



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1424A -

ANNO: 2015

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Cane

MATERIA: Cane - L' Essenziale di Idraulica + Eserc. Prof.Ridolfi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# CORSO DI Idraulica / IDRAULICA

Prof. Ridolfi  
 PROFESSORE: L. RIDOLFI

LIBRO: IDRAULICA Citrini  
 e Neseola

## MACRO ARGOMENTI:

- STATICA
- CINEMATICA
- DINAMICA di FLUIDI NEWTONIANI e di quelli IDEALI
- CORRENTI IN PRESSIONE
- CORRENTI A SUPERFICIE LIBERA (i fiumi)
- MOTI A POTENZIALE
- MOTI A FILTRAZIONE

Cominceremo con le basi; definiamo il concetto di FLUIDI NEWTONIANI FREDDI fondamentalmente quelli che ci servono e anche i più semplici. Essi banalmente sono l'ARIA e l'ACQUA. Quando si svolgono problemi riguardanti questi due fluidi, si tiene conto della temperatura, infatti essi hanno comportamenti molto diversi al variare appunto di  $T$ . Per i nostri interessi noi non terremo conto della TEMPERATURA per non complicarci troppo i calcoli.

Definisco FLUIDO un corpo che:

- 1) OPPONE POCHESSIMA RESISTENZA ALLA DEFORMAZIONE (a parità di volume)
- 2) POSSIEDE LA CARATTERISTICA CHE, PIÙ LENTAMENTE ATTUO LA DEFORMAZIONE E TANTO PIÙ È BASSA LA RESISTENZA.

Quindi la FORZA che devo applicare è legata alla velocità di deformazione (DEFINIZIONE VALIDA SOLO PER I FLUIDI)

Un altro concetto di base è che un LIQUIDO è ENORMEMENTE DEFORMABILE MA MOLTO DIFFICILE CAMBIARGLI IL VOLUME

I nostri fluidi che andremo a considerare variano tra una temperatura di  $0^{\circ}\text{C}$  e una di  $40^{\circ}\text{C}$ ; è noto che tra questo  $\Delta T$ , la densità  $\rho$  varia dello 0,3%. Qui capiamo subito perché per i nostri scopi didattici, non teniamo conto della temperatura.

Semplificando ulteriormente la faccenda diciamo che ci occuperemo di fluidi in cui la dipendenza di  $\rho$  dallo stato di tensione la si può trascurare.

Otteniamo dunque:

$$\rho = \text{cost}$$

Conseguentemente: **LIQUIDI INCOMPRESSIBILI.**

Suffociamo di prendere una porzione di liquido  $V$  (Volume) e applicargli una pressione  $\Delta p$ .

Posso dire che  $\Delta V \propto \Delta p V$ . Infatti

più esercito pressione e più  $\Delta V$  aumenta, ed è anche vero che è proporzionale allo stesso Volume perché più ne considero

e più  $\Delta V$ , modificando  $\Delta p$ , aumenta.

Per passare dalla proporzionalità all'uguaglianza, devo introdurre un valore che chiamerò MODULO DI COMPRESSIBILITÀ A COMPRESSIONE CUBICA ( $\epsilon$ ) e dirò che:

$$\Delta V = - \frac{1}{\epsilon} \Delta p V$$

Banalmente possiamo dire che:

$$\frac{\Delta V}{V} = - \frac{\Delta p}{\epsilon}$$

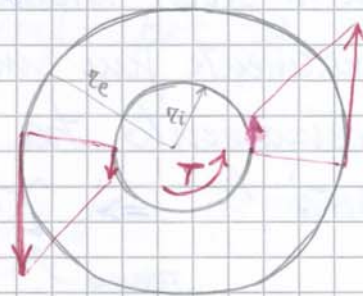
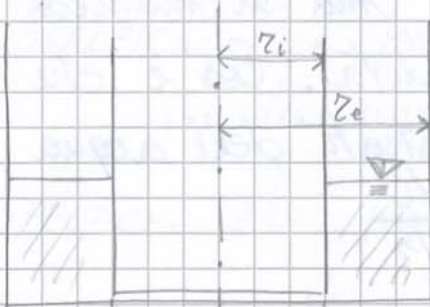
Una sostanza che oppone molta resistenza a compressione ha  $\epsilon$  molto grande e  $\Delta V$  molto piccolo.

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Sapendo che  $c_{ARIA} = 300 \frac{m}{s}$  e che  $c_{H_2O} = 1400 \frac{m}{s}$  che corrispondono ai due mezzi in cui normalmente formo i cileoli, se le distanze che consideriamo sono SENSIBILMENTE PIU' PICCOLE rispetto alla VELOCITA' di PROPAGAZIONE DELL'ONDA allora possiamo dire che la trasmissione e' pressoché istantanea e  $\rho$  lo considero COSTANTE

### LA VISCOSITA'

Consideriamo l'esperimento di due cilindri coassiali, tra i quali e' inserita una certa quantita' di fluido.



Metto in movimento il cilindro piu' esterno. Mi accorgo che dopo un po' di tempo si mette in movimento anche quello interno! Posso dunque dire che:

$$T \propto \begin{matrix} \text{Liquido, Sup. di contatto } (\Omega), \\ \text{Differen. di velocita' tangenziale } \Delta U, \end{matrix} \frac{1}{\Delta r}$$

E' PROPORZ.

Sapendo che:

$$\Delta U = \omega_e r_e - \omega_i r_i \quad e \quad \Delta r = r_e - r_i$$

Giungo alla conclusione che:

$$T = \underbrace{\mu}_{\text{VISCOSITA'}} \cdot \underbrace{\Omega}_{\text{SUP. DI CONTATTO}} \cdot \underbrace{\frac{\Delta U}{\Delta r}}_{\text{VELOCITA' DI TRASCINAMENTO}}$$

Fl. IDEALI: Posso fargli ciò che voglio ma non offende mai una resistenza  $\Rightarrow \mu \approx 0$

Fl. BINGHAM: Anche se non li deformato hanno già una tensione di base (ecco perché quando il dentifricio, non cade!)

Fl. PSEUDOPLASTICI: Man mano che aumento la velocità di deformazione diminuisce la resistenza (Vernici)

Fl. DILATANTI: Man mano che aumento la velocità di deformazione aumenta la resistenza  $\Rightarrow \mu$  aumenta

Fl. TIXOTROPICI: Più passa il tempo più la viscosità diminuisce

Fl. REOPECTICI: Più passa il tempo più la viscosità aumenta

Fl. ELASTO-VISCOSI:  $\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\mu} + \frac{\dot{\tau}}{G}$  (Shampoo)

UN'ALTRA VISCOSITA' ?!?

Ebbene bisogna sapere che abbiamo due tipologie di VISCOSITA':

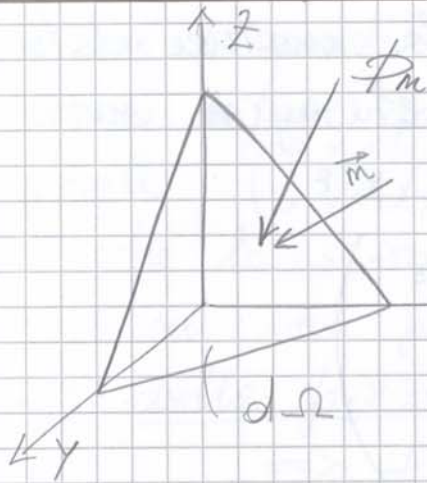
$\mu$  = VISCOSITA' DINAMICA ;  $\nu$  = VISCOSITA' CINEMATICA =  $\frac{\mu}{\rho}$   
(LA PIÙ IMPORTANTE)

Vediamo alcuni esempi:

$\nu$   $\begin{cases} \rightarrow \text{ACQUA} = 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \\ \rightarrow \text{ARIA} = 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \end{cases}$   $\nearrow$  ARIA > ACQUA

TIPOLOGIE DI FORZE

Le forze si distinguono in: DI MASSA o DI SUPERFICIE



Impongo uno sforzo  $\phi_m$  arbitrario, conseguentemente ottengo la  $\vec{m}$  inoltre  $\Omega$  posso vederla come:

$$\begin{aligned} d\Omega_x &= \text{proiez. sul piano coordinato } x \\ d\Omega_y &= \text{ " " " " } y \\ d\Omega_z &= \text{ " " " " } z \end{aligned}$$

Ma quanto valgono?

$$\begin{aligned} d\Omega_x &= -(\cos \hat{m}_x) d\Omega \\ d\Omega_y &= -(\cos \hat{m}_y) d\Omega \\ d\Omega_z &= -(\cos \hat{m}_z) d\Omega \end{aligned}$$

Prima avevamo accantonato LE FORZE DI MASSA, ma è dimostrato che sono FORZE DI ORDINE SUPERIORE A QUELLE DI SUPERFICIE quindi perfettamente TRASCURABILI. Continuando il discorso posso dire che

~~$$\phi_m d\Omega - \phi_x \cos \hat{m}_x d\Omega - \phi_y \cos \hat{m}_y d\Omega - \phi_z \cos \hat{m}_z d\Omega = 0$$~~

Ottengo:

$$\phi_m = \phi_x \cos \hat{m}_x + \phi_y \cos \hat{m}_y + \phi_z \cos \hat{m}_z$$

Ma ancora

COMPONENTE LUNGO X CHE AGISCE SULLA SUPERF. CHE HA COME NORMALE L'ASSE X

$$\phi_{m_x} = \phi_{x_x} \cos \hat{m}_x + \phi_{y_x} \cos \hat{m}_y + \phi_{z_x} \cos \hat{m}_z$$

$$\phi_{m_y} = \phi_{x_y} \cos \hat{m}_x + \phi_{y_y} \cos \hat{m}_y + \phi_{z_y} \cos \hat{m}_z$$

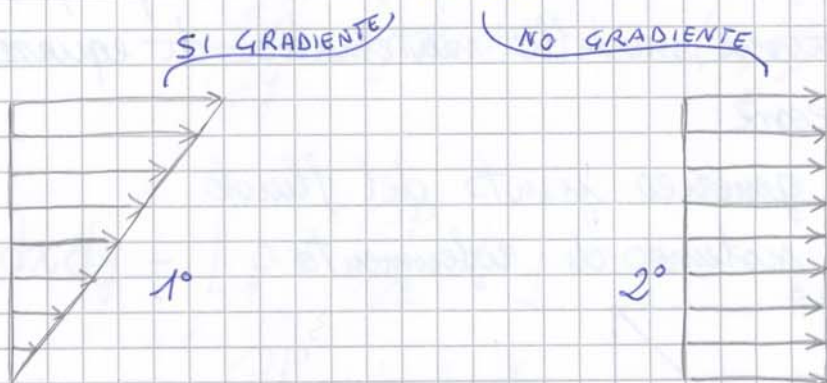
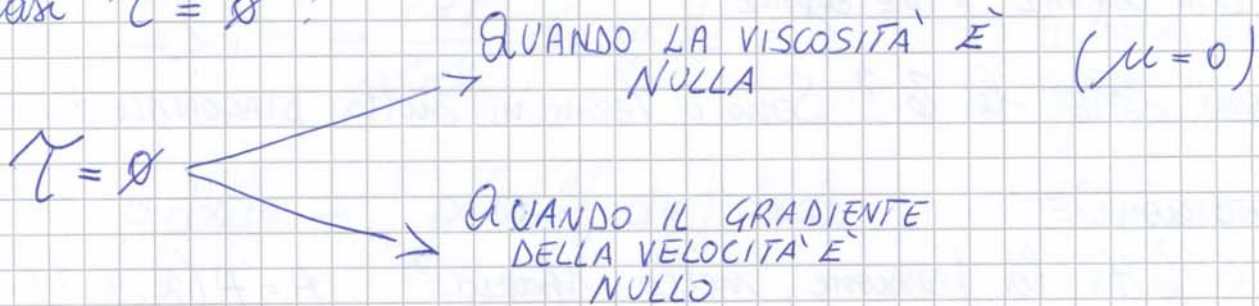
$$\phi_{m_z} = \phi_{x_z} \cos \hat{m}_x + \phi_{y_z} \cos \hat{m}_y + \phi_{z_z} \cos \hat{m}_z$$

posizione e quindi condizioni).

