



**Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 1448A -**

**ANNO: 2015**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Alberico**

**MATERIA: Fondamenti di Meccanica Strutturale. Prof. Invernizzi**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

CINEMATICA dei SISTEMI di TRAVI - in PIANI

GRADI di LIBERTÀ rappresentano il numero di coordinate generalizzate necessarie e sufficienti a descrivere la configurazione

EQUAZIONE CARDINALE della CINEMATICA

$$\{ds_p\} = \{ds_o\} + \{dp\} \wedge \{P-O\}$$

↑ spostamento del punto
↑ spostamento del polo
↑ rotazione
↑ braccio

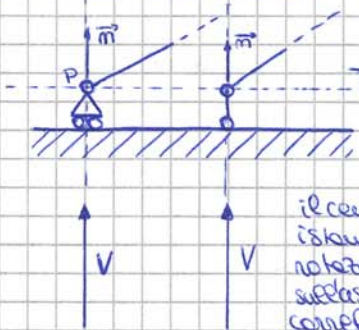
$\{ds_o\}$  rappresenta la parte traslazionale  
 $\{dp\} \wedge \{P-O\}$  rappresenta la parte rotazionale

$$\{ds_p - ds_o\} = \begin{bmatrix} 0 & -\psi_z & \psi_y \\ \psi_z & 0 & -\psi_x \\ -\psi_y & \psi_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_p - x_o \\ y_p - y_o \\ z_p - z_o \end{Bmatrix}$$

DEFINIZIONE CINEMATICA e DINAMICA dei VINCOLI PIANI ESTERNI STATICA

$$\{ds_p\} = \begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \end{Bmatrix}$$

CARRELO o BIELLA (vincolo semplice di scontro)



CIN

$$\begin{cases} \{ds_p\}^T \{m\} = 0 \\ \{ds_p\}^T \{p\} \neq 0 \\ \psi_z \neq 0 \end{cases}$$

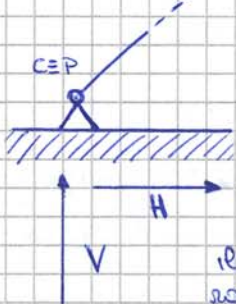
STAT

$$\begin{cases} \{R_p\}^T \{p\} = 0 \\ \{R_p\}^T \{m\} \neq 0 \\ \pi_p = 0 \end{cases}$$

non permette movimenti lungo il suo asse normale  
 permette spostamenti lungo  $\vec{P}$  e  
 permette rotazione della trave

il centro C di istantanea rotazione giace sull'asse del carrello  $\vec{m}$

CERNIERA (vincolo doppio)



CIN

$$\begin{cases} \{ds_p\}^T \{m\} = 0 \\ \{ds_p\}^T \{p\} = 0 \\ \psi_z \neq 0 \end{cases}$$

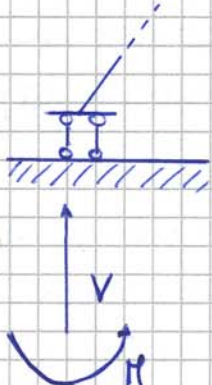
STAT

$$\begin{cases} \{R_p\}^T \{p\} \neq 0 \\ \{R_p\}^T \{m\} \neq 0 \\ \pi_p = 0 \end{cases}$$

non permette movimenti nel piano, ma permette la rotazione della trave  
 la risultante del vincolo avrà componente lungo  $\vec{m}$  e  $\vec{P}$

il centro di istantanea rotazione coincide con la cerniera

BIPENDOLO (o doppio pendolo) (vincolo doppio)



CIN

$$\begin{cases} \{ds_p\}^T \{m\} = 0 \\ \{ds_p\}^T \{p\} \neq 0 \\ \psi_z = 0 \end{cases}$$

STAT

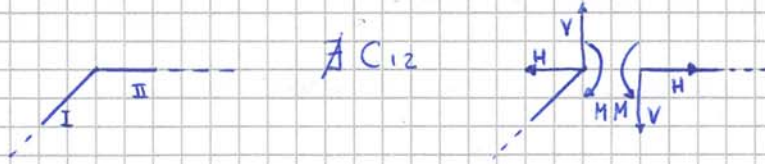
$$\begin{cases} \{R_p\}^T \{m\} \neq 0 \\ \{R_p\}^T \{p\} = 0 \\ \pi_p \neq 0 \end{cases}$$

permette solo movimenti lungo  $\vec{P}$   
 la risultante del vincolo avrà componente lungo  $\vec{m}$  e scambiati un momento

il centro di istantanea rotazione giace all'infinito sulle rette parallele alle bielle ( $\vec{m}$ )

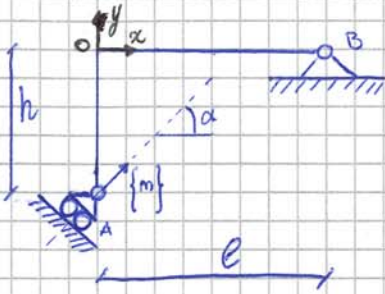


INCASTRO INTERNO



può scambiare qualsiasi tipo di forza

STUDIO ALGEBRICO della CINEMATICA dei SISTEMI di TRAVI



all'altezza di O tutto il corpo si comporta come un corpo unico

$$\begin{cases} \{dS_A\}^T \{m\} = 0 \\ \{dS_B\} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_A \cos \alpha + v_A \sin \alpha = 0 \\ u_B = 0 \\ v_B = 0 \end{cases}$$

si definisce un sistema di riferimento nel polo O

EQUAZIONE CARDINALE della CINEMATICA

spostamento del nodo idealmente  $\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \varphi_0 \end{Bmatrix} = \{d_0\}$

$$\{dS_p\} = \{dS_0\} + \{d\varphi\} \wedge (P-O)$$

$$\begin{cases} u_p = u_0 - \varphi_2 (y_p - y_0) \\ v_p = v_0 + \varphi_2 (x_p - x_0) \\ \varphi_2 = \text{costante} \end{cases}$$

$$u_A = u_0 + h \varphi_0$$

$$v_A = v_0$$

$$u_B = u_0$$

$$v_B = v_0 + l \varphi_0$$



da  $\blacksquare$  sostituendo questi risultati  $\rightarrow$

$$\{S_x\} \begin{cases} (u_0 + h \varphi_0) \cos \alpha + v_0 \sin \alpha = 0 \\ u_0 = 0 \\ v_0 + l \varphi_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & h \cos \alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \varphi_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[C] \{d_0\} = \{S_x\} = \{0\}$$

matrice cinematica

$$\text{Det}[C] = -(l \sin \alpha - h \cos \alpha)$$

Se il determinante sono nullo le condizioni di vincolo non sono indipendenti, quindi il sistema è LABILE (può muoversi)

Se il determinante è diverso da 0 allora il vincolo è sufficiente

$\rightarrow$  è uguale a 0  $\times$

il vincolo B impone C su B

il vincolo A impone C lungo  $\bar{m}$

se  $\bar{m}$  passa per B allora  $\text{det} = 0$

FINE SETTIMANA 1

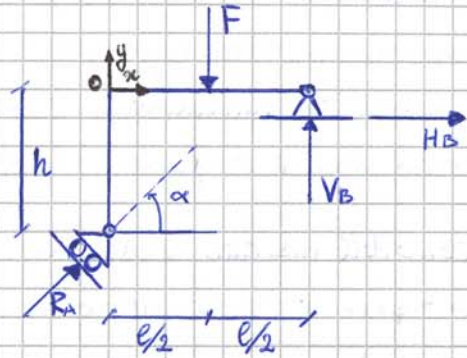


STUDIO ALGEBRICO della STATICA

EQUAZIONI CARDINALI della STATICA

$$\{R\} = \sum_{i=1}^N \{F_i\} = \{0\}$$

$$M(O) = \sum_{j=1}^M M_j + \sum_{i=1}^N (\{r_i\} \wedge \{F_i\})^T \cdot \{K\} = 0$$



faccio l'equilibrio delle forze orizzontali

$$\rightarrow R_A \cos \alpha + H_B = 0$$

l'equilibrio delle forze verticali

$$\uparrow R_A \sin \alpha + V_B - F = 0$$

l'equilibrio alle rotazioni intorno a un polo

$$\odot R_A h \cos \alpha + V_B l - F l/2 = 0$$

pensando che devo trovare il valore delle reazioni vincolari:  $(R_A, H_B, V_B)$

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & 1 \\ h \cos \alpha & 0 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_A \\ H_B \\ V_B \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ F l/2 \end{Bmatrix}$$

$$[A] \{x\} = - \{F\}$$

matrice statica  $[C] = [A]^T$

Per il Teorema di Rouché-Capelli un sistema ha soluzioni se  $[A]$  ha le righe linearmente indipendenti, questo non vale se l'asse del corredo passa per B; non ci sarebbe braccio attorno a B e non ci sarebbe braccio attorno ad A perché passa per B

Se i centri sono allineati, la struttura non è equilibrata, solo equilibrata quella deformata

PRINCIPIO dei LAVORI VIRTUALI

Si usano due sistemi per riuscire a trovare tutte le reazioni vincolari

Ⓐ SISTEMA REALE equilibrato in cui vale l'equazione della statica  $[A] \{x\} = - \{F\}$

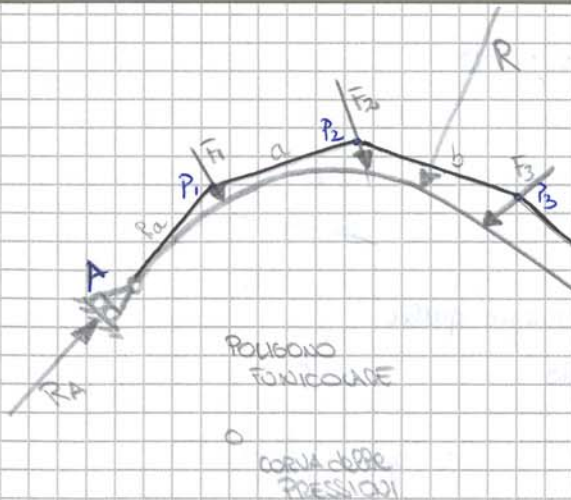
Ⓑ SISTEMA SCOMPOSTO congruente, in cui ci sono spostamenti, in cui vale l'equazione della cinematica  $[C] \{s\} = \{S_x\} = \{0\}$

I calcoli operativi delle reazioni vincolari

- metodo ANALITICO (con l'utilizzo delle equazioni ausiliarie)
- metodo delle CATENE CINEMATICHE e uso del PRINCIPIO dei lavori virtuali
- metodo GRAFICO

FINE SETTIMANA 1

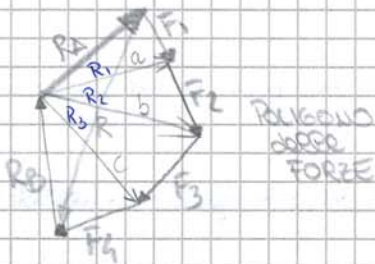




Consideriamo questo arco isostatico di cui conosciamo le 4 forze applicate,  $R$  e reazioni  $R_A$  e  $R_B$  individuate tramite il poligono delle FORZE. Si immagini di comporre  $R_A$  con  $F_1$ ; la risultante parziale  $R_1$  avrà nella direzione "a" passante per  $P_1$ . Lo stesso con  $F_2, F_3, F_4$   $R_2, R_3, R_4$  b, c,  $R_5$ .

Così il poligono delle forze si chiude, e la nella chiusa come preda quella di  $F_1$  eccome testa quella di  $F_4$ .

