



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1432A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Tortorici

MATERIA: Meccanica applicata ai sistemi biomedici,
Prof. Ferraresi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

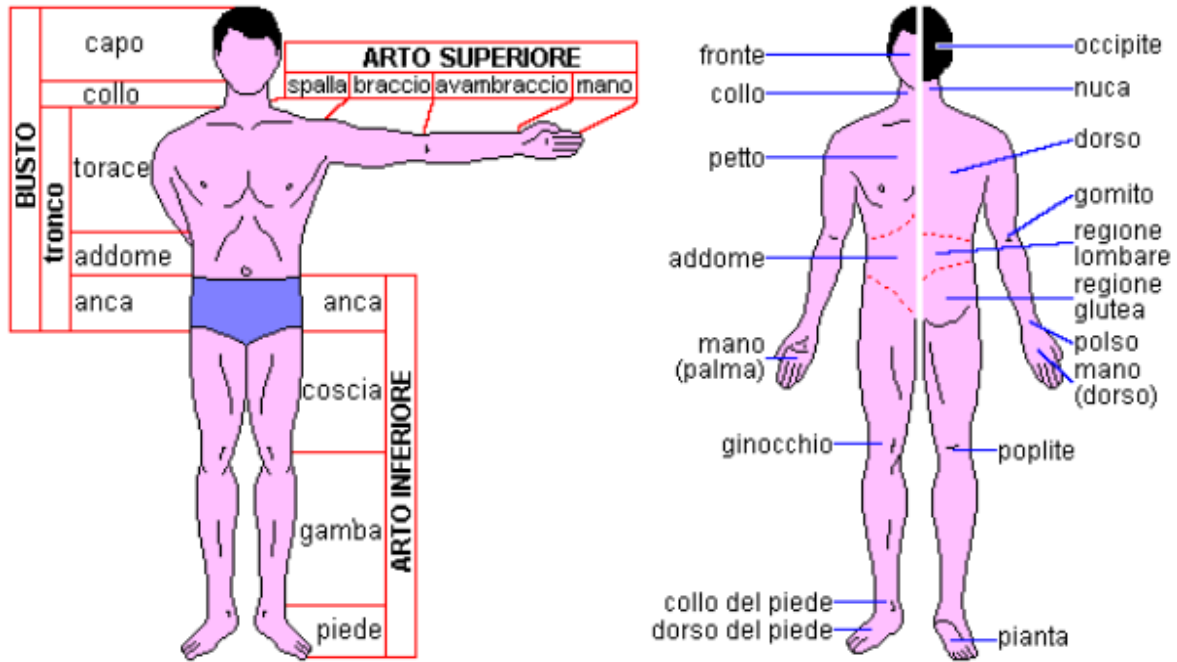
Meccanica Applicata ai Sistemi Biomedici

Lezioni: Ferraresi

INDICE

Introduzione alla Biomeccanica.....	2
Sistema Osteo-Articolare.....	3
Modelli Biodinamici.....	11
Meccanica di un Braccio Robotico SCARA.....	19
Posizionamento dei Corpi nello Spazio.....	26
Cinematica delle Strutture Articolate Seriali.....	35
Dinamica delle Strutture Articolate Seriali.....	38
Meccanica delle Strutture Muscolo-Scheletriche..	42
Deambulazione.....	49
Analisi del Movimento.....	62
Muscoli.....	70
Modelli Lineari del Muscolo Scheletrico.....	79
Meccanica Respiratoria.....	83
Ortesi.....	93
Protesi Esterne.....	94
Progetto, Analisi e Controllo delle Protesi Esterne..	96

Parti anatomiche:



Localizzazioni anatomiche:

- *cranico*: localizzato sulla testa. Contrario: caudale;
- *caudale*: localizzato sulle natiche. Contrario: cranico;
- *centrale*: riferito alla centralità del corpo (es: sistema nervoso centrale). Contrario: periferico;
- *periferico*: riferito alla superficie del corpo (es: nervi). Contrario: centrale;
- *prossimale*: localizzato verso il tronco (verso il cuore). Contrario: distale;
- *distale*: localizzato lontano dal tronco (dal cuore). Contrario: prossimale;
- *dorsale*: sulla schiena, oppure superficie superiore di piede e mano. Contrario: ventrale;
- *ventrale*: riferito alla parte frontale (addome). Contrario: dorsale;
- *palmare*: localizzato sul palmo della mano;
- *plantare*: localizzato sulla suola del piede;
- *mediale*: verso il centro del corpo. Contrario: laterale;
- *laterale*: verso la periferia del corpo. Contrario: mediale.

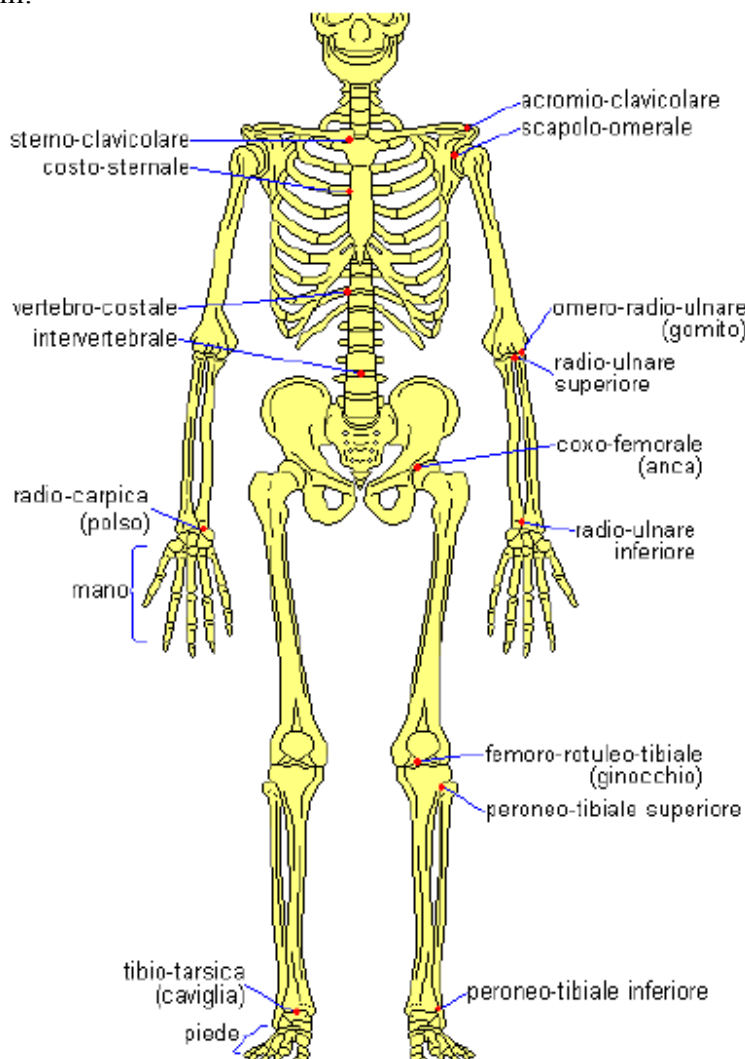
SISTEMA OSTEO-ARTICOLARE

Le ossa costituiscono le parti rigide dei vari segmenti corporei. A seconda delle proporzioni si distinguono ossa brevi (vertebre), piatte (scapola) o lunghe (omero). Le ossa lunghe sono le più importanti dal punto di vista del movimento e si dividono in epifisi (estremità) e diafisi (parte centrale).

Le ossa, grazie alla connessione con il sistema muscolare, funzionano da leve, consentendo la stabilità e il movimento.

Le ossa sono collegate tra loro dalle articolazioni, la cui forma definisce il modo in cui un segmento si può muovere rispetto al corpo.

Principali articolazioni:



Articolazioni del tronco:

- Capo (occipito-atlantoidea, atlanto-epistrofea);
- Colonna vertebrale (intervertebrali);
- Vertebro-costali;
- Costo-sternali.

Articolazioni degli arti superiori:

- Spalla (sterno-clavicolare, acromio-clavicolare, scapolo-omerale);
- Gomito (omero-radio-ulnare prossimale);
- Polso (radio-ulnare distale, radio-carpica);
- Mano.

Articolazioni degli arti inferiori:

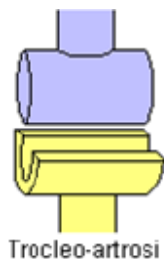
- Anca (coxo-femorale);
- Ginocchio (femoro-rotuleo-tibiale);
- Caviglia (tibio-tarsica);
- Piede.

Elementi quasi sempre presenti nelle articolazioni:

- **capsula articolare:** manicotto di tessuto connettivo denso, riveste completamente

- **anfiartrosi:** articolazioni semimobili, consentono solo piccoli movimenti a 6 g.d.l. (vertebre);
- **diartrosi:** permettono ampi movimenti. Sono anche dette synovial joint (ginocchio).

Tipi di diartrosi:

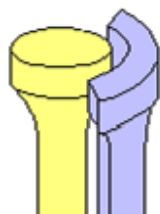


Trocleo-artrosi



Trocleo-artrosi

- Presenta una gola concava entro la quale si inserisce una faccia convessa (troclea)
- Consente movimenti di flessione ed estensione
- Il movimento relativo è una rotazione attorno ad un asse (1 g.d.l.)
- Equivalente meccanico: cerniera piana
- Esempi: gomito, ginocchio, caviglia, interfalangee.



Trocoide

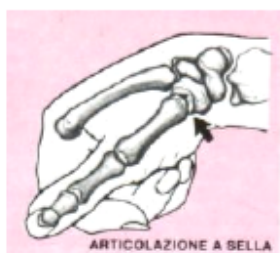


Trocoide

- Presenta un cilindro osseo avvolto da un anello fibroso
- Consente movimenti di pronazione e supinazione
- Il movimento relativo è una rotazione attorno ad un asse (1 g.d.l.)
- Equivalente meccanico: ~ cerniera piana
- Esempio: accoppiamento tra capitello del radio e ulna.



A sella



Articolazione a sella

- Ognuna delle due superfici ha una curvatura concava e una convessa
- Consente movimenti di flessione, estensione, abduzione e adduzione
- Il movimento relativo è un movimento angolare (2 g.d.l.)
- Equivalente meccanico: giunto cardanico
- Esempi: carpo-metacarpo del pollice, sterno-clavicola.

mobile, cioè con esclusione del sacro. Nella **flessione ventrale** si può giungere ad una armonica curvatura anteriore, perché scompare la lordosi lombare, si accentua la cifosi dorsale e la lordosi cervicale tende ad incurvarsi in senso opposto. Nell'estensione meglio **flessione dorsale**, la colonna vertebrale assume un aspetto caratteristico con un tratto intermedio quasi rettilineo, per la scomparsa della cifosi dorsale e 2 curvature accentuate alle estremità cervicali e lombari con concavità posteriore. I movimenti di **inclinazione laterale** sono limitati nella regione toracica, più ampi nella regione cervicale e soprattutto nel tratto lombare. I movimenti di **rotazione**, pur assai limitati tra le singole vertebre, possono essere assai estesi quando interessano tutta la colonna vertebrale mobile.

Coste

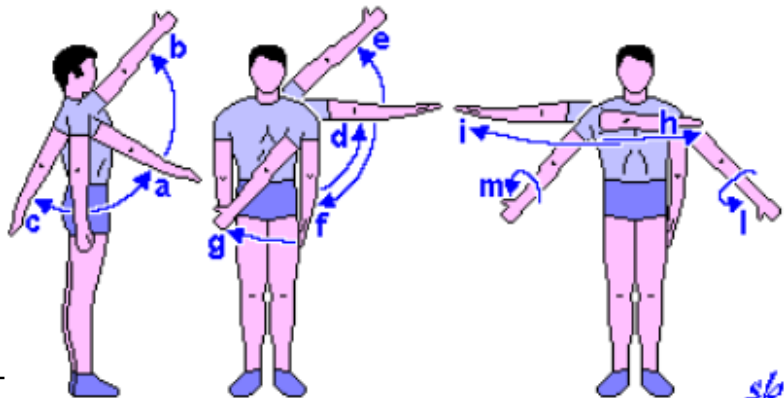
Le coste si innalzano e si abbassano nei movimenti respiratori, ma in realtà nell'innalzarsi ogni costa si porta in avanti e lateralmente ed **inclinando in basso** la sua faccia interna; il contrario si verifica quando le coste si abbassano.

Sterno

Lo sterno, intimamente legato alle coste, si porta in avanti quando le coste si innalzano e ritorna nella posizione di riposo quando le coste si abbassano.

Il braccio

- a-b) flessione
- c) estensione
- d-e) abduzione
- f) adduzione
- g) indietro sul piano frontale
- h) indietro sul piano orizzontale
- i) fuori sul piano orizzontale
- l) rotazione interna
- m) rotazione esterna



La combinazione di flesso-estensione con abduzione e adduzione produce il movimento di circonduzione.

Clavicola

Nei movimenti della clavicola il fulcro è rappresentato dall'articolazione sterno-clavicolare che fa da perno per i movimenti di **innalzamento** e **abbassamento**, di **proiezione in avanti ed indietro** e di **circonduzione**.

Articolazione acromio-clavicolare

L'articolazione acromio-clavicolare consente spostamenti che vengono definiti movimenti della spalla (**innalzamento, abbassamento, proiezione in avanti ed indietro**) nei quali la faccia anteriore della scapola scivola sulla superficie posteriore del torace.

Articolazione scapolo-omerale

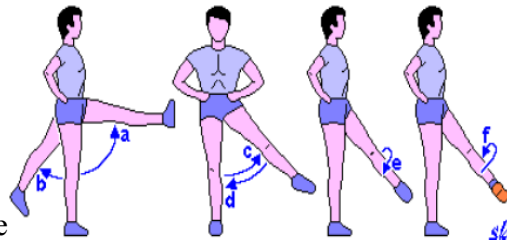
L'articolazione scapolo-omerale è la più mobile delle diartrosi, anche se l'ampiezza reale degli spostamenti dell'omero è spesso aumentata da opportuni spostamenti della scapola.

Movimenti del braccio

L'abduzione comporta una prima fase che fa raggiungere al braccio la posizione orizzontale ed una seconda fase in cui la scapola orienta verso l'alto la cavità articolare, facilitata in questo anche dall'estensione della colonna vertebrale. **L'adduzione** invece è limitata dall'incontro del braccio con le parti laterali del tronco. Anche la proiezione in avanti ed indietro (**flessione-estensione**) comporta, nelle ampiezze maggiori, lo spostamento della scapola. Il movimento di **circonduzione** è il passaggio in regolare successione dei 4 movimenti precedenti. Infine i movimenti di **rotazione** dell'omero sono assai limitati, soprattutto quello esterno.

- a) flessione
- b) estensione
- c) abduzione
- d) adduzione
- e) rotazione interna (mediale)
- f) rotazione esterna (laterale)

La combinazione di flesso-estensione con abduzione e adduzione produce il movimento di circonduzione.



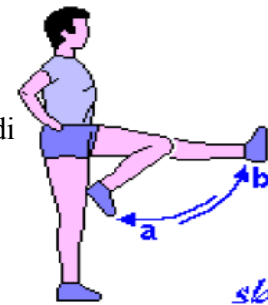
Femore

Il femore compie un movimento di **flessione** molto più esteso di quello di **estensione** e questi movimenti sono più limitati quando la gamba è tesa. L'adduzione e l'abduzione raggiungono l'ampiezza massima quando la coscia è alquanto flessa; il movimento di **circonduzione** è meno ampio di quello dell'omero e la **rotazione** è meno estesa in senso interno che in senso esterno.

La gamba

- a) flessione
- b) estensione

Oltre alla flesso-estensione, è consentito anche un limitato movimento di rotazione (interna ed esterna).



Ginocchio

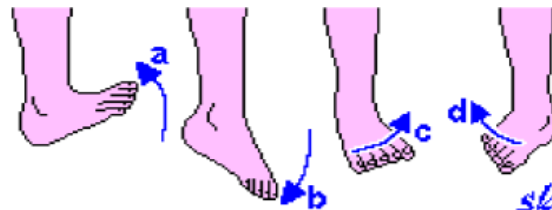
Il ginocchio può compiere essenzialmente movimenti ampi di **flessione** ed **estensione**. Poiché le superfici condiloidee femorali non sono perfettamente sferiche, la flessione è associata ad una rotazione mediale (interna) della tibia, mentre l'inverso si verifica nell'estensione. La rotazione del ginocchio può essere perciò combinata con i movimenti di flesso-estensione, ma può essere anche indipendente per quanto di solito quasi nulla.

Articolazioni tibio-fibulari

Le articolazioni tibio-fibulari sono assai meno mobili delle equivalenti radio-ulnari dell'avambraccio.

Il piede

- a) flessione dorsale o flessione
- b) flessione plantare o estensione
- c) rotazione interna (+ inversione)
- d) rotazione esterna (+ eversione)



Articolazioni del piede

movimenti del piede sono quasi sempre **di tipo combinato**; nell'articolazione talocrurale si verificano movimenti di flessione dorsale e di flessione plantare, quest'ultima spesso associata ad abduzione o adduzione (rotazione interna/esterna). Nella adduzione si verifica anche un sollevamento del margine mediale del piede (inversione), mentre l'abduzione coincide con un sollevamento del margine laterale (eversione); i movimenti di torsione (inversione/eversione) si verificano nell' articolazione sottotarsale e medio-tarsica. Le altre articolazioni consentono movimenti limitatissimi che regolano l'elasticità del piede e sono in genere movimenti combinati.

MODELLI BIODINAMICI

Lo studio di un sistema si compone di 4 fasi:

1. studio del sistema reale (per es un'auto);
2. modello fisico (per es punto materiale, o macchinina 2D);
3. modello matematico (sistema di equazioni algebriche o differenziali);

$$L = \frac{V_0^2 \sin 2\beta}{2g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh_2}{(V_0 \sin \beta)^2}} \right)$$

Si nota che per ottenere un salto più lungo si può agire su V_0 e h_2 , che devono essere le maggiori possibili, e β .

Per calcolare quale β produce il massimo stacco si trascura l'effetto di h_2 :

$$L \cong l_1 = \frac{V_0^2 \sin 2\beta}{g} \Rightarrow \frac{dL}{d\beta} = \frac{V_0^2}{g} 2 \cos 2\beta = 0 \rightarrow \beta = 45^\circ$$

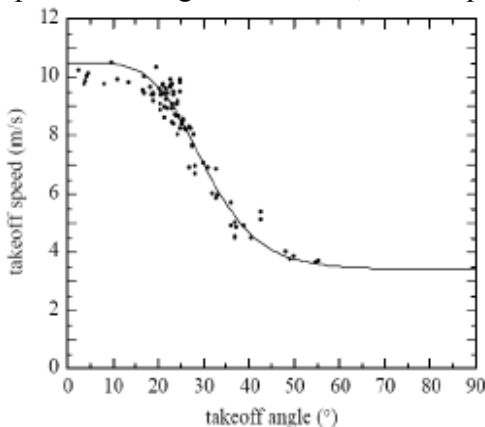
Il risultato è vero se si spara un proiettile da un cannone. Da prove sperimentali, invece, si ottiene:
 $18^\circ \leq \beta_{ott} \leq 25^\circ$

Questa differenza dipende da due fattori: l'influenza di h_2 (fattore meno significativo) e la trasformazione di V_R in V_0 .

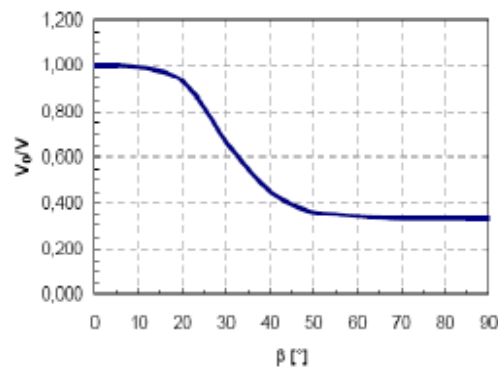
Durante la battuta si verifica una perdita di energia cinetica perché il valore assoluto di V_0 è inferiore al valore di V_R .

$$E_{CO} = \frac{1}{2} mV_0^2 < \frac{1}{2} mV_R^2 = E_{CR}$$

Durante la battuta si perde energia cinetica perché si scambia energia tra i muscoli e l'ambiente esterno. La flessione dell'arto è una contrazione eccentrica, quindi i muscoli frenano il movimento del corpo. L'estensione dell'arto è una contrazione concentrica, quindi i muscoli trasferiscono energia al corpo, ma è una restituzione solo parziale dell'energia persa in precedenza. L'energia dissipata dipende dall'angolo di battuta, come riportato nei grafici sperimentali.

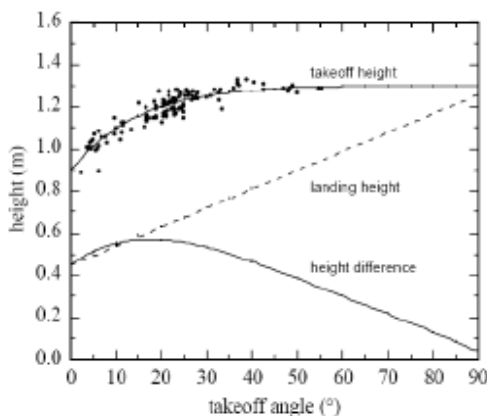


Velocità di stacco in funzione dell'angolo di stacco (valore assoluto)

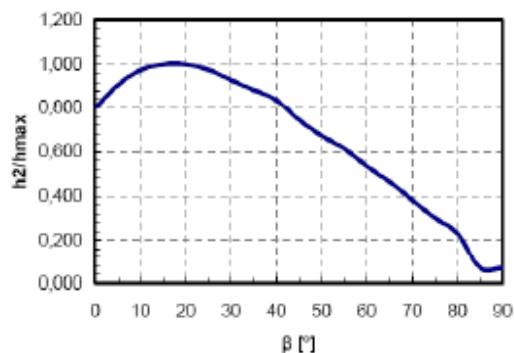


Velocità di stacco in funzione dell'angolo di stacco (valore relativo alla velocità di rincorsa)

Anche l'abbassamento del baricentro all'atterraggio dipende dall'angolo di stacco.



Capacità di abbassamento del baricentro all'atterraggio in funzione dell'angolo di stacco (valore assoluto)



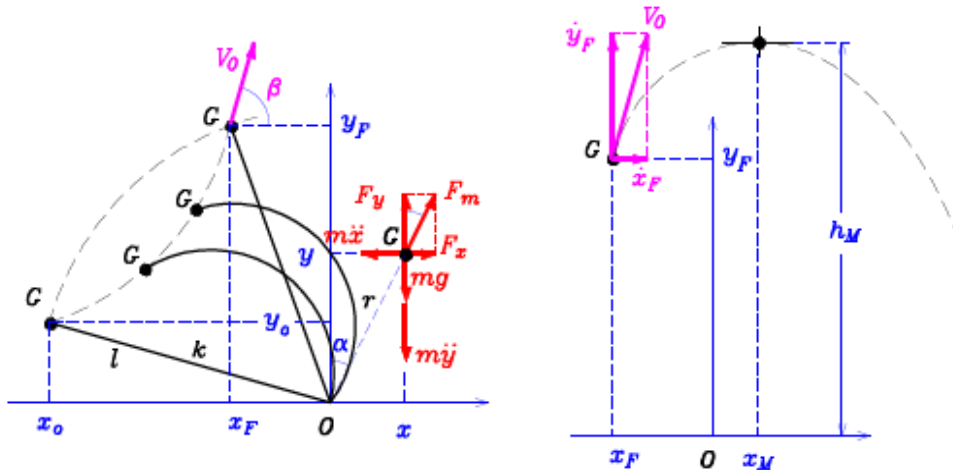
Capacità di abbassamento del baricentro all'atterraggio in funzione dell'angolo di stacco (valore relativo al massimo)

Dai valori finali dell'integrazione si può ricavare il valore scalare della velocità di stacco e la lunghezza teorica del salto:

$$V_0^2 = \dot{x}_F^2 + \dot{y}_F^2 \quad , \quad \tan \beta = \dot{y}_F / \dot{x}_F$$

Per trovare la rigidità elastica della molla si fanno varie simulazioni finché non si trova una k realistica.

Il modello della battuta con arto elastico può essere usato per simulare il salto con l'asta, in cui la battuta avviene con deformazione elastica dell'asta. In questo caso la lunghezza r della molla rappresenta la distanza tra il punto O di vincolo dell'asta con il terreno e il baricentro G dell'atleta in un istante generico, mentre l è la distanza in condizione indeformata.



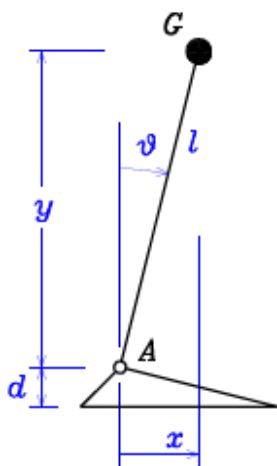
I valori delle variabili calcolati alla fine dell'integrazione possono stavolta essere usati per calcolare l'altezza teorica del salto h_M e la posizione x_M in cui questa viene raggiunta.

$$\begin{cases} V_x = \dot{x}_F = \text{cost.} \\ V_y = \dot{y}_F - g t \end{cases} \quad \begin{cases} x_M = x_F + \dot{x}_F T_M \\ h_M = y_F + \dot{y}_F T_M - \frac{g}{2} T_M^2 \end{cases}$$

$$0 = \dot{y}_F - g T_M \quad \rightarrow \quad T_M = \frac{\dot{y}_F}{g}$$

$$\begin{cases} x_M = x_F + \frac{\dot{x}_F \dot{y}_F}{g} \\ h_M = y_F + \frac{\dot{y}_F^2}{2g} \end{cases}$$

Un altro esempio di modello biodinamico è quello della postura eretta. Il controllo della postura eretta può essere studiato come un modello del "pendolo inverso", in cui il corpo è rappresentato da un unico membro rigido incernierato al piede nella caviglia (A). L'equilibrio è instabile e richiede una continua azione di controllo da parte del sistema nervoso centrale.