Eravamo infine giunti a dire che se la matrice fosse diagonale  $\begin{pmatrix} p & \sigma & \sigma \\ \sigma & p & \sigma \\ \sigma & \sigma & p \end{pmatrix}$ , qualsiasi sia il sistema di riferimento, direi che lo STATO DI TENSIONE È ISOTROPO cioè che gli sforzi sui vari punti del fluido non sono fun dipen denti dalla posiz ione

$$\Rightarrow p \Rightarrow \vec{F}_m = p \vec{m}$$

Pensiamo ora ad un fluido newtoniano; sappiamo che la sua TENSIONE TANGENZIALE vale:  $\tau = \mu \frac{dv}{dy}$ , ma in che casi  $\tau = 0$ ?



Se siamo nel caso di  $\tau = 0$  allora tutti i termini al di fuori della diagonale sono nulli, e guarda caso si ricade nel caso precedente  $p \Rightarrow \vec{F}_m = p \vec{m}$

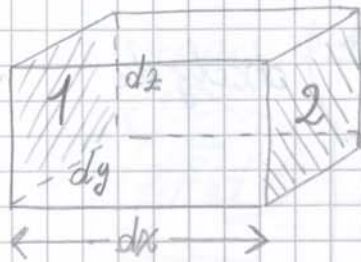
### IPOTESI DELLA STATICA

- 1) Stessa pressione qualunque sia la direzione  $p \Rightarrow \vec{F}_m = p \vec{m}$
- 2) Le considerazioni che verranno fatte valgono per tutti i fluidi che passano da  $\sigma$  sul piano reologico.



Cominceremo ad occuparci delle FORZE DI SUPERFICIE.

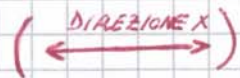
Considerando il parallelepipedo le pressioni esercitate sulla superficie 1 differenziamo da quelle sulla superficie 2 di un  $\frac{\partial P}{\partial x} dx$  dato dal salto di posizione lungo l'asse x



$$\Rightarrow F_2 = F_1 + \frac{\partial P}{\partial x} dx$$

Vediamo lungo le varie direzioni

$$\vec{i}) \cancel{p dy dz} - \left[ \cancel{p} + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right] dy dz$$



$$\Rightarrow = - \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz$$

IL "MENO" È CONSEGUENZA DEL FATTO CHE LA PRESSIONE AGISCE IN VERSI OPPOSTI

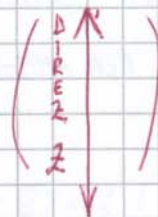
$$\vec{j}) \cancel{p dx dz} - \left[ \cancel{p} + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx dz$$

$$\Rightarrow = - \frac{\partial P}{\partial y} dy dx dz$$



$$\vec{k}) \cancel{p dx dy} - \left[ \cancel{p} + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right] dz dx$$

$$\Rightarrow = - \frac{\partial P}{\partial z} dz dx dy$$



Ho trovato dunque le componenti nelle direzioni x, y, z delle forze di superficie.

Per quanto riguarda le forze di massa, sapremmo che  $\rho dV = dm \Rightarrow F \cdot dm = F \rho dV$  la quale è scomponibile.

in: 
$$F \cdot dm = F \rho dx dy dz$$
 FORZA DI MASSA

Grazie all'analisi II, e al teorema di Stokes o del gradiente so che un integrale di volume di un gradiente è pari ad un integrale di superficie, quindi:

$$\int \underbrace{\rho \vec{F}}_{\text{FORZA DI MASSA}} dV = - \int_{\Omega} \left( \rho \cos \alpha \vec{i} + \rho \cos \beta \vec{j} + \rho \cos \gamma \vec{k} \right) d\Omega$$

SULLA SUPERFICIE

HO INSERITO IL "MENO" PERCHÉ PER CONVENZIONE LA NORMALE SI ACQUISISCE ENTRANTE

Comportando le varie componenti di  $\vec{m}$  ottengo

$$\dots = - \int_{\Omega} \rho \vec{m} d\Omega = - \vec{F}_C \quad (\text{FORZE AL CONTORNO})$$

Concludo trovando la relazione:

$$\vec{F} + \vec{F}_C = 0$$

EQUAZIONE GLOBALE DEI FLUIDI IN STATICA

Quindi semplicemente la F. peso si equilibra con le forze sul contorno

### CARICO PIEZOMETRICO

Ipotesi:

1) Siamo nel campo della gravità:  $F = -\text{grad}(gz)$  ↑ z

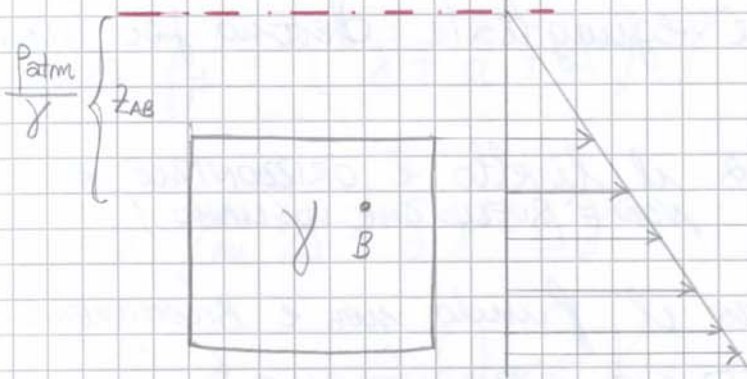
2)  $\rho = \text{cost} \Rightarrow$  incompressibile

$$\Rightarrow \text{grad}(-\gamma z) = \text{grad} p$$

$$\Rightarrow \text{grad} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) = 0 \Rightarrow \text{UN GRADIENTE} = 0 \text{ E COME DIRE : } z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost}$$

Questo valore lo chiamiamo CARICO PIEZOMETRICO (h)

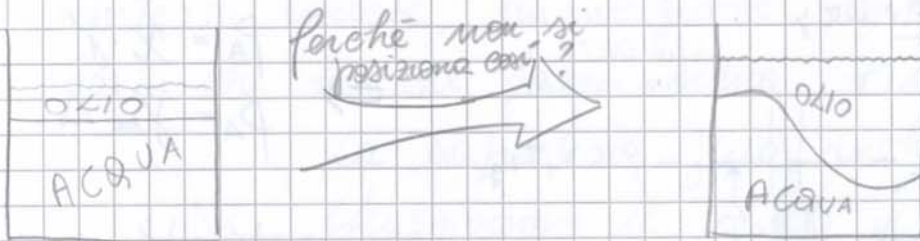
$$\Rightarrow h = z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost} \quad \text{in tutta la massa del fluido}$$



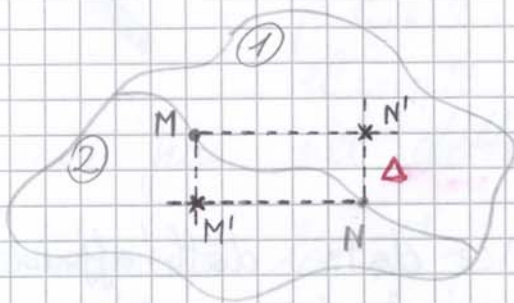
Fino ad adesso avevamo considerato a  $p = \sigma$  il p.c.i.a ora lo spostiamo e per comodità lo facciamo coincidere la  $p_{atm}$

$$\Rightarrow p_{relativa} = p_{assol} - p_{atm}$$

Vediamo una curiosità:  
Acqua + Olio



Prendiamo una porzione di fluido bicomponente:



- 1) Individuo i p.ti M e N arbitrari
- 2) Proietto M in M' e N in N'
- 3) Ricavo quindi un  $\Delta$
- 4) Per la teoria essendo alla

stessa altezza, SICURAMENTE N e M' hanno la stessa pressione, così pure M e N'  $\Rightarrow p_M = p_{N'}$  e  $p_N = p_{M'}$

5) Per definizione  $p_N$  sarebbe uguale alla  $p_{N'}$  sommato al prodotto tra l'AFFONDAMENTO ( $\Delta$ ) e il p. specifico  $\gamma$

$$\Rightarrow p_N = p_{N'} + \Delta \gamma_1$$

$$p_{M'} = p_M + \Delta \gamma_2$$

6) Per quanto detto al p.to 4 dovrei poter eguagliare  $p_N$  con  $p_{M'}$   $\Rightarrow p_{N'} + \Delta \gamma_1 = p_M + \Delta \gamma_2$

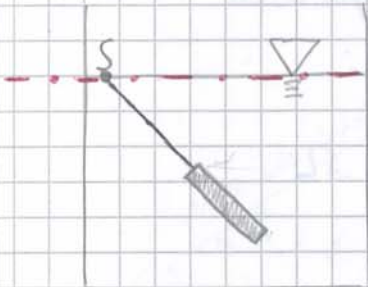
$$\Rightarrow p_B = (\delta + \alpha + \Delta) \gamma$$

$$\Rightarrow \gamma_m \Delta = \delta \gamma + \Delta \gamma$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\Delta (\gamma_m - \gamma)}{\gamma} \quad (\text{Distivello di pressione})$$

### SPINTA SU SUPERFICI PIANE

Immaginiamo di avere un recipiente in cui, tutto  $\dot{V}_{\text{assetto}}$  lentamente in quiete, immergiamo una SUPERFICIE QUALUNQUE basta che le sue facce siano PIANE.



La superficie può anche essere inclinata. Chiameremo il punto d'intersezione del piano che contiene la superficie e il p.c.i.z. LINEA RETTA DI SPONDA (dall'elemento fino al p.to S).

Vediamo più nel dettaglio quest'elemento

Intuitivamente la  $S = \text{SPINTA}$  proveniente superiormente sarà diretta perpendicolarmente al piano stesso

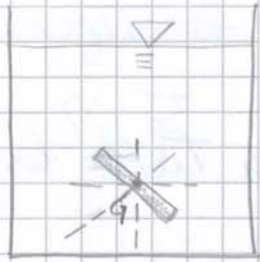
Ma alla buona fine come definiamo la Spinta?

Ricordiamo che in un generico

p.to A infinitesimo la PRESSIONE era data:  $p_A = h_A \cdot \gamma$  con  $h_A = \text{affondamento} = x_A \text{ sen } \alpha$ . La Spinta è data da pressione nel punto moltiplicata la superficie infinitesima  $\Rightarrow dS = p_A \cdot d\Omega = x_A \text{ sen } \alpha \cdot \gamma \cdot d\Omega$

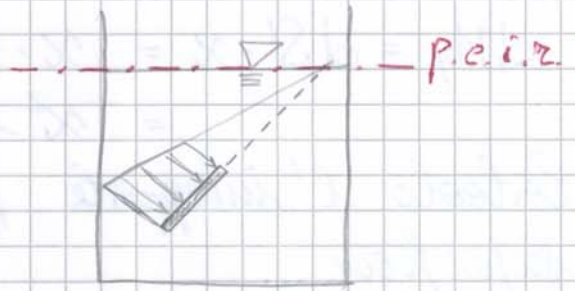


Osservazione n° 1:



La Spinta non cambia  
anche se modifichiamo  
L'INCLINAZIONE

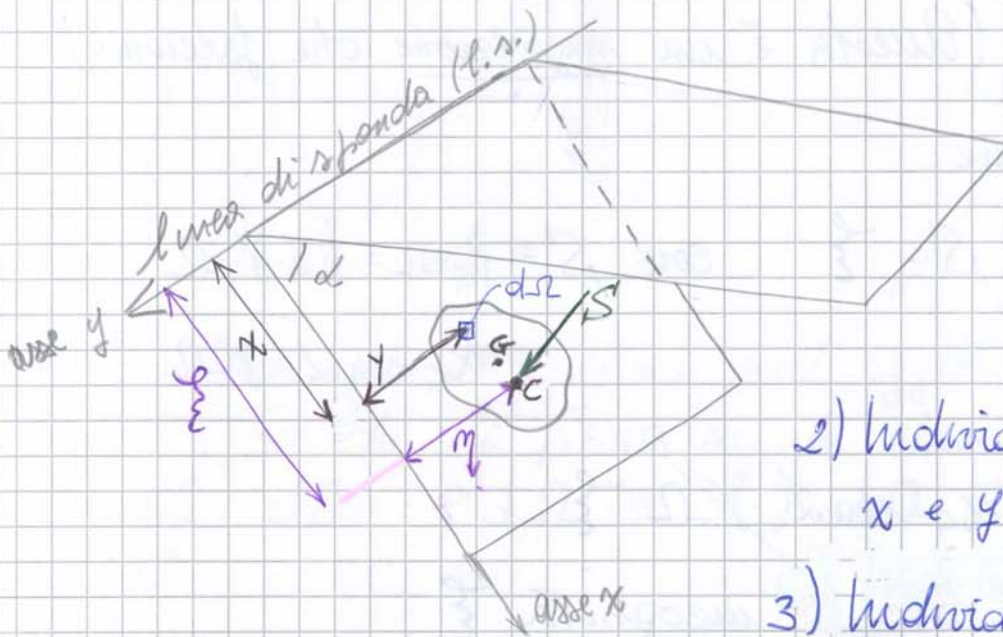
Osservazione n° 2:



La pressione è  
sempre applicata ris-  
petto al p.e.i.z.