La CURVA delle PRESSIONI è rappresentata dalla spezzata di punti  $A, P_1, P_2, P_3, P_4, B$



Se il carico non è dovuto a forze concentrate ma a una distribuzione  $q(z)$  la curva delle pressioni  $y(z)$  sarà comunque  $tg$  da  $R_A$  in  $A$  e  $tg$  a  $R_B$  in  $B$

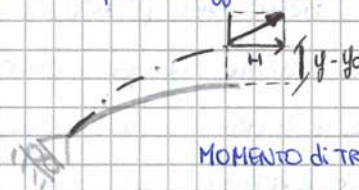
$$\int_0^l q(z) dz = F$$

$$F \cdot d = \int_0^l q(z) z dz$$

Th di VARIGNON

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = -\frac{q(z)}{H}$$

equazione differenziale della CURVA delle PRESSIONI per carichi distribuiti EQUIVERS



$$M = H(y - y_0)$$

La curva delle pressioni quantifica l'effetto di flessione in funzione della distributo fra  $y$  e  $y_0$

PARTE di GEOMETRIA delle AZEE

MOMENTO STATICO

$$dS_x = dA \cdot y$$

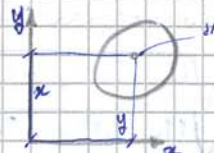
$$S_x = \int dA \cdot y = A \cdot y_G$$

$$y_G = \frac{1}{A} \int y dA = \frac{S_x}{A}$$

$$dS_y = dA \cdot x$$

$$S_y = \int dA \cdot x = A \cdot x_G$$

$$x_G = \frac{1}{A} \int x dA = \frac{S_y}{A}$$



può essere positivo, negativo, nullo a seconda della posizione rispetto all'asse

Se le aree sono compatte, i MOMENTI d'INERZIA si possono sommare

MOMENTO D'INERZIA

$$I_x = \int dA \cdot y^2$$

$$I_y = \int dA \cdot x^2$$

- assiale

$$I_{xy} = \int dA \cdot x \cdot y$$

- centrifugo

il momento d'inerzia centrifugo si annulla ogni volta che c'è un asse di simmetria (x l'asse di riferimento e l'asse stesso)

$$[I] = \begin{pmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{yx} & I_y \end{pmatrix}$$

$$I_{xy} = I_{yx}$$



## CERCHIO di MOHR

— Data un'area  $A$  e noti gli assi  $\xi, \eta$  e i relativi  $I_\xi$  e  $I_\eta$  in relazione ad un punto  $O$ , ci si propone di esprimere i momenti di inerzia rispetto ad un sistema di riferimento ruotato di  $\vartheta$  attorno. Per ipotesi  $I_{\xi\eta} = 0$

si ha  $I_x = I_\xi \cos^2 \vartheta + I_\eta \sin^2 \vartheta$  con le formule trigonometriche  $I_x = \frac{I_\xi + I_\eta}{2} + \frac{I_\xi - I_\eta}{2} \cos 2\vartheta$  \*

$I_y = I_\eta \cos^2 \vartheta + I_\xi \sin^2 \vartheta$

$I_y = \frac{I_\xi + I_\eta}{2} - \frac{I_\xi - I_\eta}{2} \cos 2\vartheta$

$I_{xy} = \frac{I_\xi - I_\eta}{2} \sin 2\vartheta$

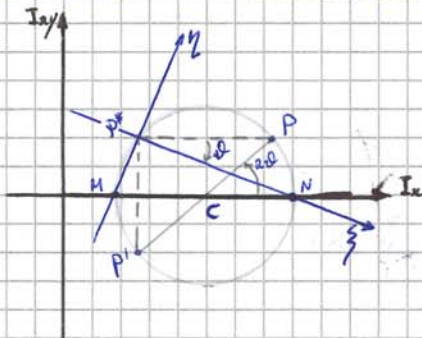
$I_{xy} = \frac{I_\xi - I_\eta}{2} \sin 2\vartheta$  \*

da esse \* si possono dedurre le equazioni parametriche di una circonferenza con:

$C = \left( \frac{I_\xi + I_\eta}{2}, 0 \right)$  e  $R = \frac{I_\xi - I_\eta}{2}$  nel PIANO di MOHR  $I_x, I_{xy}$

Questo cerchio rappresenta tutte le coppie di  $(I_x, I_{xy})$  che si succedono al variare di  $\vartheta$

— Con noti i momenti di inerzia rispetto a due assi generici, si determinano gli assi e i momenti principali di inerzia

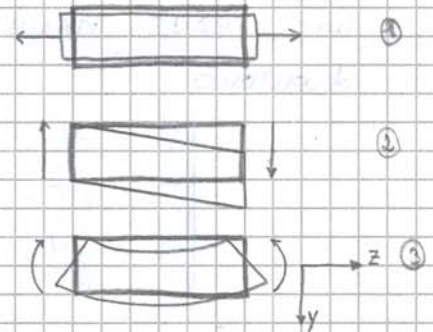


- i) individuare sul piano di Mohr i punti  $P(I_x, I_{xy})$  e  $P'(I_y, -I_{xy})$
- ii) l'intersezione di  $\overline{PP'}$  con l'asse  $I_x$  individua  $C$  centro del cerchio, e  $\overline{CP}$  è il RAGGIO
- iii) si tracciano parallele a  $I_x$  per  $P$  e la parallela a  $I_{xy}$  per  $P'$ ; queste rette si incontrano in  $P^*$  detto POLO, appartenente all'asse del cerchio di Mohr
- iv) si determinano  $M$  e  $N$ , punti di intersezione tra la circonferenza e  $I_x$ ;  $M$  e  $N$  rappresentano i valori dei momenti principali d'inerzia
- v) traccio le rette passanti per  $P^*$  e  $M$  e per  $P^*$  e  $N$ , trovando le direzioni dei due assi principali  $\xi$ ; l'angolo formato tra  $\overline{PP^*}$  e  $\overline{P^*N}$  è  $\vartheta$

## LE CARATTERISTICHE della SOLLECITAZIONE

Le caratteristiche della sollecitazione interna relative alle sezioni di una trave sono le reazioni interne elementari trasmesse dalla stessa sezione. Nel caso di una trave piana le caratteristiche della sollecitazione sono tre:

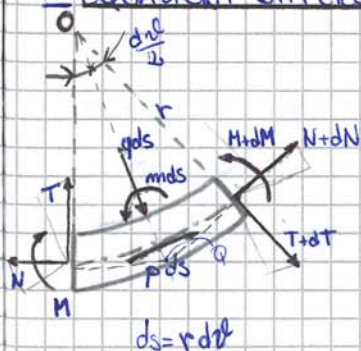
- 1) lo SFORZO NORMALE che è la componente della forza tangente all'asse della trave
- 2) lo SFORZO di TAGLIO che è la componente della forza ortogonale all'asse della trave
- 3) il MOMENTO FLETTENTE che è il momento della forza che si trasmettono le due porzioni di trave, rispetto alle sezioni considerate



le convenzioni cui seguirò sono le seguenti:

- 1) lo sforzo normale è positivo quando è di TRAZIONE
- 2) lo sforzo tangente è positivo quando tende a far RUOTARE in senso ORARIO il tronco di trave su cui agisce
- 3) il momento flettente è positivo quando tende a comprimere le fibre superiori e a stirare le fibre inferiori della trave

## EQUAZIONI DIFFERENZIALI INDEFINITE di EQUILIBRIO



L'elemento infinitesimo di trave è in genere soggetto a un carico distribuito tangenziale  $p(s)ds$ , ad un carico distribuito normale  $q(s)ds$ , e a un momento distribuito  $m(s)ds$ , oltre che alle caratteristiche  $N, T, M$  prima e  $N+dN, T+dT, M+dM$  dopo.

$d\vartheta/2$  rappresenta anche l'angolo tra la tangente mediana (direzione di  $p(s)$ ) e le tangenti esterne; quindi è possibile imporre l'equilibrio alla traslazione dell'elemento nelle direzioni della tangente mediana e della rotazione mediana.



ANALISI DELLA DEFORMAZIONE 7.1

Si definisce la funzione spostamento  $f$  che associa a ogni vettore posizione  $\{r\}$  dei punti del corpo in posizione iniziale il vettore spostamento  $\{\eta\}$  di tali punti subiscono con la deformazione. Si ha un campo vettoriale di spostamenti:

$$\{\eta\} = u(x,y,z)\mathbf{i} + v(x,y,z)\mathbf{j} + w(x,y,z)\mathbf{k}$$

Per semplificare il ragionamento si esclude la possibilità di FRATTURE e COMPENETRAZIONI

Si dice la distanza infinitesima tra  $P$  e  $Q = \{dr\} = (x_Q - x_P)\mathbf{i} + (y_Q - y_P)\mathbf{j} + (z_Q - z_P)\mathbf{k}$

se la funzione  $f$  è sufficientemente regolare si può fare lo sviluppo in serie di Taylor del primo ordine

$$u_Q = u_P + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_P dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_P dz$$

$$v_Q = v_P + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_P dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_P dy + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_P dz$$

$$w_Q = w_P + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_P dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_P dy + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_P dz$$

che si possono comprendere in  $\{\eta_Q\} = \{\eta_P\} + [J_P]\{dr\}$

dove  $[J_P]$  è la matrice Jacobiana delle variabili dipendenti  $u, v, w$  rispetto alle variabili  $x, y, z$ .

Se lo spostamento fosse causato esclusivamente da un moto rigido si semplificherebbe a una pura rotazione

$$\{\eta_Q\} = \{\eta_P\} + [\varphi_P]\{dr\} \quad \text{dove} \quad [\varphi_P] = \begin{pmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{pmatrix} \text{ è antisimmetrica}$$

Una matrice QUADRATA si può scomporre in una matrice SIMMETRICA e una ANTISIMMETRICA  
 la matrice JACOBIANA (quadrata) dovrà risultare essere la somma di un contributo di moto rigido e uno di ~~moto rotatorio~~ deformazione (rotazione), quindi il contributo DEFORMATIVO sarà dato dalla differenza tra la jacobiana e la matrice rotatoria.

Vale che  $[J_P] = \frac{1}{2} ([J_P] - [J_P]^T) + \frac{1}{2} ([J_P] + [J_P]^T)$   
QUADRATA      2      ANTISIMMETRICA      2      SIMMETRICA      ANTISIMMETRICA  $[\varphi_P]$  ROTAZIONE  
SIMMETRICA  $[E_P]$  DEFORMAZIONE

$$\{\eta_Q\} = \{\eta_P\} + [\varphi_P]\{dr\} + [E_P]\{dr\}$$

dove  $\{\eta_P\}$  è il contributo TRASLATORIO,  
 $[\varphi_P]\{dr\}$  è il contributo ROTATORIO,  
 $[E_P]\{dr\}$  è il contributo DEFORMATIVO

$$[\varphi_P] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix} \quad [E_P] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

La matrice delle deformazioni verrà rappresentata come  $[E]$  e rappresentano le derivate parziali delle componenti del vettore spostamento lungo le relative direzioni, mentre le  $\mu$  rappresentano le somme delle derivate parziali incrociate

$$[E] = \begin{pmatrix} E_x & \frac{1}{2}\mu_{xy} & \frac{1}{2}\mu_{xz} \\ \frac{1}{2}\mu_{yx} & E_y & \frac{1}{2}\mu_{yz} \\ \frac{1}{2}\mu_{zx} & \frac{1}{2}\mu_{zy} & E_z \end{pmatrix}$$

$E$  rappresenta anche le deformazioni specifiche lungo una direzione



DIREZIONI PRINCIPALI DOPO DEFORMAZIONE 7.4

Ci si pone il problema di determinare e esistano le direzioni secondo cui avvengono solo dilatazioni e non scorrimenti angolari. Significa che il vettore  $m$  di una tale direzione deve essere parallelo al vettore spostamento  $\{m\}$   $\{m\} = E_m \{m\}$   $E_m$  scritto come scarse può far la direzione di  $m$

Si trova l'equazione agli autovalori che regge il problema:  $([E] - [E_m]) \{m\} = 0$

che in termini espliciti si presenta: \*

$$\begin{bmatrix} (E_x - E_m) & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & (E_y - E_m) & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & (E_z - E_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

la soluzione ovvia

(cioè tutto = 0) non ha significato fisico, perché i COSENI DIRETTORI devono obbedire alla relazione di NORMALITÀ  $m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1$ . La soluzione è diversa dalla ovvia, e rappresenta una DIREZIONE PRINCIPALE, se e solo se il determinante della matrice si annulla. La condizione impone un'equazione algebrica di terzo grado in  $E_m$   $E_m^3 - J_I E_m^2 - J_{II} E_m - J_{III} = 0$  dove i coefficienti sono detti

INVARIANTI SCALARI DELLA DEFORMAZIONE, essendo essi costanti al variare della tenuta di riferimento

$J_I = E_x + E_y + E_z$

TRACCIA del TENSORE somma degli elementi diagonali:

$J_{II} = - \begin{vmatrix} E_z & \frac{1}{2} \gamma_{yx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & E_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E_x & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & E_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yz} & E_z \end{vmatrix}$

somma degli opposti dei determinanti dei minori principali:

$J_{III} = \det [E]$

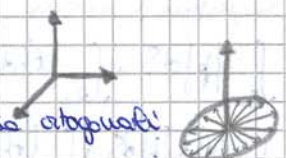
determinante del tensore delle deformazioni

L'equazione ammette tre radici  $E_1, E_2, E_3$  detti AUTOVALORI, così che il sistema \* ammette tre diverse soluzioni  $\{m_1\}, \{m_2\}, \{m_3\}$  detti AUTOVETTORI. Gli autovalori sono reali e rappresentano le 3 DILATAZIONI PRINCIPALI, mentre gli autovettori, se  $E_1 \neq E_2 \neq E_3$ , sono mutuamente ortogonali e rappresentano le 3 DIREZIONI PRINCIPALI

Si possono presentare tre casi:

1)  $E_1 \neq E_2 \neq E_3$  le tre direzioni principali sono mutuamente ortogonali

2)  $E_1 = E_2 \neq E_3$  la direzione  $\{m_3\}$  è principale assieme alle  $\infty^1$  direzioni ad essa ortogonali



STATO DEFORMATIVO PIANO

3)  $E_1 = E_2 = E_3$  le  $\infty^2$  direzioni sono tutte principali



STATO DEFORMATIVO IDROSTATICO

Naturalmente il TENSORE delle DEFORMAZIONI nel sistema di riferimento principale è diagonale

$\begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix}$  essendo nulli gli scorrimenti angolari. Gli invarianti sono esprimibili perciò in funzione delle dilatazioni principali

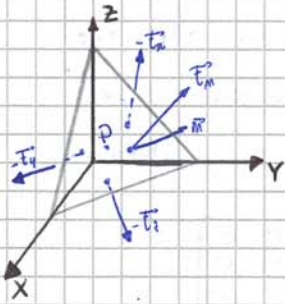
$J_I = E_1 + E_2 + E_3$

$J_{II} = -(E_1 E_2 + E_1 E_3 + E_2 E_3)$

$J_{III} = E_1 E_2 E_3$

$J_I$  assume il significato fisico di DILATAZIONE CUBICA  $\frac{\Delta V}{V} = J_I$





Consideriamo un cubo tetraedrico P, con tre lati paralleli agli assi e la faccia obliqua con normale  $\vec{n}$ . È sottoposto alle tensioni  $-T_x, -T_y, -T_z, T_n$  e si trascurano le forze di volume.

