 \hat{j} + z^2 \hat{k}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \hat{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} z^2 - \frac{\partial}{\partial z} y^2 \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial}{\partial x} z^2 - \frac{\partial}{\partial z} x^2 \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} y^2 - \frac{\partial}{\partial y} x^2 \right) = 0$$

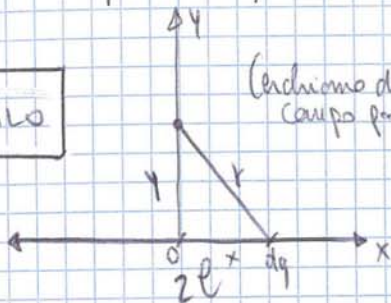
Dimostrazione

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \hat{i} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

Poiché le derivate miste sono uguali allora il rotore sarà nullo.

Adesso effettuiamo gli stessi esempi precedenti utilizzando il potenziale, per confermare la relazione $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$

① **FILO**



(chiamo di calcolare il campo partendo dal potenziale

$$V = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \int_{-l}^l \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{y^2+x^2}}$$

Risultato dell'integrale $\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{l + \sqrt{y^2+l^2}}{-l + \sqrt{y^2+l^2}} \right) = V$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

questa non è nulla per $y \neq 0$.

quindi $E_y = \left[\frac{y}{\sqrt{y^2+l^2}} - \frac{y}{\sqrt{y^2+l^2}} \right] \cdot \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}$

$$= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{y(-l + \sqrt{y^2+l^2}) - y(l + \sqrt{y^2+l^2})}{y^2}$$

$$= \frac{\lambda 2l}{4\pi\epsilon_0 y \sqrt{y^2+l^2}} \quad \text{Valore del campo atteso.}$$

con $y \gg l$

$$V \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left[\frac{l+y}{-l+y} \right] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left[\frac{1 + \frac{l}{y}}{1 - \frac{l}{y}} \right] \quad \frac{l}{y} \ll 1$$

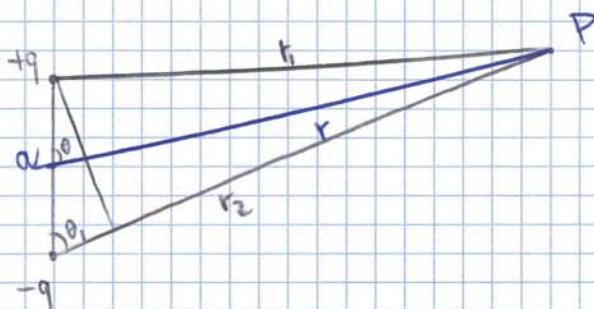
con $x \gg R$

$$V = \frac{qx}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{R}{x}\right)^2} - 1 \right]$$

$$V \cong \frac{qx}{2\epsilon_0} \left[1 + \frac{R^2}{2x^2} - 1 \right] = \frac{\pi a R^2 x}{4\pi \epsilon_0 x^2} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 x}$$

DIPOLO ELETTICO

Sistema elettricamente neutro composto da 2 cariche.



con $r \gg a$ (molto lontano dal dipolo)

Obiettivo Dobbiamo misurare il campo elettrico in un punto molto distante dalle cariche.

$$V(P) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right]$$

Da adesso in poi approssimiamo

$r_1 \cdot r_2 \cong r^2$ (con P lontano vale anche che r_1 e r_2 sono approssimativamente paralleli)

abbiamo quindi $\theta_1 \cong \theta$, quindi anche $r_2 - r_1 = a \cos \theta_1 \cong a \cos \theta$

Sostituiamo nel potenziale $V(r) \cong \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{a \cos \theta}{r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2}$

Il valore del potenziale si riduce in funzione di r^2

\vec{P} (piccolo) = MOMENTO DI DIPOLO = $q \cdot a$

Scriviamo il campo elettrico in coordinate sferiche (più semplice)

$$\vec{E} = E_r \hat{u}_r + E_\theta \hat{u}_\theta + E_\phi \hat{u}_\phi \quad \vec{E}(r, \theta, \phi)$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$

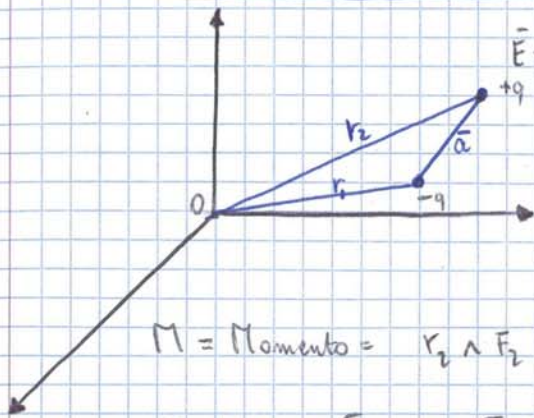
$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

Scriviamo il campo in modo compatto

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi \epsilon_0 r^3} \left[2 \cos \theta \cdot \hat{u}_r + \sin \theta \hat{u}_\theta \right]$$

Considerat. matematiche: questi sono solo i primi due termini dello sviluppo in serie della funzione $\frac{1}{r}$.
 I successivi si chiamano "TERMINI di MULTIPOL". Ogni termine è trascurabile rispetto al precedente.
 UN SISTEMA NEUTRO PUÒ AVERE UN'INTERAZIONE ELETTRICA, che però è TANTO MINORE quanto MAGGIORE è il grado di SIMMETRIA.

• Cosa succede se metto un dipolo in un campo elettrico costante??



$$\alpha = \frac{F}{m} = qE - qE = 0$$

IL DIPOLLO NON TRASLA.

$$M = \text{Momento} = r_2 \wedge F_2 + r_1 \wedge F_1 \Rightarrow (r_2 - r_1) \wedge F_2 = (r_2 - r_1) \wedge qE$$

$$= q \cdot a \wedge E = \vec{p} \wedge E$$

perché $\vec{F}_2 = \vec{F}_1 + \vec{a}$

$$V = V(r_1) + V(r_2) = V(r) + V(r+a)$$

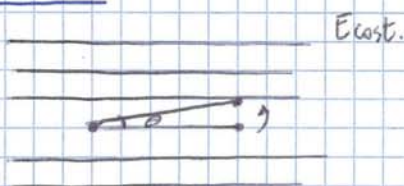
$$U = -qV(r_1) + qV(r_2) \approx -qV(r) + q \left[V(r) + a_x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} a_y + a_z \frac{\partial V}{\partial z} \right]$$

↑ sviluppiamo in serie

$$\Rightarrow \text{otteniamo} = q \cdot a_x \frac{\partial V}{\partial x} + q a_y \frac{\partial V}{\partial y} + q a_z \frac{\partial V}{\partial z} = -\vec{p} \cdot \vec{E} = U$$

Valore dell'energia POTENZIALE del Dipolo

Esempio 2.14



$$M = \frac{dL}{dt} = I\alpha = -pE \sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{pE}{I} \sin\theta = 0$$

$$\sin\theta \approx \theta$$

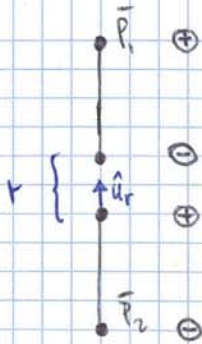
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{pE}{I} \theta = 0$$

MOTO ARMONICO

$$W = \sqrt{\frac{p \cdot E}{I}} = \text{frequenza di oscillazione}$$

Osservazione: Se il campo è UNIFORME le forze sulle cariche sono uguali ed opposte e quindi hanno risultante nulla. Il dipolo pertanto RESTA FERMO (non trasla). Notiamo che il momento è diverso da zero. La posizione di equilibrio stabile del dipolo (corrispondente al minimo di energia potenziale) è con il MOMENTO di Dipolo \vec{p} PARALLELO e CONCORDE al campo E.

③ CASO



$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [P_1 \cdot P_2 - 3 P_1 \cdot P_2] = \frac{-2 P_1 P_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{-6 P_1 P_2}{4\pi\epsilon_0 r^4} \quad \text{Forza Attrattiva}$$

TEOREMA DI GAUSS (Valido sempre, chiamato anche I LEGGE di MAXWELL).

Definizione di flusso
(Attraverso una superficie chiusa)

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} \, d\Sigma$$

Unità di misura flusso $\frac{N}{C} \cdot m^2$

\vec{n} vettore NORMALE alla superficie (convenzionalmente orientato verso l'esterno)

• Calcolare il flusso generato da una carica puntiforme (attraverso una sfera).



$$\Phi(E) = \int \underbrace{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}}_{\text{CAMPO}} \cdot \underbrace{\vec{r}}_{\vec{n}} \cdot \vec{r} \, d\Sigma$$

in questo caso $\vec{r} \equiv \vec{n}$
(direzione radiale)

in coordinate sferiche $d\Sigma = r^2 \cdot \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

$$\text{quindi } \Phi(E) = \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{q r^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \int_0^\pi \sin\theta \cdot d\theta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Phi(E) = \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{\epsilon_0}$$

→ tutte le cariche interne alla superficie chiusa.

In altri termini

$$\Phi(E) = \frac{Q_{TOT}}{\epsilon_0} = \frac{\int dV \cdot \rho}{\epsilon_0}$$

Caso generico in cui il campo è generato da una distribuzione continua di cariche caratterizzate dalla densità spaziale $\rho(x,y,z)$. L'integrale rappresenta sempre q_{int} totale.

→ Il flusso è generato dalle sole cariche interne, mentre il campo da tutte quelle presenti (anche fuori).

Spiegazione dell'integrale iniziale: I contributi positivi dell'integrale sono quelli per cui $\vec{E} \cdot \vec{n} > 0$ (flusso uscente), mentre quando $\vec{E} \cdot \vec{n} < 0$ abbiamo contributi negativi (flusso entrante). Pertanto l'integrale dà il FLUSSO NETTO attraverso una superficie chiusa. Se esso è nullo, vuol dire di norma che il flusso entrante eguaglia in modulo il flusso uscente.

Osservazione: Se aumenta il volume non cambia il valore del flusso.

$$\begin{cases} \nabla \wedge \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \\ \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \end{cases}$$

In queste equazioni sono descritti tutti i fenomeni elettrostatici.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot V$$

quindi $\nabla \cdot (-\nabla V) = \rho / \epsilon_0 \rightarrow \nabla^2 V = -\rho / \epsilon_0$

$$\nabla^2 V = -\rho / \epsilon_0$$

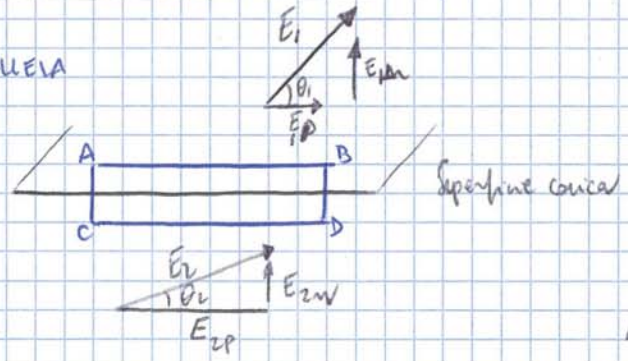
deriva dalle due equazioni precedenti.
EQUAZIONE di POISSON (basata sulla derivata seconda parziale)

Problema = Diventa difficile risolvere l'equazione

Risolvendo Poisson ottengo $V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dx' \int dy' \int dz' \frac{\rho(x',y',z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$

Cosa succede al campo elettrico quando attraversa una superficie carica

COMPONENTE PARALLELA del CAMPO



ABCD cammino chiuso infinitesimo

AB = dl
AC = BD = 0 (dl)

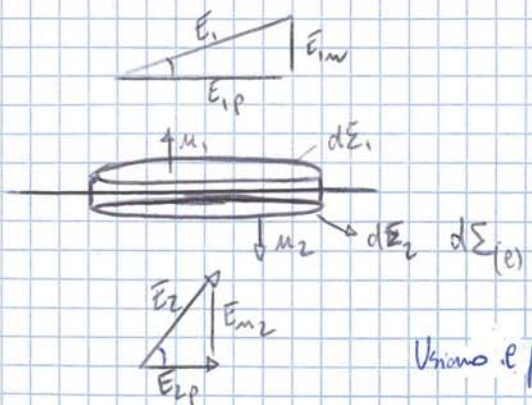
Circuito del campo elettrico e' chiusa.
 $E_1 \cdot AB + E_2 \cdot DC = 0$
 $E_1 \cdot AB \cos \theta_1 + E_2 \cdot DC \cos \theta_2 = 0$

$E_{1p} dl - E_{2p} dl = 0$
 $(E_{1p} - E_{2p}) dl = 0$

quindi $E_{1p} = E_{2p}$

La componente // del campo elettrico rimane costante.

COMPONENTE NORMALE del CAMPO



(laterale) e' trascurabile = 0

Usiamo il flusso $E_1 \cdot M_1 + E_2 \cdot M_2 = \frac{dq}{\epsilon_0} = \frac{\sigma d\Sigma}{\epsilon_0}$

$E_{1n} \cdot d\Sigma - \sum_{en} d\Sigma = \frac{\sigma d\Sigma}{\epsilon_0}$

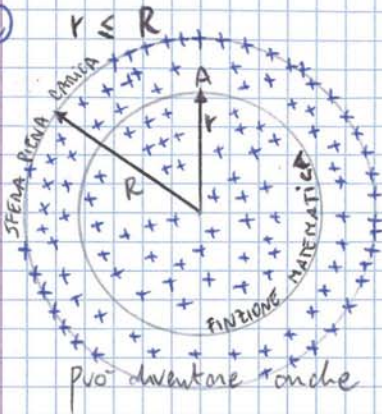
La componente normale del campo varia

$E_{1n} - E_{2n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Possiamo considerare anche il caso con $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

quindi
$$E = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \hat{r}$$

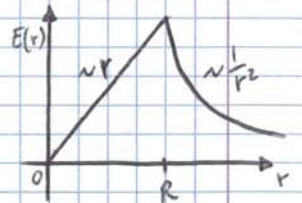
CASO ②



ottengo dopo gli stessi calcoli $E = \frac{Q'}{\epsilon_0 \Sigma} \hat{r}$

dobbiamo considerare solo una parte di Q' o xk quella fuori non ci interessa (rispetto alle funzioni matematiche).

$$\vec{E} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{\epsilon_0 4\pi r^2} \hat{r} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot r \hat{r}$$



ANDAMENTO del CAMPO.