Dove è APPLICATA LA SPINTA?

Ri-consideriamo la figura precedente



1) Considero l'elementino  $d\Omega$

2) Individuo le coordinate  $x$  e  $y$  di  $d\Omega$

3) Individuo le coordinate  $\xi$  e  $\eta$  di  $C$  ossia il centro del volume dell'oggetto ( $\neq G$ )

4) La SPINTA è applicata al centro del volume del solido  $(x_c, y_c, z_c)$  non sul baricentro della superf.

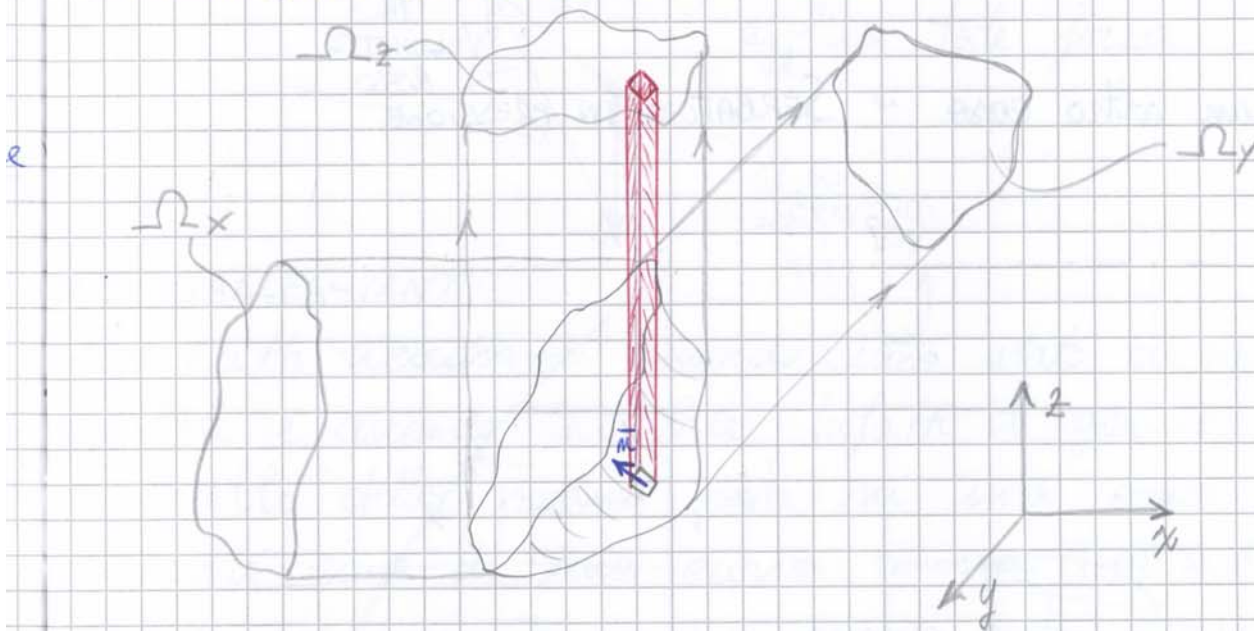
$$M_x = S \cdot \eta \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{M_x}{S}$$

Di conseguenza

$$M_y = S \cdot \xi$$

## SPINTA SU SUPERFICI CURVE

Consideriamo l'elemento



- 1) Considero un elementino sull'oggetto ( $d\Omega$ ), individuato  $\vec{n}$ . So che la SPINTA su un elementino infinitesimo vale:  $dS = p d\Omega = h \gamma d\Omega \vec{n}$  nella direzione  $\vec{n}$
- 2) Impongo un generico riferimento  $x, y, z$  di assi cartesiani  $\vec{m}$
- 3) Mi ricordo che la  $dS$  può essere definita come la somma delle 3 componenti di proiezione  $dS_x, dS_y, dS_z$  definite come:
 
$$dS_x = h \gamma (d\Omega \cos m\hat{x}) \quad dS_y = h \gamma (d\Omega \cos m\hat{y})$$

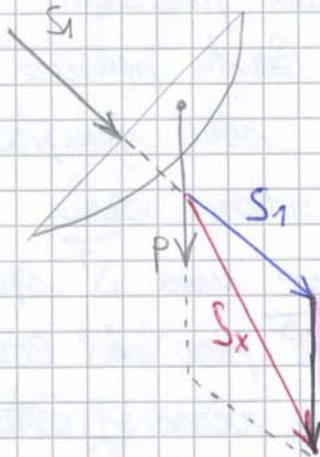
$$dS_z = h \gamma (d\Omega \cos m\hat{z})$$

$$\Rightarrow \bar{P} + \bar{S}_x + \bar{S}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_x = -(\bar{P} + S_1)$$

↑  
INCOGNITA

$$\Rightarrow -S_x = \bar{P} + S_1$$

Scemato sarebbe



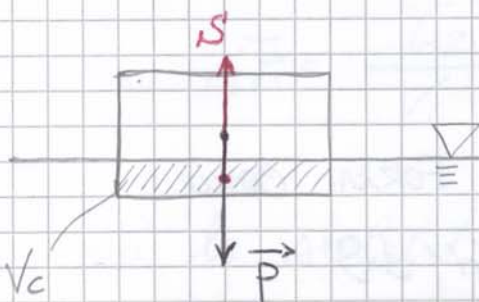
La spinta in realtà non è negativa, se lo fosse sarebbe la PARADOIA che applica tale forza.

### ► I GALLEGGIANTI

Noi tutti ricordiamo quando uno stato di equilibrio è stabile e quando instabile. Infatti il generico esempio è quello della pallina posta su una conca (eq. stabile) o sulla cima di una curva convessa (eq. instabile).

Infatti nel primo caso, per quanto forte si applica una perturbazione, la pallina ritorna nella sua posizione originaria, trovando quindi nuovamente la posizione di equilibrio. Viceversa nel 2° caso l'equilibrio risultava instabile infatti una minima perturbazione e la pallina cade cercando una posizione di equilibrio più stabile.

Ora vediamo come è possibile applicare questa teoria ai galleggianti. Innanzitutto chiameremo la porzione del corpo immerso **VOLUME DI CARENA**.

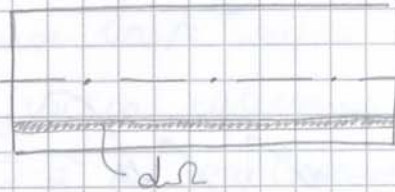
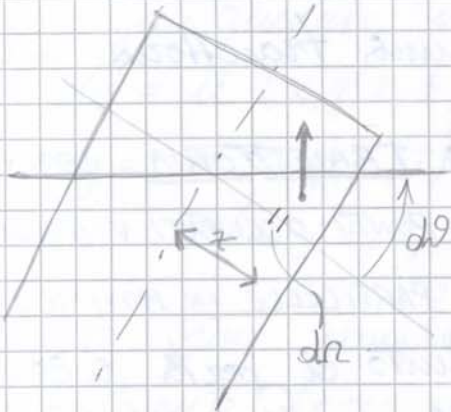


Tutti sappiamo che un corpo immerso in un liquido subisce una  $S'$  dal basso verso l'alto pari al peso del volume di liquido spostato.

Quindi otteniamo LA COPPIA come:

$$COPPIA = \int V_c \bar{GM} d\theta \quad *$$

↑  
INCOGNITA



Vista dall'alto

Quanto vale dV?  $dV = d\Omega \cdot x \cdot d\theta$

Quindi  $dF = \gamma dV = \gamma x d\theta d\Omega$

Di conseguenza  $dM = dF \cdot x = x \gamma d\theta d\Omega = x \gamma d\theta d\Omega$

↑ PESO SPECIFICO  
↑ BRACCIO  
↑ ANGOLO INFINITESIMO  
↑ SUPERFICIE INFINITESIMA

Come al solito servendomi del calcolo integrale:

$$M = \int_{\Omega} \gamma x^2 d\theta d\Omega$$

$$= \gamma d\theta \int_{\Omega} x^2 d\Omega \Rightarrow \gamma d\theta I_z \quad **$$

Ora se metto in relazione la COPPIA con il MOMENTO. Posso farlo perché per definizione sono LA STESSA COSA.

Otengo:  $\int V_c \bar{GM} d\theta = \int d\theta I_z$

Quindi ricavo l'incognita:

$$\bar{GM} = \frac{I_z}{V_c}$$

Fondamentalmente più sono distanti le masse dal baricentro (in questo caso dell'asse di rollio

e più la stabilità è alta, vedi i costumaroni)



si basa sul movimento delle particelle via via nel tempo.

Dato che si definisce comunque la stessa cosa essi devono essere in qualche modo collegati tra loro:

$$\begin{aligned} dx &= \bar{u}(x, y, z, t) dt \\ dy &= \bar{v}(x, y, z, t) dt \\ dz &= \bar{w}(x, y, z, t) dt \end{aligned}$$

A noi basta sapere che useremo l'approccio euleriano perché ci porterà a conclusioni relativamente

più semplici rispetto a quelle lagrangiane.

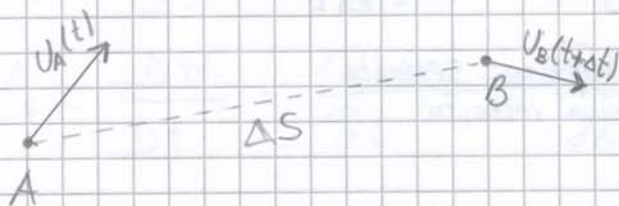
Inizialmente Lagrange ci sembra più facile, fondamentalmente perché possiamo applicare le leggi dei solidi, direttamente nei liquidi e nei gas:

$$\Rightarrow \vec{A}_{\text{PARTICELLA}} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$$

Il problema sorge nel momento in cui non siamo più al tempo  $t$  ma ci spostiamo a  $t + \Delta t$ . In quel caso, nel punto considerato al momento  $t$  c'è la particella A ma successivamente in  $t + \Delta t$  c'è la particella B mentre A ha continuato a percorrere la sua traiettoria. Questo con l'approccio lagrangiano potrebbe causare non pochi problemi.

Ora però vorremmo ben L'APPROCCIO EULERIANO che è quello che ci interessa:

Consideriamo due punti, definendo le loro velocità in un  $t$  e in un  $t + \Delta t$ .



Sapendo che l'accelerazione è un limite di un rapporto incrementale possiamo scrivere:

Per concludere otteniamo la DERIVATA EULERIANA o DERIVATA SOSTANZIALE definita come:

$$\vec{A} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + |\vec{U}| \cdot \frac{\partial \vec{U}}{\partial s} = \frac{D\vec{U}}{Dt}$$

ACCELERAZ. DI UNA PARTICELLA CHE NON VEDO

ACCELERAZIONE LOCALE

ACCELERAZIONE CONVETTIVA

Guardo il p.to indipendentemente dalla particella che sta passando

Ci spiega perché è tutto così complicato

Questa tipologia di formula può servire per scrivere una grandezza di una particella che non vedo, ad esempio la DENSITA'  $\rho$ . Basta sostituire:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + |\vec{U}| \frac{\partial \rho}{\partial s}$$

Quindi in generale

$$\frac{D...}{Dt} = \frac{\partial ...}{\partial t} + |\vec{U}| \cdot \frac{\partial ...}{\partial s}$$

Naturalmente posso trovare le componenti dell'accelerazione  $A$  lungo gli assi  $x, y, z$  (sempre secondo Eulero)

$$A_x = \frac{DU}{Dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + u \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} + w \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$A_y = \frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + w \frac{\partial V}{\partial z}$$

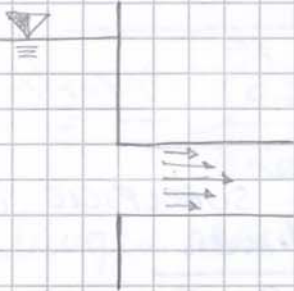
$$A_z = \frac{DW}{Dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + u \frac{\partial W}{\partial x} + v \frac{\partial W}{\partial y} + w \frac{\partial W}{\partial z}$$

Riassumendo posso descrivere la CINEMATICA DI UN FLUIDO in 4 modi:

VARIO: Ogni grandezza è animata sia dallo spazio che dal tempo  $V = V(x, y, z, t)$

PERMANENTE: Ogni grandezza è animata dallo spazio ma non dal tempo  $V = V(x, y, z)$

Tipico esempio è il tubo:



La velocità è funzione dello spazio, perché spostandoci verso il centro la velocità aumenta ma in un altro momento  $\Delta t$  quel medesimo p.to avrà quella medesima velocità perciò c'è una

indipendenza dal tempo.

