



Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1439A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Ottone

MATERIA: Meccanica del Volo, Prof. Quagliotti

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Corso di Meccanica del volo Prof. Quagliotti Fulvia Anno 2014/2015

Meccanica del volo del 30-09-2014

Terra circondata da gas. Di questo circa il 21% è costituito da ossigeno e la % di gas che compone questa massa gassosa è costante fino a circa 21 km dalla terra. Quindi fino a 21 km la % di ossigeno rimane tale e quale. La pressione parziale però della massa di gas di ciascun componente diminuisce, e questo vuol dire che all'interno dei nostri polmoni diventa sempre più difficile avere lo scambio osmotico di gas nei polmoni.

Dopo i 21km la % di O diminuisce ; passa dal 21% al circa 17%. Dopo 50 km la % scende molto rapidamente, più o meno linearmente, fino al 7% fino a 100 km dalla superficie terrestre. Tutto questo è dovuto al fatto che la pressione parziale dell'ossigeno diminuisce nella prima parte e che poi questo ambiente diventa sempre più rarefatto. Quindi le molecole dei gas sono sempre più lontane tra di loro e quindi ci sono problemi per la sopravvivenza. (tutto riportato in mmHg perché medici usano questo tipo di unità di misura).

Atmosferich pressure pag 2

Aumentano la quota di volo la pressione diminuisce ma è una diminuzione non lineare, è logaritmica. Esempi di variazione di pressione:

-Da 0 a 3000 m si passa da 760 mmHg a 228 mmHg;

-Da 3000 a 6000 m si va a 173 mmHg;

-Da 12000 a 15000 m si arriva a 53 mmHg (al livello del mare 760mmHg=1013,25 mbar = 101325KPa);

La pressione del sangue è di circa 150 mmHg , così al di sotto di questo valore è difficile respirare.

Per sopravvivere a quote elevate occorre allenamento: vivendo a 3000 m progressivamente il numero di globuli rossi aumenta, di conseguenza aumenta l'emoglobina e così anche se lo scambio è minore ma la quantità di particelle che portano l'ossigeno diventa maggiore e così si può sopravvivere.

- a una quota di 5500 m la pressione parziale dell'ossigeno all'interno dei nostri polmoni diventa metà. La pressione del sangue al livello del mare è:

$$(760-47) \times 0,21 = 150 \text{ mmhg}$$

C'è il meno 47 perché al livello dei nostri polmoni per far funzionare il tutto esiste un po' d'acqua ed è la pressione dell'acqua. A 5500 metri invece abbiamo:

$$(380-47) \times 0,21 = 69 \text{ mmhg}$$

Mentre a 19000 metri (63000 ft) siamo a 47mmhg e così la pressione parziale dell'ossigeno dentro agli alveoli è zero. Quindi c'è un problema nell'ambiente in cui dobbiamo operare.

Grafico dell'andamento della temperatura e della densità(pdf atmosfera)

Grafico della densità e della temperatura in funzione della quota.

anche dare problemi alla circolazione. Quindi le persone in volo ad alta quota hanno bisogno di avere ossigeno e di avere il corpo protetto altrimenti ci sono i problemi di sopra.

- Si definiscono 4 zone dell'atmosfera che sono in funzione del comportamento fisiologico della persona che si trova in quella zona. Possibile domanda di esame (l'anno prima l'ha chiesto):

- Indifferente: fino a 2500 m; se voliamo con ultra leggero non ci sono problemi. Ci sono giusto dei sistemi di condizionamento per il caldo o di riscaldamento per il freddo.

- Zona di compensazione completa: 2500m a 3800 m; in buona salute e un poco allenati non succede niente. Altrimenti si sente qualche fastidio.

- Zona di compensazione incompleta: da 3800 a 9100 m; in questa zona possono insorgere i sintomi dell'ipossia. Quindi se si vuole volare qui è necessario utilizzare le maschere di ossigeno. Quindi bisogna aumentare progressivamente la pressione dell'ossigeno all'aumentare della quota. Occorre pressurizzare la fusoliera.

- Zona mortale: sopra i 9100m; serve cabina pressurizzata. Il sangue bolle a 17400 m quindi occorre cabina. Velivolo da combattimento ha casco mentre quelli civili sono pressurizzati. I militari se avessero una bombola pressurizzata esploderebbe se colpita, ecco perché hanno solo il casco.

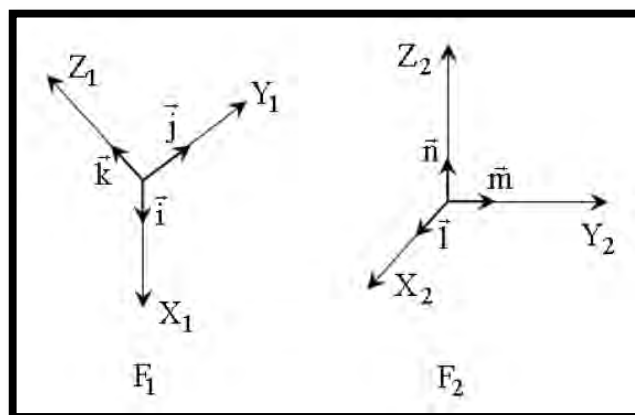
Nello spazio non ci sono problemi di ipossia o emboli in quanto tutto è pressurizzato e l'ambiente interno è controllato. Le soyuz all'interno hanno la pressione al valore del livello del mare mentre le navicelle apollo usavano ossigeno puro ad 1/3 della pressione atmosferica al livello del mare. Problema di quest'ultimo è l'alta infiammabilità del gas.

-Capitolo 1

Per affrontare il problema noi facciamo delle semplificazioni. Ipotizziamo che il velivolo sia un corpo rigido, quindi non si considerano fenomeni aeroelastici di nessun tipo. In questo modo la prima e seconda equazione cardine della meccanica, considerando un sistema inerziale diventano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = m \cdot \left(\frac{d\vec{V}}{dt} \right)_{F_I} \\ \vec{M} = \left(\frac{d\vec{H}}{dt} \right)_{F_I} \end{array} \right.$$

Questo vale in forma vettoriale e in un sistema di riferimento inerziale (H momento angolare; momento rispetto al baricentro della quantità di moto).



Di seguito si riporta la sequenza per ruotare la terna in modo da allinearla alla seconda. Ecco come si procede:

- 1st rotation (ψ): positive rotation about Z_2 (anti-clockwise), so that an intermediate frame is defined $F_2' = (X_2', Y_2', Z_2' \equiv Z_2)$ with unit vectors $(\vec{i}', \vec{m}', \vec{n}' = \vec{n})$.
- 2nd rotation (Θ): about Y_2' of F_2' . Another intermediate frame is defined $F_2'' = (X_2'', Y_2'' \equiv Y_2', Z_2'')$ with unit vectors $(\vec{i}'' = \vec{i}, \vec{m}'' = \vec{m}', \vec{n}'')$.
- 3rd rotation (Φ): about $X_2'' \equiv X_1$ that eventually aligns F_2 to F_1 .

- la prima rotazione Ψ sarà una rotazione positiva attorno all'asse Z_2 (antiorario) finché non ottengo una terna intermedia F_2' con assi e versori scritti sopra dove n' coincide con n .

- la seconda rotazione Θ è intorno all'asse Y_2' e ruota fino a definire una nuova terna che sarà F_2'' . Ruoterò in modo tale che il nuovo versore i'' (corrispondente all'asse X_2'') coincida con il versore i dalla terna F_1 . Così due assi saranno coincidenti a questo punto.

- la terza rotazione Φ che sarà attorno ad $X_2'' = X_1$ e questa allinea la terna F_2 a F_1 .

In pratica si applicano le rotazioni al sistema F_2 per farlo allineare al sistema F_1 . Sistema F_2 è di arrivo mentre il sistema F_1 è di partenza.

- i termini mancanti sono il seno dell'angolo di rotazione. Un seno ha un meno per quello che precede l'angolo per cui si ruota (che segue: z,,x,y,z,x...).

- sono ortogonali e siccome sono ortogonali la trasposta coincide con l'inversa.

Queste sono regole generiche. Applicandola a tutte le rotazioni e facendone la trasposta si ha:

$$\begin{aligned}
 [\Psi] &= \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & [\Psi]^{-1} &= \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 [\Theta] &= \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & \sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix} & [\Theta]^{-1} &= \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix} \\
 [\Phi] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} & [\Phi]^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

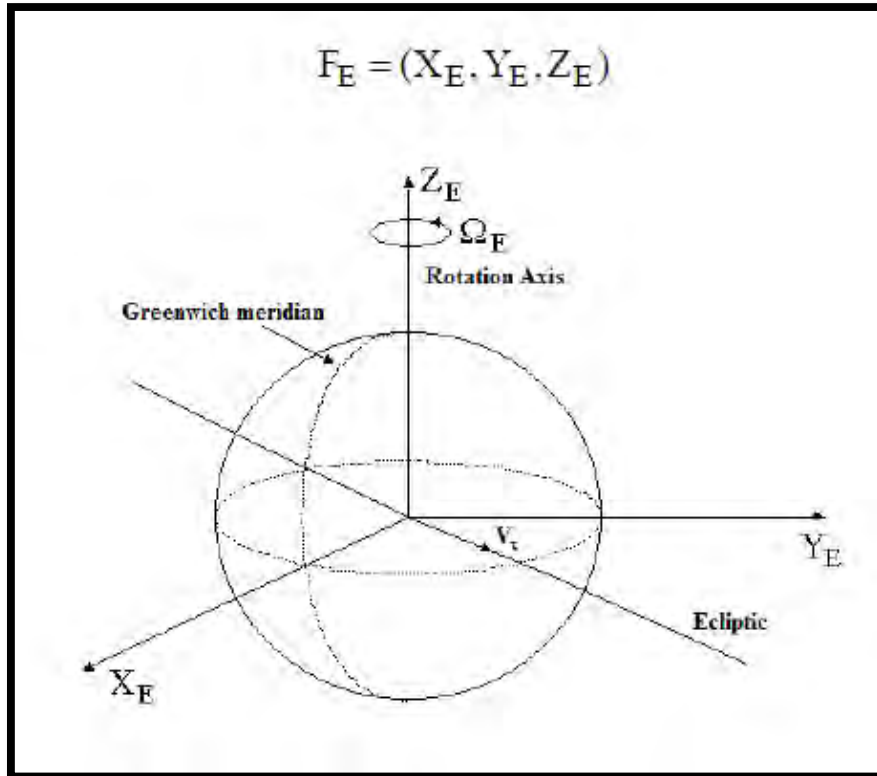
Abbiamo così ricavato le altre matrici di rotazione. Ecco così che per passare da un sistema di riferimento ad un altro si può fare lo stesso per i versori per cui:

$$\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = [\Psi] \cdot \begin{bmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{bmatrix} = [\Theta] \cdot \begin{bmatrix} l'' \\ m'' \\ n'' \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} l'' \\ m'' \\ n'' \end{bmatrix} = [\Phi] \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix}$$

Moltiplico i versori per le matrici di rotazione (seguendo l'ordine degli angoli di eulero); così possiamo passare da una terna all'altra, moltiplicando i versori i,j,k per il prodotto delle tre matrici, ed otterrò i versori della terna l,m,n. quindi i versori o qualsiasi componente, sarà uguale ai versori della terna i,j,k per la matrice L21 che è il prodotto delle matrici descritte sopra:

$$\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = [\Psi] \cdot [\Theta] \cdot [\Phi] \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} = [L_{21}] \cdot \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix}$$

Per cui ricavo le componenti R2 moltiplicando le componenti R1 per la matrice L21, o viceversa se conosco le componenti della terna di riferimento e moltiplico per la matrice inversa.



Questo è un sistema non inerziale ed è dotato di due velocità angolari: una è la velocità Ω_E attorno all'asse z ed è la rotazione della terra attorno al suo asse polare; l'altra è una velocità angolare che la terra ha sul piano dell'ellittica, cioè la velocità con cui la terra ruota intorno al sole V_τ .

Andando a definire la velocità che un velivolo ha girando rispetto a questo sistema di riferimento si esprime come V_E :

$$\dot{V}_E = \begin{bmatrix} V_{X_E} \\ V_{Y_E} \\ V_{Z_E} \end{bmatrix}_{F_E} \quad \ddot{\Omega}_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_E \end{bmatrix}_{F_E}$$

Ci sono poi anche le tre componenti di velocità della Ω_E che sono descritte sopra (abbiamo solo velocità attorno all'asse z). la V_τ sarà pari alla Ω_r per il raggio r del centro della terra e del sole.

In questo sistema di riferimento possiamo definire due angoli particolari. Uno è l'angolo di latitudine λ : distanza angolare di un generico punto sulla terra misurata come distanza dal piano equatoriale sul meridiano che intercetta l'equatore in quel punto: misuro dall'equatore fino al punto che m'interessa; l'angolo di longitudine τ è l'angolo misurato dal meridiano di Greenwich fino al punto che m'interessa.

Di solito si trascura la velocità V_τ perché i voli che consideriamo sono brevi.

- Per ogni sistema di riferimento serve scrivere le equazioni di forza. Quelle di momento solo per gli assi corpo. Per scrivere le equazioni di forza consideriamo il nostro sistema non inerziale:

$$\left(\frac{d\vec{R}_0}{dt}\right)_{F_I} = \vec{V}_\tau$$

$$\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{F_I} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{F_E} + \vec{\Omega}_E \wedge \vec{R} = \vec{V}_E + \vec{\Omega}_E \wedge \vec{R}$$

Dove la dr/dt è la velocità V_E del velivolo. Quindi la velocità del baricentro del velivolo calcolato in un sistema di riferimento inerziale sarà uguale a:

$$\vec{V} = \vec{V}_\tau + \vec{V}_E + \vec{\Omega}_E \wedge \vec{R}$$

Per cui ci basta calcolare la velocità del velivolo rispetto alla superficie terrestre, conoscere la velocità angolare della terra, conoscere la quota del velivolo, ed abbiamo calcolato la V .

Allora le equazioni relative alle forze sarà, la massa per la derivata della velocità rispetto al tempo in un sistema di riferimento generico più la velocità angolare vettoriale la velocità:

$$\vec{F} = m \left\{ \left[\frac{d}{dt} (\vec{V}_\tau + \vec{V}_E + \vec{\Omega}_E \wedge \vec{R}) \right]_{F_E} + \left[\vec{\Omega}_E \wedge (\vec{V}_\tau + \vec{V}_E + \vec{\Omega}_E \wedge \vec{R}) \right] \right\}$$

Qua il velivolo è considerato un punto. Di tutto questo possiamo assumere che la velocità angolare della terra sia costante e facendo il calcolo ritroviamo questa espressione:

$$\vec{F} = m \left\{ \left(\frac{d\vec{V}_E}{dt} \right)_{F_E} + \left(\frac{d\vec{V}_\tau}{dt} + \vec{\Omega}_E \wedge \vec{V}_\tau \right) + 2 \cdot \vec{\Omega}_E \wedge \vec{V}_E + \vec{\Omega}_E \wedge (\vec{\Omega}_E \wedge \vec{R}) \right\}$$

\downarrow
 F_E acceleration referred to the inertial frame F_I

\downarrow
 Centripetal acceleration of the aircraft C.G. referred to the F_E frame, due to rotation of the Earth

Dove la prima parentesi è l'accelerazione riferita ad un sistema di riferimento inerziale, mentre la seconda parentesi è l'accelerazione centripeta a cui è soggetto il velivolo considerato come punto riferito al sistema

NED. Esplicitando le matrici avrò che le tre componenti F_{X_E} , F_{Y_E} ... delle forze che agiscono sul mio velivolo nel sistema di riferimento considerato saranno date dalle forze propulsive dello stesso sistema di riferimento più le tre componenti delle accelerazioni gravitazionali:

$$\begin{bmatrix} F_{X_E} \\ F_{Y_E} \\ F_{Z_E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_E \\ Y_E \\ Z_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mg_{X_E} \\ mg_{Y_E} \\ mg_{Z_E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_E \\ Y_E \\ Z_E \end{bmatrix} + [L_{EV}] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}$$

Queste sono le forze. La matrice L_{EV} è:

$$[L_{EV}] = \begin{bmatrix} -\sin \lambda \cos \tau & -\sin \tau & -\cos \lambda \cos \tau \\ -\sin \lambda \sin \tau & \cos \tau & -\cos \lambda \sin \tau \\ \cos \lambda & 0 & -\sin \lambda \end{bmatrix}$$

Gli angoli di eulero di trasformazione ned a ecef sono gli angoli di latitudine e longitudine. Per allineare (le origini non coincidono)(bastano due rotazioni per allineare tutto).

In forma scalare si ha:

$$\begin{cases} X_E = m(\dot{V}_{X_E} - 2\Omega_E V_{Y_E} + g \cos \tau \cos \lambda) \\ Y_E = m(\dot{V}_{Y_E} + 2\Omega_E V_{X_E} + g \sin \tau \cos \lambda) \\ Z_E = m(\dot{V}_{Z_E} + g \sin \lambda) \end{cases}$$

Basta esplicitare la matrice e siamo a posto (si vede che la componente lungo l'asse Z non è dipendente dalla Ω_E).

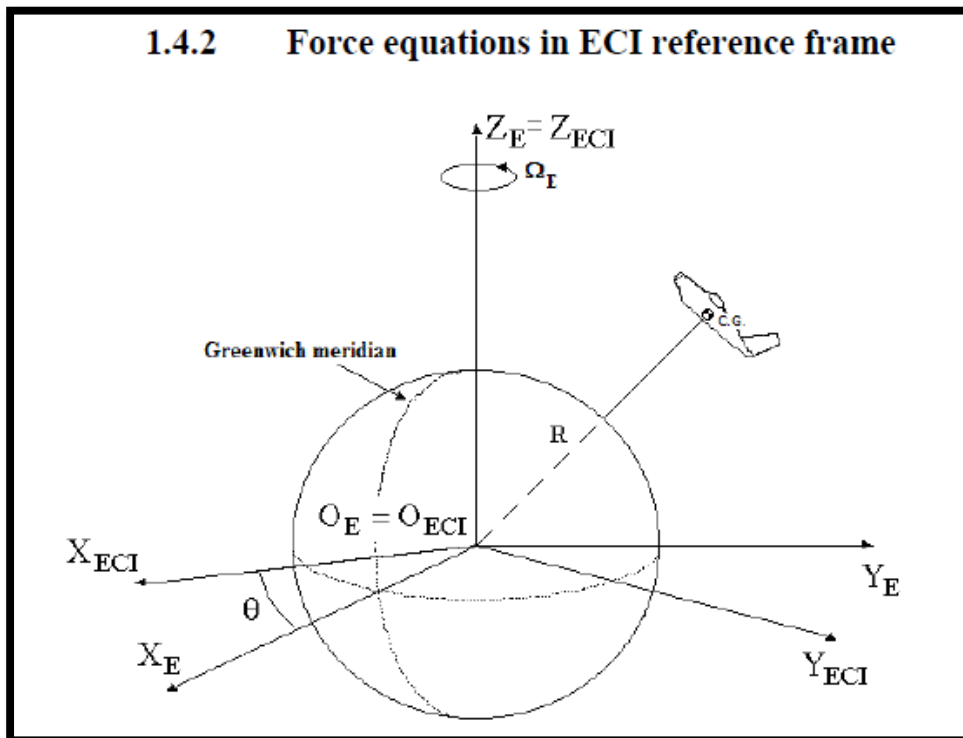
- Consideriamo sistema di riferimento sempre centrato nel centro della terra ma è inerziale e si chiama ECI. Questo sistema viene definito una terna galileiana. Questo sistema si usa per studiare il moto di un corpo intorno alla terra, quindi un sistema che deve essere fisso durante lo studio di un moto. Sistema usa costellazione dell'ariete.

Il sistema ha l'asse z diretto dal polo sud al polo nord, gli assi x y giacciono nel piano equatoriale e l'asse X_{ECI} punta verso la costellazione dell'ariete e di conseguenza si ricava y. Questo non è più il meridiano di Greenwich. Così ci siamo anche eliminati la velocità angolare della terra. C'è ancora la velocità di rivoluzione ma si considera ancora inerziale perché la sua origine è dotata di moto rettilineo uniforme. Così siamo in un sistema inerziale.

matrice L21 e l'angolo Θ equivale all'angolo Ψ degli angoli di eulero. Quindi la matrice di rotazione LEI è definita come sopra.

Così se conosciamo le componenti delle forze che agiscono sul mio velivolo nel sistema assi terrestri, posso calcolare le stesse in un sistema di riferimento inerziale moltiplicando le stesse per una matrice LEI. Viceversa se siamo nel caso opposto.

- Adesso scriviamo le equazioni delle forze anche in questo sistema di riferimento.



In questo caso abbiamo il sistema di riferimento inerziale montato sulla terra. Prendiamo il nostro velivolo e abbiamo il sistema di riferimento Ecf così come l'abbiamo definito dotato della sua velocità angolare, abbiamo il sistema di riferimento ECI in cui Zeci coincide con Ze, Xeci è ruotato di un angolo Θ rispetto a Xe funzione del tempo, e l'asse yeci si trova di conseguenza. Di tutte le distanze vettoriali di prima è rimasta solo la R (distanza del baricentro del velivolo dal centro della terra). Siccome eci è un sistema inerziale possiamo definire la V come:

$$\vec{V} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{F_{ECI}}$$

⇓

nel sistema di riferimento che stiamo considerando eci. Quindi la velocità del sistema eci si può definire come la velocità del sistema FE più la $\Omega \times R$ perché è a tutti gli effetti la velocità definita rispetto ad un sistema inerziale; per cui si ha:

$$\begin{aligned}
 \{X\}_{F_E} &= \begin{bmatrix} X_E \\ Y_E \\ Z_E \end{bmatrix} = \\
 &= m \cdot \left(\begin{bmatrix} \dot{V}_{X_E} \\ \dot{V}_{Y_E} \\ \dot{V}_{Z_E} \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_E & 0 \\ \Omega_E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{X_E} \\ V_{Y_E} \\ V_{Z_E} \end{bmatrix} + \right. \\
 &\left. \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_E & 0 \\ \Omega_E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_E & 0 \\ \Omega_E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot [L_{EV}] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{bmatrix} - [L_{EV}]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \right) = \\
 &= m \cdot \left(\{ \dot{V}_E \}_{F_E} + 2 \cdot [\tilde{\Omega}_{\Omega_E}]_{F_E} \cdot \{V_E\}_{F_E} + \right. \\
 &\left. + [\tilde{\Omega}_{\Omega_E}]_{F_E} \cdot [\tilde{\Omega}_{\Omega_E}]_{F_E} \cdot [L_{EV}] \cdot \{R\}_{F_V} - [L_{EV}]^{-1} \cdot \{g\}_{F_V} \right)
 \end{aligned}$$

E in forma scalare:

$$\begin{cases} X_E = m(\dot{V}_{X_E} - 2\Omega_E V_{Y_E} - \Omega_E^2 R \cos \tau \cos \lambda + g \cos \tau \cos \lambda) \\ Y_E = m(\dot{V}_{Y_E} + 2\Omega_E V_{X_E} - \Omega_E^2 R \sin \tau \cos \lambda + g \sin \tau \cos \lambda) \\ Z_E = m(\dot{V}_{Z_E} + g \sin \lambda) \end{cases}$$

Si trascura la componente centripeta così da semplificare l'equazione e scrivere che:

$$\begin{aligned}
 \{X\}_{F_E} &= \begin{bmatrix} X_E \\ Y_E \\ Z_E \end{bmatrix} = \\
 &= m \cdot \left(\begin{bmatrix} \dot{V}_{X_E} \\ \dot{V}_{Y_E} \\ \dot{V}_{Z_E} \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_E & 0 \\ \Omega_E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{X_E} \\ V_{Y_E} \\ V_{Z_E} \end{bmatrix} - [L_{EV}]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \right) = \\
 &= m \cdot \left(\{ \dot{V}_E \}_{F_E} + 2 \cdot [\tilde{\Omega}_{\Omega_E}]_{F_E} \cdot \{V_E\}_{F_E} - [L_{EV}] \cdot \{g\}_{F_V} \right) \\
 &\quad \Downarrow \\
 &\begin{cases} X_E = m(\dot{V}_{X_E} - 2\Omega_E V_{Y_E} + g \cos \tau \cos \lambda) \\ Y_E = m(\dot{V}_{Y_E} + 2\Omega_E V_{X_E} + g \sin \tau \cos \lambda) \\ Z_E = m(\dot{V}_{Z_E} + g \sin \lambda) \end{cases}
 \end{aligned}$$

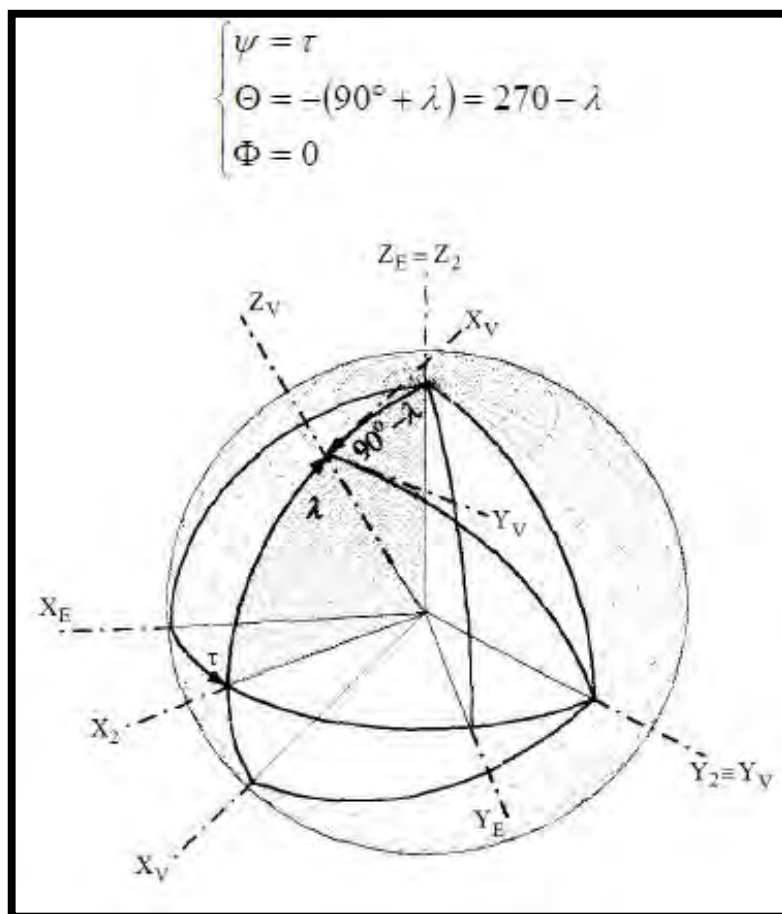
La velocità del baricentro del nostro velivolo rispetto alla velocità terrestre avrà queste 3 componenti calcolate nel sistema NED; la velocità angolare di questo sistema, rispetto ad un sistema di riferimento inerziale ha una velocità di trascinamento dovuta alla rotazione terrestre più una velocità dovuta al fatto che il baricentro del velivolo si muove intorno ad una superficie sferica con tre componenti attorno all'asse xn, ye, zd:

$$\vec{V}_E = \begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ V_D \end{bmatrix}_{FV} \quad \vec{\omega} = \{\vec{\Omega}_E\} + \{\vec{\omega}_V\} = \{\vec{\Omega}_E\}_{FV} + \begin{bmatrix} P_V \\ Q_V \\ R_V \end{bmatrix}$$

Vediamo come ricavare la matrice LEV anticipata prima (bastano due rotazioni):

- 1- La prima rotazione attorno ad asse Z di un angolo di longitudine allinea Ye e Yv.
- 2- Poi allineo di $\Theta = -(90 + \lambda)$;

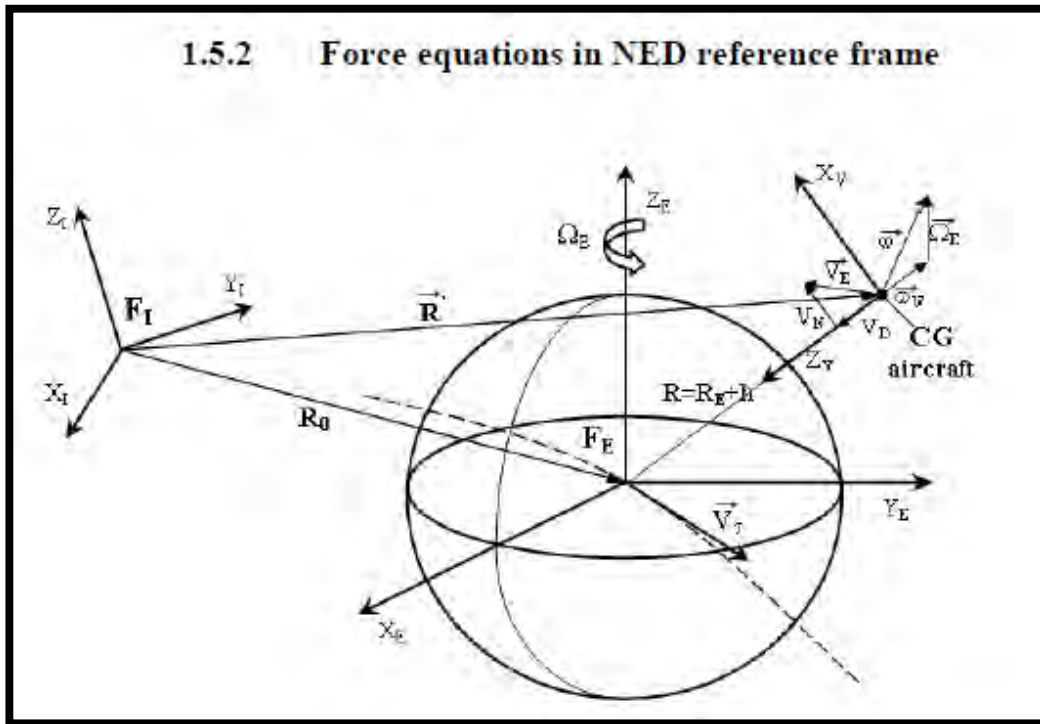
La figura su cui ragionare è:



Facendo il prodotto tra le due matrici si ha che:

$$\begin{cases} \dot{t} = P_V / \cos \lambda = V_E / (R \cos \lambda) \\ \dot{\lambda} = -Q_V = V_N / R \end{cases}$$

- Ora facciamo le forze per gli assi NED:



Le scriviamo per un sistema di riferimento inerziale generico. Ha distanza R0 dalla terra. Consideriamo il sistema ECF per la terra. L'origine del sistema NED è nel baricentro. R' è la distanza dal sistema inerziale al sistema NED e R la distanza dal baricentro del velivolo dal baricentro della terra. La solita velocità riferita ad un sistema inerziale sarà:

$$\dot{\vec{V}} = \left(\frac{d\vec{R}'}{dt} \right)_{F_I} = \left(\frac{d\vec{R}_0}{dt} \right)_{F_I} + \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{F_I}$$

Dove è la somma delle R0 e della R. come al solito la R0 da la Vt che è la velocità di rivoluzione della terra attorno al sole. La DR/DT è pari alla dr/dt del sistema NED più omega per R dove la omega è la somma di omega_v più la omega_E. In formule:

$$\frac{d}{dt}(\vec{\Omega}_E \wedge \vec{R})_{FE} = \vec{\Omega}_E \wedge \vec{V}_E$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\Omega}_E \wedge \vec{R})_{FV} = \vec{\Omega}_E \wedge \vec{V}_E - \vec{\omega}_V \wedge (\vec{\Omega}_E \wedge \vec{R})$$

Sostituendo nell'equazione delle forze compressive si ha (nel sistema NED):

$$\vec{F} = m \cdot \left[\left(\frac{d\vec{V}_E}{dt} \right)_{FV} + 2\vec{\Omega}_E \wedge \vec{V}_E + \vec{\Omega}_E \wedge (\vec{\Omega}_E \wedge \vec{R}) + \vec{\omega}_V \wedge \vec{V}_E \right]$$

Noi mettiamo le azioni aerodinamiche e propulsive al primo membro e si ha:

$$\{X\}_{FV} = m \cdot \left[\{V_E\}_{FV} + 2[\tilde{\Omega}_{\Omega_E}]_{FV} \cdot \{V_E\}_{FV} + [\tilde{\Omega}_{\Omega_E}]_{FV} \cdot \left([\tilde{\Omega}_{\Omega_E}]_{FV} \cdot \{R\}_{FV} \right) + [\tilde{\Omega}_{\omega_V}]_{FV} \cdot \{V_E\}_{FV} - \{g\}_{FV} \right]$$

In forma matriciale (le componenti di g sono 0,0,g senza matrice perché siamo nel sistema di rif. giusto)

$$\begin{bmatrix} X_V \\ Y_V \\ Z_V \end{bmatrix} = m \cdot \left(\begin{bmatrix} \dot{V}_N \\ \dot{V}_E \\ \dot{V}_D \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & \Omega_E \sin \lambda & 0 \\ -\Omega_E \sin \lambda & 0 & -\Omega_E \cos \lambda \\ 0 & \Omega_E \cos \lambda & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ V_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Omega_E \sin \lambda & 0 \\ -\Omega_E \sin \lambda & 0 & -\Omega_E \cos \lambda \\ 0 & \Omega_E \cos \lambda & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 & \Omega_E \sin \lambda & 0 \\ -\Omega_E \sin \lambda & 0 & -\Omega_E \cos \lambda \\ 0 & \Omega_E \cos \lambda & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 & \dot{\lambda} \sin \lambda & -\dot{\lambda} \\ -\dot{\lambda} \sin \lambda & 0 & -\dot{\lambda} \cos \lambda \\ \dot{\lambda} & \dot{\lambda} \cos \lambda & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ V_D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \right)$$

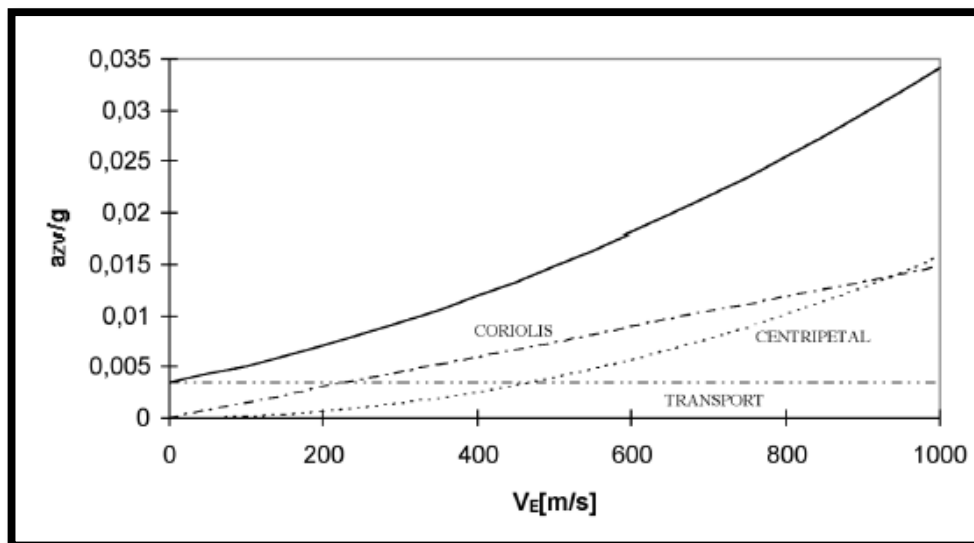
E in forma scalare:

Partiamo dalle accelerazioni, dalle quali ricaviamo le derivate delle velocità angolari, le integriamo, otteniamo le velocità, le rinfiliamo le blocco di prima; integrando le velocità ricaviamo la posizione lungo nord, est e in quota; poi, conoscendo questi, possiamo ricavare τ e λ ; da questi conosciamo così la posizione in latitudine e longitudine; conoscendo queste possiamo ricavare il seno e coseno, con loop che ritorna al blocco grande e così ci ricaviamo le accelerazioni degli assi NED.