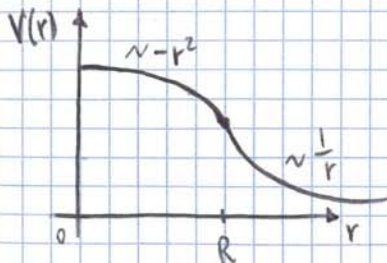
Vediamo il potenziale

①
$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \frac{R^3}{r}$$

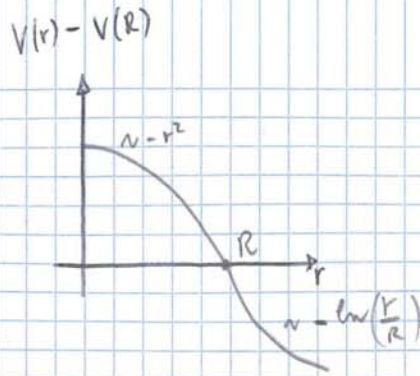
Anche all'esterno c'è una diff. di potenziale solo che $V(r) - V(\infty) = V(r)$

②
$$V(r) - V(R) = - \int_R^r E(r) dr = - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \int_R^r r dr = - \frac{\rho}{6\epsilon_0} [r^2 - R^2]$$

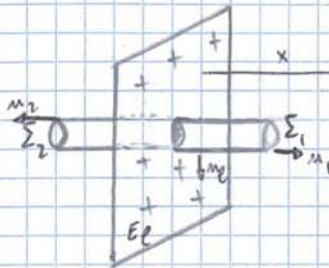
$$V(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot R^2 - \frac{\rho}{6\epsilon_0} [r^2 - R^2] = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[\frac{3}{2} R^2 - r^2 \right]$$



→ $-\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{r}{R}$



generato
 • Campo elettrico da un piano infinito carico.



$\vec{E} = E(x) \cdot \hat{n}$ $\Phi(E) = \oint \vec{E} \cdot \hat{n} d\Sigma =$
 $\int_{\Sigma_1} E(x) \hat{n} \cdot \hat{n}_1 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} E(x) \hat{n} \cdot \hat{n}_2 d\Sigma_2 + \int_{\Sigma_c} E(x) \hat{n} \cdot \hat{n}_c d\Sigma_c$

I primi due integrali sono uguali. $\Sigma_1 = \Sigma_2$

Quindi $2E(x) \int d\Sigma_1 = \frac{\sigma \Sigma_1}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{x}$

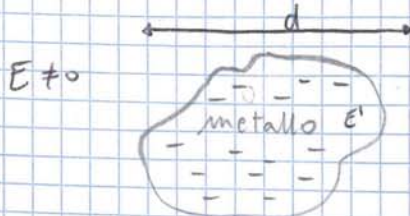
piano infinito
 genera un
 campo costante

I CONDUTTORI

Oggetto in cui posso avere un moto di cariche (Intendiamo i METALLI SOLIDI)

• Cosa succede a un conduttore messo in un campo elettrostatico.

I metalli solidi sono estremamente simmetrici, grazie alle CEE elementari che formano il reticolo cristallino. Nei metalli c'è un elettrone libero che può muoversi liberamente attorno al reticolo (gas di elettroni)



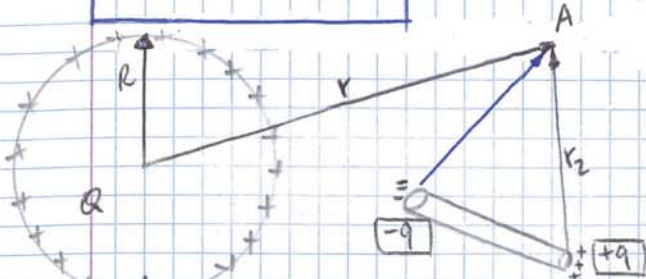
gli elettroni dentro al metallo non devono percepire nessuna forza altrimenti si genera una corrente (Ma studiamo il fenomeno elettrostatico).

Per far ciò che accade questo in un tempo $t \sim d/c$ (con c = velocità della luce)
 gli elettroni si dispongono sulla superficie del metallo, in modo da generare un campo E' (interno al metallo) che sommato a quello Esterno dia come risultato ZERO $E' + E = 0 = E_{TOT}$

quindi $C' = \frac{q'}{V'} = \frac{\frac{q}{4\pi R^2}}{\frac{q}{4\pi \epsilon_0 R}} = C$

La capacità infatti dipende solo della geometria del sistema. Infatti il rapporto NON VARIA al variare della carica sul conduttore.

SISTEMI DI CONDUTTORI



$$V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r}$$

Avvicinando un cilindro neutro alla sfera d'oro, si verifica un fenomeno di INDUZIONE sul cilindro neutro (in questo caso INCOMPLETA).

Questo comporta una variazione nel potenziale $V' = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r_2} - \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r}$

Per calcolare il potenziale nello spazio dobbiamo risolvere l'eq. di Poisson. L'eq. rimane la stessa, ma aggiungendo il cilindro cambiano le condizioni al contorno e quindi di conseguenza il risultato.

CASO GENERALE (costituito da un sistema di conduttori fissi)

Tra i potenziali e le cariche ci sono queste relazioni:

$$V_1 = a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + \dots + a_{1n} q_n$$

$$V_2 = a_{21} q_1 + a_{22} q_2 + \dots + a_{2n} q_n$$

$$a_{ij} > 0$$

a_{ij} = coefficienti di potenziale (dipen. solo dalla GEOMETRIA del sistema)

Se invertito il sistema ottengo

$$q_1 = c_{11} V_1 + c_{12} V_2 + \dots + c_{1n} V_n$$

$$q_n = c_{n1} V_1 + c_{n2} V_2 + \dots + c_{nn} V_n$$

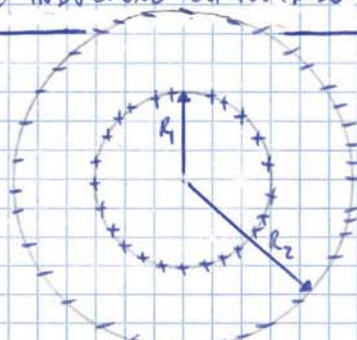
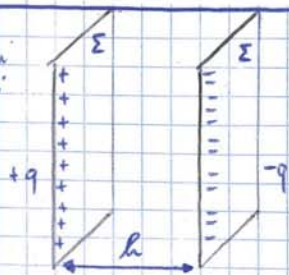
c_{ij} <
 coeff. di INDUZIONE se $i \neq j$
 coeff. di CAPACITÀ se $i = j$

$$c_{ij} < 0$$

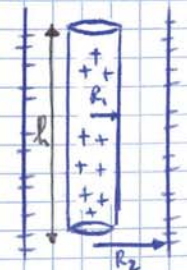
$$c_{ii} > 0$$

Studio di due conduttori a INDUZIONE COMPLETA ~ CONDENSATORI

3 CONDENSATORI PIÙ SEMPLICI



$E \neq 0$ Solo DENTRO



Intenzionalmente $q_2 = -q_1$
 $a_{21} = a_{12}$

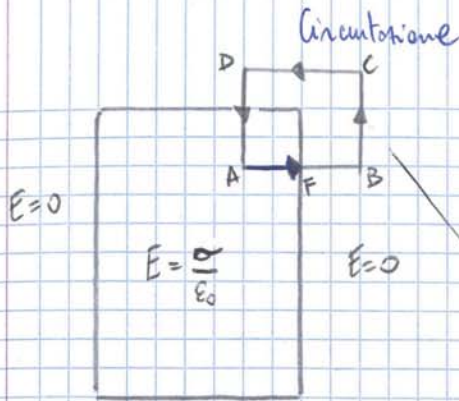
$$V_1 = a_{11} q_1 - a_{12} q_1$$

$$V_2 = a_{21} q_1 - a_{22} q_1$$

quindi $V_2 - V_1 = (a_{21} - a_{22} - a_{11} + a_{12}) \cdot q_1$

$$\frac{q_1}{V_2 - V_1} = \frac{1}{2a_{21} - a_{22} - a_{11}} = \text{Capacità}$$

Questa relazione ottenuta è valida per QUALSIASI coppia di conduttori a INDUZIONE COMPLETA.



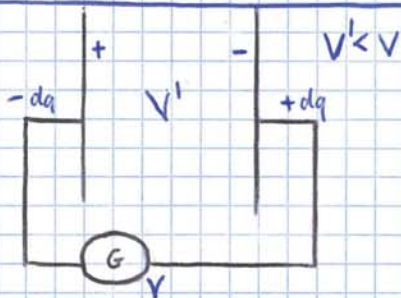
Il campo costante dentro un condensatore reale vale solo se siamo nel centro del condensatore. NON vale più sui bordi. Il campo è costante solo in condensatori infiniti.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \overline{AF} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \neq 0$$

(l'approssimazione è valida solo al centro del condensatore reale)

CARICARE UN CONDENSATORE REALE

(Il condensatore serve ad immagazzinare energia)



Ho due lastre di metallo scariche, che collego ad un GENERATORE, strumento che permette di mantenere una diff. di potenziale costante

• Qual è il lavoro generato per spostare una carica dq' ?

$$dW' = V' dq' = \frac{q'}{C} dq'$$

$$W = \int dW' = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{q^2}{2C} = \frac{C}{2} \cdot V^2 = \frac{q \cdot V}{2}$$

$$U = \frac{CV^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{2lh} \cdot V^2 \rightarrow \frac{\epsilon_0 \cdot \Sigma}{2lh^2} \cdot V \cdot lh = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{V}{h} \right)^2 \cdot \overbrace{\Sigma \cdot lh}^{\text{Volume del Condensatore}}$$

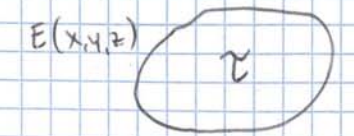
quindi $U = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \mathcal{V}$ da qui ottengo

$$\frac{U}{\mathcal{V}} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = w$$

N.B. Se c'è un campo elettrico allora abbiamo sempre una DENSITA' di Energia

DENSITA' di ENERGIA

Attenzione!! Nella formula NUOVA ricorda il condensatore, questa quindi è una LEGGE GENERALE (Valida sempre)



$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int dx \int dy \int dz E(x, y, z)^2$$

ENERGIA POTENZIALE IN UN CORPO ITRACOSCIPIO

Abbiamo visto
$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{q_i \cdot q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \cdot V_i$$
 per un sistema di cariche puntiformi.

Vediamo il caso per un corpo inglobato manoscritto
$$V = \frac{1}{2} \int dq V = \frac{1}{2} \int V \cdot \rho d\tau$$

prendiamo la prima eq. di MAXWELL $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, allora $\rho = \epsilon_0 \cdot \nabla \cdot \vec{E}$

Sostituiamo nell'integrale e otteniamo
$$V = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \cdot \vec{E}) \cdot V d\tau$$

Per le proprietà del prodotto scalare

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\vec{E} \cdot V) = V \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) + (\nabla V) \cdot \vec{E} \\ V \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) = \nabla \cdot (\vec{E} \cdot V) - \nabla V \cdot \vec{E} \end{cases}$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \int \nabla \cdot (\vec{E} \cdot V) d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \left[\int \nabla \cdot (\vec{E} \cdot V) d\tau - \int \nabla \cdot V \cdot \vec{E} d\tau \right]$$

$$V = \boxed{\frac{\epsilon_0}{2} \int V \cdot \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma + \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau} \quad \text{FORMULA GENERALE}$$

→ nel caso di un condensatore la prima parte è nulla

COLLEGAMENTO DI CONDENSATORI

• Condensatori in parallelo



$C_1 = \frac{q_1}{V}$ $C_2 = \frac{q_2}{V}$ → ΔV applicata a C_1 è uguale a ΔV applicata a C_2 .
(xk i condensatori sono equipotenziali)

$q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2) \cdot V$ (conduttore superiore)

$-q = -(q_1 + q_2)$ è la carica del conduttore inferiore

Definiamo la CAPACITÀ EQUIVALENTE del SISTEMA ⇒ $C_{ep} = C_1 + C_2 = \frac{q}{V}$

Due condensatori in parallelo si comportano come un unico CONDENSATORE la cui capacità è data dalla somma delle capacità dei componenti.

p n condensatori: $C_{ep} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$

C_{ep} è sempre maggiore della capacità di ciascun componente.

⊛ RIGIDITÀ DIELETTICA = è il MAX valore del campo elettrico che può essere applicato a un dielettrico senza che avvengano scariche al suo interno.

dove $\epsilon_p = \left(\frac{k-1}{k}\right) \cdot \epsilon_0$

quindi $E_k = E_0 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0} \left(\frac{k-1}{k}\right) \rightarrow \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0} - \frac{\epsilon_p}{\epsilon_0}$

quando metto il dielettrico si aggiunge una componente opposta che modifica il campo.

Supponiamo che l'isolante messo in mezzo sia fatto di lastre spesse un atomo, queste vanno a creare dei DIPOLI. Annullandosi rimangono due lastre interne che hanno un vettore condensatore (all'interno dell'originale) ma con polarità opposta.