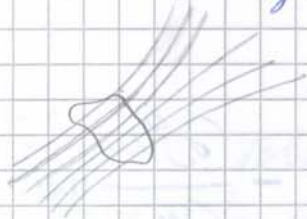
UNIFORME: Il campo di moto non cambia lungo una traiettoria, per cui anche la dipendenza spaziale è limitata; nel senso che se cambio traiettoria  $\vec{V}$  cambia, ma se mantengo sempre la stessa  $\vec{V}$  rimane costante.

PIANO: Il campo di moto non ha alcuna dipendenza da  $z$ , si tratta di studi sul mare in quanto ciò che succede in profondità o non conta o non è di mio interesse.

$$\Rightarrow \vec{V} = \vec{u}(x, y, t) \quad \leftarrow \text{TEMPO}$$

### ► CONCETTO DI PORTATA

Consideriamo una generica curva chiusa che racchiude un'area infinitesima.



Individuo le linee di corrente all'istante  $t^*$ , il processo prende il nome di TUBO DI FLUSSO. Vediamo cosa capita:

$$\int = - \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx dy dz dt$$

LUNGO y e z LA STESSA COSA

$$\dots = - \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy dx dz dt$$

$$\dots = - \frac{\partial \rho w}{\partial z} dz dx dy dt$$

Posso dunque scrivere la loro somma

$$= - \left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) dx dy dz dt$$

Per definizione questa è:

$$= - \operatorname{div} \rho \vec{U} dx dy dz dt$$

La nostra imposizione era che

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz = 0$$

Allora uguaglio e ottengo

$$- \operatorname{div} \rho \vec{U} dx dy dz dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{U}) = 0$$

1° PRINCIPIO ~ LA  
MASSA SI CONSERVA DETTA  
ANCHE EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

Fondamentalmente se nel liquido la massa si conserva allora sto dicendo che in esso non possono esserci BOCHI

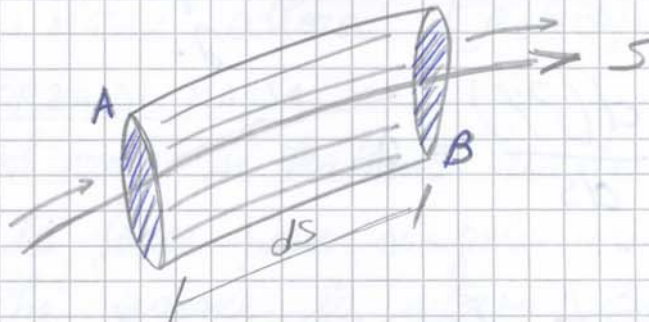
## ▶ CORRENTI

Un flusso si muove secondo una corrente quando tutte le particelle si muovono in una certa direzione. Le traiettorie sono sensibilmente rettilinee e parallele.

SONO  
SENSIBILMENTE  
RETTILINEE E PARALLELE



Considero  $S$  lungo la corrente e ne estraggo un  $ds$



(A)  $\rho a dt$

(B)  $(\rho a + \frac{\partial(\rho a)}{\partial s} ds) dt$

ENTRA - MENO ESCE =  $-\frac{\partial(\rho a)}{\partial s} ds dt$

Devo imporre uguale alla variazione di massa all'interno del volumetto lungo  $ds$

$$\Rightarrow -\frac{\partial \rho a}{\partial s} ds dt = \frac{\partial(\rho a)}{\partial t} ds dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho a}{\partial s} + \frac{\partial \rho a}{\partial t} = 0}$$

Se incomprimibile  
 $\rho = \text{cost}$

$$\Rightarrow \frac{\partial a}{\partial s} + \frac{\partial a}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{R} = m \vec{A} \quad \text{dove } dm = \rho dx dy dz; \quad \vec{A} = \frac{d\vec{U}}{dt}$$

Il problema è  $\vec{R}$ , la risultante delle forze. Abbiamo precedentemente visto due schieramenti di forze:  
 $f$  di superficie,  $f$  di massa.

F. MASSA: Sostanzialmente ce n'è una in particolare che è la forza peso, possiamo dire che se  $F =$   
 INTENSITA' DELLE FORZE DI MASSA allora  $F \rho dx dy dz = F dm$   
 possiamo definirla FORZA DI MASSA

F. SUPERFICIE: Ogni qual volta si trattano queste forze è necessario considerare le facce prese singolarmente; dunque la ① possiamo dire che agisce lo sforzo  $\phi_x$ , che se moltiplicato per l'area della faccia, otteniamo la forza agente su tale faccia  $\Rightarrow \vec{F}_1 = \phi_x dy dz$ .

La stessa cosa la possiamo fare sulla faccia ②, tenendo però conto del salto  $dx$ :  $\vec{F}_2 = (\phi_x + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} dx) dy dz$   
 ora se vogliamo sapere la  $\Sigma F$  tra 1 e 2 devo:

$$\phi_x dy dz - (\phi_x + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} dx) dy dz$$

LO PRENDO CON IL SEGNO  
 MENO PERCHÉ LA NORMALE  
 $\vec{n}$  È DIRETTA IN VERSO  
 OPPOSTO ALLA PRECEDENTE

$$\Rightarrow \text{si ottiene: } - \frac{\partial \phi_x}{\partial x} dx dy dz$$

Medesimo procedimento è attuato per ottenere:

$$\textcircled{y} \Rightarrow - \frac{\partial \phi_y}{\partial y} dy dx dz \quad \textcircled{z} \Rightarrow \frac{\partial \phi_z}{\partial z} dz dx dy$$

Ora che ho tutte le componenti le sommo insieme (tenendo conto anche delle forze di massa).

Quindi si ottiene;

4° EQ

→  $f = f(\phi_{xx}, \phi_{xy}, \phi_{xz}, \phi_{yx}, \phi_{yy}, \phi_{yz}, \phi_{zx}, \phi_{zy}, \phi_{zz})$

La 5° equazione potrebbe essere rappresentata dall'equazione di continuità:

5° EQ

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$

Adesso però sono nei guai, perché ho terminato le equazioni da cui attingere. Non mi resta che giocare una carta: sfruttare il PIANO REOLOGICO, il quale come ben ci ricordiamo aveva sull'asse delle ascisse la VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE ( $\dot{\gamma}$ ) mentre sull'asse delle ordinate



le TENSIONI TANGENZIALI ( $\tau$ ). Quest'ultime, se DECIDO IL FLUIDO che VOGLIO CONSIDERARE, mi permettono di sostituire le alle componenti  $\phi_{xx}, \phi_{xy}, \dots, \phi_{zz}$

per cui le incognite si riducono a 5. 5 incognite in 5 equazioni è possibile trovare una soluzione!

Abbiamo dunque capito che il trucco stava nello scegliere il fluido che mi interessava e trovarne la soluzione del sistema → OGNI FLUIDO HA LA SUA EQUAZIONE.

Ora però si presenta un altro problema. Le equazioni che abbiamo contemplato sono assai complesse e nella malaugurata ipotesi di trovare una soluzione alle incognite, ottengo un numero impressionante d'informazioni che normalmente non mi servono a nulla. Per cui cerco di "buttare via" informazioni con l'obiettivo di trattenere solo ciò che davvero mi interessa così da sem-

$$- \vec{U} \left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho z}{\partial z} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{div } \rho \vec{U}}$

Quindi

$$\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\dots) - U \text{div } \rho \vec{U} = *$$

Ma dall'equazione di continuità so che

$$\text{div } \rho U = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Quindi

$$\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\dots) + U \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Riservando  $\rho \vec{A}$  ottengo

$$\rho \vec{A} = \frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial t} + \left( \frac{\partial \rho u \vec{U}}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \vec{U}}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \vec{U}}{\partial z} \right)$$

Integrando

$$- \int_V \rho \vec{A} dV = - \int_V \frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial t} dV - \int_V (\dots) dV = \dots$$

INTEGRALE DI VOLUME RIGUARDANTI LE DERIVATE

$$- \frac{\partial}{\partial t} \int \rho \vec{U} dV$$

$$= - \int_{\Omega} \rho \vec{U} (u \cos \hat{m}_x + v \cos \hat{m}_y + w \cos \hat{m}_z) d\Omega$$

$\vec{U}_m =$  COMPONENTE DELLA VELOCITÀ NORMALE ALLA SUPERF.

$$\Rightarrow - \frac{\partial}{\partial t} \int \rho \vec{U} dV + \int \rho \vec{U} \vec{U}_m d\Omega$$



L'unico mio problema è sapere come è fatto il profilo della velocità  $v$ . Uso una strategia e rapporto:

$$\frac{\int_{\Omega} v^2 d\Omega}{U_m^2 \Omega}$$

Introduco un coefficiente di ragguglio  $\beta$  e posso scrivere:

$$\vec{m} \rho U_m \alpha \beta$$

### STUDIO DELL'EQUAZIONE PER I FLUIDI PERFETTI / IDEALI

Come mai li studiamo anche se normalmente non sono presenti né tanto meno utilizzati? Perché spesso capita, sotto precise condizioni, di trattare i fluidi che prendiamo in considerazione, aventi comportamento simile a quelli ideali!

1) Definisco lo stato di sforzo

$$\vec{F}_x = p \vec{i} \quad ; \quad \vec{F}_y = p \vec{j} \quad ; \quad \vec{F}_z = p \vec{k}$$

Quindi

$$p(F-A) = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}$$

$$p(F-A) = \text{grad } p = \text{GRADIENTE DI PRESSIONE}$$

Quunque le 3 condizioni sono:

$$\left. \begin{array}{l} p(F-A) = \text{grad } p \leftarrow \text{EQ. INDEFINITA PER FLUIDI PERFETTI} \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(p \vec{v}) = 0 \leftarrow \text{EQ. DI CONTINUITA' PER OGNI FLUIDO} \\ p = \text{cost} \leftarrow \text{INCOMPRESSIBILITA'} \end{array} \right\}$$

Giungo al teorema di BERNOULLI che mi dice:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{costante} = H$$

↑ ALTEZZA GEODETICA    
 ↑ ALTEZZA PIEZOMETRICA    
 ↑ ALTEZZA CINETICA

Fondamentalmente:

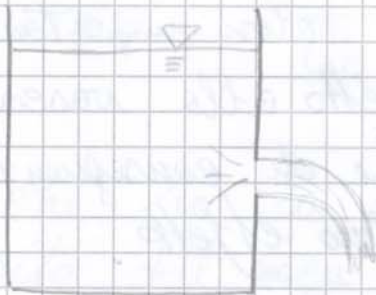
$z$  = racchiudendo dentro di sé l'energia potenziale del fluido

$\frac{p}{\gamma}$  =  $E'$  legato al mondo microscopico e definisce l'energia cinetica (vibrazionale) delle particelle del fluido

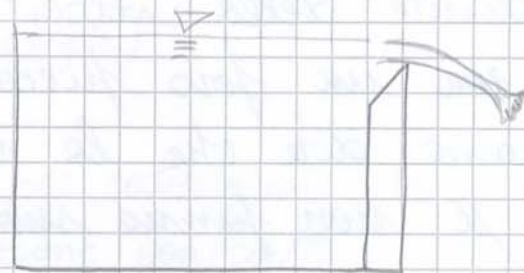
$\frac{v^2}{2g}$  =  $E'$  legato al mondo macroscopico e definisce l'energia cinetica che il fluido possiede spostandosi.

► APPLICAZIONI DEL TEOREMA DI BERNOULLI

FORI.