Per l'equilibrio  $\int t_n dA_n - \int t_x dA_x - \int t_y dA_y - \int t_z dA_z = \{0\}$

dove le proiezioni di  $dA_n$  sui piani coordinati valgono

$dA_x = m_x dA_n$      $dA_y = m_y dA_n$      $dA_z = m_z dA_n$     dividendo i per  $dA_n$  si ottiene

$\{t_n\} = \{t_x\}m_x + \{t_y\}m_y + \{t_z\}m_z$     queste espressioni può essere scritte in forma

matriciale considerando le COMPONENTI SPECIFICHE DI TENSIONE, cioè le componenti dei vettori

$t_x, t_y, t_z$  sugli assi  $x, y, z$

$$\begin{bmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}$$

dove  $\sigma$  sono le

componenti normali e  $\tau$  le componenti tangenziali. In modo più compatto  $\{t_n\} = [\sigma] \{m\}$  che interpreta la MATRICE degli SFORZI  $[\sigma]$  come matrice di trasformazione del vettore normale  $\vec{n}$  nel relativo vettore tensione  $\vec{t}_n$ . Si dimostra anche che la matrice  $[\sigma]$  è SIMMETRICA.

LEGGI DI TRASFORMAZIONE DEL TENSORE degli SFORZI per ROTAZIONI del sistema di riferimento 7.7

La proiezione del vettore tensione su un'asse generico la componente normale all'angolo di direzione normale  $\vec{n}$  vale  $\sigma_n = t_{nn} = \{m\}^T \{t_n\} = \{m\}^T [\sigma] \{m\}$ . La proiezione di  $\{t_n\}$  su una generica direzione  $\vec{n}$  è  $t_{nn} = \{m\}^T [\sigma] \{m\}$  e quella di  $t_{nn}$  lungo  $\vec{n}$  è  $t_{nn} = \{m\}^T [\sigma] \{m\}$ . Si ottiene la LEGGE DI RECIPROCA per cui  $t_{nm} = t_{mn} \iff$  se i vettori  $\vec{n}$  e  $\vec{m}$  sono ortogonali  $t_{nm} = t_{mn} = \{m\}^T [\sigma] \{n\} = \{n\}^T [\sigma] \{m\}$  che esprime la LEGGE DI RECIPROCA delle TENSIONI TANGENZIALI, che giustifica la simmetria di  $[\sigma]$ .

Se  $n, m, l$  sono direzioni ortogonali: rotolate rispetto a XYZ si potrà scrivere

$$[\sigma^*] = \begin{bmatrix} \sigma_n & \tau_{nm} & \tau_{nl} \\ \tau_{nm} & \sigma_m & \tau_{ml} \\ \tau_{nl} & \tau_{ml} & \sigma_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{m\}^T \\ \{n\}^T \\ \{l\}^T \end{bmatrix} [\sigma] \begin{bmatrix} \{m\} \\ \{n\} \\ \{l\} \end{bmatrix} = [N] [\sigma] [N]^T \quad \text{dove } [N] = \begin{bmatrix} m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \\ l_x & l_y & l_z \end{bmatrix}$$

matrici 3x3

Così come l'inerzia e la deformazione anche la TENSIONE risulta essere una grandezza TENSORIALE

DIREZIONI PRINCIPALI della TENSIONE 7.8

Si cerca di determinare giaciture rispetto alle quali siano presenti soltanto tensioni normali, cioè il vettore  $\vec{n}$  deve essere parallelo al relativo vettore tensione  $\{t_n\} = \{\sigma_n\} \{m\}$ .

Si ottiene l'equazione agli AUTOVALORI  $([\sigma] - [I] \sigma_n) \{m\} = \{0\}$  che esplicitata diventa

$$\begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_n) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_n) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La soluzione ovvia non ha significato fisico, dovendo i coseni direttori obbedire alla relazione di normalità. La soluzione è diversa dalla ovvia e rappresenta una DIREZIONE PRINCIPALE

se e solo se il det della matrice è nullo: questa condizione fornisce un'equazione algebrica di 3° grado in  $\sigma_n$

dove i coefficienti sono gli INVARIANTI SCALARI della TENSIONE

$$\sigma_n^3 - J_I \sigma_n^2 - J_{II} \sigma_n - J_{III} = 0$$

TRACCIA DEL TENSORE somma degli elementi diagonali

$$J_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

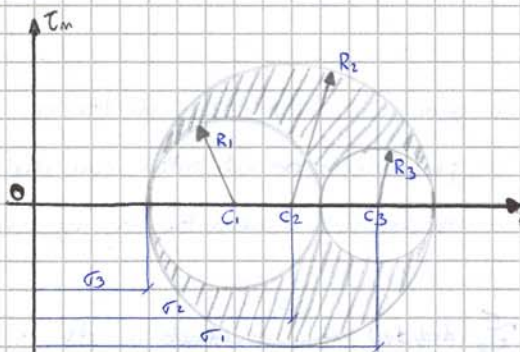
summa degli opposti dei determinanti dei minori principali

$$J_{II} = - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

determinante del tensore degli sforzi

$$J_{III} = \det [\sigma]$$





la circonferenza 2, e il terzo è esterno alla circonferenza 3.  
 Le possibili coppie  $(\sigma_m, \tau_m)$  sono  $\infty^2$ , così come sono  $\infty^2$  le direzioni  $\vec{n}$  uscenti da un punto.  
 Nei casi in cui una o più delle tensioni principali siano nulle si possono avere diversi grafici sul piano di Mohr (pag. 228 fig. 7.17)

**STATO TENSIONALE PIANO 7.9**

Lo stato tensionale in un punto si dice **PIANO** se il vettore tensione appartiene in ogni caso ad una medesima giacitura, indipendentemente dalla sezione scelta. Condizione necessaria e sufficiente perché uno stato tensionale sia piano è che una delle tensioni principali sia nulla. Ad esempio se  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$  si vede che il vettore tensionale  $\vec{t}_m$  appartiene sempre al PIANO delle TENSIONI  $\sigma_1 - \sigma_2$ , qualsivoglia l'orientazione di  $d\Omega_m$ . Per cui

$$d\vec{t}_m = \begin{bmatrix} t_{m1} \\ t_{m2} \\ t_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \text{ da cui si trae che } t_{m3} = 0$$

Il tensore degli sforzi rispetto ad una generica base di assi  $XYZ$  avrà terza riga e terza colonna nulle

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ il problema agli autovalori si risolve annullando il det di questa matrice } \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_m \end{bmatrix} \text{ e}$$

si ottengono le tre radici da due condizioni  $\sigma_m = 0$

$$\sigma_m^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_m + (\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0 \text{ risolvendo}$$

$$\text{La seconda equazione si ottengono le radici } \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \text{ si può ottenere}$$

Lo stesso risultato imparando che se diagonalizzi il minore principale significativo del tensore

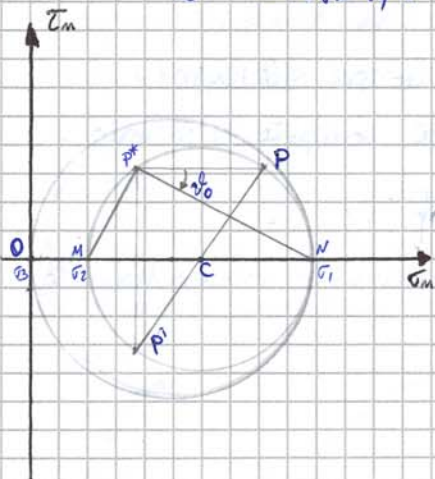
$$[\sigma^*] = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \text{ e annullando il termine } \tau_{xy}^* = \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta = 0$$

non diagonalizzato si ha

e quindi l'angolo di cui deve ruotare il sistema  $XY$  per raggiungere il sistema principale vale

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \arctg \left( \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)$$

Il cerchio di Mohr si costruisce come quello per i momenti di inerzia, con i punti  $P(\sigma_x, \tau_{xy})$  e  $P'(\sigma_y, -\tau_{xy})$



FINE SETTIMANA 6

**NOTA**

$\tau_{xy}$  uguale a  $x$  parallelo a  $y$



anche alle EQUAZIONI di EQUIVALENZA di COULOMB si può dare una forma matriciale

$$\begin{bmatrix} M_x & 0 & 0 & M_y & M_z & 0 \\ 0 & M_y & 0 & M_x & 0 & M_z \\ 0 & 0 & M_z & 0 & M_x & M_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad \text{oppure compatta } [N]^T \{ \sigma \} = \{ p \}$$

C'è perfetta corrispondenza tra la matrice operatoriale  $[D]^T$  e la matrice  $[N]^T$ ; alle derivate parziali di una corrispondono i relativi coseni direttori dell'altra.

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI 8.3

Il principio dei lavori virtuali è l'identità fondamentale nell'ambito della meccanica dei corpi deformabili. Afferma l'uguaglianza tra il lavoro virtuale interno e quello esterno.

Un sistema di forze esterne ed interne si dice essere STATICAMENTE AMMISSIBILE quando soddisfano le equazioni statiche e le condizioni al contorno  $[D]^T \{ \sigma_a \} = - \{ \sigma_a \} \quad [N]^T \{ \sigma_a \} = \{ p_a \}$

Un sistema di spostamenti  $\{ \eta_b \}$  e deformazioni si dice essere CINEMATICAMENTE AMMISSIBILE quando soddisfano le equazioni cinematiche  $[D] \{ \eta_b \} = \{ \epsilon_b \}$

Si consideri il lavoro virtuale compiuto dalle forze di volume  $\{ \sigma_a \}$  sugli spostamenti  $\{ \eta_b \}$

$$L_F = \int_V \{ \sigma_a \}^T \{ \eta_b \} dV = - \int_V ([D]^T \{ \sigma_a \})^T \{ \eta_b \} dV \quad \text{in fine si trova:}$$

$$\int_V \{ \sigma_a \}^T \{ \epsilon_b \} dV = \int_V \{ \sigma_a \}^T \{ \eta_b \} dV + \int_S \{ p_a \}^T \{ \eta_b \} dS \quad \text{che costituisce la forma finale del PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI per CORPI DEFORMABILI.}$$

Il primo membro definisce il lavoro virtuale interno, e il secondo rappresenta il lavoro virtuale esterno

$$L_{vi} = L_{ve} \quad \text{Il principio dei lavori virtuali è valido in generale, per qualsiasi legge costitutiva del materiale}$$

il libro dimostra la regola di integrazione per parti su un dominio tridimensionale. A questo punto considerare la formula  $\int_S \{ \sigma_a \}^T \{ \eta_b \} dS = \int_V \frac{\partial \{ \sigma_a \}^T}{\partial x} \{ \eta_b \} dV + \int_V \{ \sigma_a \}^T \frac{\partial \{ \eta_b \}}{\partial x} dV$

Legge costitutiva elastica 8.4

Un corpo deformabile è elastico quando la sua energia di deformazione, cioè il lavoro eseguito dall'esterno per portarlo in un certo stato deformativo o in un certo stato tensionale non dipende dal processo di carico, ma solo dallo stato finale; quindi l'energia di deformazione è una funzione di stato.

Un corpo deformabile si dice elastico quando il lavoro infinitesimo  $d\Phi$  risulta essere un differenziale esatto, cioè quando  $d\Phi = \{ \sigma \}^T \{ d\epsilon \}$  sia un differenziale esatto, quindi  $\Phi = \Phi(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$  è una funzione di stato ed è detta POTENZIALE ELASTICO, poiché è possibile dedurre le componenti di tensione mediante derivazione

parziale  $d\Phi = \sigma_x d\epsilon_x + \sigma_y d\epsilon_y + \sigma_z d\epsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{xz} d\gamma_{xz} + \tau_{yz} d\gamma_{yz}$  e le componenti di tensione:

$$\sigma_x = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_x}; \quad \sigma_y = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_y}; \quad \sigma_z = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_z}; \quad \tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xy}}; \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xz}}; \quad \tau_{yz} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{yz}}$$

Nel caso uniaassiale su  $\Phi$  che  $\sigma_x$  sono funzioni di  $\epsilon_x$ , così che immaginando di caricare e poi scaricare il corpo si possono di andare entrambi nel piano  $\epsilon_x - \sigma_x$  coincidente. Nel caso di un corpo anelastico per le funzioni  $\Phi$  e  $\sigma_x$ , ad uno stesso valore di  $\epsilon_x$  possono corrispondere valori diversi. Scaricando il corpo non si ripercorre la curva relativa al caricamento, e si evidenziano delle deformazioni residue e permanenti, con dissipazione di energia e restituzione solo parziale del lavoro di deformazione.





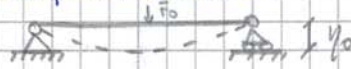
### TEOREMA DI CAPEYRON 8.7

Un corpo linearmente elastico soggetto a forze di volume  $\{f\}$  e a forze di superficie  $\{p\}$ . Sia  $\{u\}$  il campo di spostamenti che si genera nel corpo al termine del processo di carico che porta da zero a questi valori. L'applicazione del

Principio dei Lavori Virtuali fornisce  $\int_V \{f\}^T \{u\} dV + \int_S \{p\}^T \{u\} dS = \int_V \{f\}^T \{E\} dV$  moltiplicandoli entrambi per  $\frac{1}{2}$  si ha  $\frac{1}{2} \int_V \{f\}^T \{u\} dV + \frac{1}{2} \int_S \{p\}^T \{u\} dS = \int_V \Phi dV$  definizione del potenziale elastico

L'equazione esprime il fatto che il lavoro di deformazione compiuto dalle forze esterne per portare il corpo dallo stato indeformato iniziale allo stato deformato finale, è pari alle metà del lavoro che tali forze compirebbero se presentassero il loro valore finale durante tutto il processo di carico.

