



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1421A -

ANNO: 2015

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Pelati

MATERIA: Idraulica Ambientale 6cfu. Prof. Ridolfi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

0) Riciami  
 Vettori Matrici Tensori  
 Celerità Dilatazione Deformazione

1) Turbolenza 2

> Quantità Medie

- Tempozale - Insieme
- Covarianza - Correlazione
- Auto Covarianza / Auto Correlaz.
- Spettri  $\hookrightarrow$  Scala Integrale

> EQUAZIONI del MOTO 6

- \* Eq. Continuità Moto Medio / Turbolento
- \* Eq. dello Quantità Moto Medio
- \* Bilancio dell' En. Cinetica Moto Medio
- \* Bilancio dell' Energia Cinetica Turbolento
- \* Vortex Streching

> Scale di TURBOLENZA 10

Max - Intermedie - Piccole - Minime  
 Spettro Turbolento

> Turbolenza Libera 11

- Getti / Scie / Mixing layer
- Caratteristiche comuni:  
 Intermittenza / Inglobamento / Autosimilarità

- Legge cui cui si aprono i Getti 12

> Turbolenza allo Parete

$\sim$  Inner layer

Substrato viscoso - Buffer - overlap - Outer

> Strumenti per lo studio Turbolento

3) FIUMI 17

\* Zona A

\* Zona B

$\sim$  Teoria Elder  $E_v / E_t / E_L$

$\sim$  Cosa accade nei fiumi  $\rightarrow$  esemp

$\hookrightarrow$  Come si alzo il pennacchio

\* Zona C

- K

- Fenomeni che intervengono su K

4) TRASPORTO dei SOLIDI 2

o Solida al Fondo 32

$\rightarrow$  Moto Incipiente: 32

\* Velocità critica

\* Tensione Tangenziale critica

Schottku / Indri / Lane

• Teoria di Shields 35

$\hookrightarrow$  Correzioni pendenza / Sommerfeld

$\rightarrow$  Portata Solida al Fondo: 37

Dubois / Shields / Meyer Peter Elster

\* Kocinste / Einstein

$\rightarrow$  Forme di Fondo 38

Macforme: rippe / Dune / Antidune

Resistenze delle Forme

$\sim$  Froud

$\sim$  Vincoli del rippe

$\rightarrow$  Classificazione dei fiumi 39

o Solida in Sospensione 40

\* Profilo concentrazione

Condizioni al contorno

\* Portata Solida in Sospensione

5) MORFODINAMICA FLUVIALE 42

$\sim$  Eq Continuità

$\sim$  Eq. qto Moto

- Applicazione Morfodinamica 44

$\sim$  qto Moto

$\sim$  Exner

- Semperificazioni 46

Moto Permanente / Alveo cinetico

Esemp

6) LAGHI 48

Stratificazione  $\sim$  conseguente

Numeri puri

Froud interno / Grashof / Rossby 50

2) Meccanismi di Trasporto pag 15

□ Diffusione Molecolare

$\sim$  Equazione della Diffusione

$\sim$  Soluzioni  $\rightarrow$  Funzione di Green

$\sim$  Soluzione Impulsiva

$\sim$  Soluzione Plottone

$\rightarrow$  Sorgenti Immagine 20/20/30

□ Convezione pag 18

$\sim$  Equazione Diffusione - Convezione

$\sim$  Esempi di Soluzioni

□ Diffusione turbolenta 20

• Teoria di Taylor 20

• Random Walk

□ Dispersione per Shear 23

\* Descrizione matematica (Taylor)

\* Equazione di Dispersione 25

\* Esempi

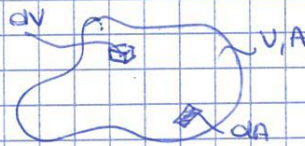
□ Moto Turbolento 26

□ - problemi sull'equazione generale



↳ Teorema di Gauss

$$\int_V \text{div } \vec{Q} \, dV = \int_A \vec{Q} \cdot d\vec{A}$$

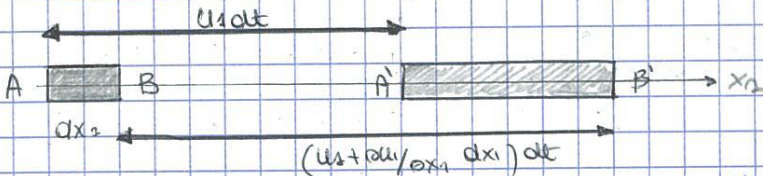


$$\text{div } \vec{Q} = \nabla \cdot \vec{Q} = \frac{\partial Q_i}{\partial x_i}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

↳ Celerità di dilatazione

Consideriamo un elemento  $dx_1$  di un fluido che si muove lungo  $x_1$



Si lascia passare un tempo  $dt$ , e l'elemento si sposta e si allunga

Il stato di tensione è correlato alle deformazioni per tutti i solidi. I fluidi invece difficilmente sopportano tensioni, e quindi la loro deformazione è sufficiente da stimare, poiché non oppongono resistenza.

Per questo motivo si fa riferimento alle VELOCITÀ di deformazione.

La velocità in A in direzione  $x_1$

$(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1)$  velocità in B (che equivale a  $u_1$  in A + la variazione rispetto a  $x_1$ )

$u_1 dt$  spostamento da AA'

$(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1) dt$  spostamento da BB'

$$A'B' = \left[ \left( u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 \right) dt - u_1 dt \right] + dx_1 = dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 dt$$

Voglio descrivere la variazione di lunghezza nel tempo, ma seguendo l'elemento, utilizzo quindi le Derivate Europee

$$\frac{1}{dx_1} \frac{D(dx_1)}{Dt} = \frac{1}{dt} \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

$$= \frac{1}{dt} \frac{1}{dx_1} \left( \underbrace{dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 dt}_{A'B'} - \underbrace{dx_1}_{AB} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

Alcune

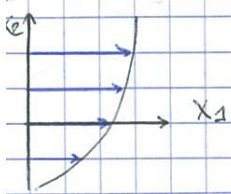
Celerità di Dilatazione  
lineare in una certa direzione = Gradiente di Velocità in questa direzione

$$\frac{1}{dx_1} \frac{D(dx_1)}{Dt} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

$$\frac{1}{dV} \frac{D(dV)}{Dt} = \frac{1}{dx_1} \frac{1}{dx_2} \frac{1}{dx_3} \frac{D(dx_1 dx_2 dx_3)}{Dt}$$

$$\frac{1}{dx_1} \frac{D(dx_1)}{Dt} + \frac{1}{dx_2} \frac{D(dx_2)}{Dt} + \frac{1}{dx_3} \frac{D(dx_3)}{Dt}$$





Moto piano

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

$$u_1 = u_1(x_2)$$

$$u_2 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma \\ \Gamma & 0 \end{pmatrix} \quad \text{matrice celerità}$$

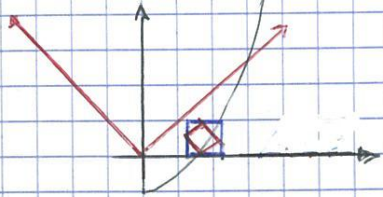
$$E_{11} = E_{22} = 0$$

$$E_{12} = E_{21} = \frac{1}{2} \frac{du_1}{dx_2} = \Gamma$$

A non è biceca, diagonali = 0, quindi sistema  $(x_1, x_2)$  non è comodo e rappresentato  
 tivo

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & \Gamma \\ \Gamma & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = \Gamma \\ \lambda_2 = -\Gamma \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} b^1 = \Gamma \\ b^2 = -\Gamma \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{bisettrice} \\ 2 \text{ quadranti} \end{array} \right.$$



In questo caso non ho Direzione  
 una sola Deformazione

e cambiando Sistema per angoli  
 triangolo costante

## CAPITOLO 1 ~ TURBOLENZA

Il moto laminare sono rari in ambienti naturali, può capitare nei  
 mezzi porosi, ma per la geometria si crea turbolenza

Le caratteristiche della turbolenza sono:

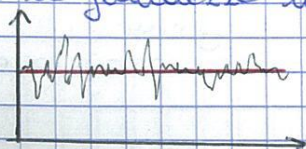
- \* Casualità: la traiettoria sembra guidata dal caso
- \* Non linearità: per esempio il processo soggettivo, il effetto di Reynolds
- \* Diffusività: sostanze solide, liquide, ma anche Temperature
- \* Vorticità: molto complessa, si riesce a studiare a basso turbolenza
- \* Dissipativo: cioè consumo energia
- \* Tridimensionale: condizione necessaria è 3D, in bidimensionale non può esistere  
 ∇. In caso bidimensionale ho solo MOTO LAMINARE

### Quantità Medie

Conoscere la velocità punto a punto, istante per istante, non ha un  
 Gran valore, e impedisce una media di valore.

Questo che si decide di studiare il fenomeno in  
 termini di Grandezze Medie. Ho per fare ciò avremmo risolvere  
 TUTTO il campo Turbolento per poi mediare.

Tutte le grandezze misurate hanno un andamento simile.

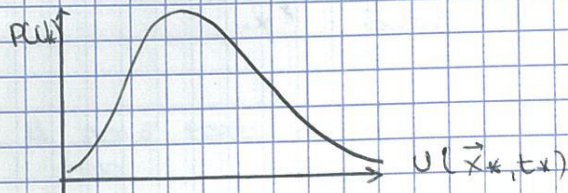


Si cerca di Dissociare il problema Medio  
 dal problema Completo



fissando una certo  $t^*$  e possibile trovare  $U_1, U_2, \dots, U_n$

A seguito di tutte queste manifestazioni è possibile fare la media e studiare la sua distribuzione - con la sua Densità di Probabilità



Ci descrive la probabilità di avere un determinato valore.

Media d'Insieme è quindi la media di tutti i possibili valori che possono capitare nel punto  $x^*$ , nel tempo  $t^*$

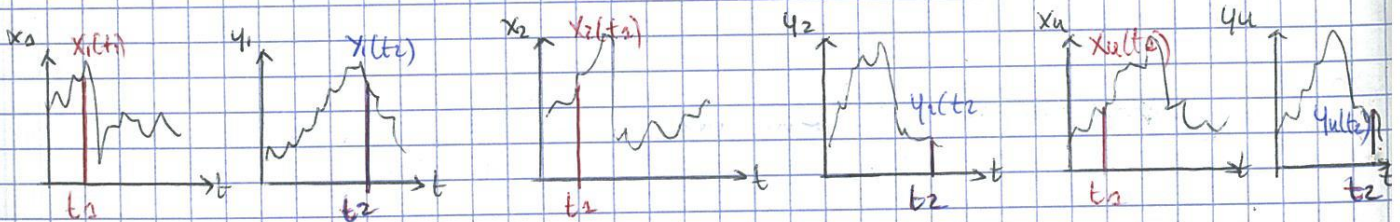
$$\langle U(x^*, t^*) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} U_* p(U_*) dU_* \quad \langle \cdot \rangle$$

- Dovrei quindi definire questo valore  $\langle \cdot \rangle \forall x, \forall t$
- Non offre dei problemi al tempo
- Operatore trasformatore, lineare

$$* \quad \left\langle \frac{\partial U}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle U \rangle \quad * \quad \left\langle \int U dx \right\rangle = \int \langle U \rangle dx$$

### Covarianza & Correlazione

Può essere interessante studiare come due variabili differenti, viste come un processo stocastico, siano legate fra loro. Per questo si fanno tante realizzazioni nel tempo delle 2 variabili



Ci si fissa su due tempi:  $t_1$  per  $x$  e  $t_2$  per  $y$  e si estraggono le coppie di valori

$$x_1(t_1) y_1(t_2), \dots, x_n(t_1) y_n(t_2)$$

Si ricerca ora di capire quanto sono legati  $x(t_1)$  e  $y(t_2)$

per questo faccio il prodotto delle due variabili a coppie. In modo da portare ad  $n$  coppie e  $n$  valori

$x(t_1) y(t_2) \rightarrow$  Abbiamo in questo modo la popolazione e la sua distribuzione di probabilità.

$$\rightarrow \text{COVARIANZA} = R_{xy}(t_1, t_2) = \langle x(t_1) y(t_2) \rangle$$

media all'interno del prodotto



Auto Correlazione - Auto Covarianza

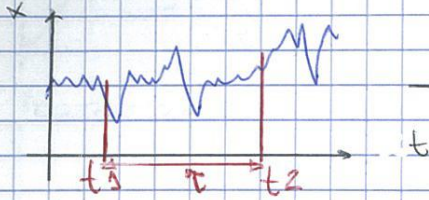
Si tratta di studiare come una variabile si comporta rispetto a se stessa o tempi diversi, distanza  $\tau$

AUTO COVARIANZA

$R_{xx}(\tau)$

AUTOCORRELAZIONE

$\rho_{xx}(\tau) = \rho_{xx}(t_1, t_2) = \frac{\langle x(t_1)x(t_2) \rangle}{\langle x^2 \rangle}$



Si definisce anche AUTO CORRELOGRAMMA che indica di quanto è ritardato come varia l'Autocorrelazione

$\tau=0 \rightarrow \rho(\tau=0) = \frac{\langle x(0)x(\tau) \rangle}{\langle x^2 \rangle} \Rightarrow \rho_{xx}=1$  correlato con se stesso

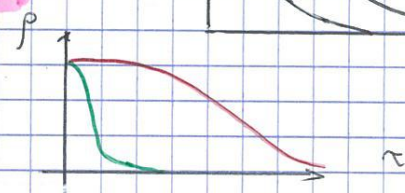
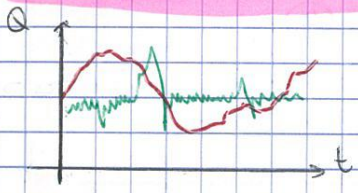
Se il fenomeno è STAZIONARIO è importante solo "tau" e non t1 e t2

$\tau > 0 \rightarrow$  si sceglie, poiché ho nuove informazioni

La maniera in cui decade indica quale è la MEMORIA del PROCESSO



- Rio Amazzoni  
- bacino figure



Le Scale di questi due Sistemi Sono HOLT diversi, funzione in questo caso del tempo di correlazione del bacino.

! Nel caso di un fenomeno "Puramente Casuale" Autocorrelazione va subito a zero.

A Senso per una funzione del genere calcolarsi la Scala Integrale

$$J = \int_0^{\infty} \rho(\tau) d\tau$$

Rio Amazzoni -> In settimana  
! vede sempre è solo legami lineari

Nei casi in cui  $J \rightarrow \infty$  la variabile ha un'alta correlazione

Il sistema si dice ERGODICO se  $J < \infty$ , ovvero se è finito, ovvero se prima o poi va a zero.



Quando ciò succede per tempi infiniti

$$\langle \cdot \rangle = \cdot$$

Se  $\rho=0$ , sistema ha poca memoria lineare rispetto a ciò che è stato  $\tau^*$  prima.

Cio che accade ora non è legato a ciò che era  $\tau^*$  prima, è come se il segnale fosse NUOVO, quindi ho tante realizzazioni una in seguito all'altra, indipendenti fra loro.

! fare la media temporale su tempi molto lunghi è come se facessi la media di 2 eventi scorrevoli



# EQUAZIONE del MOTO di un FLUIDO NEWTONIANO

Le equazioni per descrivere il moto di un fluido Newtoniano sono due

\* Equazione di Continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

\* Equazione della quantità di moto

$$\rho(\vec{R}-A) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{u}$$

Dalla prima equazione, che descrive il principio di conservazione della massa, possiamo avere che

$$[\rho = \text{cost}]$$

$$\rightarrow \text{div}(\rho \vec{u}) \rightarrow \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \rightarrow \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$$

Sostituendo  $\left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right\} = 0$  (\*)

→ ma  $\left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right\}$  si può esprimere come:

① variazione

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \iff \frac{D\rho}{Dt} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{D\rho}{Dt}$$

$\frac{D\rho}{Dt}$ : Accel. locale  
 $u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$ : acc. convettiva

per cui abbiamo

$$(*) \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

② variazione locale della densità di una particella (come se stessi a correre lo stesso cavallo)

$\frac{D\rho}{Dt}$ : ci descrive come varia la densità

$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ : descrivono i gradienti spaziali nel campo di moto

! Se fluido è Incompressibile  $\rho = \text{costante}$

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

- $\text{div}(\text{Campo Moto})$  Nullo  $[\text{div}(u) = 0]$
- Campo di Moto Solenoidale

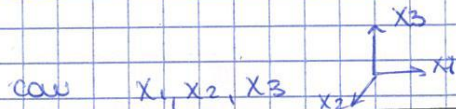
! I gradienti di velocità si compensano → Non si formano buchi  
 ~ la sommatoria è Nullo - Sono vincolati ~

2) Dato seconda equazione della quantità di moto  $\rho(\vec{R}-A) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{u}$   
 Navier Stokes

$\vec{R}$ : intensità delle forze di massa

$$\vec{A} = \frac{D\vec{u}}{Dt} \quad \text{accelerazione della Eulero}$$

$$\vec{R} = -g$$



Si  $\vec{z} \rightarrow$  in direzione  $x_3$ !