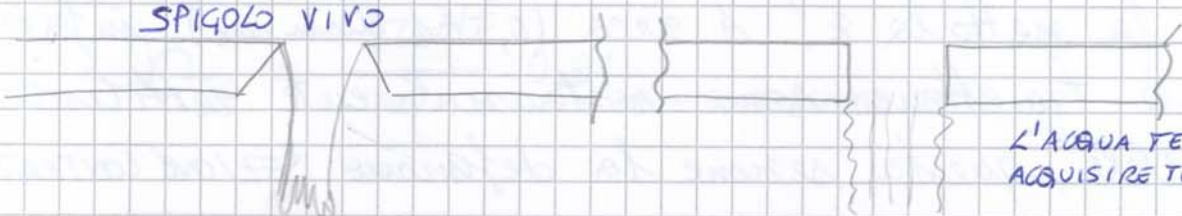


LUCE SOTTOBATTENTE



LUCE A STRAMAZZO

SPIGOLO VIVO



L'ACQUA TENDE AD ACQUISIRE TURBOLENZA

(perché ha una larghezza / diametro inferiore alla larghezza / diametro del foro).

II Assumo una generica traiettoria da A a B  
 Per le ipotesi di Bernoulli so che  $H_A = H_B$  il che significa:

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g}$$

$\xrightarrow{\approx 0}$        $\xrightarrow{0}$        $\xrightarrow{0}$

$\underbrace{z_A + \frac{p_A}{\gamma}}_{h + (0,5 \div 1)d}$       PERCHÉ IL FORO È PICCOLO RISPETTO AL SERBATOIO E LA  $v_A$  È → 0 PER TEMPI COERENTI      È IL PIANO CHE HO PRESO DI RIFERIMENTO      ESSENDOCI POSIZIONATI SU UN P.TO IN CUI LE CURVATURE NON ESISTONO PIÙ (CORRENTI) LA  $p = 0$

Se chiamo  $h$  l'altezza del serbatoio, allora:

$$v_B = \sqrt{2g(h + 0,5 \div 1 \cdot d)}$$

ma dato che  $d \ll h$  allora...

$$\approx \sqrt{2gh} \quad (\text{FORMULA DI TORRICELLI})$$

Per verifica possiamo andare a misurare e ci accorgemmo che la misura è precisa al 99%, quindi proprio per voler essere precisi, potremmo posizionarci davanti un coefficiente (COEFFICIENTE DI CORREZIONE DELLA VELOCITÀ):

$$v_B = C_v \sqrt{2gh}$$

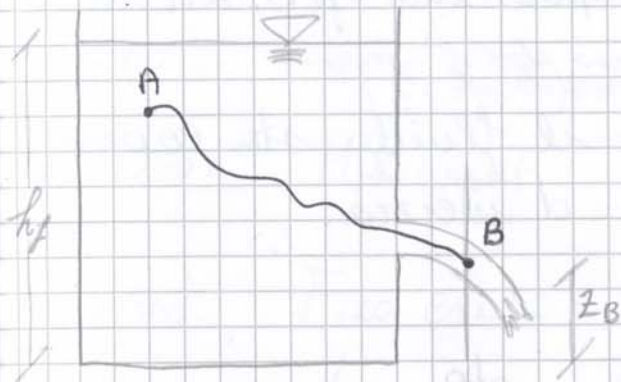
$\approx 0,99$

Tra che ho la velocità per calcolarmi la portata necessito dell'area della sezione contratta.

$$\text{Area sez. contr.} = \frac{\text{Area foro}}{4} \cdot \text{coeff. di contrazione}$$

↓

$$\Omega_c = \frac{\pi d^2}{4} \cdot 0,61 \quad \leftarrow \text{QUASI SEMPRE}$$



Sotto le stesse ipotesi  
posso dire:

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g}$$

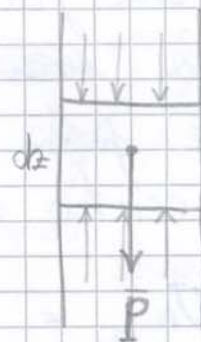
Come abbiamo fatto fino a  
adesso provo a considerare la sezione dove si trova  
B come una corrente  $\Rightarrow$  dovrebbe rispettare le leggi dell'  
idrostatica:

$$\Rightarrow z_B + \frac{p_B}{\gamma} = \text{cost}$$

$p_B = 0$  potrei infatti considerare  
la parte a contatto con l'atmo-  
sfera. Però se è  $\sigma$  ma so  
che  $z_B$  cambia non può di

conseguenza cambiare!! È UNA CONTRADDIZIONE!

Bisogna dunque ragionare discretamente, considero una  
colonna di fluido



Posso scrivere

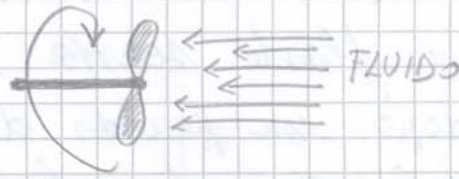
$$p A = \text{Forza che agisce da sotto} \quad \left( p A + \frac{dp}{dz} dz A \right) = \text{Forza che agisce da sopra}$$

Se li relazioniamo otteniamo

$$p = -\gamma z + \text{cost}$$

Curiosità: per misurare la velocità di un fluido posso:

1° MODO: MOLINELLI

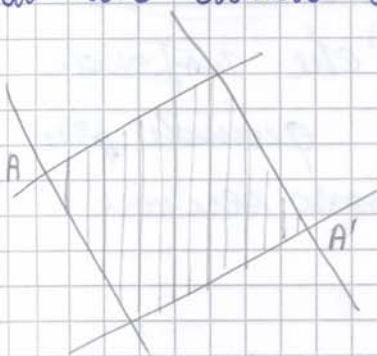


2° MODO: FILO CALDO \* Faccio passare corrente in un filo di metallo dentro un fluido, per mantenere la temp. su esso costante. Relazione la corrente con la temp. del fluido

3° MODO: ANEMOMETRO LASER DOPPLER ~ È molto usato per i liquidi, si tratta di una luce laser, che di per sé è monocromatica, cioè avente una sola armonica.



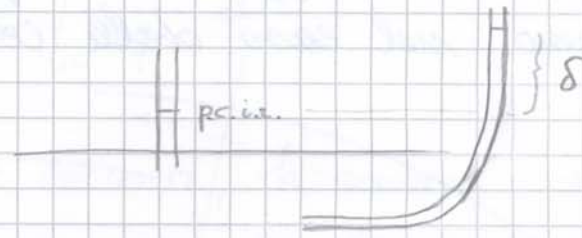
Con il laser, è possibile creare un raggio estremamente concentrato. Ora faccio incidere due raggi laser tra di loro dando origine a frange d'interferenza.



Di per sé le particelle del fluido posseggono un grado di riflessione (come se fossero piccoli specchi). Relazione dunque la velocità di acceso spento con la velocità del fluido

4° MODO: Questo quarto sistema dà la possibilità di effettuare misure su una superficie e non più puntualmente.

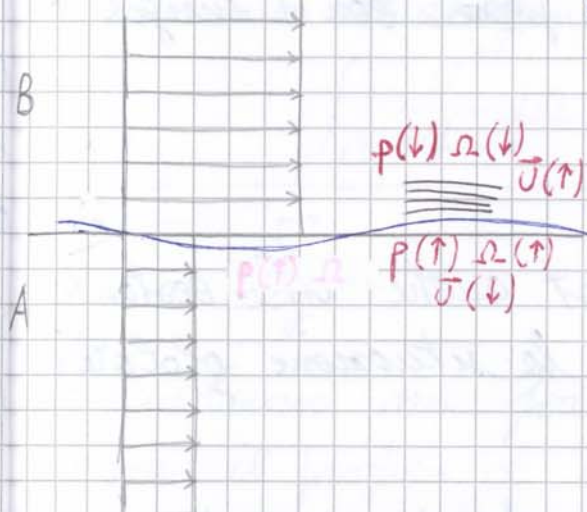
lo posso definire costante, per ciò posso misurarlo in un qualunque punto, intanto è costante. Effettuo la misurazione ad esempio sul bordo e ricavo  $\delta$ , differenza l'altezza della canalina e la misurazione sul bordo



perché esiste questo  $\delta$ ? Perché al centro c'è anche una componente enetica del liquido che sul bordo è pari a 0

### 0 INSTABILITÀ DI KELVIN-HELMOLTZ

Consideriamo 2 fluidi A e B che si muovono con 2 velocità diverse  $\Rightarrow$  con gradiente  $= \sigma$ . Quindi:



Notiamo con il passare del tempo che questa situazione non permane infatti si creano piccole perturbazioni, sulla linea di demarcazione. Se considero le particelle sulla cresta della perturbazione, noto che sono accelerate rispetto alle altre, questo perché

anche se per una quota infinitesima la sezione è diminuita  $\Rightarrow$  la velocità è aumentata e la pressione diminuita. Le instabilità man mano che scorre il tempo, procedono ad autoesaltarsi procurando dopo un certo  $\Delta t$  delle quote macroscopiche.

Detto ciò torniamo alla nostra formula di Bernoulli, infatti notiamo avere un piccolo difetto, per poterla applicare è necessario trovarsi lungo una traiettoria.

7) Separando ottengo la somma di 2 integrali:

$$= \gamma \left[ \int_{\Omega} \underbrace{\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)}_h \vec{v} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{v^3}{2g} d\Omega \right]$$

8) Per quanto visto per le correnti, h rimane costante

$$\Rightarrow \gamma \left[ \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) \cdot \int_{\Omega} \frac{\vec{v} d\Omega}{a} + \int_{\Omega} \frac{v^3}{2g} d\Omega \right] = \text{cost} \Big|_s$$

Non dimentichiamo che tutto ciò rimane costante

9) Resto con:

$$\gamma \left[ \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) \cdot a + \int_{\Omega} \frac{v^3}{2g} d\Omega \right] = \text{costante}$$

PER SAPERE QUESTO TERMINE DEVO SAPERE COME È FATTO IL PROFILO DI VELOCITÀ MA NON LO SO!

10) Uso una stratagemma

$$\alpha = \frac{\int_{\Omega} \frac{v^3}{2g} d\Omega}{\frac{v}{2g} \Omega}$$

← TERMINE CHE NON CONOSCO

← VELOCITÀ MEDIA CHE CONOSCO!

Se qualcuno mi fornisce questo rapporto ( $\Rightarrow \alpha$ ) potrei trovare il profilo di velocità. Facciamo finta di conoscere  $\alpha$ , quindi:

$$\gamma \left[ \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) a + \alpha \frac{v^2}{2g} \overbrace{v}^a d\Omega \right]$$

LO CHIAMEREMO ... "COEFF. DI CORIOLIS"

11) Noto che

$$\gamma \left[ a \left( z + \frac{p}{\gamma} + \alpha + \frac{\alpha v^2}{2g} \right) \right] = \text{costante}$$

↑ cost    ↑ cost    ↪ cost

5) Ricavo con la LINEA DEI CARICHI PIEZOMETRICI

6) Individuo con  $\delta$

$$\Rightarrow \delta = h_1 - h_2 = \frac{\alpha U_1^2}{2g} - \frac{\alpha U_2^2}{2g}$$

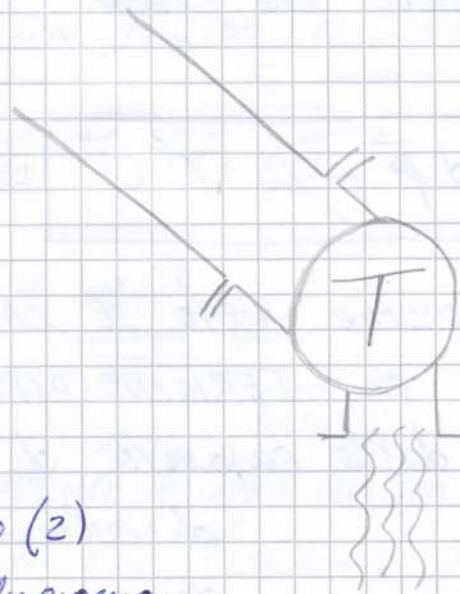
con  $U_1 = \frac{Q}{\Omega}$  e  $U_2 = \frac{Q}{\Omega_2}$

Come visto prima,  $\delta$  la misuro con 2 bacchette

Alla fine del Tubo di Venturi devo inserire una DIVERGENZA molto lenta per tornare alla sezione iniziale, questo per evitare la formazione di moti turbolenti

► TURBINE

1)



$$H_v^{(1)} = z_B + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha U_B^2}{2g}$$