Formule condensatore piano
 chiamiamo $E = k \cdot E_0$
 COSTANTE DIELETTICA ASSOLUTA del dielettrico

$C_k = \frac{q}{V_0/k} = k \cdot \frac{q}{V_0} = k \cdot C_0 = k \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\Sigma}{d}$

quindi $C_k = \frac{\epsilon \cdot \Sigma}{d}$
 la capacità aumenta dello stesso fattore che ha fatto diminuire il potenziale.

[N.B] K dell'aria è pari a 1,0005 (quindi strazione nell'aria o nel vuoto è uguale).

[N.B] ⊛ RIGIDITÀ DIELETTICA (Sapete che se si separa distrugge la materia e crea PLASMA) $10^7 \frac{V}{m}$
 Quando ho campi intensi distruggo la materia creando il PLASMA (ex. fulmine) (max possibile)

POLARIZZAZIONE DEI DIELETTICI

Ricordiamo le due equazioni (valide sempre)

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \end{cases}$$

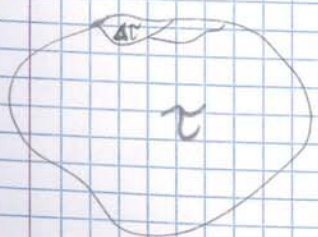
Devo studiare il sistema in maniera diversa, perché non conosciamo nulla a livello ATOMICO (nell'ottocento avevano solo il livello MACROSCOPICO)

In natura abbiamo:

- DIELETTICI ELETTRONICI, quando non c'è un campo ha SIMMETRIA SFERICA.
- DIELETTICI ORIENTATI, anche quando non c'è un campo abbiamo un momento di DIPOLO (molecola H₂O)

Entrambi in un campo elettrico presentano un MOMENTO DI DIPOLO microscopico e parallelo alla direzione del campo e concorde. NOTE del FENOMENO: POLARIZZAZIONE ELETTRONICA

Obiettivo: Dobbiamo definire un quantità macroscopica legata ai dipoli atomici.



$\Delta V \ll V$ ma ΔV deve comunque contenere miliardi di atomi. (x entro la meccanica quantistica)

$\Delta P = \Delta N \langle p \rangle$

Summa di tutti i momenti di Dipolo risultante (Mon. di Dipolo risultante) ↑ Numero di Atomi nel volumetto infinitesimo momento di dipolo medio dell'atomo.

⊗ Quindi in un dielettrico in cui la polarizzazione non sia uniforme oltre alla DENSITÀ SUPERFICIALE, esiste una DENSITÀ SPAZIALE di CARICA di POLARIZZAZIONE. Equale in ogni punto all'opposto della divergenza del vettore P.

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|r-r'|} \right) \cdot \vec{P} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{P}}{|r-r'|} \right) - \frac{(\vec{\nabla} \cdot \vec{P})}{|r-r'|}$$

metto nell'integrale

$$\int \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{P}}{|r-r'|} \right) \cdot d\vec{\tau} - \int \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{|r-r'|} \cdot d\vec{\tau}$$

$$\int \frac{\vec{P}}{|r-r'|} \cdot \vec{n} d\Sigma - \int \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{|r-r'|} d\vec{\tau}$$

$$\int \frac{\sigma_p}{|r-r'|} d\Sigma + \int \frac{\rho_p}{|r-r'|} d\vec{\tau}$$

(N.B.) Da queste formule ottenute si vede che è possibile (conoscendo il VETTORE di POLARIZZAZIONE) calcolare il potenziale e il campo in ogni punto esterno al dielettrico.

Se questi sono uguali allora

$$\begin{cases} \sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} \\ \rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \end{cases} \quad \text{⊗}$$

(N.B.) Se $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$ la carica di polarizz. all'interno è nulla, poiché P è costante (CASO ⊗), e rimane solo il contributo della carica superficiale.

$$\int \sigma_p \cdot d\Sigma + \int \rho_p \cdot d\vec{\tau} = 0$$

CARICA SUPERFICIALE

CARICA nel VOLUME.

⊗ l'oggetto si polarizza ma

la carica totale è nulla, poiché avviene un semplice spostamento di cariche a livello locale.

SI COMPENSANO GLOBALMENTE NON LOCALMENTE e quindi ↓

$$V(A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{P \cdot \vec{n} d\Sigma}{|r-r'|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{|r-r'|} d\vec{\tau}$$

VETTORE INDUZIONE DIELETTICA

Il campo elettrico prodotto da cariche ferme è CONSERVATIVO anche in presenza di DIELETTICI polarizzati.

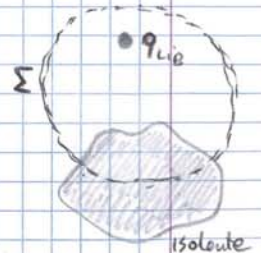
Valgono tutte le leggi anche GAUSS in forma differenziale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{lib}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot [\rho_{lib} + \rho_p]$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot [\rho_{lib} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}]$$

$$\vec{\nabla} \cdot [\epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}] = \rho_{lib}$$

Arbitrariamente sempre le CARICHE SOLO INTERNE alla superficie



Vettore chiamato INDUZIONE DIELETTICA

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$$

, quindi $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{lib}$

$$\oint \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma = Q_{lib}$$

Il flusso del vettore D attraverso una superficie chiusa (contenente sia cariche libere sia q di polarizzazione) dipende solo dalle q lib.

Averemo detto che

$$\vec{P} = \epsilon_0 (k-1) \cdot \vec{E}$$

quindi $\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \epsilon_0 (k-1) \cdot \vec{E} = k \epsilon_0 \cdot \vec{E} = \epsilon \vec{E}$

Conclusione

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

SUSCETTIVITÀ ELETTRICA

SUSCETTIVITÀ ELETTRICA $\chi = (K-1)$

$\chi \equiv (\chi_{orbitale} + \chi_{elettronica})$

Se c'è dipendenza dalla Temperatura, ovvero le molecole non sono SIMMETRICHE $(\sim \frac{1}{T})$
 c'è SEMPRE e NON dipende dalla Temperatura

DIELETTICI ISOTROPI e ANISOTROPI

$P = \epsilon_0 \chi \cdot \bar{E} = \epsilon_0 \cdot (K-1) \bar{E}$ Valida se il materiale è ISOTROPO. (DIELETTICI LINEARI)

1 \equiv x
 2 \equiv y
 3 \equiv z

$P_1 = \epsilon_0 \chi_{11} E_1 + \epsilon_0 \chi_{12} E_2 + \epsilon_0 \chi_{13} E_3$
 $P_2 = \epsilon_0 \chi_{21} E_1 + \epsilon_0 \chi_{22} E_2 + \epsilon_0 \chi_{23} E_3$
 $P_3 = \epsilon_0 \chi_{31} E_1 + \epsilon_0 \chi_{32} E_2 + \epsilon_0 \chi_{33} E_3$

Materie ANISOTROPE (dipendono da 6 numeri) (cristalli)
 Per questi materiali la polarizzazione P non è in generale parallela al campo E.

I nove numeri χ_{ij} costituiscono il TENSORE SUSCETTIVITÀ ELETTRICA. Essi sono in realtà solo 6

poiché $\chi_{ij} = \chi_{ji}$ ($i \neq j$), il TENSORE cioè è SIMMETRICO.

LA CORRENTE ELETTRICA

Lo stesso vale per Δ Non è // al campo E

Il miglior conduttore è l'ARGENTO, poi il RAME. n di elettroni per unità di volume $\times 10^{28}$ elettroni/cm³
 Now trattiamo più il CAMPO ELETTROSTATICO, bensì quello ELETTRICO, dove le cariche si muovono. Il gas di elettroni si muove alla velocità della luce (quasi)

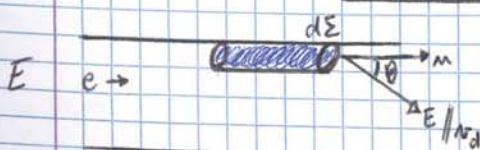
N.B. $n_{velocità} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_{fi} = 0$ la media della velocità degli elettroni è nulla xk la direzione è casuale.

se applico un campo elettrico gli elettroni si orientano anche se la velocità è bassa, è il campo a propagarsi. $v_{drift} \neq v_{fi} \sim 10^4$ m/s
 stessa direzione di E. Cariche orientate.

Definizione

INTENSITÀ di CORRENTE ELETTRICA

$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$ Unità di misura $A = [\frac{C}{s}]$

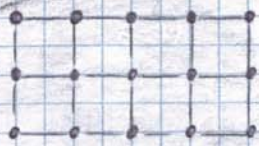


Le cariche si muovono per effetto del campo elettrico.

$\Delta q = e \cdot n_d \cdot \Delta L$
 carica nel volume elementare
 numero dei portatori di carica
 volume delle cariche

ma $\Delta L = dL \cdot n_d \cdot \Delta t \cdot \cos \theta$
 distanza che percorrono le cariche
 Δt

MODELLO di LORENTE



Applicato solo attraverso la meccanica classica (1906)

Spiega la relazione precedente, ma il valore quantitativo numerico è sbagliato xk serve la MECCANICA QUANTISTICA (per il calcolo di σ).

L'oscillazione degli ioni dipende dalla Temperatura, quindi $\uparrow T$ aumenta la probabilità che il reticolo di ioni si scontri con il gas di elettroni. Tra un urto e l'altro la traiettoria dell'elettrone è RETTILINEA e il moto è libero.

LIBERO CAMMINO MEDIO

$$l = N_F \cdot \tau$$

\leftarrow distanza media percorsa dall'elettrone tra un urto e l'altro
 \uparrow quasi velocità luce
 \leftarrow È un moto RETTILINEO UNIFORME, xk non ci sono forze che agiscono sull'elettrone.
 tempo che intercorre tra due urti. medio

Appena dopo l'urto, accendo il campo elettrico e così risulta $F = -e \cdot E$ sull'elettrone. Possiamo scrivere $m \cdot \bar{a} = -eE$, quindi $\bar{a} = -\frac{e \cdot E}{m}$, poiché l'accelerazione è COSTANTE $\bar{a} = \bar{v}$

$$v' = \frac{-e \cdot E}{m} \cdot \text{tempo}$$

Velocità approssimativa indotta dal CAMPO ELETTRICO.

Velocità appena prima del secondo URTO

$$v_{F_{i+1}} = v_{F_{i0}} - \frac{eE}{m} \tau$$

Prendiamo ora un volumetto infinitesimo e vediamo la VELOCITÀ MEDIA (v_M) degli elettroni al suo interno (si un gran numero di urti).

$$v_M = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N v_{F_{i+1}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_{F_{i0}} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{eE}{m} \tau$$

(N.B) quindi per effetto del campo E ciascun elettrone nel metallo acquista una velocità v_M NELLA DIREZIONE del CAMPO e proporzionale al Campo stesso.

Ne consegue che la DENSITÀ di CORRENTE risulta \rightarrow

$$\vec{j} = -n_+ e \cdot v_M$$

xk è una media su un volumetto (si compensano)

$$\vec{j} = \frac{n_+ e^2}{m} \tau \cdot \vec{E} = \sigma(T) \cdot \vec{E}$$

quindi

$$\sigma(T) = \frac{n_+ \cdot e^2}{m} \cdot \tau$$

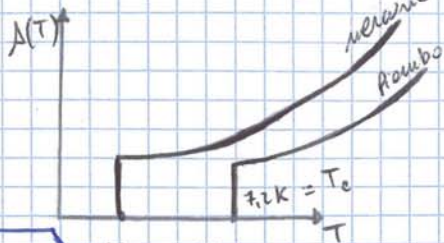
CONDUTTIVITÀ del metallo

SUPERCONDUTTIVITÀ

Omnes (fisico d'origine) vuole dimostrare se $J = \nabla E = \frac{E}{\rho}$ valeva sempre.

77 gradi Kelvin temperatura dell'Azoto liquido (MAX punto raggiunto)

Non riesce ad arrivare alla ZERO ASSOLUTO. Ossigeno liquido (50 Kelvin) // Idrogeno (20K) // He (4.2)



(N.B.)

La resistività diventa zero sotto la Temperatura Critica.

$\Delta V = Ri$ $R = \rho \cdot \frac{l}{S}$ → lunghezza del filo.

Se facciamo un circuito di piombo e lo teniamo sotto 7,2 Kelvin e mettiamo una corrente, se

terminiamo dopo moltissimo tempo la corrente

già ancora. (SUPERCONDUTTIVITÀ $\rho(T) = 0$)

Nei superconduttori la meccanica quantistica si manifesta a livello MACROSCOPICO. Tutti gli elettroni vanno all'unisono. (basta osservarne 1 per osservarli tutti). Esempio pezzo di piombo raffreddato.

È un fenomeno COOPERATIVO che si manifesta solo in presenza di miliardi di particelle.

Nel superconduttore il campo magnetico è sempre NULLO (es. LEVITAZIONE con magneti e superconduttore). L'annullarsi della resistività nei superconduttori comporta che non occorre spendere Potenza (nessun generatore) per mantenere la corrente. L'utilizzazione di cavi superconduttori per il trasporto di energia elettrica sarebbe quindi molto conveniente. Purtroppo bisognerebbe mantenere tutto il cavo a pochi Kelvin e quindi rinchiuderlo dentro un criostato isolato dall'ambiente (operazione costosa e difficile tecnologicamente).

Possiamo però tentare di trovare dei superconduttori con una temperatura critica più elevata. La temperatura critica del Niobio è 9,3 Kelvin, mentre la lega Nb₃Ge ha $t_c = 23$ Kelvin. Altro conduttore è il LaBaCuO con $t_c = 40$ Kelvin (grande scoperta). Quindi si provano a fare molte leghe di Ossido di Rame. La più facile da fare e non tossica è il BeCuO. Non possiamo fare cavi di questi materiali xk sono delle ceramiche e quindi si rompono molto facilmente.