I parametri del modello sono:

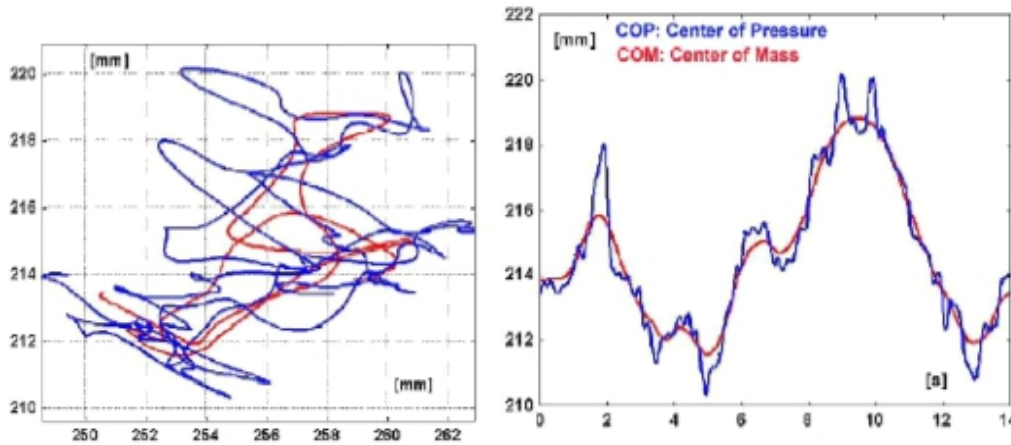
- $AG=l$ distanza caviglia-baricentro
- m massa del corpo
- I_G momento d'inerzia baricentrico
- d altezza della caviglia

le variabili sono:

- x posizione orizzontale del baricentro
- y posizione verticale del baricentro
- ϑ angolo del corpo
- b posizione del punto di applicazione della forza del terreno

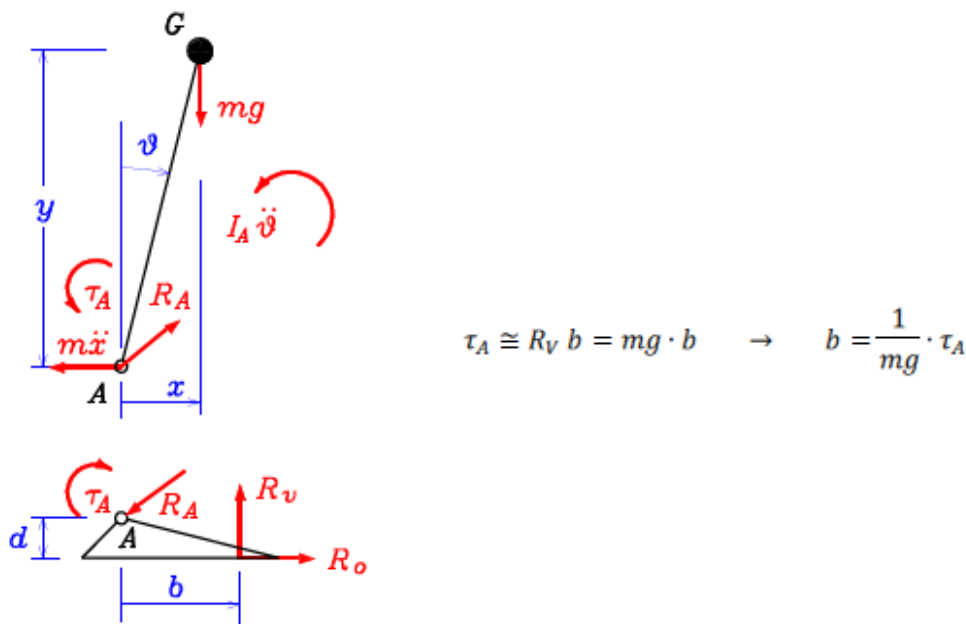
La proiezione del baricentro sul piano di appoggio (x) viene definita COM (Center Of Mass), mentre il punto di applicazione della forza del terreno (b) viene detto COP (Center Of Pressure). Se $x = b$ il sistema è in equilibrio instabile.

I seguenti grafici sperimentali riportano la registrazione della posizione del COM e del COP proiettate sul piano d'appoggio (a sinistra) e nel piano sagittale (a destra).



Si osserva un continuo inseguimento reciproco delle due variabili. COM ha un andamento lento, mentre COP ha variazioni più veloci: la differenza è dettata dal fatto che per spostare il baricentro si deve spostare tutta la massa del corpo, mentre per spostare COP basta agire sui muscoli della caviglia.

Separando i due membri del sistema si evidenziano le azioni interne alla caviglia.



Si è ottenuta la relazione dinamica tra la posizione di COP e la coppia esercitata dai muscoli. L'effetto è quasi istantaneo perché non ci sono masse da spostare.

L'equazione che esplicita l'accelerazione del baricentro permette di individuare le due principali strategie di controllo della posizione eretta.

La *strategia di caviglia* agisce prevalentemente su COP mediante la modulazione della coppia muscolare alla caviglia. L'azione della coppia di caviglia produce un effetto trascurabile su COM perché viene applicata a un sistema con grande momento d'inerzia. Il punto di applicazione della risultante delle forze del terreno rimane sempre all'interno del punto di appoggio, cioè all'interno del piede (tranne che in situazioni particolari, per esempio quando si indossano gli sci).

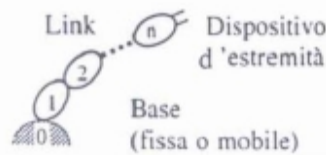
è costretti a fare un passo per non cadere. Questa strategia, però, non può essere modellizzata con il modello visto.

MECCANICA DI UN BRACCIO ROBOTICO SCARA

SCARA sta per Selective Compliance Assembly Robotic Arm. È un sistema *multibody*, cioè costituito da un certo numero di corpi interconnessi che presentano gradi di libertà relativi. Anche il corpo umano è un sistema multibody, ma in una macchina i diversi segmenti sono rigidi e i giunti hanno caratteristiche precise riguardo ai movimenti relativi tra i corpi.

SCARA ha una cedevolezza variabile: le forze di contatto adattano la macchina in maniera passiva. Un sistema multibody può essere organizzato in una struttura definita **catena cinematica**, che può essere di due tipi:

- *seriale* o *aperta*: gli elementi sono disposti in successione. Il primo viene chiamato base, l'ultimo end effector; ogni elemento è detto link;



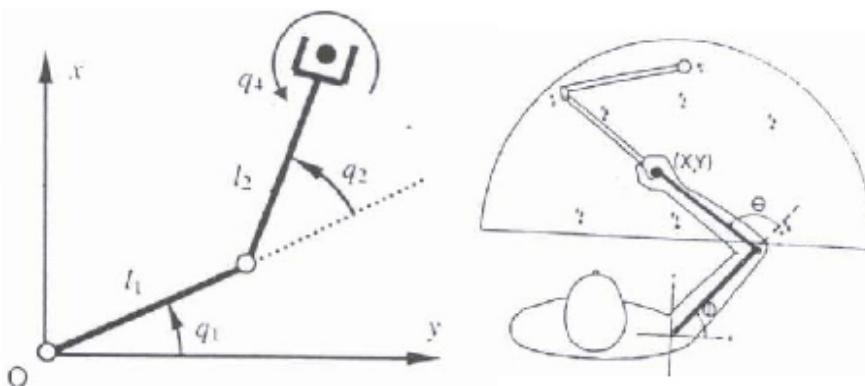
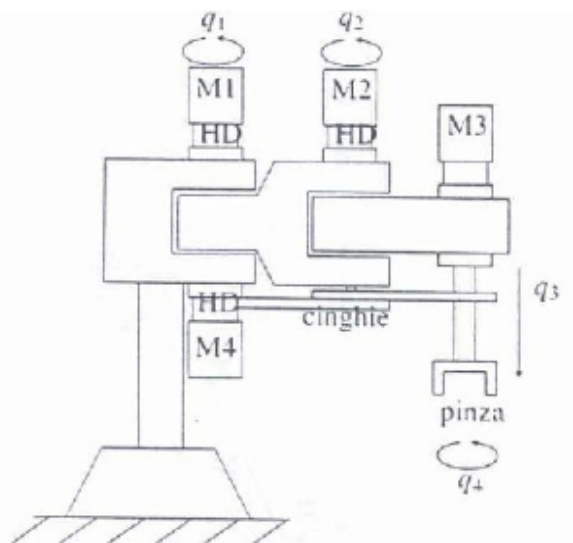
- *chiusa* o *parallela*: elementi disposti ad anello.



SCARA ha una struttura seriale. Il collegamento tra gli elementi consente un solo grado di libertà relativo (di rotazione o di traslazione). Il sistema ha 4 gradi di libertà.

Il secondo elemento è collegato al primo con un giunto rotoidale, cioè con una cerniera ad asse verticale; il terzo elemento è collegato al secondo nello stesso modo. Nel terzo elemento c'è una guida prismatica che consente la traslazione verticale. Infine c'è una pinza che può ruotare. I motori sono posizionati sui giunti: lo statore è sul primo elemento e il rotore è su quello successivo. La pinza ruota grazie a una trasmissione a cinghie.

Se si considerano solo i primi due gradi di libertà (q_1 e q_2) si può stabilire una analogia cinematica con un arto superiore umano vincolato a muoversi in un piano orizzontale. Su una tale struttura è possibile effettuare una analisi cinematica e una analisi dinamica.



L'analisi cinematica diretta è un'analisi completa che è sempre possibile e dà una soluzione univoca.

Analisi inversa:

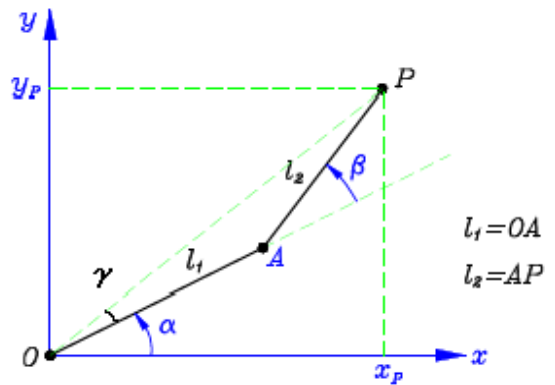
è quella eseguita dal sistema di controllo di un robot. Si conoscono \underline{s} , la sua velocità e la sua accelerazione.

Si applica il teorema di Carnot al triangolo OPA:

$$\overline{OP}^2 = x_p^2 + y_p^2 - 2l_1l_2 \cos(180 - \beta) = x_p^2 + y_p^2 + 2l_1l_2 \cos \beta$$

Dalla formula si ricava una doppia soluzione per β :

$$\beta = \pm \arccos \left(\frac{x_p^2 + y_p^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \right)$$



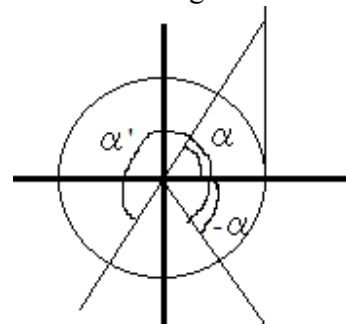
Come si vede dalla figura, infatti, lo stesso valore di coseno può essere dato da un angolo α o da un angolo $-\alpha$.

L'angolo $\alpha + \gamma$ può essere calcolato come:

$$\alpha + \gamma = \arctg \left(\frac{x_p}{y_p} \right)$$

Inoltre γ è dato da:

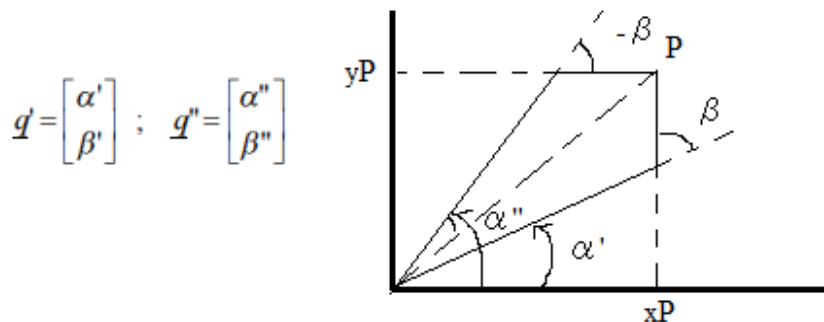
$$\gamma = \arctg \left(\frac{l_2 \sin \beta}{l_1 + l_2 \cos \beta} \right)$$



Quindi noto β si può ricavare α . Anche in questo caso si possono ottenere due risultati, infatti dalla figura si vede che α e α' hanno la stessa tangente; tuttavia la funzione atan2 (presente anche in Matlab) permette di ricavare l'arcotangente tenendo conto del segno dei parametri.

$$\alpha = \text{atan2}(y_p, x_p) - \text{atan2}(l_2 \sin \beta, l_1 + l_2 \cos \beta)$$

Dunque è possibile calcolare α in maniera univoca purché sia noto β , ma esso ha una ambiguità quindi si ottengono 2 distinti valori:



$$\underline{q}' = \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} ; \quad \underline{q}'' = \begin{bmatrix} \alpha'' \\ \beta'' \end{bmatrix}$$

A seconda del tipo di struttura le soluzioni possono essere anche di più, persino infinite.

Per quanto riguarda l'analisi delle velocità si ha:

$$\underline{\dot{q}} = J^{-1} \cdot \underline{\dot{s}} \quad \text{cinematica inversa (velocità)}$$

con:

$$J^{-1} = \frac{1}{l_1 l_2 \sin \beta} \begin{bmatrix} l_2 \cos(\alpha + \beta) & l_2 \sin(\alpha + \beta) \\ -l_1 \cos \alpha - l_2 \cos(\alpha + \beta) & -l_1 \sin \alpha - l_2 \sin(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$

Si ricorda che vale: $J^{-1} \cdot J = I$

Non è detto che J sia invertibile, quindi non sempre si può risolvere il problema. J è invertibile se è

Per primo si considera l'intero sistema, quindi non si hanno reazioni vincolari in A; poi si analizza il secondo corpo separatamente con le reazioni vincolari in A.

$$\underline{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \sin \alpha + l_2 \sin(\alpha + \beta) & -l_1 \cos \alpha - l_2 \cos(\alpha + \beta) \\ l_2 \sin(\alpha + \beta) & -l_2 \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \end{bmatrix}$$

Cioè:

$$\underline{\tau} = -J^T \cdot \underline{F} \quad \text{statica inversa} \\ \text{(ha sempre soluzione)}$$

Dove J^T è la trasposta di J (si scambiano righe e colonne).

Analisi diretta:

$$\underline{F} = -J^{-T} \cdot \underline{\tau} \quad \text{statica diretta} \\ \text{(ha soluzione solo se } J \text{ è invertibile)}$$

Ricordiamo che ogni punto della struttura ha J diversa perché dipende dalle coordinate del punto stesso.

Il **principio dei lavori virtuali** (PLV) si può applicare a strutture statiche o cinematiche. Una forza compie un lavoro se il suo punto di applicazione si sposta; un lavoro positivo è definito lavoro motore, mentre un lavoro negativo è un lavoro frenante. Quando il punto di applicazione non si sposta, ma potrebbe farlo, si parla di *lavoro virtuale* (per esempio se il punto appartiene a una struttura mobile che viene bloccata).

In questa struttura la forza F compie un lavoro virtuale su P. Inoltre i motori nei giunti possono compiere lavoro, mentre le azioni interne (reazioni vincolari) su punti fissi non compiono lavoro. In quelli mobili (come A) possono compiere lavoro, ma poiché sono bilanciate da forze opposte i lavori si elidono.

Si possono calcolare i lavori e le potenze virtuali:

$$\tau_1 \cdot \dot{\alpha} + \tau_2 \cdot \dot{\beta} = [\tau_1 \quad \tau_2] \cdot \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \underline{\tau}^T \cdot \underline{\dot{q}} \quad \text{potenza dei motori} \\ F_X \cdot \dot{x}_P + F_Y \cdot \dot{y}_P = [F_X \quad F_Y] \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \end{bmatrix} = \underline{F}^T \cdot \underline{\dot{s}} \quad \text{potenza del carico}$$

Se il sistema è conservativo, la somma delle potenze virtuali deve essere nulla:

$$\underline{\tau}^T \cdot \underline{\dot{q}} + \underline{F}^T \cdot \underline{\dot{s}} = 0$$

Ricordando come si calcola la velocità di \underline{s} si può scrivere:

$$\underline{\tau}^T \cdot \underline{\dot{q}} + \underline{F}^T \cdot J \cdot \underline{\dot{q}} = 0$$

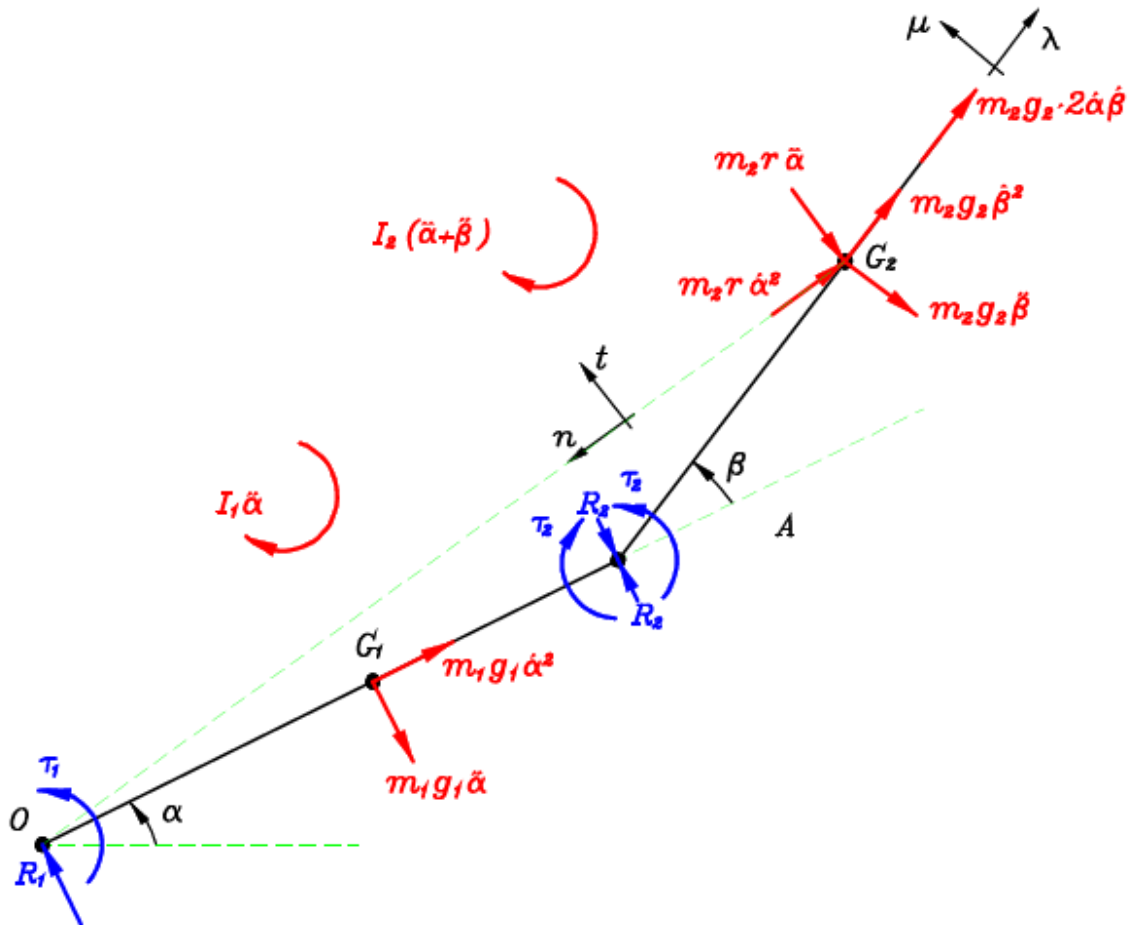
Semplificando si ottiene:

$$\underline{\tau}^T = -\underline{F}^T \cdot J$$

Si fa la trasposizione, ricordando le regole di trasposizione: $(A \cdot B^T)^T = B \cdot A^T$

Si ottiene:

$$\underline{\tau} = -J^T \cdot \underline{F}$$



Per poter determinare la risultante delle forze d'inerzia bisogna conoscere le accelerazioni di G1 e G2.

Il baricentro del corpo 1 percorre una traiettoria circolare, quindi la sua accelerazione ha due componenti (centripeta e tangenziale) date da:

$$\begin{array}{ll} g_1 \ddot{\alpha} & \text{(tangenziale)} \\ g_1 \dot{\alpha}^2 & \text{(normale)} \end{array}$$

La direzione dell'accelerazione centripeta è lungo g1 verso 0: la forza d'inerzia corrispondente ha la stessa direzione, ma verso opposto.

L'accelerazione tangenziale ha direzione perpendicolare a g1 e il suo verso può essere sia positivo che negativo. Assumiamo che sia positivo e poniamo la forza d'inerzia corrispondente lungo la stessa direzione, ma con verso opposto.

Per il corpo 2 bisogna ricorrere alla cinematica dei moti relativi perché il corpo ha un moto assoluto e un moto relativo rispetto al corpo 1. Compare l'accelerazione di Coriolis.

$$\underline{a}_{G2} = \underline{a}_{G2(r)} + \underline{a}_{G2(t)} + \underline{a}_{G2(c)}$$

Dove:

$$\begin{array}{ll} \underline{a}_{G2(r)} = g_2 \dot{\beta}^2 (-\underline{\lambda}) + g_2 \ddot{\beta} (\underline{\mu}) & \text{comp. relativa} \\ \underline{a}_{G2(t)} = r \dot{\alpha}^2 (\underline{n}) + r \ddot{\alpha} (\underline{t}) & \text{comp. di trascinamento} \\ \underline{a}_{G2(c)} = 2 \underline{\omega}_T \times \underline{v}_r = 2 g_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} (-\underline{\lambda}) & \text{comp. di Coriolis} \end{array}$$

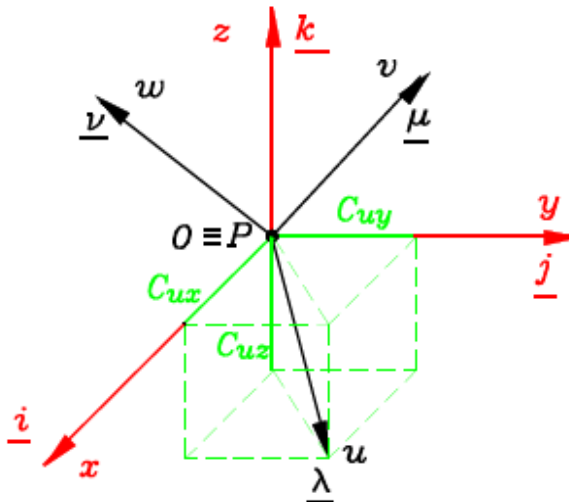
La componente relativa è l'accelerazione che avrebbe G2 se il corpo al quale è collegato fosse

$$\begin{cases} \underline{i} = \cos \alpha \cdot \underline{\lambda} + \cos(90^\circ + \alpha) \cdot \underline{\mu} = C_{xu} \cdot \underline{\lambda} + C_{xv} \cdot \underline{\mu} \\ \underline{j} = \cos(\alpha - 90^\circ) \cdot \underline{\lambda} + \cos \alpha \cdot \underline{\mu} = C_{yu} \cdot \underline{\lambda} + C_{yv} \cdot \underline{\mu} \end{cases}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} C_{xu} &= C_{ux} = \cos \alpha = \underline{\lambda} \cdot \underline{i} \\ C_{xv} &= C_{vx} = \cos(90^\circ + \alpha) = \underline{\mu} \cdot \underline{i} \\ C_{yu} &= C_{uy} = \cos(90^\circ - \alpha) = \underline{\lambda} \cdot \underline{j} \\ C_{yv} &= C_{vy} = \cos \alpha = \underline{\mu} \cdot \underline{j} \end{aligned}$$

Lo stesso ragionamento si può applicare a sistemi tridimensionali.



$$\begin{aligned} \underline{\lambda} &= C_{ux} \cdot \underline{i} + C_{uy} \cdot \underline{j} + C_{uz} \cdot \underline{k} \\ \underline{\mu} &= C_{vx} \cdot \underline{i} + C_{vy} \cdot \underline{j} + C_{vz} \cdot \underline{k} \\ \underline{\nu} &= C_{wx} \cdot \underline{i} + C_{wy} \cdot \underline{j} + C_{wz} \cdot \underline{k} \\ \underline{i} &= C_{ux} \cdot \underline{\lambda} + C_{vx} \cdot \underline{\mu} + C_{wx} \cdot \underline{\nu} \\ \underline{j} &= C_{uy} \cdot \underline{\lambda} + C_{vy} \cdot \underline{\mu} + C_{wy} \cdot \underline{\nu} \\ \underline{k} &= C_{uz} \cdot \underline{\lambda} + C_{vz} \cdot \underline{\mu} + C_{wz} \cdot \underline{\nu} \end{aligned}$$

I risultati precedenti possono essere espressi in maniera sintetica nella matrice dei coseni direttori, o **matrice di orientamento**, che rappresenta l'orientamento della terna $\underline{\lambda} \underline{\mu} \underline{\nu}$ rispetto alla terna $\underline{i} \underline{j} \underline{k}$:

$$\begin{bmatrix} C_{ux} & C_{vx} & C_{wx} \\ C_{uy} & C_{vy} & C_{wy} \\ C_{uz} & C_{vz} & C_{wz} \end{bmatrix} = [\underline{\lambda} \quad \underline{\mu} \quad \underline{\nu}] = {}^0A_i$$

Nella scrittura 0A_i , il pedice si riferisce al sistema locale (cioè ai vettori solidali all'elemento i-esimo), mentre l'apice è il sistema di riferimento. Se il sistema di riferimento è quello globale, l'apice può essere omesso. L'operazione può essere svolta tra due sistemi qualsiasi della catena cinematica.