Se, ad esempio, una trave linearmente elastica viene sottoposta all'azione di una forza concentrata in mezzina, che cresce lentamente da 0 al valore  $F_0$ , e nel contempo l'abbassamento in mezzina cresce da 0 al valore  $y_0$ , allora, in base al TEOREMA DI CAPEYRON, il lavoro di deformazione compiuto sulla trave vale  $L_{def} = \int_0^{y_0} F(y) dy = \frac{1}{2} F_0 y_0$



### TEOREMA DI BETTI 8.8

Il teorema di Betti mostra come il Principio di Sovrapposizione degli Effetti nelle elasticità lineare valga solo per spostamenti, deformazioni e tensioni, e non sia applicabile invece al lavoro di deformazione.

Si consideri un corpo lineare elastico elastico sottoposto ad un processo di carico quasi-statico (molto lento) in modo tale che le forze finali applicate siano  $\{f_a\}$ ,  $\{p_a\}$ , e che il lavoro di deformazione compiuto sia  $L_a$ . Si prosegue poi il processo di carico con l'applicazione quasi-statica di un secondo sistema di forze  $\{f_b\}$ ,  $\{p_b\}$ . Il lavoro compiuto da tali forze sia  $L_b$ , mentre il lavoro di accrescimento delle forze  $\{f_a\}$ ,  $\{p_a\}$  su gli spostamenti  $\{u_b\}$ , è detto lavoro nuovo  $L_{ab}$ .

$L_{ab} = L_a + L_b + L_{ab}$  dove  $L_a = \frac{1}{2} \int_V \{f_a\}^T \{u_a\} dV + \frac{1}{2} \int_S \{p_a\}^T \{u_a\} dS$  ;  $L_b = \frac{1}{2} \int_V \{f_b\}^T \{u_b\} dV + \frac{1}{2} \int_S \{p_b\}^T \{u_b\} dS$   
 e  $L_{ab} = \frac{1}{2} \int_V \{f_a\}^T \{u_b\} dV + \frac{1}{2} \int_S \{p_a\}^T \{u_b\} dS$  . L'equazione sopra esprime chiaramente che il

principio di sovrapposizione degli effetti non sia applicabile al lavoro di deformazione. Se invertiamo il processo di carico avremo un lavoro nuovo  $L_{ba}$ ; questo dovrà essere uguale a quello di prima  $L_{ab} = L_{ba}$ ; quando, in particolare, essi sono nulli, i due sistemi di forze si dicono essere energeticamente ortogonali, e il Principio di Sovrapposizione degli Effetti diventa valido anche per il lavoro di deformazione.

### ISOTROPIA 8.9

Una considerazione il corpo deformabile anche isotropo, cioè le proprietà meccaniche sono considerate identiche in tutte le direzioni uscenti da generico punto P; non esistendo quindi direzioni preferenziali: il potenziale elastico complementare  $\Psi$  dipenderà dai valori delle tre tensioni principali, e non dall'orientazione

ovvero  $\Psi = \Psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  essendo  $\Psi$  una forma quadratica delle componenti di tensione si potrà porre così  $\Psi = \frac{1}{2E} \{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)\}$  essendo  $(\frac{1}{2E})$  e  $(-\frac{\nu}{E})$  due coefficienti che moltiplicano i quadrati e i prodotti misti. Da 21 i coefficienti si riducono a 2. Le costanti  $E$  e  $\nu$  hanno un preciso significato fisico.



Un corpo elastico ed isotropo, viene caratterizzato dai valori dei due parametri  $E$  e  $\nu$  assumono in un caso punto. Se le funzioni puntuali  $E$  e  $\nu$  si rivelano costanti, allora il corpo si dice essere anche omogeneo.

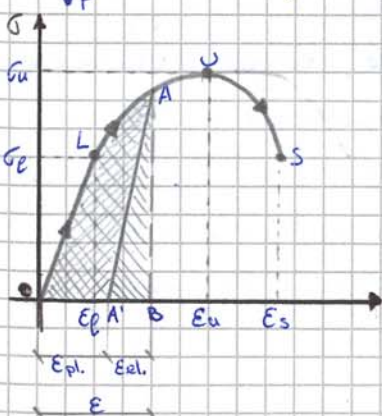
	$E$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\nu$	$\sigma_{max}$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_{max} / E$	Il rapporto $\sigma_{max} / E$ indica l'ordine di grandezza della dilatazione al di sotto del quale
ACCIAIO	2100000	0.30	2400	$1.14 \cdot 10^{-3}$	
CALCESTRUZZO	250000	0.15	30	$1.2 \cdot 10^{-4}$	

Per questo fisico l'idealizzazione elastica lineare.

### RESISTENZA, DUTTILITÀ, ENERGIA DI FRATTURA

Una volta calcolato il corpo tensionale elastico di un elemento strutturale ci si scontra di fronte al problema di valutare se le tensioni teoricamente determinate eccedono la resistenza del materiale costitutivo. Più essendo la legge  $\sigma(\epsilon)$  lineare ed elastica nel tratto iniziale, esso perde tale linearità nel tratto successivo dando luogo a fenomeni di SNERVAMENTO, PLASTICIZZAZIONE e poi ROTTURA. I materiali strutturali vengono tradizionalmente catalogati in base alle caratteristiche di  $\sigma(\epsilon)$ , in due categorie: materiali DUTTILI e FRAGILI. I primi, prima di pervenire alla rottura, mostrano ampi tratti non lineari su  $\sigma(\epsilon)$ , mentre i secondi si rompono in modo improvviso quando la risposta è ancora sostanzialmente lineare ed elastica. Una seconda caratteristica che li distingue è il rapporto tra resistenza a TRAZIONE e resistenza a COMPRESSIONE: per i materiali DUTTILI è vicino all'unità, mentre per quelli FRAGILI è molto inferiore, anche  $10^{-1}$  e  $10^{-2}$ . Queste differenze di comportamento dipendono in gran parte dai meccanismi microscopici di danneggiamento e frattura. Nelle leghe metalliche si verificano sconvolgimenti tra piani atomici e cristallini che danno luogo a un comportamento plastico con deformazioni permanenti. Nei calcestruzzi le microfessure nei componenti granulari possono estendersi e congiungersi a formare una fessura macroscopica che separa in due parti l'elemento strutturale. La distinzione tra materiali duttili e fragili non è sempre così netta nella pratica, anche perché la duttilità del materiale dipende dalla temperatura e dalle dimensioni dell'elemento strutturale.

Si consideri una prova di trazione uniaassiale eseguita su un provino a campione di materiale duttile (acciaio). Il provino ha l'usuale forma a clessidra, per evitare che la rottura avvenga nelle zone terminali di ancoramento alle macchine di prova. Si definisce la TENSIONE NOMINALE  $\sigma = \frac{F}{A_0}$  si conoscono così le contrazioni elastiche e plastiche. Si definisce la DILATAZIONE CONVENZIONALE  $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$  dove  $\Delta l$  dilatazione media. È probabile che durante la prova la dilatazione non sia uniforme, e non sia puntualmente coincidente con quella media.



Fin  $O \rightarrow L$  il diagramma è lineare ed elastico. Da  $L$  in poi la risposta non è più lineare ed è elastica comincia a svenarsi. Sconvolgendo il provino si evidenziano delle deformazioni permanenti  $\epsilon_{pl}$  (plastiche). In questo modo parte dell'energia di deformazione è restituita ( $OAA'$ ), cioè quella relativa a  $\epsilon_{el}$ , mentre il resto è dissipato plasticamente ( $OLAA'$ ). Coniando nuovamente il provino, si ripercorre elasticamente il tratto  $AA'$ , parallelo a  $OL$ . Giunti in  $A$ , il provino si svenava di nuovo ad una tensione  $\sigma > \sigma_y$ . Il materiale reagisce si snerva a livelli di tensione più bassi di quanto non fosse il materiale già svenato. Questo fenomeno è



VERIFICHE DI RESISTENZA

Nei casi di corpi soggetti ad uno stato tensionale uniassiale la verifica di resistenza è immediata, una volta che sono note la tensione di esercizio e la resistenza. Nei materiali duttili non si ha la crisi del materiale se vale  $-\sigma_p < \sigma < \sigma_p$ . Nei materiali fragili il comportamento a compressione è diverso da quello a trazione, per cui  $-\sigma_c < \sigma < \sigma_u$  dove  $\sigma_c$  è la resistenza ultima a compressione.

Queste condizioni sarebbero cautelative se si conoscessero in modo certo tutte le grandezze in gioco, ma nella realtà sono note in modo approssimato; perciò la tensione ammissibile sono rappresentate da una frazione della resistenza nominale, in modo che i margini di sicurezza siano così:

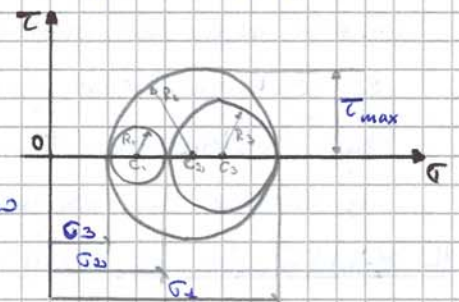
$-\frac{\sigma_p}{s} < \sigma < \frac{\sigma_p}{s}$  e  $-\frac{\sigma_c}{s} < \sigma < \frac{\sigma_u}{s}$  dove  $s$  è il coefficiente di sicurezza; è tanto maggiore tanto più è elastico il comportamento del materiale. Per i materiali duttili spesso si assume  $s=1.5$ , mentre per quelli fragili un valore più alto, anche  $s=6$ , perché per essi il meccanismo di danneggiamento sono più instabili.

Le prove che usualmente si eseguono nei laboratori sono uniassiali, quindi c'è l'esigenza di correlare gli stati tensionali biassiali e triassiali a quelli uniassiali; vice si tratta di definire una funzione del tensore degli sforzi detta TENSIONE EQUIVALENTE

$\sigma_{eq} = \sigma_{eq}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) < \sigma_p$  nello caso di materiale isotropico  $\sigma_{eq} = \sigma_{eq}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < \sigma_p$

CRITERIO DI TRESCA

considera le tensioni tangenziali responsabili dello svenamento che subisce il materiale quando è soggetto ad uno stato tensionale triassiale. È semplice sul piano di Mohr. La tensione tangenziale massima  $\tau_{max}$  è uguale alla metà della differenza tra le tensioni principali estreme



$\tau_{max} = \frac{1}{2} \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \}$ , dalla condizione di svenamento uniassiale si ha  $\tau_p = \frac{\sigma_p}{2}$ : TENSIONE TANGENZIALE DI SVENAMENTO. La condizione di Tresca  $\tau_{max} < \tau_p$  diventa  $\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \} < \sigma_p$ . Nel caso di STATO TENSIONALE PIANO una delle tre tensioni principali si annulla (x es.  $\sigma_3=0$ ) per cui la condizione diventa  $\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2| \} < \sigma_p$

Questo disuguaglianza si può interpretare come l'intersezione di tre disuguaglianze  $|\sigma_1| < \sigma_p, |\sigma_2| < \sigma_p, |\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_p$ . Le prime due sul piano  $(\sigma_1, \sigma_2)$  rappresentano il criterio di RANKINE per il quale il dominio di resistenza è quadrato e la terza disuguaglianza però seziona ulteriormente il quadrato e dà origine a un dominio detto ESAGONO DI TRESCA

CRITERIO DI MOHR-COULOMB

Invece di considerare una tensione tangenziale di crisi costante e indipendente dallo stato tensionale, propone un limite  $\tau_p$  funzione della tensione normale  $\tau_{max} < \tau_c - \mu \sigma$  dove  $\tau_c$  rappresenta la COESIONE del materiale e  $\mu$  il COEFFICIENTE DI ATTRITO INTERNO.



Le condizioni di equilibrio sulle basi possono essere globali  $\int_A p \, dA = \{R\}$ ,  $\int_A (\{r\} \wedge \{p\}) \, dA = \{M\}$   
 Le componenti di  $\{R\} = \begin{Bmatrix} N_z \\ T_x \\ T_y \end{Bmatrix}$  e di  $\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}$  sono delle CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE  
 $N_z =$  SFORZO NORMALE  $T_y =$  SFORZO DI TAGLIO secondo Y  $T_x =$  SFORZO DI TAGLIO secondo X  
 $M_x =$  MOMENTO FLETTENTE secondo X  $M_y =$  MOMENTO FLETTENTE secondo Y  $M_z =$  MOMENTO TORCENTE

I casi di sollecitazione elementare per un solido di Saint-Venant sono: - SFORZO NORMALE CENTRATO  $N$ ;  
 - FLESSIONE RETTA  $M_x$ ; - FLESSIONE RETTA  $M_y$ ; - TAGLIO  $T_y$ ; - TAGLIO  $T_x$ ; - TORSIONE  $M_z$ .

Essendo il taglio derivato del momento, la sua presenza presuppone anche quella della flessione corrispondente, mentre invece l'implicazione inversa non sussiste. A volte si considerano delle SOLLECITAZIONI COMPOSITE da quelle elementari: - FLESSIONE DEVIATA ( $M_x, M_y$ ) - SFORZO NORMALE ECCENTRICO ( $N, M_x, M_y$ ) - TAGLIO-TORSIONE ( $T_x, T_y, M_z$ )

### - SFORZO NORMALE CENTRATO 9.2

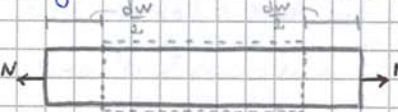
Lo sforzo  $\sigma_z \neq 0$ , per cui  $\int_A \sigma_z \, dA = N$  e  $\sigma_z = \frac{N_z}{A}$ . Le equazioni ausiliarie di equilibrio e le equazioni di equilibrio al contorno, sono tutte soddisfatte dal fatto che  $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  e  $\sigma_z = \frac{N_z}{A}$ .