Si ottiene dunque

$$\rho \left( -\vec{g} - \frac{D\vec{u}}{Dt} \right) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{u}$$

$$\rho \left( -g \delta_{i3} - \frac{D u_i}{Dt} \right) = \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

con  $i, j = 1, 2, 3$   
 Tutti i fluidi newtoniani rispondono a queste

$$\frac{D u_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - g \delta_{i3}$$



# EQUAZIONE delle QUANTITÀ MOTO MEDIO

1<sup>a</sup> equazione delle quantità moto a valle

$$\frac{D\vec{u}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial x_j} - g \delta_{i3}$$

$$* \frac{D\vec{u}_i}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} + \vec{u}_j \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial x_j}$$

Approssimiamo la decomposizione di Reynolds

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{U}_i + u_i) + (\vec{U}_j + u_j) \frac{\partial (\vec{U}_i + u_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} (\vec{U}_i + u_i) - g \delta_{i3}$$

2<sup>a</sup> Approssimiamo operatore medio, tenendo presente che Medio (Somma) = somma (media)

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} (\vec{U}_i + u_i) \right\rangle + \left\langle (\vec{U}_j + u_j) \frac{\partial (\vec{U}_i + u_i)}{\partial x_j} \right\rangle = -\frac{1}{\rho} \left\langle \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\rangle + \nu \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} (\vec{U}_i + u_i) \right\rangle - g \delta_{i3}$$

$$1. \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (\vec{U}_i + u_i) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle (\vec{U}_i + u_i) \rangle = \frac{\partial}{\partial t} U_i + \frac{\partial}{\partial t} \langle u_i \rangle = \frac{\partial U_i}{\partial t}$$

$$2. \left\langle (\vec{U}_j + u_j) \frac{\partial (\vec{U}_i + u_i)}{\partial x_j} \right\rangle = \vec{U}_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \vec{U}_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \langle u_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \langle u_j \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$= \vec{U}_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \langle u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \rangle = \vec{U}_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j}$$

$$d(a \cdot b) = a \cdot db + b \cdot da$$

$$\langle u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \rangle = \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j} - \langle u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \rangle = \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j}$$

$$3. -\frac{1}{\rho} \left\langle \frac{\partial (p+p)}{\partial x_i} \right\rangle = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

\* indici ripetuti \* eq. continuità è zero non ho + turbolenza

$$4. \nu \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} (\vec{U}_i + u_i) \right\rangle = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U_i}{\partial t} + \vec{U}_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - g \delta_{i3}$$

Non è ausito l'escensione delle componenti di agitazione turbolente

zufatti zionale  $\langle u_i u_j \rangle$

Questo perché non è una scomposizione lineare

$$\langle u_i \rangle = 0$$

$$\langle u_j \rangle = 0$$

$\nabla \langle u_i u_j \rangle \neq 0 \nabla \Rightarrow$  CROSS VARIANZA dei Termini di Agitazione Turbolente, che comunque influisce

le moto medio

→ Questo è causato dal termine NON LINEARE, che ha comunque effetto sulle grandezze scali



# EQUAZIONE (del Bilancio) dell' ENERGIA CINETICA del FLUIDO

MEDIO

Per muovere l'acqua nel tubo è necessaria Energia,

> Prendo l'eq di Navier Stokes MEDIA

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \tau_{ij} \rangle}{\partial x_j} - g \delta_{i3}$$

con  $\langle \tau_{ij} \rangle = -\rho S_{ij} + 2\mu E_{ij} - \rho \langle u_i u_j \rangle$

$2E_{ij}$  Tensore di deformazione di deformazione

$$2E_{ij} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

\* Moltiplico tutto per  $U_i$ , così ottengo  $( )^2$

$$\uparrow U_i \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} U_i^2 \right)$$

en. cinetica per unità di massa

poiché  $\frac{1}{2} \frac{\partial U_i^2}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial U_i \frac{\partial u_i}{\partial t}}{\partial t} = U_i \frac{\partial u_i}{\partial t}$

2)  $U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} U_i^2 \right)$  idem

3)  $U_i \cdot \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \tau_{ij} \rangle}{\partial x_j} \right] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i \langle \tau_{ij} \rangle) - \frac{1}{\rho} \langle \tau_{ij} \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$

poiché  $\frac{\partial}{\partial x_j} (U_i \langle \tau_{ij} \rangle) = U_i \frac{\partial \langle \tau_{ij} \rangle}{\partial x_j} + \langle \tau_{ij} \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$  Derivata del prodotto

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} U_i^2 \right) + U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} U_i^2 \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i \langle \tau_{ij} \rangle) - \frac{1}{\rho} \langle \tau_{ij} \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - g \delta_{i3} U_i$$

\* Sostituisco  $\tau$  e Accoppo

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} U_i^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\frac{1}{\rho} U_i \rho S_{ij} + 2\mu U_i E_{ij} - \langle u_i u_j \rangle U_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i \langle \tau_{ij} \rangle)$$

$$+ \frac{1}{\rho} \rho S_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - 2\mu E_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - g U_i \delta_{i3}$$

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} U_i^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} ( ) - 2\mu E_{ij} E_{ij} + \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - g U_i \delta_{i3}$$

\*  $-2E_{ij}E_{ij} = -2\mu E_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$  poiché  $E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  Somma e sottrazione delle derivate

Termine 1  $\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} U_i^2 \right)$  come variazione energia cinetica

$\nabla \cdot \frac{1}{\rho} \rho S_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \rightarrow$  per  $i=j$   $\delta_{ij}=1$  ma  $\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = 0$   
per  $i \neq j$   $\delta_{ij}=0$



Analizziamo il NUMERATORE  $2\nu E_{ij}^2$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Sono Somma di Gradienti di Velocità Media

$$\text{Gradiente Velocità} = \frac{U}{L}$$

$U$ : scala tipica della velocità del processo (Aereo, Motoscafo, Diffusione)  
 $L$ : scala tipica della lunghezza

Num:  $\nu \left( \frac{U}{L} \right)^2$

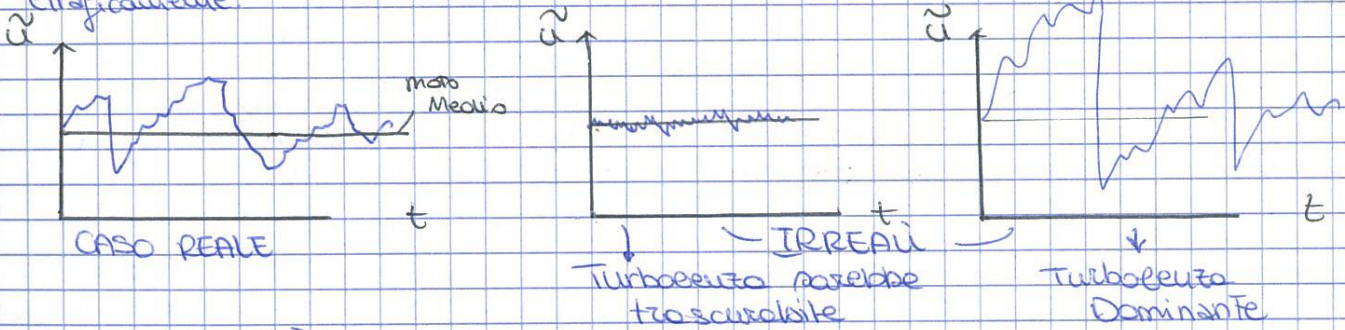
Denominatore:  $\langle u_i u_j \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Rightarrow U^2 \left( \frac{U}{L} \right)$

$$\Rightarrow \frac{\nu \left( \frac{U}{L} \right)^2}{U^2 \left( \frac{U}{L} \right)} = \nu \frac{1}{U L} \quad \text{poiché } \nu < 10^{-6} \rightarrow \ll 1$$

da conseguenza  $\text{den} > \text{num} \Rightarrow$  turbolenza è dominante, e non è trascurabile

per questo sono costretti a trascurare le termine  $2\nu E_{ij}^2$

Graficamente



È tutta questione di scale di rappresentazione

per cui





SCALE di TURBOLENZA Kolmogorov:  $Re = \frac{10^4 \cdot 10}{10^{-2}} = 10^6$   $\eta = \sqrt[4]{\frac{10^{-12}}{10^2}} = \sqrt[4]{10^{-14}} = 10^{-3.5}$

La turbolenza vive perché qualcuno/quedacchi per fornire energia su particolare è necessario avere un confronto con i propri di velocità.

\* Scale Massime



Sono delle scale dei fenomeni, quindi in generale pari ad L. Hanno determinate CARATTERISTICHE:

- Estraggono Energia dal moto medio (ad es. con Vortex stretching)
- Sono sostanzialmente Non VISCOSE
- Richiedono delle condizioni al contorno, poiché sono grandi e toccano i "bordi". Ad esempio per un fiume è importante capire le caratteristiche del fondo, onde, massi, ...

Estraggono energia, ma Non Sono Viscose, per questo si passano a bordi che vivono dentro vortici più grandi.

\* Scale Intermedie (Inerziali)



Si studiano un flusso di Energia (E) che caratterizza queste scale. Cominciano a diventare molto piccole (Studio di Kolmogorov).

- > Non richiedono delle condizioni al contorno, → diventano per questo universali; cioè sono legate solo all'energia che per scala
- > Universalità
- > Non richiedono delle viscosità. Sono ancora sufficientemente grandi. Questa comincia a fare effetto quando  $-2\nu \langle \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \rangle$  diventa molto grande

\* SCALE PICCOLE (Viscose)

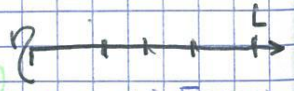
Man mano che riduca le vortici, maggiori la velocità aumenta, ma raramente lo distacca. Quindi i gradienti diventano molto grandi.

$-2\nu \langle \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \rangle \rightarrow \epsilon_{ij} \propto \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$   $\eta \rightarrow \eta \rightarrow \eta$

$\epsilon_{ij}$  compense le viscosità piccole (della viscosità cinematica).

Comunque la viscosità ORA sottrae Energia, e dissipa come calore.

\* SCALA MINIMA ~ MicroScale ai Kolmogorov



Scale più piccole per Terreno  $\pi$ ,  $\eta$  è funzione di  $\nu$  e del flusso di Energia.

$\eta = A \sqrt[3]{\frac{\nu^3}{\epsilon}}$

A = costante  $\approx 1$

Considerazioni: > la scala + piccola

per ridurre la scala metà → 16 volte energia

$\epsilon \propto \nu^{3/4} \epsilon^{1/4}$

$\eta$  è molto + Grande in cui inizia ad essere le molecole



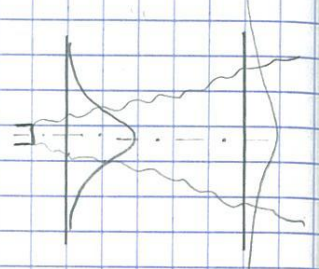
# TURBOLENZA LIBERA

DE ⇒ Domanda d'Esame da ora in poi

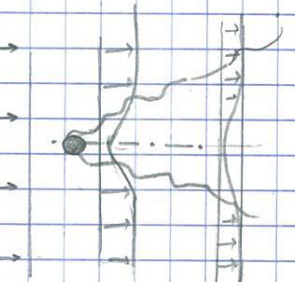
Nuovo libero interno costringe, in maniera deterministica, il fluido a realizzare condizioni definite; Non è confinato ed è completamente libero. A differenza della turbolenza di parete che ha al suo interno un caso di DETERMINISMO.

Esempi: 3 casi

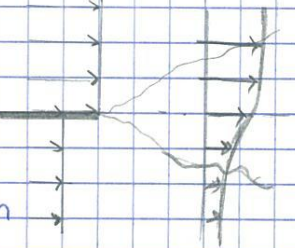
GETTI: immissione di fluido in fluido fermo. Si immaginano le Borse dei Getti, man mano che vanno coltando, inglobano il fluido vicino. Il profilo di velocità media, sarà MASSIMA al centro, e decresce. Oscilla o causa delle scorie grandi ma se mi avvicino al getto è più raccolto con  $v_c$  più alta.



SCIIE: Si ha la presenza di un CORPO RIGIDO investito da una corrente uniforme, dietro per l'oggetto si forma la scia. Il profilo di velocità media è più piatto dietro al corpo, e omogeneo invece in lontananza. Dietro al corpo è possibile avere più turbolenza.



MIXING LAYER: 2 correnti con velocità uniforme diverse che vengono a contatto, e a CAUSA dell'ATTRITO si genera scia turbolenta. Il profilo di velocità media più mi allontano tanto più si osserva l'effetto. (Correnti Oceaniche - Atmosfera)



## CARATTERISTICHE COMUNI

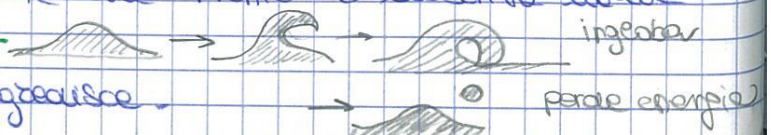
1) INTERMITTENZA: Se io mi posiziona in punti (particolari) posso ritrovarmi ad "intermittenza", soggetto a turbolenza oppure no. Questo è caratterizzato dal rapporto di fra Tempo di presenza Turbolenta e Tempo totale esposizione.

$$\gamma = \frac{T_{turb}}{T_{tot}} < 1 \quad \text{COEFFICIENTE di TURBOLENZA}$$

Man mano che mi allontano dall'oste  $\gamma \rightarrow 0$  è tipico della turbolenza libera.

2) INGLOBAMENTO: prende sempre il getto ad esempio, e si può definire che le confine fra turbolenza e moto è NETTO, lo spessore della TRANSIZIONE è dell'ordine della MICROSCALA di KOLMOGOROV; dipende se si è inglobato dal fenomeno, poiché la frontiera è in continuo movimento, evolve. Evoluzione del fronte è descritta come ingloba.

Dinamica dei Fronti: È una lotta tra turbolenza e moto non uniforme, o si espande o restringe.





\* I: inerzie locali: ma predichiamo così che variano nel tempo per questo:  $I=0$

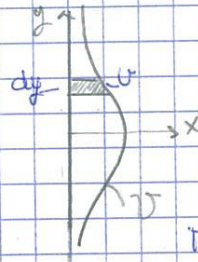
\* He-tu: il flusso non è solo  $ax$  e  $Sx$ , ma ho anche superfici sopra e sotto ma poiché  $\int \dot{x}$  sopra non cambia! Calo solo  $ax$  e  $Sx$   
 $He = tu$  Non vince dice portata costante!!  
 poiché ho ingombro!!  
 rimane costante  
 il FLUSSO della QTA MOTO!

$\rightarrow \underbrace{0 + 0 + 0 + He - tu = 0}$

Si deve ora cercare di scrivere  $M$ .

$M = \rho Q U = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} U^2 dy$

$\nabla$   $U = \text{costante}$  per ciò che è stato detto



$dQ = U \cdot dy \cdot 1$   
 $dQ U = U^2 dy$   
 $Q U = \int_{-\infty}^{+\infty} U^2 dy$   
 $M = \rho Q U = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} U^2 dy$

\* Si ricava ora  $U$  sfruttando Autosimilitudine

$\frac{U}{U_c} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) \Rightarrow U = U_c f\left(\frac{y}{\delta}\right)$

Quindi:  $M = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} U_c^2 f^2\left(\frac{y}{\delta}\right) dy$   
 $M = \rho U_c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \frac{d\left(\frac{y}{\delta}\right)}{\delta} \cdot \delta$

$dy = d\left(\frac{y}{\delta}\right) \cdot \delta$   
 cambio variabili  
 anche  $\delta$  costante  $f$  funzione ("lucca")

$M = \rho U_c^2 \delta \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \text{costante } U_c^2 \text{ e } \delta \text{ dipendono da } x$   
 $U_c^2 \delta$  non dipendono da  $y$

$\rho = \text{costante}$   
 $M = \text{costante in } x$   
 $\int_{-\infty}^{+\infty} = \text{costante universale}$

$U_c^2 \delta = \text{costante in } x$  Anche se  
 non è  $f(x)$   $U_c = f(x)$   
 $U_c^2(x) \delta(x) = \text{cost in } x$   $\delta = f(x)$

Uscita al centro  $\delta = \text{costante}$

Ma ora cerchiamo come varia  $\delta$ , per questo devo cercare cause trascinamento

$U_c$   
 $\rightarrow$  Teorema II

$U_c = U_c(x, M, \rho, \mu)$

pt $\uparrow$  non iniziale

Non è sempre importante!  
 È rilevante solo con parete dove non ho turbolenza  
 Solo se avessi finiti col Re  $\downarrow$  da essere laminare

$\Rightarrow U_c = A \sqrt{\frac{M}{\rho x}}$

$U_c \propto x^{-1/2}$

A: sperimentalmente

$\delta \propto x$  Dimostrato

$U_c^2 = \text{costante}$

$(x^{-1/2})^2 \delta = \text{cost}$

$\delta = \frac{\text{cost}}{x^{-1}} = x \cdot \text{costante}$

Lineare



# TURBOLENZA alla PARETE

(DE)

ci si vuole come è il profilo di velocità medio in presenza di ostacoli come una parete. Si ipotizza una corrente turbolenta che fluisce a valle, ed è viscoso; a contatto con la parete la velocità è zero [vincolo deterministico], e questo vincolo in qualche modo anche il fenomeno stocastico del determinismo è sempre meno influenzato man mano che mi allontanano dalla parete.



però tutte le grandezze medie sono influenzate dalla turbolenza e quindi non è sufficiente limitarsi alle condizioni medie.