Attenzione: $t_{ambiente} \rightarrow$ cattivi conduttori // $t_c \rightarrow$ superconduttori ottimi.

Materiale che conduce bene elettricità \rightarrow conduce bene il calore.

$\frac{k}{\sigma} = L \cdot T$

k = conduttività termica

σ = conduttività

L = numero di Lorentz = $2,5 \cdot 10^{-8} \frac{J^2}{C^2 \cdot K^2}$

ECCEZIONE
diamante è un isolante ma conduce il calore.

CALCOLO della RESISTENZA DI CONDUTTORI TRIDIREZIONALI

Condensatore PIANO.

Supponiamo di avere un condensatore piano e di riempirlo con un mezzo conduttore (metallo).

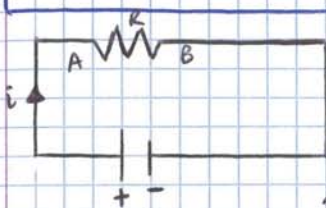
Abbiamo queste informazioni $R = \rho \frac{h}{\Sigma} \parallel C = \frac{\epsilon_0 \cdot \Sigma}{h}$

quindi otteniamo questa relazione

$R \cdot C = \rho \epsilon_0$

Vale sempre per tutti i tipi di Condensatori (LEGGE UNIVERSALE).

FORZA ELETTROMOTTRICE



$V_B - V_A = \int_A^B E \cdot ds = R \cdot i$

Questa equazione mette in relazione l'intensità di corrente nel conduttore con il campo elettrico E prodotto da un generatore esterno, a cui poi è collegato il conduttore.

Se applichiamo questa relazione ad un circuito chiuso ottengo $\oint E \cdot ds = R_T \cdot i$

(N.B) Questa equazione è diversa da zero xk il campo non è più elettrostatico. R_T indica la RESISTENZA TOTALE del CIRCUITO STESSO. Come notiamo il primo membro coincide con la definizione di fem.

Dobbiamo tener conto che R_T è composta da 2 contributi (la resistenza fra A e B // la resistenza interna al sistema). Siccome la corrente "i" che attraversa il conduttore esterno passa anche nel generatore dal polo A al polo B il filo fa resistenza.

quindi $fem = (R + r) i$

LEGGI DI KIRCHHOFF

Semplifichiamo l'analisi delle reti elettriche, costituite da RARI e NODI. Un nodo è dove convergono almeno 3 conduttori. I nodi sono collegati dai RARI, in cui possono esserci componenti attivi (generatori) o componenti passivi (resistenze).

1. LEGGE

La prima legge di Kirchhoff, o "legge dei nodi" dice che LA SOMMA ALGEBRAICA delle correnti che confluiscono in un nodo è nulla, se prendiamo con un dato segno le correnti entranti e con segno opposto quelle uscenti.

LA CARICA quindi si conserva.

$\sum_k i_k = 0$

Risolviemo l'equazione $\frac{I_1 \cdot R_x}{I_0 \cdot R_0} = \frac{I_2 \cdot R_2}{I_1 \cdot R_1} \rightarrow R_x = \frac{R_0 \cdot R_2}{R_1}$

Sostituiamo secondo l'ipotesi $R = \frac{\rho h}{\Sigma} \rightarrow R_x = R_0 \cdot \frac{\rho \cdot \frac{x}{\Sigma}}{\rho \cdot \frac{(a-x)}{\Sigma}}$

otteniamo $R_x = R_0 \cdot \left(\frac{x}{a-x}\right)$

IL MAGNETISMO

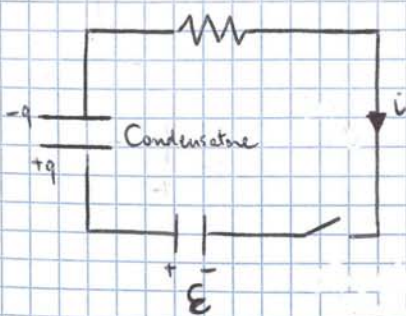
Tutta l'elettrostatica condensata in

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \wedge \vec{E} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \wedge \vec{E} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{P} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} \end{array} \right. \text{ nei dielettrici.}$$

All'inizio si vedeva che campo elettrico e campo magnetico fossero separati:

Volta inventa la Pila. Ampere nota che un filo percorso da una corrente genera un campo magnetico. Da quel momento possiamo parlare di campo elettromagnetico. Finora abbiamo considerato casi particolari del campo elettromagnetico.

CARICA DI UN CONDENSATORE



A $t=0$ chiudo il circuito e inizia a girare la corrente. In un istante generico t , valgono le seguenti relazioni:

$$E = V_C + V_R$$

$$E = \frac{q(t)}{C} + i(t) \cdot R$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \left(E - \frac{q(t)}{C} \right) \cdot \frac{1}{R} = \left\{ - \left(\frac{q(t) - EC}{CR} \right) \right.$$

$q(t=0) = 0$

↑ inversione di corrente

$$\int_{q_0}^{q(t)} \frac{dq}{q(t)} = - \int_0^t \frac{dt}{RC} \rightarrow \ln \frac{q(t)}{q_0} = - \frac{t}{RC}$$

quindi $q(t) = q_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$ mentre $i(t) = -\frac{q_0}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$

Controlliamo se l'Energia si conserva.

$$P_c = V_c \cdot i = \frac{q \cdot i}{C} = \frac{q_0^2}{RC^2} \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right)$$

Poiché le due espressioni sono identiche la ENERGIA TOTALE si conserva.

$$P_R = i^2 R = \frac{R q_0^2}{R^2 C^2} \cdot \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right) = \frac{q_0^2}{RC^2} \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right)$$

IL MAGNETISMO

Tutta l'elettrostatica condensata in:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \wedge \vec{E} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \wedge \vec{E} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{P} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} \end{cases}$$

Mei dielettrici

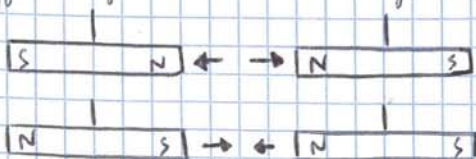
All'inizio si pensava che il campo elettrico e quello magnetico fossero separati.

Volta inventa la pila. Ampere nota che un filo percorso da una corrente genera un campo magnetico. Da quel momento possiamo parlare di campo elettromagnetico. Finora abbiamo considerato casi particolari del campo elettromagnetico.

FENOMENI STATICI del MAGNETISMO

$\epsilon_0 \mu_0$ lega per fare le calamite.

Oggetto lungo e sottile è il migliore per evidenziare i fenomeni di magnetismo.



Definizione di polo Nord e polo Sud.

Come per le forze di natura elettrostatica possiamo interpretare il fatto dicendo che un magnete genera un CAMPO MAGNETICO, e l'altro magnete risente dell'azione di questo campo.

I poli dello stesso magnete sono sempre di segno opposto.

Possiamo poi parlare di velocità Angolare

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m}$$

LA VELOCITÀ ANGOLARE È SEMPRE PARALLELA a B.

Inoltre con q NEGATIVA, allora ω ha lo stesso verso di B e il moto è antiorario.

Con q positiva il moto è orario e il verso è opposto a quello di B.

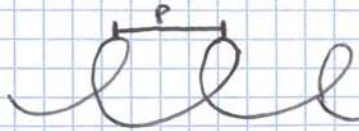
CASO ②

Qualsiasi

quindi $F_L = q\vec{v} \wedge \vec{B} = q(\vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp) \wedge \vec{B} = q\vec{v}_\perp \wedge \vec{B} = q \cdot v \cdot \sin\theta \cdot \vec{B}$

Forza nulla con $v \parallel B$

Il moto finale di questa carica è a ELICA (MOTO CIRCOL. ACC. + MOTO RET. UNIFORME)



$$P = v \cos\theta \cdot T$$

(passo)
dell'elica

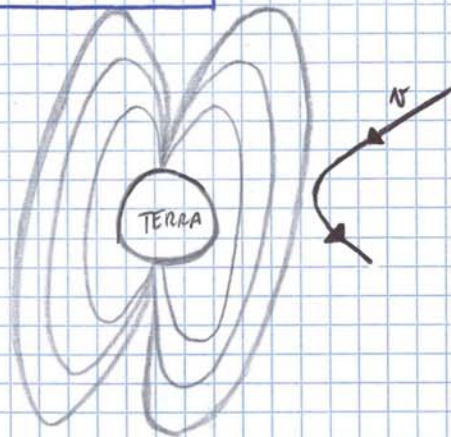
Troviamo il valore del periodo.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$$

quindi $\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$

UTILITÀ PRATICHE

①



Le particelle cariche ad alta velocità non penetrano il campo magnetico terrestre xc il CASO MAGNETICO devia la traiettoria. Se queste particelle entrassero sulla terra, probabilmente non esisterebbe la vita sulla terra (molte restrizioni → Attenzione ai poli)

②

FUSIONE NUCLEARE

Dall'equazione di Einstein $E = mc^2$

Si cerca di trasformare gli isotopi di idrogeno in altri; durante il processo una parte della massa viene trasformata in energia e i prodotti che si ottengono sono stabili (cioè NON RADIOATTIVI).

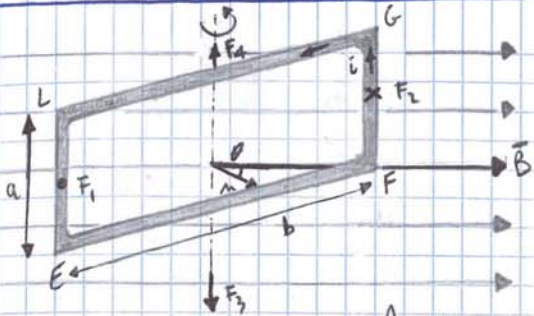
Problema

Unico contenitore per far avvenire la fusione è un CONTENITORE MAGNETICO.

Questo contenitore è difficile da creare xc ad alte temperature le particelle hanno un alta velocità. Esempio cariche generano una corrente elettrica che forma un nuovo CAMPO magnetico che interferisce con il campo magnetico della scatola.

MOMENTI MECCANICI SU CIRCUITI PIANI

~ PRINCIPIO di EQUIVALENZA di AMPÈRE (Un circuito percorso da corrente si comporta come un magnete)



Spira rettangolare percorsa da corrente immersa in un campo magnetico uniforme.

$$dF = i ds \wedge B$$

Analizziamo le forze su ogni lato.

$F_4 = -F_3$, quindi la spira non TRASLA. Mentre grazie a F_1 e F_2 la spira (perché non è vincolata) ruota. La forza totale è nulla xk $F_1 = -F_2$, ma queste generano un momento.

ANALOGIA

Il comportamento della SPIRA percorsa da corrente e immersa in un B , risulta esattamente quello di un dipolo elettrico posto in un campo elettrico

$$M = F_1 b \sin \theta = i \cdot a \cdot b \sin \theta \cdot B$$

$$a \cdot b = \Sigma \text{ (area della spira)}$$

$$F_1 = \left(i \int ds \right) \wedge B \rightarrow F_1 = i a B$$

$$M = i \Sigma B \sin \theta$$

$\vec{m} = i \Sigma \vec{m}$ → Valida sempre per B non costante e per una forma qualunque della SPIRA.

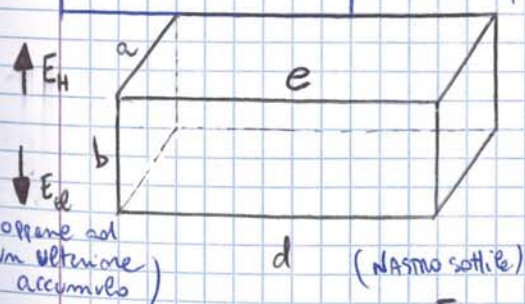
$$M = \vec{m} \wedge B$$

MOMENTO MAGNETICO

\vec{m} ha direzione normale alla spira.

(1879) **EFFETTO HALL**

Serve per distinguere quale componente porta la corrente, grazie ai campi magnetici.



Accendo un campo magnetico costante diretto lungo y

$$F_L = e N_d \vec{v}_d \wedge B = e N_d \hat{u}_x \wedge B \hat{u}_y$$

$F_L = e N_d B \hat{u}_z$ (La Forza risultante è lungo z)
 quindi sulla faccia superiore troviamo le cariche positive, che si sono mosse sotto l'effetto della FORZA.

$$E_H = \frac{F_L}{e} = N_d \vec{v}_d \wedge B$$

anche detto CAMPO ELETTROMOTORE (xk la forza non è elettrostatica). → NON È CONSERVATIVO

Il fenomeno continua finché non c'è equilibrio, ovvero $E_H + E_{\text{elettrostatica}} = 0$
 Lo spostamento delle cariche crea un campo elettrico (dinamico)

Il campo elettrostatico cresce finché non raggiunge il valore di quello di Hall.

→ In equilibrio il dispositivo si comporta come un generatore in cui non circola corrente.

Quale particelle passano nel foro finale?? Quelle che non subiscono deviazioni, ovvero

$$F = qE + q\vec{v} \wedge \vec{B} = 0$$

$$F = qE + qvB = 0$$

quindi $v = \frac{E}{B}$ Uniche velocità VALIDE

$$\frac{m}{q} = \frac{B_0 \cdot r_{\text{mis}}}{v} = \frac{B_0 \cdot B \cdot r_{\text{mis}}}{E}$$

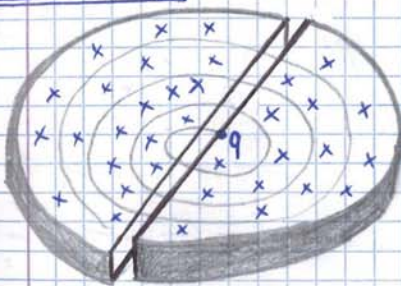
misuriamo solo quelle particelle che hanno passato l'ultimo schermo.