Le equazioni costitutive elastiche forniscono il campo deformativo  $\begin{cases} \epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \frac{N}{EA} \\ \epsilon_z = \frac{N}{EA} \\ \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \end{cases}$   
 Lo sforzo  $N$  è di trazione si verifica quindi una dilatazione uniforme lungo  $z$  e contrazioni uguali

nelle direzioni trasversali, mentre gli sformamenti angolari risultano nulli. Integrando il campo deformativo è possibile ottenere il campo degli spostamenti: a)  $\frac{du}{dz} = -\nu \frac{N}{EA}$ , b)  $\frac{dv}{dy} = -\nu \frac{N}{EA}$

c)  $\frac{dw}{dz} = \frac{N}{EA}$  d)  $\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dz} = 0$  e)  $\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dz} = 0$  f)  $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0$  integrando a), b) e c) si ha

$$\begin{cases} u = -\nu \frac{N}{EA} x + u_0(y, z) \\ v = -\nu \frac{N}{EA} y + v_0(x, z) \\ w = \frac{N}{EA} z + w_0(x, y) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{du_0}{dy} + \frac{dv_0}{dz} = 0 \\ \frac{du_0}{dz} + \frac{dw_0}{dz} = 0 \\ \frac{dv_0}{dz} + \frac{dw_0}{dy} = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \frac{du_0}{dz} = 0 \\ \frac{dv_0}{dy} = 0 \\ \frac{dw_0}{dz} = 0 \end{cases}$$

ultime si discende che il campo di spostamento  $u_0, v_0, w_0$  non ha componenti deformative.

La relazione delle tensioni e degli spostamenti (stipolati) è l'unica possibile per il teorema di Kirchhoff.

Il lavoro elementare di deformazione si può ottenere applicando il teorema di Betti  $dL = \frac{1}{2} N dw = \frac{1}{2} N \epsilon_z dz$

da cui  $\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} = \frac{1}{2} EA \epsilon_z^2$  (EA esprime la rigidità del traliccio). La struttura di questa formula si conserva anche nel caso delle altre sollecitazioni.

### - FLESSIONE RETTA 9.3

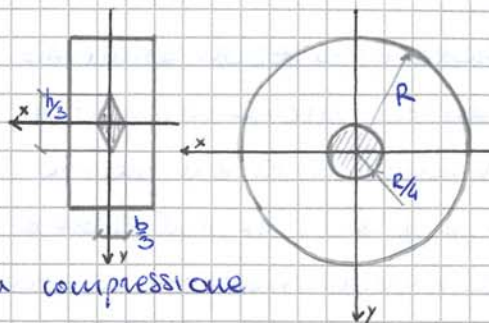
Anche in questo caso si ipotizza il campo tensionale uniaassiale  $\sigma_z$ , qui variabile sulla sezione

$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  e  $\sigma_z = ax + by + c$ . Le costanti a, b, c si possono ricavare con le condizioni al contorno  $\int_A \sigma_z \, dA = N = 0$ ,  $\int_A \sigma_z y \, dA = M_x \neq 0$ ,  $\int_A \sigma_z x \, dA = M_y = 0$ . Si ha infatti che  $\int_A (ax + by + c) \, dA = a \int y \, dA + b \int x \, dA + cA = 0$  ed essendo  $\int x$  e  $\int y$  nulli, perché il sistema di riferimento è baricentrico si ha  $c = 0$ . Poi si ha

$\int_A (ax + by) x \, dA = a I_y + b I_{xy} = 0$  ed essendo  $I_{xy}$  nullo, perché il sistema di riferimento è centrato,  $a = 0$ ;  
 rimane  $\int_A by^2 \, dA = b I_x = M_x$  per cui  $b = \frac{M_x}{I_x}$  e quindi  $\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$ . La tensione  $\sigma_z$  dipende dalla sola coordinata  $y$ , ed aumenta in valore assoluto allontanandosi dall'asse  $x$ . Essa è nulla sull'asse  $x$ , perché  $y = 0$ , e perciò è detto ASSE NEUTRO, l'asse  $y$  è detto ASSE DI SOLLECITAZIONE e il piano  $yz$  PIANO DI SOLLECITAZIONE.



Il momento centrale d'inerzia per un cerchio è dato dal cerchio con raggio  $R/4$ , mentre per una sezione rettangolare è dato da un rombo di diagonali  $\frac{1}{3}h$  e  $\frac{1}{3}b$ .



Tradizionalmente si dice che la sezione è tutta in compressione se il centro di pressione è dentro il terzo medio.

Lo sforzo normale eccentrico, per quanto riguarda la deformazione, produce una rotazione rigida di ogni singola sezione trasversale attorno all'asse neutro, oltre che una traslazione assiale. Ogni momento  $M_x$  e  $M_y$  producono una rotazione  $\varphi_x$  e  $\varphi_y$ , per cui  $\varphi_i = \frac{M_i}{EI}$ , cui infinitesime, per cui si possono sommare dando il vettore  $\varphi = \varphi_x i + \varphi_y j$ .

Il lavoro elementare  $dL = \int_A \varphi dA dz$  che vale  $\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \left[ \frac{N^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} \right]$

### TORSIONE DELLE TRAVI DI SEZIONE CIRCOLARE 9.5

Ad differenza dello sforzo normale e dello flessione retta, qui si ipotizzano le campo degli spostamenti. Si assume che ogni sezione trasversale ruoti rigidamente attorno all'asse longitudinale, restando nel contempo piana. In formule  $\begin{cases} u = -\varphi z y \\ v = \varphi z x \\ w = 0 \end{cases}$  essendo  $\varphi$  l'angolo di rotazione infinitesimo. La caratteristica deformativa è  $\Theta$  ANGOLU

UNITARIO DI TORSIONE, quindi  $\begin{cases} u = -\Theta y z \\ v = \Theta x z \\ w = 0 \end{cases}$  si deriva il campo deformativo tramite le seguenti equazioni cinematiche  $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0$ ,

$\gamma_{zx} = -\Theta y$ ,  $\gamma_{zy} = \Theta x$ . Si ottiene il modulo del vettore tensione tangenziale  $\tau_z = G \Theta r$ .

Un'unica condizione di equilibrio è significativa, (perché  $N = M_x = M_y = T_x = T_y = 0$ ), cioè  $M_z$

$M_z = G \Theta I_p$  dove  $I_p$  è il momento d'inerzia polare della sezione circolare. Da qui si ricava  $\Theta = \frac{M_z}{GI_p}$  che è la caratteristica deformativa relativa al momento torcente. Si può esprimere  $\tau_z$  anche come  $\tau_z = \frac{M_z}{I_p} r$ , che aumenta dal centro fino al valore massimo sul contorno.

A parità di raggio massimo, una sezione circolare piana è sottoposta ad una tensione maggiore.

### TORSIONE DELLE TRAVI DI SEZIONE GENERICI 9.6

Nel caso delle travi di sezione generica si assume che ogni sezione trasversale ruoti attorno ad un asse longitudinale, detto ASSE DI TORSIONE (non sempre coincidente con l'asse baricentrico), non restando al contempo piana.  $\begin{cases} u = -\Theta z (y - y_c) \\ v = \Theta z (x - x_c) \\ w = \Theta \omega(x, y) \end{cases}$  dove  $x_c$  e  $y_c$  sono le coordinate del centro di torsione rispetto al baricentro, e  $\omega(x, y)$  è la

funzione di WORBAMENTO, che rappresenta gli spostamenti assiali dei punti della generica sezione. Per le equazioni indefinite di equilibrio  $w(x, y)$  deve essere ARMONICA

$$\begin{cases} \gamma_{zx} = -\Theta (y - y_c) + \Theta \frac{\partial \omega}{\partial x} & \text{per gli spostamenti} \\ \gamma_{zy} = \Theta (x - x_c) + \Theta \frac{\partial \omega}{\partial y} & \text{e} \\ \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0 & \text{per le tensioni} \end{cases} \begin{cases} \tau_{zx} = G \Theta \left[ \frac{\partial \omega}{\partial x} - (y - y_c) \right] \\ \tau_{zy} = G \Theta \left[ \frac{\partial \omega}{\partial y} + (x - x_c) \right] \\ \tau_x = \tau_y = \tau_z = \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

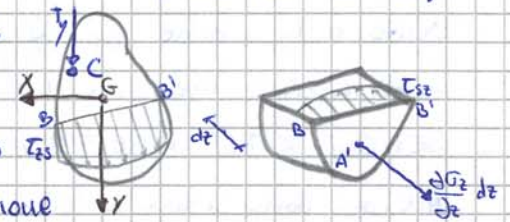


centro di torsione provoca solo torsioni e non rotazioni della sezione trasversale. Non essendo deformazioni torsionali, cioè  $\theta = 0$ , si deduce che devono essere nulle anche le tensioni torsionali. La sollecitazione composta è equivalente ad un'unica forza, parallela all'asse che presenta un momento  $M_z$  rispetto al centro di torsione. Il momento torcente globale è da valutarsi come momento della forza tangente alla sezione rispetto al centro di torsione, e viceversa rispetto al baricentro.

**TAGLIO RETTO**

Si consideri un solido sollecitato da due forze  $T_y$  sulle basi, passanti per il centro di torsione e da un momento flettente  $M_x$  che ripristini l'equilibrio turbato dal taglio, questo perché non è possibile isolare la caratteristica tagliante, essendo la derivata del momento flettente.

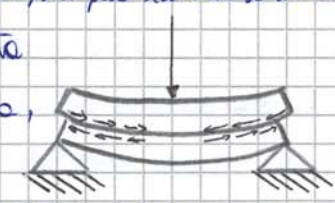
Si cerca di determinare la tensione tangenziale media agente ortogonalmente su una generica corda  $BB'$ . Si consideri una parte di solido delimitata da due sezioni distanti  $dz$  e dal piano parallelo all'asse della trave la cui traccia è  $BB'$ . La distribuzione delle tensioni tangenziali  $T_{xy}$  risultano date da un ribaltamento delle tensioni tangenziali  $T_{xz}$  attorno a  $BB'$ .



Si può allora porre  $\int_B^{B'} T_{xy} dz = \int_{A'} \frac{d\sigma_z}{dz} dz dA$  dove  $\frac{d\sigma_z}{dz}$  rappresenta l'incremento della tensione normale  $\sigma_z$  prodotta da  $M_x(z)$ , e ricordando che  $T_y$  è uguale alla derivata del momento si ricava la tensione media tangenziale agente ortogonalmente alla corda  $BB'$   $\bar{T}_{xy} = \frac{T_y S_x^{A'}}{I_x b}$  con  $S_x^{A'}$  il momento statico dell'area  $A'$  rispetto a  $x$ ; questa è la formula di Jourawsky: è molto utile perché i valori puntuali di  $T_{xy}$  non si discostano molto dal valor medio. Per una sezione rettangolare si ottiene  $\bar{T}_{xy} = \frac{6 T_y}{b h^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$  quindi la media delle tensioni  $T_{xy}$  varia parabolicamente, con massimo  $T_{max} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{bh}$ .

Più in generale vale  $T_{max} = \gamma \frac{T_y}{A}$  dove  $\gamma$  è un fattore moltiplicativo sempre maggiore dell'unità, che dipende dalla forma della sezione.

Nelle travi sulle tensioni tangenziali dovute al taglio sono solitamente di gran lunga inferiori a quelle normali dovute al momento flettente. Per una mensola ad esempio  $\frac{T_{max}}{T_{max}} = \frac{1}{4} \left( \frac{h}{l} \right)$  che tende a 0 per  $l$  che tende a  $\infty$ . Al di sotto di certi rapporti di snellezza  $\frac{l}{h} \leq 3$  la teoria di Saint-Venant cade in difetto. Non si deve dimenticare che sono presenti anche tensioni tangenziali longitudinali  $T_{yz}$  oltre alle  $T_{xy}$  trasversali. L'esistenza delle  $T_{yz}$  si può intuire se si considerano due travi appoggiate senza attrito, se poi quella inferiore è appoggiata agli estremi e quella superiore viene caricata da una forza, allora ciascuna trave si infletterà presentando fibre tese sotto e contratte sopra; all'interfaccia si avranno dilatazioni in quella superiore e contrazioni in quella inferiore. Se si immagina che una qualche forma d'attrito agisca tra le due superfici libere a contatto, le due travi sull'operazione delle interazioni che tendono a contrarre quella superiore e dilatare quella inferiore; tali azioni sono rappresentate dalle tensioni  $T_{yz}$ . Nei materiali composti laminari il meccanismo della delaminazione è causato dal superamento da parte delle tensioni dei limiti di resistenza dell'incollaggio.





$\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{xz}^2} < \sigma_p$  Il CRITERIO di Von Mises invece dà:  $\sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{xz}^2} < \sigma_p$  che dà ancora una volta verifica al fatto che il criterio di Tresca sia più cautelativo di quello di Von Mises.