- Ora cosa si può semplificare? Per vedere l'influenza dei termini principali abbiamo fatto alcune semplificazioni. Supponiamo di volare a quota costante cioè $V_D=0$, e su una traiettoria equatoriale così $V_N=0$ e λ angolo di latitudine è zero. Così delle nostre equazioni rimane:

$$\begin{cases} a_{X_v} = 0 \\ a_{Y_v} = \dot{V}_E \\ a_{Z_v} = 2\Omega_E V_E + \Omega_E^2 R + \frac{V_E^2}{R} - g = a_{Zv1} - g \end{cases}$$

Abbiamo (nella a_{Zv}) in ordine: corioli, centripeta e accelerazione dovuta agli assi NED. Riportiamo ora la percentuale di a_{Zv}/g in funzione della velocità:



La somma delle tre ha l'andamento continuo. Mettiamoci ad una velocità pari ad un decimo di quella orbitale (che è 7800 m/s calcolata al livello del mare). Mettendoci ad 800m/s vediamo che l'accelerazione $a_{zv}=0,025$ dell'accelerazione di gravità e quindi è parecchio trascurabile. Se siamo ad $h=100$ km con $V=300$ m/s si ha che la componente $a_{zv1}=0,093$ per cui questi termini possiamo trascurarli per le velocità di volo che noi andiamo a considerare. Trascurare questi termini vuol dire considerare $\Omega_E=0$ e $R=\infty$. Cioè nulla la rotazione terrestre e considerare la terra piatta. Quindi possiamo considerare la terra piatta e ferma.

$$\vec{V}_E = \begin{bmatrix} V_W \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{FW}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega}_E + \vec{\omega}_V + \vec{\omega}_W = \begin{bmatrix} \Omega_{XW} \\ \Omega_{YW} \\ \Omega_{ZW} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{VW} \\ Q_{VW} \\ R_{VW} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_W \\ Q_W \\ R_W \end{bmatrix}$$

Sono le componenti su questo sistema di riferimento. Nel caso generale. Le forze saranno date da:

$$\vec{F} = m \cdot \left[\left(\frac{d\vec{V}_E}{dt} \right)_{FW} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_E \right]$$

E se consideriamo la terra piatta la $\omega = \omega_V$ e si ha:

$$\vec{F} = m \cdot \left[\left(\frac{d\vec{V}_E}{dt} \right)_{FW} + \vec{\omega}_W \wedge \vec{V}_E \right]$$

$$\{X\}_{FW} = m \cdot \left(\{V_E\}_{FW} + [\tilde{\Omega}_{\omega W}]_{FW} \cdot \{V_E\}_{FW} - [L_{VW}]^{-1} \cdot \{g\}_{FV} \right)$$

Facendo il solito passaggio delle forze propulsive e gravitazionali. Il meno 1 è giusto con la matrice pari a:

$$[L_{VW}]^{-1} = [L_{21}]^{-1} \quad \text{with} \quad \begin{cases} \Phi = \Phi_W \\ \Theta = \Theta_W \\ \Psi = \Psi_W \end{cases}$$

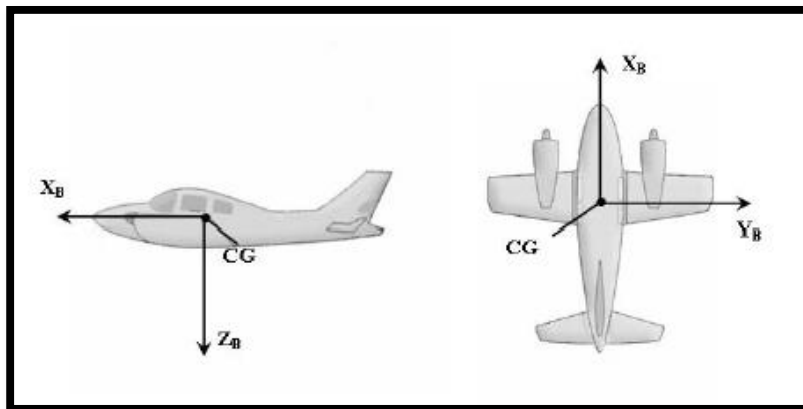
Nella forma matriciale si ha:

Meccanica del volo del 20-10-2014

-Sistemi di riferimento assi corpo. Questo sistema è solidale al velivolo durante il suo moto. Vuol dire che una volta che abbiamo fissato la posizione degli assi rispetto al nostro velivolo che è un corpo rigido, quelle direzioni rimangono costanti qualsiasi sia l'evolversi del moto del nostro velivolo. Esistono tre tipi di assi corpo:

-Assi generici

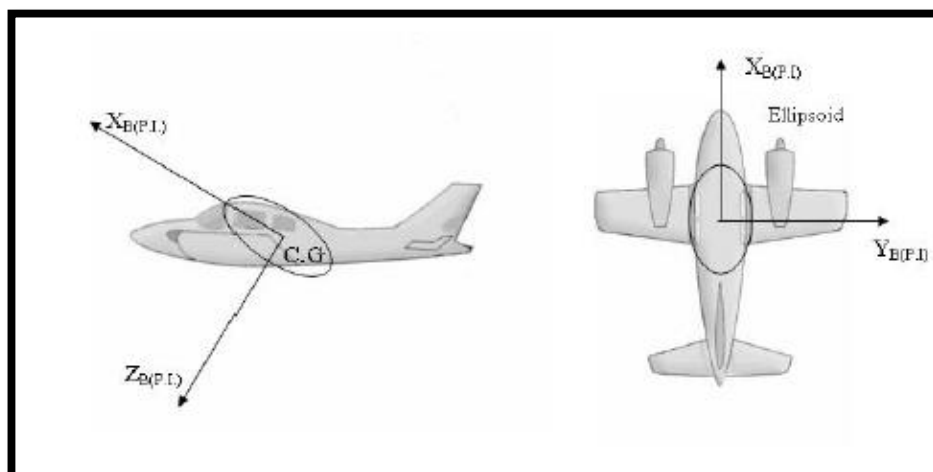
Prendiamo gli assi così:



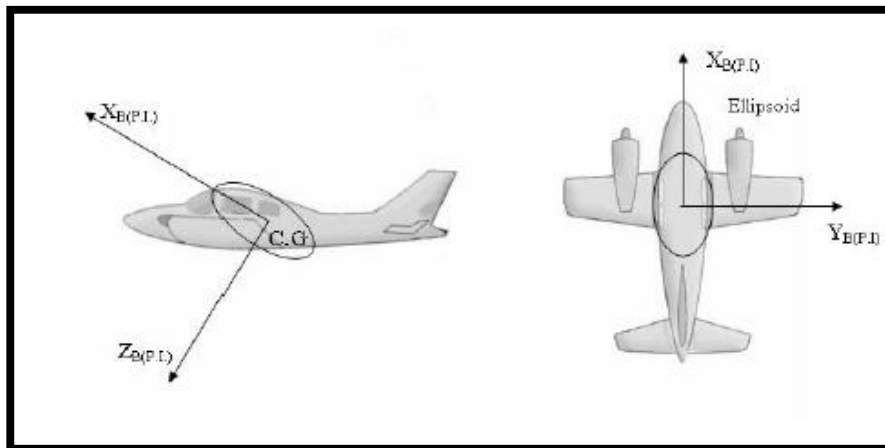
Di solito conviene scegliere per l'asse x un asse che si avvicina a quello di simmetria del velivolo, l'asse z sarà diretto dal dorso al ventre dell'ala e l'asse y si ricava per composizione.

-Assi corpo principali d'inerzia

Dove la direzione degli assi x - y - z è data dagli assi dell'ellissoide d'inerzia.



-Assi corpo stabilità



La direzione degli assi sono indicate in figura. Sono gli assi corpo principali d'inerzia.

Mentre per gli assi corpo generici la descrizione è quella sopra.

-Ora con gli assi corpo generici definiamo le componenti della velocità.

Le componenti della velocità V_E rispetto alla superficie terrestre saranno un vettore che avrà come componenti lungo x,y e z e si definiscono come:

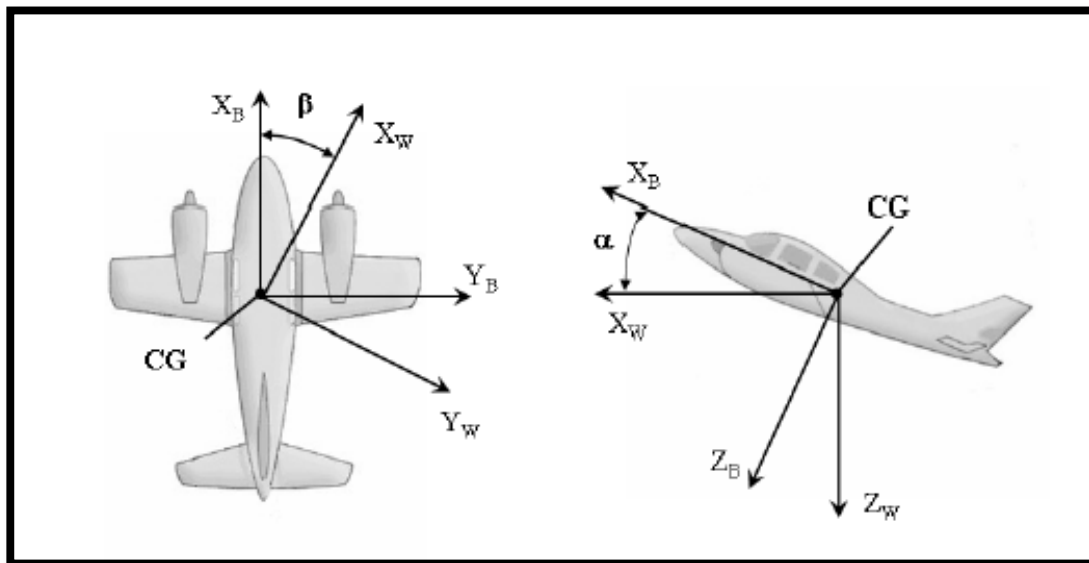
$$\vec{V}_E = \begin{bmatrix} U_B \\ V_B \\ W_B \end{bmatrix}_{F_B}$$

Per la omega rispetto ad un sistema inerziale si avranno 3 componenti senza nessuna semplificazione 39.00

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega}_E + \vec{\omega}_V + \vec{\omega}_B = \begin{bmatrix} \Omega_{X_B} \\ \Omega_{Y_B} \\ \Omega_{Z_B} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{VB} \\ Q_{VB} \\ R_{VB} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_B \\ Q_B \\ R_B \end{bmatrix}$$

Qui avremo una componente omega E, una omega V e una omega B. E ognuna avrà le componenti scritte sopra. (P sempre intorno a x, Q intorno a y e R intorno a z). Ma se andiamo a fare l'ipotesi che la terra è piatta ci rimarrà un solo termine.

- per gli assi di stabilità una cosa da far vedere e la posizione degli assi stabilità rispetto agli altri (per far vedere la differenza):



Abbiamo che gli assi x_B (corpo) avrà una certa direzione e l'asse x_W (vento) avrà direzione come in figura. L'angolo tra i due è l'angolo di derapata β (non è l'angolo d'imbardata!). La prima rotazione che avviene intorno all'asse z si definisce come angolo ψ e sarà negativo. La vista longitudinale invece mostra come angolo tra gli assi x l'angolo α che non è altro che l'incidenza e qui l'angolo teta Θ è questo (positivo). (ruotiamo gli assi corpo!!!). Gli angoli quindi sono:

$$\begin{cases} \psi = -\beta \\ \Theta = \alpha \\ \Phi = 0 \end{cases}$$

Possono tornare utili per passare da un sistema di riferimento ad assi corpo ad assi vento e viceversa.

Così se abbiamo le componenti delle azioni aerodinamiche in assi corpo, ci basta la matrice di trasformazione tra assi corpo e vento e così possiamo trasformare le componenti che ci servono. Le matrici di trasformazione sono (definiti i due angoli di eulero):

$$[L_{WB}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & \sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta & \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

mentre la L_{WB-1} :

$$[L_{WB}] \cdot [\omega_B] - [\omega_W] =$$

E poi svilupparle così:

$$[L_{WB}] \cdot \begin{bmatrix} P_B \\ Q_B \\ R_B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_W \\ Q_W \\ R_W \end{bmatrix} = [L_{WB}]_{\alpha=0} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_W \\ Q_W \\ R_W \end{bmatrix} = [L_{WB}] \cdot \begin{bmatrix} P_B \\ Q_B - \dot{\alpha} \\ R_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}$$

$$[L_{VB}] = [\Psi_B] \cdot [\Theta_B] \cdot [\Phi_B]$$

- la matrice di trasformazione invece tra gli assi di stabilità e gli assi corpo generici invece è data da:

$$[L_{SB}] = [\Theta] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$[L_{SB}]^{-1} = [\Theta]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Basta una rotazione e si allineano completamente. Perché qui la rotazione è solo attorno a y. Quindi la matrice di rotazione tra assi stabilità e assi corpo generici è questa.

- Vediamo ora di definire le forze negli assi corpo generici. Siccome non è inerziale la formula la scriviamo come:

$$\vec{F} = m \cdot \left[\left(\frac{d\vec{V}_E}{dt} \right)_{FB} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_E \right]$$

Le velocità angolari con le nostre assunzioni (che la terra sia piatta e che sia ferma) si ottiene che:

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega}_E + \vec{\omega}_V + \vec{\omega}_B$$

at and fixed in space:

$$\vec{\omega} \cong \vec{\omega}_B$$

Così la nostra equazione diventa, considerando la divisione delle forze, si ottiene:

$$\vec{\omega} \equiv \vec{\omega}_{FG}$$

E si ha si scrive m in funzione di momento in FG:

$$\{M\}_{FG} = \frac{d}{dt} [I]_{FG} \cdot \{\omega\}_{FG} + [I]_{FG} \cdot \frac{d}{dt} \{\omega\}_{FG} + [\tilde{\Omega}_\omega]_{FG} \cdot ([I]_{FG} \cdot \{\omega\}_{FG})$$

Se questa equazione la risolviamo per un qualsiasi sistema di assi corpo il primo termine sparisce e si ottiene:

$$\{M\}_{FB} = [I]_{FB} \cdot \{\dot{\omega}_B\}_{FB} + [\tilde{\Omega}_\omega]_{FB} \cdot ([I]_{FB} \cdot \{\omega_B\}_{FB})$$

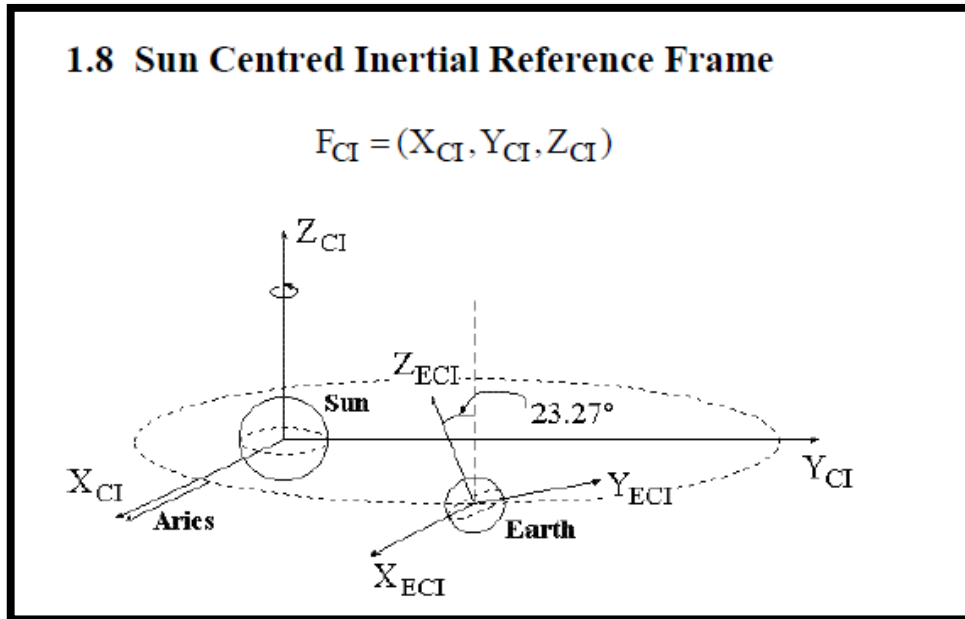
Se la nostra configurazione del velivolo ammette un piano di simmetria, allora possiamo trascurare le componenti lxy e lyz così si ottiene:

$$[I]_{FB} = \begin{bmatrix} I_{XB} & 0 & -I_{XBZB} \\ 0 & I_{YB} & 0 \\ -I_{ZBXB} & 0 & I_{ZB} \end{bmatrix}$$

Vale solo con configurazione simmetrica di velivolo. Con le nostre semplificazioni (terra ferma e piatta) abbiamo solo:

$$\vec{\omega}_B = \begin{bmatrix} P_B \\ Q_B \\ R_B \end{bmatrix}$$

Ora i momenti si chiamano L(lungo x) , M(lungo y) e N(lungo z) e quello che si ricava andando a risolvere l'equazione è:



Nell'ECI l'asse x è diretto nella stessa posizione di quello solare. Ma l'asse z è inclinato di $23,7^\circ$. Quindi l'asse Y_{eci} è ruotato dello stesso angolo. La matrice di trasformazione tra il sistema solare e l'eci è data dalle seguenti rotazioni:

- 1st rotation: $\Psi = 0$
- 2nd rotation: $\Theta = 0$
- 3rd rotation: $\Phi \equiv i$
i is the inclination of the Earth equatorial plane referred to the ecliptic, as shown in figure below.

L'unica rotazione è quella che s'impone attorno all'asse x (chiamiamo l'angolo i). sovrapponendo i due sistemi si aggiunge il pezzo che si vede qui sotto:

$$\begin{cases} X_E = m \cdot (\dot{V}_{X_E} + g \cos \tau \sin \lambda) \\ Y_E = m \cdot (\dot{V}_{Y_E} + g \sin \tau \cos \lambda) \\ Z_E = m \cdot (\dot{V}_{Z_E} + g \sin \lambda) \end{cases}$$

Le velocità per passare da assi ECEF a NED sono:

$$\begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ V_D \end{bmatrix} = [L_{EV}]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} V_{X_E} \\ V_{Y_E} \\ V_{Z_E} \end{bmatrix}$$

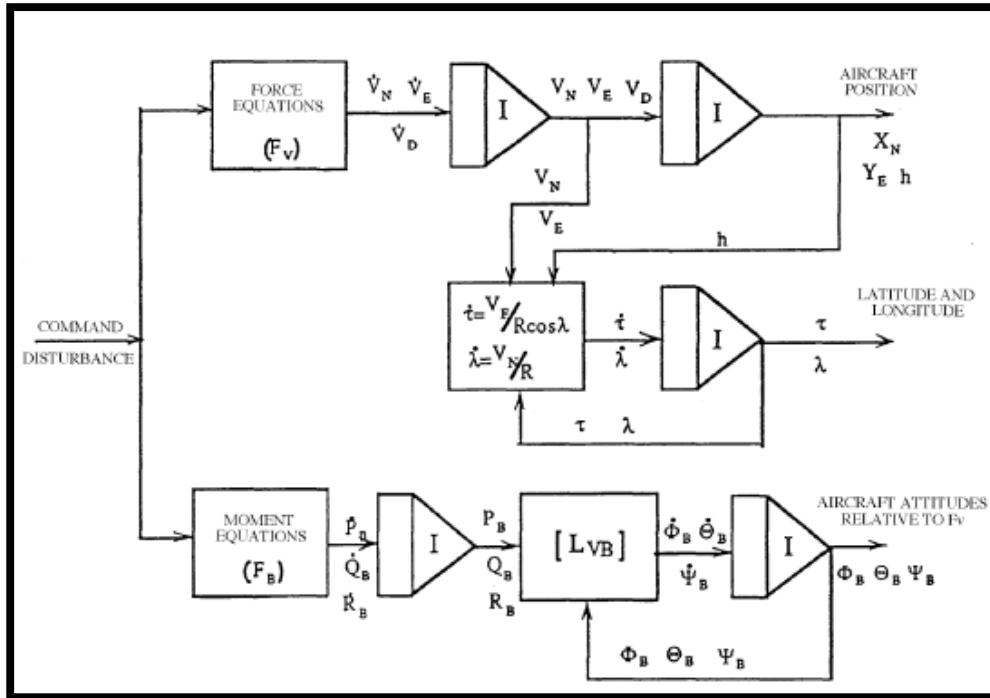
$$\begin{cases} V_N = -V_{X_E} \cos \tau \sin \lambda - V_{Y_E} \sin \tau \sin \lambda + V_{Z_E} \cos \lambda \\ V_E = -V_{X_E} \sin \tau - V_{Y_E} \cos \tau \\ V_D = -V_{X_E} \cos \tau \cos \lambda + V_{Y_E} \cos \lambda \sin \tau - V_{Z_E} \sin \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\tau} = \frac{V_E}{R \cos \lambda} \\ \dot{\lambda} = \frac{V_N}{R} \end{cases}$$

Per i momenti si ragiona in assi corpo e si ha:

$$\begin{cases} L_B = I_{X_B} \dot{P}_B + (I_{Z_B} - I_{Y_B}) Q_B R_B - I_{X_B Z_B} (\dot{R}_B + P_B Q_B) \\ M_B = I_{Y_B} \dot{Q}_B + (I_{X_B} - I_{Z_B}) P_B R_B + I_{X_B Z_B} (P_B^2 - R_B^2) \\ N_B = I_{Z_B} \dot{R}_B + (I_{Y_B} - I_{X_B}) P_B Q_B + I_{X_B Z_B} (R_B Q_B - \dot{P}_B) \end{cases}$$

Dalle velocità angolari possiamo ricavare le derivate degli angoli di eulero e poi gli angoli di eulero. Vediamo il diagramma di flusso (non lo chiederà mai a memoria, ma bisogna saperlo descrivere):



Per i momenti non cambia niente. Per le forze: ricaviamo le accelerazioni dalle forze, le integriamo e ricaviamo le velocità, le integriamo e otteniamo x,y e z. se vogliamo anche gli angoli di latitudine e longitudine si prendono le VNED, si prendono le posizioni, si ricavano le derivate degli angoli, si ricavano gli angoli e li reimmettiamo per un ciclo d'iterazione fino a convergenza.

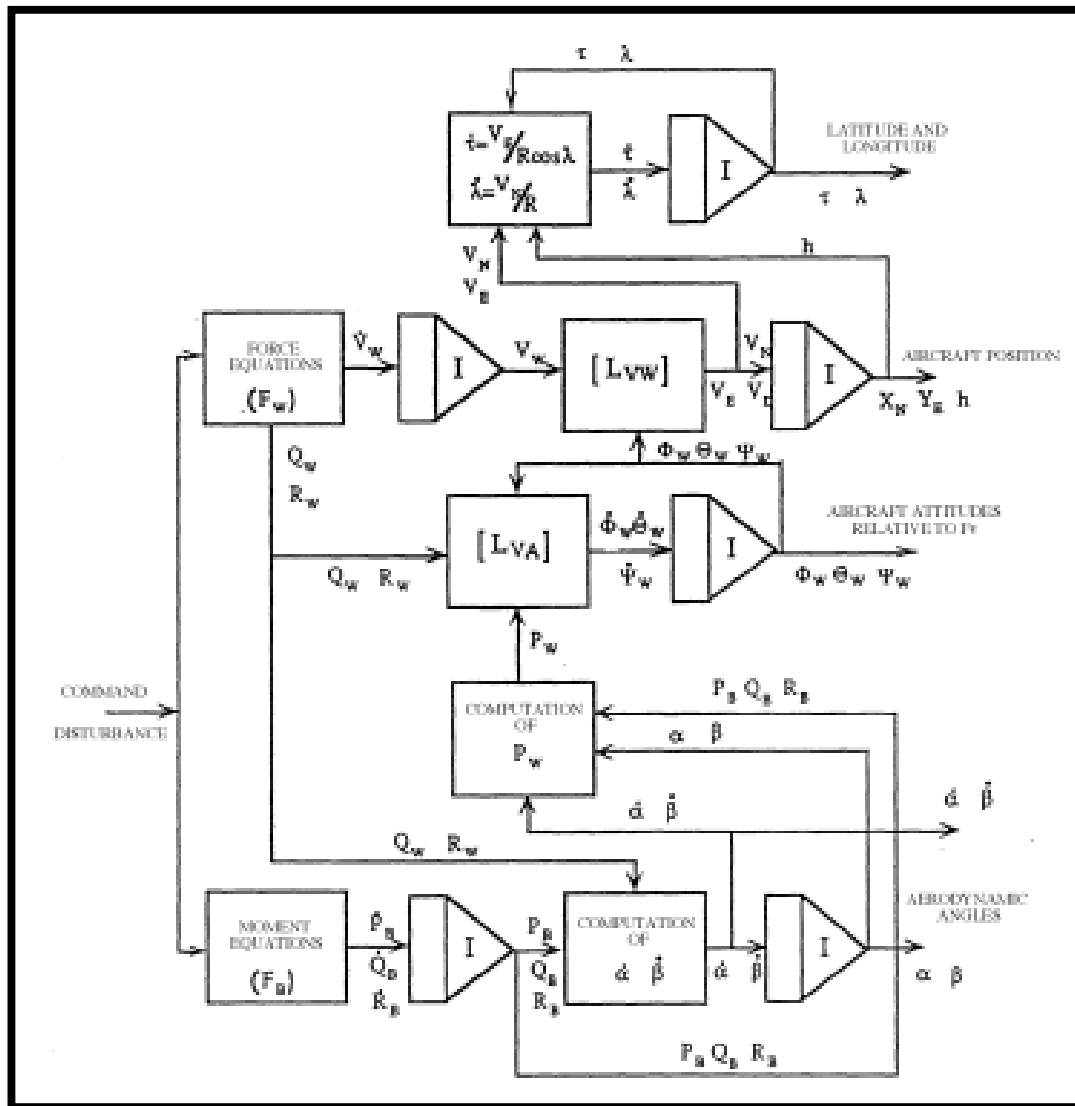
- Vediamo assi vento

$$\begin{cases} X_W = m \cdot (\dot{V}_W + g \sin \Theta_W) \\ Y_W = m \cdot (R_W V_W - g \cos \Theta_W \sin \Phi_W) \\ Z_W = m \cdot (-Q_W V_W - g \cos \Theta_W \cos \Phi_W) \end{cases}$$

ating system equations, one obtains V_W
s of angular velocity about wind axes, (
th the transformation matrix, one can expre
s in vehicle carried vertical frame:

$$\begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ V_D \end{bmatrix} = [L_{vw}] \cdot \begin{bmatrix} V_W \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} V_N = V_W \cos \Theta_W \cos \Psi_W \\ V_E = V_W \cos \Theta_W \sin \Psi_W \\ V_D = -V_W \cos \Theta_W \end{cases}$$

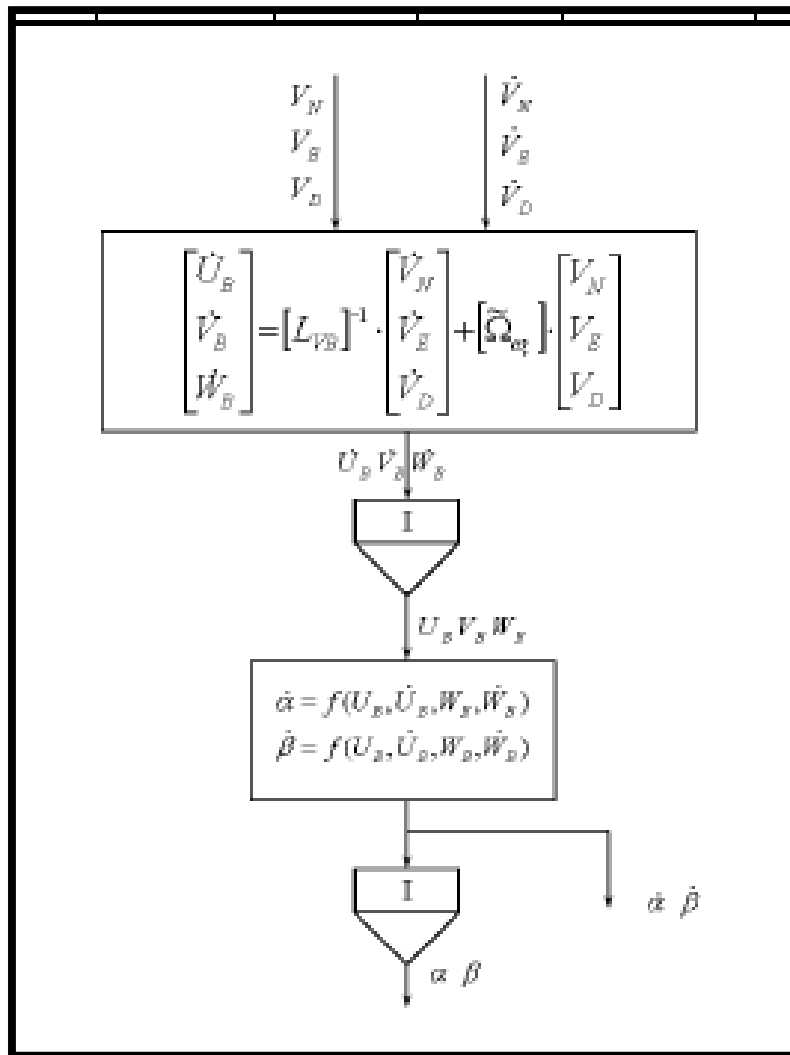


Partiamo dai momenti: si ricavano le accelerazioni dalle equazioni dei momenti, le integriamo e ricaviamo le velocità angolari. Se vogliamo informazioni sugli angoli aerodinamici, alfa e beta, calcoliamo gli alfa' e beta', li integriamo e ricaviamo gli angoli aerodinamici. Ci occorrono i QW e RW per ricavare le derivate degli angoli aerodinamici e queste si prendono dalle equazioni delle forze. Per ricavare la PW facciamo arrivare gli angoli alfa e beta e le loro derivate, questa poi ci servirà nella matrice LWA.

Per le forze: dalle equazioni ricaviamo le accelerazioni, le integriamo e otteniamo la Vw. Con la matrice LVW ricaviamo le tre componenti di velocità nel sistema di riferimento assi ned, integriamo e abbiamo le posizioni. Quello che ci manca qui sono gli angoli di eulero che li ricaviamo da LWA. prendiamo le derivate di eulero, le integriamo e ricaviamo gli angoli che rientrano poi nella matrice fino a convergenza. Se vogliamo poi gli angoli di latitudine e longitudine prendiamo la VNED e con i passaggi visti prima si ricavano.

- Vediamo ora gli assi corpo generici. Per arrivare al diagramma di flusso si seguono gli stessi passaggi visti prima e si arriva a :

Questo è un calcolo che porta dagli assi corpo agli angoli aerodinamici. Noi non utilizziamo gli assi NED. Non ci danno nessuna informazione sui dati aerodinamici del velivolo. Siccome tutte le forze e i momenti dipendono solo dalle azioni dinamiche e propulsive dovremmo fare un loop di calcolo per trovare poi alfa' e beta'. Ecco perché noi utilizziamo sempre gli assi corpo e vento per definizione del comportamento del velivolo.



Per studiare il comportamento del velivolo usiamo gli assi corpo.

-Capitolo 2

Le nostre equazioni non sono lineari. Si possono fare ipotesi per linearizzarle. La linearizzazione è basata sulle piccole perturbazioni. Si definisce piccola perturbazione quando il prodotto o la presenza di quella grandezza sia trascurabile rispetto alla grandezza che si sta considerando. Partiamo dalle equazioni degli assi corpo.

Andando a sostituire alla prima equazione (le altre due sono uguali come procedimento) si ottiene:

$$X_{B0} + \Delta X_B = m \cdot [\dot{u}_B + (Q_{B0} + q_B)(W_{B0} + w_B) - (R_{B0} + r_B)(V_{B0} + v_B) + g \sin(\Theta_{B0} + \theta_B)]$$

Dove ΔX_B è la variazione del comando (si sono messe tutte le piccole perturbazioni). Ora se le perturbazioni sono piccole, possiamo dire che:

$$\begin{cases} \sin \theta_B \cong \theta_B \\ \cos \theta_B \cong 1 \end{cases}$$

(se consideriamo le variazioni molto piccole per tempi lunghi allora l'approssimazione va bene). Andando ad applicare quanto detto e considerando che il prodotto della perturbazione si trascura si ha:

$$X_{B0} - m \cdot (Q_{B0} W_{B0} - R_{B0} V_{B0} + g \sin \Theta_{B0}) + \Delta X_B + - m \cdot (\dot{u}_B + W_{B0} q_B + Q_{B0} w_B - V_{B0} r_B - R_{B0} v_B + g \cdot \theta_B \cos \Theta_{B0}) = 0$$

Togliendo poi i termini stazionari ricaviamo le componenti dovute all'introduzione del disturbo e si ha:

$$\Delta X_B = m \cdot (\dot{u}_B + W_{B0} q_B + Q_{B0} w_B - V_{B0} r_B - R_{B0} v_B + g \theta_B \cos \Theta_{B0})$$

Andando ad effettuare gli stessi ragionamenti e passaggi anche per le altre due componenti ci porta ad ottenere che:

$$\begin{cases} \Delta X_B = m \cdot (\dot{u}_B + W_{B0}q_B + g\theta_B \cos \Theta_{B0}) \\ \Delta Y_B = m \cdot (\dot{v}_B + U_{B0}r_B - W_{B0}p_B - g\phi_B \cos \Theta_{B0}) \\ \Delta Z_B = m \cdot (\dot{w}_B - U_{B0}q_B + g\theta_B \sin \Theta_{B0}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta L_B = I_x \dot{p}_B - I_{xz} \dot{r}_B \\ \Delta M_B = I_y \dot{q}_B \\ \Delta N_B = I_z \dot{r}_B - I_{xz} \dot{p}_B \end{cases}$$

Possiamo vedere che il piano longitudinale e quello latero direzionale si possono separare e studiare in questa maniera i due piani in modo separato. (non compaiono i termini di un piano nell'altro e viceversa) (gli unici che non si possono separare sono quelli latero direzionali).

-Vediamo le derivate degli angoli di Eulero:

$$\begin{cases} \Phi_B = P_B + Q_B \sin \Phi_B \operatorname{tg} \Theta_B + R_B \cos \Phi_B \operatorname{tg} \Theta_B \\ \dot{\Phi}_B = Q_B \cos \Phi_B - R_B \sin \Phi_B \\ \Psi_B = Q_B \frac{\sin \Phi_B}{\cos \Theta_B} + R_B \frac{\cos \Phi_B}{\cos \Theta_B} \end{cases}$$

si ragiona alla stessa maniera per ricavare la versione dei termini perturbati:

$$\begin{cases} \dot{\phi}_B = p_B + r_B \operatorname{tg} \Theta_{B0} \\ \dot{\theta}_B = q_B \\ \dot{\psi}_B = r_B / \cos \Theta_{B0} \end{cases}$$

Piano longitudinale separato dall'altro come si vede dalle componenti.

- la stessa procedura si usa per X'V e con tutti gli altri assi e si ha:

Decoupled Lateral-Directional Equations (Body axes)

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta Y_B = m \cdot (\dot{v}_B + U_{B0} r_B - W_{B0} p_B - g \phi_B \cos \Theta_{B0}) \\ \Delta L_B = I_x \dot{p}_B - I_{xz} \dot{r}_B \\ \Delta N_B = I_z \dot{r}_B - I_{xz} \dot{p}_B \\ \dot{\phi}_B = p_B + r_B \tan \Theta_{B0} \\ \dot{\psi}_B = \frac{r_B}{\cos \Theta_{B0}} \\ \dot{y}_v = U_{B0} \psi_B \cos \Theta_{B0} + v_B + W_{B0} (\psi_B \sin \Theta_{B0} - \phi_B) \end{array} \right.$$

Tutto questo grazie alla linearizzazione.

-Per gli assi stabilità basta eliminare W_{B0} e abbiamo lo stesso risultato:

Decoupled Longitudinal Equations

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta X_S = m \cdot (\ddot{u}_S + g \theta_S \cos \Theta_{S0}) \\ \Delta Z_S = m \cdot (\ddot{w}_S - U_{S0} q_S + g \theta_S \sin \Theta_{S0}) \\ \Delta M_S = I_y \dot{q}_S \\ \dot{\theta}_S = q_S \\ \dot{x}_v = (U_{S0} + u_S) \cos \Theta_{S0} - U_{S0} \theta_S \sin \Theta_{S0} \\ \quad + w_S \sin \Theta_{S0} \\ \dot{z}_v = -(U_{S0} + u_S) \sin \Theta_{S0} - U_{S0} \theta_S \cos \Theta_{S0} + w_S \cos \Theta_{S0} \end{array} \right.$$

E

Decoupled Lateral-Directional Equations

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta Y_W = m \cdot (U_{W0} \cdot r_W - g \cdot \phi_W \cos \Theta_{W0}) \\ \dot{y}_V = U_{W0} \psi_W \cos \Theta_{W0} \\ \dot{\phi}_W = p_W + r_W \operatorname{tg} \Theta_{W0} \\ \dot{\psi}_W = \frac{r_W}{\cos \Theta_{W0}} \\ \dot{\beta} = r_W + p_B \sin \alpha - r_B \cos \alpha \end{array} \right.$$

- Derivate aerodinamiche

Al primo membro delle nostre equazioni ci sono le forze aerodinamiche e dobbiamo scrivere quelle forze. Si devono esprimere in funzione alla geometria del velivolo, alle variabili di stato (determinano la variazione dello stato del velivolo: la velocità u e w , teta e q per il piano longitudinale mentre v, p ed r per il latero direzionale) e in funzione di un comando del pilota (es. la manetta o la deflessione di alettoni o delle superfici mobili). Tutti questi elementi possono cambiare le condizioni di forze e momenti del mio velivolo. Allora devo trovare il modo di esprimere queste variazioni in funzioni delle variabili di stato, delle geometrie, della deflessioni ecc.

In genere le azioni aerodinamiche dipendono dalla condizione iniziale e da tutta la storia che c'è dietro ed è un fenomeno non lineare. Si fa però un'assunzione e cioè che le forze e i momenti dipendono linearmente dai loro parametri che li generano. In questo modo f può essere scritta come:

$$F(t) = F(0) + \int_0^t w(t - \tau) \cdot \frac{dp}{d\tau} \cdot d\tau$$

Dove $f(0)$ sono le condizioni iniziali. Questo è il primo passo per definire le derivate aerodinamiche.

Questa equazione ci dice che la funzione peso esprime una relazione analitica tra l'azione aerodinamica ed il parametro che ne causa la variazione. Questa la riscriviamo nella forma:

Quindi se ritorniamo alle nostre equazioni scritte precedente che esprimevano le variazioni delle forze e momenti nei due piani possiamo scrivere che:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta X_S(t) \\ \Delta Z_S(t) \\ \Delta M_S(t) \end{array} \right\} = f(u_S(t), w_S(t), \theta_S(t), q(t), \delta_e(t), \Delta T)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta Y_S(t) \\ \Delta L_S(t) \\ \Delta N_S(t) \end{array} \right\} = f(v_S(t), p_S(t), r_S(t), \delta_a(t), \delta_r(t))$$

(S indica assi stabilità; più avanti li omettiamo ma sono ancora di stabilità).

- Come ci arriviamo a scrivere le derivate? Usiamo metodi di brian e si dice che: se abbiamo una variazione di azione aerodinamica che iniziamo a considerare da una condizione iniziale (assunta di equilibrio), le forze che agiscono si possono esprimere in funzione della espansione in serie di taylor, dei parametri di stato e di controllo e delle loro derivate prime e seconde rispetto al tempo; per la delta Xs:

$$\Delta X_S = f(u_S, \dot{u}_S, \ddot{u}_S, \dots, w_S, \dot{w}_S, \ddot{w}_S, \dots, \theta_S, \dot{\theta}_S, \ddot{\theta}_S, \dots, \delta_e, \dot{\delta}_e)$$

Se la scriviamo in forma espansa allora si ha:

$$\Delta X_S(t) = X_{Su} u_S + \frac{1}{2} X_{Suu} u_S^2 + \dots + X_{S\dot{u}} \dot{u}_S + \frac{1}{2} X_{S\dot{u}\dot{u}} \dot{u}_S^2 + \dots$$

Dove abbiamo che

$$X_{Su} = \partial X_S / \partial u_S \quad X_{Suu} = \partial^2 X_S / \partial u_S^2$$

Trascurando i termini di ordine superiore (applicando la teoria delle piccole perturbazioni; si trascurano i quadrati delle perturbazioni) e si ottiene che:

Ritornano alle nostre equazioni complete (visto che quello appena fatto risolve solo il primo membro)
avremo che:

Longitudinal Plane Equations

$$\left\{ \begin{array}{l} X_u u + X_w w + \Delta T = m \cdot (\dot{u} + g\theta \cos \Theta_0) \\ Z_u u + Z_w w + Z_{\dot{w}} \dot{w} + Z_q \cdot q + Z_{\delta_e} \delta_e = m \cdot (-U_0 q + \dot{w} + g\theta \sin \Theta_0) \\ M_u u + M_w w + M_{\dot{w}} \dot{w} + M_q q + M_{\delta_e} \delta_e = I_y \dot{q} \\ \dot{\theta} = q \\ \dot{x}_v = (U_0 + u) \cdot \cos \Theta_0 - U_0 \theta \sin \Theta_0 + w \sin \Theta_0 \\ \dot{z}_v = -(U_0 + u) \cdot \sin \Theta_0 - U_0 \theta \cos \Theta_0 + w \cos \Theta_0 \end{array} \right.$$

mentre nel piano latero direzionale si ha:

Lateral-Directional Plane Equations

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_v v + Y_p p + Y_r r + Y_{\delta_r} \delta_r = m(\dot{v} + U_0 r - g\phi \cos \Theta_0) \\ L_v v + L_p p + L_r r + L_{\delta_r} \delta_r + L_{\delta_a} \delta_a = I_x \dot{p} - I_{xz} \dot{r} \\ N_v v + N_p p + N_r r + N_{\delta_r} \delta_r + N_{\delta_a} \delta_a = I_z \dot{r} - I_{xz} \dot{p} \\ \dot{\phi} = p + r \cdot \operatorname{tg} \Theta_0 \\ \dot{\psi} = \frac{r}{\cos \Theta_0} \\ \dot{y}_v = U_0 \psi \cos \Theta_0 + v \end{array} \right.$$

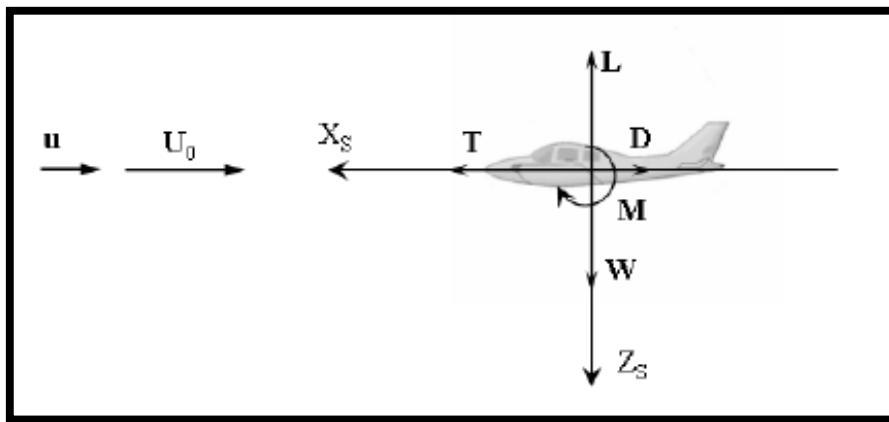
Di questo abbiamo ancora la descrizione degli angoli di eulero e per la posizione si ha solo $Y'v$.