Spettrometro di BAINBRIDGE (eq. lineare) → risultati più affidabili

IL CICLOTRONE

Primo acceleratore di particelle. (Usa il principio del condensatore più volte)

CAVO all'interno



q è nel centro all'inizio ferma. Les una differenza di potenziale per far muovere la carica. Continuo a creare delle diff. di potenziale x fare muovere

Continuo finché il raggio di curvatura raggiunge il raggio dell'acceleratore (v_{max}).

(1934) LAWRENCE E LIVINGSTONE

$$qV = \frac{1}{2} m v_1^2 \quad \text{Energia cinetica iniziale.}$$

Il tempo non dipende dalla velocità →

$$t_1 = \frac{\pi r_1}{v_1} = \frac{\pi}{v_1} \cdot \frac{m v_1}{qB} = \frac{m\pi}{qB}$$

(N.B)

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + qV = \frac{1}{2} m v_2^2$$

Secondo valore di Energia Cinetica

quindi $t_1 = t_2$

$$t_2 = \frac{\pi r_2}{v_2} = \frac{m\pi}{qB}$$

si impiega lo stesso tempo di prima a percorrere le semicirconferenze.

Il tempo di percorrenza di un'orbita circolare in B NON DIPENDE dalla velocità della particella

$$T = 2t_1 = \frac{2m\pi}{qB}$$

perché $T = \frac{2\pi}{\omega}$ allora

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

$$N_{\text{max}} = \frac{q \cdot B \cdot R}{m}$$

con R = raggio del ciclotrone.

Questa nel time vole solo se $\frac{N}{c} \ll 1$

$$E_{\text{max}} = \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{qBR}{m} \right)^2$$

$$N = \frac{E_{\text{max}}}{2qV_0}$$

Numero di giri effettivi nel ciclotrone della particella

Dal momento che la particella acquista ad ogni giro $2qV$ di Energia

A livello infinitesimo invece abbiamo
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} \wedge \vec{r}}{r^3} dV$$

Sempre utilizzando il VETTORE densità di CORRENTE

• Diamo adesso un significato fisico a questa legge (molto importante)

CAMPO MAGNETICO PRODOTTO DA UNA CARICA IN MOTO

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{(n_+ \cdot e v) \wedge \vec{r}}{r^3} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(e \vec{v} \wedge \vec{r})}{r^3} \underbrace{n dV}_{dN}$$

(numero di cariche contenute nel volume)

Attenzione

Basta una carica sola in movimento per creare un campo magnetico (debolissimo ovviamente)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{e \vec{v} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

↑ CAMPO MAGNETICO prodotto da una singola CARICA

Inoltre poiché $E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2}$

otteniamo

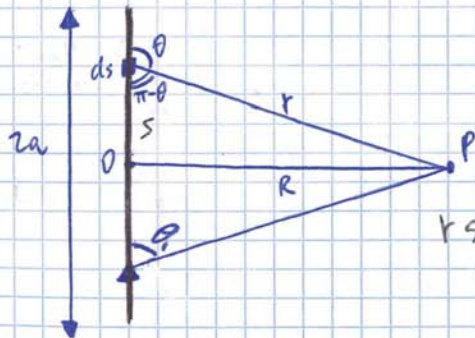
$$\vec{B} = \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \vec{v} \wedge \vec{E}$$

Stabilendo così una stretta relazione tra campo elettrico e magnetico prodotti da una carica in moto.

APPLICAZIONI (con correnti filiformi)

L'APPLICAZIONE : LEGGE di BIOT-SAVART

$$B \perp ds \quad B \perp R$$



Applichiamo la formula

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot i \cdot \frac{ds \wedge \vec{r}}{r^2}$$

$$r \sin(\pi - \theta) = r \sin \theta = R \rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2 \theta}{R^2}$$

$$s \sin(\pi - \theta) = -s \sin \theta = R$$

quindi

$$s = -R \cot \theta$$

$$ds = \frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta$$

Sviluppo il prodotto vettoriale e poi sostituisco i valori trovati prima

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot i \cdot \frac{ds \sin \theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot i \cdot \frac{R}{\sin^2 \theta} \cdot d\theta \cdot \sin \theta \cdot \frac{\sin^2 \theta}{R^2}$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot i \cdot \frac{\sin \theta}{R} d\theta$$

Dopo le sostituzioni.

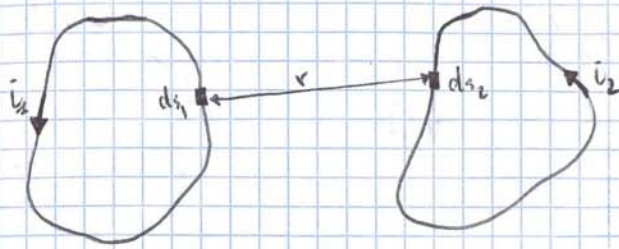
Calcoliamo il modulo del campo

$$\text{quindi } B = 2 \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi R} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi R} [-\cos \theta]_{\theta_1}^{\pi/2}$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi R} i \cos \theta_1 = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi R} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}$$

DEFINIZIONE AMPÈRE

(come unità di misura)



Ogni circuito genera un campo magnetico che produce una forza che agisce sull'altro circuito

Calcolo il campo magnetico del circuito 1, che agisce sul circuito 2 utilizzando

la prima legge elementare di Laplace

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot i_1}{4\pi} \int \frac{ds_1 \wedge \hat{r}}{r^3}$$

XK la II di Laplace
Calcola la forza su un

Calcoliamo poi le forze di LORENZ

$$[dF_{12} = i_2 \cdot ds_2 \wedge B_1]$$

Forza agente su ds2

La situazione è reciproca, poiché anche il secondo circuito fa azione sul primo.

$$F_{12} = \oint_{S_2} \oint_{S_1} \frac{i_2 \cdot i_1 \mu_0}{4\pi} \cdot \frac{ds_2 \wedge ds_1 \wedge \hat{r}}{r^2}$$

Attenzione

Non è difficile trovare delle situazioni in cui $dF_{12} \neq dF_{21}$ (in contrasto con il principio di azione e reazione).

$$F_{12} = -F_{21}$$

$$F_{21} = \oint_{S_1} \oint_{S_2} \frac{i_1 \cdot i_2}{4\pi} \mu_0 \cdot \frac{ds_1 \wedge ds_2 \wedge \hat{r}}{r^2}$$

Il fatto non è così preoccupante in quanto, come già detto, le

Doppia integrazione che tiene conto di tutte le coppie di elementi ds_1 e ds_2 tra i quali si esercitano le forze dF .

LEGGI di LAPLACE, considerate a se, non si applicano a sistemi fisicamente realizzabili.

Dimostrazione

$$F_{12} = \frac{i_2 \cdot i_1}{4\pi} \mu_0 \oint_{S_2} \oint_{S_1} \frac{ds_2 \wedge ds_1 \wedge \hat{r}}{r^2}$$

$$ds_1 \wedge ds_2 \wedge \frac{\hat{r}}{r^2} = ds_1 \cdot \left(-\nabla \frac{1}{r} \right) \cdot ds_2 - \frac{(ds_1 \cdot ds_2) \cdot \hat{r}}{r^2}$$

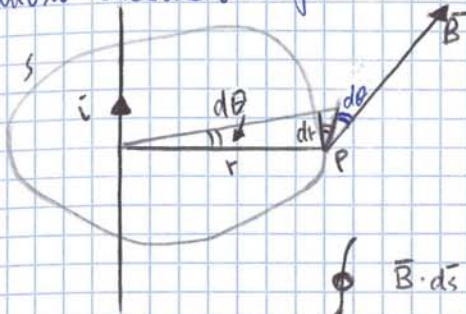
Data l'identità geometrica $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Possiamo scrivere $\frac{\hat{r}}{r^2} = -\nabla \left(\frac{1}{r} \right)$

• ANALOGO DEL TEOREMA DI GAUSS PER IL CAMPO MAGNETICO

TEOREMA DI AMPÈRE (Molto più generale delle 1 legge di Laplace.)

① LINEA chiusa concatenata al filo



$$B = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi r}$$

Inizialmente consideriamo un filo che produce un campo magnetico e sommiamo il prodotto scalare con un generico vettore $d\vec{s}$.

$$\vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot ds \cdot \cos\theta = B \cdot dr = B r d\theta$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi r} r d\theta = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi} \int d\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot 2\pi$$

Attenzione

Il campo \vec{B} \times è generato da tutte le correnti presenti (anche da quelle non concatenate)

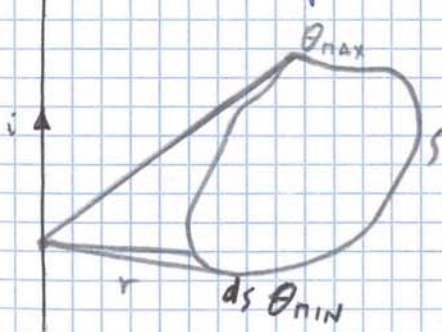
quindi

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot i$$

CASO GENERALE

Con i intendiamo la SOMMA delle correnti **CONCATENATE**.

② Linea chiusa non concatenata al filo

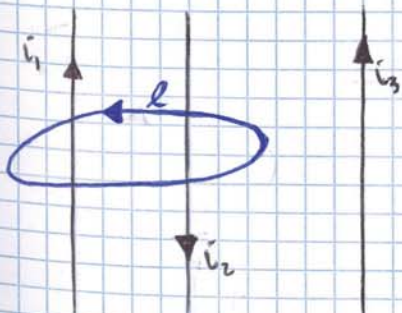


La circolazione di un campo magnetico che non avviene attorno al filo ha come contributo 0.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int d\theta = 0$$

$$\theta_{min} \rightarrow \theta_{max} \rightarrow \theta_{min}$$

③ Più fili insieme



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum_{k=1}^N i_k$$

nel nostro caso guardando il verso di percorrenza \vec{l}

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_1 - i_2) \quad \text{(REGOLA DEL PIANO DESTRO)}$$

LA circolazione dipende solo dalle correnti concatenate, mentre \vec{B} dipende da tutte le correnti presenti.

Componiamo

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \rho_{\text{ext}} \\ \nabla \wedge \vec{E} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J} \end{cases}$$

campo elettrico \vec{E} CONSERVATIVO \rightarrow irrotazionale NO (vedi: invarianza)

campo magnetico \vec{B} solenoidale \rightarrow elettrico NO (vedi: divergenza)

• Verifichiamo che $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ risponde alla prima legge di Laplace

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \oint \frac{ds \wedge \vec{r}}{r^2} \right)$$

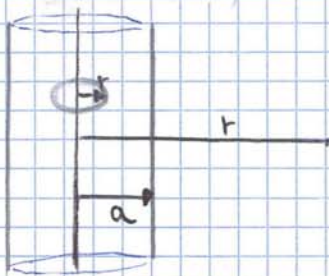
Applichiamo una legge geometrica $\nabla \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\nabla \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b} - (\nabla \wedge \vec{b}) \cdot \vec{a}$

otteniamo $= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot i \left[\oint (\nabla \wedge ds) \cdot \frac{1}{r^2} - \oint (\nabla \wedge \frac{1}{r^2}) \cdot ds \right] = 0$

• \times le determinate si annulla

Perché $\nabla \wedge \frac{1}{r^2} = -\nabla \wedge \left(\frac{1}{r} \right) = 0$

FILO RETTILINEO INDEFINITO



• Se $r > a$ allora

$$B = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi r}$$

della legge di BIOT-SAVART

Per il teorema di Ampère cerco di prendere una superficie con una forma che faciliti la risoluzione del problema.

• Se $r < a$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 \cdot i' = \mu_0 \cdot i \left(\frac{r}{a} \right)^2$$

NB

$$i = \pi a^2 J \quad // \quad i' = \pi r^2 J$$

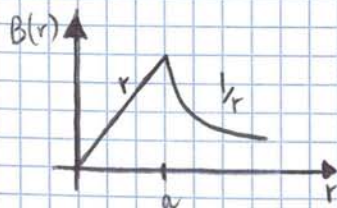
quindi $i' = i \left(\frac{r}{a} \right)^2$

La circonferenza presa è costante quindi dalla legge di Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot i' \rightarrow B \oint ds = \mu_0 \cdot i \left(\frac{r}{a} \right)^2 \rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot i \left(\frac{r}{a} \right)^2$$

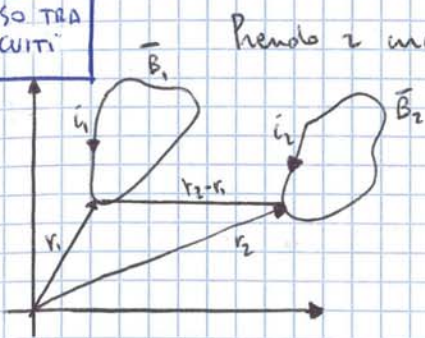
ottengo

$$B = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot r}{2\pi a^2}$$



Nel caso in cui $r = a$ allora torniamo al primo caso presentato.

FLUSSO TRA CIRCUITI



Prendo 2 circuiti uno vicino all'altro.