L'orientamento della terna $\underline{i} \underline{j} \underline{k}$ rispetto alla terna $\underline{\lambda} \underline{\mu} \underline{\nu}$ è dato dalla trasposta della matrice di orientamento:

$$\begin{bmatrix} C_{ux} & C_{uy} & C_{uz} \\ C_{vx} & C_{vy} & C_{vz} \\ C_{wx} & C_{wy} & C_{wz} \end{bmatrix} = [\underline{j} \quad \underline{j} \quad \underline{k}] = {}^0A_i^T = {}^iA_0$$

La matrice di orientamento è costituita da 9 coseni direttori che rappresentano 3 informazioni indipendenti, cioè definiscono i 3 g.d.l. di orientamento della terna associata. I coseni direttori sono legati tra loro da 6 relazioni:

- ogni colonna è un versore, quindi si ha per esempio:

$$C_{ux}^2 + C_{uy}^2 + C_{uz}^2 = 1$$

1 è la lunghezza del versore;

- i versori sono ortogonali, quindi si ha per esempio:

Rot(x, θ) è una matrice di coseni direttori. Si ha:

$$\begin{aligned} \underline{\lambda} &= \underline{i} \\ \underline{\mu} &= \cos \vartheta \cdot \underline{j} + \sin \vartheta \cdot \underline{k} \\ \underline{\nu} &= -\sin \vartheta \cdot \underline{j} + \cos \vartheta \cdot \underline{k} \end{aligned}$$

Quindi:

$$Rot(x, \vartheta) = {}^0A_1 = \begin{bmatrix} \underline{\lambda} & \underline{\mu} & \underline{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\vartheta & -s\vartheta \\ 0 & s\vartheta & c\vartheta \end{bmatrix}$$

Inoltre:

$$Rot(y, \vartheta) = \begin{bmatrix} c\vartheta & 0 & s\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\vartheta & 0 & c\vartheta \end{bmatrix}$$

$$Rot(z, \vartheta) = \begin{bmatrix} c\vartheta & -s\vartheta & 0 \\ s\vartheta & c\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La terna dopo la rotazione può essere espressa nel sistema di riferimento fisso come:

$$\begin{bmatrix} \underline{\lambda} & \underline{\mu} & \underline{\nu} \end{bmatrix} = {}^0A_1 = Rot(x, \vartheta) \cdot U = Rot(x, \vartheta)$$

La terna iniziale nel sistema di riferimento fisso è data da:

$$\begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \end{bmatrix} = {}^0A_0 = U = [Rot(x, \vartheta)]^{-1} \cdot Rot(x, \vartheta)$$

Ma può essere anche espressa come il risultato di una rotazione uguale e contraria:

$$\begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \end{bmatrix} = [Rot(x, \vartheta)]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\lambda} & \underline{\mu} & \underline{\nu} \end{bmatrix} = Rot(x, -\vartheta) \cdot \begin{bmatrix} \underline{\lambda} & \underline{\mu} & \underline{\nu} \end{bmatrix}$$

Poiché le matrici sono matrici di coseni direttori di terne ortogonali, vale:

$$Rot(x, -\vartheta) = [Rot(x, \vartheta)]^{-1} = [Rot(x, \vartheta)]^T$$

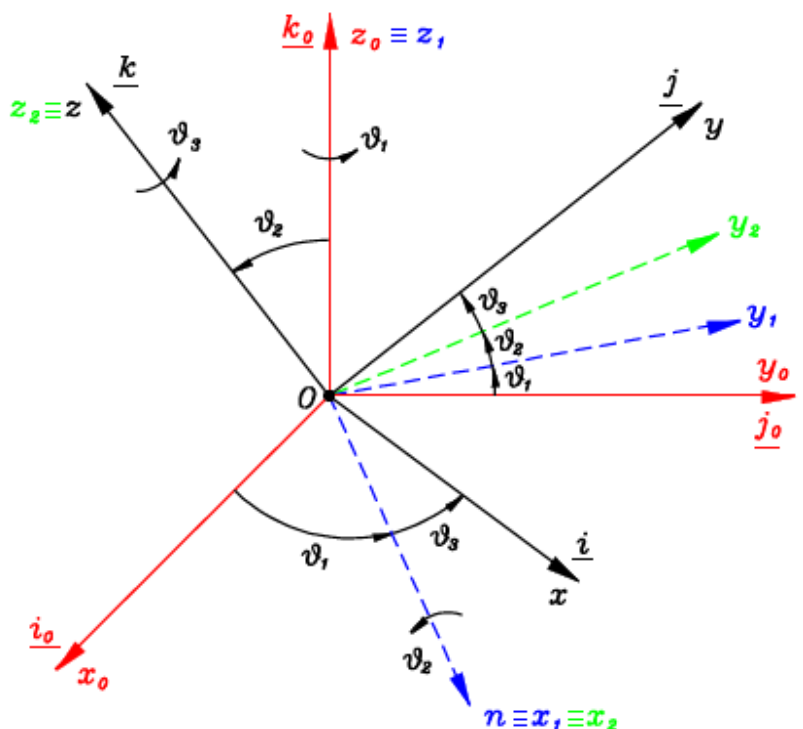
Angoli di Eulero:

i tre angoli indicano 3 rotazioni successive mediante le quali si porta una terna da un orientamento iniziale a uno finale. In altre parole, rappresentano l'orientamento di una terna locale rispetto a una globale, pensando di raggiungere la terna locale applicando in successione le tre rotazioni alla terna globale. Dagli angoli di Eulero si possono ricavare i 9 coseni direttori della terna e viceversa.

Le 3 possibili rotazioni sono:

- *precessione* (rotazione intorno a z_0);
- *nutazione* (rotazione intorno a x_1);
- *rotazione propria* (rotazione intorno a z_2).

Quindi la successione delle rotazioni avviene intorno a: primo asse, secondo asse, primo



Si sostituiscono nell'espressione della velocità assoluta:

$$\begin{aligned} {}^i\underline{\Omega} &= \dot{\theta}_1(s2s3\underline{i} + s2c3\underline{j} + c2\underline{k}) + \dot{\theta}_2(c3\underline{i} - s3\underline{j}) + \dot{\theta}_3\underline{k} = \\ &= (s2s3\dot{\theta}_1 + c3\dot{\theta}_2)\underline{i} + (s2c3\dot{\theta}_1 - s3\dot{\theta}_2)\underline{j} + (c2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3)\underline{k} = \omega_x\underline{i} + \omega_y\underline{j} + \omega_z\underline{k} \end{aligned}$$

In forma matriciale:

$${}^i\underline{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s2s3 & c3 & 0 \\ s2c3 & -s3 & 0 \\ c2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad \text{Velocità angolare del corpo espressa rispetto al sistema di riferimento locale}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s3/s2 & c3/s2 & 0 \\ c3 & -s3 & 0 \\ -c2s3/s2 & -c2c3/s2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad \text{Relazione inversa}$$

$${}^i\dot{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s2s3 & c3 & 0 \\ s2c3 & -s3 & 0 \\ c2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -s3 & s2c3 & c2s3 \\ -c3 & -s2s3 & c2c3 \\ 0 & 0 & -s2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \text{Accelerazione angolare}$$

L'espressione dell'accelerazione si può ottenere esprimendo la velocità come prodotto di una matrice E per un vettore $\underline{\epsilon}$ e derivandola:

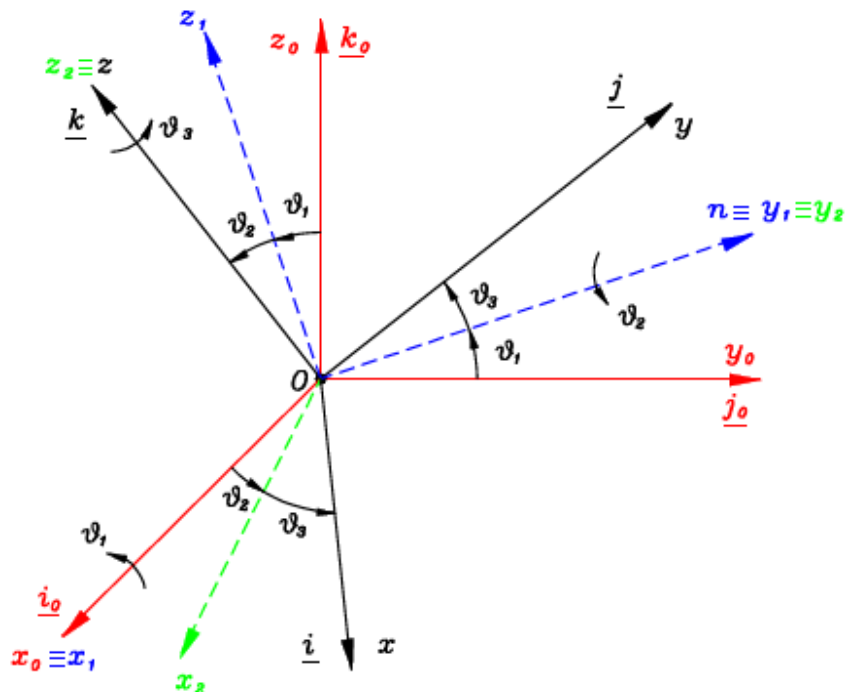
$${}^i\dot{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix} s2s3 & c3 & 0 \\ s2c3 & -s3 & 0 \\ c2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = E \cdot \underline{\epsilon} \Rightarrow {}^i\dot{\underline{\Omega}} = E \cdot \dot{\underline{\epsilon}} + \dot{E} \cdot \underline{\epsilon}$$

Angoli di Cardano:

sono analoghi agli angoli di Eulero. Cambia la sequenza delle rotazioni elementari, che vengono effettuate intorno a: primo asse, secondo asse, terzo asse. In questo caso l'asse dei nodi è l'asse y quando la terna si trova in una posizione intermedia tra quella iniziale e quella finale.

Rotazioni in sequenza:

$$\begin{aligned} \text{Rot}(x, \theta_1) &: \begin{cases} x_0 \equiv x_1 \\ y_0 \rightarrow y_1 = n \\ z_0 \rightarrow z_1 \end{cases} \\ \text{Rot}(y, \theta_2) &: \begin{cases} x_1 \rightarrow x_2 \\ y_1 = n \equiv y_2 \\ z_1 \rightarrow z_2 \end{cases} \\ \text{Rot}(z, \theta_3) &: \begin{cases} x_2 \rightarrow x \\ y_2 \rightarrow y \\ z_2 \equiv z \end{cases} \end{aligned}$$



Da cui:

$$\begin{cases} r_x = C_{ux} \cdot r'_u + C_{vx} \cdot r'_v + C_{wx} \cdot r'_w + p_x \\ r_y = C_{uy} \cdot r'_u + C_{vy} \cdot r'_v + C_{wy} \cdot r'_w + p_y \\ r_z = C_{uz} \cdot r'_u + C_{vz} \cdot r'_v + C_{wz} \cdot r'_w + p_z \\ 1 = 0 + 0 + 0 + 1 \end{cases}$$

L'ultima riga serve a rendere il tutto esprimibile in matrici di trasformazione 4x4:

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{ux} & C_{vx} & C_{wx} & p_x \\ C_{uy} & C_{vy} & C_{wy} & p_y \\ C_{uz} & C_{vz} & C_{wz} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r'_u \\ r'_v \\ r'_w \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\underline{r}} = \hat{A}_i \cdot {}^i \hat{\underline{r}} \quad (\text{in forma compatta})$$

Il segno sopra ai vettori e alla matrice sta a indicare un posizionamento completo (rotazione + traslazione) con vettori omogenei.

Si ha che

$$\hat{\underline{r}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} \quad {}^i \hat{\underline{r}} = \begin{bmatrix} r'_u \\ r'_v \\ r'_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

sono vettori che indicano la posizione del punto R rispettivamente rispetto alla terna globale e a quella locale.

Il quarto termine è il **fattore di scala**: le coordinate effettive del punto si ottengono dividendo i primi 3 termini per il quarto. Le prime tre colonne della matrice rappresentano ciascuna la posizione (nel sistema di riferimento di base) di un punto che si trova all'infinito lungo il versore corrispondente, cioè all'estremità degli assi u, v e w. In altre parole, indicano le direzioni dei 3 assi.

La matrice di posizionamento (o di trasformazione o di posa) è:

$${}^0 \hat{A}_i = \hat{A}_i = \begin{array}{ccc|c} C_{ux} & C_{vx} & C_{wx} & p_x \\ C_{uy} & C_{vy} & C_{wy} & p_y \\ C_{uz} & C_{vz} & C_{wz} & p_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

In essa le prime 3 colonne indicano le direzioni degli assi u, v, w nel riferimento di base. La quarta colonna indica le coordinate dell'origine del sistema uvw, cioè il punto P.

La matrice di posizionamento rappresenta la posizione della terna locale (i) e dei punti ad essa solidali rispetto alla terna globale (0). Si può rappresentare in forma compatta:

$$\hat{A}_i = \left[\begin{array}{ccc|c} A_i & & & \underline{p} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

È sempre invertibile.

Operazione inversa:

$${}^i \hat{\underline{r}} = \hat{A}_i^{-1} \cdot \hat{\underline{r}}$$

$$\hat{A}_i^{-1} = {}^i \hat{A}_0 = \left[\begin{array}{ccc|c} A_i^T & & & -A_i^T \cdot \underline{p} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

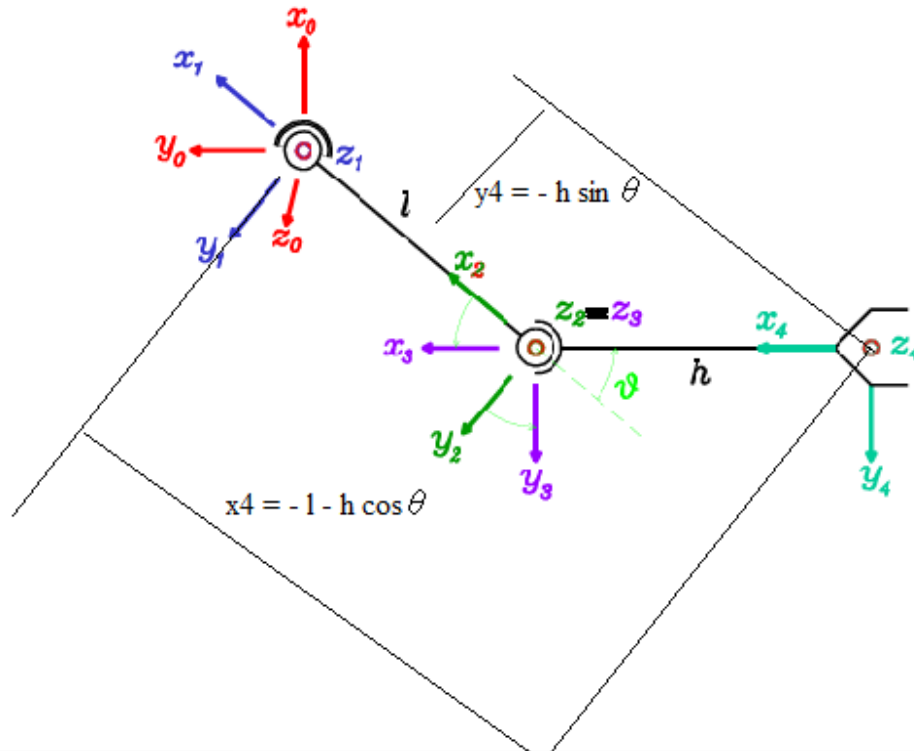
infatti:

$$33 \quad \hat{A}_i^{-1} \cdot \hat{A}_i = U = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} X & & & y \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} A_i & & & \underline{p} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

la terna 4:

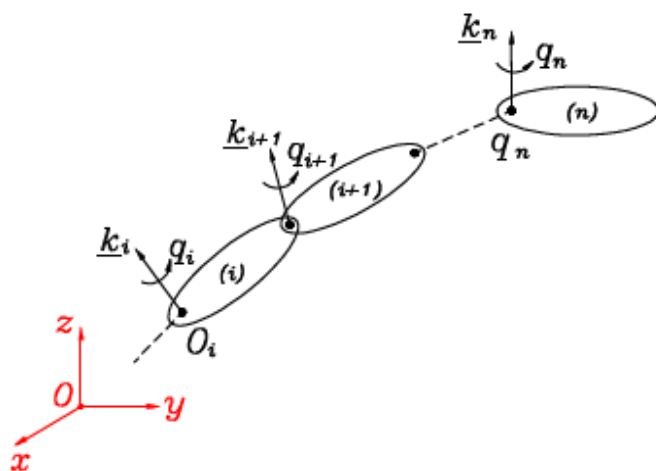
$${}^0\widehat{A}_4 = \left[\begin{array}{ccc|c} R_{11}c\vartheta + R_{12}s\vartheta & -R_{11}s\vartheta + R_{12}c\vartheta & R_{13} & -R_{11}(l+hc\vartheta) - R_{12}hs\vartheta \\ R_{21}c\vartheta + R_{22}s\vartheta & -R_{21}s\vartheta + R_{22}c\vartheta & R_{23} & -R_{21}(l+hc\vartheta) - R_{22}hs\vartheta \\ R_{31}c\vartheta + R_{32}s\vartheta & -R_{31}s\vartheta + R_{32}c\vartheta & R_{33} & -R_{31}(l+hc\vartheta) - R_{32}hs\vartheta \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Si poteva giungere allo stesso risultato anche in maniera più diretta:



CINEMATICA DELLE STRUTTURE ARTICOLATE SERIALI

Lo scopo di questo studio è sviluppare metodologie che possano essere sfruttate in ambito biomeccanico. Una struttura osteoarticolare può essere assimilata a una catena cinematica seriale a corpi rigidi. Ci sono, però, alcune differenze: in una macchina ogni giunto ha un solo g.d.l., mentre in un sistema osteoarticolare non è così.



Si prende come origine O_i in corrispondenza del giunto: si potrebbe prendere anche un altro punto, basta definirlo. La posizione assoluta di O_i è data da:

$$p_i = [x_i \ y_i \ z_i]^T$$

Con q_i si indica il g.d.l. relativo di (i) rispetto a (i-1).

Il vettore posizione del corpo i è dato da:

$$\underline{s}_i = [x_i \ y_i \ z_i \ \vartheta_1 \ \vartheta_2 \ \vartheta_3]^T$$

Al posto degli angoli θ_1 , θ_2 e θ_3 si possono usare i 9 coseni direttori, che come si è visto forniscono 3 informazioni.

delle accelerazioni che il corpo deve assumere.

Analisi delle velocità: il vettore velocità ha 6 componenti (*velocità generalizzata*) che possono essere divise in 2 terne: velocità di un punto del corpo \underline{V}_i e velocità angolare $\underline{\omega}_i$.

$$\underline{\mathcal{V}}_i = \begin{bmatrix} v_{X(i)} \\ v_{Y(i)} \\ v_{Z(i)} \\ \omega_{X(i)} \\ \omega_{Y(i)} \\ \omega_{Z(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{V}_i \\ \underline{\omega}_i \end{bmatrix} \quad (\underline{\mathcal{V}}_i = \dot{\underline{s}}_i)$$

La velocità generalizzata è riferita a un punto specifico del corpo. \underline{V}_i e $\underline{\omega}_i$ sono funzione dei giunti.

$$\underline{V}_i = f_V(\dot{q}, q)$$

$$\underline{\omega}_i = f_\omega(\dot{q}, q)$$

Mediante l'analisi diretta, conoscendo posizione e velocità dei giunti si ricava la velocità dell'end effector.

$$\dot{q} = [\dot{q}_1 \quad \dots \quad \dot{q}_j \quad \dots \quad \dot{q}_n]^T \quad \text{Vettore delle velocità dei giunti}$$



$$\underline{\mathcal{V}}_i = J_i \cdot \dot{q} = \begin{bmatrix} \underline{V}_i \\ \underline{\omega}_i \end{bmatrix}$$

J_i è la matrice jacobiana del membro i ; ogni punto di ogni elemento ha una sua J specifica. La dimensione di J dipende dai g.d.l. (massimo 6 righe) e dal numero dei giunti (n colonne). J può essere divisa in 2 sottomatrici, J' relativa alla velocità puntuale e J'' relativa alla velocità angolare, ciascuna delle due di dimensione $3 \times n$.

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_i \\ \underline{\omega}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J'_i \\ J''_i \end{bmatrix} \cdot \dot{q}$$

(6 × 1) (6 × n) (n × 1)

L'analisi inversa è possibile solo se J è invertibile: se $n > 6$, J non è invertibile. Per il calcolo si può individuare una matrice pseudoinversa; nella pratica, si sceglie una soluzione tra le ∞ possibili.

$$\dot{q} = J_i^{-1} \cdot \underline{\mathcal{V}}_i$$

Proprietà della matrice jacobiana: per ogni elemento della catena cinematica si può definire una matrice jacobiana con riferimento a un punto specifico del corpo. Siano:

$i \rightarrow$ numero d'ordine del membro della struttura ($1 \leq i \leq n$);

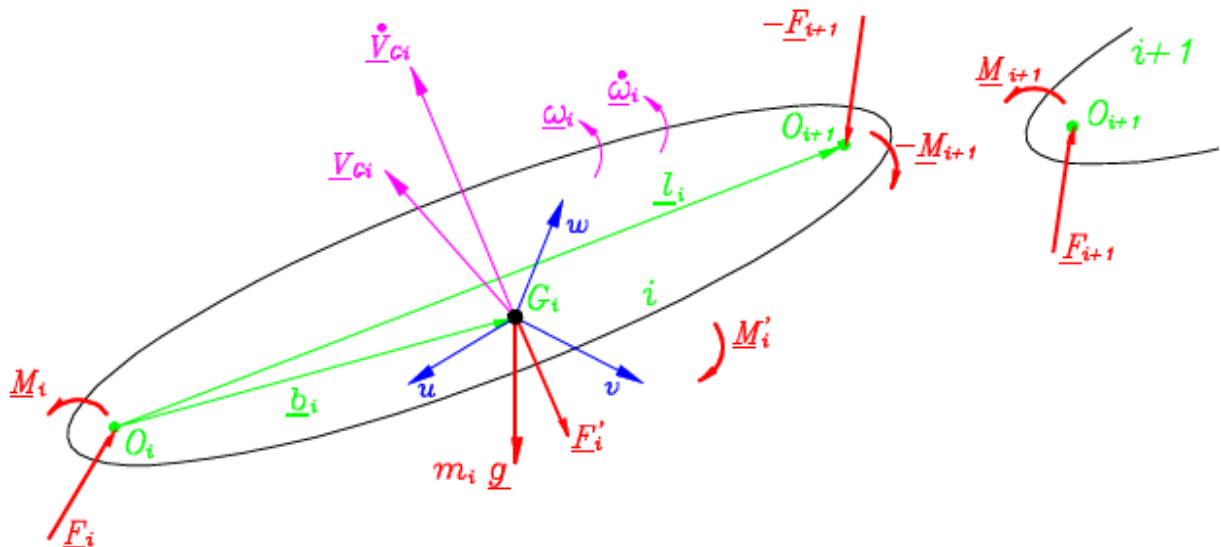
$h \rightarrow$ numero dello specifico g.d.l. In esame ($1 \leq h \leq 6$): riga dello jacobiano;

$j \rightarrow$ numero del giunto di cui si considera l'influenza sul membro in esame ($1 \leq j \leq n$): colonna dello jacobiano.

Se un elemento (i) della catena con n giunti può muoversi nello spazio, la sua matrice jacobiana avrà dimensioni $6 \times n$. Ogni termine di tale matrice rappresenta l'influenza di un dato giunto su un dato grado di libertà del corpo. La sua espressione è:

$$J_{i(hj)} = \frac{\partial s_h}{\partial q_j}$$

ovvero: qual è l'influenza del giunto j sul grado di libertà h del corpo i ?



Non è necessario conoscere esattamente forma e dimensioni del corpo, ma bisogna conoscere la posizione di alcuni punti fondamentali, cioè quelli in cui agiscono forze e momenti:

- $O_i \rightarrow$ corpo interagisce con elemento precedente;
- $O_{i+1} \rightarrow$ corpo interagisce con elemento successivo;
- $G \rightarrow$ baricentro, vi agiscono le forze di inerzia.