Si introduce il Teorema II con Millikan

Si immagina di dividere in diverse zone il fluido, in "strati"

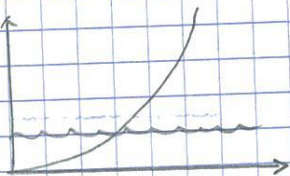
## STRATO di PARETE ~ INNER LAYER

(DE)

Il campo di moto vicino zona della parete dipende da

$$U = U(y, \rho, \nu, \tau_0)$$

La porzione di questo strato in realtà non è limitato ma è ondulato.



Spazio, densità, viscosità cinematica. Se fluido fosse perfetto la velocità alla parete  $\neq 0$ . Poiché viscoso si generano tensioni tangenziali che far sì che il fluido ha la stessa velocità della parete. Parete ferma  $\rightarrow U=0$ . Tensioni tangenziali: motore del fluido, dal fluido alla parete e viceversa. Ma queste sono legate al gradiente di velocità.

$$U = \frac{m}{s} \rightarrow y = m$$

$$\nu = \frac{m^2}{s}$$

$$\tau_0 = \frac{kg}{m \cdot s^2}$$

$$\rho = \frac{kg}{m^3}$$

in qualche modo  $kg/m^3$  deluso di nuovo

$$\Rightarrow \frac{\tau_0}{\rho} = \frac{kg}{m \cdot s^2} \cdot \frac{m^3}{kg} = \frac{m^2}{s^2} = \left(\frac{m}{s}\right)^2 \text{ è una velocità!}$$

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = U_*$$

grandezza tipica dei moti turbolenti

VELOCITÀ d'ATTACCO

ma dunque

$$U = U(y, \nu, U_*)$$

così convergo solo (L, T)

con Teorema II

$$\frac{U}{U_*} = f\left(\frac{y U_*}{\nu}\right) \Rightarrow U^+ = f(y^+)$$

(Adimensionalizzato  $\nu$  con  $U_*$  e  $y$  proiettato nella direzione di  $U_*$ )

non conosco  $f$  adimensionale

$U^+$  e  $y^+$  sono adimensionalizzate rispetto  $y$  e  $U_*$

Consente di individuare le scale reali del problema. In questo caso si individua che le scale caratteristiche delle velocità non è  $U$  ma  $U/U_*$  la scala delle lunghezze  $y = \nu/U_*$



$$\frac{U_*^2}{\nu} \frac{df}{dy^+} = \frac{U_*}{\delta} \frac{dF}{d\xi} \quad \times \quad \frac{y}{U_*} \quad \text{moltiplica}$$

$$\frac{U_*^2}{\nu} \cdot \frac{y}{U_*} \frac{df}{dy^+} = \frac{U_*}{\delta} \cdot \frac{y}{U_*} \frac{dF}{d\xi} \quad \rightarrow \quad \frac{U_* \cdot y}{\nu} = y^+ \quad \frac{y}{\delta} = \xi$$

$$y^+ \frac{df}{dy^+} = \xi \frac{dF}{d\xi}$$

1° membro → solo  $y^+$   
2° membro → solo  $\xi$

Come è possibile che si verifichi  $f(x)=g(y)$  solo se sono entrambi pari a una costante

$$y^+ \frac{df}{dy^+} = \xi \frac{dF}{d\xi} = \frac{1}{k}$$

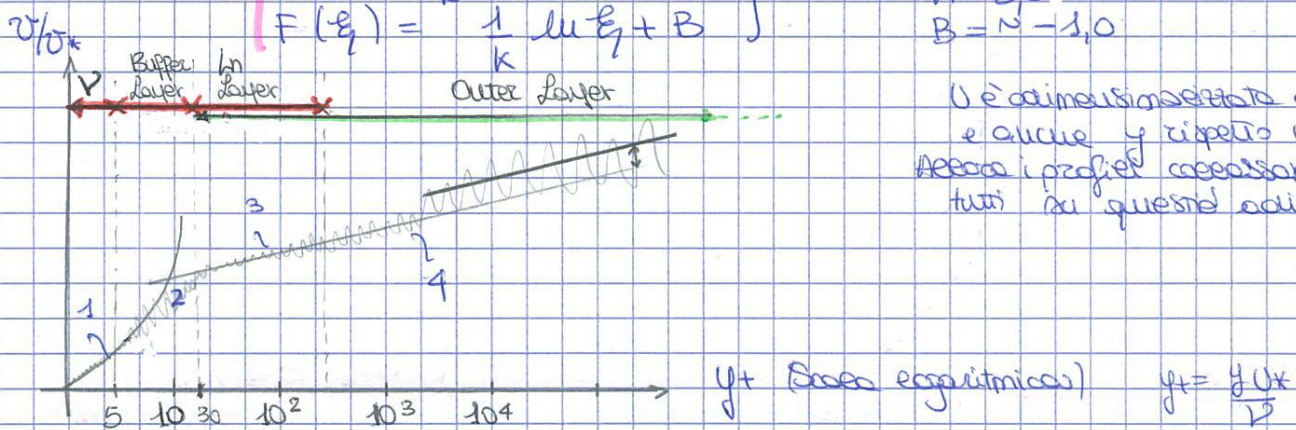
$$\times \quad \frac{df}{dy^+} = \frac{1}{ky^+} \quad \rightarrow \quad f \text{ Struttura di } \ln$$

$$\times \quad \frac{dF}{d\xi} = \frac{1}{k\xi} \quad \rightarrow \quad F \text{ Struttura di } \ln$$

Necca zona di sovrapposizione  $f$  e  $F$  hanno la stessa STRUTTURA possono essere un Logaritmo

→ OVERLAP LAYER → LOGARITMIC LAYER

$$\left. \begin{aligned} f(y^+) &= \frac{1}{k} \ln y^+ + A \\ F(\xi) &= \frac{1}{k} \ln \xi + B \end{aligned} \right\} \text{ con esperimenti } \begin{aligned} A &= 5.0 \\ B &= N - 1.0 \end{aligned}$$



- 1) legge lineare che su Semi-logaritmico è logaritmica. Falso al  $y^+ = 5 \Rightarrow$  Punt. Sperimentali necessano molto bene su questo modello del sottostato viscoso [ESISTE] (0-5)
- 2) Punt. Sperimentali non sono vicini ne a legge del sottostato ne del logaritmico layer dell'overlap.  $\nabla$  se  $y^+ = 20 \Rightarrow y = \frac{20\nu}{U_*}$  ma  $U_* = 10 \Rightarrow \frac{20\nu}{10} = 2\nu$  [5-30] se  $\nu = 10^{-6}$
- 3) Punt. si dispongono molto bene su layer [30-200] esiste ed è ben descritta in overlap
- 4) Siamo vicini a un paio di cm dalla parete, i punti si allargano mano mano i punti adempiono stesse condizioni esterne, e stesse condizioni del campo di moto e stesse condizioni al contorno. Dunque la media si allontana dalla legge logaritmica.



## CAPITOLO 2. MECCANISMI di TRASPORTO

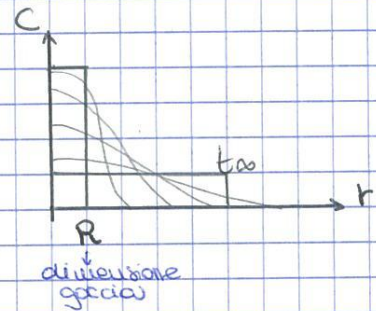
In natura ne esistono diversi, sono sempre mediati dai fluidi, e portano sempre a un miscelamento.

Traiamo:

- > Diffusione Molecolare : rimane un paradigma
- > Diffusione Turbolenta
- > Dispersione per shear
- > Sedimentazione / galleggiamento

D-E / scritto 3V  
Diffusione Molecolare soluzione

Si basa sulla legge di Fick



Esempio: miscelamento di una sostanza colorante con la stessa densità acqua. Senza generare campo di moto, spunta - neamente questa a  $t \rightarrow \infty$  si omogeneizza.

Studiando il grafico  $[C; r]$  si vede che

- il processo tende a smorzare il gradiente, e a  $t \rightarrow \infty$  la bicchiere a la stessa concentrazione.

All'inizio è più veloce, procede più rapidamente, si evidenzia come l'EFFICACIA della DIFFUSIONE dipende dal gradiente.

È più intensa tanto più il gradiente è elevato

- Si evidenzia come il processo è ISOTROPO
- il processo è IRREVERSIBILE (poiché si guarda un processo microscopico a livello macroscopico)

$$\vec{q} = -D \nabla C$$

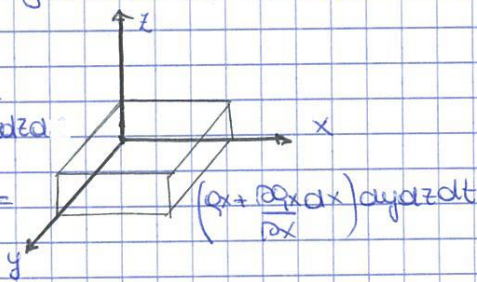
$\vec{q}$  flusso  
 $-D$  scalare (matrice isotropo/anisotropo)  
 (-) dalle più alte alle + basse  
 $\nabla C$  gradiente di concentrazione

Vediamo ora il BILANCIO di MASSA

raffacciando i 2 membri nella stessa direzione

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz dt - \frac{\partial q_y}{\partial y} dx dy dz dt - \frac{\partial q_z}{\partial z} dx dy dz dt = \frac{\partial C}{\partial t} dt dx dy dz$$

variazione di massa



$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z}$$

sostituisco la legge fenomenologica  
 $q_x = -D \nabla C_x$      $q_z = -D \nabla C_z$   
 $q_y = -D \nabla C_y$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\text{div} \vec{q}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\text{div} (-D \nabla C) \rightarrow \frac{\partial C}{\partial t} = D \nabla^2 C$$

Equazione della Diffusione molecolare

È necessario capire se l'equazione è lineare oppure Non lineare

$L(u+v) = L(u) + L(v) \rightarrow$  lineare

$N(u+v) \neq N(u) + N(v) \rightarrow$  Non lineare

dove  $L$  e  $N$  sono due operatori



Soluzione Impulsiva dell'Equazione di Diffusione Molecolare

con T. P.  $C = C(t, x, D, M)$  CC non ancora niente, CI introduciamo M  
 $t = [s]$   $x = [m]$   $D = [m^2/s]$   $M = [kg]$   $C = [kg/m^3]$

Scego come grandezze fondamentali  $t, D, M$

$$\frac{C}{M/\sqrt{4Dt}} = f\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)$$

1° membro:  $M/\sqrt{4Dt}$  x adimensionalizzato

2° membro:  $f$  funzione opportuna adimensionalizzata

$$\text{se } \eta = \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \rightarrow C = \frac{M}{\sqrt{4Dt}} \cdot g(\eta)$$

$g(\eta)$  con  $\eta = \eta(x, t)$   
 $g$  è funzione di 1 sola variabile

\* Mi chiedo come è fatta  $g(\eta)$  per questo sostituisco questa derivazione nell'equazione per trovare  $g(\eta)$ .

$$\left\{ \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right\}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{M}{\sqrt{4Dt}} \left( \frac{-1}{2} \right) \frac{1}{t^{3/2}} \cdot g(\eta) + \frac{M}{\sqrt{4Dt}} \frac{dg}{d\eta} \frac{x}{\sqrt{4D}} \frac{1}{t^{3/2}} \left( \frac{-1}{2} \right) \frac{1}{d\eta dt}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{M}{\sqrt{4Dt}} \cdot \frac{dg}{d\eta} \frac{1}{\sqrt{4Dt}} \rightarrow \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{M}{\sqrt{4Dt}} \frac{d^2g}{d\eta^2} \frac{1}{4Dt} \left( \frac{1}{\sqrt{4Dt}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4Dt}} \right)$$

Sostituendo:  $\frac{M}{\sqrt{4Dt}} \left( \frac{-1}{2} \right) \frac{1}{t^{3/2}} g(\eta) + \frac{M}{\sqrt{4Dt}} \frac{dg}{d\eta} \frac{x}{\sqrt{4D}} \frac{1}{t^{3/2}} \left( \frac{-1}{2} \right) = \frac{DM}{\sqrt{4Dt}} \frac{d^2g}{d\eta^2} \frac{1}{4Dt}$

$$\frac{-M}{2t^{3/2}\sqrt{4Dt}} g(\eta) - \frac{M}{2t^{3/2}\sqrt{4Dt}} \frac{x}{\sqrt{4D}} \frac{dg}{d\eta} - \frac{DM}{4Dt\sqrt{4Dt}} \frac{d^2g}{d\eta^2} = 0$$

$$\frac{4 \cdot t^{3/2}}{-M} \left( \frac{-M}{2t^{3/2}\sqrt{4Dt}} g(\eta) - \frac{M}{2t^{3/2}\sqrt{4Dt}} \frac{x}{\sqrt{4D}} \frac{dg}{d\eta} - \frac{DM}{4Dt\sqrt{4Dt}} \frac{d^2g}{d\eta^2} \right) = 0$$

$$2g(\eta) + 2 \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \frac{dg}{d\eta} + \frac{d^2g}{d\eta^2} = 0$$

$$2g(\eta) + 2\eta \frac{dg}{d\eta} + \frac{d^2g}{d\eta^2} = 0 \quad (1)$$

Sono riuscito a passare da equazioni alle derivate parziali a equazioni alle derivate ordinarie. MA ho introdotto un termine non lineare. Si tratta di una equazione esatta di Eulero

$$\frac{d}{d\eta} \left( 2\eta g(\eta) + \frac{dg}{d\eta} \right) = 0$$

riscrivo come se fosse la derivata di (2) che risulta 3° ordine

Ma poiché uguale a zero secondo

$$2\eta g(\eta) + \frac{dg}{d\eta} = \text{costante}$$

con le C.C. cost = 0

$$g = C e^{-\eta^2} \quad \text{Gaussiana}$$



$$C(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\varepsilon)}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-\varepsilon)^2}{4Dt}} d\varepsilon$$

$f(\varepsilon)d\varepsilon$  cambio variabile, e rappresenta la massa

$(x-\varepsilon)$  poiché la massa non è in  $x=0$ , ma in un'altra  $\varepsilon$

Esempio dominio  $x$ , istante  $t=0$ , con paratois (dx)  $G$  destra sinistra  $sx C=0$   
 successivamente rimuovo la paratois. Studio



$C(x,t)$

C.I

$$C(x,t=0) = \begin{cases} C_0 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$C(x,t) = \int_{-\infty}^0 0 + \int_0^{+\infty} C_0 e^{-\frac{(x-\varepsilon)^2}{4Dt}} d\varepsilon = 0 \text{ poiché } C=0$$

$(0; +\infty)$  la  $f(\varepsilon)$  è costante pari a  $C_0$

$$C(x,t) = \int_0^{+\infty} \frac{C_0}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-\varepsilon)^2}{4Dt}} d\varepsilon$$

si tratta cioè di una gaussiana ovvero la probabilità cumulata

Per risolvere l'integrale cambio variabile

$$u = \frac{x-\varepsilon}{\sqrt{4Dt}} = \frac{x}{\sqrt{4Dt}} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{4Dt}} \Rightarrow du = -\frac{1}{\sqrt{4Dt}} d\varepsilon \quad d\varepsilon = -du \sqrt{4Dt}$$

$$\varepsilon=0 \Rightarrow u = \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \quad \varepsilon=+\infty \Rightarrow u = \frac{x-\varepsilon}{\sqrt{4Dt}} = -\infty$$

cambio estremi integrazione

$$C(x,t) = \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} \frac{C_0}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-u^2} \sqrt{4Dt} du$$

$$C(x,t) = \frac{C_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} e^{-u^2} du = \frac{C_0}{\sqrt{\pi}} \left[ \int_{-\infty}^0 e^{-u^2} du + \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} e^{-u^2} du \right]$$

$$= \frac{C_0}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} e^{-u^2} du \right]$$

per risolvere DEVO INVENTARMI una FUNZIONE !!