Quanto vale il flusso del campo B_1 attraverso una superficie chiusa del circuito 2?

$$\Phi_{12}(B_1) = \int_{\Sigma_2} \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_2 \cdot d\Sigma_2$$

↳ qualsiasi superficie che si appoggia sul secondo circuito

mentre $\Phi(B_2) = \int_{\Sigma_1} \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_1 \cdot d\Sigma_1$

Espresso ora B_1 grazie alla prima legge di LAPLACE.

$$\Phi_{1,2}(B_1) = \int_{\Sigma_2} \left[\oint_{\gamma_1} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot i_1 \cdot \frac{ds_1 \wedge \hat{r}_1}{r_1^2} \right) \cdot n_2 \cdot d\Sigma_2 \right]$$

$$\Phi_{1,2}(B_1) = \left[\int_{\Sigma_2} \oint_{\gamma_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{ds_1 \wedge \hat{r}_1}{r_1^2} \cdot n_2 \cdot d\Sigma_2 \right] \cdot i_1 = \boxed{M_{12} \cdot i_1}$$

(COEFFICIENTE GEOMETRICO)
Coefficiente di mutua induttanza
misurato in Henry

mentre analogamente $\Phi_{21}(B_2) = \left[\int_{\Sigma_1} \oint_{\gamma_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{ds_2 \wedge \hat{r}_2}{r_2^2} \cdot n_1 \cdot d\Sigma_1 \right] \cdot i_2 = \boxed{M_{21} \cdot i_2}$

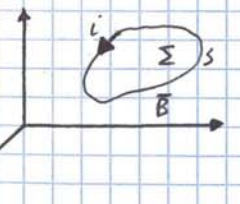
Costante se i due circuiti sono INDEFORMABILI e FISSI uno rispetto all'altro

$M_{12} = M_{21} = M$

↳ dipende dalla forma dei circuiti e dalla loro posizione relativa
↳ dipende dalle proprietà magnetiche del mezzo.

Quindi scriviamo $\Phi_{12} = M i_1$ // $\Phi_{21} = M i_2$ come Espressioni del FLUSSO CONCATENATO con un circuito dovuto al campo magnetico di un altro circuito. Inoltre $M_{11} = \mu_0 \mu_r$

AUTO FLUSSO



$$\Phi(B) = i \cdot \left[\int_{\Sigma} \oint_{\gamma} \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{ds \wedge \hat{r}}{r^2} \cdot \hat{n} \cdot d\Sigma \right] = \boxed{L \cdot i}$$

Il campo magnetico generato da un circuito produce un flusso anche attraverso il circuito stesso, detto AUTOFLUSSO del circuito. Dove il fattore L è il COEFFICIENTE di AUTOINDUTTANZA; il quale dipende dalla geometria del circuito. Ed è costante se il circuito è INDEFORMABILE.

* Il fatto che il rotore del campo magnetico sia proporzionale alla densità di corrente e quindi non sia identicamente nullo, ovvero che la circolazione di \vec{B} sia diversa da zero quando la linea di integrazione contenga una corrente, non permette di definire un potenziale scalare magnetico come invece era stato possibile in elettrostatica, dove $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$

$$\Phi(B) = \frac{\mu_0 \cdot N^2}{2\pi} a \cdot i \int_R^{R+b} \frac{dr}{r} \rightarrow i \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+b}{R}\right)$$

quindi $\boxed{\Pi = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{R+b}{R}\right)}$

POTENZIALE VETTORE

Il campo magnetico soddisfa $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ e ciò vuol dire che può sempre essere espresso come rotore di un altro vettore.

*
pg. dopo

Proprietà matematica se $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ allora $\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}}$

Potenziale Vettore.
(Non può essere misurato)

$A \xrightarrow{\text{definito}} \boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot S}$ con S funzione scalare arbitraria

$\left\{ \begin{aligned} \vec{B}' &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A}' = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} + \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} S = \vec{B} \end{aligned} \right\}$ Il campo magnetico derivato da A' è uguale a quello derivato da A .

N.B.

Il pot. vettore \vec{A} è dunque definito a meno del gradiente di una funzione scalare arbitraria

$A'(\vec{x}_2) - A'(\vec{x}_1) = A(\vec{x}_2) + \vec{\nabla} S(\vec{x}_2) - A(\vec{x}_1) - \vec{\nabla} S(\vec{x}_1) \neq A(\vec{x}_2) - A(\vec{x}_1)$

$\neq A(\vec{x}_2) - A(\vec{x}_1)$

quindi $\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}'}$

Questo grado di libertà nella scelta di A mi permette di imporre una condizione utile.

Calcolando la divergenza di A' ottengo: $\vec{\nabla} \cdot A' = \vec{\nabla} \cdot A + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} S) = \vec{\nabla} \cdot A + \nabla^2 S$

Scegliamo una funzione S in modo tale che $\vec{\nabla} \cdot A' = 0$ (senza toccare il campo magnetico)

Definizione completa di potenziale vettore \vec{A}

$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

APPROPRIATA SOLO NELLA MAGNETOSTATICA

$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J}$

$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}') = \mu_0 \cdot \vec{J}$

$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}') - \nabla^2 \vec{A}' = \mu_0 \cdot \vec{J}$

quindi

$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \cdot \vec{J}}$

$\nabla^2 A_x = -\mu_0 \cdot J_x$

$\nabla^2 A_y = -\mu_0 \cdot J_y$

$\nabla^2 A_z = -\mu_0 \cdot J_z$

Attenzione: Questa equazione ricorda molto l'equazione di Poisson

VARIATIONE DEI PARAMETRI

$V \rightarrow A$

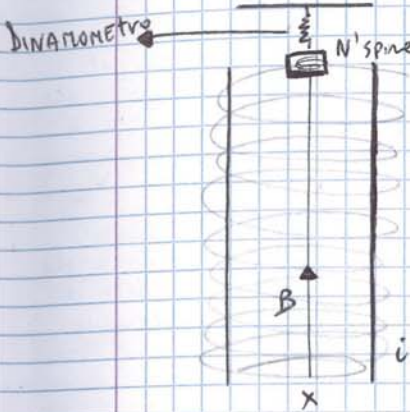
$\frac{1}{\epsilon_0} \rightarrow \mu_0$

$\rho \rightarrow J$

PROPRIETA' MAGNETICHE DELLA MATERIA

Cosa succede al campo magnetico se metto un materiale all'interno??

• Si perde la simmetria con il CAMPO ELETTRICO



Perche' il raggio della BOBINA e' molto piccolo possiamo assumerlo come un dipolo di momento m' .

$$m' = N' \cdot \vec{e} \cdot \sum \vec{a}$$

$$U = -\vec{m}' \cdot \vec{B}$$

Per le forze conservative $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$

$$\text{quindi } \vec{F} = -\vec{\nabla} (-\vec{m}' \cdot \vec{B}) = m' \cdot \frac{dB}{dx}$$

Se le correnti sono concordi allora l'oggetto e' tirato verso l'interno, mentre se le correnti sono discordi la forza e' REPULSIVA.

Adesso riempio la scatola con del materiale (oro, piombo, bismuto, ...) e vedo diversi comportamenti. Posso quindi pensare che i materiali siano composti da momenti magnetici paralleli e concordi (o discordi) a B.

- MATERIALI $\left\{ \begin{array}{l} \text{DIAMAGNETICI} = \text{respinti leggermente} \\ \text{PARAMAGNETICI} = \text{attratti leggermente} \\ \text{FERROMAGNETICI} = \text{attratti FORTEMENTE} \end{array} \right.$

PERMEABILITA' MAGNETICA RELATIVA

$$\frac{B_m}{B_0} = K_m$$

compo dopo aver riempito il Solenoide con il materiale

(numero puro) adimensionale

quindi

$$B_m = B_0 \cdot K_m = K_m \cdot \mu_0 \cdot n \cdot i$$

compo prima di mettere il materiale

Il mezzo magnetizzato si aggiunge alle sorgenti di B costituite dalle correnti di conduzione.

$$X_m = K_m - 1$$

SUSCETTIVITA' MAGNETICA

(permette di vedere la variazione del campo magnetico)

COME distinguere i vari materiali

- $K_m < 1$ $X_m \approx -10^{-5}$ **DIAMAGNETICI** (argento, oro, rame)
- $K_m > 1$ $X_m \approx 10^{-5}$ **PARAMAGNETICI** (alluminio, calcio, magnesio)
- $K_m \gg 1$ $X_m \approx 10^5$ **FERROMAGNETICI** (ferro, cobalto, nichel)

ETTORE DI MAGNETIZZAZIONE

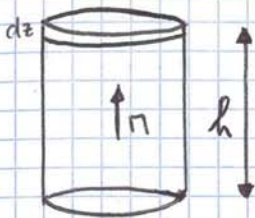
$$\vec{M} = \frac{N}{V} \langle \vec{m} \rangle = n \langle \vec{m} \rangle$$

$$\vec{M} = \frac{dm}{dV}$$

momento magnetico per unità di volume del materiale.

Cosa succede in un materiale omogeneo?? (μ omogeneo)

Divido la striscia in TANTI PRISMI INFINITESIMALI



$$dV = d\Sigma \cdot dz$$

$$\begin{cases} dm = M \cdot dV = M d\Sigma \cdot dz \\ dm = di \cdot d\Sigma \end{cases}$$

quindi $di = M \cdot dz$

In generale (sommando tutte le fasce dz)

$$\vec{i}_m = \int_0^h M \cdot dz = M \cdot h = \oint M \cdot dz$$

perché $J_{m,e} = \frac{i_m}{h} = M$

$$\vec{J}_{m,e} = \vec{M} \wedge \hat{u}_m$$

versore normale all'asse del cilindro e orientato verso l'esterno

Se M è costante

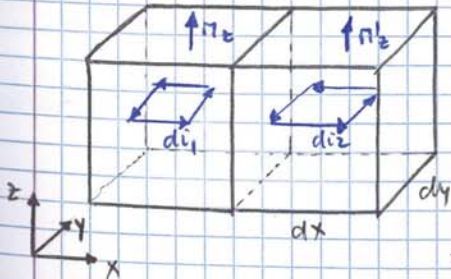


Tutte le correnti a contatto e quindi si annullano. Rimangono

solo le correnti sull'esterno. Valido solo se il materiale è omogeneo

Quindi il disco è perfettamente equivalente ad un circuito percorso da $di = M \cdot dz$.

Cosa succede in un materiale non omogeneo?? (μ non omogeneo)



$$\begin{aligned} di_1 - di_2 &= M_z \cdot dz - M'_z \cdot dz \\ &= -(M'_z - M_z) dz \end{aligned}$$

$$= - \left(M_z(x+dx) - M_z(x) \right) dz$$

Facciamo lo sviluppo in serie

$$di_1 - di_2 = - \left(\cancel{M_z(x)} + \frac{dM_z}{dx} \cdot dx - \cancel{M_z(x)} \right) dz$$

$$di_1 - di_2 = - \frac{dM_z}{dx} dx \cdot dz$$

Considerazione finale:

$\oint H \cdot dl = i$ non delimita completamente H ma dalla conoscenza delle condizioni di conduzione determiniamo H e da noi possiamo ricavare e valutare l'effetto nel mezzo (μ) e calcolare il campo magnetico.

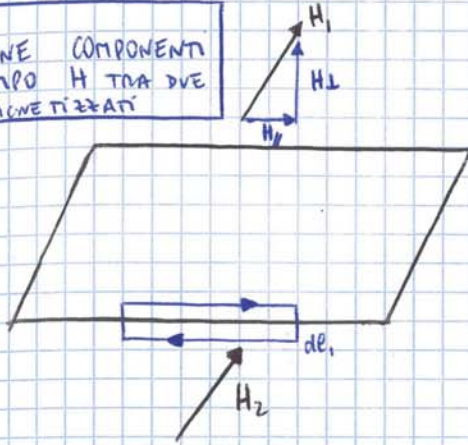
Andiamo a sostituire e otteniamo

$$B = \mu_0 (H + \chi_m \cdot H) = \mu_0 (1 + \chi_m) \cdot H = \underbrace{\mu_0 \cdot k_m}_{\mu} H = \mu H$$

quindi $B = \mu H$

PERMEABILITÀ MAGNETICA ASSOLUTA.

VARIATIONE COMPONENTI CAMPO H TRA DUE MEZZI MAGNETIZZATI



$$H_{1\parallel} \cdot dl - H_{2\parallel} \cdot dl = 0 \quad \text{con } dl_{\perp} = 0(dl)$$

quindi $H_{1\parallel} = H_{2\parallel}$

La componente parallela si conserva nel passaggio tra due mezzi diversi.

PROPRIETÀ dei MATERIALI FERROMAGNETICI

Sono pochissime le sostanze ferromagnetiche in natura

(I superconduttori sono DIAMAGNETICI perfetti)

(Ferro, Cobalto, Nichel, GHADIMIO)

$$M = \chi(H, T) \cdot \vec{H}$$

per i ferromagneti non possiamo più avere l'equazione χ non è più costante.

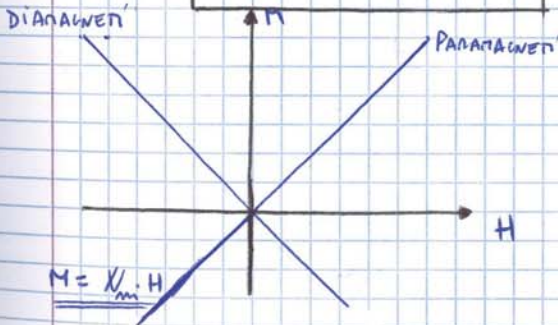
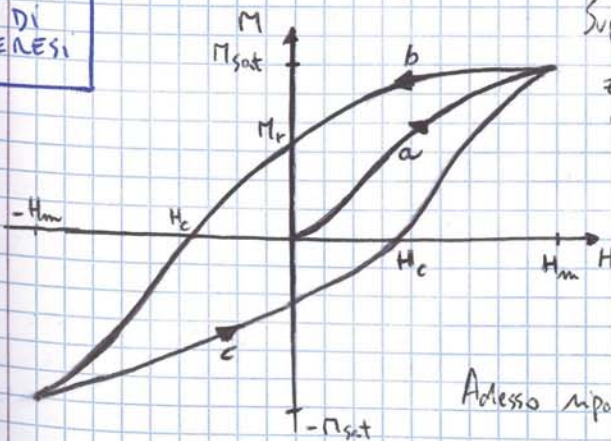


GRAFICO che mostra la relazione tra M e H nei DIAMAGNETICI e PARAMAGNETICI (è una relazione lineare perché χ_m è costante)

Il grafico nel caso dei ferromagneti è completamente diverso.