Quindi se sappiamo esprimere le derivate aerodinamiche siamo in grado di risolvere le equazioni che esprimono il comportamento dinamico del velivolo. Il problema è adesso di saper calcolare queste derivate. Queste sono tutte derivate dimensionali e quindi dipendono dai dati geometrici del velivolo (dimensioni) e dalle condizioni di volo (quota di volo, dalla velocità di volo) e dalle caratteristiche aerodinamiche che

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{V} = \begin{bmatrix} U_0 + u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Con u che rappresenta la perturbazione.

Esaminiamo giusto la prima delle derivate. Partiamo da condizioni di volo stazionario; il nostro schema sarà:



Abbiamo la portanza L perché abbiamo piccolo angolo per via delle piccole perturbazioni, così la L coincide con la componente lungo Z_s . La velocità sarà uguale a:

$$V = \sqrt{(U_0 + u)^2} \cong U_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{2 \cdot u}{U_0}}$$

Potendo trascurare le potenze dei termini perturbati abbiamo la condizione scritta sopra (con buona approssimazione). Le nostre equazioni le scriviamo come: la x pari alla spinta più un delta T (incremento) meno il valore della resistenza in condizioni di equilibrio più la variazione di resistenza e le esprimiamo pco la relazione solita (1/2...):

$$\begin{cases} X = T_e + \Delta T - (D_e + \Delta D) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot U^2 \cdot C_T - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot U^2 \cdot C_D \\ Z = -(L_e + \Delta L) = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot U^2 \cdot C_L \end{cases}$$

Assuming that $C_D \ll C_L$, we can write the derivative as:

$$Z_{\dot{w}} = \left(\frac{\partial Z}{\partial \dot{w}} \right)_{U=U_0} \cong \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot U_0 \cdot \left(\frac{\partial(-C_L)}{\partial \dot{\alpha}} \right)_{\alpha=\alpha_0}$$

Se devo esprimere in funzione di coefficienti adimensionali anche il tempo deve essere adimensionale, per cui si è inventato il tempo adimensionale, cioè si è detto che t sarà pari a:

$$t = \frac{c}{2 \cdot U_0} \hat{t} \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial \hat{t}} \cdot \frac{2 \cdot U_0}{c}$$

Questo e da fare tutte le volte che c'è una funzione del tempo.

E così possiamo arrivare alla sua espressione finale che è:

$$Z_{\dot{w}} = -\frac{1}{4} \cdot \rho \cdot S \cdot c \cdot C_{L\alpha}$$

-Lo stesso per il piano latero direzionale il cui database delle derivate è:

STATE AND CONTROL VARIABLES	v	p	r	δ_a	δ_r
DERIVATIVES	Y_v	Y_p	Y_r	Y_{δ_a}	Y_{δ_r}
	L_v	L_p	L_r	L_{δ_a}	L_{δ_r}
	N_v	N_p	N_r	N_{δ_a}	N_{δ_r}

Le derivate che avremo calcolato saranno:

LATERAL-DIRECTIONAL PLANE DERIVATIVE			
DERIVATIVE		M.U.	COMMENT
Y_v	$Y_v = \frac{1}{2} \rho S U_0^2 C_{Y_v}$	kg/s	$Y_{\beta} = \frac{1}{2} \rho S U_0^2 C_{Y_{\beta}}$
Y_p	$Y_p = \frac{\rho S U_0^2 b}{4} C_{Y_p}$	kg m/s	
Y_r	$Y_r = \frac{\rho S U_0^2 b}{4} C_{Y_r}$	kg m/s	
$Y_{\dot{\alpha}}$	$\frac{1}{2} \rho S U_0^2 C_{Y_{\dot{\alpha}}}$	kg m/s ²	
$Y_{\dot{\alpha}_r}$	$\frac{1}{2} \rho S U_0^2 C_{Y_{\dot{\alpha}_r}}$	kg m/s ²	
L_v	$L_v = \frac{1}{2} \rho S U_0^2 b C_{L_v}$	kg m/s	$L_{\beta} = \frac{1}{2} \rho S U_0^2 b C_{L_{\beta}}$
L_p	$L_p = \frac{\rho S U_0^2 b^2}{4} C_{L_p}$	kg m ² /s	
L_r	$L_r = \frac{\rho S U_0^2 b^2}{4} C_{L_r}$	kg m ² /s	
$L_{\dot{\alpha}}$	$\frac{1}{2} \rho S U_0^2 b C_{L_{\dot{\alpha}}}$	kg m ² /s	
$L_{\dot{\alpha}_r}$	$\frac{1}{2} \rho S U_0^2 b C_{L_{\dot{\alpha}_r}}$	kg m ² /s	
N_v	$N_v = \frac{1}{2} \rho S U_0^2 b C_{N_v}$	kg m/s	$N_{\beta} = \frac{1}{2} \rho S U_0^2 b C_{N_{\beta}}$
N_p	$N_p = \frac{\rho S U_0^2 b^2}{4} C_{N_p}$	kg m ² /s	
N_r	$N_r = \frac{\rho S U_0^2 b^2}{4} C_{N_r}$	kg m ² /s	
$N_{\dot{\alpha}}$	$\frac{1}{2} \rho S U_0^2 b C_{N_{\dot{\alpha}}}$	kg m ² /s	
$N_{\dot{\alpha}_r}$	$\frac{1}{2} \rho S U_0^2 b C_{N_{\dot{\alpha}_r}}$	kg m ² /s	

Una volta calcolate, il passo successivo sarà scrivere l'equazione in forma adimensionale perché altrimenti occorrerebbero derivate specifiche per ogni velivolo singolo; con l'adimensionalizzazione si riesce a farne valere il risultato per una classe di velivoli che rispettano i parametri di adimensionalizzazione. Così misurando un coefficiente in galleria del vento su un modello in scala, questi possono essere trasportati al velivolo al vero. Prima di questo però diciamo quanto segue.

-Possiamo valutare le derivate aerodinamiche in diversi sistemi di riferimento e imponiamo ad esempio di averle valutate in assi stabilità (solo con azioni aerodinamiche):

$$\begin{aligned}
 [\Delta F]_{F_2} &= [L_{21}] \cdot [\Delta F]_{F_1} \\
 [\Delta M]_{F_2} &= [L_{21}] \cdot [\Delta M]_{F_1} \\
 [\Delta V]_{F_1} &= [L_{21}]^{-1} \cdot [\Delta V]_{F_2} \\
 [\Delta \dot{V}]_{F_1} &= [L_{21}]^{-1} \cdot [\Delta \dot{V}]_{F_2} \\
 [\Delta \omega]_{F_1} &= [L_{21}]^{-1} \cdot [\Delta \omega]_{F_2}
 \end{aligned}$$

Per cui possiamo dire che se voglio esprimere le variazioni delle forze aerodinamiche nel sistema F2 avremo che (da ricordarsi):

$$\begin{aligned}
 [\Delta F]_{F_2} &= \{ [L_{21}] \cdot [A_1]_{F_1} \cdot [L_{21}]^{-1} \} \cdot [\Delta V]_{F_2} \\
 &+ \{ [L_{21}] \cdot [A_2]_{F_1} \cdot [L_{21}]^{-1} \} \cdot [\Delta \dot{V}]_{F_2} + \{ [L_{21}] \cdot [A_3]_{F_1} \cdot [L_{21}]^{-1} \} \cdot [\Delta \omega]_{F_2} \\
 [\Delta M]_{F_2} &= \{ [L_{21}] \cdot [B_1]_{F_1} \cdot [L_{21}]^{-1} \} \cdot [\Delta V]_{F_2} \\
 &+ \{ [L_{21}] \cdot [B_2]_{F_1} \cdot [L_{21}]^{-1} \} \cdot [\Delta \dot{V}]_{F_2} + \{ [L_{21}] \cdot [B_3]_{F_1} \cdot [L_{21}]^{-1} \} \cdot [\Delta \omega]_{F_2}
 \end{aligned}$$

Questo vuol dire che la matrici A1,A2,A3 in F2 sono uguali al prodotto della matrice L21 per il prodotto delle matrici A per ancora L21-1 e lo stesso per i momenti (da sapere a memoria):

$$\begin{cases}
 [A_i]_{F_2} = [L_{21}] \cdot [A_i]_{F_1} \cdot [L_{21}]^{-1} \\
 [B_i]_{F_2} = [L_{21}] \cdot [B_i]_{F_1} \cdot [L_{21}]^{-1}
 \end{cases} \quad 1 \leq i \leq 3$$

Quindi siamo in grado di trasformare le derivate da un sistema di riferimento ad un altro.

- se vogliamo trovare la matrice di trasformazione tra gli assi stabilità e gli assi generici, l'angolo di eulero era alfa e si ha:

Longitudinal plane derivatives

$$\left\{ \begin{aligned} X_u^* &= X_u \cos^2 \varepsilon - (X_w + Z_u) \sin \varepsilon \cos \varepsilon + Z_w \sin^2 \varepsilon \\ X_w^* &= X_w \cos^2 \varepsilon + (X_u - Z_w) \sin \varepsilon \cos \varepsilon - Z_u \sin^2 \varepsilon \\ Z_u^* &= Z_u \cos^2 \varepsilon - (Z_w - X_u) \sin \varepsilon \cos \varepsilon - X_w \sin^2 \varepsilon \\ Z_w^* &= Z_w \cos^2 \varepsilon + (Z_u - X_w) \sin \varepsilon \cos \varepsilon + X_u \sin^2 \varepsilon \\ Z_{\dot{w}}^* &= Z_{\dot{w}} \cos^2 \varepsilon \\ M_u^* &= M_u \cos \varepsilon - M_w \sin \varepsilon \\ M_w^* &= M_w \cos \varepsilon + M_u \sin \varepsilon \\ M_q^* &= M_q \\ M_{\dot{w}}^* &= M_{\dot{w}} \cos \varepsilon \end{aligned} \right.$$

e per il piano latero direzionale:

Lateral-directional plane derivatives

$$\left\{ \begin{aligned} Y_v^* &= Y_v \\ Y_p^* &= Y_p \cos \varepsilon - Y_r \sin \varepsilon \\ Y_r^* &= Y_r \cos \varepsilon + Y_p \sin \varepsilon \\ L_v^* &= L_v \cos \varepsilon - N_v \sin \varepsilon \\ L_p^* &= L_p \cos^2 \varepsilon - (L_r + N_p) \sin \varepsilon \cos \varepsilon + N_r \sin^2 \varepsilon \\ L_r^* &= L_r \cos^2 \varepsilon - (N_r - L_p) \sin \varepsilon \cos \varepsilon - N_p \sin^2 \varepsilon \\ N_v^* &= N_v \cos \varepsilon + L_v \sin \varepsilon \\ N_p^* &= N_p \cos^2 \varepsilon - (N_r - L_p) \sin \varepsilon \cos \varepsilon - L_r \sin^2 \varepsilon \\ N_r^* &= N_r \cos^2 \varepsilon + (L_r + N_p) \sin \varepsilon \cos \varepsilon + L_p \sin^2 \varepsilon \end{aligned} \right.$$

La stessa cosa si può fare in forma adimensionale:

I termini per adimensionalizzare invece sono questi:

<u>Dimensional Term</u>	<u>Parameter</u>	<u>Adimensional Term</u>
Force	$\frac{1}{2}\rho S U_0^2$	C_F
Moment	$\frac{1}{2}\rho S c U_0^2$	C_m
Weight	$\frac{1}{2}\rho S U_0^2$	$C_{We} = C_{Le}$
q	$2U_0/c$	\hat{q}
Mass	$\frac{1}{2}\rho S c$	μ
I_y	$\left(\frac{c}{2}\right)^3 \rho S$	\hat{I}_y
t	$\frac{c}{2U_0}$	\hat{t}
u,w	U_0	\hat{u}, α
d()/dt	$2U_0/c$	D
x,z	$c/2$	\hat{x}, \hat{z}

Dobbiamo ricordarci tutti.

Fatte queste premesse andiamo a sostituire il tutto e si otterrà:

$$\frac{m \cdot (\dot{u} + g\theta \cos \Theta_0)}{\frac{1}{2}\rho S U_0^2} = \frac{\mu \rho S c 2 U_0^2 D\dot{u}}{2c \frac{1}{2}\rho S U_0^2} + \frac{mg\theta \cos \Theta_0}{\frac{1}{2}\rho S U_0^2} =$$

$$= 2\mu D\dot{u} + C_{We} \theta \cos \Theta_0$$

E quindi la nostra prima equazione adimensionalizzata valida in modo generale è:

$$(C_{Tu} - C_{Du}) \cdot \hat{u} + (C_{Le} - C_{D\alpha}) \cdot \alpha + \Delta C_T = 2\mu D\hat{u} + C_{We} \theta \cos \Theta_0$$

Questa per la prima e lo stesso ragionamento vale per le altre. Per la seconda, lungo l'asse z si ha:

$$(2C_{Le} + C_{Lu}) \cdot \hat{u} + (C_{L\alpha} + C_{De}) \cdot \alpha +$$

$$+ C_{L\dot{\alpha}} D\alpha + C_{L\delta_e} \delta_e = 2\mu \cdot (\hat{q} - D\alpha) - C_{We} \theta \sin \Theta_0$$

NB: The derivative Z_q is neglected.

Unica cosa da notare e che la Z_q qui è trascurabile perché è molto piccola rispetto alle altre che compaiono lungo l'asse z.

Per l'equazione di momento è:

$$C_{mu} \hat{u} + C_{m\alpha} \alpha + C_{m\dot{\alpha}} D\alpha + C_{mq} \hat{q} + C_{m\delta_e} \delta_e = \hat{I}_y D\hat{q}$$

Dove la lunghezza di riferimento è la C.

Abbiamo poi le equazioni cinematiche che sono:

2.6.2 Lateral directional plane

Summarizing equations for lateral-directional plane:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta Y_S = m \cdot (\dot{v}_S + U_{S0} r_S - g \phi_S \cos \Theta_{S0}) \\ \Delta L_S = I_x \dot{p}_S - I_{xz} \dot{r}_S \\ \Delta N_S = I_z \dot{r}_S - I_{xz} \dot{p}_S \\ \phi_S = p_S + r_S \operatorname{tg} \Theta_{S0} \\ \psi_S = \frac{r_S}{\cos \Theta_{S0}} \\ \dot{y}_V = U_{S0} \psi_S \cos \Theta_{S0} + v_S \end{array} \right.$$

I coefficienti che vengono utilizzati per adimensionalizzare sono:

Dimensional Term	Factor	Adimensional Term
Force	$\frac{1}{2} \rho S U_0^2$	C_F
Moment	$\frac{1}{2} \rho S b U_0^2$	C_m
Weight	$\frac{1}{2} \rho S U_0^2$	$C_{W_e} = C_{L_e}$
p, r	$2U_0/b$	\hat{p}, \hat{r}
Mass	$\frac{1}{2} \rho S c$	μ

E

$$\begin{aligned}
 & (m\dot{v} + mU_0\dot{r} - mg\phi \cos \Theta_0) \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}\rho S U_0^2} = \\
 & = \left(\frac{\mu\rho S c}{2} \frac{\partial(\beta U_0)}{\partial(\hat{r} \frac{c}{2U_0})} + \frac{\mu\rho S c}{2} \cdot U_0 \cdot \hat{r} \cdot \left(\frac{2U_0}{b} \right) - mg\phi \cos \Theta_0 \right) \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}\rho S U_0^2} = \\
 & = 2\mu D\beta + 2\frac{c}{b}\mu\hat{r} - C_{We}\phi \cos \Theta_0
 \end{aligned}$$

$$C_{Y\beta}\beta + C_{Yp}\hat{p} + C_{Yr}\hat{r} + C_{Y\delta_a}\delta_a + C_{Y\delta_r}\delta_r = 2\mu D\beta + \frac{2\mu}{A}\hat{r} - C_{We}\phi \cos \Theta_0$$

Lo stesso per il momento di rollio:

$$C_{l\beta}\beta + C_{lp}\hat{p} + C_{lr}\hat{r} + C_{l\delta_a}\delta_a + C_{l\delta_r}\delta_r = A \cdot (\hat{I}_x D\hat{p} - \hat{I}_{xz} D\hat{r})$$

Lo stesso per il momento d'imbardata (non indicare la derivata o il momento di rollio adimensionale con la L maiuscola altrimenti ci sono ambiguità con il coefficiente di portanza):

$$C_{n\beta}\beta + C_{np}\hat{p} + C_{nr}\hat{r} + C_{n\delta_a}\delta_a + C_{n\delta_r}\delta_r = A \cdot (\hat{I}_z D\hat{r} - \hat{I}_{xz} D\hat{p})$$

Per le condizioni cinematiche allo stesso modo:

$$D\phi = \frac{1}{A} (\hat{p} + \hat{r} \operatorname{tg} \Theta_0)$$

e per la seconda:

Longitudinal Dynamics

$$(C_{Tu} - C_{Du}) \cdot \hat{u} + (C_{Le} - C_{D\alpha}) \cdot \alpha + \Delta C_T = 2\mu D\hat{u} + C_{We}\theta \cos \Theta_0$$

$$(2C_{Le} + C_{Lu}) \cdot \hat{u} + (C_{L\alpha} + C_{De}) \cdot \alpha + C_{L\dot{\alpha}} D\alpha + C_{L\delta_e} \delta_e = 2\mu(\hat{q} - D\alpha) - C_{We}\theta \sin \Theta_0$$

$$C_{mu}\hat{u} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\dot{\alpha}}D\alpha + C_{mq}\hat{q} + C_{m\delta_e}\delta_e = \hat{I}_y D\hat{q}$$

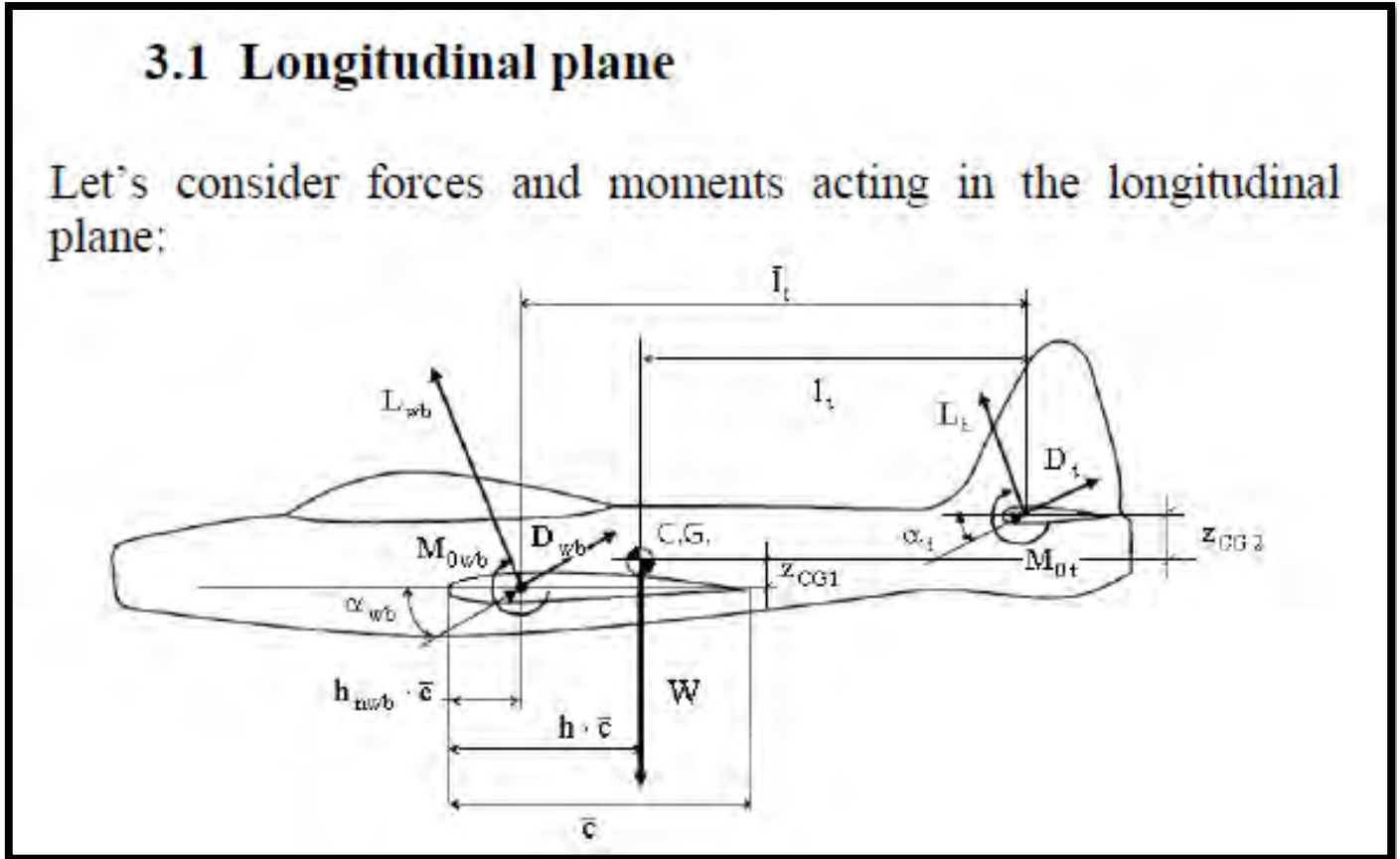
$$D\theta = \hat{q}$$

$$D\hat{x}_v = \cos \Theta_0 + \hat{u} \cos \Theta_0 - \theta \sin \Theta_0 + \alpha \sin \Theta_0$$

$$D\hat{z}_v = -\theta \cos \Theta_0 + \alpha \cos \Theta_0 - \hat{u} \sin \Theta_0 - \sin \Theta_0$$

E per il latero direzionale si ha:

Partiamo dal piano longitudinale (ricordarsi di fare il disegno decentemente). Vediamo la vista longitudinale:



Dobbiamo definire una serie di grandezze. Serve distinguere tra sistema ala-fusoliera e coda (impennaggio verticale); si considera separatamente anche l'incidenza come si può vedere in figura: una è α_{wb} che è quella del velivolo senza la coda mentre quella α_{fat} è quella del piano coda. Partiamo dalle forze e i momenti: perpendicolare alla direzione della velocità (in base all'incidenza) è la portanza L_{wb} , lungo la velocità ci sarà resistenza, avrò poi il momento focale di portanza nulla M_{0wb} . Poi nell'impennaggio: sulla coda non è la stessa che c'è sull'ala, ma varia per via del downwash: il flusso che investe l'ala viene deviato dal profilo alare e quindi sulla coda non arriva il flusso con la stessa incidenza con cui arriva sull'ala (l'unico caso in cui l'incidenza è la stessa è nel velivolo canard; effetto d_w su ala è irrilevante). Avremo una portanza di coda anche qua perpendicolare alla velocità, la resistenza, il momento a portanza nulla M_0 .

Vediamo le distanze: \bar{c} segnato è la corda media aerodinamica, la h va da cg al bordo di attacco, la h_{nwb} è la distanza dal centro aerodinamico al bda; la distanza z_{cg1} è la distanza dal baricentro al piano ala fusoliera; z_{cg2} è la distanza dal piano coda da quello del baricentro; la distanza dai due centri aerodinamici si chiama \bar{l}_t segnato; la distanza dal centro aerodinamico ala fusoliera e baricentro è \bar{l}_t .

Così abbiamo definito tutto. Ora scriviamo l'equazione delle forze aerodinamiche lungo z e quella dei momenti intorno a y , per cui si ha (trascurando le forze propulsive e peso):

$$l_t = \bar{l}_t - (h - h_{nwb}) \cdot \bar{c}$$

$$\Downarrow$$

$$M = M_{0wb} + (L_{wb} + L_t) \cdot (h - h_{nwb}) \cdot \bar{c} - L_t \cdot \bar{l}_t$$

Questa è l'espressione che noi utilizziamo (ci svincoliamo dalla posizione del baricentro per scrivere il momento). Ora siamo in grado di scrivere le equazioni che esprimono l'equilibrio del nostro velivolo ed allora utilizziamo la forza peso e dovremo considerare anche le manovre e quindi introdurre il fattore di carico e quindi si ha:

$$\begin{cases} n_z \cdot W = L_{wb} + L_t \\ M_{0wb} + (L_{wb} + L_t) \cdot (h - h_{nwb}) \cdot \bar{c} = L_t \cdot \bar{l}_t \end{cases}$$

La condizione di equilibrio per il momento è che $M=0$ e per questo si scrive come sopra. Questo ragionamento, fisicamente, ci porta ad essere in grado di calcolare la portanza sulla coda per avere il velivolo in equilibrio (curvatura dell'impennaggio orizzontale per avere condizioni di equilibrio) e quindi si ricava L_t come:

$$L_t = \frac{M_{0wb} + n_z W \cdot (h - h_{nwb}) \cdot \bar{c}}{\bar{l}_t}$$

Così ricaviamo il valore della portanza in coda. Abbiamo trovato il punto di equilibrio, ma adesso dobbiamo verificare le condizioni per cui il nostro velivolo è stabile. E tutto il ragionamento che andremo a fare si tradurrà in un diagramma del tipo:

$$|\Delta M| = 0 \Rightarrow h_n = h_{nwb} + \frac{\Delta L_t}{\Delta L_{wb} + \Delta L_t} \cdot \frac{\bar{l}_t}{\bar{c}}$$

Così ricaviamo la coordinata del punto neutro h_n . Ora come calcolo le due delta L? semplicemente si esprimono in funzione dei coefficienti aerodinamici:

$$\begin{cases} \Delta L_t = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S_t \cdot V_t^2 \cdot \Delta C_{L_t} \\ \Delta L = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot V^2 \cdot \Delta C_L \end{cases}$$

Attenzione però ai coefficienti: per la L_t bisogna fare attenzione ai coefficienti perché faranno riferimento a quelle del piano di coda, la cui velocità con cui è investito è diverso da quella dell'ala. Quindi faremo riferimento alla superficie di coda e come velocità di riferimento quella dell'impennaggio orizzontale. Esplicitando le variazioni di forza così, andando a sostituirle si trova come valore di h_n :

$$h_n = h_{nwb} + \frac{\Delta C_{L_t}}{\Delta C_L} \cdot \frac{S_t}{S} \cdot \frac{\bar{l}_t}{\bar{c}} \cdot \frac{V_t^2}{V^2}$$

Abbiamo che:

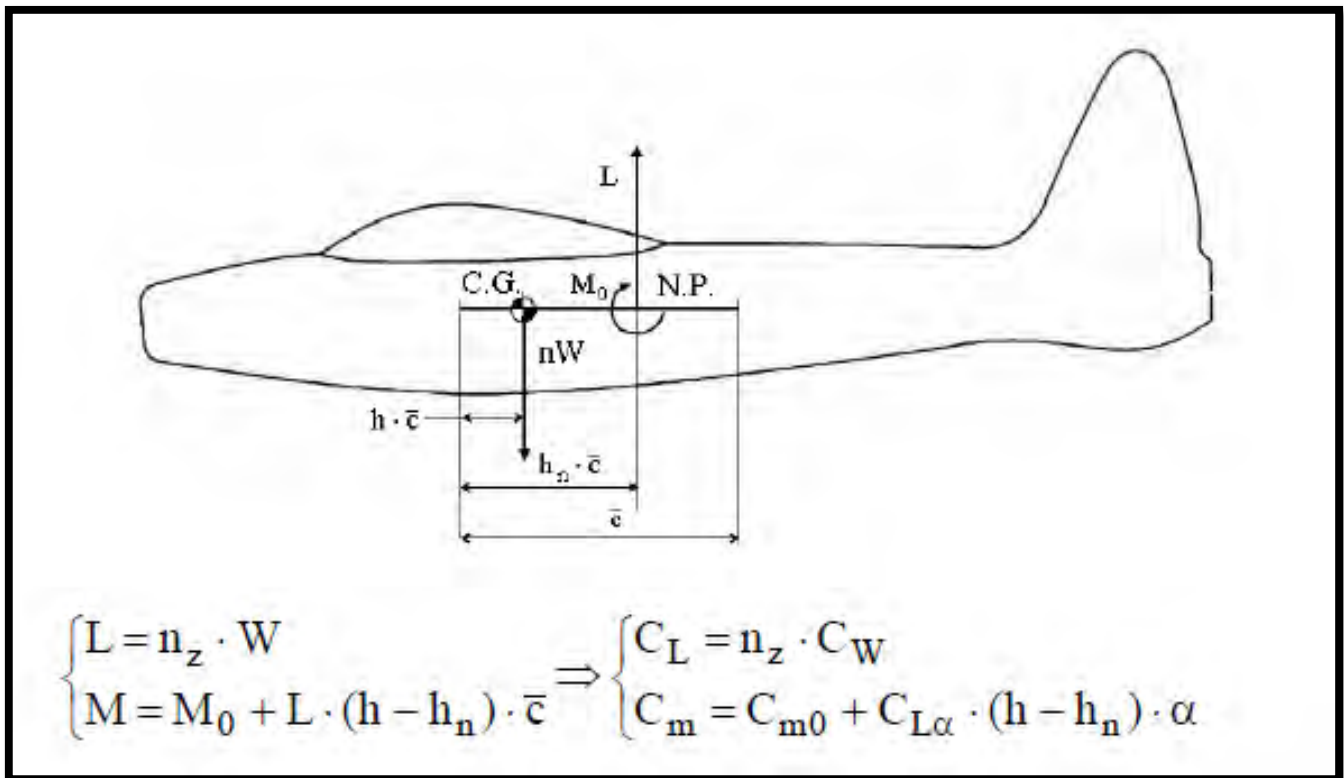
$$\bullet \bar{V}_H = \frac{S_t}{S} \cdot \frac{\bar{l}_t}{\bar{c}} \text{ is defined as horizontal tail volume}$$

si chiama rapporto volumetrico di coda. Compare poi anche:

$$\bullet \eta_t = V_t^2 / V^2 \text{ is defined as tail efficiency and takes into account for wing - horizontal tail interference phenomena (usually, } \eta_t < 1)$$

Che si chiama rendimento di coda ed è quello che ci esprime in qualche modo del fatto che c'è una riduzione d'incidenza, e quindi di velocità, sull'impennaggio orizzontale rispetto al profilo alare, di fatti è minore di 1.

- Considerando la posizione del punto neutro e immaginando di applicare le azioni aerodinamiche nel punto neutro le nostre equazioni diventano come scritte in figura:



Facendo ora la derivata di c_m in α , sarà pari a:

$$\frac{\partial C_m}{\partial \alpha} = C_{m\alpha} = C_{L\alpha} \cdot (h - h_n)$$

Questo significa che la derivata $c_{m\alpha}$ è la derivata che ci da la misura della stabilità statica longitudinale del velivolo perché ci da una misura della resistenza in beccheggio del nostro velivolo. Ci rappresenta la molla. Perché esprima la rigidità del velivolo dev'essere $c_{m\alpha} < 0$. (se aumento incidenza il momento deve ridurmela ecc) ecco così che sulla curva di sopra dove il $c_{m\alpha}$ è negativo si rappresenta la condizione di rigidità del velivolo mentre la condizione di equilibrio è $c_{m0} > 0$. Questo porta a dire che ci sono una serie di condizioni da considerare(il velivolo può avere $c_{m0} > 0$ e $c_{m\alpha} < 0$; oppure $c_{m0} > 0$ e $c_{m\alpha} > 0$ equilibrabile ma non stabile; $c_{m0} < 0$ e $c_{m\alpha} > 0$ stabile ma non può essere in equilibrio oppure può avere $c_{m0} < 0$ e $c_{m\alpha} < 0$ non equilibrabile e non stabile; sono le condizione in cui possiamo trovarci). Dovremmo giocare sulla posizione del baricentro quindi in quanto è affar nostro. Possiamo centrare il velivolo o dare una serie di posizioni per cui il velivolo è stabile.

Che $c_{m\alpha} < 0$ vuol dire che la posizione del baricentro dev'essere sempre davanti al punto neutro, perché se va dietro diventa maggiore di zero e il velivolo non è più stabile. Quindi non può andare dietro il punto neutro. Se voglio un velivolo altamente manovrabile vuol dire che dobbiamo avere un velivolo instabile e

$$|(\Delta L_{wb} + \Delta L_t) \cdot (h_{nwb} - h) \cdot \bar{c}| > |\Delta L_t \cdot \bar{l}_t|$$

E così la variazione del delta m sarà:

$$|\Delta M| = |(\Delta L_{wb} + \Delta L_t) \cdot (h_{nwb} - h) \cdot \bar{c}| - |\Delta L_t \cdot \bar{l}_t|$$

Andando a scrivere allo stesso modo di prima la coordinata del punto neutro abbiamo che:

$$h_n = h_{nwb} - \frac{a_t \cdot \Delta \alpha_t}{C_{L\alpha} \cdot \Delta \alpha} \cdot \bar{V}_H$$

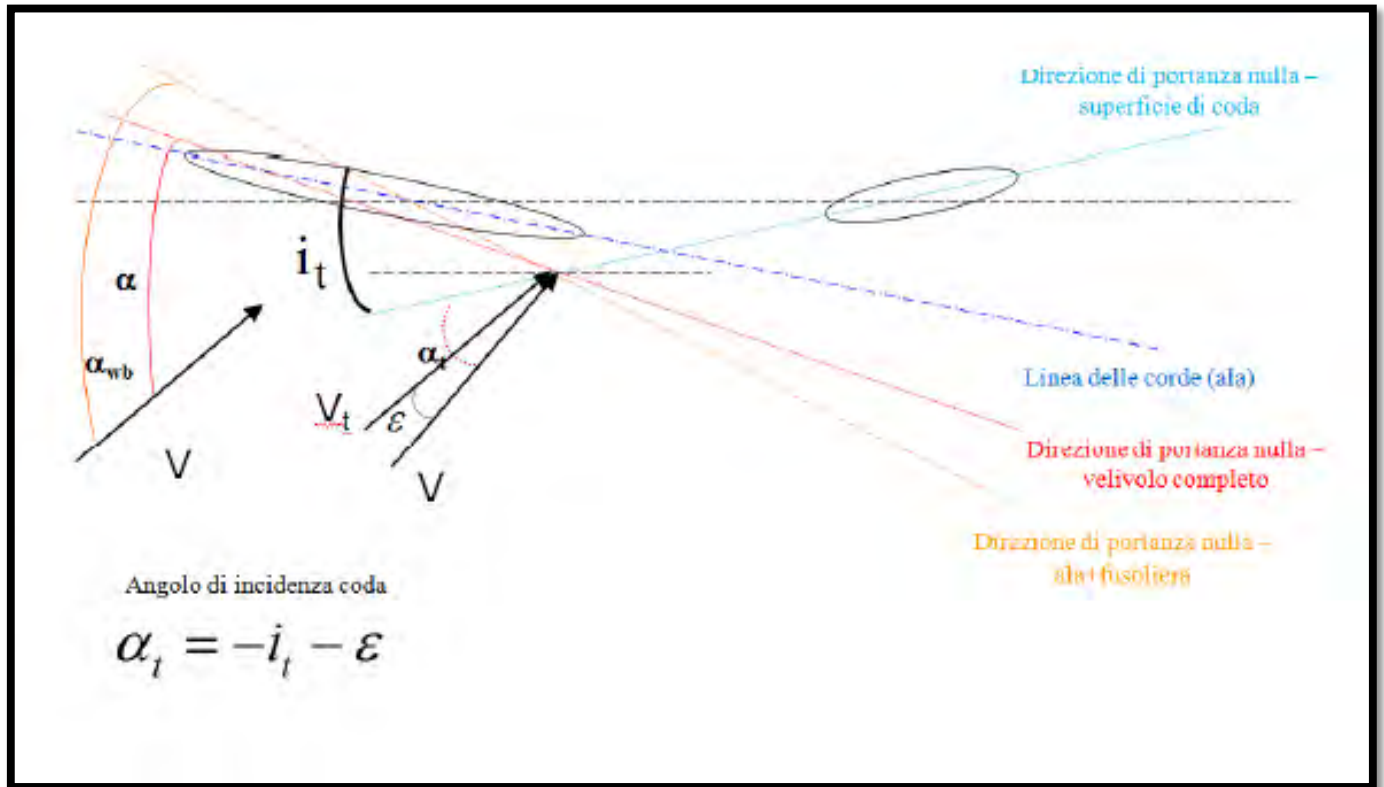
Per cui le condizioni di stabilità statica non variano per il canard, il baricentro dev'essere davanti al punto neutro. Ora però se si ha una certa posizione del baricentro, all'aumentare del volume di coda fa andare indietro il punto neutro. L'aumentare della superficie di coda ci fa aumentare la stabilità perché porta indietro il punto neutro, ma nel canard se aumentiamo la superficie del canard il punto neutro si sposta in avanti e quindi a parità di baricentro riduco la rigidezza in beccheggio ed ecco perché le superfici del canard sono più piccole rispetto a quelle tradizionali.

- Ora vediamo di valutare i coefficienti di portanza che abbiamo introdotto e vediamo come calcolarli riferiti alla direzione di portanza nulla del nostro velivolo. Per far questo riprendiamo le nostre equazioni della portanza e vediamo come esprimerle (QUESTA ERA UNA DOMANDA D'ESAME). Partiamo dalle espressioni della portanza e di L_{wb} ed L_t :

$$L = L_{wb} + L_t$$

$$\begin{cases} L_{wb} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot V^2 \cdot C_{Lwb} \\ L_t = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S_t \cdot V_t^2 \cdot C_{Lt} \end{cases}$$

Lo stesso disegno di prima è questo e mostra:



Abbiamo un alfa effettivo minore che è dato da quello di sopra. Così andando a scriverci quanto vale epsilon si ha:

$$\begin{cases} \epsilon = \epsilon_0 + \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \cdot \alpha_{wb} \Rightarrow \alpha_t = \alpha_{wb} \left(1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) + i_t - \epsilon_0 \\ \alpha_t = \alpha_{wb} + i_t - \epsilon \end{cases}$$

Così abbiamo l'espressione di alfa come sopra. Così epsilon è quello che andiamo a chiamare downwash.