La posizione dei punti è definita da vettori (informazione geometrica).

Per poter risolvere il problema è necessario conoscere forze e momenti. I momenti sono vettori liberi, quindi non è necessario specificarne il punto di applicazione. Le forze di inerzia sono ridotte a una risultante applicata in G e sono opposte alla sua accelerazione.

Equazioni di Newton – Eulero:

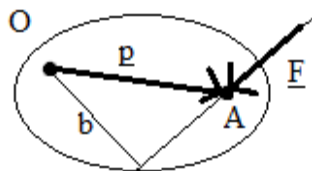
$$\begin{cases} \underline{E}_i - \underline{E}_{i+1} + m_i \underline{g} + \underline{F}'_i = 0 \\ \underline{M}_i - \underline{M}_{i+1} + \underline{E}_i \wedge \underline{b}_i + \underline{E}_{i+1} \wedge (\underline{l}_i - \underline{b}_i) + \underline{M}'_i = 0 \end{cases}$$

\underline{F}'_i e \underline{M}'_i sono la risultante e il momento risultante delle forze d'inerzia ridotte al baricentro. Da ciascuna equazione vettoriale se ne ricavano 3 scalari. Di solito si adotta il sistema di riferimento locale, quindi bisogna esprimere tutte le forze in questo sistema (bisogna moltiplicarle per la matrice dei coseni direttori della terna locale rispetto alla terna globale). Per esempio per il peso:

$${}^i \underline{p} = {}^i A_0 \cdot {}^0 \underline{p}$$

trucco: apice si annulla con pedice.

Per quanto riguarda i momenti in generale:



$$\underline{M}_0 = \underline{p} \wedge \underline{F} \neq \underline{F} \wedge \underline{p} = -\underline{M}_0$$

$$|\underline{M}_0| = b \cdot F$$

Per poter calcolare la forza d'inerzia \underline{F}'_i bisogna conoscere l'accelerazione del baricentro \underline{a}_{G_i} , cioè bisogna aver risolto la cinematica diretta oppure effettuare delle misure con tecniche stereofotogrammetriche (telecamere).

$$\underline{F}'_i = -m_i \cdot \underline{a}_{G_i} \quad (\text{teorema della quantità di moto})$$

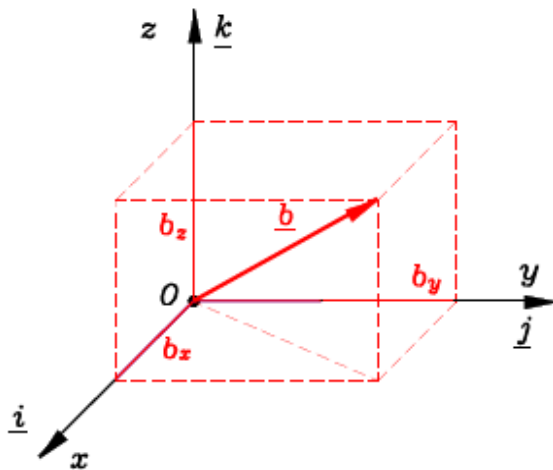
Il difficile è conoscere \underline{M}'_i : si applica il teorema del momento della quantità di moto.

$$\underline{M}'_i = -\frac{d\underline{K}_{G(i)}}{dt}$$

Dove \underline{K}_{G_i} è il momento risultante della quantità di moto del membro (i).

fisso (globale) o mobile (locale).

Nel sistema fisso, il vettore varia orientamento e lunghezza.

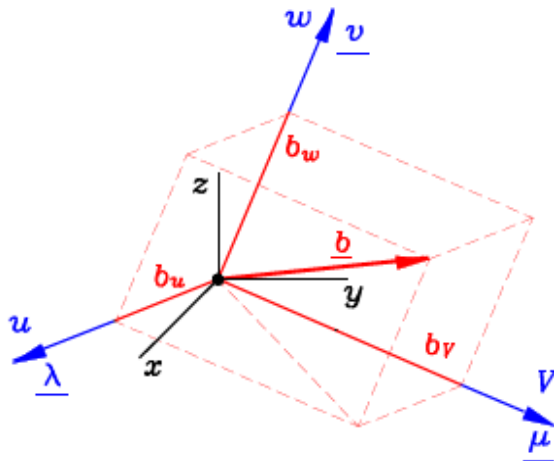


$$\underline{b} = b_x \underline{i} + b_y \underline{j} + b_z \underline{k} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\underline{b}}{dt} = \dot{b}_x \underline{i} + \dot{b}_y \underline{j} + \dot{b}_z \underline{k} = \begin{bmatrix} \dot{b}_x \\ \dot{b}_y \\ \dot{b}_z \end{bmatrix}$$

I versori $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ sono costanti in direzione.

Nel sistema mobile, si proietta il vettore \underline{b} sugli assi u, v, w . In questo caso variano anche i versori! Ruotano con velocità angolare $\underline{\omega}$.



$${}^i \underline{b} = b_u \underline{\lambda} + b_v \underline{\mu} + b_w \underline{\nu} = \begin{bmatrix} b_u \\ b_v \\ b_w \end{bmatrix}$$

Si definisce la velocità angolare della terna, espressa rispetto ai propri assi.

$${}^i \underline{\omega} = \omega_u \underline{\lambda} + \omega_v \underline{\mu} + \omega_w \underline{\nu} = \begin{bmatrix} \omega_u \\ \omega_v \\ \omega_w \end{bmatrix}$$

Derivata del vettore (si applicano le formule di Poisson):

$$\frac{d}{{}^i dt}({}^i \underline{b}) = \dot{b}_u \underline{\lambda} + \dot{b}_v \underline{\mu} + \dot{b}_w \underline{\nu} + b_u ({}^i \underline{\omega} \wedge \underline{\lambda}) + b_v ({}^i \underline{\omega} \wedge \underline{\mu}) + b_w ({}^i \underline{\omega} \wedge \underline{\nu})$$

I termini possono essere raggruppati in:

$$[1] \quad \dot{b}_u \underline{\lambda} + \dot{b}_v \underline{\mu} + \dot{b}_w \underline{\nu} = {}^i \dot{\underline{b}}$$

che rappresenta la variazione della parte scalare rispetto agli assi mobili, e in:

$$[2] \quad b_u ({}^i \underline{\omega} \wedge \underline{\lambda}) + b_v ({}^i \underline{\omega} \wedge \underline{\mu}) + b_w ({}^i \underline{\omega} \wedge \underline{\nu}) = {}^i \underline{\omega} \wedge {}^i \underline{b}$$

che è il fattore di trascinamento (come se \underline{b} fosse solidale agli assi).

Quindi la derivata del vettore \underline{b} è la somma di [1] e [2]:

$$\frac{d}{{}^i dt}({}^i \underline{b}) = {}^i \dot{\underline{b}} + {}^i \underline{\omega} \wedge {}^i \underline{b}$$

Se \underline{b} fosse solidale alla terna mobile

la sua lunghezza non varierebbe e si

L'analisi *dinamica inversa* dell'arto permette di determinare le forze generalizzate complessive nelle articolazioni (*forze intersegmentali*). Le forze intersegmentali sono costituite sia dalle azioni che movimentano l'articolazione (*forze muscolari*) sia dalle reazioni vincolari nel giunto (*forze interarticolari*).

$$\text{Forza intersegmentale} = \text{forza interarticolare} + \text{forza muscolare}$$

In un robot la forza intersegmentale potrebbe essere una reazione vincolare; un momento potrebbe essere una coppia esercitata da un motore. Nel corpo umano non è così: il momento è prodotto dai muscoli, che possono esercitare solo forze di trazione. Il momento deriva dal fatto che tale forza non passa dal centro dell'articolazione.

Per analizzare ciò che avviene nell'articolazione si calcola la forza intersegmentale. In seguito essa può essere scomposta lungo i 3 assi anatomici dell'articolazione (non è detto che siano ortogonali) oppure può essere separata nei termini interarticolare e muscolare.

Per distinguere le forze muscolari da quelle interarticolari è necessario un *modello muscolo-scheletrico* dell'arto, con l'individuazione dei singoli muscoli attivati durante un movimento e la determinazione esatta dei punti di attacco dei tendini.

La struttura *osteo-articolare* di un arto è solitamente *seriale*, mentre la struttura *muscolo-scheletrica* di un arto o dei suoi singoli segmenti è di tipo *parallelo*.

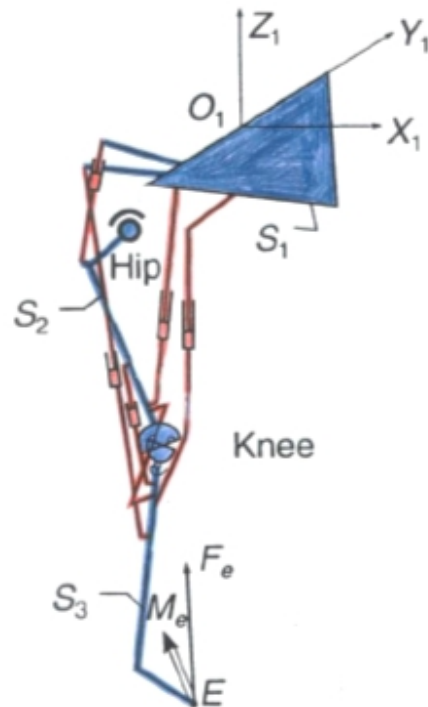
Possibile modello muscolo-scheletrico dell'arto inferiore.

S_1 : bacino

S_2 : coscia

S_3 : gamba-piede

Gruppi muscolari: quadricipite femorale, bicipite femorale, abduttori, adduttori, popliteo.



I muscoli sono stati schematizzati come attuatori lineari, che sono come cilindri pneumatici, con la differenza che i muscoli possono solo accorciarsi e non allungarsi. Nelle articolazioni c'è sempre l'accoppiamento di muscoli agonisti e antagonisti.

Per determinare le forze intersegmentali bisogna conoscere i carichi sulla struttura, la cinematica di segmenti e giunti (che serve per determinare le forze d'inerzia) e le caratteristiche fisiche (dati geometrici e proprietà inerziali). Noti tutti questi dati, si possono risolvere le equazioni di Newton – Eulero, ricavando le forze e i momenti intersegmentali.

Per distinguere le forze muscolari e interarticolari serve un modello meccanico muscolo-scheletrico dell'articolazione e un modello di azione fisiologica del muscolo (descrive le caratteristiche della

Risolvendo questo sistema si risolve la parte sopra alla linea tratteggiata dello schema a blocchi.

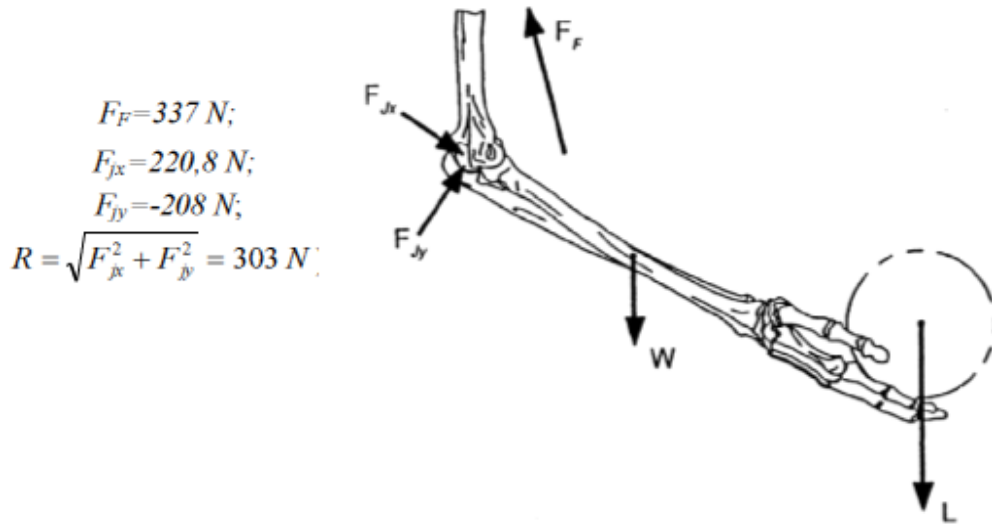
$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{iz} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma M_0 = 0 \rightarrow M_{iz} = 714,5 \text{ N} \cdot \text{cm}$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_{ix} = -17,5 \text{ N}$$

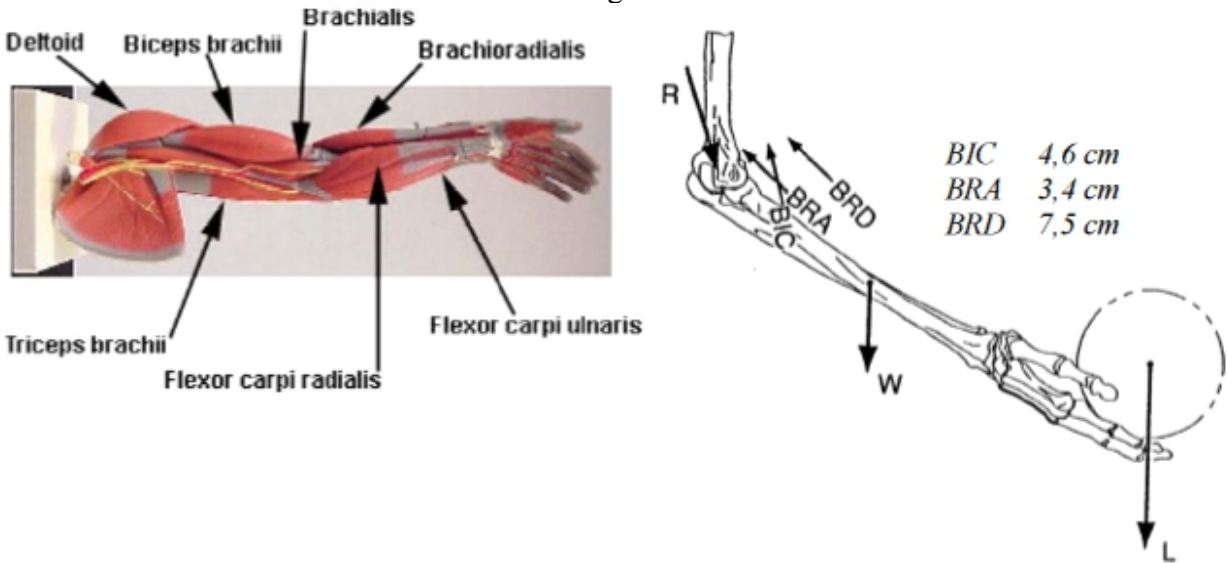
$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F_{iy} = 30,3 \text{ N}$$

Si può costruire un modello muscolo-scheletrico ipotizzando che agisca solo un muscolo flessore.



Le forze interarticolari sono diverse dai componenti della forza generalizzata perché F_F esercita una forza di compressione che nel modello precedente non c'era e l'articolazione vi deve reagire. Di solito le forze interarticolari sono grandi anche per carichi esterni piccoli perché hanno un braccio piccolo.

Se si costruisce un modello con 3 flessori in sinergia:

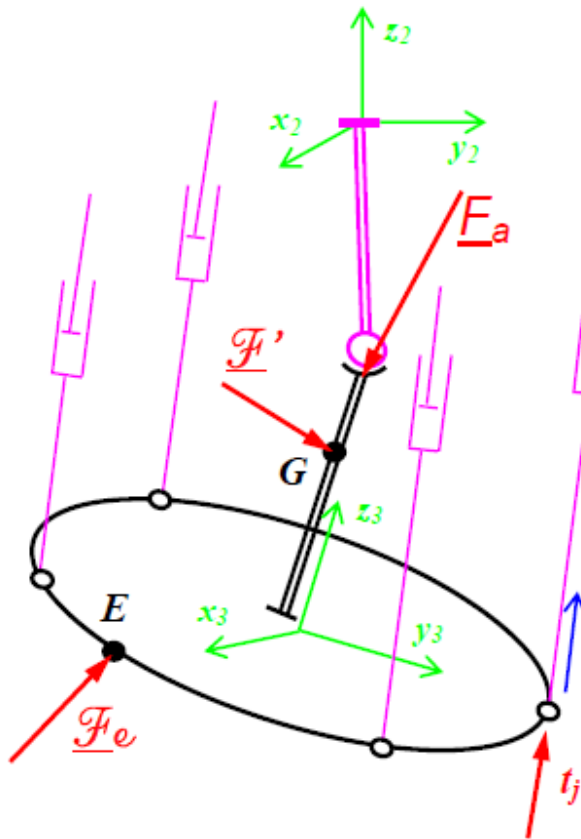


Equilibrio dei momenti:

$$M_{iz} = 714,5 \text{ N} \cdot \text{cm} = 4,6 F_{BIC} + 3,4 F_{BRA} + 7,5 F_{BRD}$$

Le forze generalizzate sono vettori a 6 componenti, 3 di forza e 3 di momento.
Vogliamo calcolare le forze muscolari.

Si costruisce un modello muscolo-scheletrico, per esempio quello del segmento gamba – piede.



Il punto E è quello in cui il segmento interagisce con il mondo esterno (contatto piede – terreno).

La struttura è parallela e permette di distinguere le forze muscolari da quelle interarticolari:

F_a → forza interarticolare (3 componenti);

t_j → forza muscolare;

δ_j → grado di libertà del muscolo (rappresenta la sua deformazione: è anche lo spostamento del punto di applicazione della forza).

I muscoli possono esercitare solo forze di trazione, quindi per controllare n gradi di libertà servono n+1 muscoli. Solitamente la struttura è ridondante, perché più muscoli cooperano nel controllo dello stesso movimento.

Bisogna conoscere il punto di attacco del muscolo e la direzione della forza muscolare in quel punto.

Si ha una catena cinematica parallela a 6 g.d.l.

Lo spostamento dei giunti è dato dal vettore q ,

mentre la loro velocità angolare è data da:

$$\underline{\dot{q}} = [\dot{q}_1 \quad \dots \quad \dot{q}_6]^T$$

La velocità generalizzata del punto E (in cui è applicato il carico esterno) è:

$$\underline{\mathcal{V}}_E = \begin{bmatrix} \underline{V}_E \\ \underline{\omega} \end{bmatrix} = [v_X \quad v_Y \quad \dots \quad \omega_Y \quad \omega_Z]^T$$

Mentre il carico esterno applicato in E è:

$$\underline{\mathcal{F}}_e = \begin{bmatrix} \underline{F}_e \\ \underline{M}_e \end{bmatrix} = [f_X \quad f_Y \quad \dots \quad M_Y \quad M_Z]^T$$

Sia J_E la matrice jacobiana del corpo s3 nel punto E. Si ha che la velocità di E è data da:

$$\underline{\mathcal{V}}_E = J_E \cdot \underline{\dot{q}}$$

La potenza del carico esterno è:

$$P_e = v_X f_X + v_Y f_Y + \dots + \omega_Y M_Y + \omega_Z M_Z$$

ovvero:

$$P_e = \underset{1 \times 1}{\mathcal{V}}_E^T \cdot \underset{6 \times 1}{\mathcal{F}}_e$$

Dove:

$$\underline{\mathcal{V}}_E^T = \underline{\dot{q}}^T \cdot J_E^T$$

$$l_1 = \sqrt{(x_p^2 + y_p^2)}$$

$$l_2 = \sqrt{[(a - x_p)^2 + y_p^2]}$$

Conoscendo l_1 ed l_2 , invece, si trovano due soluzioni possibili di x_p e y_p .
Si può scrivere:

$$\underset{m \times 1}{\dot{\underline{\delta}}} = \underset{m \times 6}{J_{P(E)}} \cdot \underset{6 \times 6}{\underline{\mathcal{V}}_E} = \underset{m \times 6}{J_{P(E)}} \cdot \underset{6 \times 6}{J_E} \cdot \underset{6 \times 1}{\dot{\underline{q}}}$$

ovvero:

$$\dot{\underline{\delta}} = J_I \cdot \dot{\underline{q}}$$

Dove J_I è la matrice jacobiana parallela – seriale della struttura. Lega le velocità di deformazione dei muscoli con le velocità dei movimenti delle articolazioni; non si riferisce a un punto particolare! Tipicamente ha più righe che colonne (ci sono più muscoli che agiscono in sinergia).

Quindi:

$$P_m = \dot{\underline{q}}^T \cdot J_I^T \cdot \underline{\tau}_m$$

Analisi statica.

Si considerano solo P_m e P_e .

$$P_m + P_e = 0$$

$$\dot{\underline{q}}^T \cdot J_I^T \cdot \underline{\tau}_m = -\dot{\underline{q}}^T \cdot J_E^T \cdot \underline{\mathcal{F}}_e$$

$$\underline{\tau}_m = -(J_I^T)^{-1} \cdot J_E^T \cdot \underline{\mathcal{F}}_e$$

Analisi dinamica.

$$P_m + P_e + P' = 0$$

$$\dot{\underline{q}}^T \cdot J_I^T \cdot \underline{\tau}_m = -\dot{\underline{q}}^T \cdot J_E^T \cdot \underline{\mathcal{F}}_e - \dot{\underline{q}}^T \cdot J_G^T \cdot \underline{\mathcal{F}}'$$

$$\underline{\tau}_m = -(J_I^T)^{-1} \cdot (J_E^T \cdot \underline{\mathcal{F}}_e + J_G^T \cdot \underline{\mathcal{F}}')$$

Per definire $\underline{\mathcal{F}}_e$ occorre conoscere le forze esterne agenti sui membri della struttura.

Per definire $\underline{\mathcal{F}}'$ occorre conoscere il moto dei membri della struttura.

Le matrici jacobiane J_G e J_E dipendono dalla geometria del modello osteoarticolare dell'arto.

La matrice jacobiana $J_{P(E)}$ dipende dalla geometria del modello muscolo-scheletrico dell'arto.

J_I^T ha solitamente più colonne che righe, quindi non è invertibile. Si possono aggiungere delle equazioni che rappresentino situazioni particolari (funzioni obiettivo) per renderla quadrata e quindi invertibile. Oppure si può calcolare numericamente la matrice pseudoinversa. Il vettore delle azioni muscolari $\underline{\tau}_m$ calcolato con la pseudoinversa è il vettore *a norma minima*, corrispondente alla soluzione di minima energia.