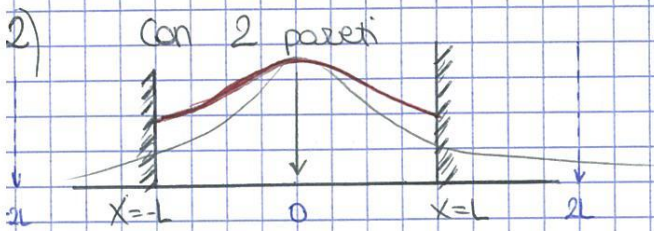
Error Function  $\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon$

$$\int_0^z e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{erf}(z)$$

$$C(x,t) = \frac{C_0}{2} \left[ 1 + \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \right]$$

con paratois





La presenza delle pareti impedisce il flusso e su queste il derivato è nullo

La soluzione non è di 3 Semplici in  $0, 2l, -2l$ , poiché con una biacquia in maniera concreta,  $-2l$  biacquia 0 poi derivate approssimare una cp per biacquia  $+2l$

⇒ Devo inserire una Somma

$$C(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{(x+2nl)^2}{4Dt}}$$

$n = n^{\circ}$  delle Semplici tra loro ortogonalmente

Casi Bidimensionali

3) 3 variabili  $x, y, t$  (Ad esempio un lago)

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$

per risolvere questo separo le variabili

Ricerca  $C(x,y,t) = C_1(x,t) \cdot C_2(y,t)$  così ho due  $\nabla$

Sostituisco  $C_1 \frac{\partial C_2}{\partial t} + C_2 \frac{\partial C_1}{\partial t} = D_x C_2 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + D_y C_1 \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2}$

$$C_1 \left[ \frac{\partial C_2}{\partial t} - D_y \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2} \right] + C_2 \left[ \frac{\partial C_1}{\partial t} - D_x \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} \right] = 0$$

per essere nullo può essere due:  $\times C_1 = C_2 = 0$  Soluzione banale  
 $\times [ ] = [ ] = 0$

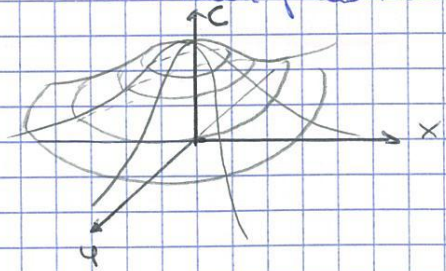
Ma io conosco le soluzioni di  $[ ]$  sono Gaussiane in  $x$  e in  $y$ , tridimensionali

La  $C(x,y,t)$  è il prodotto delle 2 soluzioni

$$C(x,y,t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi t} \sqrt{D_x D_y}} e^{-\frac{x^2}{4D_x t} - \frac{y^2}{4D_y t}}$$

è tratto da una gaussiana 2D

Se  $D_x = D_y \Rightarrow$  Simmetrica  $\Rightarrow$  Cerchi  
 $D_x \neq D_y \Rightarrow$  Asimmetrica  $\Rightarrow$  Ellissi



Casi Tridimensionali

La soluzione è prodotto 3 gaussiane

$$C(x,y,z,t) = \frac{M}{(\sqrt{4\pi t})^{3/2} \sqrt{D_x D_y D_z}} e^{-\frac{x^2}{4D_x t} - \frac{y^2}{4D_y t} - \frac{z^2}{4D_z t}}$$

$D_x = D_y = D_z \rightarrow$  Isocentratura Sfera  
 $\neq \neq \rightarrow$  Ellissoidi Non di Rotazione



per cui da  $\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$

$D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = D \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2}$        $\frac{\partial c}{\partial \xi} = \frac{\partial c}{\partial t} - u \frac{\partial c}{\partial \xi}$

$U \frac{\partial c}{\partial x} = U \frac{\partial c}{\partial \xi}$       Unendo i 3 termini:

$\frac{\partial c}{\partial t} - u \frac{\partial c}{\partial \xi} + u \frac{\partial c}{\partial \xi} = D \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2}}$  no termo + termine diffusivo

di questo abbiamo già trovato la soluzione, con la funzione errore.

$C(x,t) = \frac{C_0}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x-ut}{\sqrt{4Dt}} \right) \right]$

Cambio solo il punto di vista.

Domande d'Esame

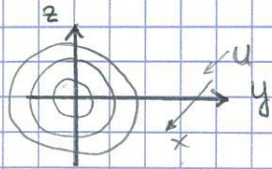
- 1 Forme di fondo
- 2 Fluidi stratificati
- 3 Autocorrelazione & Scala Integrata
- 4 Diffusione Molecolare & Turbolenza
- 5 Trasporto Solido
- 6 Dispersione per Shear
- 7 Cascata di vortici (Scale)
- 8 Exner
- 9 Geli in Turbolenza
- 10 Es.S
- 11 Pasby
- 12 Lager
- 13 Diffusione Molecolare
- 14 Scale Inertiali

$\mu = \tau \frac{du}{dy} \Rightarrow$  resistenza di un fluido allo scorrimento

$\nu$  cinematica  $m^2/s$  }  $\boxed{\nu \cdot \rho = \mu}$   
 $\mu$  dinamica  $kg/m \cdot s$



Quando la fetina esce dalla serpente, inizia a diffondere e convergere  
 Devi ora mettere insieme le fenomeni di 2D fetine



- > Quella che stiamo passando
- Concentrazione massa in 0,0,0
- > Quella che devono passare a C=0
- > Quella già passata con la concentrazione che si è allargata

Questo fenomeno è stato già visto:

• Massa puntuale immessa che si sta allargando  
 già visto in 2D come prodotto di 2 gaussiane

$$C(y,z,t) = \frac{M}{4\pi Dt} \cdot e^{-\frac{y^2+z^2}{4Dt}}$$

Sostituisco M con  $\dot{M}$

$$= \frac{\dot{M} dt}{4\pi Dt} e^{-\frac{y^2+z^2}{4Dt}} = \frac{\dot{M} dx}{4\pi D \dot{u}} e^{-\frac{y^2+z^2}{4Dt}}$$

per  $\cos(2D)$   
 la C = kg/m<sup>2</sup>  
 per avere C = kg/m<sup>3</sup>  
 devo dividere per dx?

$$\frac{C(\cdot)}{dx} = \frac{\dot{M}}{4\pi D \dot{u}} e^{-\left(\frac{y^2+z^2}{4Dt}\right)}$$

per eliminare t  
 • sostituisco tu = x  
 • t = u/x esponenziale

$$C(x,y,z) = \frac{\dot{M}}{4\pi Dx} e^{-\left(\frac{y^2+z^2}{4Dx}\right)}$$

Riesco ad arrivare ad una soluzione Esercizio, dove non ho la dipendenza  
 da due tempo, sfruttando la correlazione con la variabile x

(DE) punti chiave della Teoria di Taylor →



$X_x(t)$  : generica componente di una generica particella

$X_x^2(t)$  : varianza di una generica componente

$\overline{X_x^2}(t)$  : Variabile di nostro interesse: media della varianza di tante particelle

$$\frac{d\overline{X_x^2}}{dt}$$

di interesse  
come la varianza di insieme di particelle che sta aumentando nel generico punto, cambia nel tempo

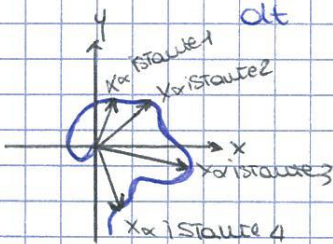
Mi aspetto che  $\frac{d\overline{X_x^2}}{dt} > 0$  poiché nel tempo si allarga.

Sfruttando proprietà di ergodicità, la media d'insieme è lineare.

$$\frac{d\overline{X_x^2}}{dt} = \overline{\left(\frac{dX_x^2}{dt}\right)} = 2 \overline{\left(X_x \frac{dX_x}{dt}\right)} = 2 \overline{X_x U_x}$$

derivata posizione particella nel tempo  $\Rightarrow$   $U_x$  velocità di una particella

Se  $U_x = \frac{dX_x}{dt} \rightarrow X_x = \int_0^t U_x(t') dt'$   $t$ : estremo integrazione  $t'$ : variabile muta



Si tratta di integrare da 0 a t (generico)

Ma cosa la velocità che istante x istante anima la particella, quale è la posizione raggiunta? Si tratta di integrare dal campo di moto da 0 al generico t preso in considerazione

Sostituisco  $X_x$ .

$$\frac{d\overline{X_x^2}}{dt} = 2 \int_0^t U_x(t') dt' \cdot U_x$$

Così è descritto tutto in  $f(U_x)$ .  $U_x(t)$  posto sotto l'integrale

$$= 2 \int_0^t U_x(t) \cdot U_x(t') dt' = 2 \int_0^t dX_x(t) \cdot U_x(t') dt'$$

linearità dell'integrale  $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$

Questo ultimo integrale ricorda l'Autocorrelazione di  $U_x$

$$f_x(\tau) = \frac{U_x(t) U_x(t+\tau)}{\overline{U_x^2}}$$

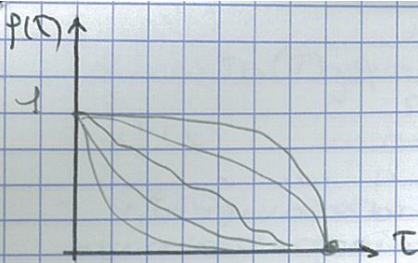
con  $\tau = t' - t$

Descrive come la componente x-esima della velocità  $U_x$  che la particella sta incontrando, è correlata con se stessa  $\tau$  prima o dopo

Si tratta di un AUTOCORRELOGRAMMA LAGRANGIANO, poiché segue la particella

$$\Rightarrow \overline{U_x^2} f_x(\tau) = U_x(t) U_x(t+\tau)$$





Corrisponde 2 pt - cuique

$$t=0 \quad p(t) = 1$$

$$t \rightarrow \infty \quad p(t) = 0$$

quando  $\tau \gg \int$  scala integrale

Cerco di studiare ancora con diverse ipotesi

1)  $\tau \ll \int$  ovvero quando  $\tau$  è certamente molto piccolo

allora  $p(t) \approx 1$

svolgendo l'integrale

$$\int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) d\tau = \frac{1}{2} t \quad p(t) \approx 1$$

$$\overline{X_a^2}(t) = U_a^2 t^2 \quad \text{poiché } = 1$$

In questo modo si intuisce che la turbolenza non segue la legge di Fick, poiché la varianza cambia con il quadrato del tempo.

\* Prima Fase: Turbolenza Non Fickiana

Solo quando cresce di modo tale a seguire Fick, poiché la correlazione non è più vincolante

2)  $\tau \gg \int$

$$p(t) = 0$$

$$\int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) p(\tau) d\tau = \int_0^t p(\tau) d\tau - \frac{1}{t} \int_0^t \tau p(\tau) d\tau$$

$$\overline{X_a^2}(t) = 2 U_a^2 \cdot \int \cdot t$$

per tempi molto lunghi la particella ha superato la scala integrale, l'autocorrelazione si spegne, e quindi vede cose più vicine [tutti i fenomeni fanno così]

La varianza cresce linearmente con il tempo

↳ \* Ultima Fase: Turbolenza Fickiana.

► Tempi corti: la particella ha avuto tempo di vedere poche scale (la correlazione è fortissima). Non Fickiana

► Zona Intermedia: Inognito. Siamo lontani dal T. dei limiti centrali

► Tempi lunghi: in tante scale, la particella vede cose che ha già visto, la correlazione è inferiore Fickiana. → per fenomeni senza memoria. Solo quando tempi sono maggiori della scala integrale.

$\int$ : scala integrale → Memoria tipica del processo



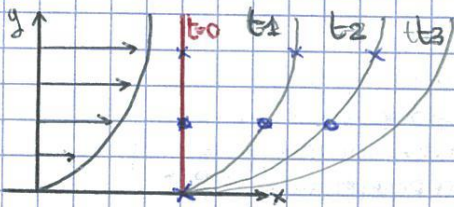
# DISPERSIONE per SHEAR

DE scritto

"Dispersione per shear" viene data che è dovuta a  
 ▶ un profilo di velocità dovuto all'attrito

Sono 2 ingredienti fondamentali che interagiscono:

## 1) PROFILO di VELOCITÀ



Ad esempio: Con 1 parete, fluido viscoso

- $v=0$  alla parete
- classico profilo

! Non è importante se

- > turbolento
- > laminare

Consideriamo  $t=0$  una striscia di fluido:

Se considero la  $C$  che ho nella sezione sarà pari alla massa introdotta fratto (1) e altezza della striscia (la sua profondità)

Al tempo  $t=t_1$  ogni particella è animata da una velocità caratteristica di quella profondità.

Quindi assumeranno  $x$  diverse. A  $y=0$  avrà  $v=0$ , quindi rimane lì dove viene posto. Se aumento  $y$  avrà sempre più,  $x$  maggiori.

! la massa si concentra sarà concentrata su un tratto più lungo sarà "diventa" in tante  $x$ .

! Più passa il tempo, più l'effetto sarà maggiore, e le particelle si sposteranno sempre più.

È paragonabile al fenomeno di convezione (per questa direzione)

## 2) DIFFUSIONE MOLECOLARE

Nel caso più semplice ~~del~~ Moto laminare, che implica che non c'è campo di moto che mischia nella direzione  $y$ .

Se mi metto in un punto, vedo concentrazioni diverse, e questo viene dato che nasce un

### GRADIENTE SPAZIALE di CONCENTRAZIONE

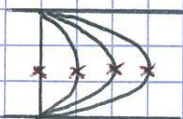
che porta a spostare le particelle di "binario in binario" risultando così di velocità diverse → Diffusione molecolare

⇒ l'effetto combinato di

1 + Profilo di velocità

2 + Gradienti di Concentrazione Spaziale → Diffusione Molecolare

→ genera Dispersione



1



1+2

Tutte le particelle vedono tutte le velocità. Si perde il profilo di velocità. Le particelle si spostano



Termine Convettivo :

$$(\bar{u} + u') \frac{\partial (\bar{c} + c')}{\partial x} = \underbrace{\bar{u} \frac{\partial (\bar{c} + c')}{\partial x}}_{\text{Non dipende da } y} + \underbrace{u' \frac{\partial (\bar{c} + c')}{\partial x}}_{\text{legato (x,u) Cambia punto punto}}$$

per questo, per eliminare  $\bar{u}$ ,  $y$  cambio il sistema di riferimento  
Introduco un sistema che si muove  $\bar{u}$

$$\begin{cases} \xi = x - \bar{u}t \\ \tau = t \end{cases}$$

Diventano un sistema variabili dipendenti

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial (\bar{c} + c')}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial (\bar{c} + c')}{\partial \xi} + u' \frac{\partial (\bar{c} + c')}{\partial \xi} = D \frac{\partial^2 c'}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial (\bar{c} + c')}{\partial \tau} - \bar{u} \frac{\partial (\bar{c} + c')}{\partial \xi} + \bar{u} \frac{\partial (\bar{c} + c')}{\partial \xi} + u' \frac{\partial (\bar{c} + c')}{\partial \xi} = D \frac{\partial^2 c'}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial (\bar{c} + c')}{\partial \tau} + u' \frac{\partial (\bar{c} + c')}{\partial \xi} = D \frac{\partial^2 c'}{\partial \xi^2}$$

Si vorrebbe risolvere in  $\bar{c}$  ma non si riesce più di tanto

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \tau} \quad (1) \\ \frac{\partial c'}{\partial \tau} \quad (2) \\ u' \frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi} \quad (3) \\ u' \frac{\partial c'}{\partial \xi} \quad (4) \\ D \frac{\partial^2 c'}{\partial \xi^2} \quad (5) \end{array} \right] (*)$$

Taylor riesce a dimostrare che (1) (2) (4) possono essere trascurati. Per cui si arriva a semplificare come

$$u' \frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi} = D \frac{\partial^2 c'}{\partial \xi^2}$$

Lo dimostra come: per tempi sufficientemente lunghi gli addendi (1) (2) (4) sono decisamente più piccole rispetto agli altri 2.