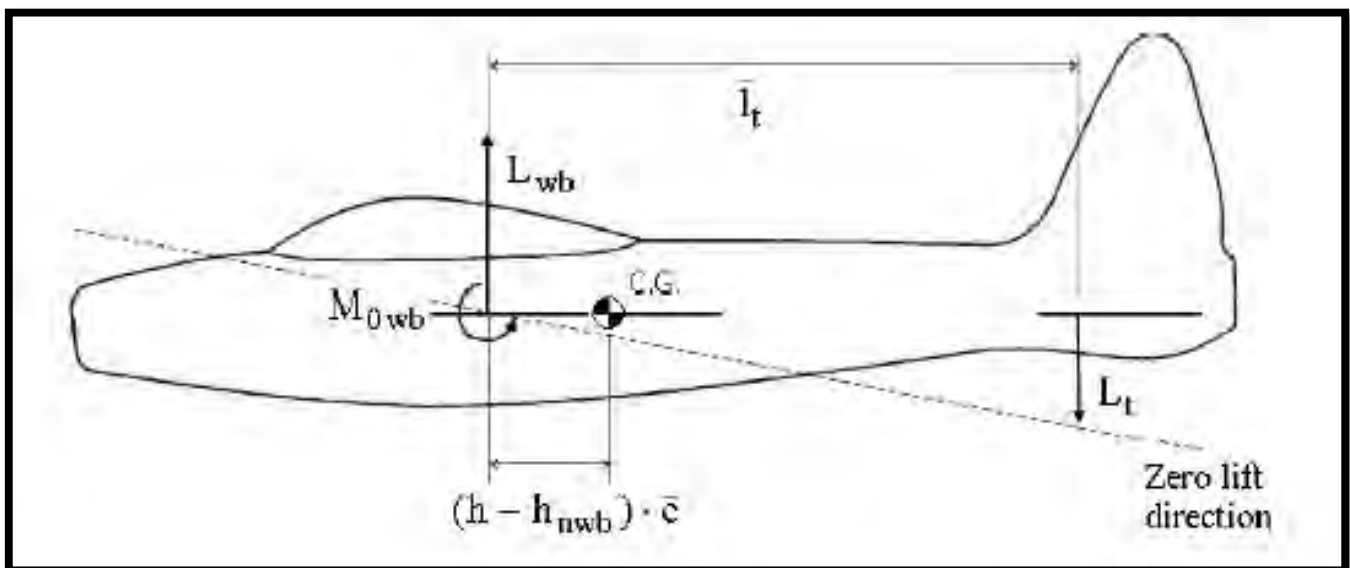
Adesso andando a sostituire tutto questo al CL abbiamo che:

Meccanica del volo del 28-10-2014

Ora valutiamo il momento di beccheggio riferito alla direzione di portanza nulla. Scriviamo il momento rispetto alla corda media aerodinamica che non varia al variare della posizione del baricentro; l'equazione che avevamo già scritto diventa:

$$M = M_{0wb} + (L_{wb} + L_t) \cdot (h - h_{nwb}) \cdot \bar{c} - L_t \cdot \bar{l}_t$$

Prendiamo questa figura:

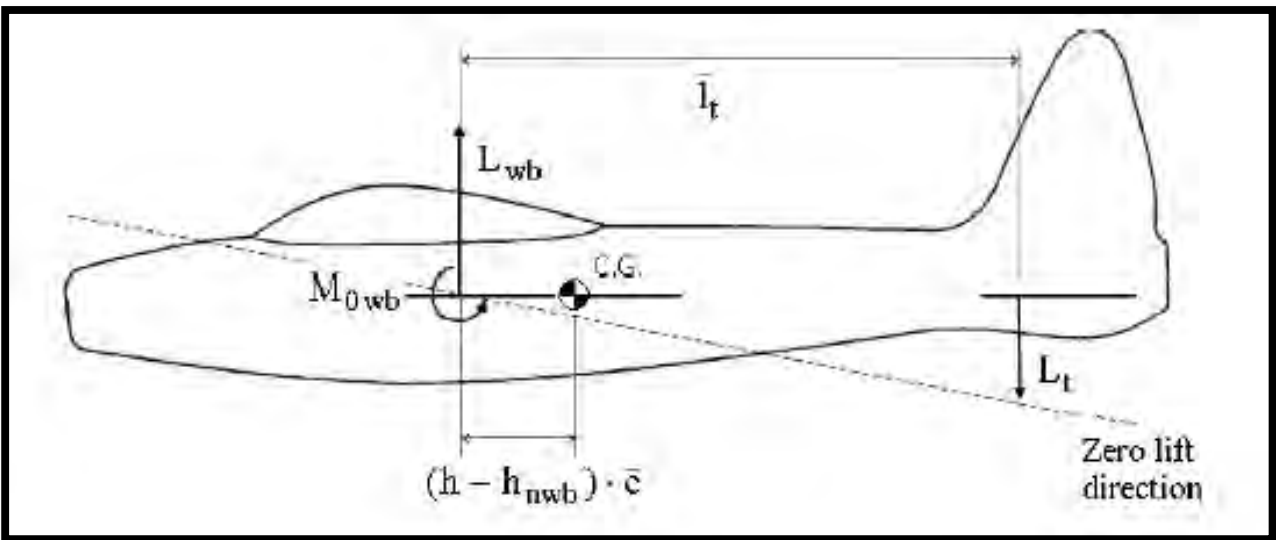


Alla quale segniamo la direzione di portanza nulla i momenti e le portanze. Ora adimensionalizziamo l'equazione di sopra con queste forze (in pratica facciamo come fatto con la portanza):

$$C_m = C_{m0wb} - \bar{V}_H \cdot a_t \cdot (i_t - \varepsilon_0) \cdot \left[1 - \frac{a_t}{C_{L\alpha}} \cdot \frac{S_t}{S} \cdot \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) \right] +$$

$$+ \left[C_{L\alpha} \cdot (h - h_{nwb}) - \bar{V}_H \cdot a_t \cdot \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) \right] \cdot \alpha = C_{m0} + C_{m\alpha} \cdot \alpha$$

dove il primo termine è indipendente dalla incidenza mentre l'altro lo è: così il primo sarà c_{m0} mentre il secondo $c_{m\alpha} \cdot \alpha$. Abbiamo che c_{m0} ci dice quanto vale il momento di beccheggio per incidenza α uguale a zero (vuol dire che la portanza totale del velivolo è uguale a zero). Vuol dire che i momenti per l'ala fusoliera e la portanza dell'ala in coda sono uguali in modulo:



-Quali sono le condizioni operative del nostro velivolo? Facciamo riferimento al grafico della stabilità statica longitudinale. Dobbiamo volare in condizioni di equilibrio. Dobbiamo trimmare il velivolo per condizioni di α maggiori di zero. Allora noi abbiamo che il $C_{m0wb} > 0$ e allora tutto l'altro termine dev'essere minore di zero e il suo valore assoluto dev'essere maggiore del C_{m0wb} :

$$\bar{V}_H \cdot a_t \cdot (i_t - \varepsilon_0) \cdot \left[1 - \frac{a_t}{C_{L\alpha}} \cdot \frac{S_t}{S} \cdot \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) \right] < 0$$

$$\left| \bar{V}_H \cdot a_t \cdot (i_t - \varepsilon_0) \cdot \left[1 - \frac{a_t}{C_{L\alpha}} \cdot \frac{S_t}{S} \cdot \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) \right] \right| > |C_{m0wb}|$$

così ricaviamo la variazione del punto neutro con i dati di sopra e si ottiene:

$$h_n = h_{nwb} + \bar{V}_H \cdot \frac{a_t}{C_{L\alpha}} \cdot \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right)$$

Lo stesso risultato si può ottenere tramite il cm (perché il punto neutro è un punto dove il momento non dipende dall'angolo d'incidenza):

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha} \cdot \alpha = \text{cost} \Rightarrow C_{m\alpha} = 0$$

In questo modo si ha:

$$h_n = h_{nwb} + \bar{V}_H \cdot \frac{a_t}{C_{L\alpha}} \cdot \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right)$$

- ora il velivolo ha altri elementi che possono dare momento da tenere conto, per esempio le gondole motore o i serbatoi esterni. Il velivolo ha tutta una serie di elementi che occorre tenerne conto. Andando a vedere tutti questi elementi si ha:

$$C_m = C_{m0_w} + C_{L_w} \cdot (h - h_{nw}) + (C_{m0_i} + C_{m_b}) + C_{m_p}$$

Ora c_{m0_i} e c_{m_b} inglobiamo il contributo al momento di beccheggio della fusoliera e degli altri corpi assial simmetrici. C_{m_p} invece è il contributo del sistema propulsivo.

Se andiamo a valutare la derivata di questo momento di beccheggio in funzione dell'incidenza sull'ala, si ha:

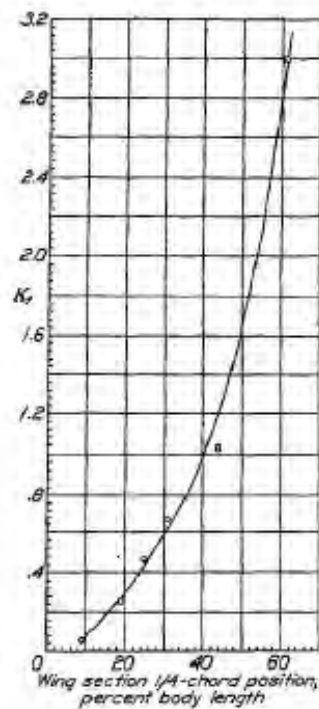
$$\frac{\partial C_m}{\partial \alpha_w} = a_w \cdot (h - h_{nw}) + \frac{\partial C_{m_b}}{\partial \alpha_w} + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha_w}$$

$$\frac{dC_{m_b}}{dC_{L_w}} = \frac{k_f \cdot w_f^2 \cdot l_f}{S_w \cdot \bar{c} \cdot a_w}$$

- w_f : max width
- l_f : length
- S_w : wing surface
- a_w : wing lift curve slope
- \bar{c} : mean aerodynamic chord

si entra con un valore in questo grafico e si esce con un altro valore da inserire nella formula:

- k_f : empirical coefficient computed in function of geometrical parameters



Si vedrà ad esercitazione.

- Per il sistema propulsivo ovviamente il contributo al momento del sistema propulsivo dipende dal Cl_w . Nel caso di un propulsore possiamo dire che:

Se adimensionalizziamo otteniamo che:

$$C_{m_p} = \frac{M_p}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot \bar{c}} = \frac{S_p}{S} \cdot \frac{l_p}{\bar{c}} \cdot C_{Np}$$

E andando a calcolare la derivata otteniamo infine:

$$\frac{dC_{m_p}}{dC_L} = \frac{S_p}{S} \cdot \frac{l_p}{\bar{c}} \cdot \frac{\partial C_{Np}}{\partial C_L}$$

Dove di solito questa derivata è positiva. Quindi se è sempre positiva il segno della derivata dipende dalla posizione dell'elica nella configurazione che andiamo a considerare. I casi sono:

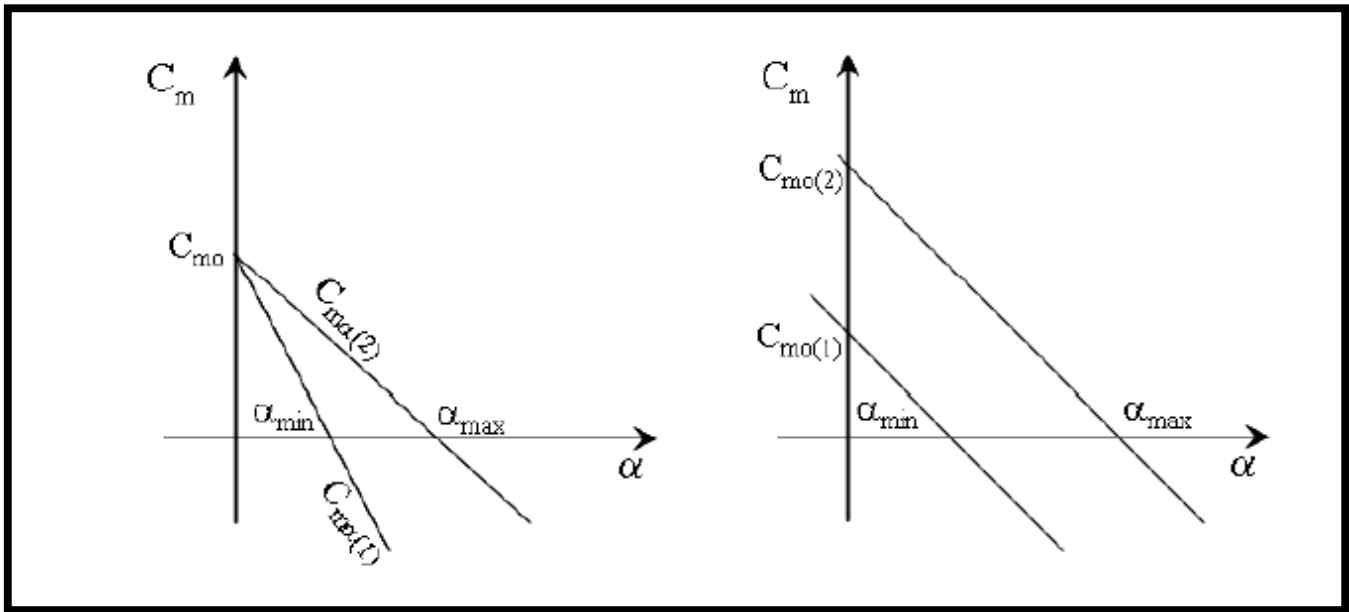
$$\text{TRACTOR: } l_p > 0 \Rightarrow \frac{dC_{m_p}}{dC_L} > 0 : \text{reduction in stability}$$

$$\text{PUSHER: } l_p < 0 \Rightarrow \frac{dC_{m_p}}{dC_L} < 0 : \text{increase in stability}$$

Se è positiva c'è riduzione della stabilità del velivolo mentre se è negativa allora abbiamo un incremento della stabilità.

Il velivolo deve opporsi alla variazione generata dall'esterno indipendente dai controlli.

-Controlli del velivolo. Vediamo i controlli senza spinta o trazione. Il pilota interviene sulla deflessione delle superfici mobili per variare la sua traiettoria e il suo assetto. Vediamo ora i vari controlli che si possono avere:



Tutto questo senza intervenire direttamente. Cambiare il baricentro sembrerebbe la scelta migliore. Il problema però è difficile. Allora si gioca sul C_{m0} . Cerchiamo di capire che cosa lo influenza, si ha che:

$$C_{m0} = C_{m0wb} - \bar{V}_H \cdot a_t \cdot (i_t - \varepsilon_0) \cdot \left[1 - \frac{a_t}{C_{L\alpha}} \cdot \frac{S_t}{S} \cdot \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) \right]$$

Di tutti questi parametri cosa possiamo variare? α_{st} è decisa in base al livello di stabilità che si vuole dare. Clalfa è dato, epsilon anche. L'unica cosa su cui possiamo giocare è variare i_t , cioè il calettamento di coda. Quindi o ruotiamo l'impennaggio orizzontale o direttamente tutto come in figura:

$$C_L = \left(C_{Lwb} + C_{Lt} \cdot \frac{S_t}{S} \cdot \frac{V_t^2}{V^2} \right) + \Delta C_{L(\delta_e)} = C_{L\alpha} \cdot \alpha + \Delta C_{L(\delta_e)}$$

e lo stesso ragionamento si applica al momento che è pari ad un M_0 pari ad $i_t=0$ e un $\delta_e=0$ più il momento della portanza e più una variazione dovuta all'angolo δ_e :

$$M = M_{0(i_t=i_{t0};\delta_e=0)} + L \cdot (h - h_n) \cdot \bar{c} + \Delta M_{(\delta_e)}$$

E addimensionalizzando si ha:

$$C_m = C_{m0(i_t=i_{t0};\delta_e=0)} + C_{m\alpha} \cdot \alpha + \Delta C_{m(\delta_e)}$$

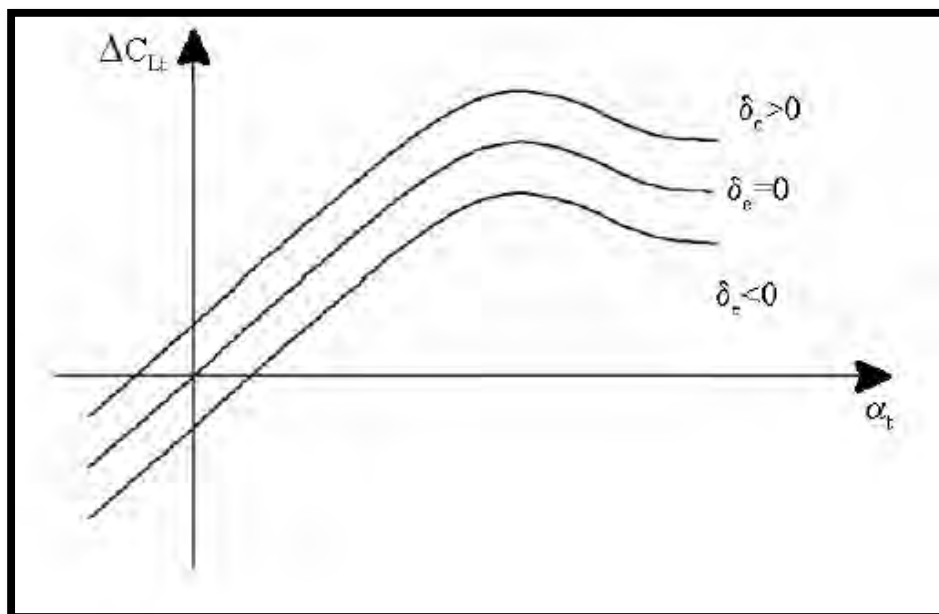
Le nostre due equazioni che useremo per descrivere le azioni aerodinamiche quando applichiamo un controllo aerodinamico sono:

$$\begin{cases} C_L = C_{L\alpha} \cdot \alpha + \Delta C_{L(\delta_e)} \\ C_m = C_{m0(i_t=i_{t0};\delta_e=0)} + C_{m\alpha} \cdot \alpha + \Delta C_{m(\delta_e)} \end{cases}$$

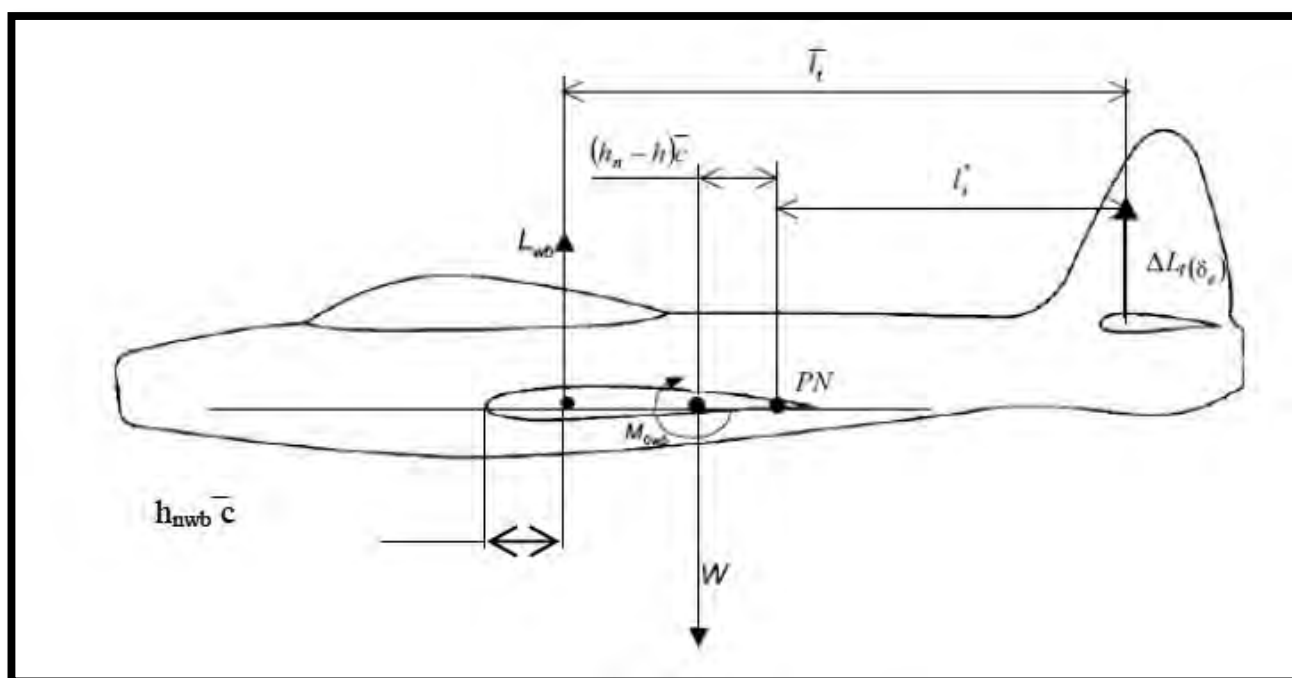
- abbiamo che :

$$\Delta L_{(\delta_e)} = \Delta L_{t(\delta_e)} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S_t \cdot V_t^2 \cdot a_e^* \cdot \delta_e$$

E poi



Il disegno sotto mostra le varie forze:



Dovendo scrivere la variazione di momento dovuta a δ_e si ha:

$$\Delta M_{(\delta_e)} = -\Delta L_{t(\delta_e)} \cdot l_t^* - \Delta L_{t(\delta_e)} \cdot (h_n - h) \cdot \bar{c}$$

Con la trasposizione dei momenti si avrà che l_t^* diventa:

Facendo la derivata infine troviamo che:

$$C_{m\delta_e} = \frac{\partial}{\partial \delta_e} (\Delta C_{m(\delta_e)}) = -a_e \cdot \bar{V}_H + C_{L\delta_e} \cdot (h - h_{nwb})$$

$$\Delta C_{m(\delta_e)} = C_{m\delta_e} \cdot \delta_e$$

Così possiamo scrivere infine che il C_L e il C_m possono essere scritti come:

$$\begin{cases} C_L = C_{L\alpha} \cdot \alpha + C_{L\delta_e} \cdot \delta_e \\ C_m = C_{m0} + C_{m\alpha} \cdot \alpha + C_{m\delta_e} \cdot \delta_e \end{cases}$$

(se $cm\delta_e$ è derivata; se $cm(\delta_e)$ si parla di coefficiente).

-In condizioni di trim abbiamo che:

$$\begin{cases} C_L = C_{Ltrim} \\ C_m = 0 \end{cases}$$

Così le equazioni vengono riscritte come:

$$\begin{cases} C_{Ltrim} = C_{L\alpha} \cdot \alpha_{trim} + C_{L\delta_e} \cdot \delta_{etrim} \\ C_m = C_{m0} + C_{m\alpha} \cdot \alpha_{trim} + C_{m\delta_e} \cdot \delta_{etrim} = 0 \end{cases}$$

Dove possiamo scrivere C_{Ltrim} come:

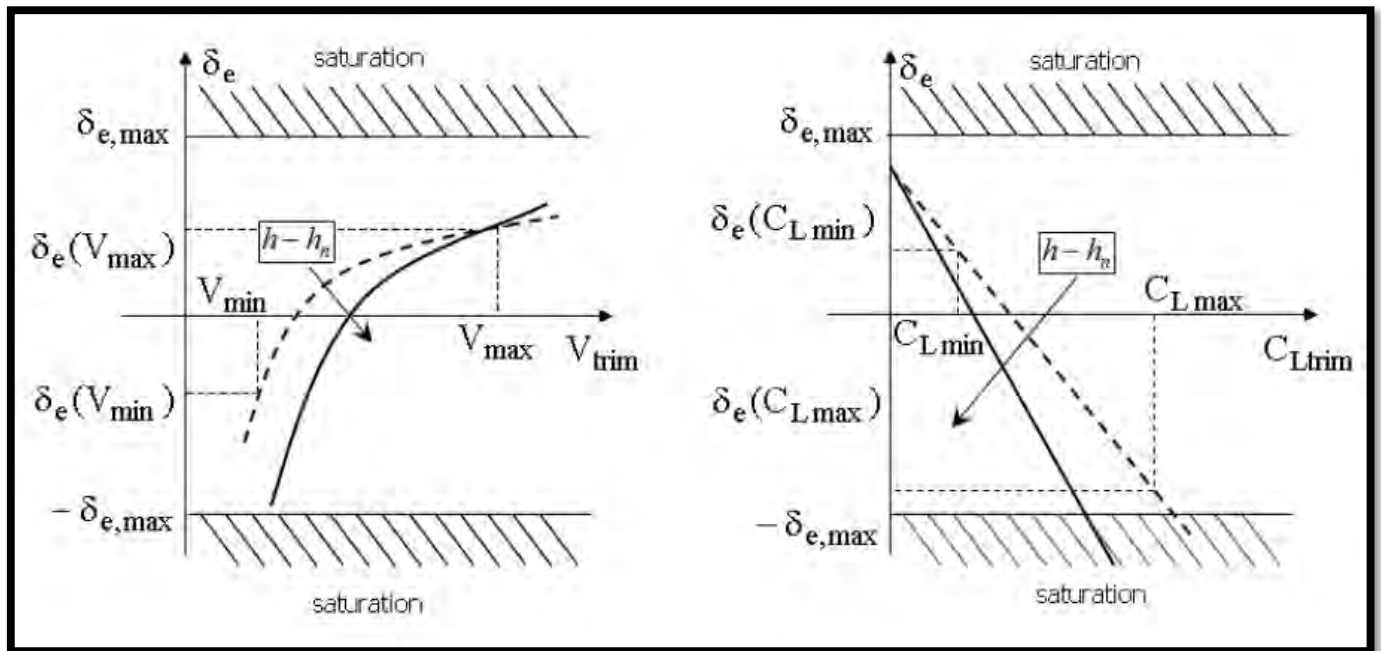
$$C_{Ltrim} = \frac{2 \cdot W/S}{\rho \cdot V_{trim}^2}$$

$$\delta_{e_{trim}} = - \frac{C_{m0} + C_{L_{trim}} (h - h_n)}{\left[C_{L_{\delta_e}} (h_n - h_{n_{wb}}) \right] - a_e \bar{V}_H}$$

$$\delta_{e_{trim}} = \frac{C_{m0}}{\Delta} + \frac{h - h_n}{\Delta} \cdot C_{L_{trim}}$$

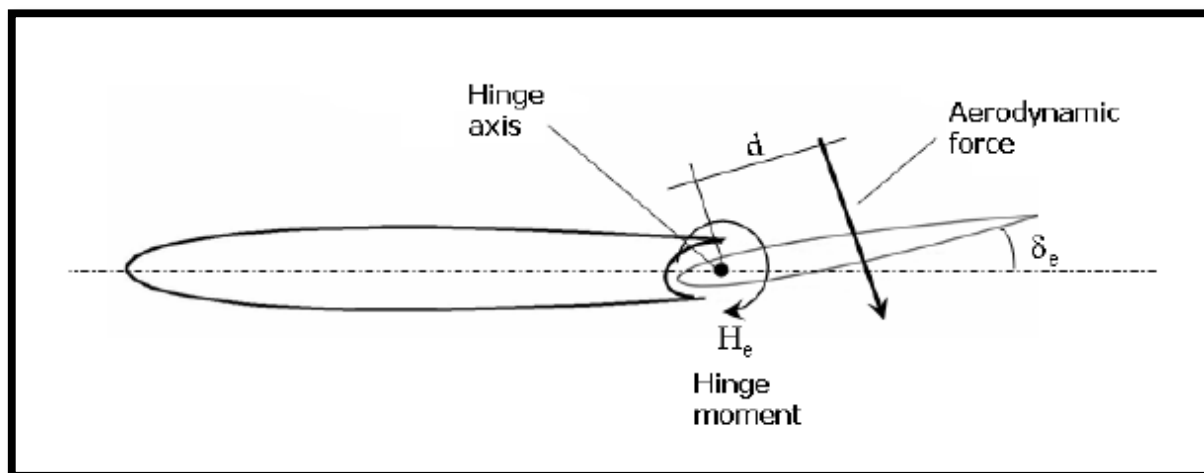
$$\Delta = \left[C_{L_{\delta_e}} (h_n - h_{n_{wb}}) \right] - a_e \bar{V}_H$$

-Prendiamo la curva a retta sopra (più facile ragionarci sopra). Vediamo che all'aumentare di $h-h_n$ la curva diventa sempre più pendente a parità di C_L .



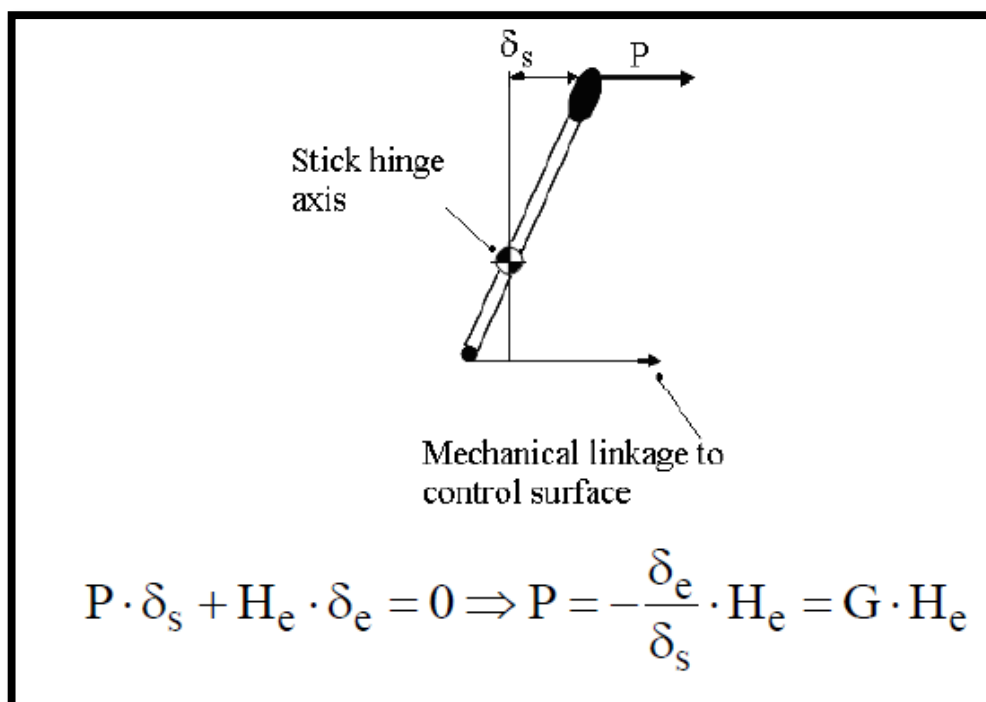
All'aumentare del margine statico aumenta la pendenza. Oltre un certo δ_e non avremo più la compensazione delle forze aerodinamiche. Abbiamo il valore del C_{Lmax} : e se voglio trimmare il mio velivolo per il C_{Lmax} vuol dire che la mia retta deve al limite passare per quel punto. Se però sposto ancora in avanti il baricentro allora la curva non raggiunge il C_{Lmax} se volessi trimmarlo a quel punto. Questo significa che il baricentro del nostro velivolo non può andare troppo avanti, e quindi abbiamo altri limiti. Altrimenti il nostro velivolo non è più controllabile.

Siccome ci serve un certo margine (di solito il 30% di escursione per la manovra) e vuol dire che la mia linea di saturazione devo portarla più in basso. Limitiamo l'escursione del baricentro in avanti.



Il momento di cerniera H_e va a generarsi per formare δ_e . Il momento si crea o con superfici mobili servocomandate o con gli sforzi di barra.

Vediamo cosa fa il pilota; per generare sto sforzo tira verso di se la barra come in figura:

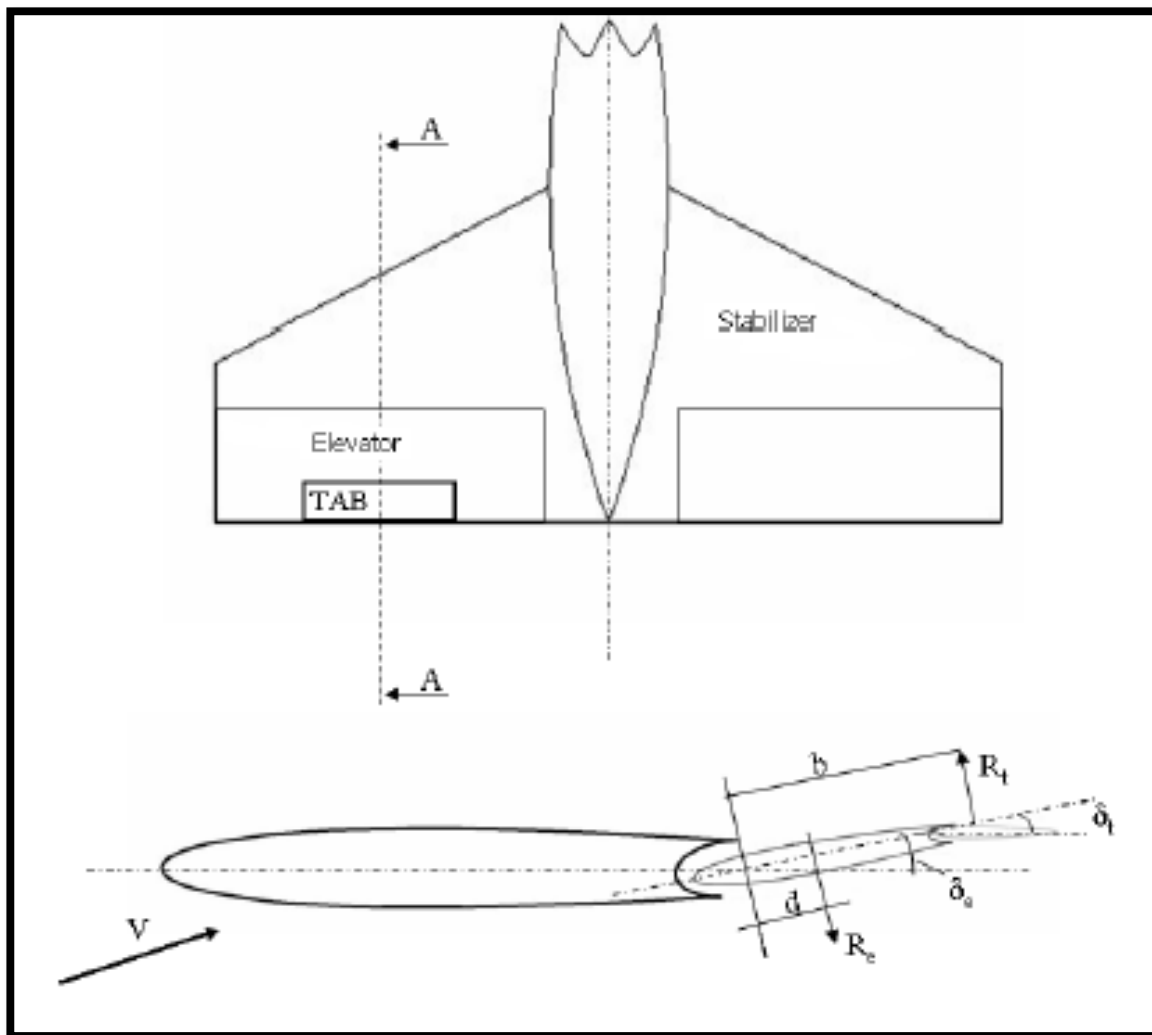


Con il principio dei lavori virtuali si ho ottiene la relazione di cui sopra. Quindi il momento di cerniera dipenderà dal rapporto di sopra. Il pilota può generare uno sforzo più grande per muovere la superficie. In questo caso otteniamo che:

Meccanica del volo del 29-10-2014

Cambiando assetto, si è inventata l'aletta tab al bordo di fuga dell'impennaggio orizzontale che permette di equilibrare il momento di cerniera quando defletto l'equilibratore. Azione molto piccola ma il braccio è grande per questo motivo si riesce ad equilibrare il momento (questo per il comando diretto). Questo è lo scopo dell'aletta trim.

Guardando la figura ne abbiamo una rappresentazione:



Dal disegno vediamo che: la V che si vede è la V_t; c'è il braccio d della forza R_e rispetto alla cerniera; abbiamo un momento R_e·d; se deflettiamo il tab verso il basso di un angolo δ_t tale per cui la forza aerodinamica R_t che si genera, avrà rispetto all'asse di cerniera (quello dove abbiamo la generazione del momento che agisce sulla nostra barra) un braccio b; ci basta che:

$$R_t \cdot b = R_e \cdot d$$

$$\delta_{\text{free}} = -\frac{1}{b_2} \cdot (b_0 + b_1 \cdot \alpha_t + b_3 \cdot \delta_t)$$

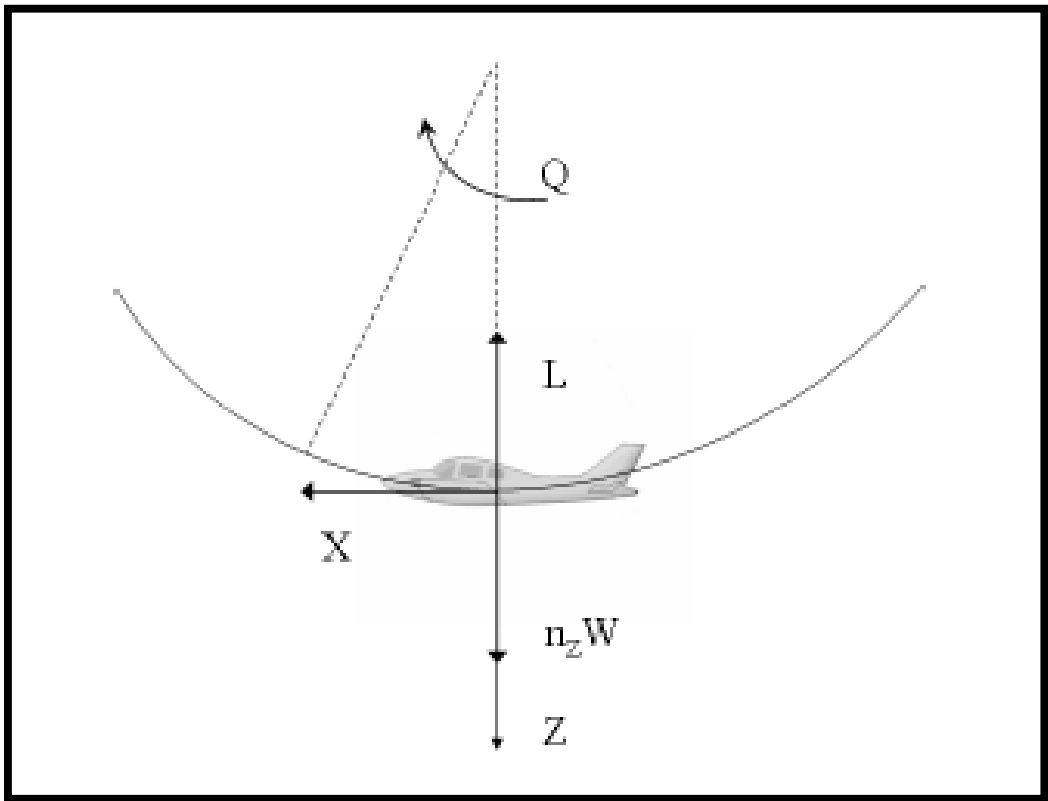
Qui non abbiamo momento di cerniera se ci mettiamo qui.