LE TRAVI e LE LASTRE INFLESSE 10.1

TEORIA CINETICA DELLA TRAVE 10.1

I risultati relativi al solido di Saint Venant vengono solitamente estesi a casi in cui le sue ipotesi non sono soddisfatte: le tensioni e le deformazioni nelle sezioni delle travi vengono usualmente calcolate con le formule ottenute prima, introducendo le caratteristiche interne della sollecitazione agente. Questa estrapolazione viene usata per: - travi ad asse non rettilineo; - travi a sezione variabile; - travi caricate sulla superficie laterale.

TRAVI AD ASSE RETTILINEO 10.2

Si è in grado di formulare le equazioni fondamentali del problema elastico per solidi unidimensionali ad asse rettilineo.

Le EQUAZIONI CINEMATICHE costituiscono la definizione delle componenti di deformazione in funzione degli spostamenti.

Nel vettore delle DEFORMAZIONI ci sono gli scorrimenti angolari,

la deformazione assiale, le curvature, e l'angolo unitario di torsione; mentre nel vettore degli SPORSTAMENTI ci sono le componenti ordinarie e le componenti generalizzate. Nella motrice di trasformazione cisano dei termini (+1 e -1) dovuti alle relazioni  $\frac{dv}{dz} = \gamma_y - \kappa_x$  e  $\frac{du}{dz} = \kappa_x + \gamma_y$ .

Il tutto si può scrivere in forma compatta  $\{q\} = [D] \{r\}$ . Si possono anche scrivere

$\{q\}$	$[D]$	$\{r\}$
$\gamma_x$	$\frac{d}{dz}$	$u$
$\gamma_y$	$\frac{d}{dz}$	$v$
$\epsilon_z$	$\frac{d}{dz}$	$w$
$\kappa_x$	$\frac{d}{dz}$	$\rho_x$
$\kappa_y$	$\frac{d}{dz}$	$\rho_y$
$\theta$	$\frac{d}{dz}$	$\rho_z$

$\frac{d}{dz}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dz} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{d}{dz} & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dz} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ N \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ p \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}$	$=$	<p>Le equazioni infinite di EQUILIBRIO. Nel vettore delle CARATTERISTICHE STATICHE figurano gli sforzi tangenziali, lo sforzo normale, i momenti flettenti, e il momento torcente. Nel vettore delle FORZE GENERALIZZATE ESTERNE figurano i carichi distribuiti ortogonali, assiale, e i momenti flettenti distribuiti e torcenti.</p> <p>L'operatore matriciale è il trasposto di quello precedente.</p>
----------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------	-----	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

In forma compatta  $[D]^* [Q] + \{r\} = \{f\}$

Le relazioni che legano le caratteristiche statiche con quelle deformative duali si possono presentare così in forma matriciale, o compatta  $\{r\} = [H]^{-1} \{q\}$ .

Applicando il teorema di Betti si ottiene il lavoro di deformazione per unità di lunghezza  $\frac{dL}{dz} = \frac{1}{L} \{q\}^T \{r\}$

Utilizzando l'operatore di Lancé si può sintetizzare il problema elastico della trave rettilinea così:

$\{r\}$	$[H]$	$\{q\}$
$\kappa_x$	$\frac{Lx}{GA}$	$T_x$
$\kappa_y$	$\frac{Ly}{GA}$	$T_y$
$\epsilon_z$	$\frac{1}{EA}$	$N$
$\rho_x$	$\frac{1}{EI_x}$	$M_x$
$\rho_y$	$\frac{1}{EI_y}$	$M_y$
$\rho_z$	$\frac{1}{GI_z}$	$M_z$

Queste relazioni si possono semplificare notevolmente se si considera il caso di trave ad asse rettilineo sollecitato nel piano. Per cui

$[L] \{r\} = -\{r\}$  per  $0 < z < l$   
 $[H][D] \{r\} = \{Q\}$  per  $z=0, l$   
 $\{r\} = \{r_0\}$  per  $z=0, l$



## LE STRUTTURE IPERSTATICHE: METODO DELLE FORZE 13

I sistemi di travi iperstatici sono determinati dal punto di vista statico, cioè da essi possono essere equilibrati da  $\infty^m$  diversi insiemi di forze reattive, essendo  $m$  il grado di iperstaticità. Si tratta quindi di individuare quell'unico insieme di forze reattive che, oltre all'equilibrio, implichi anche la CONGRUENZA, ovvero il rispetto dei vincoli interni ed esterni, nonostante le deformazioni indotte negli elementi strutturali.

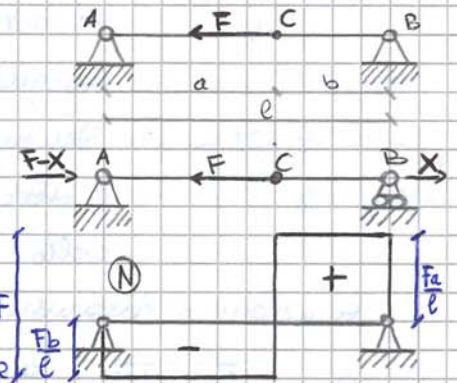
Il METODO DELLE FORZE consiste nell'eliminare  $m$  gradi di vincolo, così da ridurre la struttura in isostatica, e nell'applicare a tale sistema, oltre che le forze esterne, le reazioni vincolari conseguite esplicitate dai vincoli soppressi. Le  $m$  equazioni di congruenza impongono allora il rispetto delle condizioni cinematiche relative ai vincoli soppressi, e se risolte forniscono le  $m$  reazioni elementari esplicitate da tali vincoli, che sono dette INCOGNITE IPERSTATICHE.

Il problema sta nel svincolare la struttura in modo opportuno per ottenere lo schema isostatico su cui imporre le condizioni di congruenza. Normalmente è conveniente degradare i vincoli esterni, oppure inserendo delle cerniere nei punti di congiunzione di due o più travi, in modo da interrompere la continuità della struttura. Nel primo caso le equazioni di congruenza impongono l'annullamento degli spostamenti dei punti che sono sede delle reazioni iperstatiche, mentre nel secondo viene imposta la cosiddetta CONGRUENZA ANGOLARE, cioè un'uguale rotazione elastica a tutte le estremità delle travi.

### IPERSTATICITÀ ASSIALE 13.2

Si consideri questa trave soggetta ad  $F$  agente in  $C$ .

La trave resta iperstatica, perché sono sufficienti le coppie di reazioni  $H_A$  e  $H_B$  deinsieme a  $F$  costituiscono un sistema equilibrato. Si sostituisce un carrello in  $B$  alla cerniera e applicando l'incognita iperstatica  $X$  duale al grado di vincolo eliminato, ottenendo lo SCHEMA ISOSTATICO EQUIVALENTE. L'equazione



di congruenza deve esprimere l'assenza del vincolo soppresso, cioè che lo spostamento del carrello sia nullo  $w_B = \frac{X}{EA} l - \frac{F}{EA} a = 0$  dove il primo addendo esprime il contributo di  $X$ , mentre il secondo rappresenta quello di  $F$ . Si fa (implicitamente) uso del Principio di Sovrapposizione degli effetti, la forza  $X$  infatti genera una trazione su tutta la trave, mentre  $F$  genera una compressione su  $AC$ . Si ha  $X = F \frac{a}{l}$   $F - X = F \frac{b}{l}$  così che  $F$  viene sopportata dai due vincoli in ragione diretta delle reciproche distanze dal punto di applicazione.  $CB$  è sottoposto a trazione, mentre  $AC$  a compressione. Il diagramma  $\textcircled{N}$  mostra quindi una discontinuità nel punto di applicazione della forza.



CEDIMENTI VINCOLARI ANELASTICI 13.5

I cedimenti anelastici possono più propriamente essere denominati spostamenti imposti, si impone cioè uno spostamento predeterminato al vincolo stesso. Questo non solo funziona dei carichi e delle incognite iperstatiche, ma subisce la funzione esso stesso di sollecitazione esterna essendo un dato del problema. Nel caso in cui vengono imposti degli spostamenti infinitesimi ai vincoli di un sistema iperstatico, questo si ridotta subendo solo rototraslazioni rigide; perciò non si sviluppano reazioni vincolari e caratteristiche interne di sollecitazione.

Si può affermare che gli spostamenti imposti ad un sistema di travi iperstatico, generano reazioni e inflessioni nelle travi: ciò è dovuto al grado scambievolmente del vincolo, il quale si oppone alla deformazione del sistema. Il sistema di travi si dovrà adattare subendo delle dilatazioni o retrazioni. La soluzione è determinabile solo nell'ambito delle cinematiche del corpo deformabile.



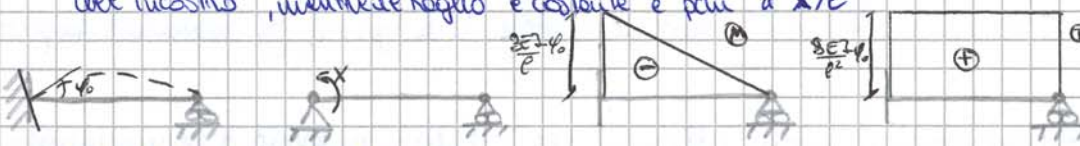
Consideriamo una trave incastata e appoggiata imponendo lo spostamento verticale  $\eta_0$  dell'incastro. Lo schema iperstatico equivalente è quello di una trave doppiamente appoggiata. Tale schema muta solo rigidamente in seguito allo spostamento  $\eta_0$ .

L'equazione di congruenza considerata sia la rotazione elastica indotta dal momento  $X$  che la rotazione  $\eta_0/l$ .  $\varphi_A = -\frac{Xl}{3EI} + \frac{\eta_0}{l} = 0$  da cui  $X = \frac{3EI}{l^2} \eta_0$  per cui il momento reattivo dell'incastro è proporzionale a  $\eta_0$ . Il diagramma del momento è lineare con massimo all'incastro, mentre il taglio è costante e pari a  $-X/l$ .

Un diverso schema cinematico equivalente potrebbe essere una mensola, con reazione  $V_A$  all'estremità determinabile tramite l'equazione di congruenza  $v_B = \eta_0 - \frac{V_B l^3}{3EI} = 0$  da cui  $V_B = \frac{3EI}{l^3} \eta_0$ .

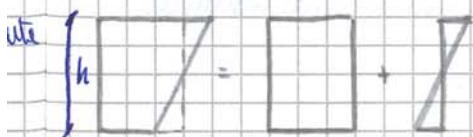
Si può anche imporre allo schema di trave incastata e appoggiata una rotazione  $\eta_0$  dell'incastro.

Considerando lo stesso schema iperstatico di prima la condizione di congruenza angolare è  $\varphi_A = \frac{Xl}{3EI} - \eta_0 = 0$  da cui  $X = \frac{3EI}{l} \eta_0$ . Anche qui il diagramma  $M$  è lineare con massimo all'incastro, mentre il taglio è costante e pari a  $X/l$ .



DISTORSIONI TERMICHE 13.6

Sono le deformazioni indotte nelle travi da variazioni di temperatura sull'altezza  $h$ . Ciascuna variazione lineare di temperatura è scomponibile in una variazione termica uniforme



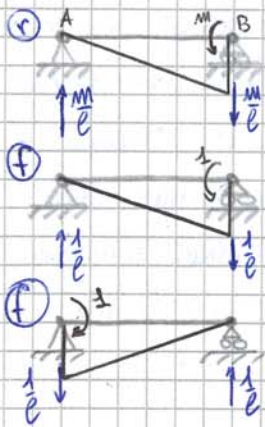
e una variazione termica a falda. Nell'ambito di piccoli spostamenti sono possibile usare il Principio di Sovrapposizione degli effetti. Una variazione termica uniforme  $\Delta T$ , agente su di un corso di trave infinitesimo di lunghezza

$dz$  induce un allungamento  $dw = \alpha \Delta T dz$  con  $\alpha$ : coefficiente di dilatazione termica del materiale.

Si produce la dilatazione termica  $\epsilon_T = \frac{dw}{dz} = \alpha \Delta T$ . La variazione termica a falda induce allungamenti delle fibre superiori e accorciamenti di quelle inferiori, così che si produce una



DETERMINAZIONE degli spostamenti elastici nelle strutture iperstatiche 16.2



Trave appoggiata soffermata da un momento concentrato. Si propone di calcolare la rotazione elastica dello stesso estremo. Per questo il sistema fittizio è costituito dalla stessa trave soffermata da un momento concentrato unitario, equivalente rispetto a quello reale. Si ha  $M^r(z) = \frac{M}{l} z$   $M^f(z) = \frac{z}{l}$  per cui l'applicazione del PLV fornisce  $1 \times \varphi_B = \int_0^l \frac{\pi^f M^r}{EI} dz$  da cui  $\varphi_B = \frac{Ml}{3EI}$ . Si propone poi di determinare la rotazione elastica dell'estremo opposto rispetto a quella soffermata. Dovremo quindi considerare un nuovo sistema fittizio. Ora invece  $M^f(z) = \frac{l-z}{l}$  per cui applicando il PLV  $1 \times \varphi_A = \int_0^l \frac{\pi^f M^r}{EI} dz$  significa che  $\varphi_A = \frac{Ml}{6EI}$ .

Con modi analoghi si può trovare anche l'abbassamento in mezzanca.

RISOLUZIONE delle STRUTTURE UNA VOLTA IPERSTATICHE 16.3

Nel caso in cui la struttura sia una volta iperstatica è possibile scrivere l'equazione di congruenza utilizzando lo schema visto prima. Si tratta di uguagliare lo spostamento elastico prodotto dai carichi esterni e dalla reazione iperstatica a zero o ad una quantità diversa da zero, a seconda che il vincolo sia rigido o cedevole.