Possiamo vedere come: partiamo dall'equazione di 5 termini e la MEDIAMO nella SEZIONE TRASVERSALE, come

$$\frac{1}{h} \int_0^h ( * ) dy \quad \int \text{Somma} = \int + \int + \int$$

(1) Media Spaziale (Derivata nel tempo), posso ignorare i due fattori - mi rimane la Derivata (media  $\bar{c}$ ), che è pari  $\bar{c}$  FORSA invarianza al fattore medio  $\frac{\partial \bar{c}}{\partial \tau}$

(2) Media (Scarti) = 0 Non dà contributo

(3)  $\frac{\partial c'}{\partial \tau}$  si porta fuori Integrale, rimane media  $u' = 0$  ma poiché prodotto rimane  $\neq 0$

(4) media (Scarti)  $\neq 0$    
 nesso spazio

$$(5) \int c'(\text{Scarti}) = 0 \Rightarrow \left[ \frac{\partial \bar{c}}{\partial \tau} + u' \frac{\partial c'}{\partial \xi} = 0 \quad ** \right]$$



$$u' \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = D \frac{\partial^2 c'}{\partial y^2}$$

Integriamo in y

$$c'(y) = \frac{1}{D} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \int_0^y u' dy dy + c'(0)$$

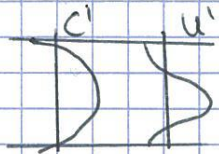
\*  $\frac{\partial \bar{c}}{\partial z}$  non dipende da y  
\* Alcune D = costante  
\*  $c'(0)$  condizione contorno

$$\dot{M} = \int_0^h u' c' dy$$

↳ Profilo Concentrazione degli scarti rispetto media

↳ Flusso di massa che passa nella sezione trasversale

$u' dy$ : portata che passa  
 $c'$ : concentrazione in quel pt



o spostare la sostanza è  $u'$  e ogni  $u'$  sposta una  $c'$  corrispondente

$u'$ : noto  
 $c'$ : incognito fino ad ora

$$\dot{M} = \frac{1}{D} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \int_0^h u' \int_0^y u' dy dy dz$$

$\dot{M}$   $c'(0)$  è scomparso perché sarebbe  $\int u' c'(0) dy$  ma  $c'(0)$  è un numero e il valore che ha la concentrazione al bordo rimane  $u' = 0$   
 $c'(0) = \frac{dc'}{dy} = 0$

Stiamo descrivendo il fenomeno della dispersione che si verifica nella corrente in cui si muove, e questa non facendo passare della massa per ogni generica sezione trasversale con una legge di questo tipo

$\frac{1}{D}$ : costante

$\frac{\partial \bar{c}}{\partial z}$ : gradiente di concentrazione mediato sulla verticale

$\int_0^h u' \int_0^y u' dy dy dz$ : integrali del profilo di velocità, se conosciamo il profilo di velocità è possibile definire integrale  $\rightarrow$  diventa un numero

$$\dot{M} = \text{costante} \times \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \times \text{numero}$$

$\dot{M} \propto$  Gradiente Concentrazione medio  $\rightarrow$  Legge di Fick

Possiamo descriverlo come  $\dot{M} = -h K \frac{\partial \bar{c}}{\partial z}$

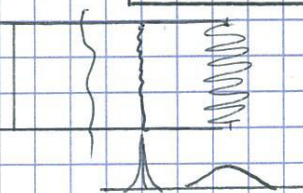
con  $K$ : coefficiente di Dispersione

(DE) da cosa dipende?

$$K = -\frac{1}{hD} \int_0^h u' \int_0^y u' dy dy dz$$

Anche la Dispersione segue la legge di Fick

$$\frac{\partial K}{\partial z} = K \frac{\partial \bar{c}}{\partial z}$$



Per tempi lunghi vale l'equazione Taylor e quindi Anche la dispersione segue la legge Fick sposta la sostanza con gradienti di C  
 $\rightarrow$  le code sono descritte con questa equazione la concentrazione si ripartisce in intervalli più lunghi



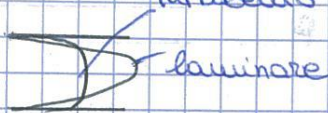
# MOTO TURBOLENTO

Quando dico fluis ad ora avevamo l'ipotesi di moto laminare

Si può osservare questo fenomeno nel caso turbolento, è necessario però:

- 1)  $D \rightarrow \epsilon_y$  Sostituire coef. diffusione molecolare  
con coef. di diffusione turbolento
- 2)  $D = \text{costante} \rightarrow \epsilon_y(y)$ : alla parete vale 0, ma cambia tutto profilo

- 3) Profilo non è più laminare, ma turbolento  $U'$  turbolento



$$k = -\frac{1}{h} \int_0^h u' \int_0^y \frac{1}{\epsilon_y(y)} \int_0^y u' dy dy dy$$

$\epsilon_y(y)$  rimane sotto  
integrale perché non è  
costante

Valore lo stesso caso del caso laminare, ma cambia solo  $k$

¶  $k$  laminare e  $k$  turbolento

A parità di portata la turbolenza non aiuta, poiché a forzare è un profilo che non è piatto, ma con  $U'$  elevato. Inoltre  $D$  è al denominatore, se  $D \downarrow$ ,  $k \uparrow$ . Nel turbolento ho  $\epsilon_y$ , che però è  $\epsilon_y \gg D$ .

Numeratore  $\downarrow$ , Denominatore  $\uparrow \rightarrow k \downarrow \downarrow$

¶ Dispersione aumenta con processi laminari e non turbolenti

Esempi

- 1) Condotta circolare  $k = 10,8 R U_*$  con  $U_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$

- 2) piano Incanaro Feder

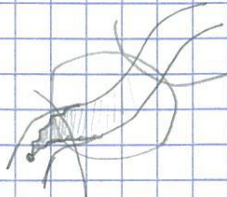


$$k = 5,93 a U_*$$



# FIUMI

Si tratta di correnti, nate di turbolenza, dai processi di trasporto

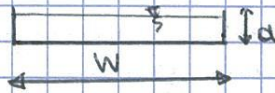


Ipotizziamo

- ↳ Immissione di una sostanza
- ↳ puntiforme alla sponda del fiume

Si individuano 3 fasi:

A: vicino al punto di immissione: il inquinante occupa principalmente la sezione verticale e non ancora tutta la sezione trasversale  
 In genere nei fiumi  $W \gg 20 \pm 30 \frac{d}{d}$ , hanno sezione a prevalenza rettangolare  
 larghezza  $W$   $d$   $\rightarrow$  Domina Diffusione Turbolenta Verticale



B: la sostanza occupa tutta la sezione trasversale  
 $\rightarrow$  Domina Diffusione Turbolenta Trasversale

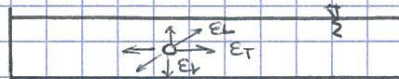
C: inizio la diluizione per dispersione  
 $\rightarrow$  Domina Dispersione per Shear



In generale  $\bar{A} < \bar{B} < \bar{C}$ , Studiamo i caratteri generali.

**Zona A:** La sua dimensione dipende dal tipo di immissione e dal tipo di fondo - ogni caso è unico - Come variano le concentrazioni, quanto dura nel tempo, e quanto spazio occupano sono legate a come immettiamo la sostanza (tubo, se centro) e quale è la geometria del fiume (valle, monte, curva). Questo influenza la turbolenza.

**Zona B:** Ipotizziamo un caso semplificato:  
 - Canale rettilineo  
 - moto uniforme  
 - Infinitamente lungo  
 • profondità costante



In un caso del genere la fase B è dominata dalla Diffusione Turbolenta, dove regna  $E$  isotropo.

Everticale, Etrasversale, E longitudinale (trascurando per incrociati)

La Teoria di Taylor, per tempi lunghi, ci dice che

$$E \propto \int \langle u^2 \rangle$$

- $\langle u^2 \rangle$  varianza campo moto di fluido in un dato della turbolenza
- $\int$  Spesso Integrale

\*  $\langle u^2 \rangle$  è legato all'energia cinetica turbolenta; questo lo prende dal moto medio, con vortex stretching quindi  $\langle u^2 \rangle \propto$  energia che fornisce per il moto medio, che che

finiscono in DISSIPAZIONI. per questo motivo ci deve essere un legame fra  $\langle u^2 \rangle$  e  $T_0$ , che nasconde dissipazioni

Già visto

$$U_* = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$$

con  $T_0 = \gamma R i$

$R = d$  profondità  
 $i =$  pendenza

Posso dire che

$$E \propto U_*^3$$



Et (trasversale)

Non è possibile correlare con la teoria di Eder poiché non è noto il profilo di velocità trasversale.

Si può però dire  $Et \propto dU^*$   
 Ed è per questo che si è arrivati dopo ad una spenzione di tipo empirica.

Tab. 5.1 per ipercorrelazione, si arriva  $Et$  che sono  $[0,16 \div 0,44]$   
 $dU^*$

Si può dire allora

$$Et \approx 0,15 d \cdot U^*$$

Si tratta di errore  $\pm 50\%$

El (longitudinale)

È molto più complicato, poiché in direzione L ci sono più fenomeni sia di diffusione turbolenta, che dispersione e non si riescono a separare. Anche quando si fanno le misure ho dei dati che non fanno di  $El + k$ . [È possibile però con correnti estremamente grandi dare il profilo di velocità in canale (Barr San Francisco)]

Il problema viene risolto in maniera teorica da Taylor. Taylor ha dimostrato che Effetto di dispersione e l'Effetto della Diffusione sono ADDITIVI  
 $(El + k)$

Successivamente confrontandoci posso vedere se uno o l'altro è trascurabile

$$k = 5,97 d \cdot U^*$$

$$El \approx 10^{-1} d \cdot U^*$$

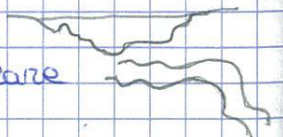
→ dimostrato da Taylor: perché sono sempre i grandi vortici che miscelano

Ma quindi  $El \ll k$ , e posso dire che ci sia dispersione

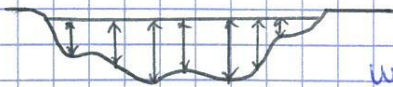
Per questo nella fase (c) si ha la predominanza della dispersione e si trascura  $El$ .

→ Cosa Accade in un Fiume

- \* di irregolare
- \* Sponde irregolare
- \* Curle



Ev Curve e Sponde non fanno importanza. È più importante la d



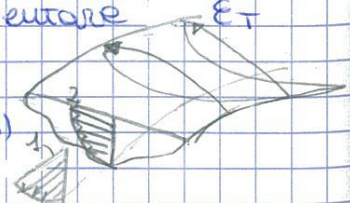
Uso la stessa struttura di Eder ma con la d locale

Et \* le sponde generano, modificano vortici; Sono Irregolarità che vanno ad incrementare  $Et$

\* Curle generano correnti secondarie

\* profilo verticale della velocità longitudinale  $\rightarrow$  logaritmica (1)

In curva nasce Acc. centripeta  $\propto U^2/r$ . Sue peso libero avere una forte Acc, se scende in profondità  $U \downarrow$ , allora  $Acc \downarrow$ , Nasce un profilo di Accelerazione (2). Le particelle non subiscono tutte lo stesso Acc (Acc max sup, Acc = 0 fondo). In fondo si Avviciappa dall'Intradosso  $\rightarrow$  Estradosso. Si crea miscelamento  $Et \uparrow \uparrow$  Grandi vortici  
 Canali  $Et = 0,15 dU^* \pm 50\%$  Fiume  $Et \approx 0,4$   $dU^*$   $\frac{Et}{dU^*} = 0,4 \pm 0,8$   $\frac{Et}{dU^*} > 1$



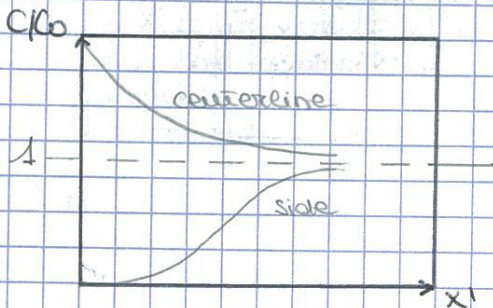


$x$  : adimensionalizzato con lo scalo tipico  
 Scalo tipico di  $x$  → Largo, velocità, energia  $\frac{UW^2}{Et}$

$y$  : Scalo tipico di  $y$  →  $W$

$C$  : adimensionalizzato rispetto alla concentrazione finale che avrà quando il pennacchio si sarà esteso, e avrà la stessa concentrazione sulla sezione trasversale  
 Scalo →  $\frac{H}{d} / UW$   $H/d$  portata piano orizzontale

$y_0$  : punto di Immissione della sostanza  
 Centro → pennacchio + corto  
 Sponda → " + lungo



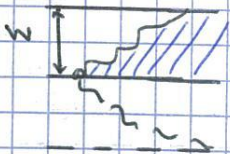
Il grafico riportato in termini ADIMENSIONALI, in caso di una IMMISSIONE CENTRALE

- Ripercorre i valori della concentrazione
- lungo la linea centrale da elevato → a valore asintotico  $C_0$
  - su una sponda: da 0 → a valore asintotico  $C_0$

Quando  $x' > 0,1$  la differenza fra Centro e le Sponde è trascurabile si può quindi dire che si è esaurito fase B

$x' > 0,1$  → FINE Fase B

Si può arrivare alla soluzione per IMMISSIONE su una SPONDA.  
 Posso ipotizzare di avere solo metà Fiume



Al posto di  $W$ , inserisco  $2W$  per trovare  $x'$

$$x' = \frac{x Et}{U d W^2}$$

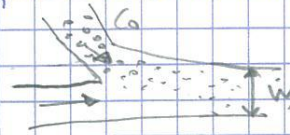
centereine → Sponda Immissione  
 Side → Sponda opposta

! La zona di miscelamento sarà pari a 4 volte rispetto ad Immissione al centro



**Esempio 3**

Si tratta di un approssimamento di acque da uno alto, che attinge da 2 canali  
 > 1° fonte con concentrazione  $C_0$   
 > 2° fonte con concentrazione nulla



? Quanto devo aspettare (devo fare lungo le canale) per assicurare il miscelamento

$Q = 1,35 \text{ m}^3/\text{s}$   
 $W = 7 \text{ m}$   
 $d = 0,7 \text{ m}$

$i = 0,001$   
 $U = 0,7 \text{ m/s}$

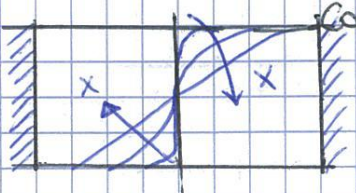
$U_x = \sqrt{g d i} = 0,083 \text{ m/s}$

È un problema che è stato già affrontato, come profilo di concentrazione



Alcuno dominio o le curve erano rappresentate con t

Qui invece invece Alcuno



- dominio limitato dalle sponde → arrivo  $C=C_0$
- le concentrazioni variano con x spostandoli ho diagrammi diversi

La soluzione

$C(x,t) = \frac{C_0}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right]$

È necessario cambiare

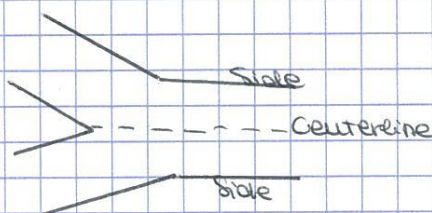
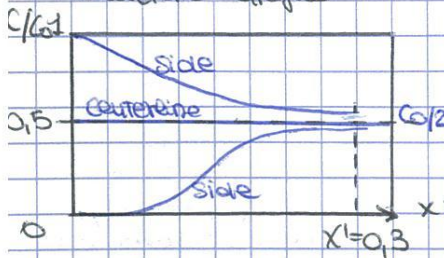
- (1)  $t \rightarrow x$       (2)  $D \rightarrow Et$       (3) Sorgenti Immagine

$C = \frac{C_0}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \operatorname{erf} \frac{y' + \frac{1}{2} + 2n}{\sqrt{4x'}} - \operatorname{erf} \frac{y' - \frac{1}{2} + 2n}{\sqrt{4x'}} \right]$

$x' = \frac{xEt}{UW^2}$       adimensionale

Si riconosce erf,  $\Sigma$  (sponde), non fot,  $\rightarrow x'$ ,  $x \rightarrow y'$        $y' = y/w$

Soluzione Grafica



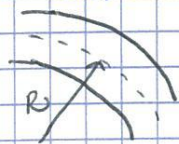
$x' = 0,3 \rightarrow$  Po stessa concentrazione

$Et = 0,15 d U_x^2 = 0,0087 \text{ m}^2/\text{s}$

$x = 0,3 \frac{UW^2}{Et} \approx 1,2 \text{ km}$

Riuscire una vasca abbastanza lunga (1,2 km!)

Per aumentare Et posso costruirlo in curva, poiché nascono correnti secondarie.



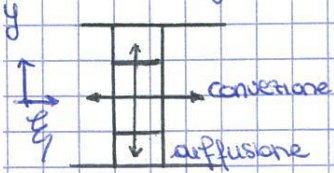
Allora  $Et = \frac{25 U^2 d^3}{U_x R^2}$  (empirico)

Per  $R = 30 \text{ m}$        $Et = 0,056 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$

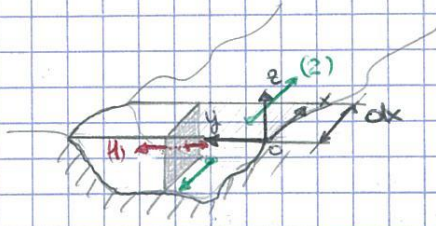
$x' = 0,3 \rightarrow x = 180 \text{ m}$



2) Attraverso studi di Taylor, applichiamo a questo caso del fiume



Si instaura un equilibrio fra ciò che si muove per diffusione in una direzione ( $\frac{dC}{dy}$ ) e ciò che si muove in direzione ( $y$ ) convection



- Consideriamo uno strato infinitesimo dx - generico superficie trasversale  
 - Attraverso questa superficie passa la sostanza e questo avviene per Diffusione Trasversale  $\frac{dC}{dy}$

Se vale Taylor, in tutto il volume, questo spostamento di sostanze a causa dei gradienti di concentrazione lungo la direzione  $y$  deve essere in equilibrio con la convezione in direzione  $x$

Diffusione Trasversale lungo  $y$  (1)

Convezione lungo (2)

$$(1) \dot{M}_{diff} = E_T \cdot d \cdot \frac{dC'}{dy} \cdot dx$$

da  $C \rightarrow C'$

ma Diffusivi fanno entrare e uscire esiste perché ha un profilo di concentrazione lungo  $y$

$$d \cdot dx = A \cdot dx$$

$\frac{dC'}{dy}$ : gradiente di  $C'$  lungo  $y$   $\nabla C$  non ha gradiente

$$(2) \dot{M}_{convezione} = - \int_0^y u'(y) d(y) \frac{dC}{dx} dx dy$$

$\int_0^y$ : solo fino  $y$  considerato

$u'(y)$ : velocità in sistema di riferimento mobile

$\frac{dC}{dx}$ : gradiente di  $C$  per un salto  $dx$  lo  $C$  cambia tra ciò che entra e ciò che esce

$d(y) dy$  dimensione destra trasversale

Taylor ci dice che  $\dot{M}_{diff} = \dot{M}_{convezione}$

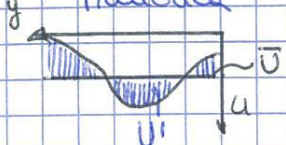
- integrali
- noto che  $\dot{M} \propto \frac{dC}{dx}$  come Fick

$$k = - \frac{1}{A} \int_0^w u' d \int_0^y \frac{u'}{E_T d} \int_0^y u' d(y) dy dy dy$$

- \*  $U'$  = numeratore
- \*  $E_T$  = denominatore
- \*  $d(y) \rightarrow$  segue il fiume

\*  $U'$ : variazioni rispetto alla velocità media del profilo trasversale varia con  $y$

Posso prendere le misure, trovare  $u'$  e  $d(y)$  e calcolare per via numerica



$\nabla C$  è calcolato rispetto al profilo trasversale



# TRASPORTO dei SOLIDI

Si verifica quando si ha una corrente che si muove su un letto e comincia a trasportare particelle solide. Gli effetti possono essere giganteschi

Prendiamo per ipotesi il caso di una corrente turbolenta che lambisce una parete deformabile.