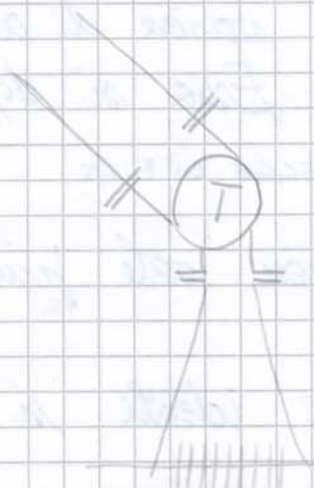
↑  
H A VALLE

→  $\phi$   
APPENA ALL' USCITA  $p=0$

Vediamo il caso (2)  
in cui introduciamo  
una debole divergenza

$z=\phi$

2)



$$\Rightarrow H_v^{(1)} - H_v^{(2)} = z_B + \frac{\alpha U_B^2}{2g} - \frac{\alpha U_A^2}{2g}$$



$$\int (F-A) = \text{grad } \phi$$

$$= \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_z}{\partial z}$$

Che non erano altro che  $\sigma_{fm}$  cioè applicando l'integrale erano le Forze al contorno  $F_c$   
 Nei fluidi NEWTONIANI la  $F_c$  si scompone in due componenti:

$$F_c = \underbrace{\pi}_{\text{FORZE AL CONTO RNO NORMALI}} - \underbrace{T}_{\text{FORZE AL CONTO RNO TANGENZIALI}}$$

Dopo vari passaggi algebrici ottengo l'equazione INTEGRATA PER UN FLUIDO VISCOSO

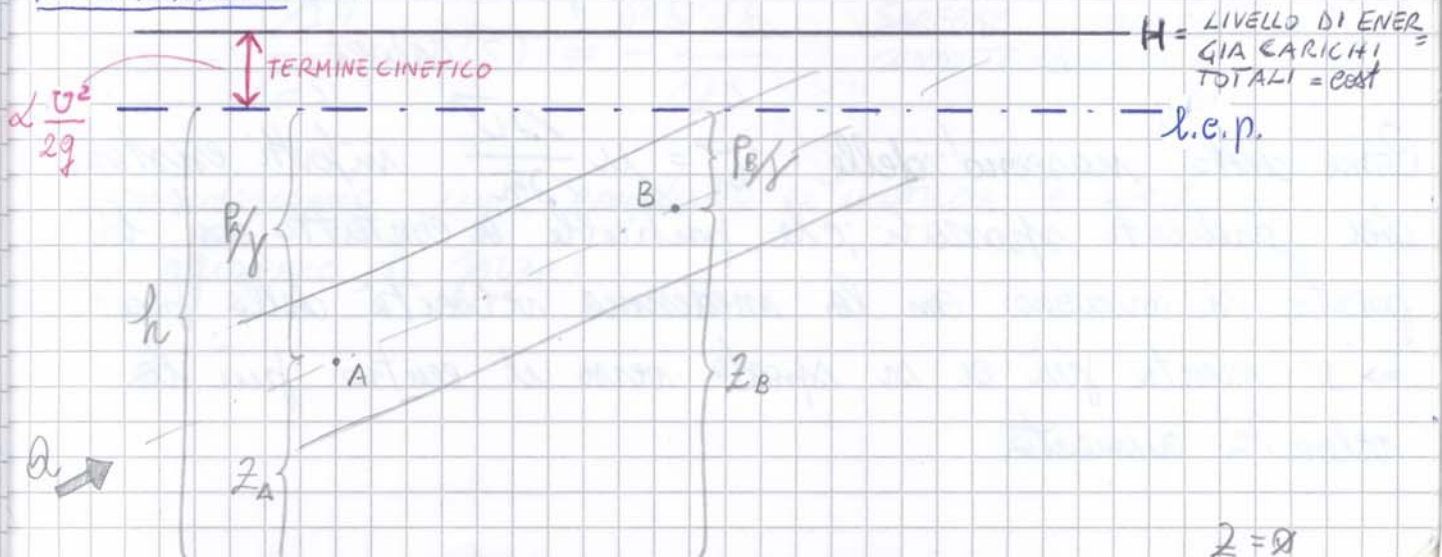
$$\Rightarrow \left[ P + \pi - T + I + M_e - M_u = 0 \right]$$

dove  $T = \mu \int_{\Omega} \frac{\partial \vec{u}}{\partial m} d\Omega$  ← gradiente velocità

FLUSSO DI QUANTITÀ DI MOTO ENTRANTE ED USCENTE

Quando la corrente è data da un fluido viscoso L'ENERGIA NON SI CONSERVA PIÙ. Vediamo graficamente i due casi:

FLUIDI PERFETTO:

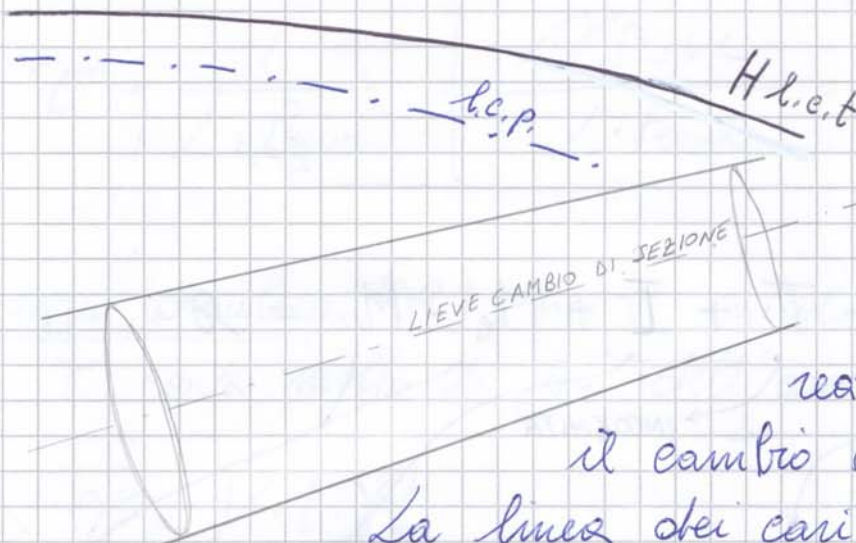


Prendiamo ora delle DISSIPAZIONI. Le definiremo:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = i \cdot J \quad (\text{Energia}) \quad (\text{PENDENZA MOTRICE})$$

LE È DEFINITO CON IL - ALTRIMENTI I · J SAREBBE NEGATIVA.

t. CONDOTTA DI UN FLUIDO REALE CON RESTRINGIMENTO DI SEZIONE



In questo caso, avremo la  $H$  decrescente per il caso dei liquidi reali e curvo per il cambio di sezione.

La linea dei carichi piezometrici (h.e.p.) ha le stesse caratteristiche di  $H$  ma si discosta sempre di più da  $H$  (non è parallela), questo è conseguenza del fatto che la condotta si restringe (cambio di sezione).

$$\Rightarrow - \frac{\partial H}{\partial s} = i(s) \neq - \frac{\partial h}{\partial s}$$

SAREBBE UGUALE SOLO IN CONDOTTE CILINDRICHE

Riconsideriamo una condotta elastica e vediamo come agiscono le forze:

$$= \gamma \Omega \left[ \left( z_1 + \frac{P_1}{\gamma} \right) - \left( z_2 + \frac{P_2}{\gamma} \right) \right] = T$$

$$\Rightarrow T = \gamma \Omega (h_1 - h_2)$$

$\Rightarrow$  Relazione le forze dissipative e altezza  $h_1 - h_2 = i \cdot L$

$$\Rightarrow \gamma \Omega (h_1 - h_2) = \gamma \Omega i L$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{T}{L \cdot \text{Perim.}} = \frac{\gamma \Omega i L}{L \cdot \text{Perim.}} = \gamma i \left( \frac{\Omega}{\text{Perim.}} \right)$$

RAGGIO IDRAULICO  $R$

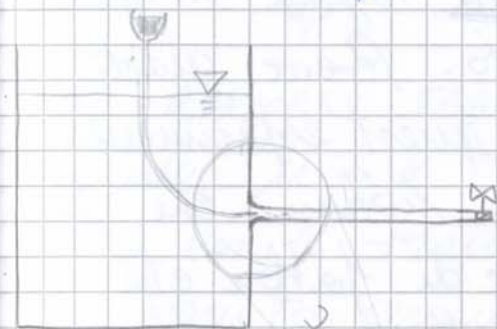
Il raggio idraulico ( $R$ ) per il calcolo delle  $\tau$  conta molto di più dell'area

$$\Rightarrow \tau = \gamma \cdot i \cdot R$$

La migliore forma che ha la maggior area in relazione al perimetro è il CERCHIO

### ► ESPERIENZA DI REYNOLDS

Considero un piccolo serbatoio da cui parte un tubo (piccolo) aventi gli angoli raccordati per evitare fenomeni turbolenti, che termina con un rubinetto.

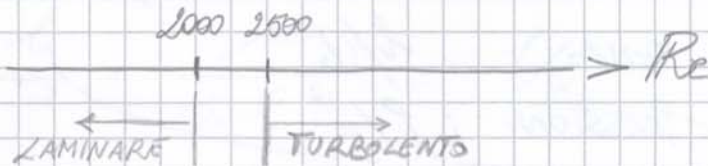


Consideriamo un ulteriore serbatoio all'interno del primo, il quale tramite un ago, inietta acqua colorata esattamente nel baricentro della prima conolina (vedi zoom) --

$$Re = \frac{U \cdot D \cdot \rho}{\mu}$$

dove:  $U$  = Velocità media  
 $D$  = Diametro tubo  
 $\rho$  = Densità fluido  
 $\mu$  = Viscosità

formiamo dire che la soglia è data da:



Abbiamo dunque capito che è più importante conoscere il n° di  $Re$  piuttosto che le singole proprietà.

Fluidi con ugual numero di Reynolds si comportano nello stesso modo.

Il concetto profondo è che  $Re$  è adimensionale infatti è sufficiente conoscere la lunghezza (profondità, largh., lungh...) la velocità, la densità, la viscosità e mi ricavano il n° di  $Re$ .

A scopo informativo, il  $Re$  di un fiume è circa  $10^6 \div 10^9$ .

Ricordiamo che  $\rho/\mu = 1/\nu$  (l'inverso della viscosità cinematica), quindi posso scrivere

$$Re = \frac{L \cdot U}{\nu}$$

Fondamentalmente  $Re$  ci dice che il salto tra i due moti, è dato

dal RAPPORTO TRA LE FORZE D'INERZIA e QUELLE VISCOSE.

Quando  $\mu \rightarrow 0$  allora  $Re \rightarrow \infty$  (fl. ideale ~ cioè quello con le traiettorie più perse...)

Di seguito cerchiamo di scrivere una relazione che sia in grado di generalizzare i fenomeni in base alle scale considerate (cm, m, m/s, km/h, la...). Per fare ciò

$$T = \sqrt{\pi r^2} \left[ \left( z_1 + \frac{P_1}{\gamma} \right) - \left( z_2 + \frac{P_2}{\gamma} \right) \right]$$

$iL$

$$= \sqrt{\pi r^2} iL$$

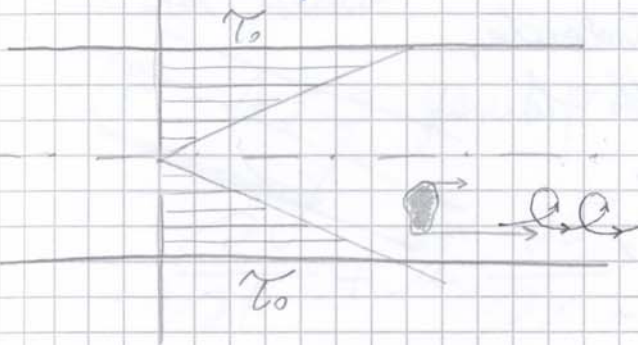
RICORDA  $\rightarrow \frac{T}{L} \cdot \text{Perim.}$

Purché

$$\tau(r) = \frac{\sqrt{\pi r^2} iL}{2\pi r L} = \frac{\gamma i r}{2} = \boxed{\gamma \cdot i \cdot \frac{r}{2}}$$

se  $r = R \Rightarrow \tau = 0$  (Velocità parete)

Abbiamo capito che se  $\tau = \tau_0 \frac{r}{R}$  varia linearmente



Un corpo di dimensione non trascurabile lanciato da due diverse  $\tau$  tende a ruotare su se stesso. Se rovesciamo sull'asse,

non sentiremmo alcuna  $\tau$ .