Per calcolare il trim invece devo fare lo stesso calcolo di prima rispetto a b_3 e troviamo il valore di deflessione del tab per cui si annulla il momento di cerniera (lo annullo io dando un δ_t diverso da zero):

$$\delta_{t(\text{trim})} = -\frac{1}{b_3} \cdot (b_0 + b_1 \cdot \alpha_t + b_2 \cdot \delta_{\text{etrim}})$$

Sono due angoli diversi perché nel primo ho un certo valore di δ_t mentre nel secondo lo calcolo io. Quindi la deflessione del tab dipenderà da quanto abbiamo scritto sopra.

-Vediamo la manovrabilità longitudinale. Facciamo la richiamata nel piano longitudinale, così da studiare e concludere il comportamento del velivolo nel piano longitudinale. Qui n_z non vale 1 (è sempre diverso da 1 ogni volta che effettua una manovra). Abbiamo che:

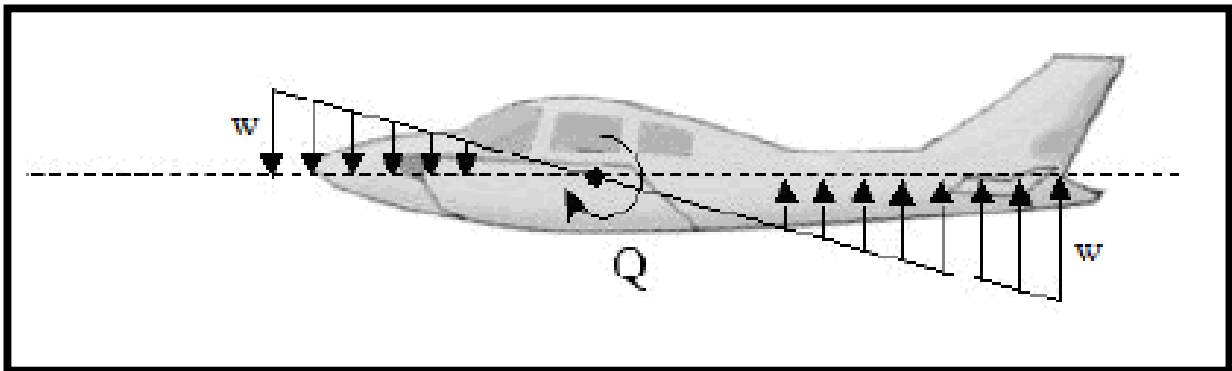


$$L = n_z \cdot W = W \cdot \left(1 + \frac{V \cdot Q}{g} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$Q = \frac{(n_z - 1) \cdot g}{V}$$

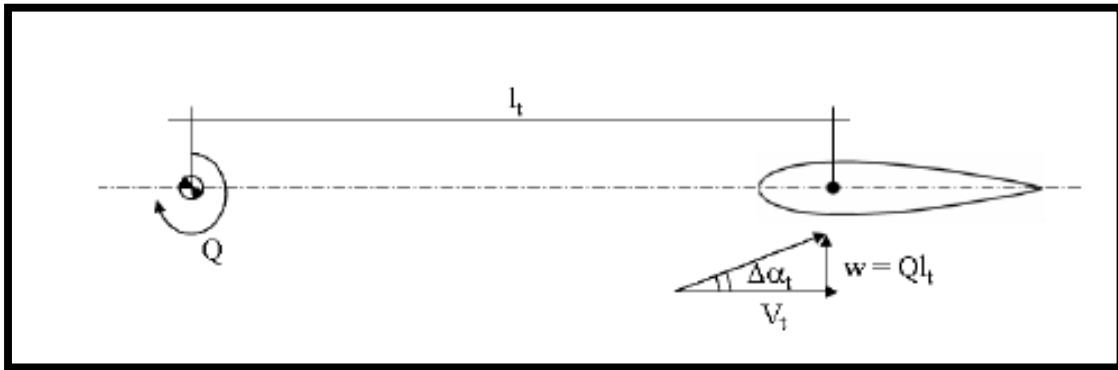
Così ricaviamo Q. Quali sono gli effetti di questa velocità angolare Q che induce sul velivolo? Genera una variazione dell'angolo d'incidenza. Se rappresento sul velivolo una velocità angolare Q in verso antiorario si hanno delle velocità lineari lungo z di questo tipo:



La velocità w che esce fuori è quella relativa quindi il verso rappresentato in figura è giusto. Ora andando ad adimensionalizzare la velocità Q otteniamo che (perché le derivate dimensionali non c'interessano):

$$\hat{q} = Q \cdot \frac{\bar{c}}{2 \cdot V}$$

Questa è l'espressione della velocità angolare di beccheggio che interviene a seguito di una richiamata nel piano longitudinale adimensionalizzata. Questo vuol dire che le variazioni delle azioni aerodinamiche (nel piano longitudinale sono portanza e momento di beccheggio) dovute alla presenza di una velocità angolare q, le possiamo esprimere come variazione del coefficiente di momento di portanza e di un coefficiente di momento di beccheggio e ciascuno dei due si può esprimere come derivata aerodinamica rispetto alla velocità angolare di q per la q adimensionalizzata. In formule si ha:



Noi abbiamo una variazione di velocità, e quindi sull'impennaggio arriva una v_t (usiamo la relativa per w); questa velocità ci produce una variazione d'incidenza sulla coda. Se abbiamo una variazione d'incidenza si avrà una variazione di portanza totale per cui il ΔL che misuro sarà solo un valore di δt . La esprimiamo come una forza aerodinamica per cui, adimensionalizzando subito dopo, si ha:

$$\Delta L \cong \Delta L_t = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S_t \cdot V_t^2 \cdot a_t^* \cdot \Delta \alpha_t$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta C_L = a_t^* \cdot \frac{S_t}{S} \cdot \frac{V_t^2}{V^2} \cdot \Delta \alpha_t = a_t \cdot \frac{S_t}{S} \cdot \Delta \alpha_t$$

Quindi la variazione di C_L dovuta alla velocità angolare Q che porta ad una accelerazione W sarà quella di sopra. Andando poi a sostituire il valore di $\Delta \alpha_t$ otteniamo che:

$$\Delta C_L = 2 \cdot a_t \cdot \frac{S_t}{S} \cdot \frac{l_t}{\bar{c}} \cdot \hat{q}$$

Così vediamo la dipendenza di q . Calcoliamo poi quanto vale la derivata e otteniamo:

$$\frac{\partial C_L}{\partial \hat{q}} = C_{Lq(t)} = 2 \cdot a_t \cdot \frac{S_t}{S} \cdot \frac{l_t}{\bar{c}} = 2 \cdot a_t \cdot V_H$$

N.B. $V_H \neq \bar{V}_H$ since $l_t \neq \bar{l}_t$.

$$\begin{cases} \Delta C_L = C_{L\alpha} \cdot \Delta\alpha + C_{L\delta_e} \cdot \Delta\delta_e + C_{Lq} \cdot \hat{q} \\ \Delta C_m = C_{m\alpha} \cdot \Delta\alpha + C_{m\delta_e} \cdot \Delta\delta_e + C_{mq} \cdot \hat{q} \end{cases}$$

Aggiungiamo un pezzo man mano che troviamo un effetto che agisce sul nostro velivolo.

-Ora dobbiamo ora far comparire nelle equazioni che noi scrivevamo (es Cltrim) dobbiamo far comparire il fattore di carico n_z , che ci da delle variazioni del velivolo rispetto alla posizione in cui si trova in generale. Scriviamo che:

$$\Delta L = n_z W - W = (n_z - 1) \cdot W \Rightarrow \Delta C_L = \frac{(n_z - 1) \cdot W}{\frac{1}{2} \rho S V^2}$$

Andiamo ora a sostituirlo alle equazioni sopra e abbiamo quanto scritto sotto. Per il momento (siccome siamo in condizioni di equilibrio; perché velivolo è trimmato) abbiamo che:

$$\begin{cases} \frac{(n_z - 1) \cdot W}{\frac{1}{2} \rho S V^2} = C_{L\alpha} \cdot \Delta\alpha + C_{L\delta_e} \cdot \Delta\delta_e + C_{Lq} \cdot \hat{q} \\ 0 = C_{m\alpha} \cdot \Delta\alpha + C_{m\delta_e} \cdot \Delta\delta_e + C_{mq} \cdot \hat{q} \end{cases}$$

Vediamo come lavorare nel primo termine. Nelle nostre equazioni di prima avevamo che:

$$Q = \frac{(n_z - 1) \cdot g}{V} \rightarrow \hat{q} = \frac{(n_z - 1) \cdot g \cdot \bar{c}}{2 \cdot V^2}; \quad C_{We} = \frac{2 \cdot W/S}{\rho V^2}$$

Così andando a sostituire i termini adimensionali trovati si può scrivere che:

$$\frac{\Delta\delta_e}{(n_z - 1)} = - \frac{C_{We} \cdot C_{L\alpha} \cdot (2 \cdot \mu - C_{Lq})}{2 \cdot \mu \cdot (C_{L\alpha} \cdot C_{m\delta_e} - C_{m\alpha} \cdot C_{L\delta_e})} \cdot \left\{ (h - h_n) + \frac{C_{mq}}{2 \cdot \mu - C_{Lq}} \right\}$$

Dove il termine tra parentesi graffa e quello che c'interessa. Così abbiamo la dipendenza dalla posizione del punto neutro. Possiamo fare una considerazione: siccome C_{Lq} al massimo vale 10, mentre μ è un valore molto grande, possiamo semplificare il tutto e scrivere che:

For conventional aircraft, $2 \cdot \mu \gg C_{Lq}$; hence:

$$\frac{\Delta\delta_e}{(n_z - 1)} \cong - \frac{C_{We} \cdot C_{L\alpha}}{(C_{L\alpha} \cdot C_{m\delta_e} - C_{m\alpha} \cdot C_{L\delta_e})} \cdot \left\{ (h - h_n) + \frac{C_{mq}}{2 \cdot \mu} \right\}$$

così possiamo valutare il tutto.

-La definizione che abbiamo dato di $\Delta\delta_e$, ci porta a definire sulla corda media aerodinamica un nuovo punto chiamato punto di manovra hm. La definizione è: è la particolare posizione del baricentro che ci annulla il $\Delta\delta_e/(n_z - 1)$. Vuol dire che se il baricentro finisce in questo punto, il mio velivolo può trovarsi ad entrare in una manovra curvilinea senza che il pilota vari la posizione dell'equilibratore, cioè senza $\Delta\delta_e$. La posizione sulla corda media aerodinamica ci aspettiamo che sia dietro il baricentro.

Vediamo come calcolarlo. Siccome il denominatore è una costante lo scriviamo come:

$$C_{L\alpha} \cdot C_{m\delta_e} - C_{m\alpha} \cdot C_{L\delta_e} = \Delta = \text{constant}$$

Per cui la scorsa espressione diventa (quella completa):

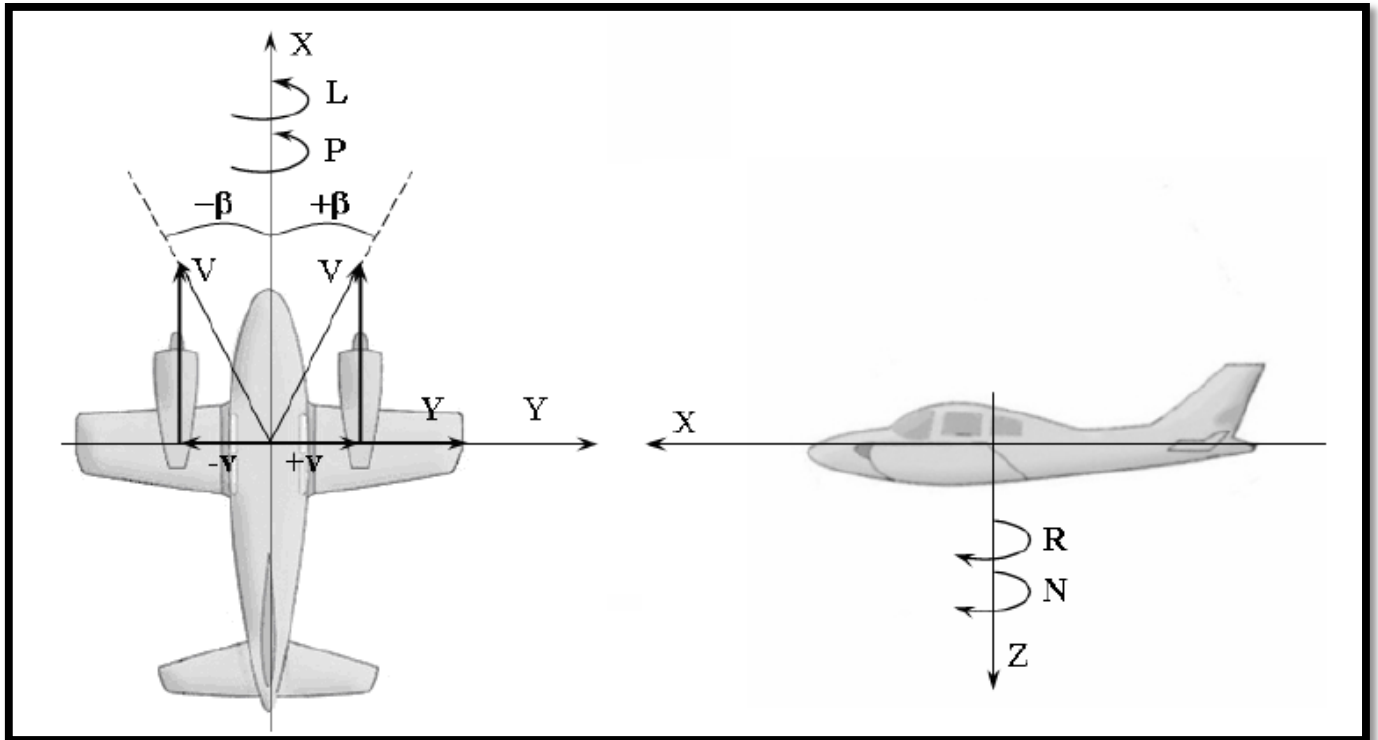
$$\frac{\Delta\delta_e}{(n_z - 1)} = - \frac{C_{We} \cdot C_{L\alpha} \cdot (2 \cdot \mu - C_{Lq})}{2 \cdot \mu \cdot \Delta} \cdot \left\{ h - h_n + \frac{C_{mq}}{2 \cdot \mu - C_{Lq}} \right\}$$

Ora dalla definizione di punto di manovra (dove il velivolo entra spontaneamente in una curva curvilinea senza avere un $\Delta\delta_e$), nella equazione andiamo ad uguagliare a zero e così $h = h_m$ e si ottiene:

Dove $h-h_m$ è il margine di manovra. La distanza dal baricentro al punto di manovra e il margine di manovra e se il velivolo è stabile sarà grande, mentre se è piccolo è più instabile il velivolo. Che vantaggio c'è nello spostarci più vicino al punto di manovra? Vuol dire che riesco ad entrare su traiettorie con una deflessione minore dell'equilibratore rispetto a quella che dovrei dare se il baricentro fosse più avanti. Così è più facile entrare in una manovra e si riduce la stabilità.

-Vediamo ora il Piano latero direzionale

Le forze e i momenti che agiscono in questo piano sono:



Dove:

Y: lateral force	$\beta = \arcsin(v/V) \cong v/V$: sideslip angle
L: rolling moment	P: angular velocity about X axis
N: yawing moment	R: angular velocity about Z axis

C'è una forza laterale, un momento di rollio e un momento d'imbardata. Abbiamo la generazione di un angolo β di derapata (imbardata riferita agli assi NED) pari a v/V . avremo poi le velocità angolari attorno a x e z.

Così abbiamo elencato le forze, momenti angoli di eulero e velocità che troviamo in questo piano. Quali sono le condizioni di equilibrio che possiamo scrivere se supponiamo di essere in condizioni di volo iniziali simmetrico (la sommatoria delle forze che agiscono lungo y è pari a zero, quelli attorno a x ecc...) in formule:

$$\beta > 0 \Rightarrow N > 0.$$

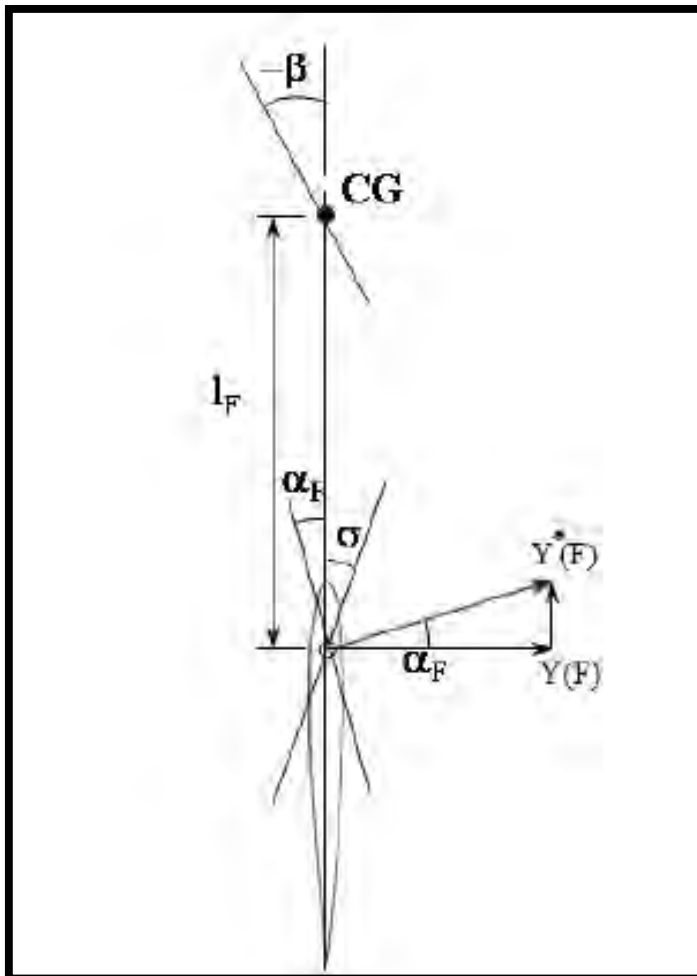
Per cui la derivata che esprime la stabilità nel piano direzionale è:

$$\frac{\partial C_n}{\partial \beta} = C_{n\beta} > 0$$

Dev'essere positiva affinché il velivolo sia stabile. (si definisce rigidità d'imbardata).

I contributi principali alla rigidità d'imbardata sono dati dall'insieme ala fusoliera, dal sistema propulsivo e dall'impennaggio verticale. Di solito il contributo che da il sistema ala-fusoliera è un contributo negativo: vuol dire che il $cm\beta(wb)$ è negativo (si vede sperimentalmente) e questo significa che tanto più è negativo il contributo che mi da l'insieme wb, tanto più devo incrementare il contributo dell'impennaggio verticale per ottenere un $cm\beta > 0$.

Vediamo il caso del caso dell'impennaggio verticale (qua β è negativo per esercizio):



$$C_{Y(F)} = \frac{Y(F)}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot V^2} = \frac{S_F}{S} \cdot \frac{V_F^2}{V^2} \cdot a_F^* \cdot \left[\sigma_0 - \left(1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \right) \cdot \beta \right] =$$

$$= \frac{S_F}{S} \cdot \eta_v \cdot a_F^* \cdot \left[\sigma_0 - \left(1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \right) \cdot \beta \right] = \frac{S_F}{S} \cdot a_F \cdot \left[\sigma_0 - \left(1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \right) \cdot \beta \right]$$

Dove η_v è la vertical tail efficiency. Raccogliendo e ottimizzando le varie cose e andando a fare la derivata rispetto a β otteniamo:

$$C_{Y\beta(F)} = \frac{\partial C_{Y(F)}}{\partial \beta} = -a_F \cdot \frac{S_F}{S} \cdot \left(1 - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \right)$$

In questo modo possiamo esprimere C_Y come il prodotto della derivata per β :

$$C_{Y(F)} = C_{Y\beta(F)} \cdot \beta$$

$$Y(F) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_F^2 \cdot S_F \cdot C_{Y(F)} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_F^2 \cdot S_F \cdot C_{Y\beta(F)} \cdot \beta$$

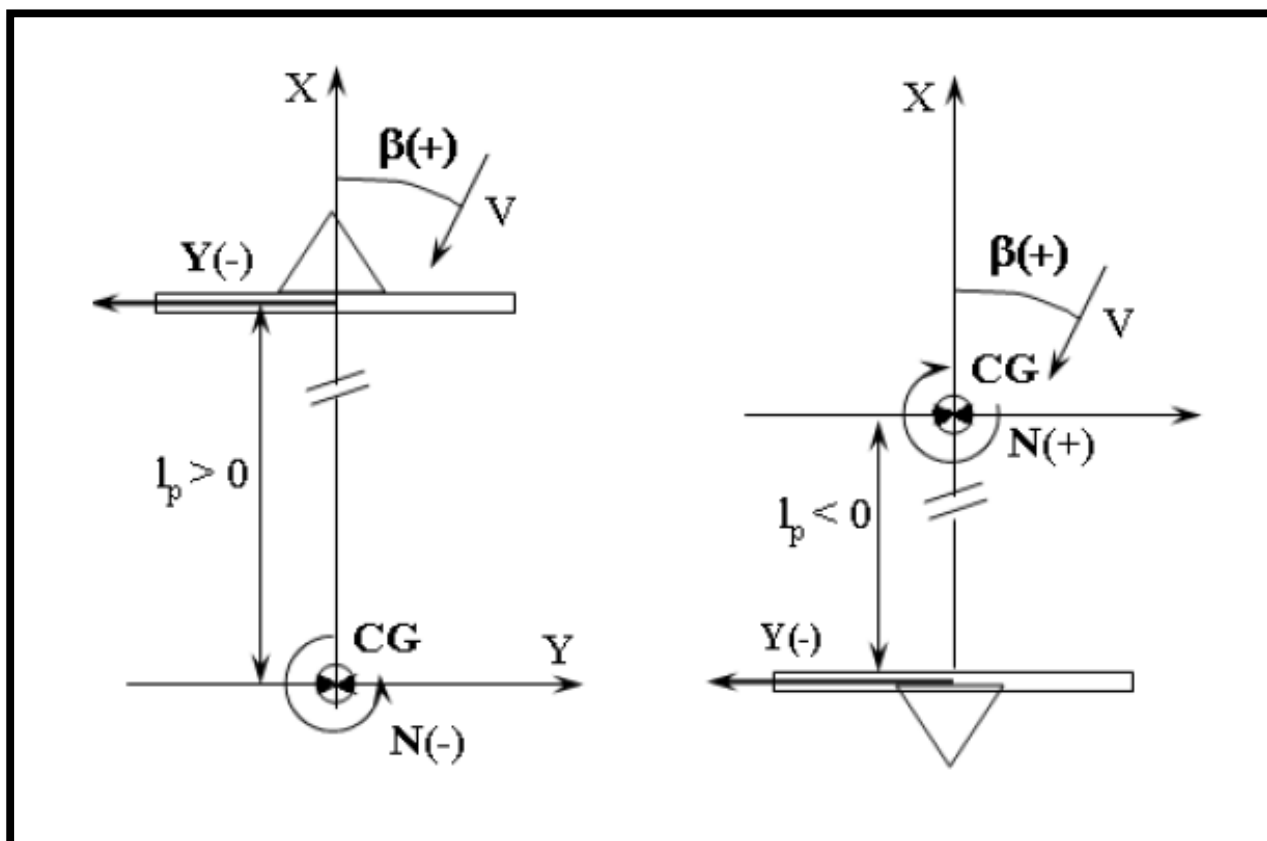
Così il contributo dell'impennaggio verticale alla forza laterale, dovuta al fatto che è nata (in presenza di v piccolo) un angolo β , si può definire come scritto sopra.

$$\begin{cases} C_{Y\beta} = C_{Y\beta(wb)} + C_{Y\beta(F)} \\ C_{n\beta} = C_{n\beta(wb)} + C_{n\beta(F)} \end{cases}$$

Un contributo dovuto all'ala-fusoliera e uno dovuto all'impennaggio verticale. Abbiamo accennato con il contributo wb è negativo e quindi occorre verificare che il contributo dell'impennaggio verticale sia positivo. Per fare ciò si può giocare sulla superficie dell'impennaggio verticale o sulla distanza dell'impennaggio dal baricentro. Siccome si hanno dei limiti su quest'ultima quello che si fa è giocare sulla superficie.

-Per il sistema propulsivo vediamo che si ha.

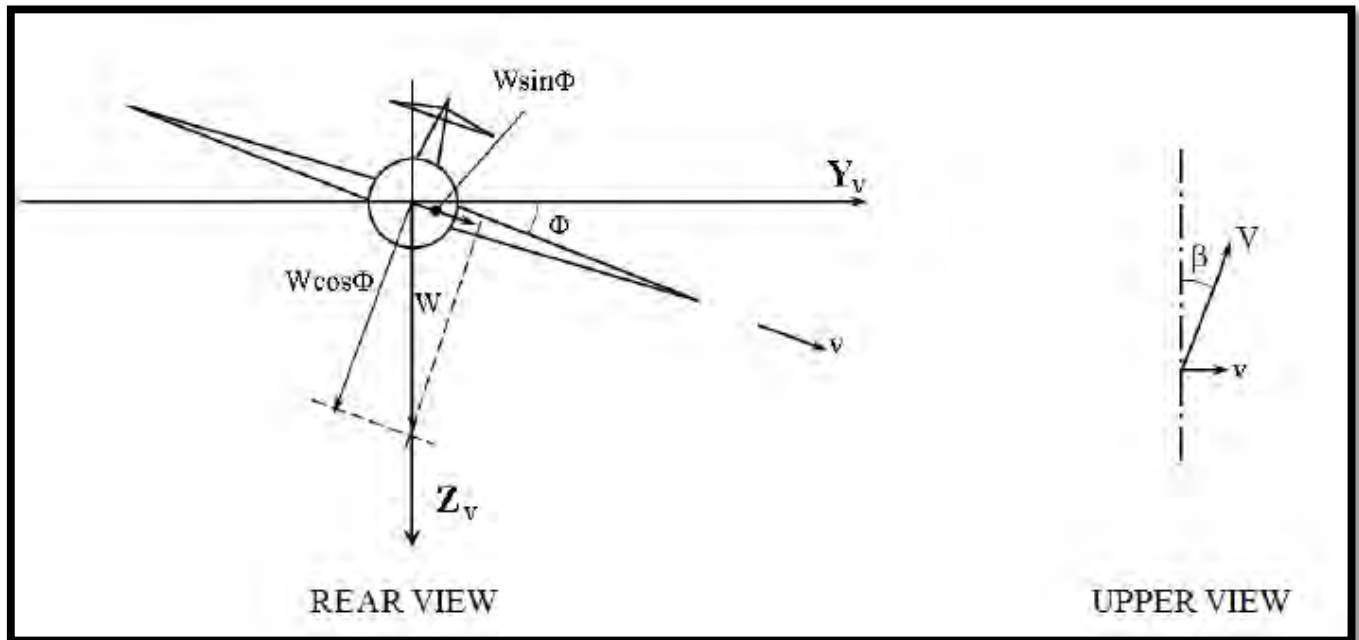
Se abbiamo una propulsione ad elica, se abbiamo un angolo β che investe il disco dell'elica, per la presenza di quest'angolo, sul disco dell'elica nascerà una forza laterale Y:



Con $\beta > 0$ nascerà una forza $Y < 0$. Se poi l'elica è davanti al baricentro ($l_p > 0$) del velivolo genererà un momento imbardante N negativo (orario). Se poi l'elica è posta dietro al baricentro, sempre per $\beta > 0$, cioè con $l_p < 0$ allora il momento che nasce è positivo.

Esprimendo il momento imbardante in forma adimensionale si ha:

componenti con il seno e coseno di ϕ . Questa forza $W \sin \phi$ trascina il velivolo nella direzione in figura con una velocità v :



Questo vuol dire che sul velivolo va a generarsi un angolo di derapata (sideslip) perché per angoli piccoli si ha $\beta = v/V_0$. La v è la componente di velocità dovuta al fatto che il peso agisce lungo l'asse y e lo fa traslare nel modo disegnato sopra. Ora, cosa deve fare il velivolo per annullare questa rotazione? Deve generare un momento di rollio tale da annullare ϕ e quindi quello che ha creato cioè β . Guardando la figura, se $\beta > 0$ allora il momento di rollio per annullarlo dev'essere negativo $L < 0$ e quindi vuol dire che la derivata $c_{l\beta}$ dev'essere negativa:

$$\beta > 0 \Rightarrow L < 0 \Rightarrow C_{l\beta} = \frac{\partial C_l}{\partial \beta} < 0$$

Se avessimo ϕ nell'altro lato il ragionamento sarebbe al contrario e quindi $L > 0$ e ancora $c_{l\beta}$ sarà negativo. Ora quali sono gli elementi di configurazione del velivolo che ci permettono di avere una condizione di stabilità? Più elementi che contribuiscono: l'angolo di diedro (l'angolo che le due ali formano con un piano orizzontale quando il velivolo è in volo), l'angolo di freccia, l'impennaggio verticale e la posizione dell'ala rispetto alla fusoliera (ala centrale è neutra per la stabilità).

Questi sono i 4 elementi che contribuiscono alla stabilità laterale del velivolo (DOBBIAMO SAPERLI).

-Angolo di diedro

Angolo che piano alare forma con il piano y quando siamo in volo (non a terra!). Viene considerato positivo quando è verso l'alto. Sappiamo che se abbiamo un angolo ϕ la conseguenza è una velocità V che agisce lungo y . Supponiamo di scomporre la V in una componente ortogonale al piano alare e parallela ad esso:

$$v_n = \pm v \cdot \sin \Gamma \cong \pm V \cdot \sin \Gamma \cdot \sin \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\alpha = \pm \frac{v_n}{V} = \pm \frac{V \cdot \sin \Gamma \cdot \sin \beta}{V} = \pm \sin \Gamma \cdot \sin \beta \cong \pm \beta \cdot \Gamma$$

Così è possibile ricavare il valore di $\Delta\alpha$. (si arriva alla relazione di sopra dicendo che tutti gli angoli sono piccoli).

Quindi abbiamo che:

$$\begin{cases} \Gamma > 0 \\ \beta > 0 \end{cases} \Rightarrow L < 0 \Rightarrow C_{l\beta} < 0$$

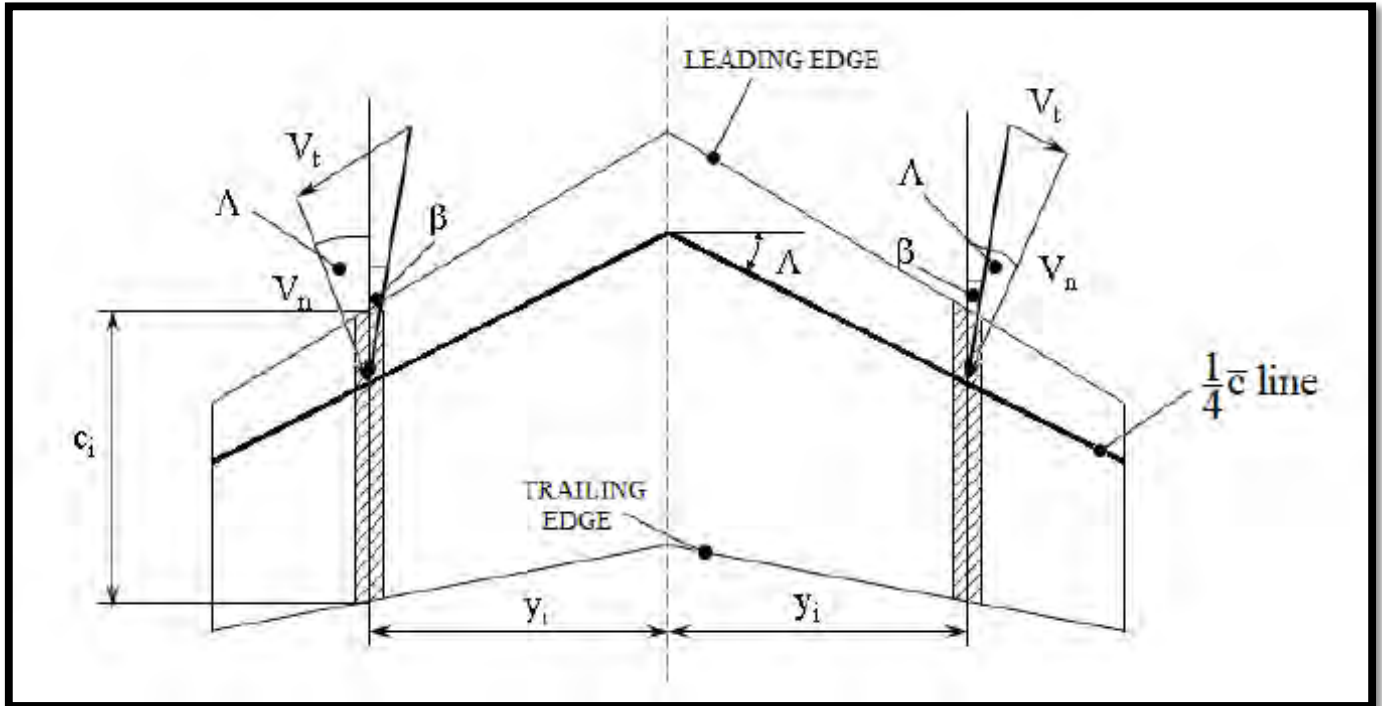
E quindi è un effetto stabilizzante per la stabilità del velivolo. Quindi angolo di diedro positivo è stabilizzante. Se invece l'angolo di diedro è negativo abbiamo effetti destabilizzanti.

Ora se abbiamo un incremento d'incidenza avremo anche un incremento di portanza e di resistenza; si può vedere che:

$$\Delta C_L = C_{L\alpha} \cdot \Delta\alpha \quad \text{and} \quad \Delta C_D = k \cdot \Delta C_L^2$$

Significa che si genera una variazione di resistenza sulle due ali (aumento di resistenza sulla semiala destra e una riduzione sulla sinistra) così si va a formare un momento imbardante che qui sarà positivo.

Il disegno è:



Possiamo di nuovo scomporre la velocità in due componenti, quella parallela e ortogonale alla linea dei fuochi; facendo attenzione agli angoli otteniamo che:

$$\begin{cases} V_{ndx} = V \cdot \cos(\Lambda - \beta) \\ V_{nsx} = V \cdot \cos(\Lambda + \beta) \end{cases}$$

le azioni aerodinamiche arriveranno da queste componenti ortogonali. Guardando queste due espressioni vediamo che le due velocità sono differenti e si ha:

$$V_{ndx} > V_{nsx} \Rightarrow q_{dx} > q_{sx}$$

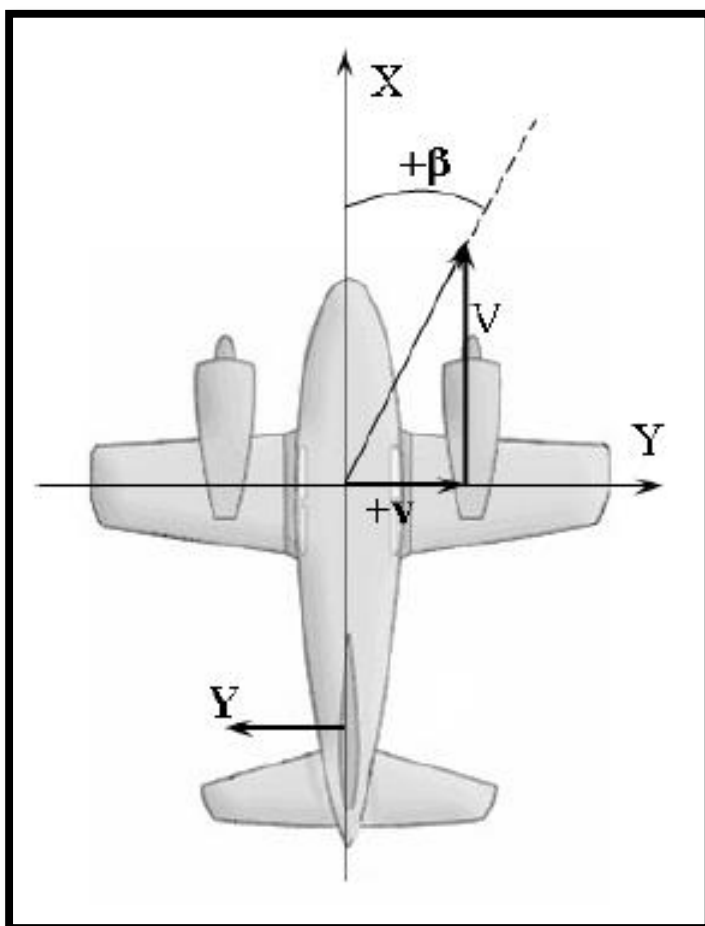
Quindi la pressione dinamica è maggiore sull'ala destra. Quindi si ha:

$$\begin{cases} \Lambda > 0 \\ \beta > 0 \end{cases} \Rightarrow L < 0 \Rightarrow C_{l\beta} < 0$$

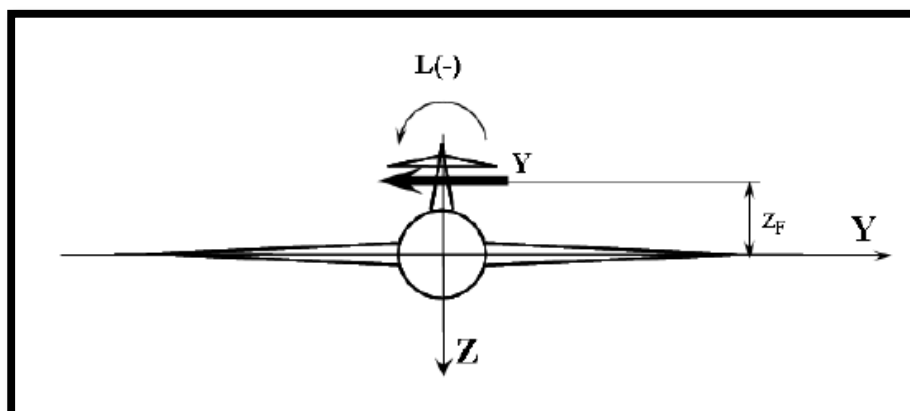
Così il coseno abbiamo che il coefficiente del momento di rollio è proporzionale al doppio dell'angolo di freccia. Più è grande l'angolo di freccia e più diventa grande la stabilità direzionale. Ecco così che l'angolo di freccia dà un contributo alla stabilità.