Si deve prendere in considerazione che la

$$\text{Deformazione} = f_z(\text{turbolenza})$$

$$\rightarrow \Delta \text{deformazione} \rightarrow \Delta \text{turbolenza}$$

È possibile descrivere il fenomeno con } eq. N-S (turbolente)

È un problema accoppiato

una cerca di non usare questo sistema } eq. evoluzione parete (morfodinamica)  
una ci aiutiamo con formule empiriche. } (miche)

problemi ai cui ci occupiamo sono

- 1) MOTO INCIPIENTE → da H<sub>2</sub>O ferma, al moto che erode → può trasportare
- 2) PORTATA SOLIDA → quanto trasporta Q<sub>s</sub>
- 3) FORTE di FONDO → cosa trasforma
- 4) TRASPORTO SOLIDO in SOSPENSIONE
- 5) MORFODINAMICA 1D

N Meccanismi di Trasporto  
ci sono 3 meccanismi

- Trasporto Solido al Fondo (1)
- Trasporto in Sospensione (2)
- Trasporto Colloidale (3)

1) La corrente non riesce a scegliare, ma le fa torbide

2) Vengono catturati dalla turbolenza, si muovono per trigiti molto lunghi in Sospensione, e non cadono mai

(1) e (2) Sono i Meccanismi di cui si occupa la Meccanica dei Fluidi

3) È vero solo per l'argilla; sono reazioni elettrochimiche regolate da massa e alle superficie

Per le particelle inorganiche • Densità materiale  $\rho_s - \rho = \rho_s$   
 $\rho_s = (2,1 - 2,9) \text{ t/m}^3 \rightarrow 2,6 \text{ t/m}^3$

• Peso specifico relativo  $\gamma = \rho_s / \rho_{H_2O}$

• Classificazione

massi / centrai	> 61 mm
ghiaia	$2 \frac{1}{2} - 61 \text{ mm}$
sabbia	$0,062 - 2 \text{ mm}$
limo	$0,004 - 0,062 \text{ mm}$
argilla	$< 0,004 \text{ mm}$

• Velocità Sedimentazione: con H<sub>2</sub>O ferma

Si ha equilibrio  $F_{gravità}$  e  $F_{resistenza}$  idrodinamica

$$F_{gravità} = \frac{\pi}{6} d^3 (\rho_s - \rho) g$$

$$F_{resistenza} = \frac{1}{2} \rho A C_r w_s^2$$

$$w_s = \left[ \frac{4}{3} \frac{1}{g} \frac{\rho_s - \rho}{\rho} g d \right]^{1/2}$$

Velocità di regime



(1) Peso - Archimedeo

(2)  $A = \frac{\pi}{4} d^2$ ;  $w_s$ : velocità caduta,  $C_r$ : sperimentale

dietro scivolamento si crea turbolenza. Si forma però strato limite che poi si spezza e forma la scia



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{P_i \sin \alpha + F_0}{P_i \cos \alpha - F_L}$$

sostituisco le espressioni  
rispetto per  $U_f$

$$\frac{U_f^2 \text{critico}}{\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) g d} = \frac{2k_3 (\operatorname{tg} \varphi \cos \alpha - \sin \alpha)}{C_0 k_1 + C_1 k_2 g \varphi} = A$$

Il valore della velocità critica al fondo, normalizzata rispetto a un rapporto di densità, forza gravitazionale (piano inclinato) e le stesse dimensioni è pari a un rapporto: si tiene conto di fattori forma, angolo d'attrito,  $\alpha$  pendenza fondo. Sono molte variabili

Se però consideriamo caso in piana  $\alpha \approx 0$ :  $\cos \alpha \approx 1$ , sen  $\alpha \approx 0$  e materiale incetta è molto classato, e quindi angolo d'attrito non varia moltissimo, e quindi  $k$  non varia molto.

A, a seguito di un po' di esperimenti si trova pressoché costante

$$\frac{U_f^2 \text{critico}}{\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) g d} = A \quad \Rightarrow \quad U_{\text{critico}} \propto \sqrt{d}$$

$U_f$ , cosa è? quanto vale?

$U_f$  fa parte di un profilo di velocità, si tratta della componente vicino alla parete. Ma ho difficoltà a capire bene dove agisce, poiché il profilo può essere magari logaritmico, ma poi va sempre a zero alla parete.

Noi possiamo conoscere bene la velocità media:  $U = \frac{Q}{A}$   
 $U_f$  è frutto del profilo di velocità, la cui integrale è  $Q$  la portata.  
 Per questo posso pensare che ci sia un legame fra

$$U_f \leftrightarrow Q \leftrightarrow U$$

Ma allora posso correlare il valore della velocità al fondo critica ( $U_{f \text{ critico}}$ ) con una velocità media critica ( $U_{\text{critico}}$ ) che posso calcolare facilmente.  
 Le due saranno magari legate da un rapporto di scala:  $U_{f \text{ critico}} \leftrightarrow U_{\text{critico}}$

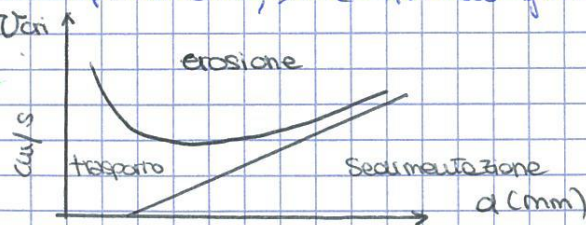
Si sono eseguiti degli esperimenti, che hanno fornito delle tabelle

### Diagrammi di Hjeström

Valore sotto scala Hp:

$$1) \quad y = 1 \text{ m}$$

$\rightarrow U$  è tutto dimensionato  
mm e cm/s.



Si vede che  $U_{\text{erosione}} \neq U_{\text{sedimentazione}}$ . Questa differenza è tanto più grande quanto il diametro è piccolo. La responsabilità di questo è la turbolenza.



## 2) Tensione Tangenziale al fondo Critica - $\tau_0$

In questo caso è importante tenere presente la scala.

$$\tau_0 = \gamma \cdot R \cdot i \quad (\text{dell' idraulica}) \quad R: \text{per una corrente } R=2$$

$\tau_0$  ha un legame con  $U_*$ , ma l'informazione su questa velocità d'attrito ( $U_*$ ) ci dà anche informazioni sul campo di moto turbolento. Rimane un **INDICE di TURBOLENZA  $U_*$**

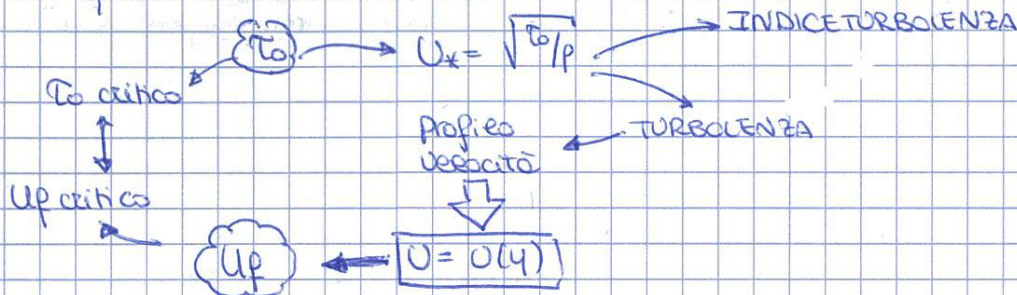
$$U_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

ma la turbolenza è responsabile del mixing verticale della quantità di moto e quindi anche di un certo profilo di velocità medio

$U_p$ : è un particolare valore di velocità, ad una particolare altezza, anche se questo altezza non lo conosco (velocità profilo medio!)

Ma  $U_p$  critica corrisponderà un  $\tau_0$  critica.

Al posto di cercare  $U_p$  critica, dato che esiste un legame con  $\tau_0$  critica, e cerco questo valore



Se **VANTAGGIO** ma nel **CAMBIO di SCALA** del PROBLEMA

$U_p$  è una scala della particella → ed è per questo che nascono problemi perché ho le scale delle lunghezze delle particelle

$\tau_0$  è a Scale più GRANDI

Ed è per questo che il metodo delle  $\tau_0$  critica ha più successo

Si costruisce ora una  $\tau_0$  Adimensionale:

$$\frac{\tau_0 \text{ critica}}{(\rho_s - \rho) g d} = A'$$

$$\tau_0 = \frac{\rho g}{m \cdot s^2}$$

Formule di Schoktish

$$A' = 0,076 \quad d > 6 \text{ mm}$$

$$A' = 0,000285 d^{-2/3} \quad \text{din(m)}$$

$$0,1 < d < 3 \text{ mm}$$

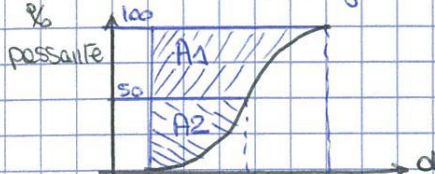
Si applica un setto da [3-6 mm]

Formule di Inzi

$$\tau_0 \text{ critica} = \frac{0,03 d m g (\rho_s - \rho)}{\sqrt{H}}$$

dm: diametro medio

Valore anche per granulometrie Associate



$$H = \frac{A1}{A2}$$



$$\begin{cases} F_D = \rho U_*^2 d^2 \cdot \Gamma'(\ ) \\ F_L = \rho U_*^2 d^2 \cdot \Gamma''(\ ) \end{cases}$$

Ora riprendo le Biancino di forze, e sostituisco  $F_D$  e  $F_L$

$$\frac{m}{s^2} \frac{kg}{m^3}$$

$$(P - S_i) = k (p_s - p) g d^3 \quad (\text{valore peso immerso})$$

$$\frac{kg}{m^3} \frac{m^3}{kg} \frac{15}{m}$$

$$T = \rho U_* d^2 \Gamma'(\ ) + k (p_s - p) g d^3 \sin \alpha$$

tenendo conto

$$R = \{ [k (p_s - p) g d^3] \cos \alpha - \rho U_* d^2 \Gamma''(\ ) \} \tan \varphi$$

$$U_* = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

$T = R$  moto incipiente

$$\frac{T_0}{(\gamma_s - \gamma) d \cos \alpha} = \frac{k [b \gamma \varphi - b \gamma \alpha]}{\Gamma'(\ ) + \Gamma''(\ ) \tan \varphi} \quad \gamma = \rho g$$

Per pendenze basse  $\alpha = 0$   $\left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = 1 \\ \tan \alpha = 0 \end{array} \right.$

$$\frac{T_{0 \text{ critico}}}{(\gamma_s - \gamma) d} = f \left( \frac{\gamma}{d}, \frac{U_* d}{\nu} \right)$$

$\gamma, k, \tan \varphi, \rho g \rightarrow$  diventano una costante, anche  $\varphi$  conto poco per via SPERIMENTALE trova che ho solo più una funzione, che è dipendente dalle variabili precedenti

$f$  (sommergimento, Re turbolento)

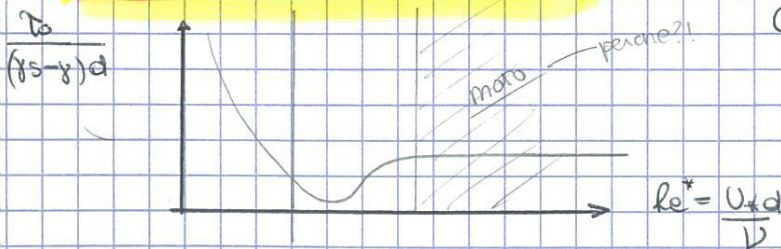
Sono 3 grandezze Adimensionate  $\frac{\gamma}{d}, U_* d / \nu$  (parte turbolenta)  $d, T_0 / (\gamma_s - \gamma) d$ .

A seguito degli esperimenti si è arrivati ad avere  $\frac{\gamma}{d}$  pari al limite di Autosimilarità; ovvero non è più importante il suo valore preciso perché è molto grande ( $10^3, 10^4$ ); per questo diventa

$$\frac{T}{(\gamma_s - \gamma) d} = g \left( \frac{U_* d}{\nu} \right)$$

così posso definire una CURVA

CURVA di SHIELDS



Si ottiene a seguito di esperimenti, cambiando  $U_*$   $U_* = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$  mantenendosi

> la curva è asintotica  $\rightarrow$  Re diventa ininfluente. Ma  $Re^*$  è sempre rapporto fra forze inerziali e forze viscosi. Questo perché le particelle non risentono più della viscosità, e il moto è governato prevalentemente dalla turbolenza. Le particelle fanno parte della scabrezza, che va a bucare il sottostato viscoso, e vedono così la componente turbolenta. Ma quindi le forze viscosi sono indeterminanti, e quindi il numero di  $Re_*$  non ha più un ruolo.

> zona transizione ricorda Nikuradse; poiché le particelle che si stanno usando sono tutte dello stesso tipo. Bucano tutte nello stesso momento

$\Rightarrow$  Nella Ricerca!

Sono quasi sempre nello stato dove ho moto  $\rightarrow$  costante



→ **PORTATA SOLIDA al FONDO** <sup>(DE)</sup>  $\rightarrow$  Diff con fondo / dispersione  
 Si tratta di studiare la portata solida:  
 Da cosa dipende lo sforzo che agisce sul fondo

$Q$ : portata liquida  $q$  per unità di  
 $Q_s$ : portata solida  $q_s$  larghezza

**Formula Du Bois (1879)**



Si tratta di una corrente sotto al quale scivolano le particelle con un certo profilo di velocità. È primo strato avrà una certa velocità e poi man mano questa diminuisce con la profondità. Dal profilo ricavo poi la portata.

$Q_s = D T_0 (T_0 - T_{cr})$   $D$ : coef forma (numerico)

Si arriva a una struttura di ps che evidenzia come questa ha funzione della Tensione Tangenziale ( $T_0$ ) e dell'Eccesso di questa rispetto la Tensione tangenziale Critica.

Questo non funziona proprio bene, per evidenziare dove nasce la Meccanica dei Fluidi dei MEZZI GRANULARI: con delle leggi N-S che si allontanano parecchio da questa struttura.

Ma dal punto di vista Empirico questo concetto di Du Bois era verificato. Lui si giustifica così:

$Q_s(T_0) = a_0 + a_1 T_0 + a_2 T_0^2$

faccio lo sviluppo di Taylor, troncato 2° ordine, Serie di potenze

per trovare  $a_0, a_1, \dots$   
 $Q_s(T_0=0) = 0$

$Q_s(T_0 = T_{cr}) = 0$  poiché n deve superare  $T_{cr}$  a essere portata

$a_0 = 0$   $a_1 = -a_2 T_{cr}$   $\Rightarrow Q_s = a_2 T_0 (T_0 - T_{cr})$

Stessa Struttura

→ **Formula Schieldts**

$\frac{q_s f_s}{q p i} = 10 \frac{T_0 - T_{ocr}}{(f_s - p) g d$

Sempre  $(T_0 - T_{ocr})$  funziona abbastanza bene

→ **Formula Meyer-Peter & Mueller**

$\frac{R i'}{d_s} = 9047 \frac{f_s - p}{\rho} = 925 \frac{q_s}{d_s \sqrt{g p^2}}$

$d_s = d_{so}$   
 $q_s =$  portata solida Kg/s  
 massa  $q_s = q_s f_s$   
 $R =$  raggio idraulico



Resistenze parziali = resistenza di scabrezza vera e propria ( $i'$ ) + resistenza formula ( $i''$ )

Sono a scale diverse:  $i'$  scale piccole,  $i''$  scale grandi, che mai ha influenza sui granelli trasportati

$\frac{i'}{i} = \left( \frac{C_s}{C_s'} \right)^{3/2}$

con  $\frac{C_s}{C_s'} = \frac{26}{d_{sp}^{1/6}}$

$C_s$ : coef Gaultier-Strickker compressivo

↳ dovuto ai granelli,  $d_{sp}$  grandi + grandi!