DEAMBULAZIONE

L'analisi della deambulazione ha come finalità:

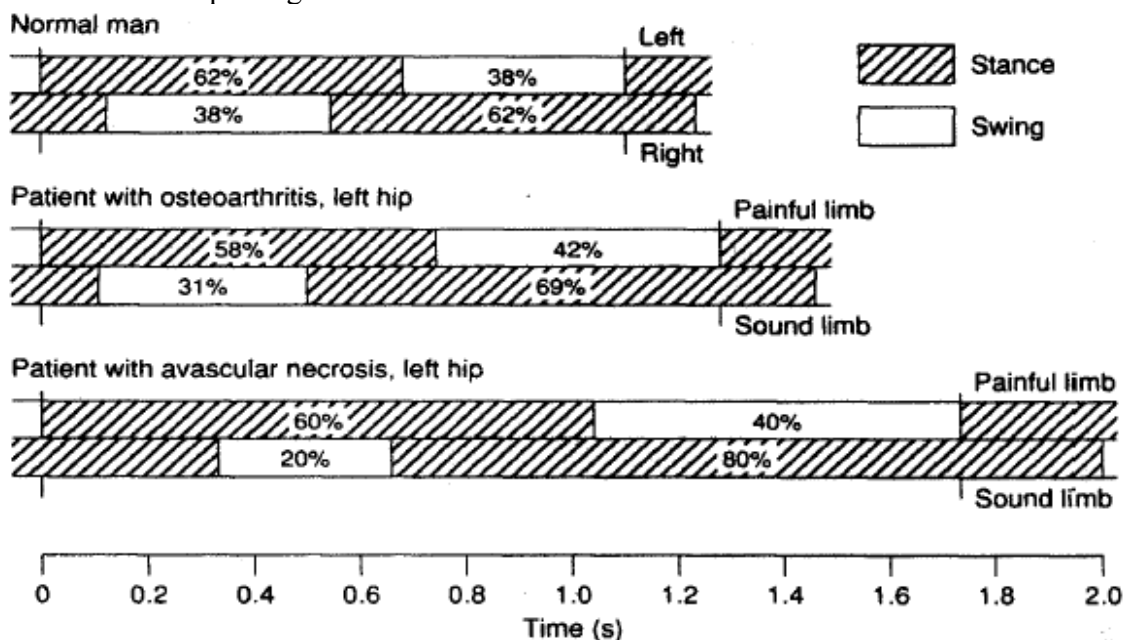
- la conoscenza delle relazioni tra il sistema di controllo del moto e la dinamica del cammino;
- la migliore comprensione dei meccanismi che traducono le azioni muscolari delle articolazioni nel movimento;
- l'analisi clinica delle situazioni patologiche, al fine di individuare adeguati trattamenti (terapie, ortesi, interventi chirurgici, ecc);

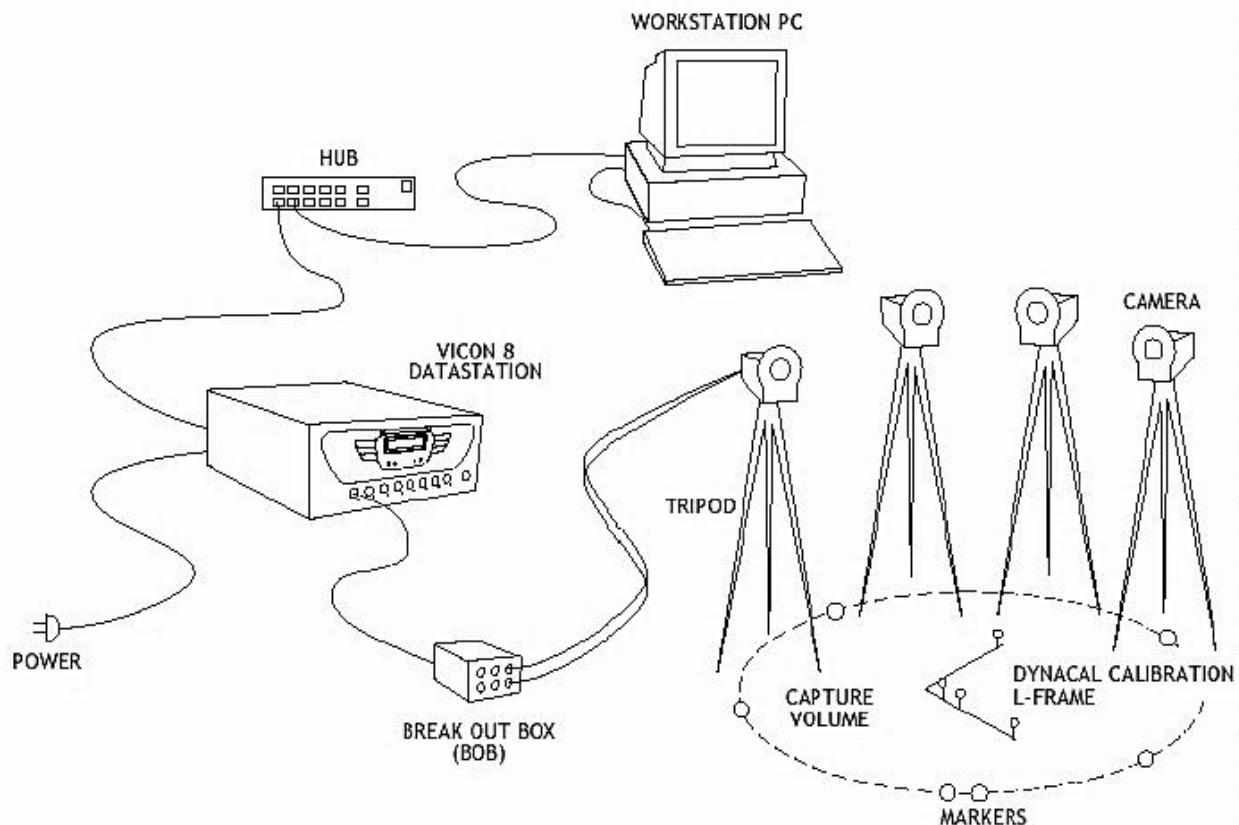
% del ciclo	Terminologia per una deambulazione normale	Terminologia generica
0%	Impatto del tallone – inizio del ciclo, rappresenta il momento in cui il baricentro del corpo è più in basso	Contatto iniziale
0-8%	Piede piatto – l'istante in cui la pianta del piede è tutta a contatto col terreno	Caricamento
8-30%	Appoggio pieno (intermedio) – quando l'arto controlaterale (in pendolamento) supera il piede in appoggio e il baricentro è al punto più alto	Appoggio pieno
30-40%	Distacco del tallone – il tallone perde contatto col terreno e il polpaccio inizia la fase di spinta comandando la flessione plantare della caviglia	Scaricamento
40-60%	Distacco delle dita – termina la fase di appoggio e il piede si distacca dal terreno	Pre-pendolamento
60-75%	Accelerazione – il soggetto attiva i flessori dell'anca per accelerare la gamba in avanti	Pendolamento iniziale
75-85%	Pendolamento centrale – il piede supera il corpo	Pendolamento centrale
85-100%	Decelerazione – i muscoli rallentano la gamba e stabilizzano il piede in preparazione del successivo appoggio	Pendolamento finale

Per l'analisi della deambulazione si possono usare diverse tecniche:

- misure del movimento (lunghezza del passo, velocità di cammino);
- misure di movimenti angolari relativi dei segmenti nelle articolazioni;
- rilievo della posizione nello spazio di alcuni punti notevoli (*motion capture* – stereofotogrammetria);
- misura delle forze di reazione del terreno (dinamometria);
- rilievo dell'attività muscolare (ElettroMioGrafia);
- misura dell'energia metabolica utilizzata (calorimetria indiretta).

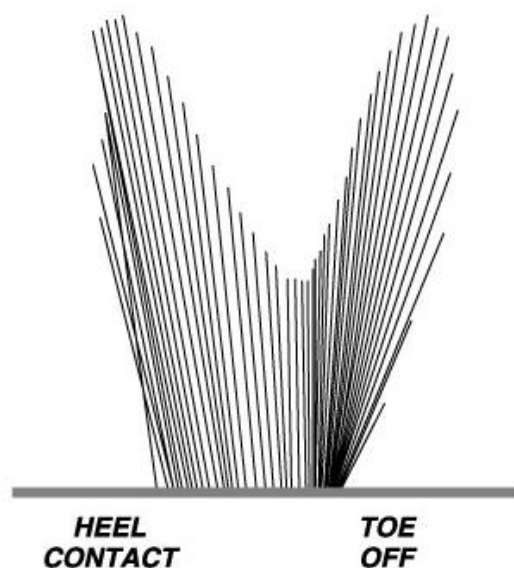
La misura del tempo che il singolo arto trascorre in appoggio o in pendolamento permette di identificare eventuali patologie.



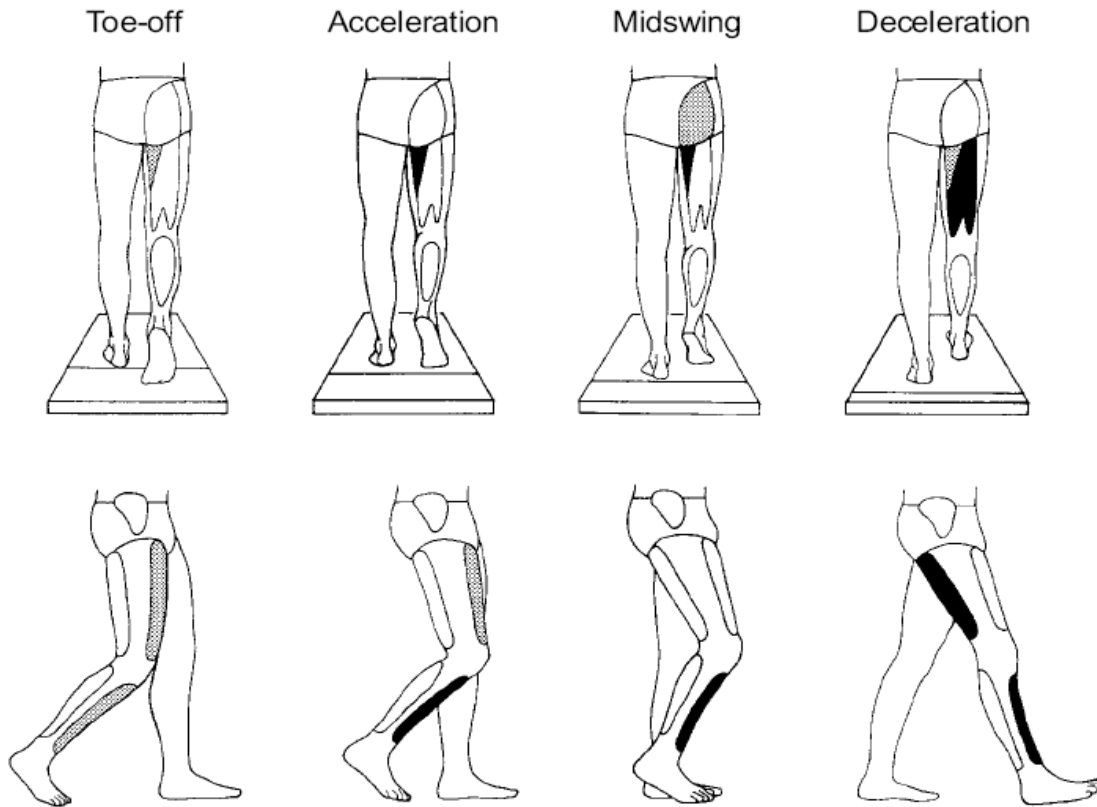


Tramite la ripresa di due telecamere, la tecnica stereofotogrammetrica individua la posizione dei marker nello spazio 3D. La registrazione e l'elaborazione delle posizioni permette di ricavare anche le velocità e le accelerazioni dei punti lungo la traiettoria.

La dinamometria rileva le forze di reazione del terreno in tempo reale per mezzo di una pedana dinamometrica. Il complesso delle azioni scambiate con il terreno comprende una forza risultante, che può essere valutata secondo le componenti lungo 3 assi fondamentali, più un momento risultante, a sua volta scomponibile secondo le stesse direzioni. Per ricostruire la forza generalizzata ci vogliono almeno 6 celle di carico. Per mezzo della pedana dinamometrica si può ricavare un vettogramma delle forze di reazione del terreno durante la fase di appoggio (ogni riga è la forza misurata in un istante).



fase di pendolamento:

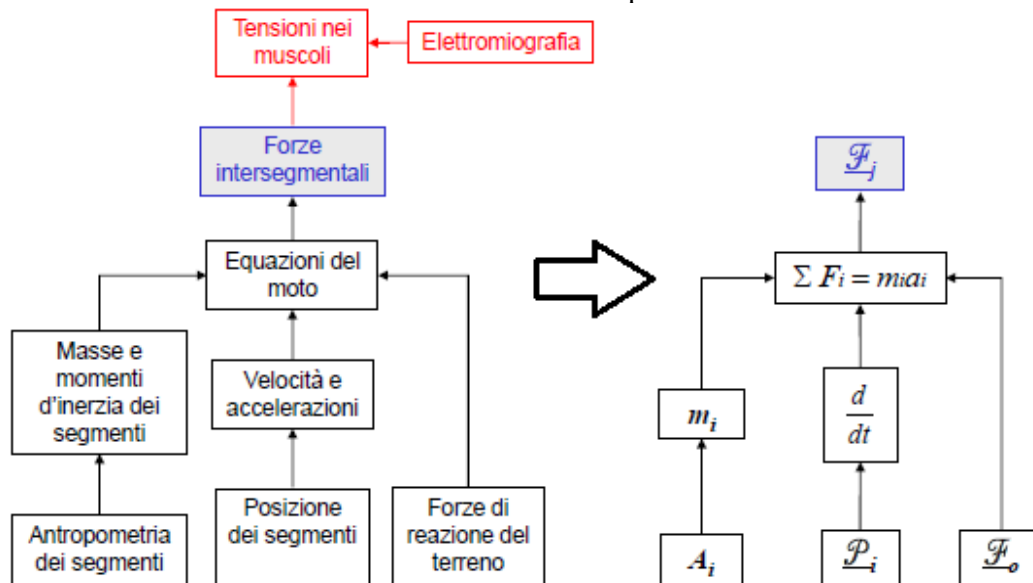


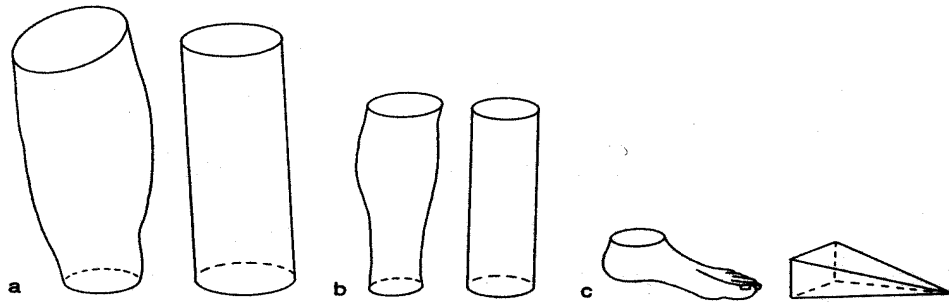
Si vuole effettuare l'analisi dinamica inversa della deambulazione, cioè calcolare le forze e i momenti intersegmentali nelle articolazioni. La stessa metodologia può essere usata per analizzare qualsiasi movimento.

Dati di partenza:

- antropometrici (caratteristiche fisiche dell'arto: dimensioni, masse e momenti d'inerzia dei segmenti);
- cinematici (necessari per calcolare le forze d'inerzia: sono rilevati sperimentalmente);
- forze di interazione con l'ambiente (forze di contatto e peso, rilevati mediante piattaforme sensorizzate).

Per verifica si confrontano i risultati calcolati con i rilievi sperimentali.





Si esegue la stima antropometrica per determinare le masse dei segmenti:

$$\begin{aligned} \text{Coscia} \quad m_c &= K_{1(c)} M + K_{2(c)} L_C C_C^2 + K_{3(c)} \\ \text{Gamba} \quad m_g &= K_{1(g)} M + K_{2(g)} L_G C_G^2 + K_{3(g)} \\ \text{Piede} \quad m_p &= K_{1(p)} M + K_{2(p)} W_M H_M L_P + K_{3(p)} \end{aligned}$$

I coefficienti K si ricavano dalla letteratura.

Baricentri

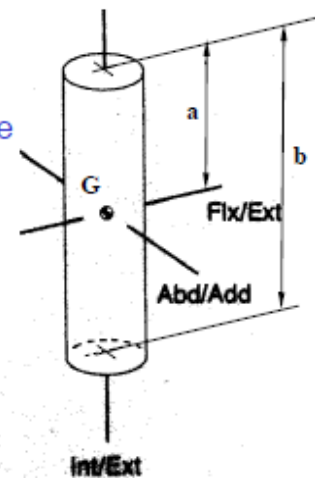
a = distanza baricentro-estremità prossimale

b = distanza estremità prossimale-distale

$$\text{Coscia} \quad K_{G(c)} = a_{(c)}/b_{(c)}$$

$$\text{Gamba} \quad K_{G(g)} = a_{(g)}/b_{(g)}$$

$$\text{Piede} \quad K_{G(p)} = a_{(p)}/b_{(p)}$$



Per l'identificazione antropometrica completa servono 36 coefficienti K per ciascun arto.

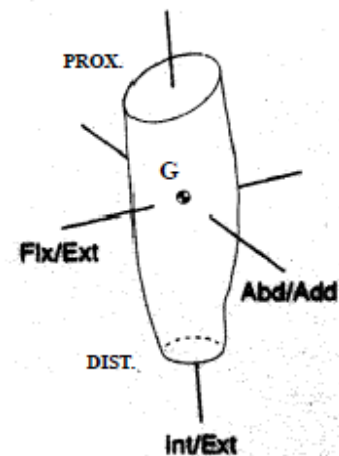
Momenti d'inerzia (centrali)

Assi centrali: Flesso-estensione (F)
Abdu-adduzione (A)
Rotazione (R)

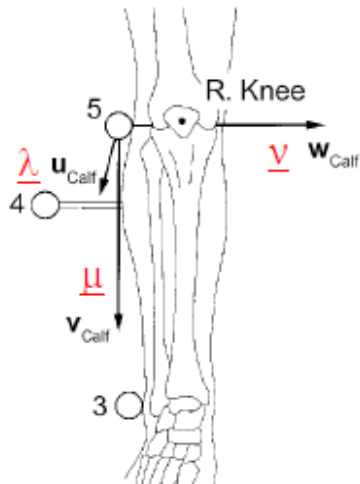
$$\begin{aligned} \text{Coscia} \quad I_{F(c)} &= K_{4(c)} M (L_C^2 + K_{5(c)} C_C^2) + K_{6(c)} \\ I_{A(c)} &= K_{7(c)} M (L_C^2 + K_{8(c)} C_C^2) + K_{9(c)} \\ I_{R(c)} &= K_{10(c)} M C_C^2 + K_{11(c)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Gamba} \quad I_{F(g)} &= K_{4(g)} M (L_G^2 + K_{5(g)} C_G^2) + K_{6(g)} \\ I_{A(g)} &= K_{7(g)} M (L_G^2 + K_{8(g)} C_G^2) + K_{9(g)} \\ I_{R(g)} &= K_{10(g)} M C_G^2 + K_{11(g)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Piede} \quad I_{F(p)} &= K_{4(p)} M (H_M^2 + K_{5(p)} L_P^2) + K_{6(p)} \\ I_{A(p)} &= K_{7(p)} M (B_P^2 + K_{8(p)} L_P^2) + K_{9(p)} \\ I_{R(p)} &= K_{10(p)} M (H_M^2 + B_P^2) + K_{11(p)} \end{aligned}$$



Si procede analogamente per gamba e bacino.



Posizione del ginocchio:

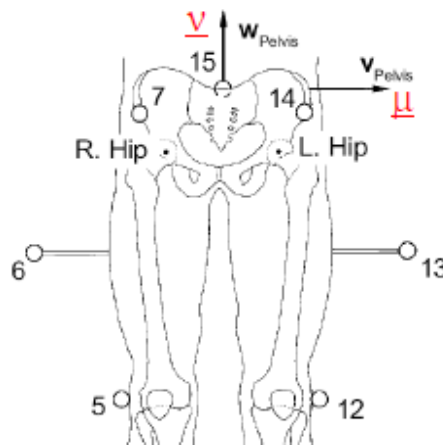
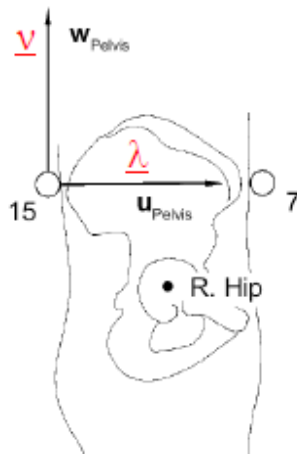
$$\underline{P}_K = \underline{P}_E + g_1 D_K \underline{\lambda} + g_2 D_K \underline{\mu} + g_3 D_K \underline{\nu}$$

(\underline{P}_E : posizione dell'epicondilo)

Posizione dell'anca:

$$\underline{P}_H = \underline{P}_S + b_1 L_A \underline{\lambda} + b_2 L_A \underline{\mu} + b_3 L_A \underline{\nu}$$

(\underline{P}_S : posizione del sacro)



Esempio: determinazione della terna $\underline{\lambda}\underline{\mu}\underline{\nu}$ del piede rispetto al riferimento globale.

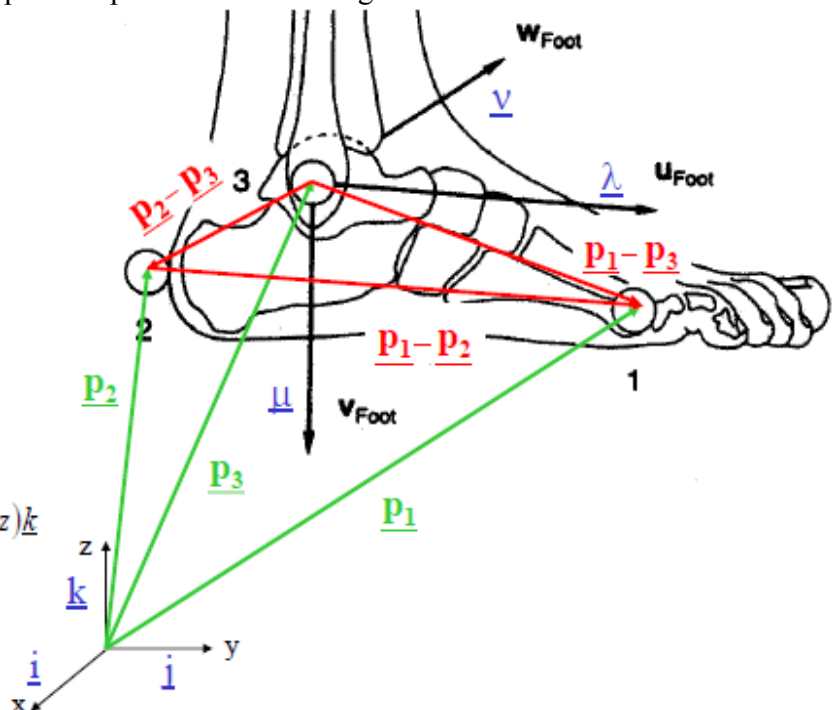
Noti i vettori \underline{p}_1 , \underline{p}_2 e \underline{p}_3 si possono calcolare i vettori $\underline{p}_1-\underline{p}_2$, $\underline{p}_2-\underline{p}_3$ e $\underline{p}_1-\underline{p}_3$. Il vettore $\underline{p}_1-\underline{p}_2$ individua il versore $\underline{\lambda}$, mentre i vettori $\underline{p}_2-\underline{p}_3$ e $\underline{p}_1-\underline{p}_3$ individuano il piano dei 3 marker.

$$\begin{cases} \underline{p}_1 = p_{1x}\underline{i} + p_{1y}\underline{j} + p_{1z}\underline{k} \\ \underline{p}_2 = p_{2x}\underline{i} + p_{2y}\underline{j} + p_{2z}\underline{k} \\ \underline{p}_3 = p_{3x}\underline{i} + p_{3y}\underline{j} + p_{3z}\underline{k} \end{cases}$$

Si ha:

$$\underline{p}_1 - \underline{p}_2 = (p_{1x} - p_{2x})\underline{i} + (p_{1y} - p_{2y})\underline{j} + (p_{1z} - p_{2z})\underline{k}$$

Il cui modulo è:



Orientamento dei segmenti

Coscia

- Asse x posto sulla linea distale-proximale, rivolto dal ginocchio verso l'anca
- Piano xz formato dai giunti di anca e ginocchio insieme al marker sulla bacchetta femorale
- Asse y perpendicolare a x e z e rivolto in avanti

Gamba

- Asse x posto sulla linea distale-proximale, rivolto dalla caviglia verso il ginocchio
- Piano xz formato dai giunti di ginocchio e caviglia insieme al marker sulla bacchetta tibiale
- Asse y perpendicolare a x e z e rivolto in avanti

Piede

- Asse x rivolto dall'alluce verso il tallone
- Piano xy formato dal giunto della caviglia insieme al marker sul tallone e all'alluce
- Asse z perpendicolare a x e y e rivolto verso sinistra

Posizioni dei baricentri

Si ricavano dalle posizioni di anca, ginocchio, caviglia, tallone (P_{Heel}) e alluce, insieme ai rapporti K_G antropometrici

$$\text{Coscia } \underline{P}_{G(c)} = \underline{P}_H + K_{G(c)} (\underline{P}_K - \underline{P}_H)$$

$$\text{Gamba } \underline{P}_{G(g)} = \underline{P}_K + K_{G(g)} (\underline{P}_A - \underline{P}_K)$$

$$\text{Piede } \underline{P}_{G(p)} = \underline{P}_{Heel} + K_{G(p)} (\underline{P}_T - \underline{P}_{Heel})$$

Velocità e accelerazioni dei baricentri

Si ricavano per derivazione numerica dagli andamenti nel tempo delle posizioni:

$$\underline{V}_G = \frac{d\underline{P}_G}{dt} \quad \underline{a}_G = \frac{d\underline{V}_G}{dt}$$

Ricapitolando, i passi per effettuare la cinematica dei baricentri sono:

conosco posizione marker → calcolo posizioni punti notevoli → calcolo posizioni baricentri nel sistema globale → derivo le componenti dei vettori nel tempo → ottengo v_G e a_G .

La cinematica angolare consiste nella determinazione di orientamento, velocità angolare e accelerazione angolare dei segmenti. Può essere analizzata in due modalità diverse:

- angoli dei giunti anatomici: servono per valutare le estensioni dei movimenti angolari delle articolazioni, di interesse clinico;
- angoli di Eulero: servono per determinare velocità e accelerazione angolari assolute del segmento, necessarie per l'analisi dinamica.

Mediante 3 rotazioni successive, gli angoli di Eulero portano la terna di riferimento globale a coincidere con quella locale sul segmento. Infatti le nostre informazioni sono definite nel sistema di

- effettuare una diagnosi funzionale di disordini motori (perché il soggetto non cammina bene?);
- impostare una terapia (più o meno invasiva: riabilitativa, chirurgica, ortesica);
- effettuare ricerche sulla fisiologia del movimento e sulla sua patologia;
- sviluppare dispositivi di ausilio (protesi interne o esterne, FES → elettrostimolazione funzionale);
- ottimizzare il gesto atletico;
- progettare ambienti e oggetti ergonomici.

La valutazione del movimento può essere qualitativa o quantitativa, oggettiva o soggettiva.

VALUTAZIONE	soggettiva	oggettiva
qualitativa	Descrizione basata sull'osservazione	Ripresa video
quantitativa	Scale di valutazione (Bathel, FIM, Borg,...)	Valutazione strumentale

La valutazione quantitativa soggettiva consiste nelle scale cliniche: il medico dà un punteggio che corrisponde a un intervallo di comportamenti.

Il tipo di valutazione strumentale (quantitativa oggettiva) va deciso in base a:

- natura del moto da analizzare;
- scopo dell'analisi;
- ambiente in cui si svolge il moto;
- caratteristiche dello strumento di misura;
- risorse economiche e umane disponibili.