Una volta scelta la struttura iperstatica principale si risolvono due schemi: ① costituito dall'iperstatica principale soffermata dai carichi esterni ② costituito dall'iperstatica principale soffermata dalla sola reazione iperstatica unitaria. A questo punto il sistema delle forze (reale) è costituito dallo schema ①, mentre quello degli spostamenti (fittizio) è costituito dalla sovrapposizione dello schema ② con lo schema

① moltiplicato per l'incognita iperstatica X. Si fornisce quindi  $1 \times \eta = \frac{1}{EI} \int_S M^1 (M^0 + X M^2) ds$ . Nel caso di vincolo rigido si pone  $\eta = 0$  e di vincolo cedevole  $\eta = \eta_0$  essendo  $\eta_0$  l'entità nota del cedimento.

Nel caso di cedimento elastico l'equazione di congruenza si ottiene uguagliando il secondo membro a  $-\frac{X}{k}$ . In tutti i casi si ottiene un'equazione algebrica lineare in X.

Caso di vincolo cedevole elasticamente si ha  $\int_S M^0 M^1 ds + X \int_S (M^2)^2 ds = -\frac{X EI}{k}$  da cui X.

Caso di vincolo cedevole anelasticamente si ottiene  $X = -\frac{\int_S M^0 M^1 ds - \eta_0 EI}{\int_S (M^2)^2 ds}$

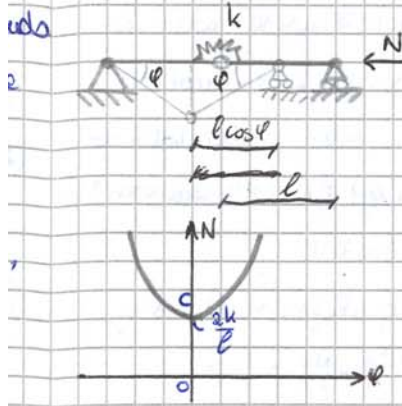
Caso di vincolo rigido  $X = -\frac{\int_S M^0 M^1 ds}{\int_S (M^2)^2 ds}$

FORMULA di SIMPSON

$$\int_A^B \pi_1 \pi_0 = \frac{AB}{6} (\pi_1(A) \pi_0(A) + 4(\pi_1(mets) \pi_0(mets)) + \pi_1(B) \pi_0(B)) \text{ con i SEGNI dei MOMENTI}$$



SISTEMI MECCANICI DISCRETI ad UN GRADO di LIBERTÀ 17.2



Consideriamo il sistema formato da due aste rigide collegate da uno cerniera rotazionale elastica di rigidezza  $k$ , e vincolate da una cerniera e un carrello; il sistema è sollecitato da  $N$ . L'energia potenziale totale del sistema vale

$$W(\varphi) = \frac{1}{2} k (2\varphi)^2 - 2Nl(1 - \cos\varphi)$$

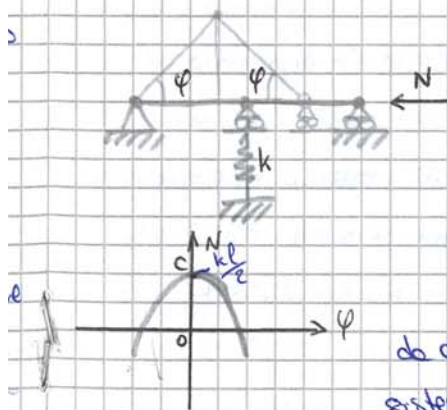
Le condizioni di equilibrio si individuano imponendo la stazionarietà dell'energia potenziale  $W'(\varphi) = 0 = 4k\varphi - 2Nl\sin\varphi$  da cui  $N = \frac{2k\varphi}{l\sin\varphi}$  che lega sollecitazione ( $N$ ) e configurazione deformata ( $\varphi$ )

lungo il ramo di equilibrio ( $\leftarrow$ ), il ramo ( $N, \varphi$ ) è diviso in due settori dalla curva; la parte superiore rappresenta le condizioni di ~~instabilità~~ di **INSTABILITÀ**,

mentre la parte del settore inferiore rappresenta le condizioni ~~instabilità~~ di **STABILITÀ**. Sono quindi possibili, partendo dalla configurazione iniziale, percorrere in modo stabile il segmento  $cc'$ , per poi deviare su uno dei due rami di equilibrio; si potrebbe proseguire sull'asse verticale oltre  $c$ , ma in questo caso l'equilibrio risulta instabile. Il comportamento globale del sistema è di tipo **RIGIDO-INCRODANTE**, perché affinché l'aumento di deformazione per un ulteriore aumento del carico esterno. Tale comportamento non-lineare post-critico viene detto **STABILE**.

Per verificare la stabilità del ramo post-critico si può considerare la concavità del potenziale, quindi le derivate d'ordine superiore in  $\varphi=0$   $W'(0) = W''(0) = W'''(0) = 0$   $W^{(4)}(0) = 4k > 0$

Il calcolo del carico critico  $N_c$  si può effettuare anche tramite il **METODO DELL'EQUILIBRIO DIRETTO**, uguagliando il momento **INSTABILIZZANTE** (forno)  $M_i = Nl\sin\varphi \approx Nl\varphi$  e il momento **STABILIZZANTE** (molla)  $M_s = 2k\varphi$  da cui  $N_c = \frac{2k\varphi}{l\sin\varphi}$



Consideriamo ora un sistema costituito da due aste rigide collegate da una cerniera e vincolate agli estremi da una cerniera e due carrelli, poggando quello intermedio su un suolo elastico.

$$L'energia potenziale vale W(\varphi) = \frac{1}{2} k (l\sin\varphi)^2 - 2Nl(1 - \cos\varphi)$$

Le condizioni di equilibrio si ottengono imponendo la stazionarietà del potenziale  $W'(\varphi) = 0 = l\sin\varphi(k\cos\varphi - 2N)$

da cui  $N = \frac{k\varphi}{2} \cos\varphi$ . In questo esempio il comportamento globale del sistema risulta essere di tipo **RIGIDO-SOFTENING**, perché ad un aumento

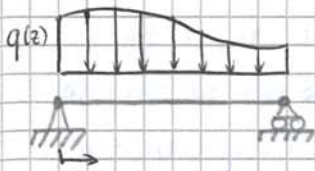
di deformazione corrisponde una diminuzione del carico esterno. Tale comportamento post-critico viene detto **INSTABILE**. Per verificare l'instabilità del ramo post-critico si considera la concavità del potenziale, quindi le derivate d'ordine superiore in  $\varphi=0$   $W'(0) = W''(0) = W'''(0) = 0$   $W^{(4)}(0) = -3kl^2$   $W^{(4)}(0) < 0$ .

Anche in questo caso la determinazione del carico critico  $N_c$  si può fare uguagliando il

$$M_i = Nl\sin\varphi \approx Nl\varphi \quad e \quad M_s = \frac{1}{2} kl^2 \sin\varphi \cos\varphi \approx \frac{1}{2} kl^2 \varphi \quad da \quad cui \quad N_c = \frac{kl^2}{2}$$



TRAVI RETTILINEE ELASTICHE DIFFESA 17.4



Consideriamo trave snella inestensibile deformabile a flessione, vincolata da una cerniera e un cardello, sollecitata da  $N$  e da un carico distribuito  $q(z)$ .

L'energia potenziale totale in una configurazione deformata  $v(z)$  vale

$W_p = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dz - Nw - \int_0^l q(z)v(z) dz$  Notando che lo spostamento del punto d'applicazione di  $N$  è  $w = \int_0^l (1 - \cos \theta) dl$  che sviluppando in serie  $w \approx \frac{1}{2} \int_0^l v'^2 dz$ . Quindi l'energia potenziale si può esprimere  $W = \int_0^l \left[ \frac{1}{2} (EI v''^2 - N v'^2) - qv \right] dz$ . Impo-  
siendo la stazionarietà di  $W$

si ha  $\delta W = \int_0^l (EI v'' \delta v'' - N v' \delta v' - q \delta v) dz = 0$  che  $\delta v$  è detta PERTURBAZIONE. Integrando si ha un'equazione che deve valere per ogni  $\delta v$ , per cui risultano soddisfatte:

$EI v'''' + N v'' - q = 0$  si dice EQUAZIONE DELLA LINEARITÀ CON EFFETTI DEL SECONDO ORDINE, e a meno di  $N v''$  coincide con  $\frac{d^4 v}{dz^4} = \frac{q}{EI}$ . Per la trave appoggiata si hanno le condizioni al contorno  $v(0) = v(l) = 0$  da implicare  $\delta v = 0$  agli estremi, e quindi si soddisfano  $(EI v'' + N v') \delta v = 0$  per  $z=0, l$ . Dall'altro lato,  $v''$  è nulla agli estremi poiché nelle cerniere è nullo il momento flettente, quindi  $(EI v''') \delta v = 0$  per  $z=0, l$  risulta soddisfatta.

Un modo alternativo per ricavare l'equazione della linea elastica con effetti del secondo ordine è quello di considerare l'equilibrio di un elemento elementare deformato. L'equilibrio verticale dà  $\frac{dV}{dz} = -q$ ; quello alla rotazione dà  $V = \frac{dM}{dz} - N \frac{dV}{dz}$  che diventa  $\frac{d^2 M}{dz^2} - N \frac{d^2 V}{dz^2} + q = 0$  da cui, considerando  $\frac{d^2 V}{dz^2} = \frac{q}{EI}$  si ricava  $EI v'''' + N v'' - q = 0$ . Se consideriamo  $q$  costante l'integrazione di E.d.L.e.c.E.d.S.O. si presenta  $v(z) = A \cos \alpha z + B \sin \alpha z + Cz + D + \frac{qz^2}{2N}$  dove  $\alpha^2 = \frac{N}{EI}$ . A, B, C, D si determinano con le condizioni  $v(0) = v(l) = EI v''(0) = EI v''(l) = 0$  e si ottiene l'equazione. Notando che per  $\alpha l \rightarrow \pi$  cioè per  $N \rightarrow N_c = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$  si ha  $\sin \alpha l \rightarrow 0$  e quindi il deformato tende all'infinito. Ciò significa che la RIGIDEZZA FLESSIONALE di una trave compressa è inferiore a quella dello stesso trave non sollecitata a compressione; tale rigidità diventa persino nulla quando lo sforzo di compressione uguaglia il suo valore critico  $N_c$ .

Nel caso in cui  $q=0$  l'E.d.L.e.c.E.d.S.O. si semplifica  $EI v'''' + N v'' = 0$  che integrando si ha  $v(z) = A \cos \alpha z + B \sin \alpha z + Cz + D$  e imponendo le equazioni al contorno si ha un sistema che ammette soluzioni diverse se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo, cioè quando  $\sin \alpha l = 0$ .

Alle medesime soluzioni si può giungere imponendo che in ciascuna sezione della trave il momento instabilizzante  $M_i = Nv$  sia uguale al momento stabilizzante  $M_s = -EI \frac{d^2 v}{dz^2}$  per cui  $M_i = M_s$   $v'' + \alpha^2 v = 0$  che derivata due volte coincide con  $EI v'''' + N v'' = 0$ . L'integrale generale di (\*) è  $v(z) = A \cos \alpha z + B \sin \alpha z$  e dovendo essere  $v(0) = v(l) = 0$  si ha  $A=0$  e  $\sin \alpha l = 0$ , per qualsiasi valore di  $B$ . Dalla condizione  $\sin \alpha l = 0$  si ottiene la successione degli autovalori del problema  $\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$  cioè  $N_{c,n} = n^2 \pi^2 \frac{EI}{l^2}$ . Ad ogni autovettore  $N_{c,n}$  corrisponde un'autofunzione  $v_n(z) = B \sin \alpha_n z$  che rappresenta il modo critico di deformazione per quella forza. Tale deformato è costituita da un numero  $m$  di





## CONSIGLI PER L'ESAME

- impara a fare da Dio le sostitute e ipostatiche, trova il metodo che ti piace di più, ma se riesci a far bene lo scritto sei quasi a posto (io ho preso 30 allo scritto)  
All'esame ~~scritto~~ (io avevo INTERVISTA e non l'esercitazione) chiedi gli errori dello scritto e poi fa domande di teoria su verifiche di esistenza o simili momenti storici, d'imitazione, cerchi di Rohr. - Cmq con lui l'orale non è impossibile (io ho "confermato" con un ps' di maggioranza mita il 30")

BUONA FORTUNA



RIPASSO PRE-ESAME

MOMENTO STATICO  $S_x, S_y$

$S_x$  di una struttura composta da più figure  $S_x = S_{x_1} + S_{x_2} + \dots$  Dati assi a piacere

Per figure semplici (rettangoli, cerchi)  $S_{x_i} = A_i \cdot y_G$   $S_{y_i} = A_i \cdot x_G$

Trovato  $S_x$  e  $S_y$  know  $y_G$  e  $x_G$   $y_G = \frac{S_x}{A}$   $x_G = \frac{S_y}{A}$  quindi assi baricentrici

MOMENTI DI INERZIA  $I_x, I_y, I_{xy}$

$I_x$  di una struttura composta da più figure  $I_x = I_{x_1} + I_{x_2} + I_{x_3} + \dots$

Per i rettangoli  $I_{x_G} = \frac{bh^3}{12}$   $h$  è la misura  $\perp$  all'asse  $x$  (baricentrici)