- Impennaggio verticale

Con $\beta > 0$ avremo una forza nella direzione delle $y < 0$. Le figure sono:



Mentre l'altra vista:



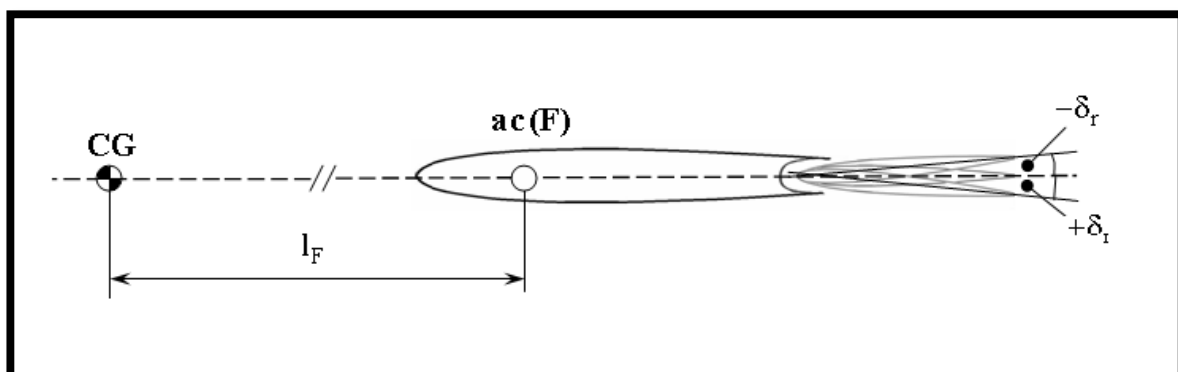
Se invece abbiamo l'ala bassa, l'effetto sarà il contrario di quello descritto sopra, quindi un incremento sulla semiala sinistra e un decremento su quella destra per $\beta > 0$. Qui avremo un momento di rollio positivo e quindi $c_{l\beta} > 0$ e questo è destabilizzante. Ecco perché i vecchi aerei giapponesi della seconda guerra mondiale avevano un angolo di diedro molto grande.

$$\begin{cases} \text{high wing} \\ \beta > 0 \end{cases} \Rightarrow L < 0 \Rightarrow C_{l\beta} < 0$$

$$\begin{cases} \text{low wing} \\ \beta > 0 \end{cases} \Rightarrow L > 0 \Rightarrow C_{l\beta} > 0$$

- Controllo latero-direzionale

Vediamo ora il controllo direzionale. Fino ad ora il pilota è stato fermo. Il controllo direzionale è il timone (deflessione dell'impennaggio verticale). La deflessione vale δ_r e serve a: compensare un angolo β , compensare un motore che si pianta e non da spinta (il velivolo si storce), per compensare gli effetti giroscopici e di contrastare gli effetti dovuti alla deflessione degli alettoni (alettoni generano un momento d'imbardata inverso; lo analizzeremo la prossima volta). La distanza dall'impennaggio dal centro del velivolo vale:



Si considera deflessione positiva quella che va verso sinistra, mentre negativa quella a destra; la y che si genera con deflessione a sinistra è positiva ecco perché scegliamo questo convenzionalmente (deve generare una forza positiva).

Qua abbiamo una proiezione dell'impennaggio verticale:

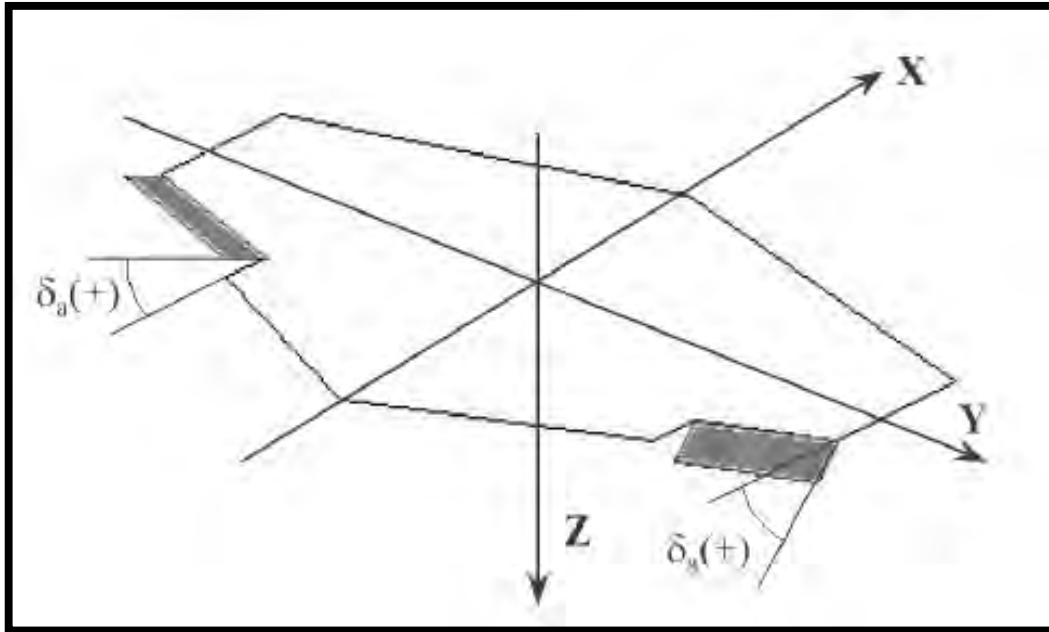
Così il momento imbarcante sarà funzione della distanza dell'impennaggio verticale dal baricentro, dalla superficie, dalla superficie alare ecc. Si può giocare sulla superficie. La derivata di controllo sarà:

$$C_{Y\delta_r} = \frac{\partial C_Y}{\partial \delta_r} = \frac{S_F}{S} \cdot a_r > 0$$

$$C_{n\delta_r} = \frac{\partial C_n(\delta_r)}{\partial \delta_r} = V_v \cdot a_r < 0 \quad (l_f < 0)$$

Che sarà sempre positiva la prima mentre la seconda negativa se $l_f < 0$. Quindi possiamo riscrivere le forze del piano direzionale come:

$$\begin{cases} C_Y = C_{Y\beta} \cdot \beta + C_{Y\delta_r} \cdot \delta_r \\ C_n = C_{n\beta} \cdot \beta + C_{n\delta_r} \cdot \delta_r \end{cases}$$



Si considera la deflessione positiva se si abbassa l'alettone destro e si alza l'alettone sinistro, in questo modo il momento che si genera è negativa. Per definire la deflessione δ_a come angolo (siccome le due superfici possono deflettersi in maniera diversa) sarà:

$$\delta_a = \frac{\delta_{a_{dx}} + \delta_{a_{sx}}}{2}$$

Così il momento di rollio che si genera a seguito della deflessione degli alettoni sarà pari a:

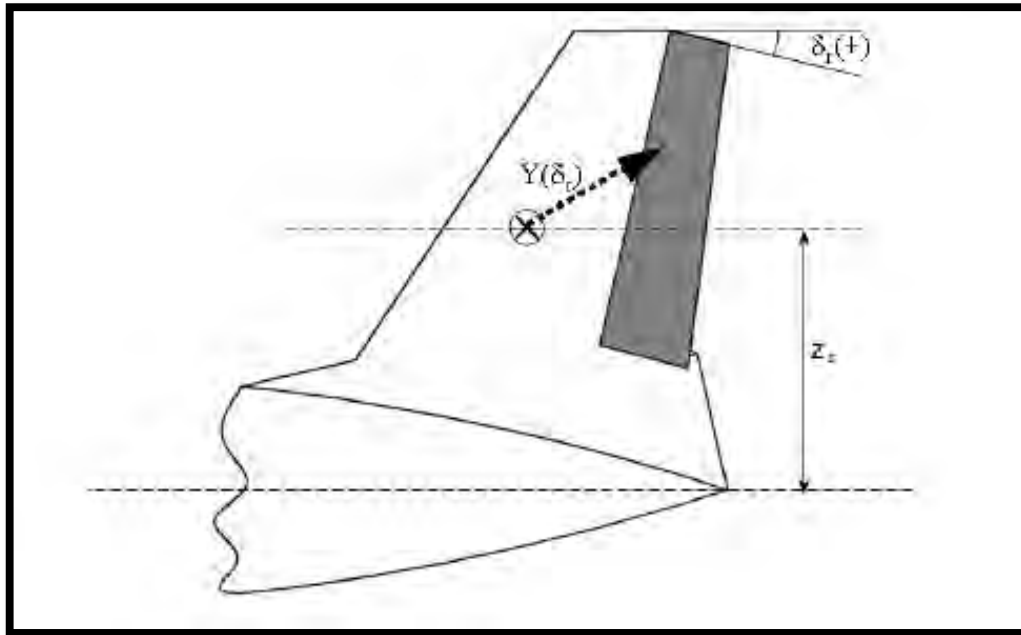
$$L(\delta_a) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot b \cdot C_{l_{\delta_a}}$$

(occhio a mettere CL con L maiuscolo SOLO per la portanza; di sopra è minuscolo perché quello è un coefficiente di momento)

Una deflessione positiva da rollio negativo, quindi vuol dire che la derivata sarà negativa:

$$C_{l_{\delta_a}} < 0$$

Perché δ_a e cl sono di segno opposto.



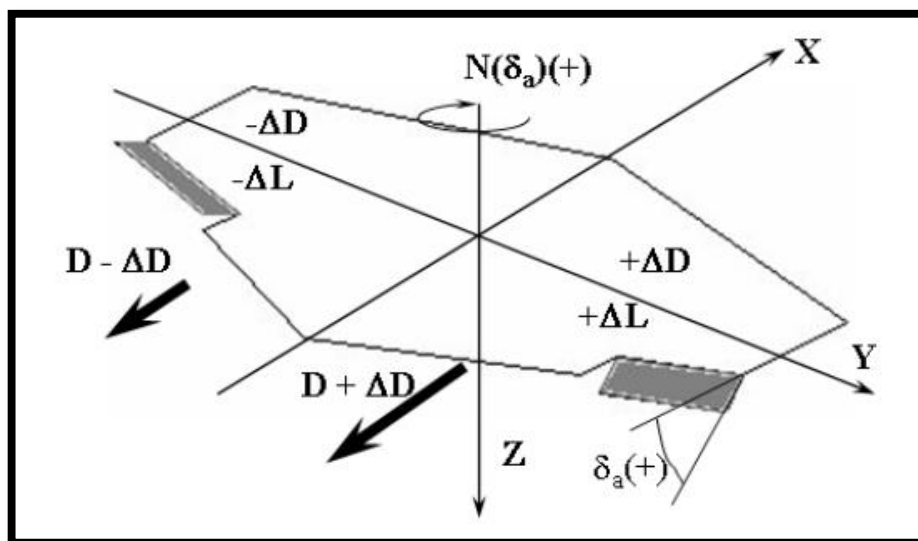
Per questo motivo la derivata del momento di rollio è positiva:

$$L(\delta_r) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot b \cdot C_{l_{\delta_r}} \cdot \delta_r = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot b \cdot C_{l_{\delta_r}} \cdot \delta_r$$

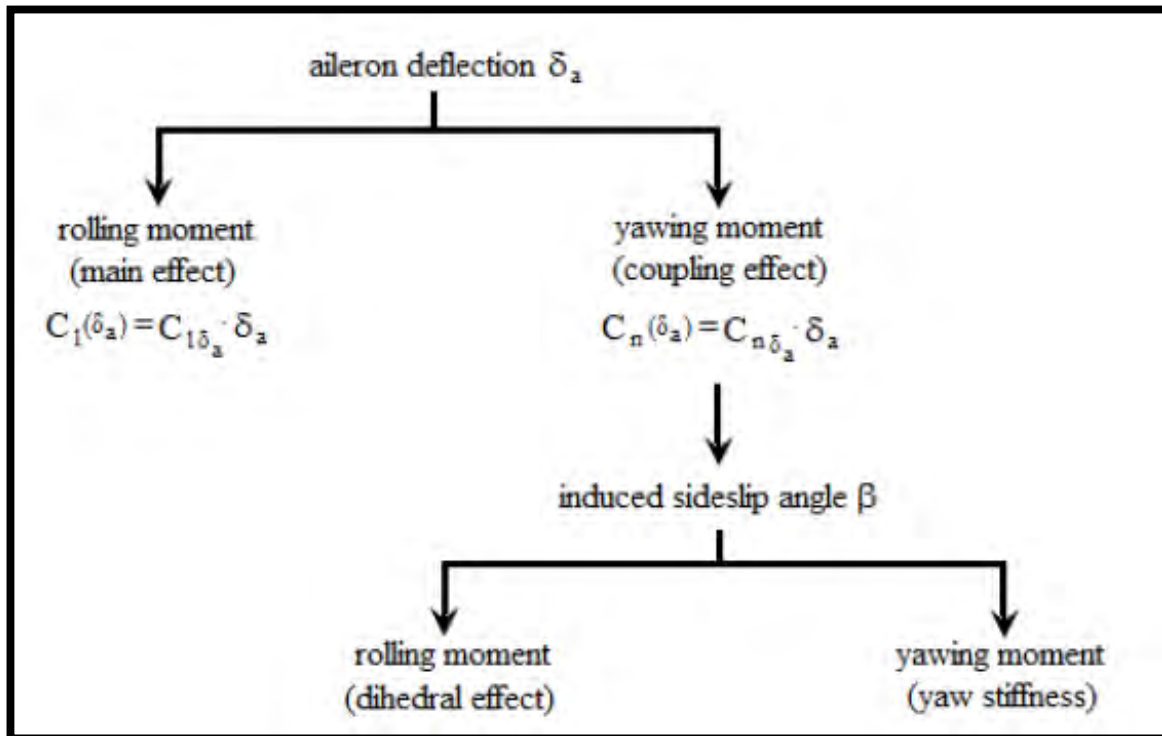
One can notice that, due to conventional sign adopted, $C_{l_{\delta_r}} > 0$.

- Effetti accoppiati dovuti alla messa a barra del nostro velivolo

Quando abbiamo una portanza diversa tra le due semiale nasce un momento d'imbardata. Deflettendo positivamente gli alettoni abbiamo la nascita di un momento imbardante positivo:



Andiamo a valutare il segno della derivata: il momento imbardante dovuto agli alettoni è definito come:



Quindi se devo esprimere le condizioni di equilibrio del mio velivolo, devo scrivere queste due equazioni:

$$\begin{cases} C_l = C_{l\delta a} \cdot \delta_a + C_{l\beta} \cdot \beta \\ C_n = C_{n\delta a} \cdot \delta_a + C_{n\beta} \cdot \beta = 0 \end{cases}$$

In condizioni di equilibrio il $C_n=0$. Andando a risolverle e ci ricaviamo il C_l in funzione di δ_a , si ottiene:

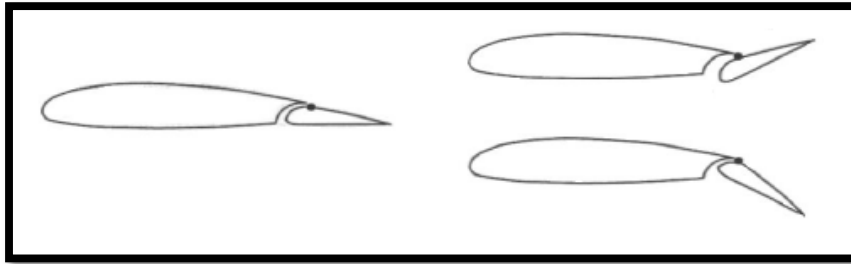
$$C_l = \left(C_{l\delta a} - \frac{C_{l\beta} \cdot C_{n\delta a}}{C_{n\beta}} \right) \cdot \delta_a$$

Dove il meno ci sta ad indicare che il momento che ottengo è più piccolo di quello che voglio, a causa degli effetti accoppiati. Andando a valutare la derivata, troviamo che il C_l δ_a , effettivo sarà:

$$C_{l\delta a, \text{eff}} = \left(C_{l\delta a} - \frac{C_{l\beta} \cdot C_{n\delta a}}{C_{n\beta}} \right) = C_{l\delta a} \cdot \left(1 - \frac{C_{l\beta} \cdot C_{n\delta a}}{C_{n\beta} \cdot C_{l\delta a}} \right)$$

Cioè abbiamo un'inversione. Questo capita perché se il termine diventa positivo, allora s'inverte il comando di alettone e quindi si ha il roll reversale.

In fase di progetto si mette a zero il $C_{n\delta_a}$ perché così non c'è più il β e questi problemi spariscono. Come si può fare? Deflettere gli alettoni in maniera asimmetrica perché così riduciamo il momento imbarcante che si genera come effetto di accoppiamento. Quindi se $C_{n\delta_a}$ è troppo alto possiamo fare così. Oppure in passato si usavano particolari alettoni che deflettendosi escono dal profilo alare come si vede in figura:



Così sull'alettone che si alza c'è un aumento di resistenza di forma (e non indotta) così riesco ad equilibrare meglio la resistenza indotta che si forma sulla semiala destra, così si riduce il $C_{n\delta_a}$. Una terza soluzione ancora esiste: se deflettiamo il timone, quindi oltre al comando di barra c'è anche il pedale, in modo da generare un momento imbarcante tale da cancellare l'effetto di generazione dell'angolo β , allora a quel punto la derivata $C_{l\beta} \cdot \beta = 0$, quindi l'effetto di generazione di un momento di rollio per effetto dovuto alla presenza del β va a zero. Dalle nostre equazioni:

$$\begin{cases} C_l = C_{l\delta_a} \cdot \delta_a \\ 0 = C_{n\delta_r} \cdot \delta_r + C_{n\delta_a} \cdot \delta_a \end{cases}$$

Trascuriamo l'effetto accoppiato $C_{l\delta_r}$ per non complicarci troppo il discorso. Ricavando da queste equazioni il δ_r per avere $\beta=0$ si ottiene:

$$\delta_r = -\frac{C_{n\delta_a}}{C_{n\delta_r}} \cdot \delta_a$$

Questo o lo fa il pilota oppure lo fa l'autopilota.

- Vediamo ora gli effetti accoppiati dovuti alla generazione delle velocità angolari

In particolare un comando di alettone produce un momento di rollio e una velocità angolare P che rimane fino a che non sporco la manovra e riporto la barra.

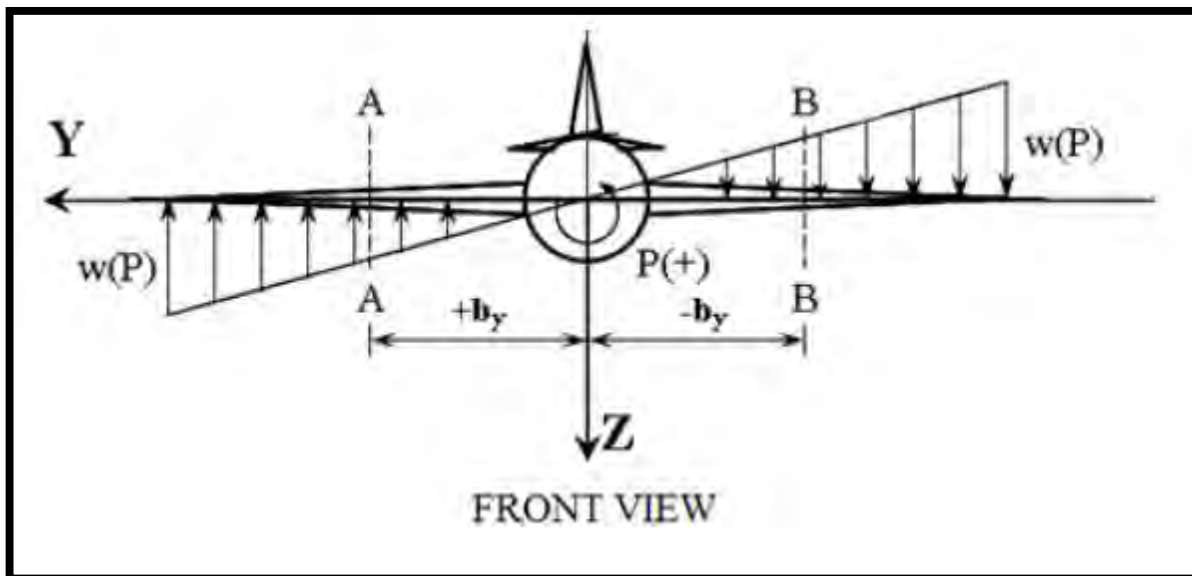
$$C_Y = C_{Y_p} \cdot \hat{p}$$

Siccome $P < 0$ e $Y > 0$ (e viceversa per $p > 0$) allora il segno della derivata sarà:

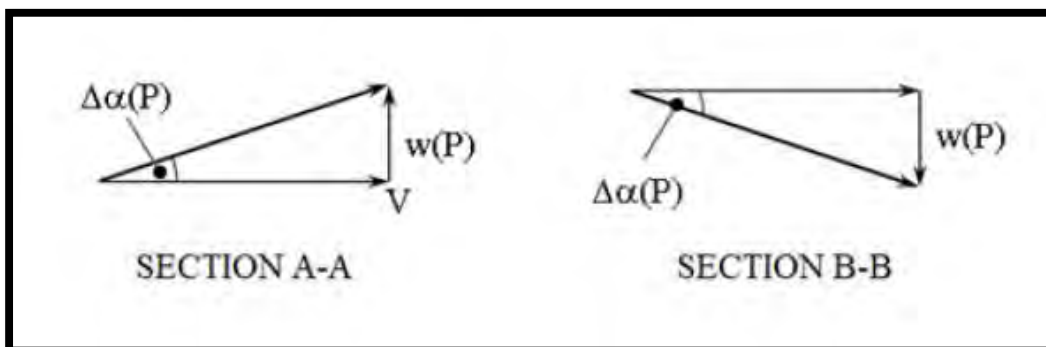
$$C_{Y_p} < 0$$

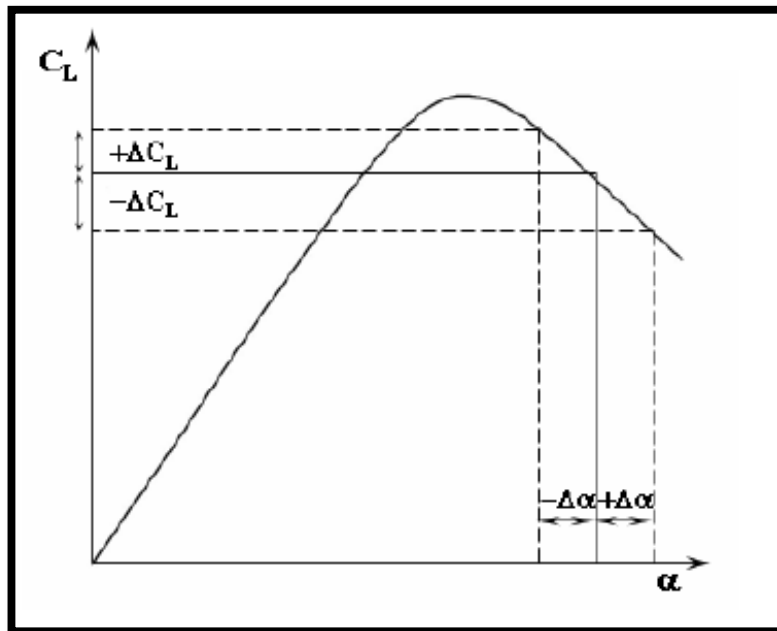
-Momento di rollio

Ora consideriamo una P positiva. Abbiamo la situazione qui sotto: la P è positiva e quindi il campo di velocità relative (sull'ala: dove gli effetti sono maggiori; si fa anche sull'impennaggio orizzontale se le dimensioni sono tali da creare un effetto significativo) sull'ala è quello disegnato qui:



Facciamo ora due sezioni a una distanza uguale dall'asse di simmetria del velivolo:





Vediamo che qui abbiamo un effetto opposto. Se incremento l'incidenza a destra il C_L diminuisce, mentre se diminuisco l'incidenza la portanza s'incrementa. Questo significa che se sto volando in condizioni di post stallo e do barr agli alettoni e produco quindi una velocità P , questi effetti indotti producono un incremento di portanza sulla semiala sinistra e un decremento sulla semiala destra e quindi non è più un effetto smorzante ma uno che autosostiene la velocità angolare.

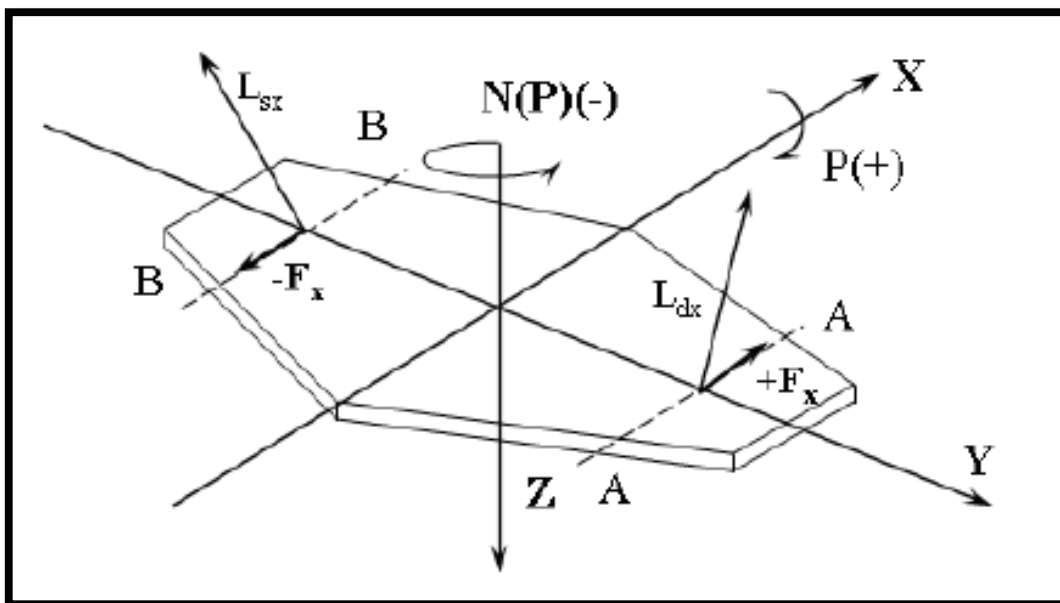
Questo momento di rollio che si genera dovuto alla differenza di portanza sulle due semiale si esprime come:

$$C_l = C_{l_p} \cdot \hat{p}$$

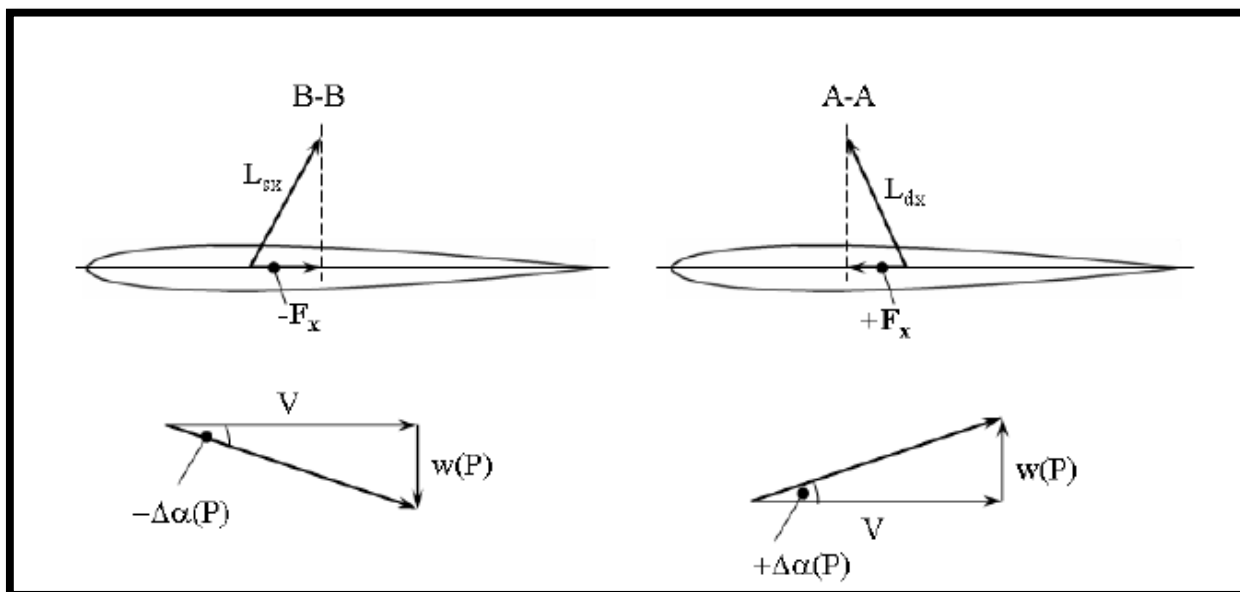
Quindi ricapitolando:

$$\begin{cases} \alpha < \alpha_{\text{stall}} \rightarrow C_{l_p} < 0 \\ \alpha > \alpha_{\text{stall}} \rightarrow C_{l_p} > 0 \end{cases}$$

Per misurarlo lo esprimiamo in funzione dei dati che abbiamo e si ottiene:



La proiezione delle velocità e della protanza:



Si produce un momento imbarcante così negativo N. quindi abbiamo un momento imbarcante positivo come primo effetto e un momento imbarcante negativo come secondo effetto. Come lo calcoliamo? Definiamo di nuovo la p:

$$\hat{p} = P \cdot \frac{b}{2 \cdot V}$$

e il momento cn che risulta da entrambi gli effetti (è dovuto dalla resistenza) vale:

(gli altri elementi daranno un contributo molto più piccolo e quindi trascurabile). Con una velocità R positiva, avrò una distribuzione di velocità nella direzione dell'asse y v(r); la direzione cambia e anche il modulo. Ci sarà quindi un'incidenza α_F dovuta ad R. si genererà una forza y^* con quella direzione di sopra e distanza l_F . Possiamo scomporre la forza in due componenti (quella lungo x non ha effetto) o usare le piccole perturbazioni, tanto non cambia, e quindi si considera solo la YR. Abbiamo che:

$$v(R) = R \cdot |l_F|$$

(con l_F in valore assoluto; può essere negativa o positiva a seconda della posizione rispetto al baricentro). L'incidenza α_F sarà poi:

$$\alpha_F(R) = \frac{v(R)}{V} = \frac{R \cdot |l_F|}{V}$$

(questa c'è anche se $\beta=0$, perché generata da R). quindi la forza YR sarà:

$$Y(R) = Y^*(R) \cdot \cos[\alpha_F(R)] \cong Y^*(R) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S_F \cdot V_F^2 \cdot a_F^* \cdot \alpha_F =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S_F \cdot V_F^2 \cdot a_F^* \cdot \frac{R \cdot |l_F|}{V}$$

E andando ad adimensionalizzare ragionando in termini di coefficienti:

$$C_Y(R) = \frac{Y(R)}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_F^2 \cdot S_F \cdot a_F^* \cdot \frac{R \cdot |l_F|}{V}}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S} =$$

$$= \frac{V_F^2}{V^2} \cdot \frac{S_F}{S} \cdot a_F^* \cdot \frac{R \cdot |l_F|}{V}$$

Ragionando in termini adimensionali bisogna esprimere la R in termini adimensionali e quindi:

$$u(R) = \pm R \cdot b_y$$

In queste due sezioni abbiamo: a sinistra si somma la velocità $u(R)$ mentre a destra si sottrae la $U(R)$; significa che avremo una velocità maggiore che investe la semiala a sinistra e quindi una pressione dinamica maggiore, e quindi una velocità minore sulla semiala destra e quindi una pressione dinamica minore. Definiamo di nuovo una r adimensionale:

$$\hat{r} = R \cdot \frac{b}{2 \cdot V} \text{ and } C_l(R) = C_{lr} \cdot \hat{r}$$

Ora, se io ho una pressione dinamica maggiore sulla semiala sinistra e una minore sulla destra, significa che la portanza è maggiore a sinistra e minore sulla destra e quindi nascerà un momento di rollio L dovuto ad R positivo; quindi a $R > 0$ corrisponde un momento di rollio $L(R) > 0$. Possiamo esprimerlo come:

$$L(R) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot b \cdot C_l(R) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot b \cdot C_{lr} \cdot \hat{r} = \\ = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot b \cdot C_{lr} \cdot R \cdot \frac{b}{2 \cdot V} = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot V \cdot S \cdot b^2 \cdot C_{lr} \cdot R$$

Quindi la derivata C_{lr} sarà positiva:

$$C_{lr} > 0$$

- Momento d'imbardata

Terzo effetto dovuto alla velocità r . se abbiamo un aumento di portanza dovuto all'incremento di pressione dinamica e quindi di velocità, avremo anche un effetto accoppiato che è dovuto all'aumento della resistenza indotta. Noi lo trascuriamo.

Andiamo a rifare lo stesso discorso della forza y e così avremo un momento imbardante pari a:

$$C_{n_r} = 2 \cdot a_F \cdot V_V \cdot \frac{l_F}{b} < 0$$

Dove si vede che ha segno negativo.

Ricordiamo che la derivata c_{nr} esiste anche in queste condizioni:

$$\beta = 0 \text{ and } \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{r}} = 0$$

E indipendente da β . Si genera per una velocità angolare d'imbardata R .

Possiamo così esprimere il momento d'imbardata dovuto ad R come:

$$C_n(R) = C_{n_r} \cdot \hat{r}$$

Fine del terzo capitolo.

-Mini digressione sulle unità di misura.

Distanze percorse in miglia nautiche. La quota è misurata in piedi. La visibilità è in metri. Gli angoli in gradi.

La velocità orizzontale è indicata in nodi=piedi/secondo. La velocità verticale è indicata in piedi/minuto.

Tempo in secondi. Consumi in kg/ora o kg/min (stati uniti in galloni/ora).

A) Subcritical transient response ($\zeta_A = c/2\sqrt{k \cdot m} < 1$): response features short period, low damping, high natural frequency ω_n , hence persisting oscillations.

B) Subcritical transient response ($\zeta_A < \zeta_B < 1$): response features lower ω_n value compared to case A), higher damping, less persisting oscillations.

C) Supercritical transient response ($\zeta_C > 1$): response shows very high damping values, without any oscillation to restore equilibrium conditions: aperiodic response.

-Ora che dobbiamo fare noi per analizzare il velivolo in queste condizioni? Partiamo sempre dalle ipotesi di piccole perturbazioni. Noi eravamo arrivati ad una formulazione adimensionale dell'equazioni nel piano longitudinale del tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} (C_{Tu} - C_{Du}) \cdot \hat{u} + (C_{Le} - C_{D\alpha}) \cdot \alpha + \Delta C_T = 2\mu D \cdot \hat{u} + C_{We} \cos \Theta_0 \cdot \theta \\ (2C_{Le} + C_{Lu}) \cdot \hat{u} + (C_{L\alpha} + C_{De} + C_{L\dot{\alpha}}D) \cdot \alpha + C_{L\delta_e} \cdot \delta_e = \\ = 2\mu \cdot (\hat{q} - D\alpha) - C_{We} \theta \sin \Theta_0 \\ C_{mu} \cdot \hat{u} + (C_{m\alpha} + C_{m\dot{\alpha}}D) \cdot \alpha + C_{mq} \cdot \hat{q} + C_{m\delta_e} \cdot \delta_e = \hat{I}_y \cdot D\hat{q} \end{array} \right.$$

Dovremo vedere il moto libero e capire se è oscillatorio o no. Consideriamo i controlli fissi per questa analisi e cioè si ha $\Delta C_T = \delta_e = 0$ (questo per capire meglio l'aspetto fisico del problema). Supponiamo anche che l'angolo Θ_0 di beccheggio (angolo tra asse corpo x e assi ned) sia pari a zero come condizione iniziale. Consideriamo poi una traiettoria rettilinea.