Formula di Einstein

$$1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\beta\psi^{-2}}^{\beta\psi^{-2}} e^{-z^2} dz = \frac{A\Phi}{1+A\Phi} \quad \begin{matrix} A = 43,5 \\ B = \frac{1}{7} \end{matrix}$$

Mette in relazione lo  $\theta$  con lo  $\Phi$ , che misurando la portata svedese  $\bar{E}$  descritto nel meglio in un diagramma.

$\psi = \frac{1}{\theta} \rightarrow$  trovare negli estremi di integrazione valore critico

$$\bar{\Phi} = \frac{q_p}{q_s} \cdot \sqrt{\frac{p}{p_s-p}} \cdot \sqrt{\frac{1}{g d^3}} = \frac{q_s}{\sqrt{g d^3}}$$

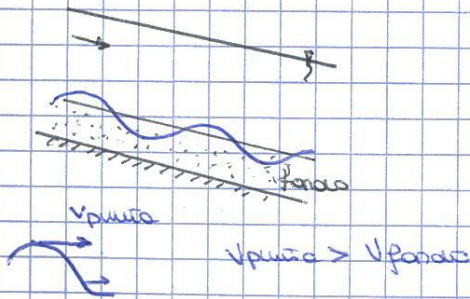
$q_p$  portata svedese in volume

nono  $\theta \rightarrow$  ricavo  $\psi \rightarrow q_s$

**FORME di FONDO** (DE)  $\rightarrow$

Le principale peculiarità della natura è il fluido, inteso come acqua, Aria, e questo riesce a dare luogo ad una Serie di INSTABILITÀ MORFOLOGICHE.

Quando un fluido è messo a contatto con una superficie quasi mai le Superfici di contatto rimangono indisturbate



La superficie del fondo, soggetta ad una corrente, anche di moto uniforme, è soggetta a mutare e ad prendere forme differenti, che piano si spostano verso valle, oppure migrano verso monte.

Queste deformazioni convergono a SCALE diverse

**MICROFORME**: lunghezza d'onda scala con la PROFONDITÀ

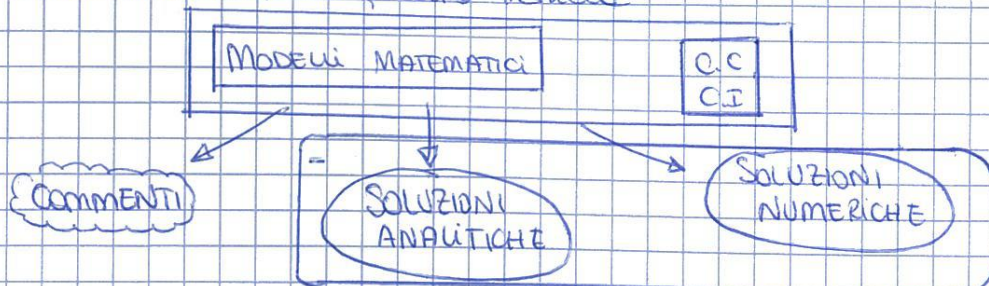
**MESOFORME**: scala con la LARGHEZZA (barzze)

**MACROFORME**: scala ancora maggiore (meandri)



Si trova anche ad avere FINNI INTRECCIATI

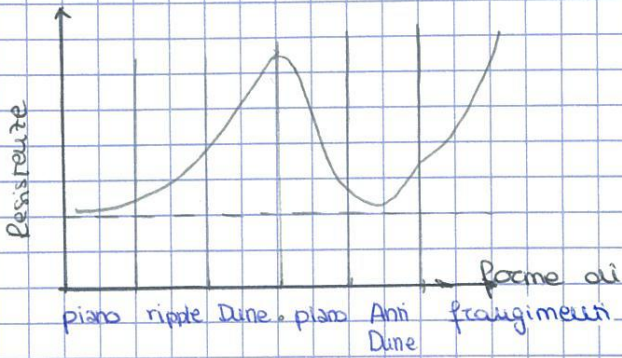
I metodi di affrontare questi problemi, in maniera ingegneristica, possono essere sintetizzati in questo modo



Le Soluzioni Analitiche, SE esistono, può essere che non esiste nella realtà, poiché è una Soluzione INSTABILE; Una volta che esiste una seconda soluzione che è più stabile e si realizza più facilmente



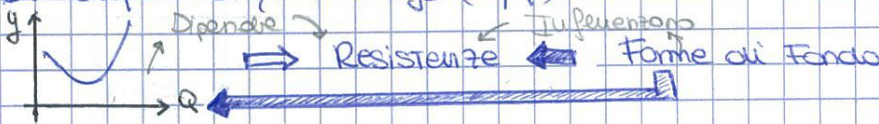
## Resistenze delle forme di fondo



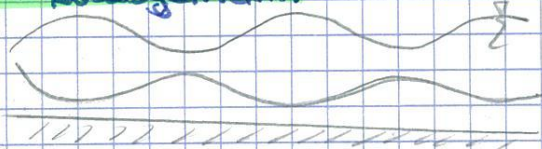
la corrente che passa sopra, trae delle resistenze.  
 Sono generalmente crescenti, ma delle forme "Dune", che dissipano piccola energia.  
 Le Anti Dune, pur essendo anche stessa ordine delle Dune, dissipano molto meno energia.

⚠ Non sono o Ampiezza delle forme di fondo poiché sono funto di come reagisce la corrente alla forma di fondo e come più alto la superficie libera sarà molto più alto, per questo modo dice che cambierà il campo di flusso, e con questo occor la possibile turbolenza.

Quello è ovvio che la resistenza dipende dalla quota. Quando non studiamo la corrente per prima cosa si cerca di scrivere le scale di difesa, che lega  $(Q, y)$ .



\* "Pico di Resistenze" la ragione profonda è nessa turbolenza, ma si può capire anche a scala macroscopica. In idraulica si è detto che le correnti dissipano molto quando ci sono ALLARGAMENTI delle sezioni, poiché è come se le particelle di fluido decelerano (per mantenere Q=cost), tendessero ad urtarsi una con le altre; se ho RESTRINGIMENTI ho effetto opposto (con la superficie libera), in CONTROFASE ho ALTERANZA di Restringimenti e Allargamenti.



## \* Numeri di Froude

Le forme si suddividono in  $\rightarrow$  rispetto alle correnti

REGIME INFERIORE  $Fr < 1$  - lente - Rippe Dune  
 INTERMEDIO  $Fr \approx 1$   
 REGIME SUPERIORE  $Fr > 1$  - veloci - Antidune

Rippe - Dune sono le più frequenti e diffuse, tipiche di zone pianeggianti. Le Antidune sono caratteristiche di correnti veloci, tipo in montagna, ma è molto raro trovare materiali fini che non sono caratteristici di questi Regimi. Per avere Antidune devo avere Froude Aeri caratteristici di Aere pendente, ma anche materiale fine.

È una combinazione molto difficile.

Si possono trovare al usato degli Aetopiani.

1: Zona Montana

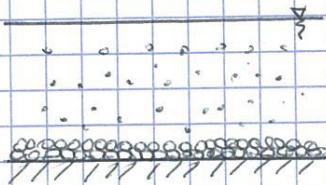
2: Zona pianeggiante  $\rightarrow$  Classazione

3: Aete pendente  $\rightarrow$  Corrente veloce  $\rightarrow$  Antidune

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$



## 2 TRASPORTO SOLIDO in SOSPENSIONE Come è mosso? Scurvato?



Il fondo deve avere una pendenza pari a  $1-3\%$

Ci possono essere lunghi tratti in cui le particelle rimangono nella corrente e poi ricadono, per essere poi essere catturate nuovamente

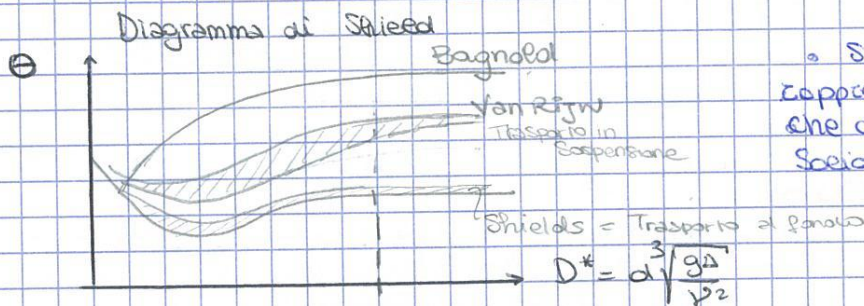
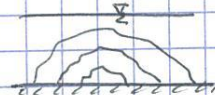
I tratti sono lunghi quasi qualche ordine di grandezza maggiore della profondità

\* Perché le particelle stanno in Sospensione?

A causa del moto della corrente, con la turbolenza (u,v,w)

Ora ci interessa conoscere

- 1) Profilo di Concentrazione
- 2) Portata Solida in Sospensione  $\Rightarrow$  I profilo



• Su questo è stato rappresentato la curva di Shields che caratterizza il trasporto Solido al Fondo

Si tratta dei limiti sopra i quali, secondo questi autori, inizia il trasporto Solido in Sospensione. Motore che i

- 1) Forte Soggettività
- 2) Il trasporto Solido in Sospensione in attiva non insieme al trasporto al fondo, ma per tensioni tangenziali più elevate. Ed esiste comunque una zona di Transizione

$$(\theta_{critico})_{s.sospensione} = f\left(\frac{W_s^2}{g\Delta d_{s0}}\right) \quad \text{legge generica numerica}$$

\* Engelund  $(\theta_c)_{ss} = 0,0625 \frac{W_s^2}{g\Delta d_{s0}}$

### 1) PROFILO di CONCENTRAZIONE

$$\bar{C} = \frac{V_s}{V_s + V_{H2O}} \quad [mm^3/cm^3]$$

$\bar{C}$ : velocità medio istantanea che tiene insieme (velocità medio + turbolenza)

**Hyp**  $\bar{C} \ll 1$  ovvero  $V_s$  è molto poco rispetto al volume compressivo  $\rightarrow$  con non ha effetto sul campo di moto

Si dovrà tenere conto di

- \* Diffusione Turbolenta
- \* Convezione  $\rightarrow$  si tratta con MOTO MEDIO.

Moto medio della corrente e poi del moto medio delle particelle, che hanno velocità di sedimentazione. Il profilo di ALLMONTANA dall'essere allungato.



È necessario ora risolvere l'equazione e trovare  $C = C(t, x, y)$  non appunto  $U_x$  e  $W_s$ .

Per le problemi della turbolenza si fa riferimento ai problemi di chiusura.

Si dovrebbero aggiungere sette equazioni del tipo

$$\rho \frac{\langle uyc \rangle}{\rho t} = f(C, U_x, \langle uyc^2 \rangle)$$

Si utilizza allora un Modello di Chiusura che legni le cross-correlazioni o grandezze NOTE, ammettendo un certo errore.

Ricorriamo al modello di Boussinesq

$$\tau_{lam} = \mu \frac{dU}{dy} \rightarrow \frac{\tau_{lam}}{\rho} = \nu \frac{dU}{dy} \Rightarrow \tau_{lam} = \nu \rho \frac{dU}{dy} \quad (1)$$

dove

$\tau_{lam}$  è una classica Tensione Tangenziale in moto laminare

$$\tau_{turb} = -\rho \langle uv \rangle = \rho E_e \frac{dU}{dy} \quad (2) \quad \text{rimane dello stesso struttura (1) e (2)}$$

$\nu$ : viscosità del fluido

$E_e$ : viscosità turbolenta (Eddy-viscosity) (in realtà è una proprietà del flusso)

Il problema sarebbe risolto se si trattasse  $E_e$

$$-\langle uyc \rangle = E_s \frac{\partial C}{\partial y} \quad \text{con } E_s = \beta_s E_e$$

Sostituendo

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial U_x C}{\partial x} = \frac{\rho}{\rho y} \left[ W_s C + \beta_s E_e \frac{\partial C}{\partial y} \right]$$

1)  $\frac{\partial C}{\partial t} = 0$  : ipotesi che si sia stabilito un profilo di Equilibrio di modo da non avere variazioni nel tempo.

2)  $\frac{\partial}{\partial x} = 0$  : ipotesi di Uniformità, moto permanente e Uniforme

$$\frac{d}{dy} \left[ W_s C + \beta_s E_e \frac{\partial C}{\partial y} \right] = 0$$

$$W_s C + \beta_s E_e \frac{dC}{dy} = \text{costante}$$

$\nabla \frac{dC}{dy}$  : Flusso di Concentrazione  
 $y=0 \rightarrow C=0$  (sulla Superficie libera)

1° costante di Integrazione

$$\begin{matrix} y=0 \\ C=0 \end{matrix} \rightarrow W_s \cdot 0 + 0 = C_1$$

$$\boxed{C_1 = 0}$$

$$\left\{ W_s C + \beta_s E_e \frac{dC}{dy} = 0 \right.$$



Condizioni al Contorno  
 Dobbiamo determinare  $C_a, \omega$   
 Possiamo

- 1) Fare misure  $\rightarrow$  può non essere rappresentativo
- 2) Formule Empiriche

\* Einstein  $\alpha = 2d$

$d$ : diametro tipico del materiale fondo  
 Si tratta della sfera che gli autori pongono per il trasporto  
 vicino al fondo e il trasporto in sospensione

$$C_a = \frac{1}{11.6} \frac{q_b}{\alpha U_*}$$

\* Van Rijn

$$\alpha = 0,015 Y$$

$$C_a = 0,015 \frac{d_{50}}{\alpha} \left( \frac{\theta' - \theta_c}{\theta_c} \right)^{1,5} D_*^{-0,3}$$

$$\text{con } D_* = d_{50} \left( \frac{\Delta \rho}{\rho^2} \right)^{1/3}$$

## 2) PORTATA SOLIDA in SOSPENSIONE

$$q_{ss} = \int_{\alpha}^y C U_* dy$$

$U_*$ : velocità influente  
 $C$ : concentrazione influente

□ Van Rijn

$$q_{ss} = F U_* C_a$$

$F$ : funzione  
 $U_*$ : velocità media

$$F = \frac{\left( \frac{\alpha}{Y} \right)^{2,1} - \left( \frac{\alpha}{Y} \right)^{1,2}}{\left( 1 - \frac{\alpha}{Y} \right)^{2,1} \left( 1,2 - 2,1 \right)} \Phi_a$$

$\Phi_a$ : coef. correttivo

$$\alpha' = \frac{w_s}{U_* k} + 2,15 \left( \frac{w_s}{U_*} \right)^{0,8} \cdot \left( \frac{C_a}{C_*} \right)^{0,4}$$

$k$ : von Karman  
 $C_* \approx 0,65$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_a = 1 \end{array} \right\} \text{ se } C_a < q_{crit}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_a = 1,05 + \left( \frac{C_a}{C_*} \right)^{0,6} - 2 \left( \frac{C_a}{C_*} \right)^{0,3} \end{array} \right\}$$



3) Le correnti, per ipotesi, è perfettamente cilindriche, ovvero ha traiettorie rettilinee e parallele. In questo modo la distribuzione è di tipo idrostatico

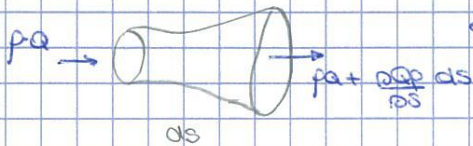


Ricapitolando

- 1) Corrente Gradualmente variata: non si considerano variazioni spaziali repentine. Le linee di corrente sensibilmente rettilinee → pressioni Idrostatiche
- 2) Corrente Uniforme: non vedo profilo di velocità
- 3) Sono con Basse Perdite: linee carichi piezometrici poco decisa da  $h = z + y$ , linee dei carichi totali  $h + u^2/2g$

Sotto queste ipotesi analizziamo il nostro sistema.

### \* EQUAZIONE di CONTINUITA'



Si tratta di un Bilancio di massa

$M_e - M_i = \text{variazione massa}$

$$-\frac{\partial \rho v ds}{\partial t} = \frac{\partial \rho v ds}{\partial t} \quad [\text{kg/s}]$$

Volume →  $\rho v ds \quad [m^3 kg m]$   
 $\frac{\partial \rho v ds}{\partial t}$  variazione nel tempo

$$\frac{\partial \rho v ds}{\partial t} + \frac{\partial \rho v ds}{\partial s} = 0$$

Vincolo Quanto La

- portata unita nello spazio e nel tempo
- sezione varia nel tempo

Nelle idrauliche classiche si consideravano Fluidi Incompressibili

$$\rho = \text{cost}$$

ma nel trasporto solido in Sospensione non posso assumere tale ipotesi

Temperature:  $\rho$  varia poco con la Temperatura; l'ipotesi non se ha l'aria profonda, con forti gradienti di temperatura, allora potrei avere delle variazioni

Noi per semplicità trascuriamo questo fenomeno che è l'ipotesi più forte

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial s} = 0$$



$$\rightarrow \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\tau_0}{\gamma R}$$

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} - J$$

l'equazione di cui il **lungo S** il **carico totale** può cambiare a causa dei 2 fattori:

- \* Le **dissipazioni a causa delle viscosità** (-J)  
 i.e. per **variazioni temporali**

¶ Anche se il fluido è perfetto (J=0) non si conserva comunque H, è necessario infatti che ci sia un **MOTO PERMANENTE**

Ricordando ancora che  $H = h + \frac{u^2}{2g} = y + zp + \frac{u^2}{2g}$ , poiché a noi interessa trovare come varia la

$$H = y + zp + \frac{u^2}{2g} \rightarrow \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial zp}{\partial s} + \frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} - J$$

ma  $-\frac{\partial zp}{\partial s} = ip$

$$\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} = ip - J$$

Per questo avremo

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial s} &= 0 \\ \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} &= ip - J \end{aligned} \right\}$$

**Sistema di Equazioni di De Saint Venant**

Queste due equazioni descrivono l'Idrodinamica della corrente accoppiata alla Morfologia del fondo, si ricordi che queste contemplano tutte le ipotesi fatte in precedenza.