Tornando a  $T$  sappiamo che:

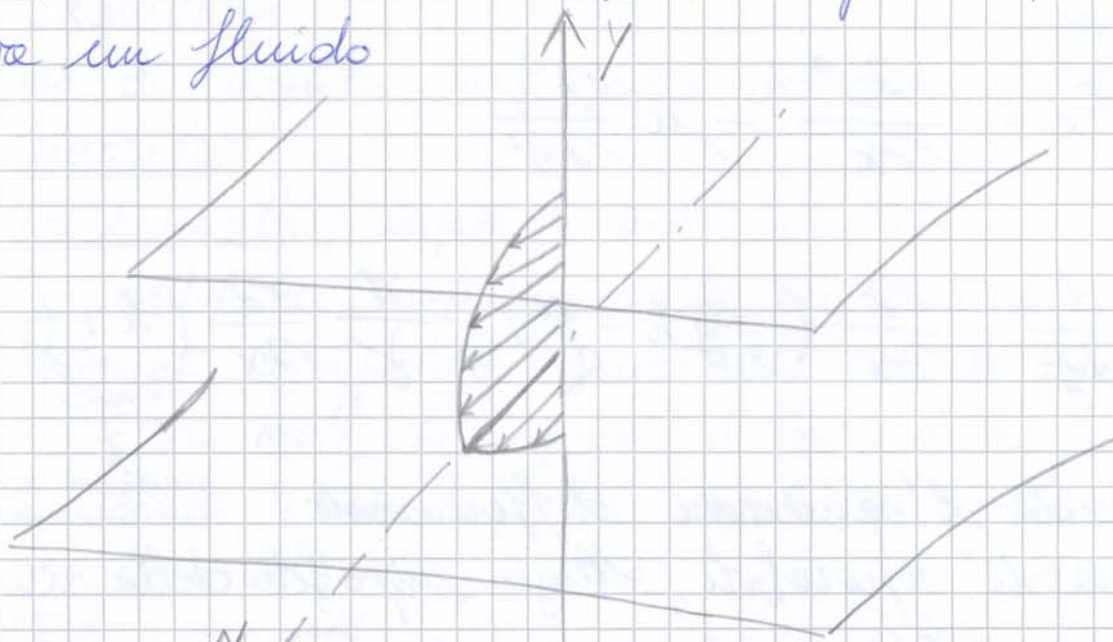
$$T = \mu \int_{\Omega} \frac{\tau U}{2\pi} d\Omega$$

$$= \mu \frac{dU}{dm} \int_{\Omega} d\Omega$$

infatti  $\frac{dU}{dm}$  non dipende da  $d\Omega$ , rimane dunque solo la componente lungo  $S$

$$T = \mu \frac{dU}{dm} \cdot (2\pi r L) = \boxed{-\mu \frac{dU}{dr} 2\pi r L}$$

Vediamo un ulteriore caso: 2 piani tra cui scorre un fluido



parto sempre dall'equazione indefinita della dinamica dei fluidi

$$\rho(\mathbf{F} - \mathbf{A}) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{U}$$

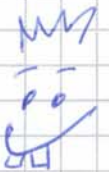
$$\vec{A} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{U}}{\partial z}$$

QUI È LA DERIVATA CHE VA A B

INFATTI SE CONSIDERO UNA TRAIETTORIA SENS RETTILINEA  $U = \text{cost.}$

NON SI HANNO COMPONENTI LUNGO Y E Z

$\Rightarrow A = 0$  — E noi siamo molto contenti



Proietto lungo l'asse x

$$x) F_x = \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \nabla^2 U$$

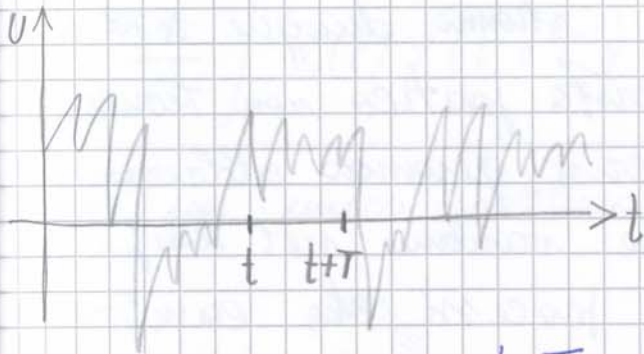
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

## ► TURBOLENZA

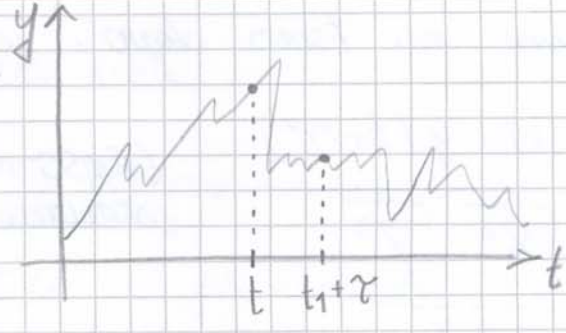
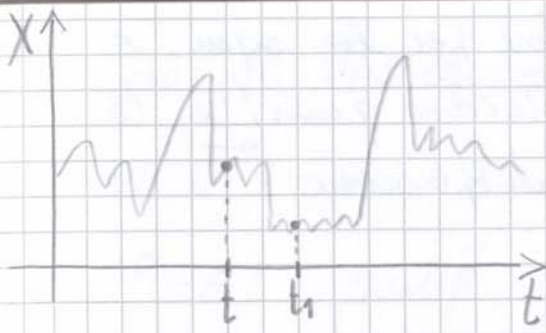
Vediamo di seguito le proprietà del moto turbolento:

- 1) Caoticità
- 2) Non linearità, infatti è molto sensibile a piccole modifiche, basta un nulla per scatenare un disastro
- 3) Fortemente dissipativo, grazie alla sua non regolarità è un moto che "spreca" un sacco di energia per ottenere queste traiettorie (tra le più complesse nell'universo)
- 4) Fortemente diffusivo, è in grado di scambiare temperatura, energia, velocità molto efficientemente)
- 5) Fenomeno 3D, ha bisogno delle 3 dimensioni per scatenarsi, infatti se costringessimo una turbolenza in una canalina tra due piastre essa tornerebbe istantaneamente un moto laminare

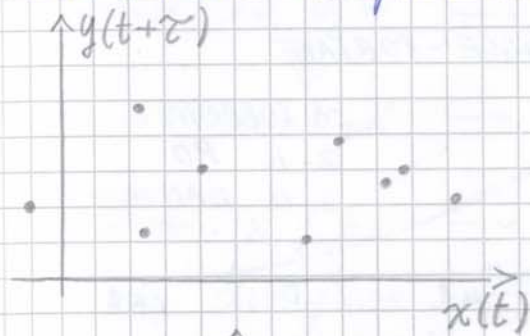
Il primo che s'interessò del moto turbolento fu Reynolds. Rendendosi conto della sua complessità, si pose un interrogativo: Ma ci interessano le traiettorie di tutte le particelle, o potrebbe bastarci sapere la loro velocità media nel tempo? Per problemi ingegneristici ci interessa una media! (senza complicarci la vita, a studiare particella per particella). La media è calcolabile in questo modo:



$$= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} U(t) dt = \bar{U} \quad (\text{VELOC. MEDIA})$$

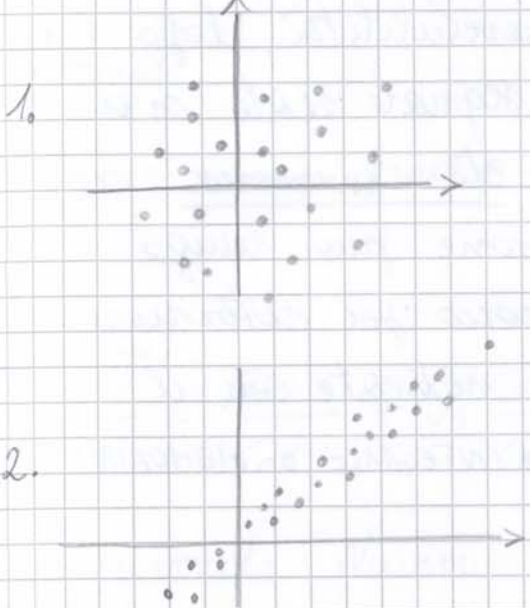


Considero due istanti  $x(t)$  e  $y(t+\tau)$  e introduco in un unico diagramma i valori trovati. Otterò il possesso ottenendo un buon numero di punti.



Possiamo dire che:

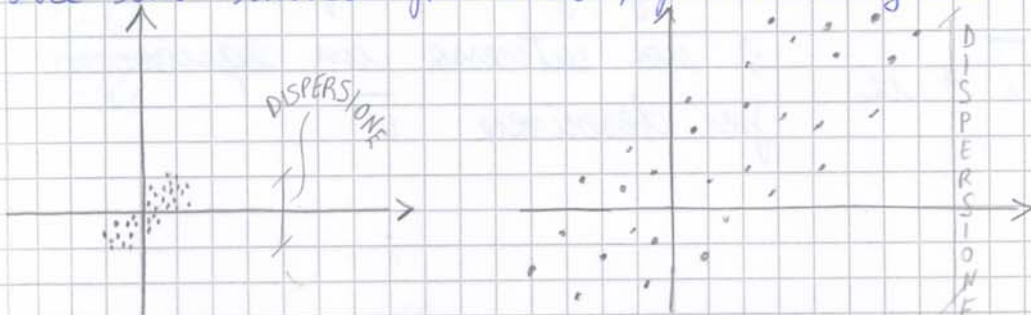
1. Se la disposizione dei valori assomiglia ad una nuvola, e cioè, loro diciamo che tra i valori NON C'È CORRELAZIONE, (BORSA DI LONDRA ÷ N° DI OMBRELLI APERTI IN SICILIA)



2. Se a valori alti di  $x(t)$  corrispondono valori alti di  $y(t+\tau)$  diciamo che c'è CORRELAZIONE. Definiamo quindi che più ho numeri grandi e più ho correlazione.

$$\Rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t+\tau) dt = \text{cov}_{xy}(\tau)$$

Nasce un unico problema, per distinguere in quale caso





Partiamo da due equazioni ben note:

$$\operatorname{div} \vec{U} = 0 \quad \text{Eq. DI CONTINUITÀ}$$

$$\rho (F - A) = \operatorname{grad} \tilde{p} - \mu \nabla^2 \vec{U} \quad \text{Eq. DI NAVIER-STOKES}$$

Ora imponiamo qualche convenzione:

$$\begin{array}{ccc} 1) \text{ Chiamo } u, v, w & \longrightarrow & u_1, u_2, u_3 \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & u+v+w & \longrightarrow & \sum_i u_i \end{array}$$

$$2) \text{ Chiamo } x, y, z \quad \longrightarrow \quad x_1, x_2, x_3$$

$$3) \text{ " divergenza: } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

Quindi:

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \vec{U} - F$$

con

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_i}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial U_i}{\partial x_2} + U_3 \frac{\partial U_i}{\partial x_3}$$

Riservando Navier - Stokes

$$= \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial t} + \mu_j \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} - g$$

e Mentre l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_i} = 0$$

...  
 Per filtrare il fattore turbolento, che oltre ad essere molto complicato, rende il tutto più confuso, utilizzo l'operatore media, che è strettamente legato all'operatore integrale. Posso dunque prendendo l'equazione globale, applicare i seguenti passaggi:

$$\frac{\partial(\bar{U}_i + v_i)}{\partial x_i} = 0 \xrightarrow{\text{OPERATORE MEDIA}} \frac{\partial(\bar{U}_i + v_i)}{\partial x_i} = 0$$

Quindi:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{U}_i + v_i) = 0 \xrightarrow{\text{SEPARO}} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

Sapendo che la derivata dei termini turbolenti è 0 allora  $\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0}$$

Per l'equazione di Navier-Stokes la faccenda è leggermente più complessa: Chiamo con

numeri diversi i vari fattori e addendi dell'equazione:

$$\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial t} + \tilde{U}_j \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \gamma \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} - g \delta_{i3}$$

①
②
③
④
⑤

Studio caso per caso a parte.

$$\textcircled{1} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial t} \Rightarrow \text{APPLICO LA DECOMPOSIZIONE DI REYNOLDS E OTTIENGO} \Rightarrow \frac{\partial(\bar{U}_i + v_i)}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \text{APPLICO L'OPERATORE MEDIA} = \frac{\partial(\bar{U}_i + v_i)}{\partial t}$$

$$= \mu_j \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \mu_i \mu_j}{\partial x_j} - \mu_i \frac{\partial \mu_j}{\partial x_j} \rightarrow 0$$

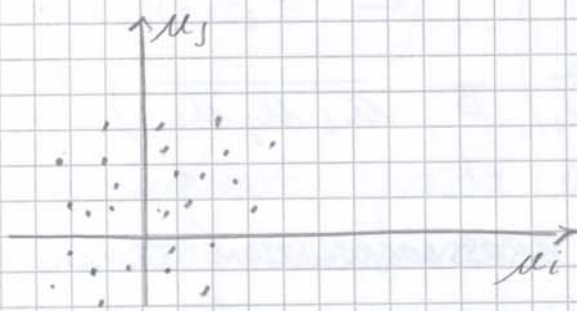
$$= \frac{\partial \mu_i \mu_j}{\partial x_j} - \mu_i =$$

$$= \frac{\partial \mu_i \mu_j}{\partial x_j} = \text{Ma la derivata del prodotto delle 2 componenti è uguale a zero}$$

$\Rightarrow \mu_i = 0$   
 $\mu_j = 0$

Non è detto che se  $\mu_i$  e  $\mu_j$  sono 0 allora anche la derivata lo sia!