FORMULE DI TRASPOSIZIONE

$$I_{x_G} = I_{x_{G_1}} + A_1 \cdot y_{G_1}^2 + I_{x_{G_2}} + A_2 \cdot y_{G_2}^2 + \dots = I_{x_1} + I_{x_2} + \dots$$

$$I_{y_G} = I_{y_{G_1}} + A_1 \cdot x_{G_1}^2 + I_{y_{G_2}} + A_2 \cdot x_{G_2}^2 + \dots$$

$$I_{xy} = I_{x_{G_1}y_{G_1}} + A_1 \cdot x_{G_1} \cdot y_{G_1} + I_{x_{G_2}y_{G_2}} + A_2 \cdot x_{G_2} \cdot y_{G_2} + \dots$$

figura completa

Se  $\xi, \eta$  baricentrici  $I_{xy} = 0$  Se  $\xi, \eta$  centrali d'inertia  $I_{xy} = 0$

Una volta trovati  $I_{x_G}, I_{y_G}, I_{xy}$  know  $\theta$  per cui know gli assi  $\xi, \eta$  centrali d'inertia

$$\theta = \frac{1}{2} \arctg \left( \frac{2 I_{xy}}{I_{y_G} - I_{x_G}} \right) \text{ cerchio invarianti principali d'inertia } I_{\xi} \text{ e } I_{\eta} (I_{\xi\eta} = 0)$$

$$\left. \begin{matrix} I_{\xi} \\ I_{\eta} \end{matrix} \right\} \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(I_x - I_y)^2}{4} + I_{xy}^2} \quad \begin{matrix} \text{se } I_x > I_y & I_{\xi} > I_{\eta} \\ \text{se } I_x < I_y & I_{\xi} < I_{\eta} \end{matrix}$$

CON I CERCHI DI MOHR si propone di esprimere i momenti d'inertia rispetto ad un sistema di asse

ruotato. Noti  $A, \xi, \eta, I_{\xi}, I_{\eta}$  cerchiamo la circonferenza che esprime tutte le coppie  $I_x, I_y, I_{xy}$

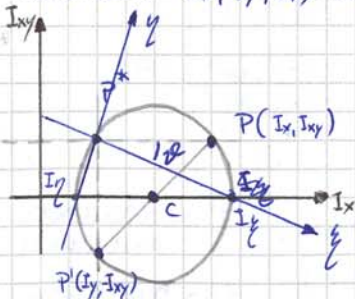
$$\left. \begin{matrix} I_x = I_{\xi} \cos^2 \theta + I_{\eta} \sin^2 \theta \\ I_y = I_{\eta} \cos^2 \theta + I_{\xi} \sin^2 \theta \\ I_{xy} = \frac{I_{\xi} - I_{\eta}}{2} \sin 2\theta \end{matrix} \right\} \text{ possono essere scritte } \left\{ \begin{matrix} I_x = \frac{I_{\xi} + I_{\eta}}{2} + \frac{I_{\xi} - I_{\eta}}{2} \cos 2\theta \\ I_y = \frac{I_{\xi} + I_{\eta}}{2} - \frac{I_{\xi} - I_{\eta}}{2} \cos 2\theta \\ I_{xy} = \frac{I_{\xi} - I_{\eta}}{2} \sin 2\theta \end{matrix} \right.$$

dopo due equazioni si deducano le equazioni parametriche di una circonferenza nel piano  $(I_x, I_{xy})$

con  $C \left( \frac{I_{\xi} + I_{\eta}}{2}, 0 \right)$  e  $R = \frac{I_{\xi} - I_{\eta}}{2}$

OPPURE (al contrario)

Noti  $I_x, I_y, I_{xy}$  rispetto a due assi generici  $\rightarrow$  determino gli assi e i momenti principali d'inertia



trovo  $P, P'$ . traccio  $\overline{PP'}$ , trovo  $C$  eaggio  $\overline{CP}$ , trovo CIRCONFERENZA  
 traccio parallelo a  $I_x, I_{xy}$  per  $P$  e  $P'$  trovo polo  $P^*$ . Da  $C$  traccio  
 assi passanti per i punti della circonferenza in cui  $I_{xy} = 0$  (intersec.  
 $I_x$  con circ) trovo assi princ. d'inertia e li formo tra  $\overline{PP'}$  e  $\overline{P''P'''}$



LEGGI DI TRASFORMAZIONE DELLO TENSORE DEFORMAZIONE PER ROTAZIONE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO

Considerando 3 direz. ortogonali  $x, y, z$

$$[E^*] = \begin{pmatrix} E_{11} & \frac{1}{2} \gamma_{12} & \frac{1}{2} \gamma_{13} \\ E_{22} & \frac{1}{2} \gamma_{21} & \frac{1}{2} \gamma_{23} \\ E_{33} & \frac{1}{2} \gamma_{31} & \frac{1}{2} \gamma_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |m_1\rangle \\ |m_2\rangle \\ |m_3\rangle \end{pmatrix} [E] \begin{pmatrix} \langle m_1| \\ \langle m_2| \\ \langle m_3| \end{pmatrix}$$

Per trovare le direzioni principali si ha l'equazione agli autovalori, in modo che ci siano solo dilatazioni e non scossoni angolari  $([E] - [I]E_m)\{m\} = 0$

$$\begin{pmatrix} (E_x - E_m) & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & (E_y - E_m) & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & (E_z - E_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es soluzione ovvia

una più accettabile perché i coseni direttori devono rispondere alla relazione di NORTRICITA'  $m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1$

Il det si deve annullare, e si arriva all'equazione  $E_m^3 - J_I E_m^2 - J_{II} E_m - J_{III} = 0$  dove

$J_I, J_{II}, J_{III}$  sono chiamati INVARIANTI DELLA DEFORMAZIONE

$J_I = E_x + E_y + E_z$  TRACCIA DEL TENSORE  $J_{II} = - \begin{vmatrix} E_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & E_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E_z & \\ & E_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E_y & \\ & E_z \end{vmatrix}$  somma degli opposti dei det. dei minori principali

$J_{III} = \det [E]$

$E_1, E_2, E_3$  saranno gli autovalori, così che siano ammessi i tre autovettori  $\{m_1\}, \{m_2\}, \{m_3\}$ . Gli autovalori rappresentano le tre dilatazioni principali

$E_1 \neq E_2 \neq E_3$  3 direz. ortogonali

Il tensore delle deformazioni, nel sistema di ref. principale è diagonale  $\begin{vmatrix} E_1 & & \\ & E_2 & \\ & & E_3 \end{vmatrix}$  essendo nulli gli scossoni angolari

$E_1 = E_2 \neq E_3$  stato deformativo piano

$E_1 = E_2 = E_3$  stato deformativo isotropico

$J_I = E_1 + E_2 + E_3$   $J_{II} = -(E_1 E_2 + E_1 E_3 + E_2 E_3)$   $J_{III} = E_1 E_2 E_3$   $J_I$ : dilatazione cubica

EQUAZIONI DI COMPATIBILITÀ

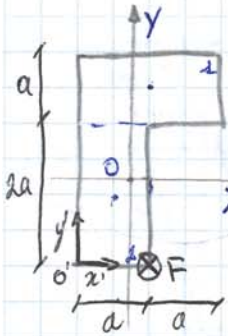
Le componenti della deformazione sono legate da tre relazioni differenziali, che ne limitano la scelta

INDIPENDENZA

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \end{aligned}$$



Esercizio sulle aree



$a = 12 \text{ cm}$

Trovare max valore di  $F$  affinché non superi  $2 \text{ N/mm}^2 = 2 \text{ MPa}$

1) Trovare sistema principale concentrico di tutto d'inerzia

G: baricentro

diviso in 2 rett. uguali

$$x_G = \frac{Sx}{A} = \frac{S_{y_1} + S_{y_2}}{A} = \frac{a \cdot 2a \cdot \frac{a}{2} + a \cdot 2a \cdot \frac{3a}{2}}{2 \cdot a \cdot 2a} =$$

$$y_G = \frac{Sx}{A} = \frac{S_{x_1} + S_{x_2}}{A} = \frac{a \cdot 2a \cdot \frac{3a}{2} + a \cdot 2a \cdot a}{2 \cdot a \cdot 2a} = \frac{3a^3 + 2a^3}{4a^2} = \frac{5a^3}{4a^2} = \frac{5}{4}a = 9 \text{ cm}$$

2) Verifico che sia CENTRALE d'INERZIA

$$I_{xy} = (0 + A_1 \cdot y_1 \cdot x_1) / I_{xy_1} + (0 + A_2 \cdot y_2 \cdot x_2) / I_{xy_2} = 2a^2 \cdot \frac{5}{4}a \cdot \frac{a}{2} + 2a^2 \cdot (-\frac{a}{4}) \cdot (-\frac{a}{4}) = \frac{5}{8}a^4 + \frac{a^4}{8} = \frac{3}{4}a^4 \neq 0$$

NON È IL SIST. PRINCIPALE → Trovo il principale

3)  $\theta_0 = \frac{1}{2} \arctg \left( \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \right)$

→ calcolo  $I_y, I_x$

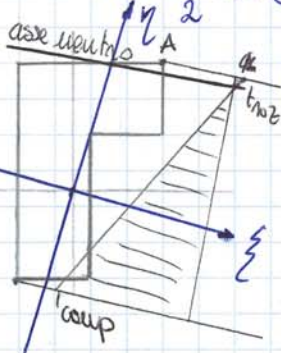
$$I_x = I_{xG} + A(y_G)^2 \quad I_{x_1} = I_{xG} + A(y_G)^2$$

x RETTANGOLO  $I_{xG} = \frac{b \cdot h^3}{12}$

$$I_x = \frac{2a \cdot a^3}{12} + a \cdot 2a \left( \frac{5a}{4} \right)^2 + \frac{a \cdot (2a)^3}{12} + a \cdot 2a \left( -\frac{a}{4} \right)^2 = \frac{a^4}{6} + \frac{50a^4}{168} + \frac{8a^4}{6} + \frac{a^4}{8} = \frac{49}{12}a^4 = 24672 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{a \cdot (2a)^3}{12} + a \cdot 2a \left( \frac{a}{4} \right)^2 + \frac{2a \cdot a^3}{12} + a \cdot 2a \left( -\frac{a}{4} \right)^2 = \frac{8a^4}{12} + \frac{a^4}{8} + \frac{a^4}{12} + \frac{a^4}{8} = a^4 = 20736 \text{ cm}^4$$

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \arctg \left( \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \right) = -12.97^\circ \rightarrow \text{quindi giro in senso ORARIO}$$



$(\xi, \eta)$ : sist. dir. princ. d'inerzia

4) Trovo il diagramma delle tensioni

↳  $I_y, I_\xi \rightarrow$  raggi ellisse centr. zero → Trovo asse neutro → Trovo diagramma qualitativo → Individuo il mio punto d'interesse → coord. punto in  $(\eta, \xi) \rightarrow \dots$

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot x = \frac{N}{A} \left( \pm 1 + \frac{x \cdot x_0}{p_y^2} + \frac{y \cdot y_0}{p_x^2} \right)$$

eg. asse NEUTRO

(pensando che  $x = \xi$  e  $y = \eta$ )

$$p_y^2 = \frac{I_y}{A} \quad p_x^2 = \frac{I_x}{A}$$

Siccome  $I_x > I_y$

$$I_x > I_y \rightarrow I_\xi^2 \rightarrow I_\eta^2$$

$$I_\xi = 88256 \text{ cm}^4$$

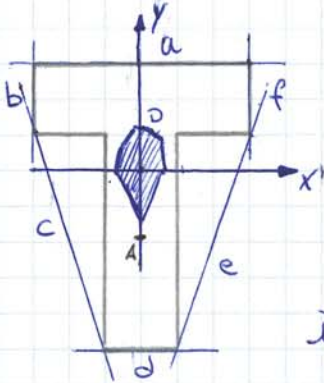
$$I_\eta = 17153 \text{ cm}^4$$

$$I_\xi \left\{ \begin{aligned} &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \\ &I_\eta \end{aligned} \right.$$



ESERCIZIO NOCCOLO CENTRALE D'INERZIA

$A = 24 \text{ dm}^2$   $I_x = 136 \text{ dm}^4$   $I_y = 410 \text{ dm}^4$   $P_x = 2.380 \text{ dm}$   
 $P_y = 4.133 \text{ dm}$



[dm]

m) asse neutro  $1 + \frac{x x_p}{P_y^2} + \frac{y y_p}{P_x^2} = 0$

$x_p = u P_y^2$   $y_p = v P_x^2$   
 queste coordinate danno un punto del bordo del noccolo centrale d'inerzia

n)  $1 + ux + vy = 0$  (1)

1) Quanti lati ha?  $\rightarrow$  u° di fg non secanti i lati

2) equazioni delle rette

a)  $y = 3$  la porto nella forma (1)

$y - 3 = 0$   $\frac{y-3}{3} = \frac{0}{3}$   $\frac{y}{3} - 1 = 0$   $1 - \frac{1}{3}y = 0$

$v_A = -\frac{1}{3}$   $u_A = 0$

L'angolo  $x_A = 0$   $y_A = -\frac{17}{9}$

b)  $x = -3$

$x + 3 = 0$   $\frac{1}{3}x + 1 = 0$   $u = \frac{1}{3}$   $v = 0$

$x_B = 8.69$   $y_B = 0$

$\downarrow$  e così avanti

$\frac{1.8}{0.9} = \frac{17}{9}$   
 $\frac{18-2}{9} = \frac{17}{9}$   
 $\frac{16}{9} = \frac{17}{9}$

d)  $y = -5$

$y + 5 = 0$   $\frac{y}{5} + 1 = 0$   $u = 0$   $v = \frac{1}{5}$

$x_D = 0$   $y_D = \frac{1}{5}$