CICLO DI ISTERESI



Supponiamo che inizialmente il materiale si trovi nello STATO VERGINE, cioè non sia mai stato magnetizzato e che siano nulli tutti i campi. Facendo crescere H , i valori di B e M si dispongono lungo la curva (a), detta CURVA di prima MAGNETIZZAZIONE

Quando H arriva al valore H_m raggiungiamo la MAGNETIZZAZIONE di SATURAZIONE (costante)

Si definisce la PERMEABILITÀ DIFFERENZIALE

$$\mu_d = \frac{dB}{dH} \quad \text{che è la pendenza della curva}$$

Adesso riportiamo il campo a 0, ma vedo che non ritorna a zero M_r (in queste condizioni ho magnetizzato il ferro, ovvero ho creato una CALAMITA)

Si parla in questi casi di MAGNETIZZAZIONE RESIDUA, ovvero il materiale è magnetizzato anche in assenza di corrente; è diventato cioè un MAGNETE PERMANENTE.

Applicando il
TEOREMA di
STOKES

$$\oint_p \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\Sigma} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \cdot \vec{m} \cdot d\Sigma = - \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{m} \cdot d\Sigma$$

Esprime il legame locale
tra la variazione nel
tempo del campo
magnetico e il campo
elettrico indotto.

quindi

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

La TERZA EQUAZIONE di MAXWELL

quindi: Il campo elettrico indotto NON È
CONSERVATIVO.

Sostituiamo ora \vec{B} con il rotore del POTENZIALE VETTORE.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{d}{dt} \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Attenzione

Il contenuto della parentesi è CONSERVATIVO
e quindi posso scrivere

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = - \vec{\nabla} \cdot V$$

Attenzione

legame più generale
tra il CAMPO ELETTRICO
e il CAMPO MAGNETICO

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \end{aligned} \right.$$

Mel caso statico automaticamente le
precedenti eq. valgono.

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} S$$

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}' = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} + \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} S = \vec{B}$$

mentre

$$E' = - \frac{\partial A'}{\partial t} - \vec{\nabla} V = - \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{d}{dt} \vec{\nabla} S - \vec{\nabla} V \neq E$$

FATTORE di differenza tra E ed E'

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla} S \\ V' &= V - \frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned} \right.$$

INVARIANZA di GAUGE

Parliamo di Potenza (meglio parlare di Potenza Media e non istantanea)

$P = i_0^2 \cdot \sin^2(\omega t) \cdot R$ Potenza istantanea

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T P \cdot dt = i_0^2 \cdot R \left(\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt \right) = \frac{i_0^2 \cdot R}{2}$

Il VALORE della POTENZA MEDIA in un periodo è pari alla metà del valore massimo della potenza istantanea

La Potenza media coincide con quella che sarebbe erogata da un generatore di corrente continua

Corrente efficace

$i_{eff} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$

$P = i_{eff}^2 \cdot R$

(i_{eff}). Da questo punto di vista il generatore di corrente SINUSOIDALE è equivalente ad un generatore di corrente continua "efficace".

• Ritorniamo ad esaminare il caso dell'applicazione ①

$i = \frac{-v B \cdot b}{R}$

$d\vec{F} = i d\vec{s} \wedge \vec{B}$ (Seconda legge elementare di Laplace)

$F = i \int_n^N d\vec{s} \wedge \vec{B} = i \int_n^N B \cdot ds = i B b = \frac{-v B^2 b^2}{R}$

La presenza del campo magnetico da una parte dai origine alla CORRENTE dell'altra a una FORZA RESISTENTE di TIPO VISCOSO.

$\vec{F} = \frac{-v B^2 b^2}{R} \hat{x}$

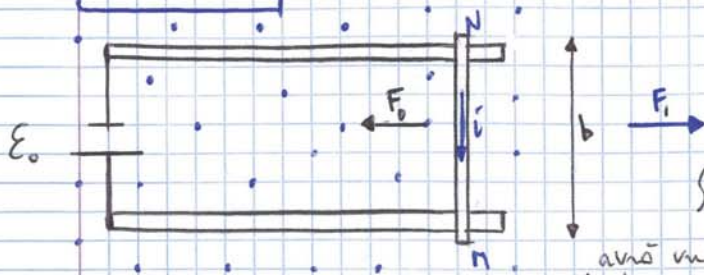
"RESISTENZA DI ATTRITO ELETTROMAGNETICO"

$P = \vec{F} \cdot v = \frac{v^2 B^2 b^2}{R} = \frac{v^2 B^2 b^2}{R^2} \cdot R = \left(\frac{E_i}{R} \right)^2 \cdot R = i^2 \cdot R$

Per vincere la resistenza di attrito bisogna applicare una forza esterna, eguale e contraria alla resistenza di attrito elettromagnetico. La POTENZA MECCANICA ($F \cdot v$) viene sottratta tutta sotto forma di POTENZA ELETTRICA ($i^2 \cdot R$) spesa sulle resistenze del circuito. Il sistema può essere considerato come un GENERATORE in cui la potenza erogata proviene da un'azione meccanica esterna.

I processi inversi di trasformazione di energia meccanica in energia elettrica possono essere invertiti ottenendo movimenti di corpi a spese di energia elettrica fornita da un GENERATORE

MOTORI



$dF = i ds \wedge B$

dalla seconda LEGGE di LAPLACE

$F_i = i b B$

Se la sbarretta si muove verso destra allora avrà una variazione di Flusso e nasce la FEM indotta, che tende a far diminuire la corrente nel circuito e quindi a frenare il moto della sbarretta.

Infatti $\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_i = R \cdot i$ // $i_{TOT} = \frac{\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_i}{R} = \frac{\mathcal{E}_0 - \nu B b}{R}$

↑
La corrente totale è diminuita.

• Voglio studiare il moto di una sbarretta (lungo l'asse x)

$m \cdot a = F_{LAPLACE} - F_0 - K v$

$m \cdot \frac{dv}{dt} = \left(\frac{\mathcal{E}_0 - \nu B b}{R} \right) B b - F_0 - K v$

$\frac{dv}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0 \cdot B b - \nu B^2 b^2 - R F_0 - R K v}{m \cdot R}$

$\frac{dv}{dt} = - \frac{\nu (B^2 \cdot b^2 + R K) + R F_0 - \mathcal{E}_0 B b}{m R}$

eq. a variabili separabili

$\frac{dv}{dt} = - \left(\frac{B^2 \cdot b^2 + R K}{m R} \right) \cdot \left(\nu + \frac{R F_0 - \mathcal{E}_0 B b}{B^2 b^2 + R K} \right)$

$\int_0^{\nu} \frac{dv}{\nu + \frac{R F_0 - \mathcal{E}_0 B b}{B^2 b^2 + R K}} = - \int_0^t \frac{B^2 \cdot b^2 + R K}{m R} dt$

↳ Molto importante nella pratica perché fornisce un metodo semplice di MISURA DELL'INTENSITÀ DEL CAMPO MAGNETICO.

LEGGE di FELICI

Abbiamo visto che quando una spira si muove in un campo \vec{B} in essa viene indotta una corrente.

$$i = - \frac{1}{R} \cdot \frac{d\Phi(B)}{dt}$$

Nell'intervallo $[0, t_f]$ fluisce nella spira una certa quantità di CARICA q .

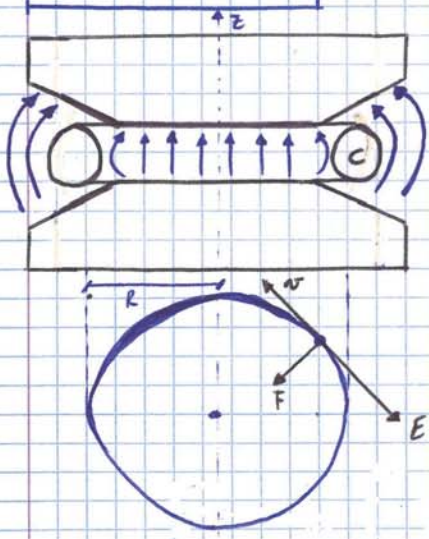
poiché $i = \frac{dq}{dt}$ $q = \int_0^{t_f} i dt = - \frac{1}{R} \cdot \int_0^{t_f} \frac{d\Phi(B)}{dt} dt = \frac{\Phi_{in} - \Phi_{fin}}{R}$

se $\Phi_{in} = 0$ allora la CARICA INDOTTA $q_{in} = - \frac{\Phi_{fin}}{R}$

N.B. Il valore della carica non dipende dalla legge temporale con cui varia il flusso, ma solamente dal valore iniziale e dal valore finale.

IL BETATRONE

(Versione approssimata del ciclotrone)



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot \vec{n} d\Sigma$$

$$\Sigma = \pi r^2 \quad d\Sigma = 2\pi r dr$$

$$2\pi r E_\theta = - \frac{d}{dt} \int_0^r B \cdot 2\pi r dr$$

$$\vec{E}_\theta = - \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt} \int_0^r B(r,t) \cdot r dr$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt} \hat{z}$$

quasi-zerale proprietà del prodotto vettoriale $\vec{B} \perp \vec{E}$

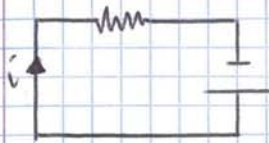
In coordinate cilindriche

$$\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z} \right) \cdot \hat{r} + \left(\frac{\partial E_r}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right) \hat{z}$$

$$\vec{E}(r,t) = E_\theta(r,t) \hat{\theta}$$

Il campo elettrico è diretto solo lungo la tangente alle isocronie.

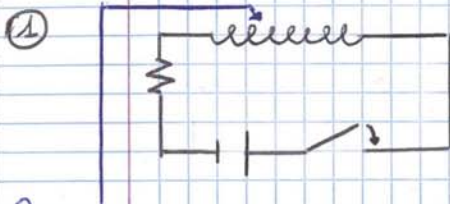
CIRCUITI RL (Resistenza, Induttanza)



Ricordiamo la legge dell' Auto-flusso $\Phi(B) = L \cdot i$

Applichiamo la legge di Faraday (FEM di AUTOINDUZIONE) $\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi(B)}{dt} = - \cancel{i} \frac{dL}{dt} - L \frac{di}{dt}$

Concettiamo quel fattore perché l'induttanza quasi sempre è costante.



Al tempo $t=0$ chiudo il circuito e mi va a passare corrente

$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_i = iR$ applicazione legge di Ohm.

Quando il coefficiente di autoinduzione si può pensare concentrato in un tratto particolare del circuito (ex. XK il filo conduttore è avvolto così da formare un solenoide). Si designa quel particolare conduttore con il nome di INDUTTORE

$$\mathcal{E}_0 - L \cdot \frac{di}{dt} = iR$$

$i(t=0) = 0$
Condizioni al contorno.

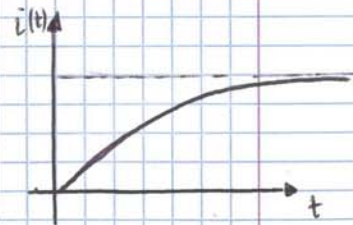
$$\mathcal{E}_0 - iR = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = - \frac{(iR - \mathcal{E}_0)}{L} = - \frac{R}{L} \left(i - \frac{\mathcal{E}_0}{R} \right)$$

N.B. la presenza di un INDUTTORE in un circuito impedisce alle corrente di aumentare o diminuire istantaneamente in quanto, la variazione genera una FEM che si oppone alla variazione stessa.

$$\int_0^{i(t)} \frac{di}{i - \mathcal{E}_0/R} = - \frac{R}{L} \int_0^t dt$$

$$\ln \left(\frac{i - \frac{\mathcal{E}_0}{R}}{-\frac{\mathcal{E}_0}{R}} \right) = - \frac{R}{L} \cdot t$$



Attenzione

Più l'induttanza è grande e più tempo ci vuole affinché la corrente arrivi al suo valore costante (comunque brevissimo)

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{R}{L} \cdot t\right) \right]$$

$\tau = L/R$ costante di tempo del circuito

② - Caso contrario (a $t=0$ apro il circuito) Condizioni al contorno $i(t=0) = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$

$$R' \gg R$$

Consideriamo che R' rimane costante durante tutto l'esperimento.

ottenso

$$\mathcal{E}_0 - iR' = L \frac{di}{dt}$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left[1 + \left(\frac{R'}{R} - 1 \right) \exp\left(-\frac{R'}{L} t\right) \right]$$

Nell'intervallo di tempo dt , a seguito della chiusura del circuito, la corrente passa da zero al valore i , il generatore deve spendere (oltre al lavoro corrispondente all'effetto Joule) contro \mathcal{E}_i altro lavoro.

Consideriamo solo $V_m = \int_0^i L \cdot i \, di = \boxed{\frac{1}{2} L i^2}$ ENERGIA MAGNETICA. (Energia intrinseca delle correnti)

Considerando un solenoide infinito possiamo scrivere

$$V_m = \frac{\mu_0 \cdot \Sigma \cdot l \cdot n^2 \cdot i^2}{2} = \frac{(\mu_0 \cdot n \cdot i)^2}{2 \mu_0} \Sigma \cdot l$$

$V_m = \frac{B^2}{2 \mu_0} \cdot \text{Volume}$ e troviamo la DENSITA' DI ENERGIA MAGNETICA $w_m = \frac{V_m}{\text{Volume}} = \frac{B^2}{2 \mu_0}$

Attenzione: Questa energia è ottenuta tramite il lavoro contro la fem autoindotta, legata alla variazione di $\Phi(B)$, che in questo caso è prodotta da una variazione del campo magnetico.