Con queste semplificazioni le nostre equazioni diventano queste qui:

$$\begin{cases} \hat{u} = \hat{u}_1 \cdot e^{\lambda \hat{t}} \\ \alpha = \alpha_1 \cdot e^{\lambda \hat{t}} \\ \theta = \theta_1 \cdot e^{\lambda \hat{t}} \end{cases}$$

Andando a sostituire questi valori nel nostro sistema, si ottiene un sistema algebrico del tipo:

$$[\lambda] \cdot \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \alpha_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = 0$$

Sostanzialmente la matrice λ rispetto ad A è uguale alla matrice A , con le stesse combinazioni tranne che le derivate temporali sono sostituite da λ :

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} 2\mu\lambda - C_{Tu} + C_{Du} & C_{D\alpha} - C_{We} & C_{We} \\ C_{Lu} + 2C_{Le} & 2\mu\lambda + C_{L\dot{\alpha}}\lambda + C_{L\alpha} + C_{De} & -2\mu\lambda \\ -C_{mu} & -(C_{m\alpha} + C_{m\dot{\alpha}}\lambda) & \hat{I}_y\lambda^2 - C_{mq}\lambda \end{bmatrix}$$

Per ottenere soluzioni non banali dobbiamo porre il determinante della matrice uguale a zero:

$$\det[\lambda] = 0$$

e così ricaviamo un'espressione polinomiale che, eguagliata a zero, ci fornisce l'equazione caratteristica del nostro problema:

$$\varphi(\lambda^n) = 0$$

$$\{\hat{X}\} = \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \alpha \\ \hat{q} \\ \theta \end{Bmatrix} = \{\hat{u}, \alpha, \hat{q}, \theta\}^T : \text{state vector } (n \times 1)$$

Mentre il vettore dei controlli sarà:

$$\{\hat{U}\} = \begin{Bmatrix} \Delta C_T \\ \delta_e \end{Bmatrix} = \{\Delta C_T, \delta_e\}^T : \text{controls vector } (m \times 1)$$

Noi abbiamo detto che la nostra analisi ha i controlli bloccati quindi questa matrice non la consideriamo (i suoi elementi sono pari a zero) e avremo solo, nella formulazione state-space:

$$\{\dot{\hat{X}}\} = [A] \cdot \{\hat{X}\}$$

Così le nostre equazioni diventano:

$$\left\{ \begin{array}{l} D\hat{u} = \frac{1}{2 \cdot \mu} [(C_{Tu} - C_{Du}) \cdot \hat{u} + (C_{Le} - C_{D\alpha}) \cdot \alpha - C_{We} \cdot \theta] \\ D\alpha = -\frac{2 \cdot C_{Le} + C_{Lu}}{2 \cdot \mu + C_{L\dot{\alpha}}} \cdot \hat{u} - \frac{C_{L\alpha} + C_{De}}{2 \cdot \mu + C_{L\dot{\alpha}}} \cdot \alpha + \frac{2 \cdot \mu}{2 \cdot \mu + C_{L\dot{\alpha}}} \cdot \hat{q} \\ D\hat{q} = \frac{1}{\hat{I}_y} \left[\left(C_{mu} - C_{m\dot{\alpha}} \cdot \frac{C_{Lu} + 2 \cdot C_{Le}}{2 \cdot \mu + C_{L\dot{\alpha}}} \right) \cdot \hat{u} + \right. \\ \left. \left(C_{m\alpha} - C_{m\dot{\alpha}} \cdot \frac{C_{L\alpha} + C_{De}}{2 \cdot \mu + C_{L\dot{\alpha}}} \right) \cdot \alpha + \left(C_{mq} + C_{m\dot{\alpha}} \frac{2 \cdot \mu}{2 \cdot \mu + C_{L\dot{\alpha}}} \right) \right] \cdot \hat{q} \\ D\theta = \hat{q} \end{array} \right.$$

$$\lambda \cdot [E] \cdot \left\{ e^{\lambda \hat{t}} \right\} - [A] \cdot [E] \cdot \left\{ e^{\lambda \hat{t}} \right\} = 0 \Rightarrow (\lambda \cdot [I] - [A]) \cdot [E] = 0$$

Quindi le soluzioni non banali del sistema saranno date da:

$$\det(\lambda \cdot [I] - [A]) = 0$$

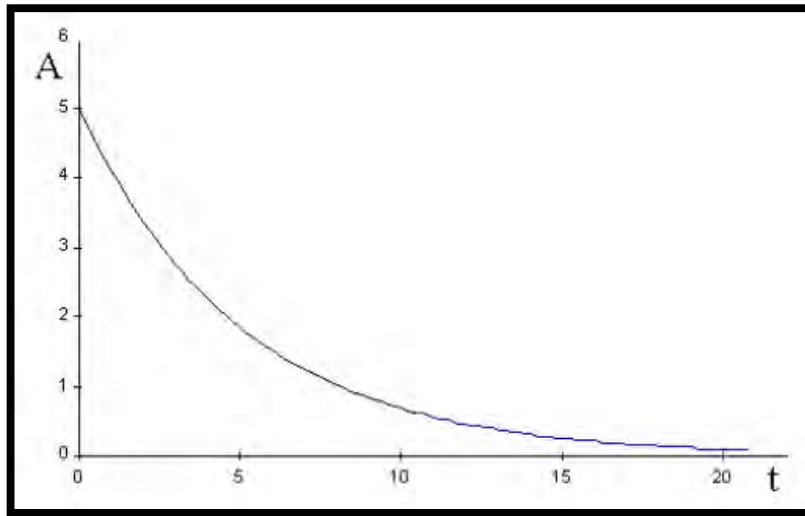
Questo ci porta ad ottenere un'equazione caratteristica in λ dove avremo una serie di radici che ci forniranno gli autovalori del nostro sistema. Quindi esprimiamo i nostri parametri come:

$$\begin{cases} \hat{u} = \hat{u}_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot \hat{t}} + \hat{u}_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot \hat{t}} + \hat{u}_3 \cdot e^{\lambda_3 \cdot \hat{t}} + \hat{u}_4 \cdot e^{\lambda_4 \cdot \hat{t}} \\ \alpha = \alpha_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot \hat{t}} + \alpha_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot \hat{t}} + \alpha_3 \cdot e^{\lambda_3 \cdot \hat{t}} + \alpha_4 \cdot e^{\lambda_4 \cdot \hat{t}} \\ \hat{q} = \hat{q}_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot \hat{t}} + \hat{q}_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot \hat{t}} + \hat{q}_3 \cdot e^{\lambda_3 \cdot \hat{t}} + \hat{q}_4 \cdot e^{\lambda_4 \cdot \hat{t}} \\ \theta = \theta_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot \hat{t}} + \theta_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot \hat{t}} + \theta_3 \cdot e^{\lambda_3 \cdot \hat{t}} + \theta_4 \cdot e^{\lambda_4 \cdot \hat{t}} \end{cases}$$

Andando a risolverlo vediamo che nel piano longitudinale arriviamo ad un polinomio caratteristico di 4° ordine:

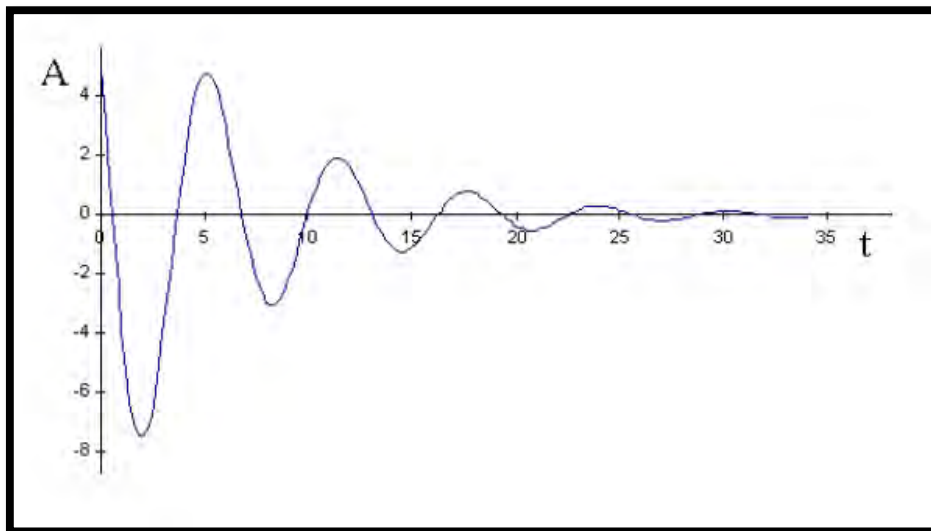
$$A_1 \lambda^4 + B_1 \lambda^3 + C_1 \lambda^2 + D_1 \lambda + E_1 = 0$$

dove le varie matrici sono:



Questo affinché il modo sia smorzato.

- Per complesse coniugate abbiamo un andamento oscillatorio. Affinchè il moto sia stabile occorre che la parte reale debba essere negativa. In questo caso abbiamo una risposta del tipo:



Se la parte reale fosse positiva oscillerebbe divergendo sempre di più.

-Valutiamo ora il segno delle radici senza risolvere il sistema. Utilizziamo il criterio di Routh così riusciamo a valutare il segno delle radici senza risolvere il problema. Così possiamo capire subito se siamo stabili o no.

Dobbiamo andare a valutare i segni delle matrici. Applicando Routh alle nostre equazioni caratteristiche ci dice che il sistema è stabile dinamicamente (non ci sono soluzioni reali positive o soluzioni complesse coniugate con parte reale positiva) se si verifica questa condizione:

$$\lambda = \pm\sigma \text{ or } \lambda = \pm i\sigma;$$

E andando a scrivere le nostre equazioni caratteristiche andremo a scrivere che:

$$\begin{cases} A_1\sigma^4 + B_1\sigma^3 + C_1\sigma^2 + D_1\sigma + E_1 = 0 \\ A_1\sigma^4 - B_1\sigma^3 + C_1\sigma^2 - D_1\sigma + E_1 = 0 \end{cases}$$

Se sommiamo e sottraiamo le due equazioni otteniamo:

$$\begin{cases} A_1\sigma^4 + C_1\sigma^2 + E_1 = 0 \\ B_1\sigma^2 + D_1 = 0 \end{cases}$$

e dalla seconda è possibile ricavare:

$$\sigma^2 = -D_1/B_1$$

e così possiamo dire che se B_1 e D_1 hanno segno opposto, allora abbiamo come soluzione:

$$\sigma^2 > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sigma \in \mathfrak{R} \quad (\text{aperiodic})$$

Con soluzioni reali abbiamo moto aperiodico instabile e quindi divergente. Quindi se sposto il mio velivolo dalla condizione di equilibrio il mio velivolo si sposta e non torna alla condizione iniziale (condizione divergente per coppie giroscopiche).

- Se invece D_1 e B_1 sono concordi allora:

- Vediamo una parte che lega E1 alla manovra del velivolo. Le nostre condizioni di equilibrio del nostro velivolo sono queste, le quali ci portano a scrivere:

$$\begin{cases} M = 0 \\ L = W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_m = 0 \\ C_L V^2 = \text{const} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_m = f(\alpha, \delta_{e(\text{trim})}, \hat{V}) \\ C_L = f(\alpha, \delta_{e(\text{trim})}, \hat{V}) \end{cases}$$

Se noi scriviamo le nostre equazioni in funzione di questi parametri in forma infinitesima si ha:

$$\begin{cases} C_{m\alpha} \cdot d\alpha + C_{m\delta} \cdot d\delta_{e(\text{trim})} + C_{m\hat{V}} \cdot d\hat{V} = 0 \\ C_{L\alpha} \cdot d\alpha + C_{L\delta} \cdot d\delta_{e(\text{trim})} + C_{L\hat{V}} \cdot d\hat{V} = dC_L \end{cases}$$

(nel cl delta aggiungere un e). inoltre abbiamo detto che $CLV^2 = \text{cost}$ e questo vuol dire che se andiamo a derivare rispetto alla velocità si ottiene:

$$C_L \cdot V^2 = \text{const} \Rightarrow 2 \cdot V_e \cdot C_{Le} \cdot dV + V_e^2 \cdot dC_L = 0$$

$$\Downarrow$$

$$dC_L = -2 \cdot C_{Le} \cdot \frac{dV}{V_e} = -2 \cdot C_{Le} \cdot d\hat{V}$$

Risolviendo rispetto al $d\delta_{e}$ di trim si ottiene questa equazione:

$$d\delta_{e(\text{trim})} \cdot \left(C_{L\delta} - \frac{C_{L\alpha} C_{m\delta}}{C_{m\alpha}} \right) + \left(C_{L\hat{V}} + 2C_{Le} - \frac{C_{L\alpha} C_{m\hat{V}}}{C_{m\alpha}} \right) \cdot d\hat{V} = 0$$

e andando a risolvere si ottiene:

$$\frac{d\delta_{e(trim)}}{d\hat{V}} > 0 \Leftrightarrow E_1 > 0$$

Quindi possiamo tracciare una curva dell'equilibrio che è importante per la stabilità dinamica del nostro velivolo (non la mettiamo perché confonde le idee).

- Vediamo ora i modi nel piano longitudinale. Dobbiamo trovare le soluzioni in questo piano. Le due tipiche soluzioni per l'equazione caratteristica di 4 ordine, ha queste soluzioni periodiche:

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = \hat{n}_1 \pm i\hat{\omega}_1 \\ \lambda_{3,4} = \hat{n}_2 \pm i\hat{\omega}_2 \end{cases}$$

dove si ha che:

$$\hat{n}_{1,2} = n_{1,2} \cdot \frac{c}{2 \cdot V_{eq}} \rightarrow \text{non-dimensional real part of eigenvalue}$$

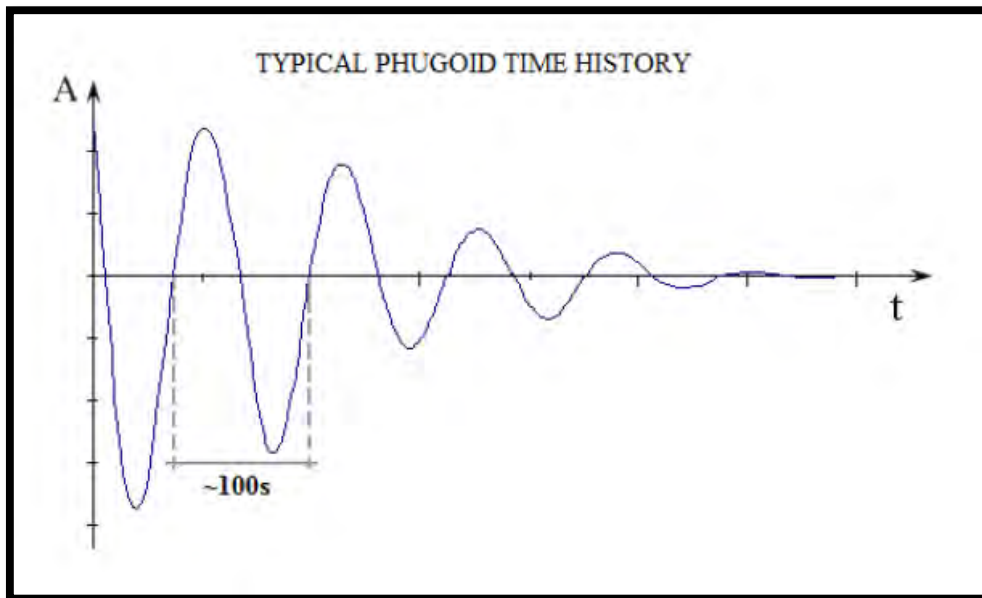
$$\hat{\omega}_{1,2} = \omega_{1,2} \cdot \frac{c}{2 \cdot V_{eq}} \rightarrow \text{non-dimensional imaginary part of eigenvalue}$$

L'espressione delle variabili di stato sarà (in accordo alle espressioni di sopra):

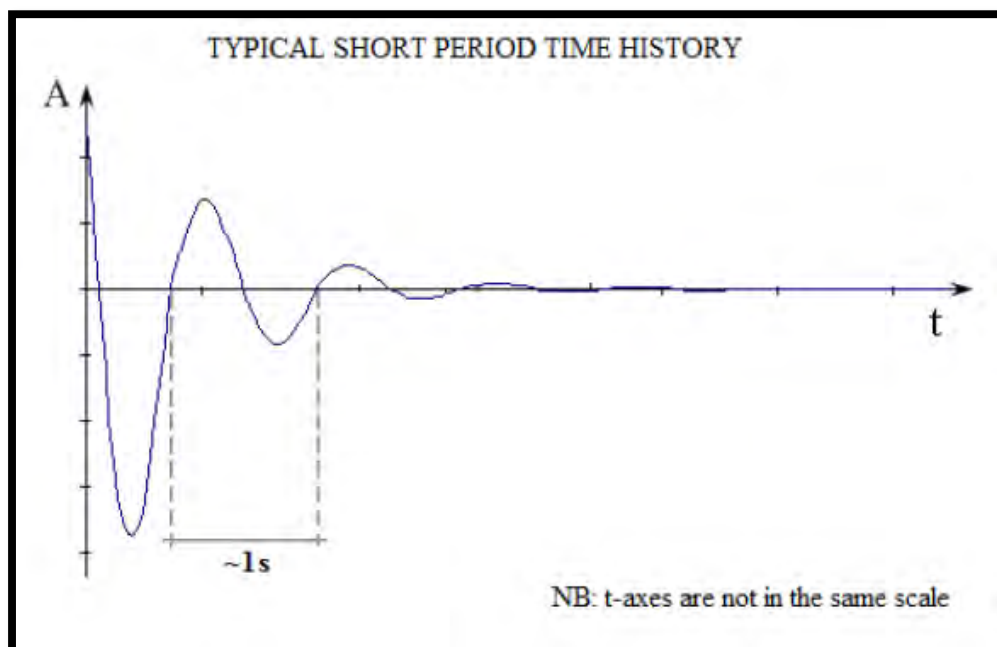
$$\begin{cases} \hat{u} = \hat{u}_1 \cdot e^{(\hat{n}_1 \pm i\hat{\omega}_1) \cdot \hat{t}} + \hat{u}_2 \cdot e^{(\hat{n}_2 \pm i\hat{\omega}_2) \cdot \hat{t}} \\ \alpha = \alpha_1 \cdot e^{(\hat{n}_1 \pm i\hat{\omega}_1) \cdot \hat{t}} + \alpha_2 \cdot e^{(\hat{n}_2 \pm i\hat{\omega}_2) \cdot \hat{t}} \\ \hat{q} = \hat{q}_1 \cdot e^{(\hat{n}_1 \pm i\hat{\omega}_1) \cdot \hat{t}} + \hat{q}_2 \cdot e^{(\hat{n}_2 \pm i\hat{\omega}_2) \cdot \hat{t}} \\ \theta = \theta_1 \cdot e^{(\hat{n}_1 \pm i\hat{\omega}_1) \cdot \hat{t}} + \theta_2 \cdot e^{(\hat{n}_2 \pm i\hat{\omega}_2) \cdot \hat{t}} \end{cases}$$

con:

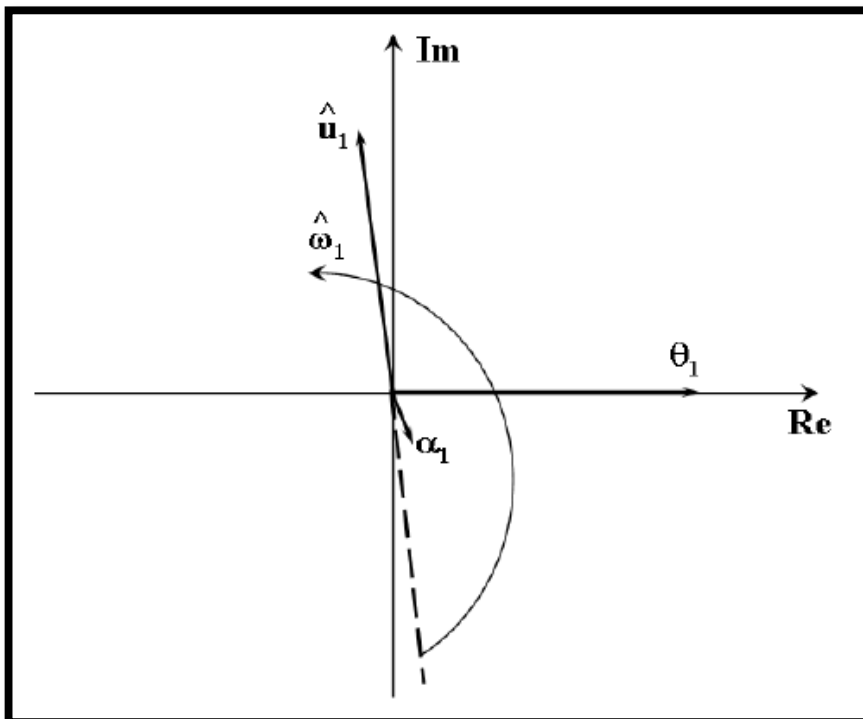
Il modo fugoide vale:



mentre per il corto periodo vale:

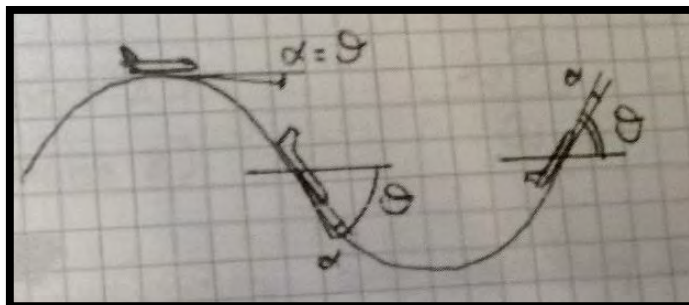


-Come indichiamo la frequenza naturale e lo smorzamento? Lo smorzamento si indica con ζ mentre la frequenza naturale (adimensionale) con ω ; in formule:



Ci serve per tracciare i valori degli autovettori su un piano reale immaginario. Andando a tracciare i nostri vettori vediamo che α_1 è trascurabile rispetto alle altre due grandezze. Quindi nel modo fugoide la variazione d'incidenza è trascurabile rispetto alla variazione di θ . Vediamo anche che la componente θ è sfasata in ritardo di circa 90° rispetto alla u .

Se θ piccolo abbiamo questo andamento:

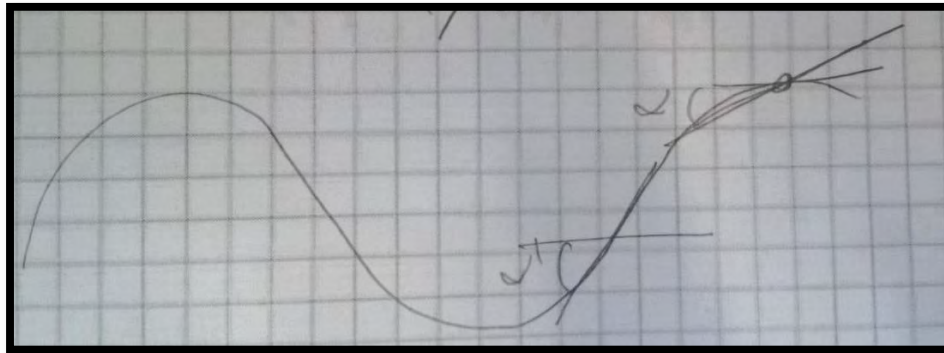


Il velivolo oscilla non variando α . Quindi segue la traiettoria con lo stesso angolo α . Quindi si muoverà come in figura sopra.

Quindi per il modo fugoide andiamo a considerare solo due equazioni:

$$x_{ph} = \{\hat{u}_1, \theta_1\}$$

Trascuriamo l'equazione dei momenti (α non varia).



Quindi potendo trascurare la u , le equazioni che consideriamo per il corto periodo sono:

$$\mathbf{x}_{s.p.} = \{\alpha_2, \theta_2\}$$

- Ora, supponendo α molto piccolo, possiamo approssimare le equazioni del modo fugoide come (sono quella di equilibrio lungo x e z):

$$\begin{cases} (2 \cdot \mu \cdot D - C_{Tu} + C_{Du}) \cdot \hat{u} + C_{We} \cdot \theta = 0 \\ (2 \cdot C_{Le} + C_{Lu}) \cdot \hat{u} - 2 \cdot \mu \cdot D\theta = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni che dobbiamo valutare sono solo:

$$\begin{cases} \hat{u} = \hat{u}_1 \cdot e^{\lambda \hat{t}} \\ \theta = \theta_1 \cdot e^{\lambda \hat{t}} \end{cases}$$

Quindi la nostra matrice, a cui andiamo a calcolare il nostro determinante uguale a zero sarà:

$$\lambda_{1,2} = -\zeta_{ph} \cdot \hat{\omega}_{ph} \pm \hat{\omega}_{ph} \cdot \sqrt{\zeta_{ph}^2 - 1}$$

Ragioniamo ora sul segno di ζ . Abbiamo questi casi:

$$\zeta_{ph}^2 > 1 \rightarrow \text{real solutions (aperiodic motion)}$$

$$\zeta_{ph}^2 < 1 \rightarrow \text{complex conjugated solutions (oscillatory motion)}$$

se maggiore di zero abbiamo soluzioni reali aperiodiche, se è minore di uno abbiamo delle soluzioni oscillatorie. Per quelle oscillatorie possiamo dire che:

$$\begin{cases} \hat{n}_1 = -\zeta_{ph} \hat{\omega}_{ph} \\ \hat{\omega}_1 = \hat{\omega}_{ph} \sqrt{|\zeta_{ph}^2 - 1|} \end{cases}$$

e così ricaviamo la frequenza e lo smorzamento del fugoide:

$$\begin{cases} \hat{\omega}_{ph} = \frac{C_{We}}{\sqrt{2} \cdot \mu} \\ \zeta_{ph} = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{C_{Tu}}{C_{We}} \end{cases}$$

Così abbiamo frequenza e smorzamento del fugoide. Vediamo solo C_{tu} , che è riferito al sistema propulsivo, e andiamo a vedere come valutarlo. Per il getto abbiamo che:

e quindi si trova la versione dimensionale della frequenza:

$$\omega_{ph} = \frac{\sqrt{2} \cdot g}{V}$$

Da qua poi possiamo definire (con eq. caratteristica):

$$\begin{cases} n_1 = -2\zeta_{ph}\omega_{ph} \\ \omega_1 = \omega_{ph}\sqrt{|\zeta_{ph}^2 - 1|} \end{cases}$$

e possiamo ancora definire il periodo e il corto periodo:

$$\begin{cases} T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega_{ph}\sqrt{|\zeta_{ph}^2 - 1|}} = \frac{2\pi \cdot V}{\sqrt{2} \cdot g \cdot \sqrt{|\zeta_{ph}^2 - 1|}} \\ t_{1/2} = -\frac{0.69}{n_1} = \frac{0.69}{2 \cdot \zeta_{ph}\omega_{ph}} = \frac{0.69 \cdot V}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot g \cdot \zeta_{ph}} \end{cases}$$

E quindi questo è il fugoide. Domani vediamo il corto periodo.

Questo per la conservazione dell'energia. La portanza(che è pari alla forza normale perché α è piccolo) in B ed in A sarà scritta come:

$$L = \frac{1}{2} \rho \cdot S \cdot C_{Le} \cdot V_B^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot S \cdot C_{Le} \cdot V_A^2 + \frac{1}{2} \rho \cdot S \cdot C_{Le} \cdot z \cdot g \cdot h$$

$$L = C_{We} \cdot \frac{1}{2} \rho \cdot S \cdot V_A^2 + \underbrace{C_{We} \cdot \rho \cdot S \cdot g \cdot h}_k \rightarrow L = W + k \cdot h$$

(al posto dello z mettiamo un 2) (ricordiamoci che $C_{Le}=C_{We}$) Il termine k lo riteniamo costante , anche se c'è ρ , perché la variazione di quota è piccola per l'oscillazione di fugaide, per questo possiamo ritenerlo costante. La $k \cdot h$ ci rappresenta la variazione di portanza con la quota. Come si può esprimere l'equilibrio delle forze lungo l'asse z nell'ipotesi che gli angoli in gioco siano sempre piccoli? Se abbiamo piccoli angoli θ possiamo scrivere che la differenza tra peso e portanza è data dalla massa per la derivata seconda della variazione di quota rispetto al tempo:

$$m \cdot \frac{d^2h}{dt^2} = W - L$$

$$m \cdot \frac{d^2h}{dt^2} + kh = 0$$

Noi sappiamo che la frequenza naturale di un modo oscillatorio si può calcolare con il discorso del sistema del second'ordine, così possiamo trovare che:

$$\omega_{ph}^2 = \frac{k}{m} = \frac{C_{We} \cdot \rho \cdot S \cdot g}{m}$$

$$\Downarrow$$

$$\omega_{ph} = \sqrt{2} \cdot g / V$$

che è lo stesso risultato visto prima. Qua troviamo solo la frequenza e non lo smorzamento perché qui non consideriamo nessun tipo di perdite.

considerare solo cmq. Abbiamo un cde che moltiplicato per α e siccome sono piccoli si possono togliere. In pratica arriviamo a scrivere la nostra equazione come:

$$2\mu\hat{I}_y\lambda^2 + [\hat{I}_y C_{L\alpha} - 2\mu(C_{mq} + C_{m\dot{\alpha}})] \cdot \lambda - (C_{mq} C_{L\alpha} + 2\mu C_{m\alpha}) = 0$$

Dividiamo poi per $2\mu\hat{I}_y$ e si ha:

$$\lambda^2 + \frac{\hat{I}_y \cdot C_{L\alpha} - 2 \cdot \mu \cdot (C_{mq} + C_{m\dot{\alpha}})}{2 \cdot \mu \cdot \hat{I}_y} \cdot \lambda - \frac{C_{mq} \cdot C_{L\alpha} + 2 \cdot \mu \cdot C_{m\alpha}}{2 \cdot \mu \cdot \hat{I}_y}$$

(manca uguale a zero). E la andiamo a riscrivere nella forma generale:

$$\lambda^2 + 2 \cdot \zeta_{sp} \cdot \hat{\omega}_{sp} \cdot \lambda + \hat{\omega}_{sp}^2 = 0$$

Risolvendola si trova che le soluzioni sono del tipo:

$$\lambda_{3,4} = -\zeta_{sp} \cdot \hat{\omega}_{sp} \pm \hat{\omega}_{sp} \cdot \sqrt{\zeta_{sp}^2 - 1}$$

Confrontando poi le espressioni di sopra delle relazioni possiamo dedurre che:

$$\begin{cases} 2\zeta_{sp}\hat{\omega}_{sp} = \frac{\hat{I}_y C_{L\alpha} - 2\mu \cdot (C_{mq} + C_{m\dot{\alpha}})}{2 \cdot \mu \cdot \hat{I}_y} \\ \hat{\omega}_{sp}^2 = -\frac{2 \cdot \mu \cdot C_{m\alpha} + C_{mq} \cdot C_{L\alpha}}{2 \cdot \mu \cdot \hat{I}_y} \end{cases}$$

possiamo scrivere queste due relazioni e trovare come soluzioni dell'eq caratteristica, in funzione di quello scritto sopra, con lo stesso ragionamento del fugoide che:

$$\hat{\omega}_{sp} \cong \sqrt{-\frac{C_{L\alpha}}{\hat{I}_y} \cdot (h - h_m)}$$

vuol dire che la frequenza naturale nel modo di corto periodo è funzione del margine di manovra, quindi varia al variare del baricentro.

Guardando ancora l'espressione sopra possiamo dire che:

$$\frac{C_{mq} \cdot C_{L\alpha}}{2 \cdot \mu \cdot \hat{I}_y} \ll \frac{C_{m\alpha}}{\hat{I}_y}$$

Perché la massa è molto grande. Così considerando questa cosa possiamo scrivere, per calcolare la frequenza propria per una data posizione del baricentro, si ha:

$$\hat{\omega}_{sp} \cong \sqrt{-\frac{C_{m\alpha}}{\hat{I}_y}}$$

$$\omega_{sp} \cong \sqrt{-\frac{C_{m\alpha}}{\hat{I}_y}} \cdot \frac{2V}{c}$$

Per cui se vogliamo calcolare per un dato $c_{m\alpha}$ (per una posizione del baricentro fissa a frequenza propria) è possibile calcolarla conoscendo $c_{m\alpha}$ e così scrivere le relazioni di sopra (adimensionale e dimensionale). Perché sia stabile staticamente il nostro velivolo $c_{m\alpha}$ dev'essere negativo, e questo significa che per avere stabilità statica la ω_{sp} dev'essere maggiore di zero.

- Si è visto che la posizione longitudinale che assume il baricentro del nostro velivolo ha un importanza notevole, sulla stabilità dinamica, perché nelle nostre espressioni compare la derivata $c_{m\alpha}$ che contiene la posizione del baricentro. Quindi la posizione del baricentro influisce sugli autovalori che io ricavo dall'equazione caratteristica. Questo perché le soluzioni sono funzioni di:

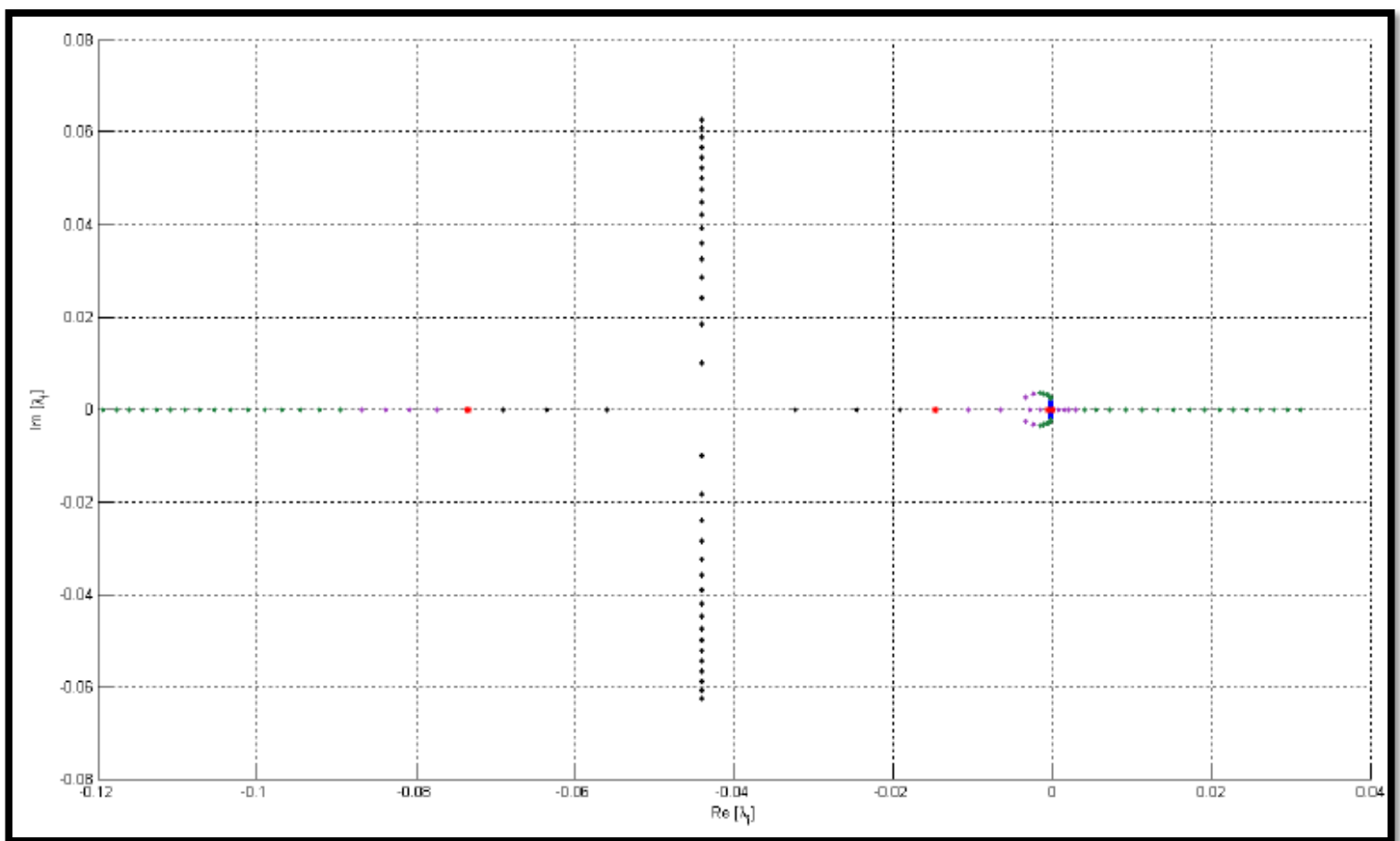
$$\lambda = f(\hat{n}_{1/2}, \hat{\omega}_{1/2})$$

$$(h - h_n) = 0 \Rightarrow C_{m\alpha} = 0 \Rightarrow E_1 = 0$$

$$E_1 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Questa è la condizione limite di stabilità del modo fugoide. Se il baricentro si sposta dietro al punto neutro, una delle due soluzioni reali diventa positiva e quindi il modo fugoide non è più stabile.

-Vediamo ora il corto periodo:



vediamo che succede la stessa cosa: al ridursi del margine di stabilità, si riduce progressivamente il valore della parte immaginaria delle soluzioni fino a che si arriva ad avere parte immaginaria nulla e quindi solo più parte reale. Il modo così diventa aperiodico. Siccome però, su questo diagramma su cui riportiamo le radici, il modo di corto periodo si trova molto più spostato al lato reale negativo rispetto al fugoide, succede che il modo di corto periodo, seppur aperiodico, risulti stabile anche quando il baricentro va dietro al punto neutro.