ANALISI VISIVA: si valuta il movimento per mezzo **dell'osservazione diretta**; richiede la conoscenza della fisiologia corretta del movimento che si sta analizzando, in modo da riuscire a valutare eventuali variazioni rispetto alla normalità.

Vantaggi: approccio semplice ed economico, non richiede attrezzature troppo complicate.

Svantaggi: analisi del movimento condizionata dall'esperienza e dall'interpretazione dell'osservatore, limitata ad un unico piano alla volta, valutazione molto generica e limitata ai macromovimenti e sono difficili i confronti tra osservazioni diverse.

RIPRESA VIDEO: si **registra un filmato** del movimento, che in seguito viene analizzato fotogramma per fotogramma.

Vantaggi: approccio relativamente semplice ed economico, i dati possono essere analizzati anche dopo molto tempo dalla registrazione, è possibile un confronto fra osservazioni diverse.

Svantaggi: analisi del movimento condizionata dall'esperienza e dall'interpretazione dell'osservatore, valutazione generica e limitata ai macromovimenti.

SCALE di VALUTAZIONE: sono basate su un apprezzamento qualitativo o semi-quantitativo da parte dell'osservatore. Le scale sono costituite da un insieme di misure rilevanti per effettuare una valutazione in un dato contesto. Il punteggio può essere espresso in termini qualitativi (assente, lieve, moderato, ...) oppure mediante un punteggio alfanumerico.

Vantaggi: approccio economico, non richiede attrezzature troppo complicate, nessun disagio per il paziente.

Svantaggi: valutazione in campi limitati, soggettività, in alcuni casi tempo di somministrazione troppo elevato.

VALUTAZIONE STRUMENTALE: si utilizzano strumenti di acquisizione tecnologicamente avanzati e modelli biomeccanici.

Vantaggi: possibilità di valutare il movimento nei tre piani anatomici, analisi svincolata dall'osservatore, valutazione anche dei movimenti minimi, possibilità di analisi anche dopo molto

movimenti 3D rispetto a un riferimento globale.

La capacità di percepire la natura 3D degli oggetti è definita *visione stereoscopica* ed è dovuta all'impiego combinato di 2 occhi.

Obiettivo della **stereofotogrammetria** è la ricostruzione 3D del punto. Dato un punto che si muove nello spazio del laboratorio, la stereofotogrammetria ricostruisce la posizione che tale punto ha assunto in ciascun istante di tempo campionato, ovvero fornisce le coordinate xyz in ciascun istante di tempo appartenente all'intervallo di osservazione rispetto a un sistema di riferimento del laboratorio.

Ogni telecamera ha un *piano principale*, un *asse ottico* perpendicolare ad esso e passante per un *punto nodale*.

La posizione reale di un punto è dove si incrociano gli assi di due telecamere.

Per la ricostruzione 3D del punto si tracciano le rette che dal punto di proiezione passano attraverso i nodi focali. Le due linee si intersecano nel punto che era occupato dal punto oggetto durante le riprese. Un maggior numero di telecamere comporta una maggior precisione nella ricostruzione.

Le informazioni riguardo la posizione e l'orientamento delle telecamere sono tempo invarianti. La posizione delle telecamere, il loro orientamento e la posizione dei punti nodali rispetto ai piani principali costituiscono i *parametri di calibrazione*. Il sistema viene calibrato ricavando tali parametri in modo indiretto. Si danno in ingresso le coordinate x, y, z di un punto rispetto al sistema di riferimento globale e a partire da esse si ricavano i parametri di calibrazione.

Esistono due tipi di calibrazione:

- *calibrazione statica*: su un oggetto di dimensioni note si pongono dei marker in posizioni predefinite. La posizione dell'oggetto di calibrazione statica identifica la posizione del sistema di riferimento assoluto del laboratorio;
- *calibrazione dinamica*: una bacchetta rigida sulla quale sono fissati dei marker in posizione prefissata viene spostata nel volume di ripresa delle telecamere. Permette di calcolare tutti i parametri delle telecamere.

Nei laboratori la calibrazione va rifatta ogni 2-3 giorni. Al di fuori di un ambiente strutturato non sempre è possibile effettuare la calibrazione statica: si esegue solo la dinamica, con errori maggiori di conseguenza.

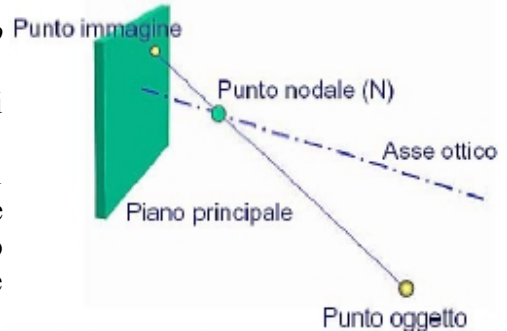
Ciò che si vuole ricavare sono i tracciati dei marker. Per fare l'analisi del cammino servono minimo due piattaforme di forza. Ogni marker deve essere visibile dal maggior numero possibile di telecamere: l'occultamento dei marker è un problema. Si ricostruisce la posizione rispetto al sistema di riferimento globale; dalla traiettoria cinematica del punto si ricavano velocità e accelerazione. Le altre informazioni si ricavano da modelli biomeccanici. Come marker possono anche essere usate delle piastre rigide, anche se non identificano punti di repere anatomico. Le piastre vengono usate per minimizzare gli errori legati ad artefatti da movimento che nascono dal fatto che i tessuti molli non sono rigidi, quindi i marker non sono sempre solidali all'osso durante i movimenti.

Il numero di telecamere da utilizzare dipende dal tipo di movimento da studiare, dalla sua velocità e dalla complessità del modello biomeccanico usato per interpretare i dati. Una maggior complessità richiede un maggior numero di telecamere (in un laboratorio non ci sono limiti al posizionamento di telecamere; in un ambiente non strutturato bisogna trovare dei compromessi).

2-4 telecamere → si esamina movimento su un solo piano;

6 telecamere → si esamina movimento nello spazio in volumi ridotti;

più di 10 telecamere → si esamina movimento in volumi estesi e gesti sportivi.



Movimento	Frequenza di campionamento (cicli per secondo)	Numero di punti di osservazione	Distanza (m)
Cammino, corsa lenta e simili	50-100	4	3-5
Corsa veloce e simili	100 - 400	6	10 - 40
Movimenti di stacco, lancio	1000 - 3000	< 10	10

I possibili errori sono:

- errori strumentali;
- errori nella determinazione delle coordinate locale dei repere anatomici;
- errori da artefatti da tessuto molle.

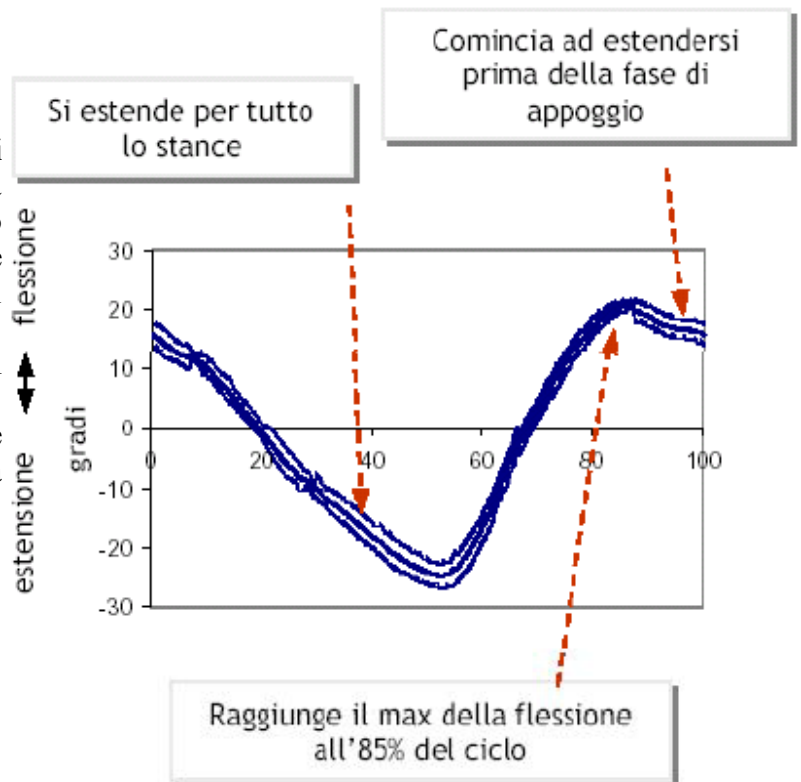
Per la cinematica, dunque, si costruisce un modello a segmenti rigidi, si individuano prima i sistemi di riferimento tecnici, poi quelli anatomici; si fa una stima della cinematica articolare e infine si ricostruiscono la posizione e l'orientamento relativo dei sistemi di riferimento anatomici solidali con i segmenti ossei adiacenti.

Il piano sagittale è quello con l'interpretazione più semplice.

Angolo di flesso-estensione dell'anca: si ricava come angolo tra la retta che descrive la direzione del busto e l'asse della coscia. È nullo quando le due rette hanno la stessa direzione; se è positivo si è in flessione, se è negativo si è in estensione.

I grafici vengono riportati in percentuale del ciclo del passo.

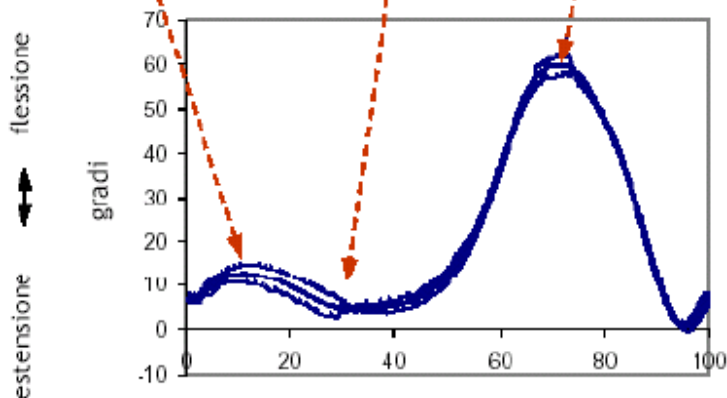
L'angolo dell'anca varia tra $\pm 20^\circ$. Si estende per tutta la fase di appoggio. Il massimo della flessione si ha durante il pendolamento.



estensione fino al termine dell'estensione dell'anca (40% GC)

leggera flessione conseguente all'appoggio

massima flessione ($\sim 60^\circ$) nella prima fase dello swing



Angolo di flesso-estensione del ginocchio: si ricava come angolo tra l'asse della coscia e l'asse della gamba. Si assume nullo ad arto esteso, quindi il ginocchio non ha mai estensione. Nella fase di appoggio c'è una leggera flessione ($15-20^\circ$) che consente di abbassare il baricentro e di conseguenza risparmiare energia. Sommando la variazione su tutti i piani, l'escursione del baricentro durante il cammino è inferiore a 5 cm. Se una patologia non consente di piegare il ginocchio, il cammino segue un pattern "a compasso", nel quale l'anca viene sollevata dal bacino: è un movimento molto dispendioso dal punto di vista energetico.

Sono sensori triassiali e necessitano di filtri che consentano di limitare gli errori. I più moderni hanno un magnetometro integrato che consente di conoscere la posizione del sensore nelle condizioni di funzionamento. Ci sono errori dovuti ai tessuti molli.

L'analisi dinamica consente di valutare forze e momenti interarticolari. Si parte dalla reazione piede-terreno e da lì si risale tutta la catena. Tale reazione viene misurata mediante piattaforme dinamometriche, che consistono di 2 piatti accoppiati tra loro con interposti sensori che consentono di misurare forze. Devono essere perfettamente integrate con il terreno; per mantenere il passo il più uniforme possibile non ci deve essere discontinuità tra camminamento e pedana (il soggetto non deve forzare il passo per far cadere il piede sulla piattaforma). La piattaforma restituisce la forza istante per istante. Le pedane possono essere a 3 o a 6 componenti. Le prime misurano la forza in direzione verticale (z) e i momenti intorno agli assi x e y; le seconde misurano la dinamica completa (forze e momenti in 3 direzioni). La misura può essere realizzata avvalendosi di 2 principi di trasduzione alternativi:

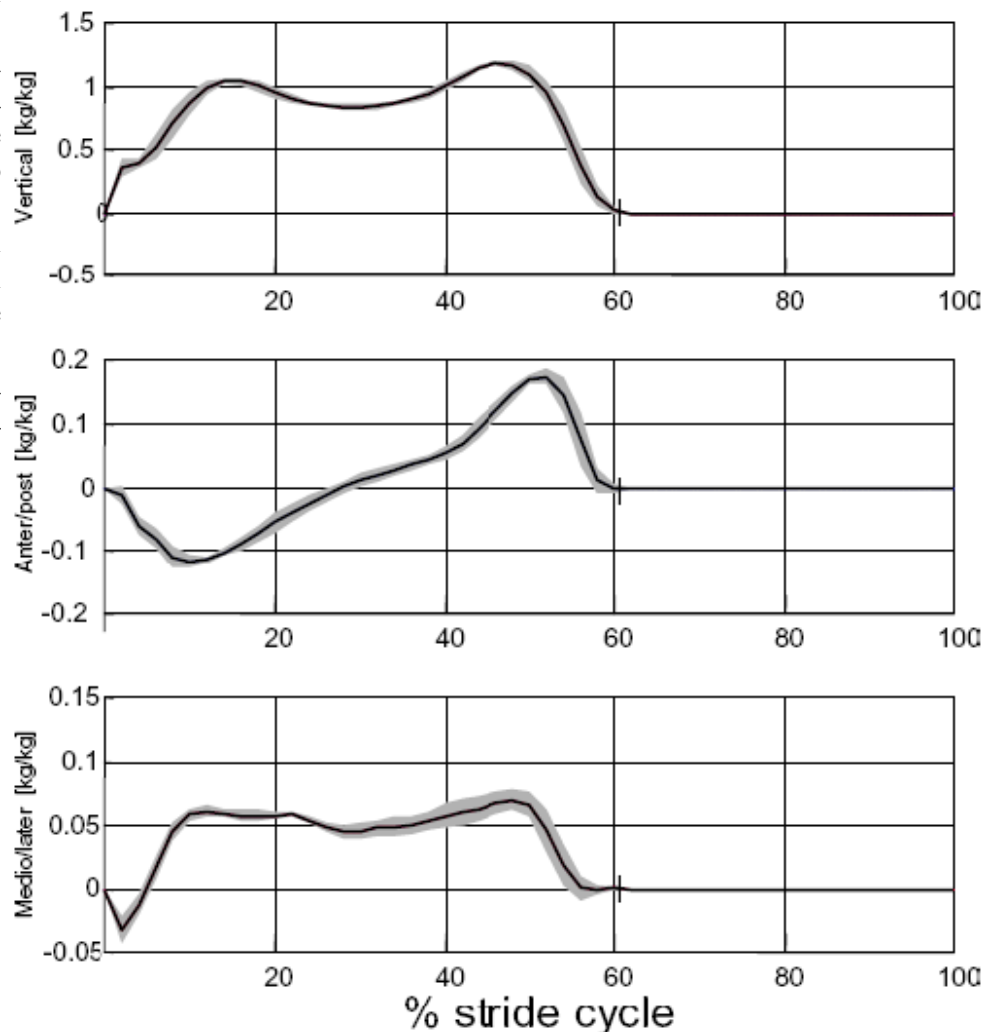
- *estensimetrico*: misura delle variazioni di resistenza elettrica del sensore causata da fenomeni di compressione o trazione. Gli estensimetri vengono applicati ai pilastri (di solito 4) che mantengono la distanza tra i due piani della piattaforma. Sono i sistemi più comuni;
- *piezoelettrico*: misura della polarizzazione elettrica per effetto di deformazione meccanica applicata a particolari materiali.

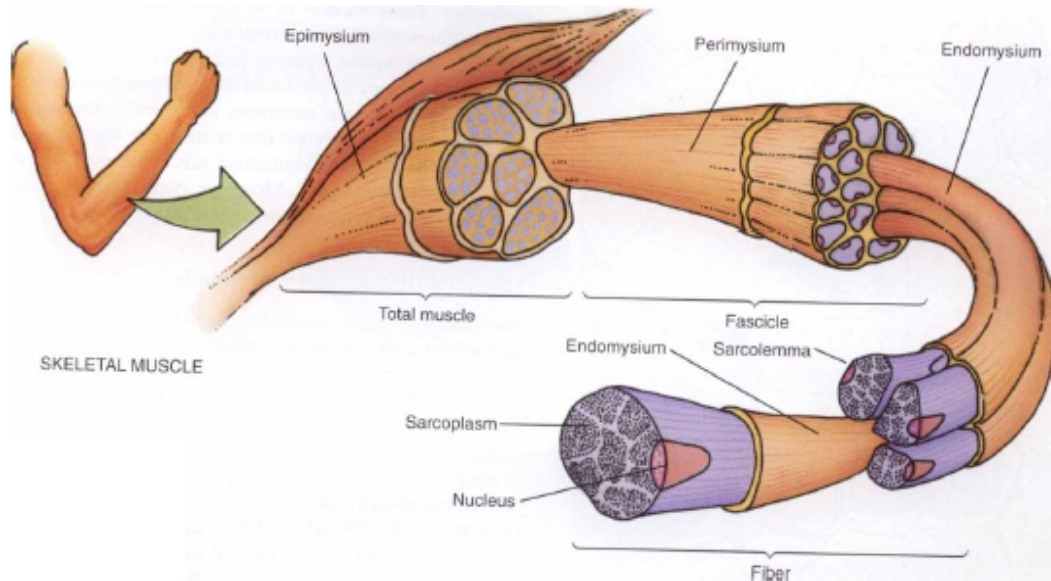
I sistemi estensimetrici hanno il problema del cross-talk: il sensore posto lungo x misura anche un po' delle deformazioni lungo y e z. Per questo si deve usare una matrice di calibrazione della pedana, con dei coefficienti che la pesano nelle varie direzioni. La matrice è fornita dal costruttore e non è necessario rivedere spesso la calibrazione.

Per l'analisi del cammino, teoricamente bastano due piattaforme (se il piede non appoggia metà fuori e metà dentro). Di solito si usano 2-3 piattaforme (sono molto costose, quindi si cerca di ridurre il numero al minimo). La dimensione e le forme delle piattaforme variano molto. Se la piattaforma è grande il piede ci si appoggia quasi sicuramente, ma c'è una maggior probabilità di poggiarci i due piedi: bisogna trovare un compromesso, che dipende anche dal movimento da esaminare.

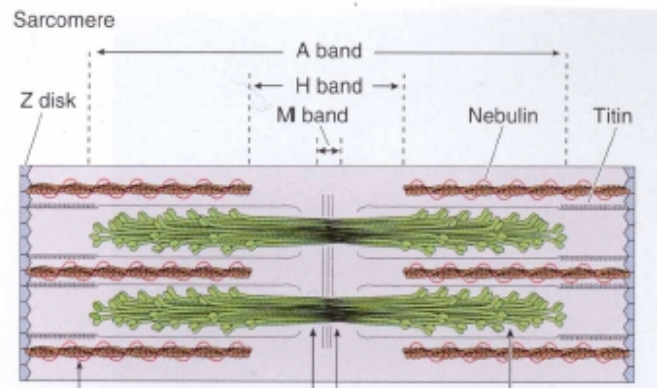
Dalle piattaforme si ricavano i grafici delle reazioni vincolari (in questo caso normalizzate rispetto al peso del soggetto).

Un soggetto sano presenta una doppia gobba nella forza verticale.





I sarcomeri sono gli attuatori che controllano la forza esercitata dal muscolo. Sono formati da filamenti di actina (sottile) e miosina (spesso). Durante la contrazione, la lunghezza dei filamenti rimane costante, ma essi scorrono l'uno sull'altro sviluppando la contrazione. Durante la contrazione la distanza tra le linee Z diminuisce, la banda H si accorcia e la banda A rimane costante.



La contrazione è innescata da segnali elettrici che arrivano dal sistema nervoso, in particolare da motoneuroni. L'unità motoria è costituita da un motoneurone e dalla fibre da esso innervate.

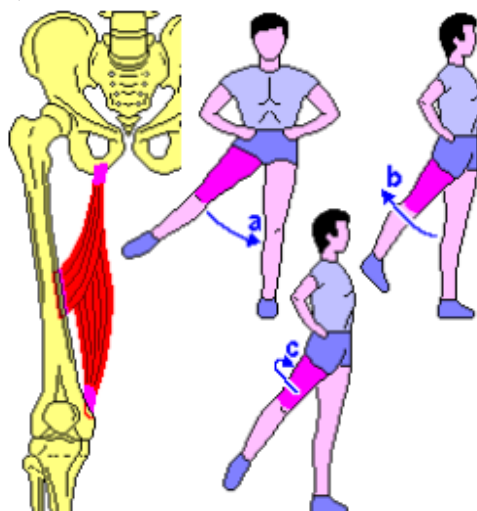
Motoneurone e fibre muscolari sono collegati dalla placca motrice (o giunzione neuromuscolare), che è un tipo particolare di sinapsi.

Le caratteristiche del muscolo sono influenzate dalla disposizione delle fibre rispetto alla direzione longitudinale:

- disposizione parallela: movimenti ampi, elevata velocità;
- disposizione obliqua: grande forza sviluppata, poca deformazione (geometria pennata).

Esistono diversi tipi di attacco dei muscoli allo scheletro:

- muscoli monoarticolari: controllano il movimento di una sola articolazione. Per es muscolo grande adduttore;



- *isotonica*: a forza costante. Il muscolo sposta il carico variando la propria lunghezza: può sia allungarsi (contrazione *eccentrica*: lavoro negativo → azione frenante) che accorciarsi (contrazione *concentrica*: lavoro positivo → azione motrice).

Nella caratterizzazione meccanica sperimentale dei muscoli si interpreta la funzione correlata a spostamento e forza. Si ricava un modello fenomenologico (o fisiologico) che evidenzia le caratteristiche del funzionamento biologico. Si costruisce con misure sperimentali e le variabili da considerare sono:

- tempo (t);
- lunghezza normalizzata rispetto a quella di riposo (l/l_0);
- forza per unità di area (tensione unitaria) (F/A);
- velocità di deformazione (dl/dt);
- rigidità (stiffness) (dF/dl);
- cedevolezza (compliance) (dl/dF);
- lavoro (energia) ($F \times dl$);
- potenza ($F \times dl/dt$).

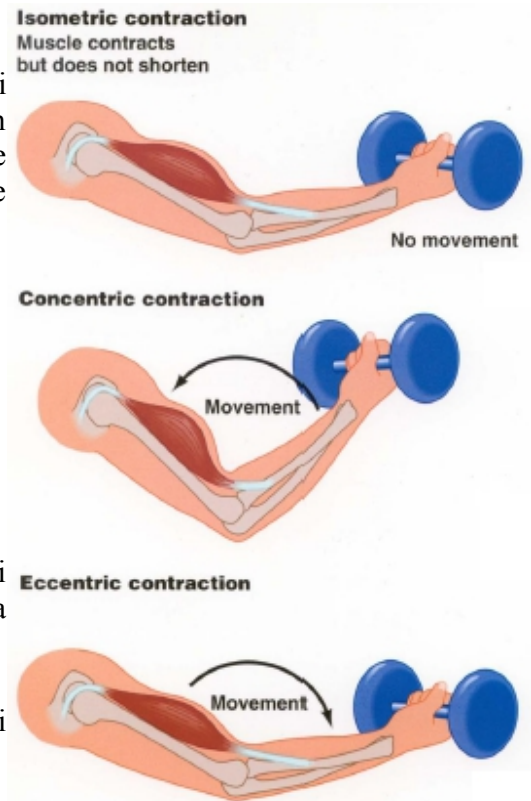
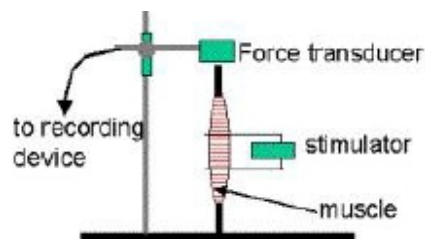
Le prove possono essere fatte su muscoli asportati da animali, quindi è necessario mantenerne la vitalità (ovvero la capacità di reagire a uno stimolo). Può essere fatto mediante:

- immersione in soluzione fisiologica;
- somministrazione di glicogeno (solo per alcune tipologie di muscolo);
- ossigenazione dei tessuti.