Queste sono le più semplici Equazioni che modellano la corrente, ne esistono di più complesse, che noi trascuriamo.

Non sono comunque Equazioni banali.

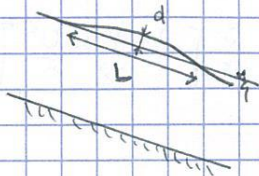
Infatti vi è il termine **NON LINEARE**, che non ci consente di trovare soluzioni analitiche.

$$\left[ \frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial s} \right]$$

Le Equazioni di De Saint Venant possono essere usate anche per descrivere onde (onde di piena) in caso bidimensionale.

Deve valere comunque l'ipotesi di onda lunga.

con  $d/L \ll 1$





Adesso esplicito il termine (A)

$$\textcircled{A} = \frac{Q}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{Q}{R} \right) =$$

$$\left( \frac{Q}{R} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q}{R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{Q}{R^2} \frac{\partial R}{\partial t} = - \frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{R} \right)$$

$$\textcircled{A} = \left( \frac{Q}{R} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q}{R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{R^2} \frac{\partial R}{\partial x}$$

$\frac{\partial R}{\partial t} = - \frac{\partial Q}{\partial x}$  Eq. Continuità

Sostituisco (A) e moltiplico per R

$$- \rho g \frac{\partial h}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q}{R} \right) + \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{R} \frac{\partial Q}{\partial x} = - \frac{Q^2 g}{R^2 x^2 R}$$

$$(1) \quad Q \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q}{R} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (Q^2)$$

$$(2) \quad \frac{Q}{R} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{R} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Q^2) + g R \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{Q^2 g}{R^2 x^2 R} = 0$$

Equazione della  
Quantità di Moto

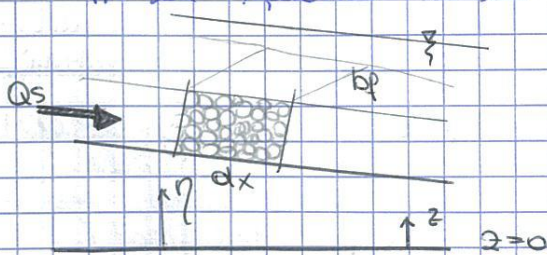
È necessario valutare ora l'Equazione di Evoluzione (di trasporto) di fondo, trascurando il trasporto in sospensione

ritenere presente che vi è un legame tra le portate solide al fondo e le variazioni di altezza del fondo (h)

Questa è l'equazione di Exner.

EQUAZIONE di EXNER (DE) scritta

Si tratta di un bilancio di massa. Si considera la portata solida volumetrica  $Q_s$  e la variazione di questa in un volume di controllo del fondo



Il volume è  
Spesso  $dx$   
largo  $b_p$

$$Q_s = \left[ \frac{m^3}{s} \right]$$

Bilancio di volume:

$$Q_s \cdot dt = \left( Q_s + \frac{\partial Q_s}{\partial x} dx \right) dt = - \frac{\partial Q_s}{\partial x} dx dt \quad \text{variazione volume}$$

Se  $\frac{\partial Q_s}{\partial x} > 0 \Rightarrow$  EROSIONE, esce di più di quello che entra

$\frac{\partial Q_s}{\partial x} < 0 \Rightarrow$  DEPOSITO, entra di più di ciò che esce.

Ora è necessario legare alla variazione di quota del fondo



Per questo l'equazione di continuità diventa

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \iff \frac{b_0 h}{\partial t} - b_f \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \text{Eq. Continuità alla Exner}$$

In questa maniera ho esplicitato  $\eta$ , e creato un legame tra (1)(2)(3)

② Nelle equazioni delle quantità di moto (2) vi è il termine

$$\frac{Q^2 g}{x^2 R}$$

posso sostituire  $C = \frac{\lambda}{\sqrt{g}}$

parametro di resistenza

posso riscriverlo in maniera più tecnica

$$\frac{Q^2}{2C^2 R}$$

⊗ Froude influenza idraulicamente solo a valle morfodinamicamente anche a valle

Fr > 1 corrente veloce

Il sistema diventa

$$\left. \begin{aligned} & \frac{b_0 h}{\partial t} - b_f \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ & \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{2} \right) + g - \eta \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{Q^2}{2C^2 R} = 0 \\ & (1-p) b_f \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \end{aligned} \right\}$$

Eq. Continuità fase liquida

Eq. Conservazione Quantità Moto

Eq. Continuità fase Solida

È possibile descrivere il sistema in forma vettoriale

Si introduce una nuova variabile  $Z = \{y, u, \eta\}$  di 3 componenti. Noi abbiamo 3 variabili  $h, Q, \eta$ , e noi abbiamo detto  $h \rightarrow y, Q \rightarrow u$

Con le ipotesi

$b_f \approx b$  poiché le sponde contornano poco  
 $p \approx 1$

Si può scrivere come

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + A \frac{\partial Z}{\partial x} + B = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} y & u & 0 \\ u & g & g \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ gT \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si tratta di un sistema di eq. differenziali di 1° ordine, ma è come se avessi scritto 1 equazione in 1 variabile  $x$  del tipo

$$\frac{\partial x}{\partial t} + C \frac{\partial x}{\partial x} + d = 0 \quad \text{eq. differenziale del 1° ordine}$$

C: termine di convezione  $\rightarrow$  ci indica la velocità tipica del sistema  
 $\partial x / \partial x$ : moto convettivo lungo direzione  $x$  (principale)

ma  $C \rightarrow [A]$  matrice, la velocità è contenuta nei suoi autovalori; mi aspetto 3 autovalori distinti, reali  $\rightarrow$  possono essere 3 velocità

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u + \sqrt{gy} \\ \lambda_2 &= u - \sqrt{gy} \\ \lambda_3 &= \frac{u}{1-Fr^2} \end{aligned} \quad \left( \frac{\partial Q / \partial x}{y} - \frac{\partial Q / \partial x}{u} \right)$$

3 autovalori reali  $\rightarrow$  ho 3 correnti tipiche  $\rightarrow$  problemi iperbolici

(1) velocità con cui si muove l'informazione nella corrente già in Detail e sono vincolate a  $Fr < 1$  ma lo vettore è una velle,  $Fr > 1$  sono entrambe a valle

$\lambda_3$  è legato a ciò che succede sul fondo, ci sono onde che si muovono. Anche per  $Fr > 1 \rightarrow \lambda_3 < 0$  e si muove verso monte  $\rightarrow$  influenza morfodinamica veloce



$$\tau_0 = \gamma R i = \gamma R \frac{Q^2}{R^2 X^2} \quad i: \text{pendenza notrice}$$

Chazy

$$\tau_0 = \text{costante} \rightarrow \begin{matrix} \gamma = \text{costante} \\ Q = \text{costante già detto (q. continuo)} \\ R = \text{costante} \end{matrix} \rightarrow R^2 X^2 = \text{costante}$$

$Q$  e  $X$  dipendono - geometria  $\rightarrow$   $\alpha$  è metro sezione trasversale  $\square \uparrow$   
 - livello

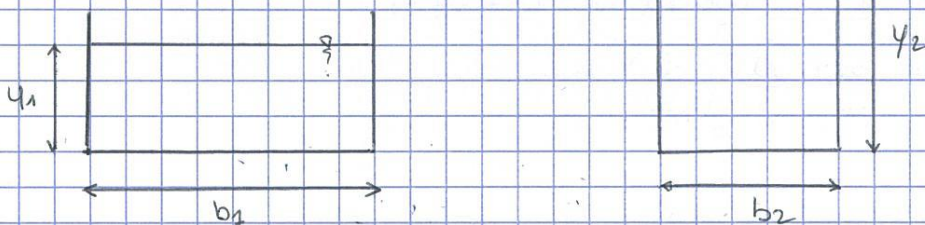
$$\rightarrow Y = \text{costante} \quad \text{moto uniforme}$$

quindi

Abbiamo dimostrato che il moto uniforme è possibile e del trasporto solido al fondo.

Casi 1)  $\frac{Q}{\partial t} = 0$     2) Aveso cinematico

Confronto fra 2 sezioni



Si tratta di 2 sezioni differenti.  
 Ma in entrambi abbiamo la stessa  $Q$  e  $Q_s$   
 stesso gravimetria del fondo

$$Q_{s1} = Q_{s2} \rightarrow Q_{s1} b_1 = Q_{s2} b_2 \quad (*) \text{ proviamo a descrivere } Q_s$$

$\rightarrow$  Meyer-Peter & Mueller

$$\phi = 8 (\theta' - \theta_{cr})^{3/2} \quad \text{dove } \theta = \tau_x = \frac{\tau_0}{(\gamma - \gamma_s) d}$$

$$\phi = \frac{Q_s}{\sqrt{g \Delta} d}$$

$$\text{con } \Delta = \frac{\rho_s - \rho}{\rho}$$

Scrivo il trasporto solido in funzione delle particelle e delle caratteristiche delle correnti poiché il denominatore di  $\phi$  è costante, allora posso porre  $\phi \propto Q_s$ ; ma quindi

$$\phi \sim Q_s \propto (\tau_x - \tau_{xcr})^{3/2} \quad \text{visto } \phi = 8 (\theta' - \theta_{cr})^{3/2} \quad \theta \propto \tau_x$$

Ipotesiamo  $\tau_x \gg \tau_{xcr}$  poiché voglio il trasporto

$$Q_s \propto \tau_x^{3/2}$$

$$\tau_x = \frac{\tau_0}{(\gamma - \gamma_s) d} = \frac{\tau_0 / \rho}{g (\frac{\rho_s}{\rho} - 1) d} = \frac{\tau_0}{\rho g (s - 1) d} \quad \text{se } \tau_0 = \gamma R i = \gamma R \frac{Q^2}{R^2 X^2} = \frac{\gamma Q^2}{R^2 X^2}$$

$$Q = X \sqrt{R i} \rightarrow \tau_x = \frac{\gamma Q^2}{\rho g R^2 X^2 (s - 1) d} = \frac{\rho g Q^2}{\rho g R^2 X^2 (s - 1) d} = \frac{Q^2}{g R^2 C^2 (s - 1) d}$$

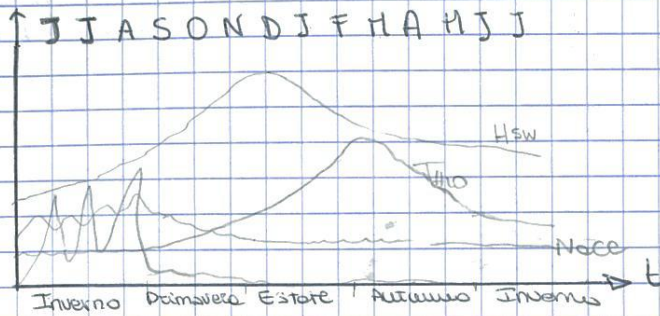
con  $C^2 = X^2 / g$      $\rightarrow$  mette le particelle  $(s - 1) d = C_1$

$$\tau_x = \frac{Q^2}{g R^2 C^2 C_1} \rightarrow Q_s \propto \frac{Q^3}{g^{3/2} R^3 C^3 C_1^{3/2}} = \frac{Q^3}{R^3 C^3 C_2}$$



# ~ LAGHI ~ (5)

Si tende a pensare che sia riconducibile a un problema di STATICA.  
 Sono invece sede di MOTI LENTI, che sono fondamentali per la vita.  
 Questi moti sono legati ai piccoli gradienti, che però regolano fenomeni molto più complessi.



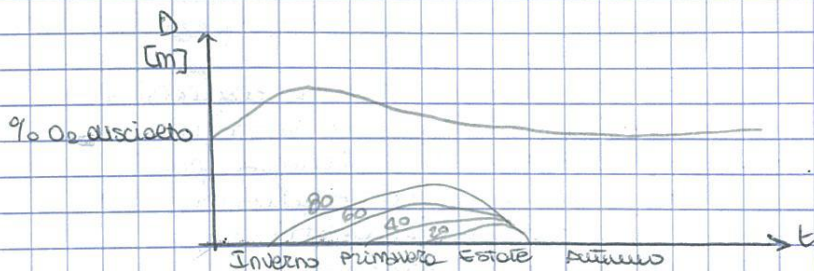
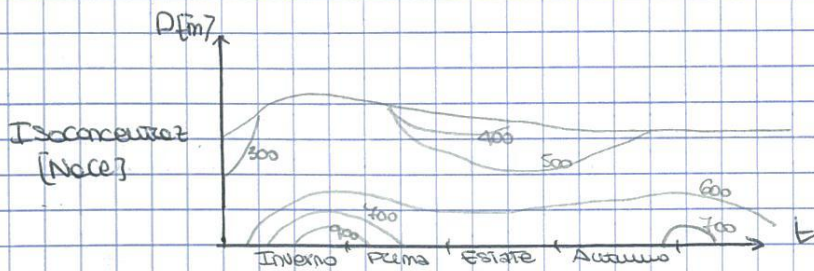
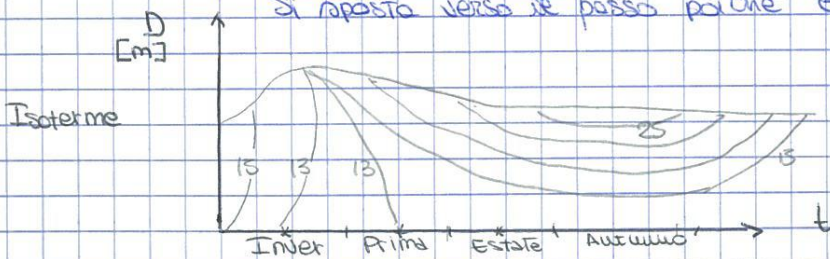
Hsw: Irraggiamento del Sole  
 Q: portate ingresso  
 TH20: Temperatura H2O interna al lago  
 Nacc: concentrazione Nacc in ingresso

**Hsw**: il picco di irraggiamento si ha durante estate; la temperatura dell'aria varia più o meno questo andamento

**Q**: portate in ingresso. Ci dà un'indicazione di quanto piove; i picchi si verificano nel periodo invernale e inizio primavera

**TH20**: la temperatura dell'H2O che circola nel lago. Il massimo non coincide con il massimo dell'irraggiamento, questo per inerzia termica. Succede quando le portate sono grandi la temperatura è minore anche in estate

**Nacc**: concentrazione dell'Nacc per H2O in ingresso. Quando ci sono le piogge elevate la concentrazione è maggiore, poiché si muove il terreno e la concentrazione sale. Non aumenta la diluizione. Si sposta verso il basso poiché è più pesante





Introduciamo alcune ipotesi:

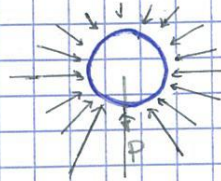
Ⓐ  $\xi = 0$   $\rho = \rho_0$  come in idraulica

Prendiamo una particella di fluido dentro una massa ferma

Su questa agiscono

- Forza peso nel baricentro
- Risultante forze superficie

poiché la particella è grande  $dz$ , agiscono maggiormente sotto che sopra  
 → Se sistema è in Equilibrio  $P=0$



Prendiamo una superficie libera, trascurando la tensione superficiale, tutta la superficie è a  $P=0$

Quando perturbato la massa, ha delle onde, che modificano la superficie, ma vale sempre  $P=0$



Ai bordi la velocità  $u$  deve annullarsi, e allora il fluido si deve adattare a ALTA poiché deve avere la trasformazione da en. cinetica ad energia di pressione, così rimane  $P=0$  GLOBALE



Aumento en cinetica di  $\rho_0 U^2$  da bernoulli e una sovrappressione

Ogni qualcosa che ha un sistema con superficie libera e in questo avvengono delle perturbazioni deve avere

- variazioni di livello sulle pareti
- ↳ comportano
- ↳ variazioni di pressione

Ho devo tenerne conto quando studio l'intero massa fluido?

Per questo faccio un rapporto fra le variazioni di pressione dovute alle oscillazioni, (variazioni di livello) e la massima pressione che è presente nella massa fluida

$$\frac{\rho U^2}{\rho_0 g H} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{U}{\sqrt{gH}}$$

altra interpretazione del Numero di Froude

Se  $U/\sqrt{gH} \rightarrow 0$  allora posso trascurare le perturbazioni

$U/\sqrt{gH} \rightarrow 1$  Non posso trascurare le perturbazioni