Se la relazione tra  $\mu_i$  e  $\mu_j$  fosse di SCORRELAZIONE



cioè  $\mu_i$  assume valore, indipendentemente da  $\mu_j$ , allora potremmo buttare via il termine. L'errore tra  $\mu_i$  e  $\mu_j$  è molto CORRELAZIONE, per cui

si avrà un grafico del tipo a fianco. (Proiettando i p.ti su  $\mu_i$  ho tanti valori al di sopra e tanti al di sotto, stessa cosa per  $\mu_j$ )  
 Mi può capitare spesso di



fare  $\mu_i \cdot \mu_j = \frac{TOT}{(+)} \cdot \frac{TOT}{(+)}$  oppure  $\frac{TOT}{(-)} \cdot \frac{TOT}{(-)}$

Quindi abbiamo capito che il termine SOPRAVVIVE, ovvero:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mu_i \mu_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial x_i} + V \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - g \delta_{i,3}$$

possiamo riscriverla come:

$$\frac{D U_i}{D t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}) - g \delta_{i,3}$$

$\downarrow$  SFORZI TRA UNA PARTICELLA E L'ALTRA       $\downarrow$  GRAVITA'

posso ricavare  $\tau_{ij}$  come

$$\tau_{ij} = \bar{p} \delta_{i,j} + \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u_i u_j}$$

$\downarrow$  GRADIENTI DI PRESSIONE       $\downarrow$  TENSIONI TANGEN. PERCHE' HO VISCOSITA'       $\downarrow$  TENSIONI CHE NASCONO GRAZIE ALLE CROSS-CORRELAZIONI DI REYNOLDS

Quindi:

$$-\rho \overline{u_1 u_3} = -\rho \begin{pmatrix} \overline{u_1^2} & \overline{u_1 u_2} & \overline{u_1 u_3} \\ \overline{u_1 u_2} & \overline{u_2^2} & \overline{u_2 u_3} \\ \overline{u_1 u_3} & \overline{u_3 u_2} & \overline{u_3^2} \end{pmatrix}$$

!! BEST IMPORTANT

Concludendo, posso avere EQUAZIONI MEDIE RIFERITE AL MOTO TURBOLENTO a patto di inserire delle TENSIONI DI CROSS-CORRELAZIONE dovute alla turbolenza.

Vedremo che queste tensioni sono MOLTO PIU' GRANDI delle TENSIONI TANGENZIALI date dalla viscosita', quindi anche la speranza di eliderle nei calcoli e' vana.

Ricordiamo che le TENSIONI DI CROSS-CORRELAZIONE DI REYNOLDS non esistono nel piccolo, particella per particella, ma rappresentano una quantita' non trascurabile nell'operazione media (nel grande).

Cosa capita dal punto di vista energetico?

|                     |                 |                |
|---------------------|-----------------|----------------|
|                     | Moto del fluido |                |
| ENERGIA<br>$(u, v)$ | MOTO MEDIO      | MOTO TURBOLEN. |

Gran parte dell'energia si disperde in tensione di Reynolds  $\Rightarrow$  LA TURBOLENZA VIVE SUCCHIANDO ENERGIA AL MOTO MEDIO trasformandola in calore.



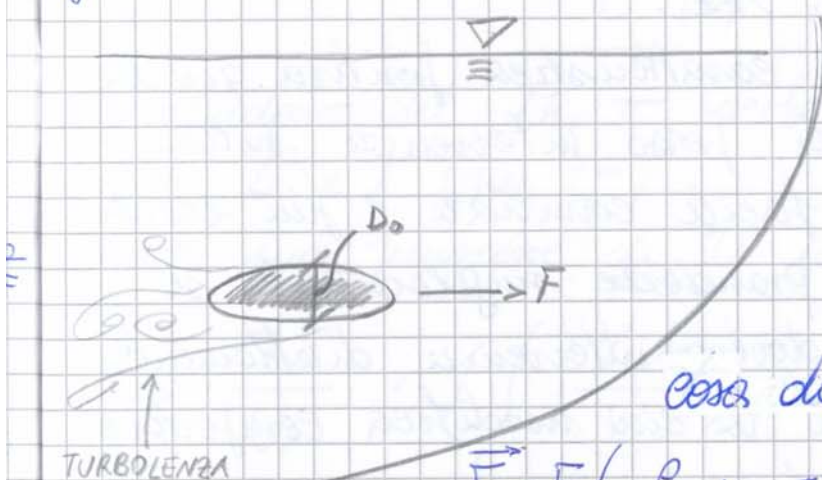
Riassumendo, della turbolenza abbiamo capito:

- 1) No separazione di scale (MEDIA e TURBOLENZA)
- 2) Se osservo e cerco di studiare le dimensioni medie di una grandezza  $\bar{\cdot}$  nascono le TENSIONI DI REYNOLDS
- 3) Cascata di vortici (Teoria)
- 4) Teorema  $\pi$  ~ cambio le 3 grandezze fondamentali (LMT) a seconda della situazione che ho da risolvere

Facciamo ora un esempio del Teorema  $\pi$

ESM.

Abbiamo un fluido nel quale in profondità si muove un corpo molto lentamente (generando comunque turbolenza) esso è liscio in modo tale da fare meno resistenza possibile.



Applicandoci una forza,  $\vec{F}$  il corpo si sposta.

Voglio sapere quanto vale  $\vec{F}$ .

Mi devo domandare: da

cosa dipende  $\vec{F}$ ?

$$\vec{F} = F(\rho, \mu, v_0, D_0, L, \tau)$$

PARAMETRO DI SCABREZZA DELLA SUPERFICIE DELL'OGGETTO.

In questo caso se mi ostinassi a usare la terza (L, M e T) avrei 7 parametri (6 +  $\vec{F}$ ) a cui rendere conto per trovare l'intensità di  $\vec{F}$  stesso. Senza contare che empiricamente è costoso e complicato modificare  $\rho$  e  $\mu$  di un liquido. Il tutto è complicato perché la funzione vive in 7 dimensioni. Se utilizzassi una terza alternativa tipo  $\rho, v_0, D_0$

So che la velocità media  $\bar{v}$  è funzione di:

$$\bar{v} = \bar{v}(\gamma, \rho, \nu, \tau_0)$$

Nota che a sinistra dell'uguale,  $\bar{v}$ , non è una grandezza che contempla la massa; a destra invece abbiamo  $\tau_0$  e  $\rho$  i quali sono variabili in funzione anche della massa. Quindi dobbiamo inventarci una grandezza che combini  $\tau_0$  e  $\rho$  in modo che la massa sparisca (come a sinistra ( $\bar{v}$ )).

Quindi mi invento

$$U_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad \text{È dimostrabile che questa è proprio la scala tipica delle velocità.}$$

Posso scrivere dunque:

$$\bar{v} = \bar{v}(\gamma, \nu, U_*)$$

Avvalendomi del Th.  $\pi$  scelgo due dimensioni che non siano  $L$  e  $T$  (per  $\bar{v}$ )

Sevvo una funzione di  $\bar{v}$  utilizzando  $\mu$  e  $U_*$

$$\Rightarrow \frac{\bar{v}}{U_*} = f\left(\frac{\gamma U_*}{\nu}\right) = f(\gamma_+) \quad \Rightarrow \text{QUESTO CAPITA NELL' INNER LAYER}$$

1) Divido in INNER LAYER la parte più vicina al tubo dove le viscosità sono ancora importanti, e OUTER LAYER lo strato in cui le viscosità perdono d'importanza e la assume  $\delta$  (scala grandezza del tubo)

$$\bar{v} = \bar{v}(\gamma, \rho, \tau_0, \cancel{\nu}, \delta) \quad \Rightarrow \text{QUESTO CAPITA NELL' OUTER LAYER}$$

Questo è possibile solo quando sono costanti per cui:

$$\frac{df}{dy_+} y_+ = \frac{dF}{d\zeta} \zeta = \frac{1}{K}$$

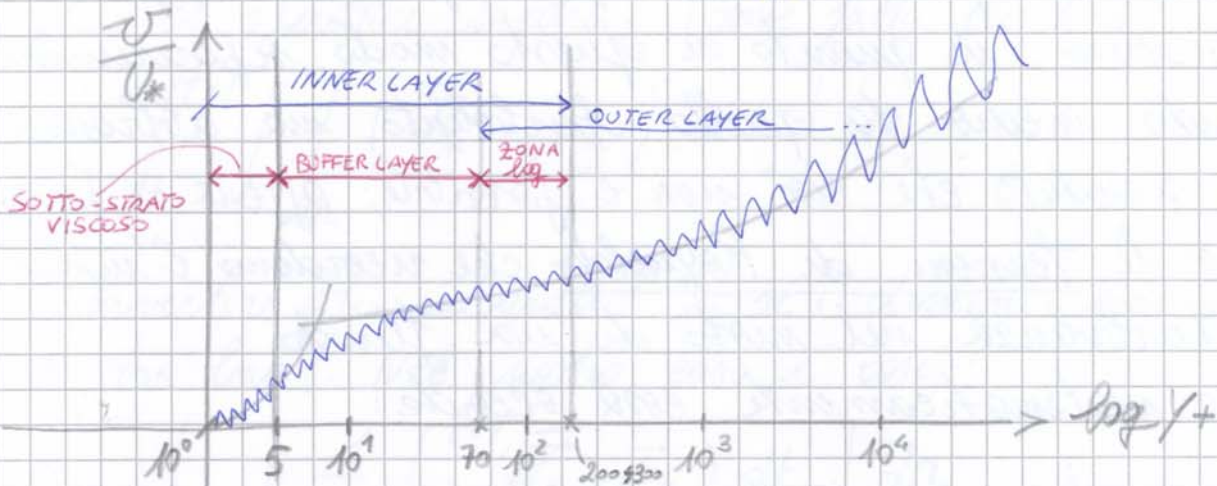
In teore e trovo:

$$f(y_+) = \frac{1}{K} \ln y_+ + cost_1$$

$$f(\zeta) = \frac{1}{K} \ln \zeta + cost_2$$

← SONO FORME LOGARITMICHE

Millican riesce a relazionare  $\frac{v}{U_*}$  con  $y_+$



Empiricamente si è studiato che fino a  $\log y_+ = 5$  si SPENDE LA TURBOLENZA e tutto si comporta come un moto laminare. La fabbrica della TURBOLENZA è il BUFFER LAYER

Riassumendo quanto detto qualche lezione fa abbiamo ottenuto partendo dall'equazione di Navier-Stokes (N-S) che definisce grandezze particella per particella ad una forma che ne definisce un loro valore medio; tramite la definizione matematica di valor medio:

Quindi:





Vediamo termine a termine

1° TERMINE

Media di qualcosa già mediato è il qualcosa stesso!

2° TERMINE

Idem!

3° TERMINE

Integrale degli scarti ( $\overline{v_m'}$ ) nel tempo = 0  $\Rightarrow$  zero

4° TERMINE Da problemi

Non è detto che due grandezze che prese separatamente hanno media 0 anche prese come prodotto abbiano media 0. Questo capita se le due grandezze SONO CORRELATE

$$\Rightarrow \int \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \left[ \int_{\Omega} \vec{v} + \vec{v}_m' d\Omega \right] dt = \text{Scambio}$$

$$= \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \vec{v} + \vec{v}_m' dt \right] d\Omega$$

In fine

$$\int_{\Omega} \overline{v' v_m'} d\Omega = \overline{M'}$$

Per cui l'equazione nella sua interezza sarà:

$$\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{I} + \vec{M} + \overline{\vec{M}'} = 0$$

EQUAZIONE GLOBALE  
DEL MOTO  
TURBOLENTO!

Ancora una volta non posso dividere il termine medio da quello turbolento.