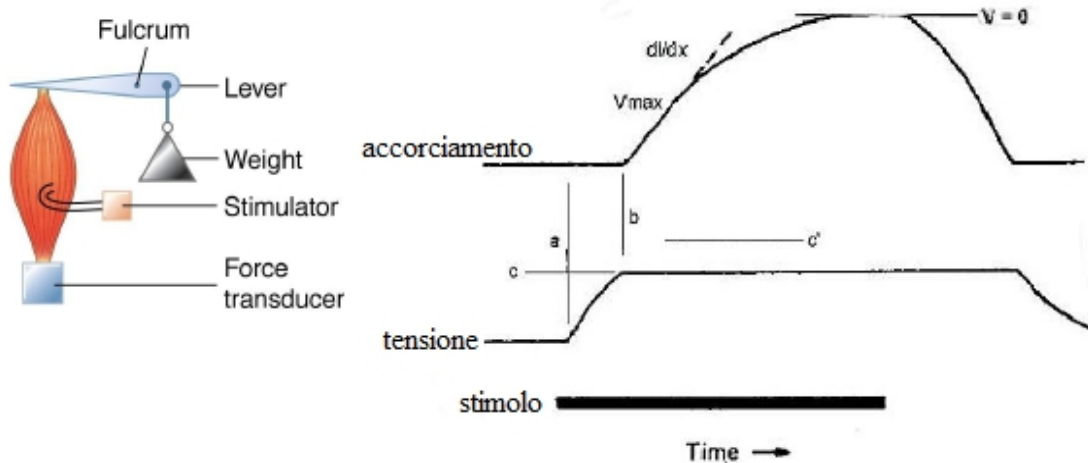
La stimolazione può avvenire per via chimica (solo muscoli sottili) o elettrica. In caso di stimolo elettrico si possono controllare i seguenti parametri:

- tipologia:
 - diretto (stimolazione del motoneurone);
 - indiretto (stimolazione del ventre del muscolo);
- elettrodi:
 - argento;
 - platino;
 - grafite;
- condizione:
 - isometrica (lunghezza costante);
 - isotonica (forza costante) concentrica o eccentrica;
 - isocinetica (velocità costante).

Si stimola il muscolo tramite un segnale elettrico e si misura la tensione esercitata mediante una cella di carico. Un impulso elettrico produce una singola scossa (twitch) costituita da una contrazione seguita da un rilassamento. Tra l'impulso elettrico e la scossa intercorre un *periodo di latenza* di pochi ms. La durata di un singolo twitch dipende dal tipo di muscolo: va dalle decine alle centinaia di ms.



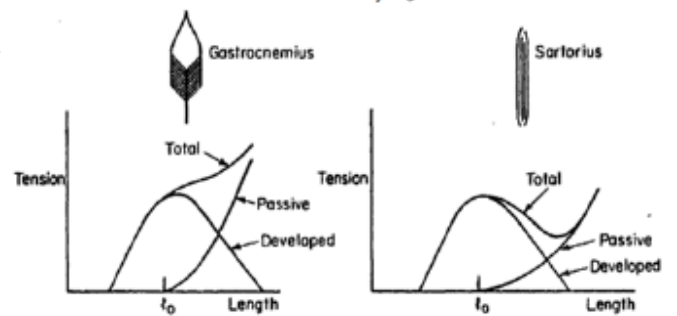
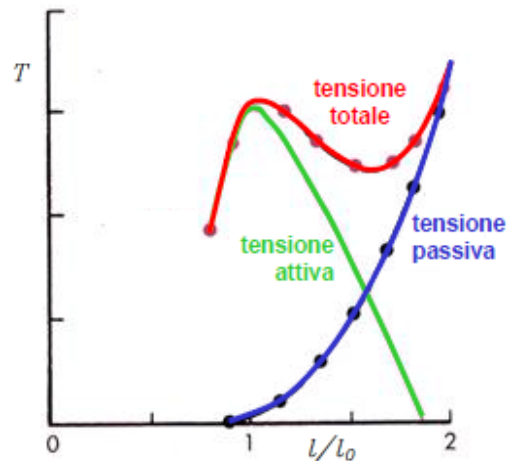
La contrazione isotonica avviene quando il muscolo vince un carico costante, indipendentemente dal suo allungamento. Per valutarla, il muscolo viene collegato ad una leva in modo da consentirgli di sollevare un carico quando si contrae. Lo spostamento della leva e la forza del muscolo vengono registrati mediante trasduttori.



La forza muscolare è sempre una tensione, cioè una forza di trazione. Per valutare la condizione isometrica si fissa il muscolo imponendo un dato allungamento $\Delta l = 1-10$. Se $l > 10$ si ha una forza di resistenza passiva delle fibre muscolari, dovuta alla trazione statica. La forza totale è la somma della trazione statica e della risposta fisiologica del muscolo alla stimolazione elettrica:

$$\text{forza totale} = \text{forza passiva} + \text{forza attiva}$$

La strumentazione misura la forza totale e quella passiva; la forza attiva si ottiene per sottrazione delle altre due. Se si eseguono varie prove al variare di Δl , si nota che la tensione attiva ha un massimo in corrispondenza di $l = 10$; tale massimo ha un valore costante per tutti i mammiferi, pari circa a 200 kPa = 2 bar. L'andamento della tensione T in funzione di Δl può essere di due tipi, a seconda del tipo di muscolo: andamento monotono crescente oppure curva con massimo e minimo. La differenza è determinata dalla disposizione delle fibre muscolari: fibre pennate \rightarrow andamento monotono; fibre parallele \rightarrow curva con massimo e minimo.



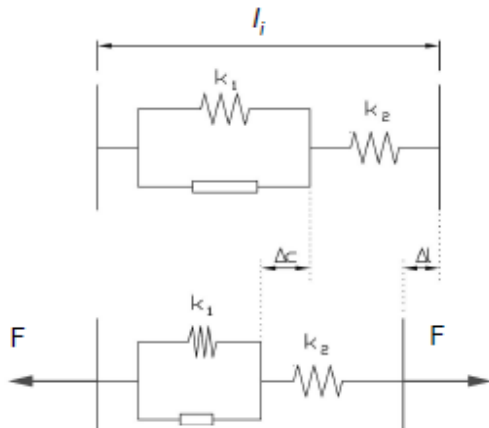
La tensione passiva è una misura della rigidità del muscolo. Misurandola per diversi valori di l , si ottiene una curva caratteristica che riporta la tensione unitaria $\sigma = F/A$ in funzione dell'allungamento relativo $\lambda = l/l_0$. Se la legge di Hooke fosse rispettata, tale curva dovrebbe essere una retta. In realtà non è così, in quanto la rigidità cresce al variare di Δl , comportamento definito *stiffening* o *hardening*. Per le prove si assume convenzionalmente una sezione A data da:

$$A = \frac{M}{\rho l}$$

con M massa del muscolo e ρ densità (circa 1050 kg/m³). L'andamento di $d\sigma/d\lambda$ è lineare ed è proporzionale a σ .

Poiché la forza esterna è nulla, il muscolo non compie lavoro.

Contrazione isotonica:



sul muscolo agisce un carico esterno F costante. In questo caso k2 si allunga della quantità $(\Delta c - \Delta l)$, quindi si può calcolare:

$$F = k_2 \cdot (\Delta c - \Delta l)$$

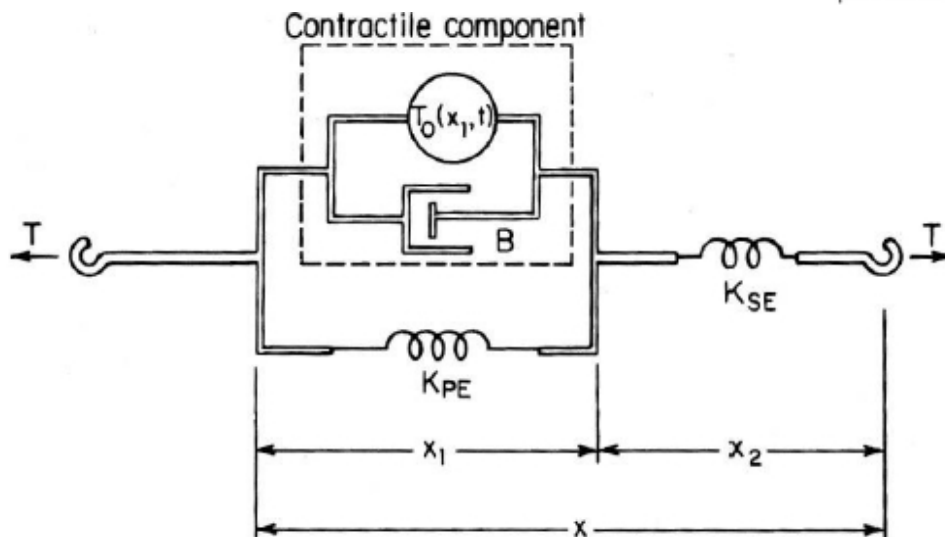
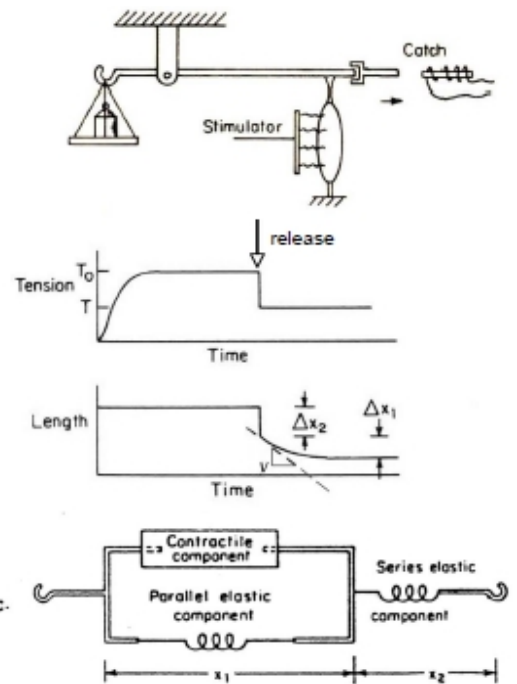
In questo caso il muscolo compie lavoro.

Se $\Delta l < 0$ il lavoro è positivo: il muscolo si accorcia e la contrazione è concentrica.

Se $\Delta l > 0$ il lavoro è negativo: il muscolo si allunga e la contrazione è eccentrica.

In realtà i muscoli non si comportano solo come molle, ma il loro comportamento meccanico dipende anche dalla velocità di deformazione. Per studiare il comportamento in condizioni dinamiche si svolge l'esperimento di *quick-release*. All'estremità di una leva si appende un peso (carico costante), all'altra si collega il muscolo, ma la si fissa con vincolo (afferraggio o catch). In questo modo il muscolo è in una condizione isometrica. Il muscolo viene stimolato in condizione isometrica, poi si rilascia il catch: il muscolo è in una condizione isotonica. In questa condizione si nota un accorciamento istantaneo Δx_2 (dovuto all'elemento in serie k2 → tendini) e un accorciamento più lento Δx_1 , che indica la presenza di elementi dissipativi (comportamento visco-elastico).

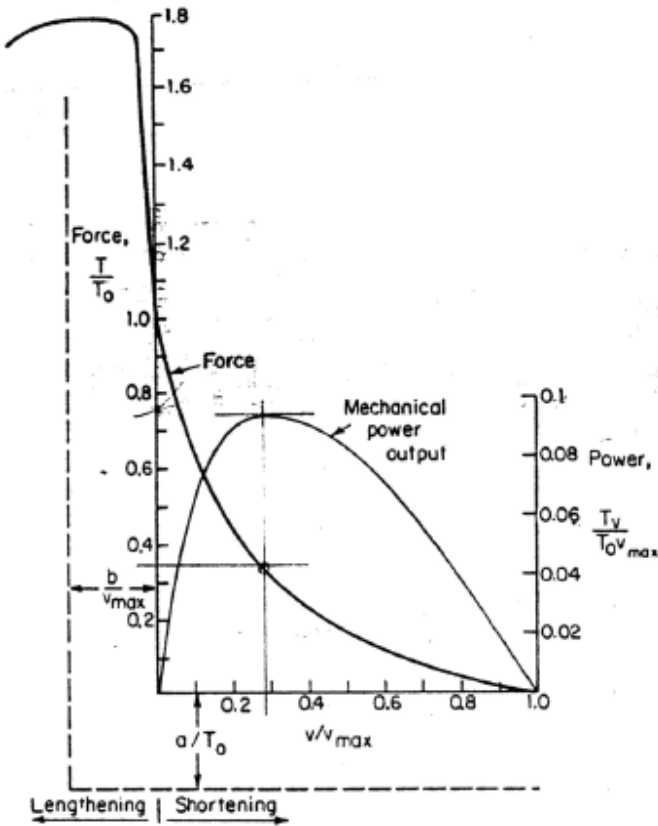
In base a questi risultati si costruisce il modello di Hill del muscolo.



Ripetendo la prova per diversi T_0 e T si individua la caratteristica elastica dell'elemento in serie (tendini), che risulta in genere non lineare ma esponenziale.

massima se:

$$\frac{1}{4} \leq \frac{v}{v_M} \cong \frac{T}{T_0} \leq \frac{1}{3}$$



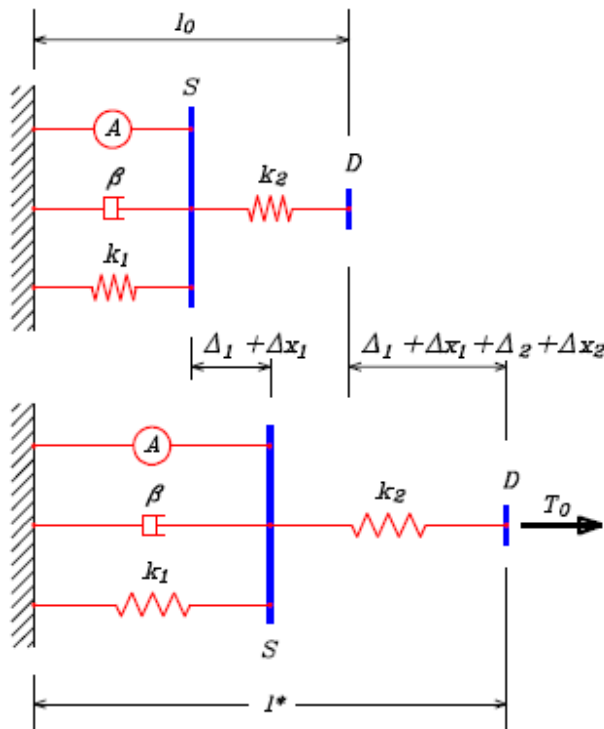
Da cui: $P_{MAX} \cong 0,1 \cdot T_0 \cdot v_M$

Il valore di k è funzione della biologia, ma anche del livello di allenamento, infatti ogni atleta ha la sua curva di potenza caratteristica.

In conclusione il modello di Hill è un modello meccanico. In condizioni statiche e per deformazioni molto lente non si deve tener conto dello smorzatore viscoso; per fenomeni dinamici, invece, sì.

MODELLI LINEARI DEL MUSCOLO SCHELETRICO

Tramite opportuni modelli si può simulare il comportamento del muscolo durante la prova di quick-release.



- A : elemento contrattile (attuatore);
- β : smorzamento viscoso delle fibre muscolari;
- k_1 : rigidità elastica delle fibre muscolari;
- k_2 : rigidità elastica dei tendini
- S : giunzione muscolo-tendinea;
- D : estremità mobile durante la prova;
- l_0 : lunghezza a riposo del muscolo;
- l^* : lunghezza del muscolo in condizione isometrica;

Ipotesi:

- k_1, k_2 e β costanti;
- forza dell'attuatore F_A costante durante la prova.

$$\bar{x}_1(\beta s + k_1) = \frac{k_1 \Delta x_1}{s} \Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{k_1 \Delta x_1}{s(\beta s + k_1)} = \frac{\Delta x_1}{s(1 + \tau s)}$$

Dove $\tau = \frac{\beta}{k_1}$ è la **costante di tempo** del sistema. Infatti dalle unità di misura: $\frac{Ns}{m} \cdot \frac{N}{m} = s$

Minore è τ , maggiore è la rapidità di risposta del sistema.

Antitrasformando si ricava la legge del moto della giunzione S:

$$x_1(t) = \Delta x_1(1 - e^{-t/\tau})$$

Se t tende a infinito, x_1 tende a Δx_1 .

Determinazione di k_2 e β .

Equilibrio delle forze sulla giunzione in condizione isometrica (prima del rilascio):

$$T_0 = k_2 \Delta x_2 + k_2 \Delta x_2 = F_A + k_1 \Delta x_1 + k_1 \Delta x_1$$

Equilibrio delle forze sulla giunzione in condizione isotonica (immediatamente dopo il rilascio):

$$T = k_2 \Delta x_2 = F_A + k_1 \Delta x_1 + k_1 \Delta x_1 - \beta \dot{x}_{10}$$

Facendo $T_0 - T$ si possono stimare k_2 e β :

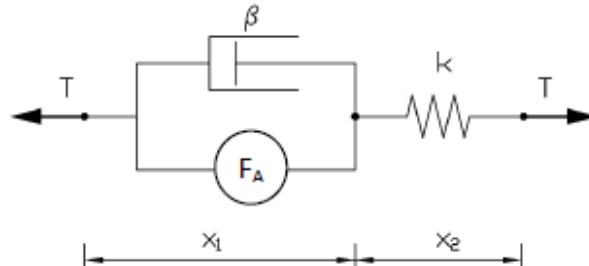
$$T_0 - T = k_2 \Delta x_2 \Rightarrow k_2 = \frac{T_0 - T}{\Delta x_2}$$

$$T_0 - T = \beta \dot{x}_{10} \Rightarrow \beta = \frac{T_0 - T}{\dot{x}_{10}}$$

Si può fare solo una stima e non un calcolo esatto a causa delle ipotesi fatte. Infatti si è considerato un modello lineare con caratteristiche costanti, mentre in realtà:

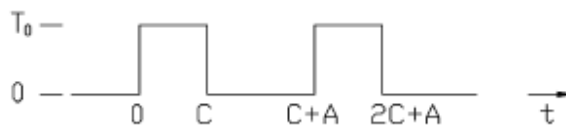
- la forza muscolare dipende dall'allungamento del muscolo: $F_A = F_A(x_1)$;
- k_1 e k_2 dipendono dall'allungamento del muscolo;
- β dipende dalla velocità e dalla temperatura.

Fenomeno del tetano. Per studiare il tetano si usa un modello diverso da quello di Hill, in cui si usa una sola molla k per rappresentare l'elasticità complessiva di tendini e fibre muscolari.



Il muscolo è in condizione isometrica: $x_1 + x_2 = \text{costante}$.

Si stimola con una forza F_A con andamento:

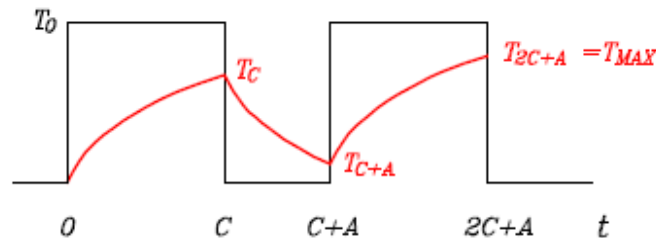


Si vogliono:

- ricavare l'equazione differenziale che descrive il comportamento del sistema,
- ricavare la legge temporale di variazione della tensione T sviluppata dal muscolo nell'intervallo tra 0 e C ,
- tracciare l'andamento della forza T sviluppata in funzione del tempo nell'intervallo tra 0 e $2C+A$,

3° intervallo: $C+A \leq t \leq 2C+A$ (seconda scossa)

$$\left\{ \begin{array}{l} T_i = T_{C+A} \\ T_r = T_0 \\ t_i = C+A \\ \Delta T = T_0 - T_{C+A} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} T(t) = T_{C+A} + (T_0 - T_{C+A}) \left(1 - e^{-\frac{t-C-A}{\tau}} \right) = T_0 \left(1 - e^{-\frac{t-C-A}{\tau}} \right) + T_{C+A} e^{-\frac{t-C-A}{\tau}} \\ T_{2C+A} = T_0 \left(1 - e^{-\frac{C}{\tau}} \right) \left(1 + e^{-\frac{C+A}{\tau}} \right) = T_{MAX} \end{array} \right.$$



Il rapporto incrementale della forza sviluppata si calcola dividendo la forza massima raggiunta nella seconda scossa per quella raggiunta nella prima scossa.

$$\chi = \frac{T_{MAX}}{T_C} = \left(1 + e^{-\frac{C+A}{\tau}} \right)$$

MECCANICA RESPIRATORIA

La respirazione deve fornire ossigeno ai tessuti ed eliminare dall'organismo l'anidride carbonica che si forma nei tessuti in seguito al metabolismo. È controllata da stimoli nervosi e chimici mediante i quali la frequenza della ventilazione viene adeguata alle necessità metaboliche dell'organismo.

Lo scambio dei gas avviene a livello dell'unità alveolo – capillare. Gli alveoli sono circa 300 milioni e formano una superficie di scambio totale di circa 140 m².

L'aria entra nel polmone attraverso le vie aeree di conduzione, cioè la trachea e i bronchi, dotati di anelli cartilaginei per evitare il collasso. L'aria si muove con movimento di massa fino ai bronchioli terminali e poi per diffusione. Nel *modello morfometrico di Weibel* sono individuate 24 generazioni. Le prime 17 (a partire dalla trachea, generazione 0) formano la **zona di conduzione**, mentre le ultime 7 formano la **zona di transizione e respiratoria**, sede degli scambi gassosi con la circolazione polmonare.

Le prime cinque generazioni della zona di conduzione (trachea, bronchi principali, lobari e segmentali) sono dotate di una notevole componente cartilaginea. In particolare nella trachea e nei bronchi principali la cartilagine è organizzata ad anelli a forma di U, mentre nei bronchi lobari si hanno placche cartilaginee. A livello dei piccoli bronchi (5-11) il contenuto cartilagineo diminuisce fino a scomparire totalmente nei bronchioli e nei bronchioli terminali (12-16). I bronchioli e i bronchioli terminali sono ancorati tramite un tessuto elastico al parenchima polmonare e l'elasticità del tessuto polmonare aiuta a mantenere aperte queste vie di conduzione. Oltre a garantire la conduzione e la distribuzione dell'aria a tutte le regioni del polmone, le prime 17 generazioni assolvono alla funzione di riscaldare e umidificare l'aria inspirata. Al di là dei bronchioli terminali c'è una graduale transizione tra conduzione e scambio. Le ultime 7 generazioni sono costituite dai bronchioli respiratori (17-19), dotti alveolari (20-22) e sacchi alveolari (23).

Il movimento di aria, dall'esterno all'interno del polmone e viceversa, è assicurato da un gradiente pressorio tra esterno (P atmosferica) ed interno del polmone (P alveolare).

Se la P alveolare diminuisce, rispetto alla P atmosferica, si parla di ventilazione a P negativa (condizione naturale).

Se la P atmosferica (pressione alla bocca) aumenta, rispetto alla P alveolare, si parla di ventilazione a P positiva (respiratori artificiali).

L'inspirazione è un processo attivo, conseguenza dell'espansione dei polmoni, che segue l'aumento di volume della gabbia toracica, ottenuto per contrazione dei muscoli inspiratori, che compiono un lavoro per vincere le forze di retrazione elastica dei polmoni.

L'espirazione può essere un processo puramente passivo, dovuto al rilasciamento della muscolatura inspiratoria, che consente alla gabbia toracica e quindi ai polmoni di tornare al volume di partenza; può però a sua volta costituire un processo attivo (espirazione forzata) se avviene con il contributo dei muscoli espiratori.

L'espirazione è seguita da una breve pausa (condizione di riposo) che precede il successivo atto inspiratorio. Durante questa pausa tutti i muscoli respiratori sono rilasciati e le forze che agiscono sui polmoni e sulla parete toracica sono in equilibrio tra loro. Non avviene movimento d'aria da e per gli alveoli.