PRESSIONE MAGNETICA

$F = -\vec{\nabla} \cdot U = \vec{\nabla} \cdot U_e$ Analoga.
 $F = -\vec{\nabla} \cdot U = \vec{\nabla} \cdot U_m$ La variazione dell'Energia tot. Somma dell'energia interna del generatore e dell'energia elettrostatica, risulta uguale e opposta alle variaz. di Energia elettrostatica

Dimostrazione

Consideriamo ora il caso in cui L non sia costante, quindi mentre i è costante

(Supponendo che il generatore sia in grado di mantenere costante lavorando contro la fem indotta)

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d(L \cdot i)}{dt} = -i \frac{dL}{dt}$$

poiché $V_m = \frac{1}{2} L i^2$ allora $dV_m = \frac{1}{2} dL i^2$

Lavoro fornito dal generatore per tenere le correnti dentro al solenoide costante.

$$dW_g = -\mathcal{E}_i \cdot i \, dt = i^2 \cdot dL \longrightarrow \boxed{dW_g = 2dV_m}$$

$dU_g = -dW_g$ } Il generatore ha compiuto un lavoro pari a 2 volte l'energia magnetica a spese della propria energia interna

Verificato l'equivalenza iniziale

$$dU_{tot} = dU_g + dV_m = -2dV_m + dV_m = -dV_m$$

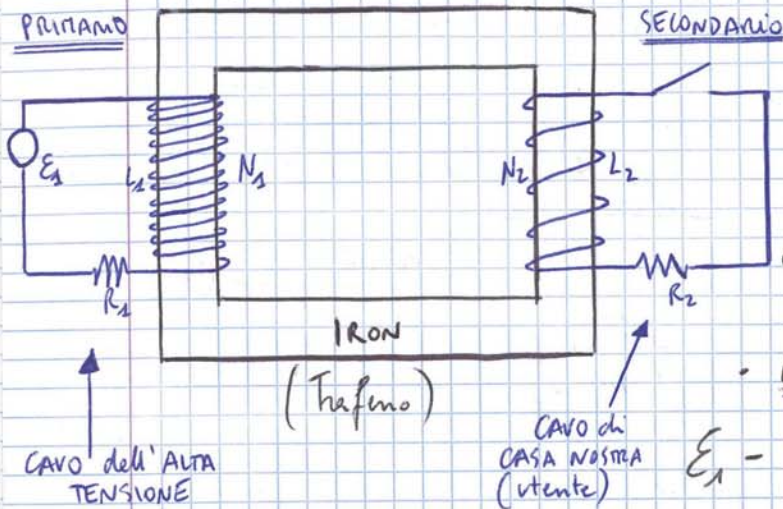
$F = - \frac{dU}{dx} = \frac{dV_m}{dx}$

Se la variazione del coefficiente di autoinduzione è positiva allora l'energia magnetica aumenta, l'energia totale diminuisce

e il sistema compie lavoro: esso tende SPONTANEAMENTE verso stati in cui l'energia magnetica è massima. Per far avvenire il processo continuo bisogna invece applicare una forza dall'esterno, compiendo lavoro sul sistema.

TEORIA DEL TRASFORMATORE

Serve per passare da Alta Tensione e bassa corrente a bassa tensione e alta corrente



L'induttanza del circuito primario e del secondario coincide con buona approssimazione all'induttanza del solenoide avvolto intorno al ferro. (quella del circuito diventa trascurabile)

- Equazione 1° circuito.

$$E_1 - L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} = I_1 R_1$$

- Eq. del secondo circuito

$$-L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} = I_2 R_2$$

Mettendo a sistema abbiamo un sistema di due equazioni differenziali con le due correnti incognite.

Dati di potenza già visti in precedenti

$$\begin{cases} L_1 = \mu \cdot N_1^2 \cdot l \cdot \Sigma \\ L_2 = \mu \cdot N_2^2 \cdot l \cdot \Sigma \\ M = \mu \cdot N_1 \cdot N_2 \cdot l \cdot \Sigma = \sqrt{L_1 \cdot L_2} \end{cases}$$

Sono tutte grandezze complesse.

$$E_1(t) = E_0 \cdot e^{i\omega t}$$

CORRENTE ALTERNATA.

(È un'ipotesi della possibile soluzione del sistema)

$$I_1(t) = I_{10} \cdot e^{i(\omega t + \Phi_1)} \quad // \quad I_2(t) = I_{20} \cdot e^{i(\omega t + \Phi_2)}$$

con Φ_1 e Φ_2 chiamati sfasamenti

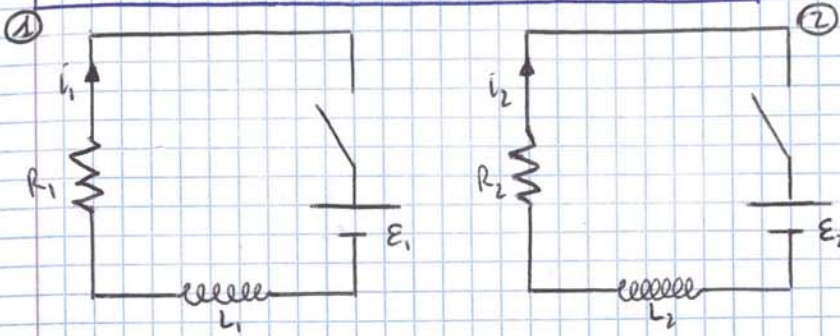
Si possono vedere così i valori massimi delle correnti e il loro sfasamento rispetto alle fem del generatore.

Adesso sostituisco nel sistema e derivò

$$\begin{cases} E_1 - i\omega L_1 I_1 - i\omega M I_2 = I_1 R_1 \\ -i\omega L_2 I_2 - i\omega M I_1 = I_2 R_2 \end{cases}$$

ENERGIA MAGNETICA DI CIRCUITI ACCOPPIATI

Definizione : Due circuiti per i quali sia $M \neq 0$ si dicono ACCOPPIATI.



• Esperimento : Chiudo prima il circuito 1 e poi il circuito 2.

Supponiamo che inizialmente le correnti nei circuiti siano nulle e portiamo a regime i_1 mantenendo $i_2 = 0$. Poi porto a regime i_2 tenendo costante i_1 .

ENERGIA MAGNETICA TOTALE
(Lavoro speso dai 2 generatori)

$$U_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M_{21} i_1 i_2$$

$$U_{12} = \int P_{12} dt = - \int E_{i_2} i_1 dt = - \int \left(-M_{21} \frac{di_2}{dt} \right) i_1 dt = M_{21} i_1 i_2$$

In pratica il primo generatore deve lavorare anche contro le fem di induzione mutua causata dalla variazione di i_2 .

• Esperimento inverso (chiudo prima il circuito 2 e poi il circuito 1)

$$U_m = \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M_{12} i_1 i_2$$

$$U_{21} = \int P_{21} dt = - \int E_{i_1} i_2 dt = - \int \left(-M_{12} \frac{di_1}{dt} \right) i_2 dt = M_{12} i_1 i_2$$

Il risultato quindi non cambia e l'energia si conserva se $M_{12} = M_{21}$ (ulteriore dimostrazione).

quindi genericamente

• ENERGIA MAGNETICA per N circuiti accoppiati

$$U_m = \sum_{i,k=1}^N \frac{M_{ik}}{2} i_i i_k$$

Induttanze dei singoli circuiti

$$M_{ii} = L_i$$

$$M_{ik} = M_{ki}$$

Induttanza mutua tra il circuito i-esimo e k-esimo.

QUARTA EQUAZIONE di MAXWELL

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

1° EQUAZIONE DI MAXWELL

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

2° EQUAZIONE DI MAXWELL

$$\nabla \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

3° EQUAZIONE DI MAXWELL

LEGE di AMPERE

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Valide solo nel caso stazionario, dobbiamo quindi omphare a tutti i casi possibili (ovvero anche per i processi dipendenti dal tempo)

Dato che \vec{J}_{TOT} è solenoideale allora i due flussi devono essere uguali.
 Quindi la CORRENTE ha lo stesso valore su tutto il circuito:
 Coincide con

- la CORRENTE di CONDUZIONE nei cavi di collegamento.
- la CORRENTE di SPOSTAMENTO all'interno del condensatore.

Conferma più significativa della correttezza del ragionamento di Maxwell è data dall'esistenza delle ONDE ELETTROMAGNETICHE (che derivano dal fatto che la variazione di un campo dà origine ad un altro campo)

LEGGI di FARADAY $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \vec{E}$ // $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \vec{B}$ LEGGE di AMPÈRE-MAXWELL.

I campi prodotti (\vec{E} e \vec{B}) sono a loro volta variabili (e in opportune condizioni ha luogo una propagazione).

EQUAZIONI di MAXWELL

Stabilisce legame tra carica e campo elettrico $\rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{int}}{\epsilon_0}$

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = 0 \rightarrow$ Campo magnetico sempre solenoideale

Campo magnetico variabile è sorgente di un campo elettrico $\rightarrow \nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma}$

Sorgente di B sono le correnti di conduzione e le variazioni del campo elettrico $\rightarrow \nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{conc} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}$

$m \cdot \vec{a} = q_0 (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

Serve per calcolare la traiettoria di una particella (È la Forza di Lorentz con la presenza di un campo elettrico oltre al magnetico)

Può essere risolta come sistema di eq. differenziali

$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \frac{q_0}{m} (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

Ai campi \vec{E} e \vec{B} è associata la DENSITÀ di ENERGIA ELETTROMAGNETICA

$w = \frac{1}{2} E^2 \epsilon_0 + \frac{B^2}{2\mu_0}$

Espressione che resta valida anche con campi variabili nel tempo.

Adesso cerchiamo un metodo per disaccoppiare queste equazioni.

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$$

Posto $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla S$

$$\vec{B}' = \nabla \wedge \vec{A}' = \nabla \wedge \vec{A} + \nabla \wedge \nabla S = \nabla \wedge \vec{A} = \vec{B}$$

Il campo magnetico NON VARIA

$$\vec{E}' = -\nabla \cdot \vec{V} - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{V} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla S \neq \vec{E}$$

Il campo elettrico VARIA

$$\vec{V}' = \vec{V} - \frac{\partial S}{\partial t}$$

Se le uso contemporaneamente, allora anche il campo elettrico rimane costante

$$\vec{E}' = -\nabla \vec{V}' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla \vec{V} + \nabla \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial \nabla S}{\partial t} = \vec{E}$$

chiamata INVARIANZA di GAUGE

Tra tutti le funzioni scalari S possibili scegliamo quella che farà valere

$$\nabla \cdot \vec{A}' + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{V}'}{\partial t} = 0$$

chiamata GAUGE di LORENZ

Risultante con A e V ottengo

$$\nabla \cdot (\vec{A} + \nabla S) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{V} - \frac{\partial S}{\partial t} \right) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\nabla^2 S + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0$$

Applichiamo questo concetto alle equazioni accoppiate rimanenti.

$$\nabla \cdot \left(-\nabla \cdot \vec{V} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$-\nabla^2 \vec{V} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Ho semplicemente sviluppato i calcoli

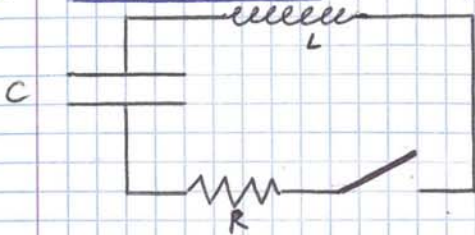
$$\nabla \vec{A} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

Applico il GAUGE di LORENZ

$$\nabla^2 \vec{V} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Equazione di Poisson generale.

② • CIRCUITO RLC (in serie)



Abbiamo un condensatore carico e al tempo $t_0 = 0$ chiudo il circuito.

Assimilabile al concetto di generatore (x for usare la II legge di Kirchhoff)

$$V_C + V_R = V_L$$

$$\frac{q}{C} + iR = -L \frac{di}{dt}$$

derivando ancora rispetto al tempo ottengo una eq. differenziale lineare a coefficienti costanti.

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{LC} = 0$$

con $i(t=0) = 0$

con $\gamma = \frac{R}{2L}$

Coefficiente di SMORZAMENTO

con $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Pulsazione propria

Soluzioni dell'eq. differenziale $i(t) = A \cdot e^{\beta t}$

$$A\beta^2 e^{\beta t} + \frac{R}{L} A \cdot \beta e^{\beta t} + \frac{A e^{\beta t}}{LC} = 0$$

$$\beta^2 + \frac{R}{L} \beta + \frac{1}{LC} = 0$$

Si tratta della stessa equazione di un OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO.

Soluzioni: $\beta = \frac{-R/L \pm \sqrt{(R/L)^2 - 4/LC}}{2}$

$\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} > 0$

SMORZAMENTO FORTE

Possiamo avere 3 casi possibili

$\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} = 0$

SMORZAMENTO CRITICO

$\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} < 0$

SMORZAMENTO DEBOLE

CASO 1

$$i(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \left[A \cdot e^{\sqrt{\dots}t} + B e^{-\sqrt{\dots}t} \right]$$

Usando la condizione al contorno.

$i(t=0) = 0 = [A + B] \rightarrow A = -B$

$$i(t) = A e^{-\frac{R}{2L}t} \left[e^{\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}} t} - e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}} t} \right]$$

È un ESPONENZIALE DECRESCENTE