Abbiamo ad un certo punto che le soluzioni di corto periodo e di fugoide che s'incontrano e in questo caso danno origine ad un modo combinato chiamato terzo modo.

$$\hat{\omega}_{sp} > 0$$

$$\frac{2 \cdot \mu \cdot C_{m\alpha} + C_{mq} \cdot C_{L\alpha}}{2 \cdot \mu \cdot \hat{I}_y} = \frac{2\mu \cdot (h_c - h_n) \cdot C_{L\alpha} + C_{mq} \cdot C_{L\alpha}}{2 \cdot \mu \cdot \hat{I}_y} = 0$$

Dove sostituiamo il valore di $cm\alpha$ con al posto di h mettiamo h_{crit} (perché abbiamo uguagliato a zero l'eq sopra) e lo ricaviamo per cui:

$$h_{crit} = h_n - \frac{C_{mq}}{2\mu}$$

che ci sembra il punto di manovra a meno della solita derivata, infatti avevamo scritto che:

$$h_m = h_n - \frac{C_{mq}}{2\mu - C_{Lq}}$$

e trascurando il clq abbiamo che le due coincidono. Così noi possiamo ridurre la nostra espressione dell'equazione caratteristica come $h_m = h_{crit}$. Così la scriviamo come:

$$\lambda^2 + \frac{\hat{I}_y \cdot C_{L\alpha} - 2\mu \cdot (C_{mq} + C_{m\alpha'})}{2 \cdot \mu \cdot \hat{I}_y} \cdot \lambda = \lambda^2 + k \cdot \lambda = 0$$

E andando a risolvere le nostre equazioni andiamo a trovare che:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -k \end{cases}$$

Quindi la soluzione che non è zero ci dipende oltre $cl\alpha$ anche da cmq e $cm\alpha'$. Questa derivata la ritroveremo nell'alta manovrabilità (la valuteremo sperimentalmente in galleria del vento; come somma). E le soluzioni per α e per q (al posto di θ ; tanto sono uguali):

$$\begin{cases} C_{Y\beta} \cdot \beta + C_{Yp} \cdot \hat{p} + C_{Yr} \cdot \hat{r} = 2 \cdot \mu \cdot D\beta + \frac{2\mu}{A} \cdot \hat{r} - C_{We} \phi \\ C_{I\beta} \cdot \beta + C_{Ip} \cdot \hat{p} + C_{Ir} \cdot \hat{r} = A \cdot (\hat{I}_x \cdot D\hat{p} - \hat{I}_{xz} \cdot D\hat{r}) \\ C_{n\beta} \cdot \beta + C_{np} \cdot \hat{p} + C_{nr} \cdot \hat{r} = A \cdot (\hat{I}_z \cdot D\hat{r} - \hat{I}_{xz} \cdot D\hat{p}) \end{cases}$$

(dove D derivata rispetto al tempo adimensionale). Raccogliendo tutto si ha:

$$\begin{cases} (2\mu D - C_{Y\beta}) \cdot \beta - (A \cdot C_{Yp} D + C_{We}) \cdot \phi + \left(\frac{2\mu}{A} - C_{Yr} \right) \cdot \hat{r} = 0 \\ -C_{I\beta} \cdot \beta + (A^2 \cdot \hat{I}_x D^2 - A \cdot C_{Ip} D) \cdot \phi - (C_{Ir} + A \cdot \hat{I}_{xz} D) \cdot \hat{r} = 0 \\ -C_{n\beta} \cdot \beta - (A^2 \cdot \hat{I}_{xz} D^2 + A \cdot C_{np} D) \cdot \phi - (C_{nr} - A \cdot \hat{I}_z D) \cdot \hat{r} = 0 \end{cases}$$

e in forma matriciale:

$$[A] \cdot \begin{bmatrix} \beta \\ \phi \\ \hat{r} \end{bmatrix} = [A] \cdot \{\hat{X}\} = 0$$

dove A contiene i coefficienti (matrice di stabilità) e x sono i parametri di stato. I forma espansa sono:

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 \cdot \mu \cdot D - C_{Y\beta} & -(A \cdot C_{Yp} D + C_{We}) & 2\mu / A - C_{Yr} \\ -C_{I\beta} & A^2 \cdot \hat{I}_x D^2 - A \cdot C_{Ip} D & -(C_{Ir} + A \cdot \hat{I}_{xz} D) \\ -C_{n\beta} & -(A^2 \cdot \hat{I}_{xz} D^2 + A \cdot C_{np} D) & -C_{nr} + A \cdot \hat{I}_z D \end{bmatrix}$$

e

$$\left\{ \begin{aligned} D\beta &= \frac{C_{Y\beta}}{2 \cdot \mu} \cdot \beta + \frac{C_{Yp}}{2 \cdot \mu} \cdot \hat{p} + \frac{C_{Yr} - 2 \cdot \frac{\mu}{A}}{2 \cdot \mu} \cdot \hat{r} + \frac{C_{We}}{2 \cdot \mu} \cdot \phi \cdot \cos \Theta_0 \\ D\hat{p} &= \left(\frac{C_{l\beta}}{\hat{I}_x} + C_{n\beta} \cdot \hat{I}_{xz} \right) \cdot \beta + \left(\frac{C_{lp}}{\hat{I}_x} + C_{np} \cdot \hat{I}_{xz} \right) \cdot \hat{p} + \left(\frac{C_{lr}}{\hat{I}_x} + C_{nr} \cdot \hat{I}_{xz} \right) \cdot \hat{r} + \\ &\left(\frac{C_{l\delta a}}{\hat{I}_x} + C_{n\delta a} \cdot \hat{I}_{xz} \right) \cdot \delta_a + \left(\frac{C_{l\delta r}}{\hat{I}_x} + C_{n\delta r} \cdot \hat{I}_{xz} \right) \cdot \delta_r \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} D\hat{r} &= \left(\frac{C_{n\beta}}{\hat{I}_z} + C_{l\beta} \cdot \hat{I}_{xz} \right) \cdot \beta + \left(\frac{C_{np}}{\hat{I}_z} + C_{lp} \cdot \hat{I}_{xz} \right) \cdot \hat{p} + \left(\frac{C_{nr}}{\hat{I}_z} + C_{lr} \cdot \hat{I}_{xz} \right) \cdot \hat{r} + \\ &+ \left(\frac{C_{n\delta a}}{\hat{I}_z} + C_{l\delta a} \cdot \hat{I}_{xz} \right) \cdot \delta_a + \left(\frac{C_{n\delta r}}{\hat{I}_z} + C_{l\delta r} \cdot \hat{I}_{xz} \right) \cdot \delta_r \\ D\phi &= \frac{\hat{p}}{A} + \frac{\hat{r}}{A} \cdot \tan \Theta_0 \\ D\Psi &= \frac{\hat{r}}{A \cdot \cos \Theta_0} \end{aligned} \right.$$

(con $D\phi$ scritta nel caso generale ($\Theta_0=0$ per noi)). In forma matriciale completa (con i comandi che poi toglieremo):

$$\dot{\hat{X}} = [A] \cdot \hat{X} + [B] \cdot \{U\} = 0$$

[A]: state matrix
[B]: control matrix

$$\hat{X} = \{\beta, \hat{p}, \hat{r}, \phi, \Psi\}^T : \text{state vector}$$

$$\{U\} = \{\delta_a, \delta_r\}^T : \text{control vector}$$

$$\det(\lambda \cdot [I] - [A]) = 0$$

e le soluzioni saranno del tipo:

$$\begin{cases} \beta = \beta_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot \hat{t}} + \beta_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot \hat{t}} + \beta_3 \cdot e^{\lambda_3 \cdot \hat{t}} + \beta_4 \cdot e^{\lambda_4 \cdot \hat{t}} + \beta_5 \cdot e^{\lambda_5 \cdot \hat{t}} \\ \hat{p} = \hat{p}_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot \hat{t}} + \hat{p}_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot \hat{t}} + \hat{p}_3 \cdot e^{\lambda_3 \cdot \hat{t}} + \hat{p}_4 \cdot e^{\lambda_4 \cdot \hat{t}} + \hat{p}_5 \cdot e^{\lambda_5 \cdot \hat{t}} \\ \hat{r} = \hat{r}_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot \hat{t}} + \hat{r}_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot \hat{t}} + \hat{r}_3 \cdot e^{\lambda_3 \cdot \hat{t}} + \hat{r}_4 \cdot e^{\lambda_4 \cdot \hat{t}} + \hat{r}_5 \cdot e^{\lambda_5 \cdot \hat{t}} \\ \phi = \phi_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot \hat{t}} + \phi_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot \hat{t}} + \phi_3 \cdot e^{\lambda_3 \cdot \hat{t}} + \phi_4 \cdot e^{\lambda_4 \cdot \hat{t}} + \phi_5 \cdot e^{\lambda_5 \cdot \hat{t}} \\ \psi = \psi_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot \hat{t}} + \psi_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot \hat{t}} + \psi_3 \cdot e^{\lambda_3 \cdot \hat{t}} + \psi_4 \cdot e^{\lambda_4 \cdot \hat{t}} + \psi_5 \cdot e^{\lambda_5 \cdot \hat{t}} \end{cases}$$

Vuol dire che arriviamo ad una equazione (per il piano latero direzionale) caratteristica del 5 ordine dove i parametri sono:

$$A_2 \lambda^5 + B_2 \lambda^4 + C_2 \lambda^3 + D_2 \lambda^2 + E_2 \cdot \lambda = 0$$

$$A_2 = 2 \cdot \mu \cdot A^3 \cdot (\hat{I}_x \hat{I}_z - \hat{I}_{xz}^2)$$

$$B_2 = A^3 \cdot C_{Y\beta} \cdot (\hat{I}_{xz}^2 - \hat{I}_x \hat{I}_z) - 2 \cdot \mu \cdot A^2 \cdot [\hat{I}_x C_{nr} + \hat{I}_z C_{lp} + \hat{I}_{xz} \cdot (C_{lr} + C_{np})]$$

(pedice 2 vuol dire che siamo nel piano latero direzionale)

$$\begin{cases} \lambda_1 = \hat{n}_1 \\ \lambda_2 = \hat{n}_2 \\ \lambda_{3,4} = \hat{n}_3 \pm i\hat{\omega}_3 \end{cases}$$

$$\hat{n} = n \cdot \frac{c}{2 \cdot V} \rightarrow \text{non-dimensional real part of eigenvalue}$$

$$\hat{\omega} = \omega \cdot \frac{c}{2 \cdot V} \rightarrow \text{non-dimensional imaginary part of eigenvalue}$$

(si adimensionalizza con c; a volte si usa b ma cè lo devono dire loro. Se tutto tace allora non vogliono farcelo sapere. Segreto militare). Adimensionalizziamo come:

$$t^* = \frac{c}{2 \cdot V}$$

e andando a sostituire troviamo le soluzioni per i nostri parametri di stato:

$$\begin{cases} \beta = \beta_1 \cdot e^{\hat{n}_1 \cdot \hat{t}} + \beta_2 \cdot e^{\hat{n}_2 \cdot \hat{t}} + \beta_3 \cdot e^{(\hat{n}_3 + i \cdot \hat{\omega}_3) \cdot \hat{t}} + \beta_4 \cdot e^{(\hat{n}_3 - i \cdot \hat{\omega}_3) \cdot \hat{t}} \\ \hat{p} = \hat{p}_1 \cdot e^{\hat{n}_1 \cdot \hat{t}} + \hat{p}_2 \cdot e^{\hat{n}_2 \cdot \hat{t}} + \hat{p}_3 \cdot e^{(\hat{n}_3 + i \cdot \hat{\omega}_3) \cdot \hat{t}} + \hat{p}_4 \cdot e^{(\hat{n}_3 - i \cdot \hat{\omega}_3) \cdot \hat{t}} \\ \hat{r} = \hat{r}_1 \cdot e^{\hat{n}_1 \cdot \hat{t}} + \hat{r}_2 \cdot e^{\hat{n}_2 \cdot \hat{t}} + \hat{r}_3 \cdot e^{(\hat{n}_3 + i \cdot \hat{\omega}_3) \cdot \hat{t}} + \hat{r}_4 \cdot e^{(\hat{n}_3 - i \cdot \hat{\omega}_3) \cdot \hat{t}} \\ \phi = \phi_1 \cdot e^{\hat{n}_1 \cdot \hat{t}} + \phi_2 \cdot e^{\hat{n}_2 \cdot \hat{t}} + \phi_3 \cdot e^{(\hat{n}_3 + i \cdot \hat{\omega}_3) \cdot \hat{t}} + \phi_4 \cdot e^{(\hat{n}_3 - i \cdot \hat{\omega}_3) \cdot \hat{t}} \\ \psi = \psi_1 \cdot e^{\hat{n}_1 \cdot \hat{t}} + \psi_2 \cdot e^{\hat{n}_2 \cdot \hat{t}} + \psi_3 \cdot e^{(\hat{n}_3 + i \cdot \hat{\omega}_3) \cdot \hat{t}} + \psi_4 \cdot e^{(\hat{n}_3 - i \cdot \hat{\omega}_3) \cdot \hat{t}} \end{cases}$$

Siccome abbiamo un solo modo periodico , e due aperiodici, per questi aperiodici possiamo definire un tempo di dimezzamento (tempo in cui si dimezza l'ampiezza)(dipende dalla parte reale) e questo sarà:

sempre asse X corpo come riferimento)(vuol dire che sono in opposizione di fase). Ciò significa che in questo caso, se andiamo a vedere le nostre equazioni di prima, dove c'era la relazione tra r e ψ , vuol dire che possiamo scrivere:

$$\hat{r} \cong -\dot{\beta}$$

(c'è β cappelletto punto e non solo β punto come segnato lì)(deriviamo sempre in modo adimensionale).

-Per il ducth roll possiamo definire:

$$\begin{cases} \hat{\omega}_d = \sqrt{\hat{n}_3^2 + \hat{\omega}_3^2} \\ \zeta_d = -\frac{\hat{n}_3}{\hat{\omega}_d} \end{cases}$$

Se vogliamo anche in questo piano esprimere l'equazione caratteristica scindendo i tre modi potremo scriverla così:

$$(\lambda - \hat{n}_1) \cdot (\lambda - \hat{n}_2) \cdot (\lambda^2 - 2\zeta_d \hat{\omega}_d \lambda + \hat{\omega}_d^2) = 0$$

(con d = ducth roll) si traccia il diagramma parte reale e immaginaria e siamo a posto.

- Spiral mode

Possiamo supporre sia una derivata lenta: questo vuol dire che l'influenza di un certo numero di derivate può essere molto piccolo e trascurabile. Quali sono queste derivate che non hanno influenza nel modo spirale? Sono la $C_{y\beta}$, C_{yp} e la C_{yr} . Le derivate che influenzano le forze lungo y (questo per velivoli convenzionali che si muovono nell'involuppo di volo). Togliendo queste derivate le equazioni che rimangono sono:

$$\begin{cases} -C_{We} \cdot \phi + \frac{2 \cdot \mu}{A} \cdot \hat{r} = 0 \\ -C_{l\beta} \cdot \beta - A \cdot C_{lp} \cdot D\phi - C_{lr} \cdot \hat{r} = 0 \\ -C_{n\beta} \cdot \beta - A \cdot C_{np} \cdot D\phi - C_{nr} \cdot \hat{r} = 0 \end{cases}$$

Solo per lo spiral mode! Quindi potremo introdurre:

$$\begin{cases} \beta = \beta_1 \cdot e^{\lambda_1 \hat{t}} \\ \phi = \phi_1 \cdot e^{\lambda_1 \hat{t}} \\ \hat{r} = \hat{r}_1 \cdot e^{\lambda_1 \hat{t}} \end{cases}$$

Quelle che sono le soluzioni. Possiamo ricavarci la matrice di stabilità che sarà:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & -C_{We} & 2 \cdot \mu / A \\ -C_{l\beta} & -A \cdot C_{lp} D & -C_{lr} \\ -C_{n\beta} & -A \cdot C_{np} D & -C_{nr} \end{bmatrix} = 0$$

La eguaglieremo a zero e così ci troviamo l'equazione caratteristica del modo spirale:

$$\hat{p} = A \cdot D\phi.$$

Quindi l'equazione caratteristica che ricaviamo sarà:

$$A \cdot \hat{I}_x \cdot \lambda_2 - C_{lp} = 0$$

Così vediamo subito la soluzione:

$$\lambda_2 = \frac{C_{lp}}{A \cdot \hat{I}_x}$$

Così gli autovalori della soluzione saranno (con i parametri di stato):

$$\hat{p} = \hat{p}_1 \cdot e^{\lambda_2 \hat{t}} = \hat{p}_1 \cdot e^{\left(\frac{C_{lp}}{A \cdot \hat{I}_x} \hat{t} \right)}$$

Il modo sarà stabile quando $\lambda_2 < 0$ che vuol dire $C_{lp} < 0$, ma la C_{lp} è la derivata del coefficiente di rollio fatta rispetto la velocità di rollio e quindi è una derivata di smorzamento che per velivoli tradizionali sono negative. Quindi per velivoli tradizionali il modo di rollio è stabile.

-Dutch roll

(si muove dondolando come un pendolo visto da davanti). Assumiamo che il baricentro abbia una traiettoria rettilinea. Le forze lungo y sono in equilibrio. Quindi se trascuriamo le equazioni lungo y allora le nostre equazioni si semplificano e diventano (abbiamo ancora la dipendenza da r e p di β e ϕ). Sono:

Quindi la derivata che mi esprime l'effetto diedro sia molto minore della derivata che mi esprime la stabilità direzionale, la variazione nel tempo di ϕ è molto piccola; allora il nostro velivolo varia molto poco e quindi questo ci semplifica la formulazione del dutch roll. Con $\phi=0$ ho semplicemente un'oscillazione come spiegata prima. Questa va bene solo nella condizione spiegata sopra ma va bene solo dentro il diagramma d'involuppo di volo (a basse velocità non funziona più tanto bene) per velivoli convenzionali.

Possiamo anche dire che controllando nel database aerodinamico che se $C_l \beta \ll C_n \beta$, vuol dire che l'effetto di rigidità d'imbarcata è dominante rispetto alla variazione del momento di rollio rispetto a β . In questo modo le equazioni si semplificano (non vale a velocità molto basse, dove siamo nel campo di alta incidenza). Se possiamo farla le equazioni si semplificano così:

$$\begin{cases} (2 \cdot \mu \cdot D - C_{Y\beta}) \cdot \beta + \left(\frac{2 \cdot \mu}{A} - C_{Yr} \right) \cdot \hat{r} = 0 \\ C_{n\beta} \cdot \beta + (C_{nr} - A \cdot \hat{I}_z \cdot D) \cdot \hat{r} = 0 \end{cases}$$

Possiamo anche dire che la C_{yr} è molto piccola e possiamo trascurarla (perché la massa è molto grande), e quindi con questa approssimazione andiamo a scrivere la matrice semplificata:

$$\begin{vmatrix} 2 \cdot \mu \cdot \lambda - C_{Y\beta} & \frac{2 \cdot \mu}{A} \\ C_{n\beta} \cdot C_{nr} & -A \cdot \hat{I}_z \cdot \lambda \end{vmatrix}$$

Si uguaglia a zero e troviamo eq caratteristica:

$$\lambda^2 - \frac{A \cdot \hat{I}_z \cdot C_{Y\beta} + 2 \cdot \mu \cdot C_{nr}}{2 \cdot \mu \cdot A \cdot \hat{I}_z} \cdot \lambda + \frac{C_{Y\beta} \cdot C_{nr} + \frac{2 \cdot \mu}{A} \cdot C_{n\beta}}{2 \cdot \mu \cdot A \cdot \hat{I}_z} = 0$$

che diventa:

$$\lambda^2 + 2 \cdot \zeta_d \cdot \omega_d \cdot \lambda + \omega_d^2 = 0$$

Dove possiamo dire che gli elementi di questa equazione sono equivalenti a:

$$\hat{\omega}_d \cong \frac{1}{A} \sqrt{\frac{C_{n\beta}}{\hat{I}_z}}$$

Questo vuol dire semplicemente che la frequenza naturale del Dutch roll coincide alla frequenza naturale di oscillazione in imbardata.

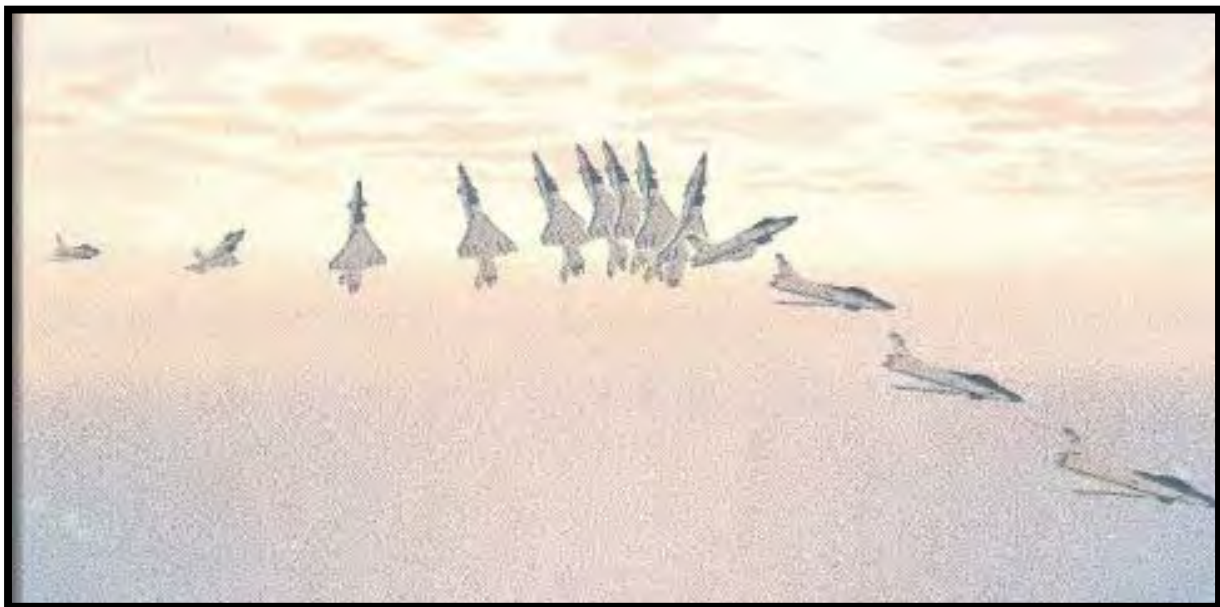
Fine capitolo 4.

-Inizio parte di alta incidenza e manovre

Partiamo dalle manovre. Perché le consideriamo? perché per alcuni velivoli quanto spiegato fino ad ora non funziona più. Ad esempio nel caso di wind shear questo porta ad un aumento d'incidenza e il pilota cerca di ridurre l'incidenza di volo. Se decolliamo e ci troviamo di nuovo un aumento incidenza rischiamo lo stallo. Esistono dei limitatori per la posizione di barra nei velivoli commerciali (così da evitare manovre brusche). Quindi per velivoli commerciali non si prevedono voli in zone fuori dall'involupto di volo. Diverso è il discorso per i velivoli militari. Per questi velivoli si richiede che siano dotati di agilità, cioè la capacità di variare i loro parametri ad alta velocità, e questo richiede che non siano molto stabili.

Qui di seguito abbiamo alcune manovre, alcune delle quali descritte mentre altre tralasciate.

Vediamo per prima cosa questa figura:



Classica manovra richiesta per velivoli militari. Deve aumentare la sua incidenza fino a 90° e poi scende fino a volare di nuovo come prima. Come mai lo fa? Ad esempio per scappare da un missile, in quanto non avendo ali non ha una grande manovrabilità e non riesce a riagganciare l'aereo, oppure se ha un altro velivolo in coda che vuole far fuoco e quindi un modo per evitare ciò è quello di rallentare in questa maniera e portarsi così in posizione di vantaggio (trovarsi dietro al velivolo). Questa manovra si chiama



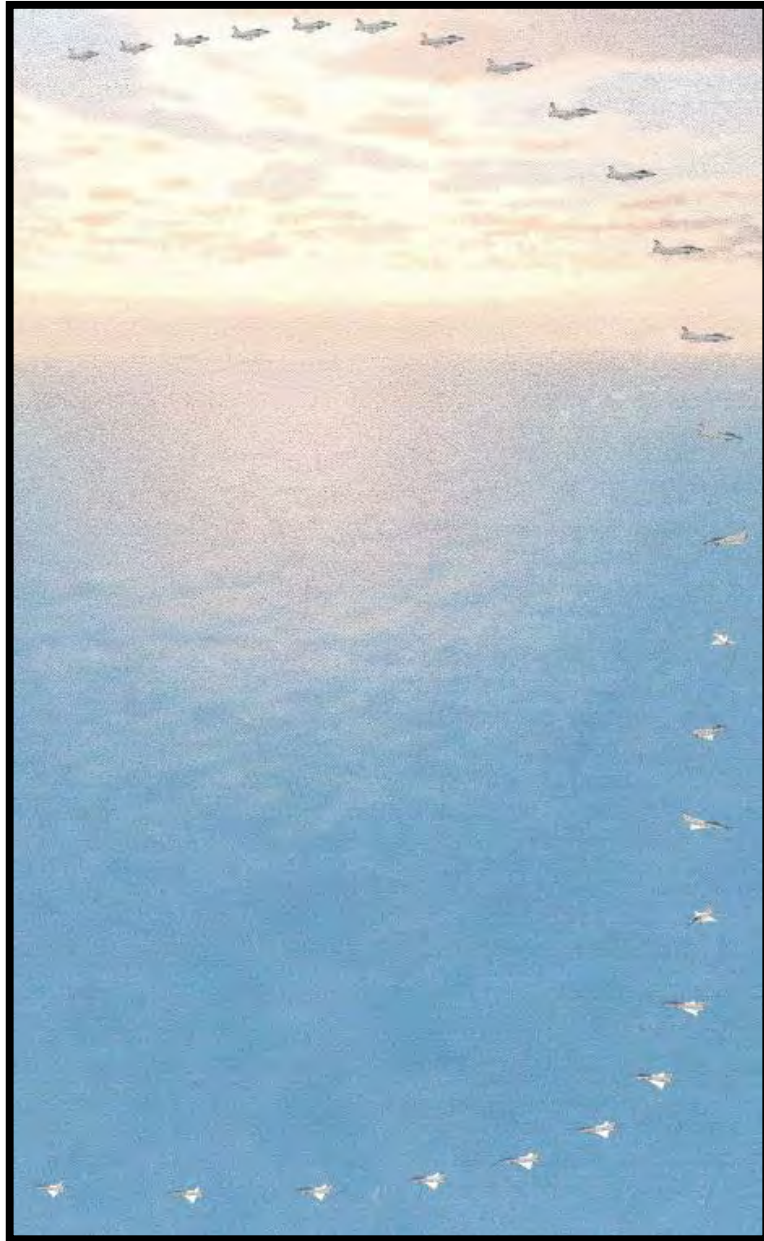
Avviene in modo estremamente rapido.

- Un'altra manovra è questa:

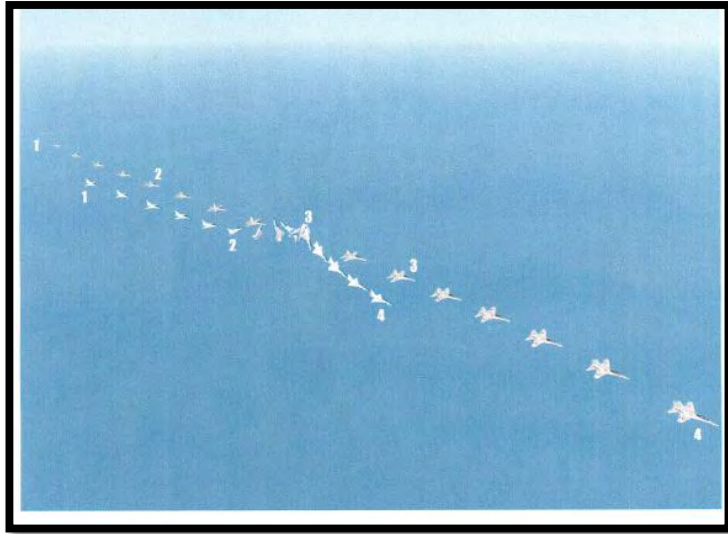


E la stessa di prima solo il velivolo ruota.

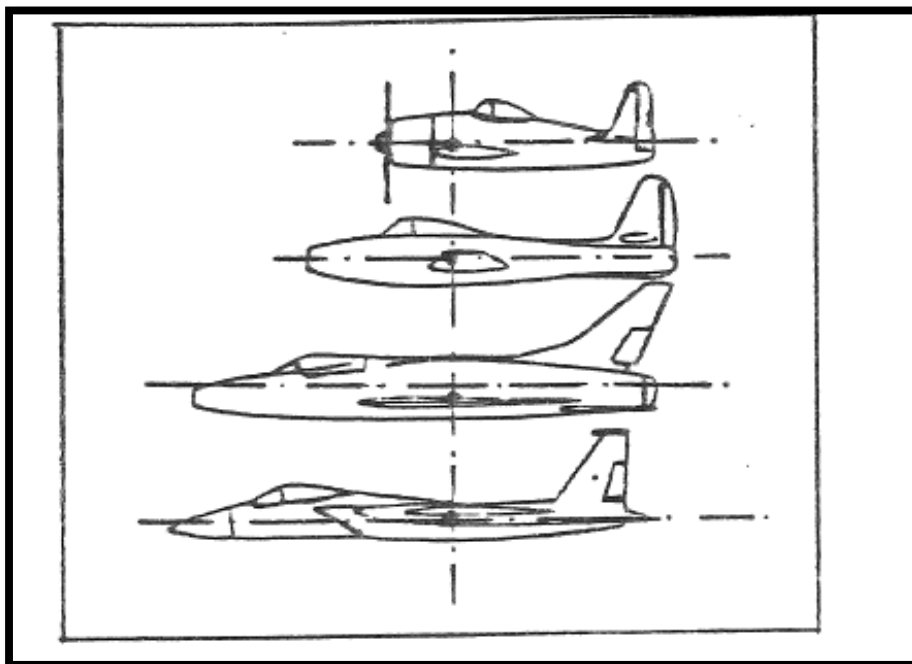
- Questa ci serve se vogliamo scendere rapidamente di quota.



Qui di seguito si riportano altre manovre ad alta incidenza:

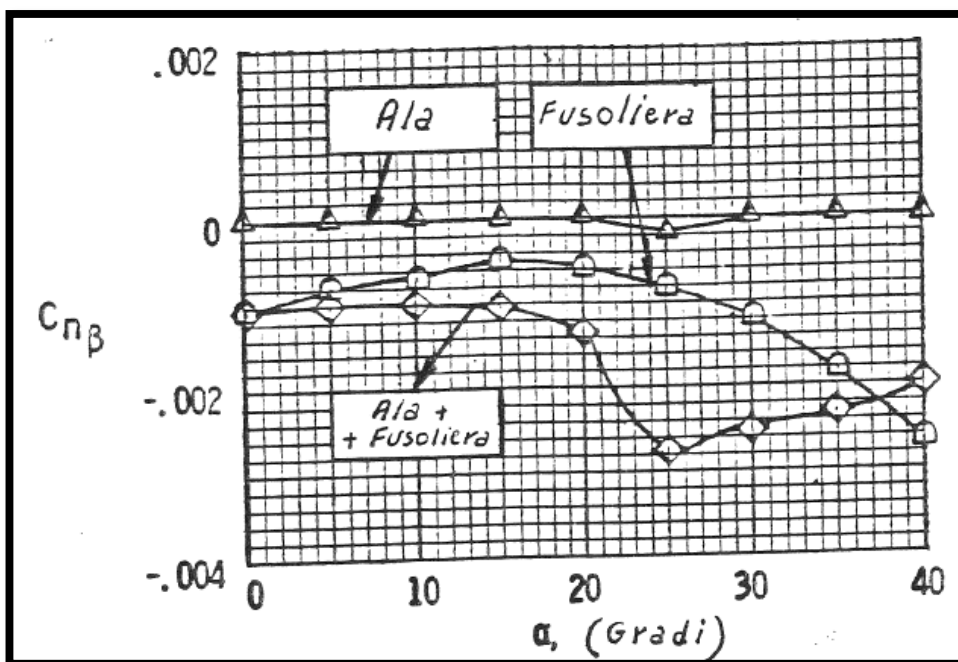


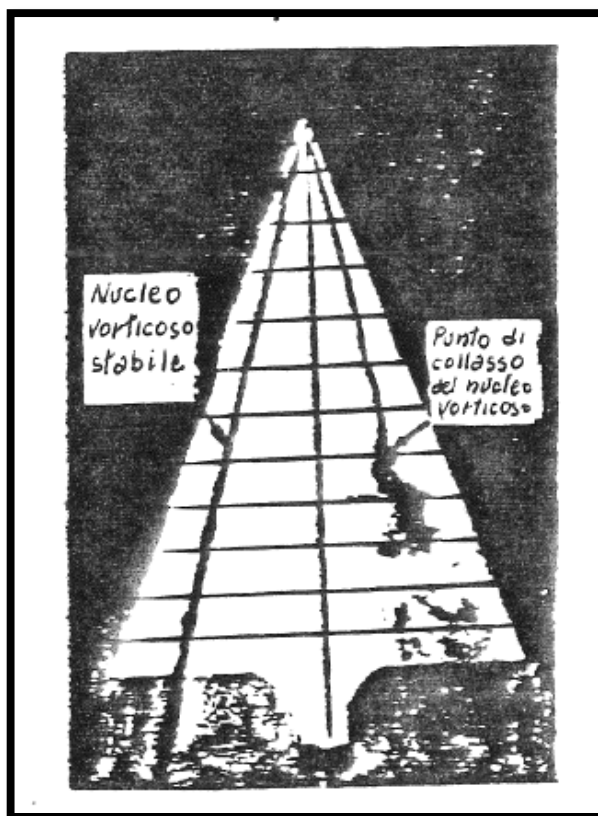
- Vediamo ora come sono cambiate le configurazioni del velivolo negli anni.



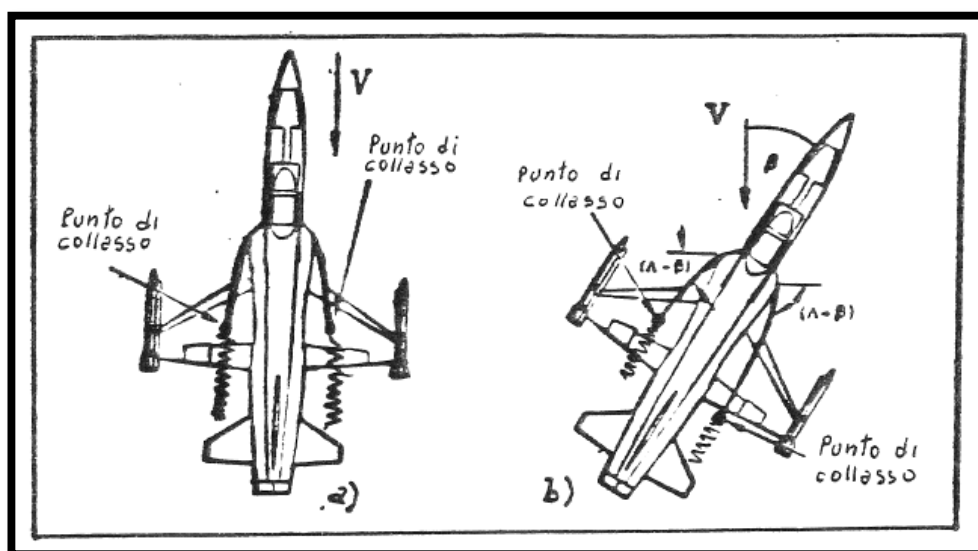
All'inizio c'era una fusoliera tozza, un motore ad elica. Ad andare avanti i velivoli hanno rimosso l'elica, la fusoliera si è allungata, si sono accorciate le ali ed è aumentato l'impennaggio verticale. Più avanti hanno allungato la fusoliera, aumentato l'impennaggio e le ali si sono assottigliate (la fusoliera sé allungata per via della strumentazione). E infine siamo arrivati a configurazioni full-body. Questo ha portato a vedere configurazioni del velivolo diverse da quelle classiche.

Ci si è accorti che questi velivoli volavano in maniera diversa dalle vecchie configurazioni. Per esempio guardando questo andamento:



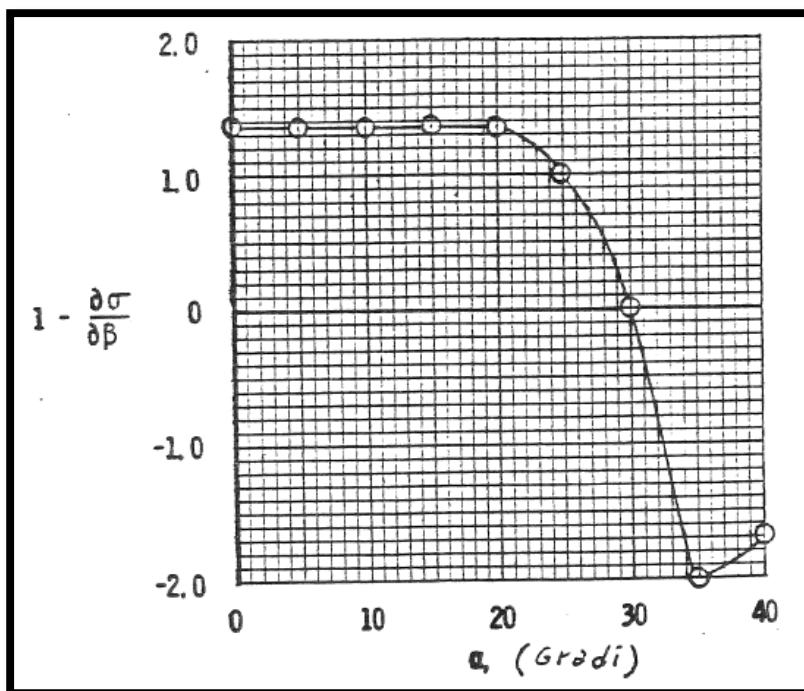


Abbiamo che sulla semiala sinistra ho Bd mentre sulla destra niente. Questo perché? Vediamo questa figura:



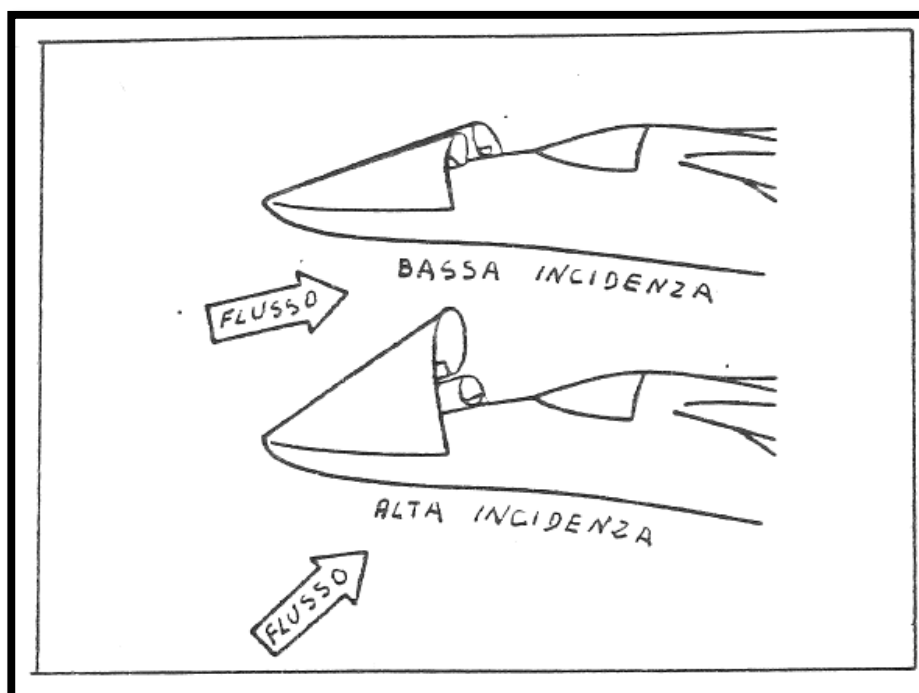
Si vede che con un β diverso da zero ho Bd sull'ala destra avviene dopo il bdf e il Bd sulla sinistra avviene prima. Dipende dall'angolo di freccia che vede la velocità asintotica che sulla semiala destra vede un angolo di freccia più alto, mentre sulla sinistra uno più piccolo. Questo vuol dire che la posizione del Bd dipende dal valore dell'angolo di freccia.

Quindi se andiamo a tracciare la posizione del BD in funzione dell'incidenza e dell'angolo di freccia si ha:



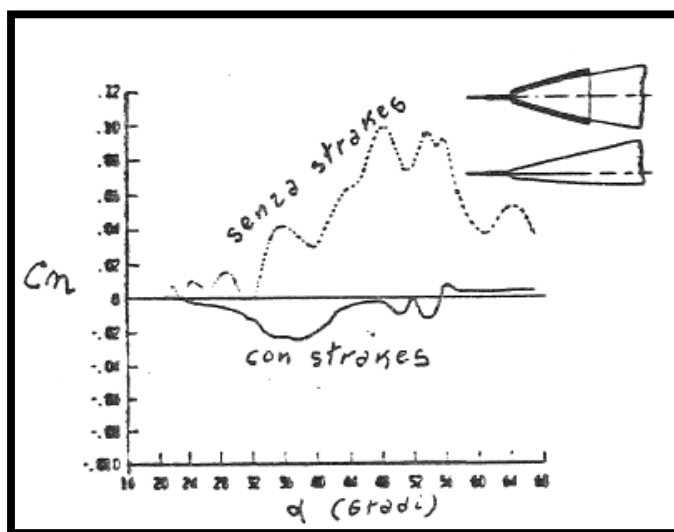
Questo vuol dire che se per esempio aumento l'incidenza il sidewash diminuisce e quindi quando vado a calcolare il comportamento dell'impennaggio verticale devo tenere conto che l'angolo di sidewash può diventare negativo e va ad influire sulla forza dell'impennaggio. Se l'angolo di sidewash cambia segno, non avrà la forza che mi aspetto sull'impennaggio verticale.

Aumentando l'incidenza si vede sul muso del velivolo che si generano due vortici simmetrici (proprio come l'ala) e si generano sulla punta:

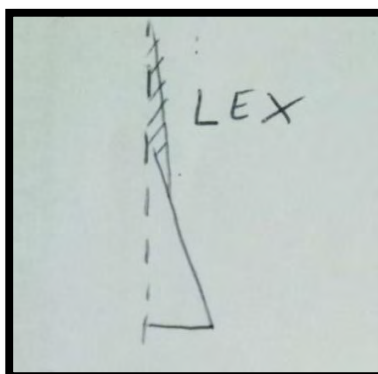


All'aumentare dell'incidenza questi perdono energia così: uno dei due resta più attaccato dell'altro; non sono simmetrici. Quindi vuol dire che uno è più separato e l'altro è più attaccato: quello attaccato genera

Sperimentalmente si è visto che se la sezione è un'ellisse con l'asse maggiore orizzontale, superati i 30° d'incidenza la derivata diventa positiva. Se la fusoliera è circolare o l'asse maggiore è verticale allora il contributo sarà negativo. Come si rendono simmetrici i vortici? Si usano gli strakes:



attenzione che a volte chiamano streaks i lex:



Mentre gli strakes sono delle alette che si mettono all'apice della fusoliera, in questo modo si dà ai vortici di fusoliera la superficie a cui attaccarsi e gli diamo la possibilità di rimanere attaccati più a lungo e quindi di non staccarsi (si vede l'effetto nel grafico sopra). Qui di sotto vediamo i veri streaks.