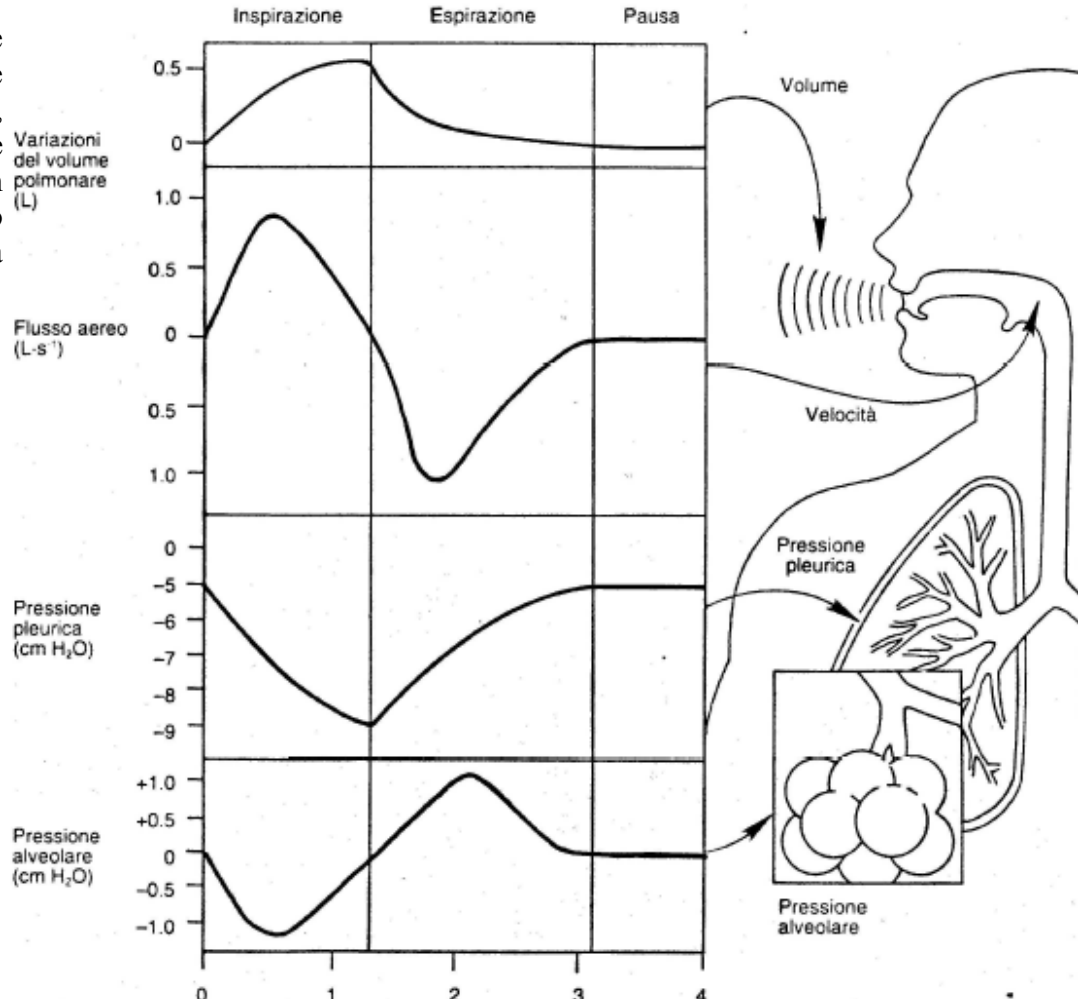
I muscoli inspiratori aumentano il volume della gabbia toracica:

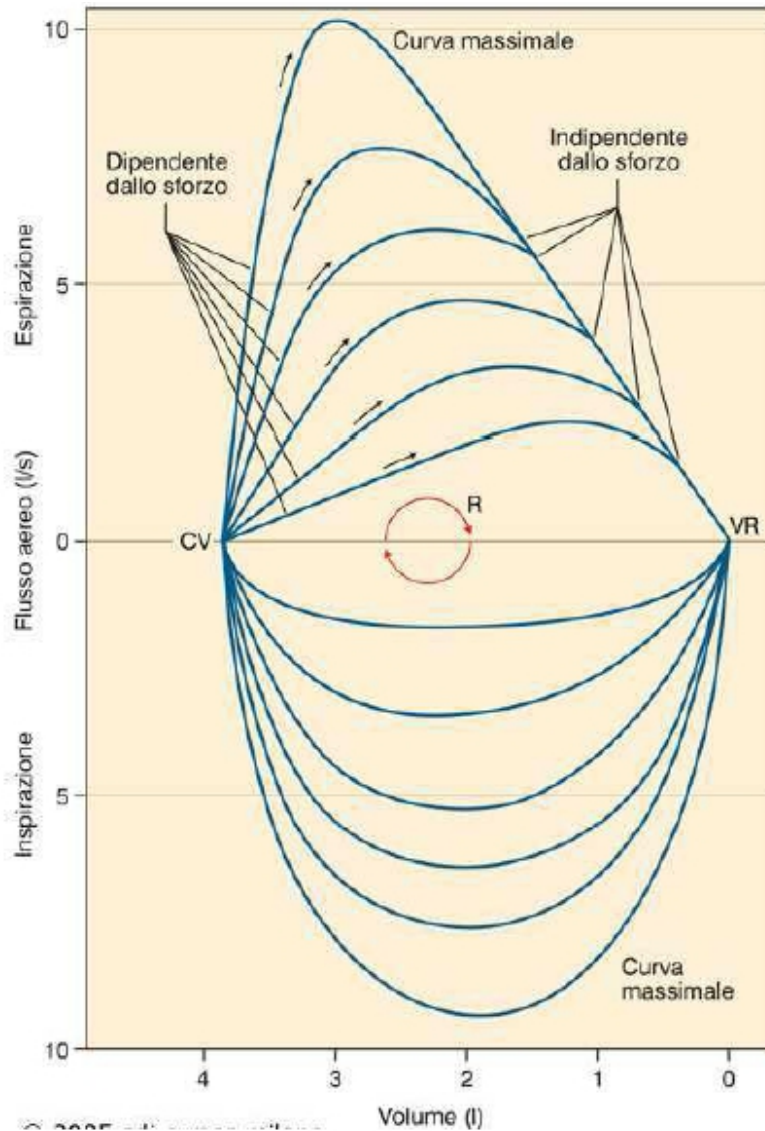
- diaframma;
- intercostali esterni;
- sternocleidomastoidei;
- scaleni.

I muscoli espiratori riducono il volume della gabbia toracica e sono attivi nell'espirazione forzata (esercizio fisico, fonazione, canto, fase espiratoria di starnuto e tosse):

- intercostali interni;
- addominali;
- accessori (grande dorsale, dentato posteriore – inferiore, quadrato dei lombi).

Nei grafici sono riportate le variazioni di volume polmonare, flusso aereo, pressione pleurica e alveolare nel corso di un singolo ciclo respiratorio di un soggetto normale a riposo.





La curva di rilasciamento toraco-polmonare mostra la relazione esistente tra le variazioni di pressione e le variazioni di volume nel sistema toraco-polmonare. Si valuta la forza necessaria (espressa dalla pressione) per mantenere il sistema ad un certo volume, vincendo le forze di retrazione elastica del polmone e della gabbia toracica. La relazione P-V del sistema in condizioni passive definisce le sue proprietà elastiche.

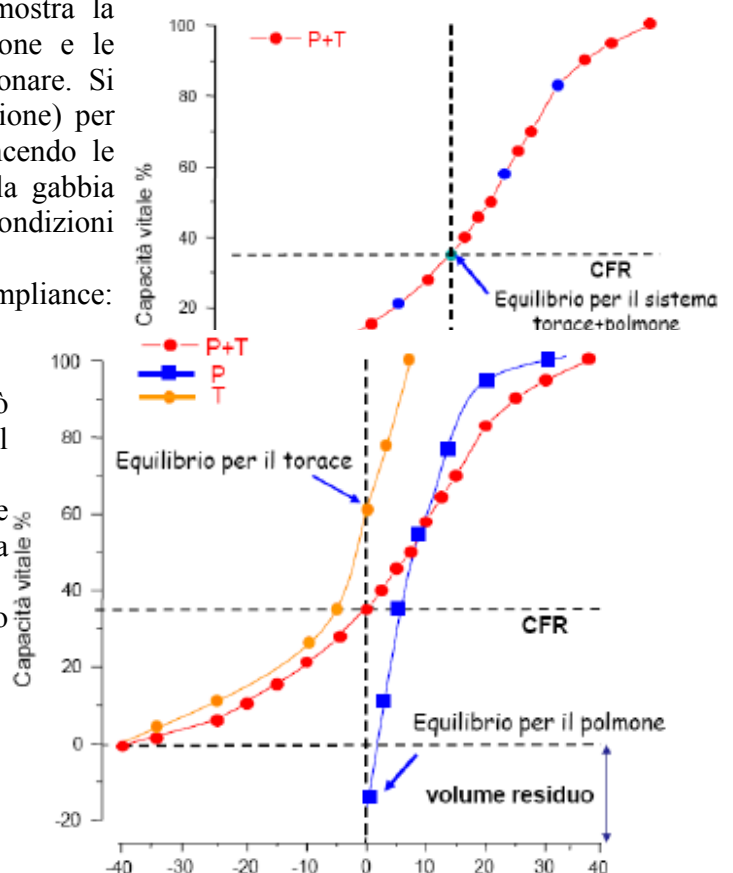
La pendenza della curva di rilasciamento è la compliance:

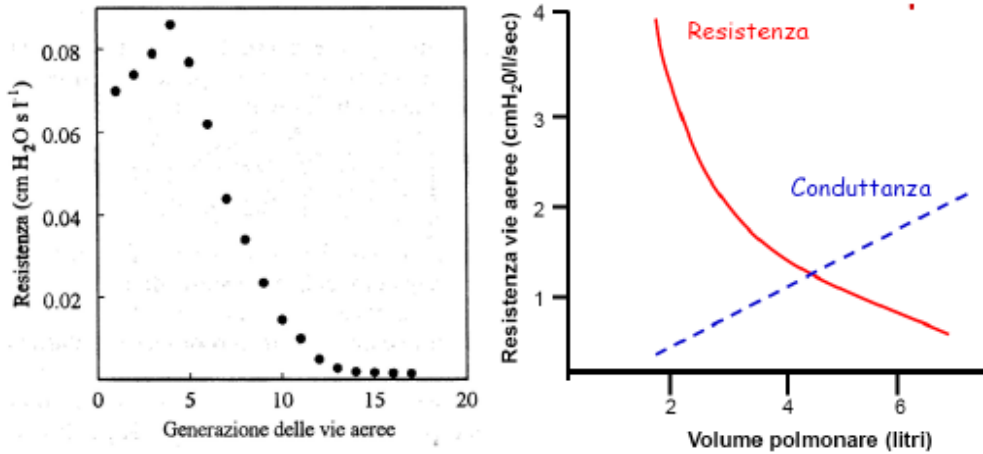
$$C = \frac{\Delta V}{\Delta p}$$

La curva di rilasciamento toraco-polmonare può essere scomposta nella curva di rilasciamento del solo polmone e in quella del solo torace.

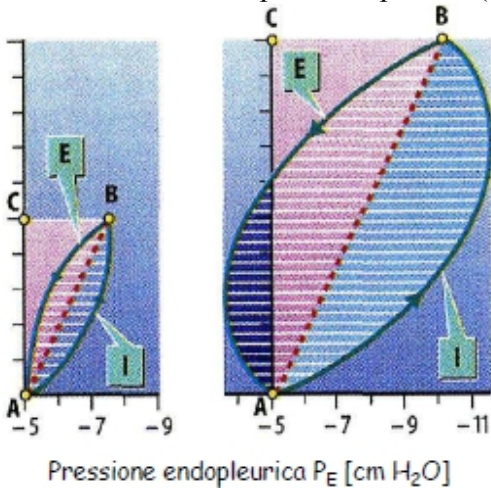
La curva di rilasciamento toraco-polmonare (pallino rosso) è riportata in funzione della pressione trasmurale totale $P_1 - P_{amb}$.

La curva di rilasciamento del torace (pallino





Alta resistenza → poca compliance (e viceversa).



Il lavoro respiratorio corrisponde all'area sottesa alle curve nel diagramma P-V.

La linea retta AB considera il sistema polmonare come una molla ideale e presuppone che il funzionamento del sistema prescindano da effetti resistivi. L'area più chiara (ABCA) è il lavoro inspiratorio contro le resistenze elastiche.

In realtà bisogna vincere la resistenza aerodinamica e la resistenza viscosa: per raggiungere lo stesso livello di volume bisogna esercitare una depressione maggiore, muovendosi lungo la linea curva AB. L'area sottesa alla curva AB in direzione dell'asse del volume è il lavoro di inspirazione ed è maggiore di quello puramente elastico.

L'area tratteggiata tra le due curve è il lavoro in- ed espiratorio contro le resistenze delle vie aeree. In condizioni

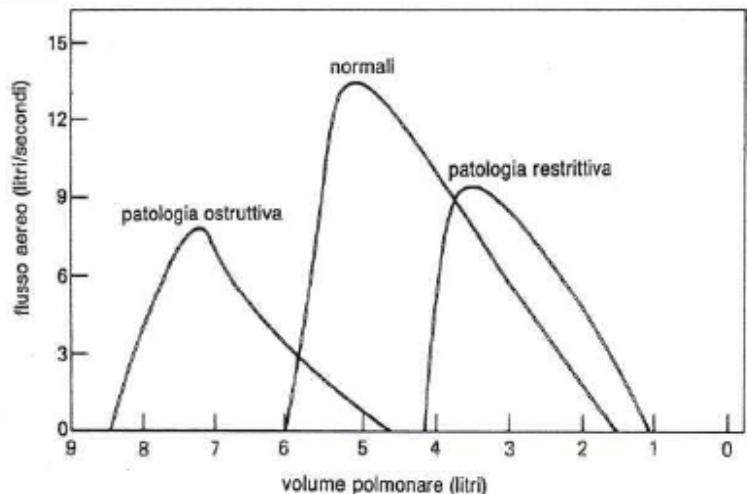
normali il lavoro espiratorio è minore dell'energia elastica accumulata durante l'inspirazione, pertanto l'espirazione è passiva.

L'area scura tratteggiata è il lavoro compiuto dai muscoli espiratori durante una respirazione a frequenza maggiore.

Le patologie ostruttive e restrittive modificano le curve flusso-volume in modo caratteristico.

Nelle patologie restrittive (per es fibrosi) VR e CPT sono ridotti per la maggior difficoltà a espandere il polmone. Il flusso espiratorio massimo è minore perché sono minori i volumi raggiunti.

Nelle patologie ostruttive (asma, enfisema) aumentano CPT e VR perché il soggetto ha difficoltà ad espirare. Il flusso massimo è ridotto per la parziale ostruzione della maggior parte delle vie aeree.

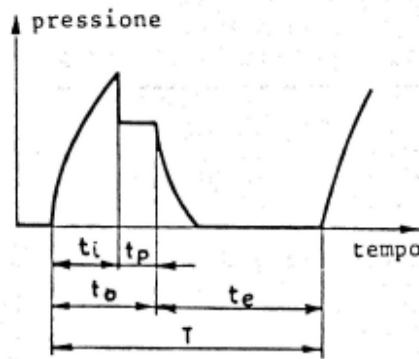
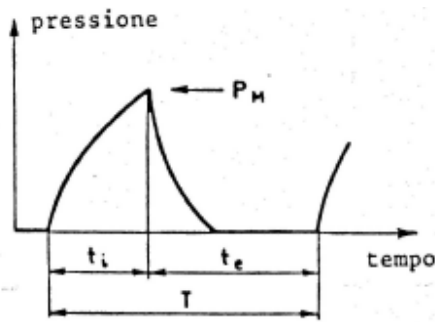
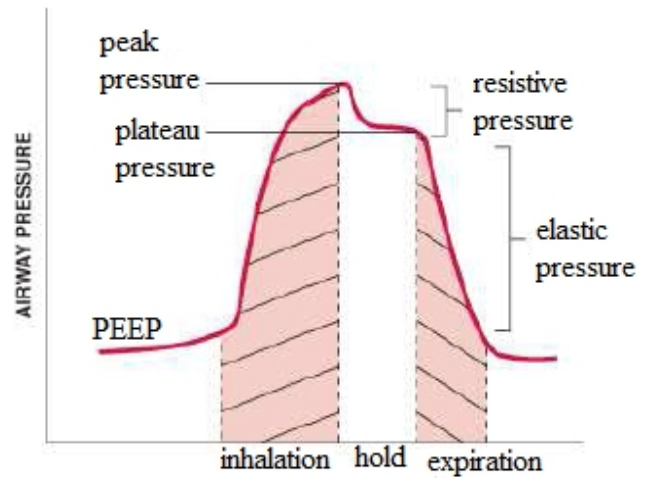


I *modelli lineari parametrici* sono modelli costituiti dai parametri del sistema respiratorio

La **ventilazione meccanica** viene adottata quando il soggetto non è in grado di respirare autonomamente. Può essere volumetrica (cioè si controlla il volume) o pressometrica (cioè si controlla la pressione); il controllo avviene a livello della bocca. Inoltre la ventilazione può essere positiva (la pressione delle vie aeree è maggiore di quella dell'ambiente: si forza l'aria nei polmoni) o negativa (si determina una depressione all'esterno della gabbia toracica per causarne l'espansione).

Ventilazione positiva: si forza l'aria nei polmoni durante l'inspirazione, mentre l'espirazione è passiva. Il ciclo di ventilazione può prevedere una pausa al termine dell'inspirazione (hold) durante la quale la pressione scende dal valore di picco al valore di plateau. La pressione endotoracica al termine dell'espirazione (PEEP) è superiore a quella dell'ambiente.

Parametri del ciclo di ventilazione:



t_i : durata dell'inspirazione (s)

t_p : durata della pausa inspiratoria (s)

t_e : durata dell'espiazione (s)

T : Periodo del ciclo = $t_i + t_p + t_e$ (s)

f : frequenza = $1/T$

V_T : volume corrente

V_M : flusso medio (volume minuto) = $V_T f$

\dot{V} : flusso istantaneo

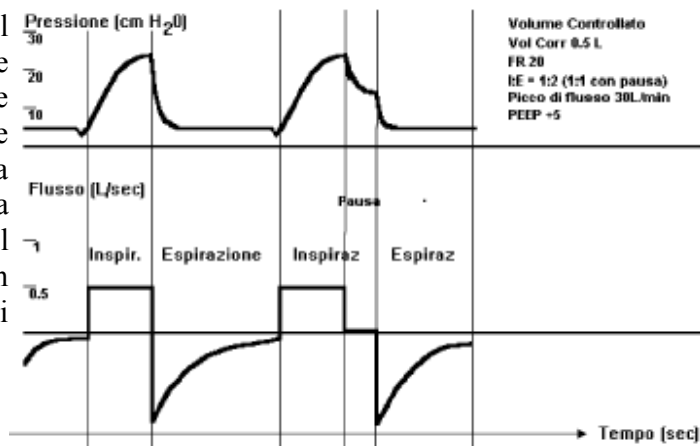
P_M : pressione massima nel ciclo

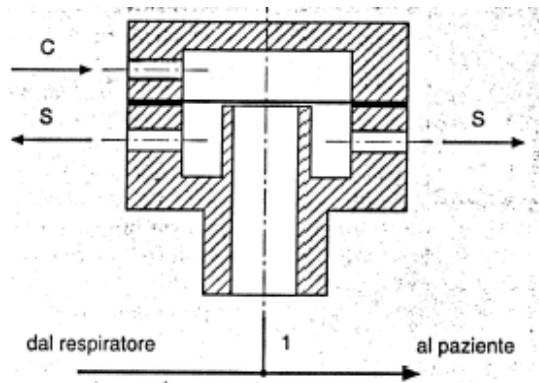
PEEP : positive end expiratory pressure

I/E : rapporto inspirazione/espiazione = $(t_i + t_p)/t_e$

Tra i dispositivi per ventilazione positiva vi sono ventilatori volumetrici, ventilatori pressometrici e ventilatori ad alta frequenza (HFOV).

Nei ventilatori volumetrici generalmente il flusso è mantenuto costante durante l'inspirazione. Si impostano il volume corrente, la frequenza, il rapporto I/E e l'eventuale pausa inspiratoria. Si ha una ventilazione meccanica completa, cioè la macchina svolge completamente tutto il lavoro respiratorio. Il paziente non è in grado di modificare i parametri impostati dall'operatore.





Schema di valvola di espirazione comandata

Ventilazione a pressione negativa: si usa per particolari patologie. Sfrutta un macchinario detto polmone d'acciaio, che consiste in un cilindro stagno all'interno del quale si crea una pressione negativa e in cui il corpo viene inserito completamente fino al collo. Una pompa da vuoto crea una depressione nella camera, che fa espandere il torace del paziente causando l'inspirazione. L'espirazione avviene per il ritorno elastico del torace quando la camera viene posta alla pressione atmosferica. C'è lo svantaggio che la pressione negativa agisce anche sull'addome, riducendo il ritorno venoso al cuore e quindi la gittata cardiaca. Per questo al giorno d'oggi si usano corazze che interessano solo il torace.

ORTESI

Un'ortesi è uno strumento ortopedico che è applicato esternamente al corpo (quindi non sostituisce un distretto anatomico, come invece fanno le protesi). Serve a immobilizzare parzialmente o totalmente un segmento corporeo o un'articolazione, a limitare il campo di movimento in una o più direzioni, a vicariare un deficit funzionale, a ridurre parzialmente o totalmente il carico che grava su un arto patologico. L'ortesi può essere usata sia per scopi preventivi che per ridurre il dolore. L'ortesi deve essere altamente personalizzata.

I materiali usati sono diversi: acciai, leghe leggere di alluminio e titanio per la parte strutturale (telaio di sostegno), materiali termoplastici o termoformanti, fibre di carbonio, gomma e pellame (nelle ortesi più vecchie).

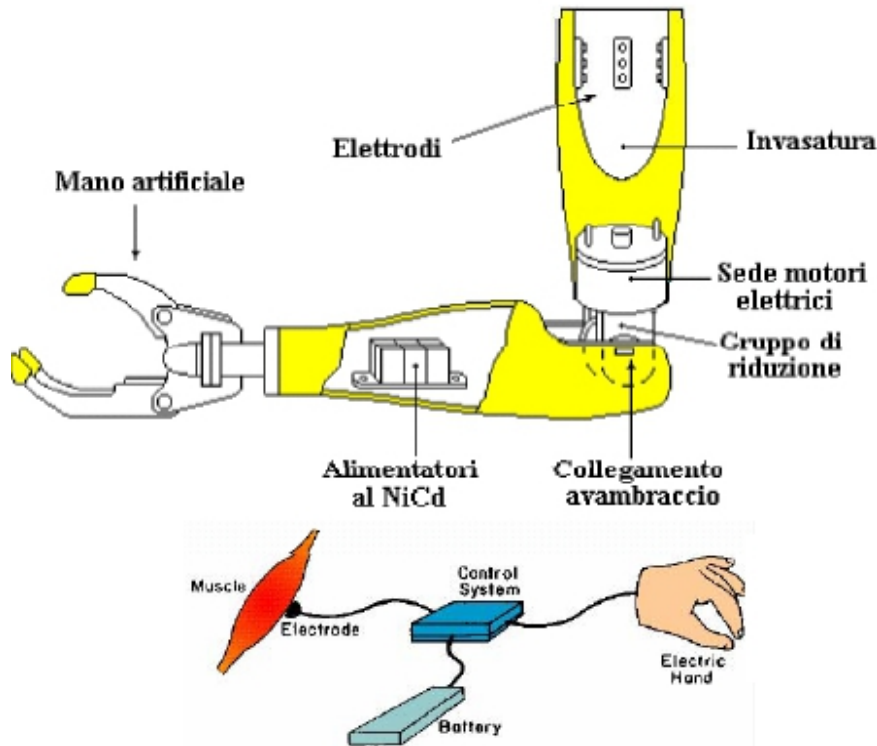
A seconda dell'uso si dividono in:

- ortesi dell'arto inferiore;
- ortesi spinali;
- ortesi di ausilio per la mobilità;
- ortesi dell'arto superiore.

Le *ortesi dell'arto inferiore* si dividono in:

- *suolette (insoles)*: possono essere fatte su misura o no. Possono essere fatte in diversi tipi di materiali, a seconda della patologia e dello scopo della suola;
- *functional foot orthosis*: è una suola che sale anche lateralmente sul piede. Contiene un movimento non fisiologico del piede e, in modo indiretto, controlla anche la posizione dell'intero arto inferiore. Possono essere costruiti facendo un calco del piede oppure con un materiale termoplastico (si fa un calco positivo);
- *ankle foot orthosis (AFO)*: interessa sia piede che caviglia. L'articolazione a livello della caviglia viene bloccata, anche se non completamente grazie all'elasticità del materiale. Comunque vi sono modelli diversi con diversi gradi di flessibilità alla caviglia. Può essere prescritta per il cammino giornaliero o da indossare solo di notte. Può essere infilata nella scarpa. Il blocco dell'arto rispetto all'ortesi viene fatto con il velcro. Viene prescritta a bambini con paralisi cerebrale o a soggetti che hanno subito un ictus. Per certi tipi di fratture

Protesi di arto superiore attive:



Per quanto riguarda l'arto inferiore, esistono numerosi tipi di protesi.

Per i piedi, il tipo più semplice di protesi non articolata è il SACH (solid ankle-cushion heel). La chiglia è rigida e l'azione della caviglia è fornita dal tacco di gomma morbida, che si comprime sotto al peso durante la prima parte del cammino. Il SAFE (solid ankle flexible endoskeletal) ha la stessa azione di SACH, più l'abilità della suola di conformarsi a superfici leggermente irregolari, rendendo più facile all'amputato il camminare su terreni non lisci. Eistono numerosissimi modelli di piedi artificiali: nel complesso si possono distinguere in articolati o non articolati. I primi richiedono una maggiore manutenzione e sono più pesanti. I piedi articolati possono avere una o più articolazioni. Il single axis foot ha una sola articolazione (la caviglia), mentre il multi axis foot permette un certo grado di movimento su tutti i 3 assi della caviglia ed è raccomandato per chi deve camminare su terreni irregolari. Recentemente hanno avuto una grande diffusione i piedi dinamici, che assorbono energia nella fase di appoggio e la rilasciano al distacco del piede, fornendo una spinta.

Si possono inserire dei componenti che assorbano gli urti alla caviglia.

Per quanto riguarda la gamba, il suo scopo principale è quello di trasferire i carichi verticali causati dal peso al piede e al terreno. Ne esistono di due tipi: a esoscheletro, in cui i carichi sono trasmessi tramite le pareti di uno stinco vuoto; a endoscheletro, in cui i carichi sono trasmessi da una struttura centrale, generalmente tubolare, mentre la forma della gamba è fornita da una copertura di gomma. Con quest'ultimo tipo di protesi si possono usare ginocchi più complessi.

Le protesi shank-ankle-foot incorporano piede e gamba ed eliminano la necessità di una connessione meccanica tra le due.

Il ginocchio può essere a un asse di rotazione oppure policentrico. Non deve cedere in fase d'appoggio (quindi c'è la necessità di inserire freni) e non deve "partire" durante il pendolamento. Il modo più semplice per ottenere questo risultato è mettere una frizione meccanica sulla cerniera che collega l'invasatura alla gamba. La cerniera deve essere collocata dietro l'asse di azione del peso corporeo, in modo da non piegarsi quando l'utente è fermo in piedi. La frizione meccanica impedisce all'arto di oscillare in avanti troppo velocemente durante il

