



Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1416A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Lombardo

MATERIA: Costruzione di Macchine + Temi + Eserc.,
Prof.Gugliotta_Belingardi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

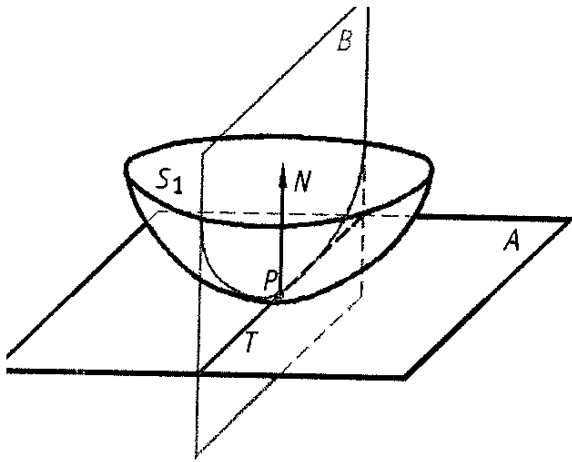
CONTATTO HERTZIANO

①

TEORIA DI HERTZ → calcolo delle tensioni e delle deformazioni che si producono premendo l'uno contro l'altro due corpi elastici: sferici

- Ipotesi:
- 1) Superfici continue (descritte da equazioni polinomiali)
 - 2) Materiali isotropi
 - 3) Materiali perfettamente elastici
 - 4) Assenza di attrito (no moto relativo)
 - 5) Superficie di contatto piccola rispetto alle dimensioni dei due corpi

• Geometria di contatto



- A = piano tangente ad S_1 in P
- N = normale in P ad S_1
- T = generatrice retta in A e passante per P
- B = piano per T e normale ad A

Il raggio di curvatura R , in P, è una curva ottenuta come intersezione di S_1 con un piano per N e che forma un angolo φ con il piano che individua R_{11} e dato da:

$$p = \frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_{11}} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_{22}}$$

dove: p = curvatura

R_{11} = raggio di curvatura principale massima in P

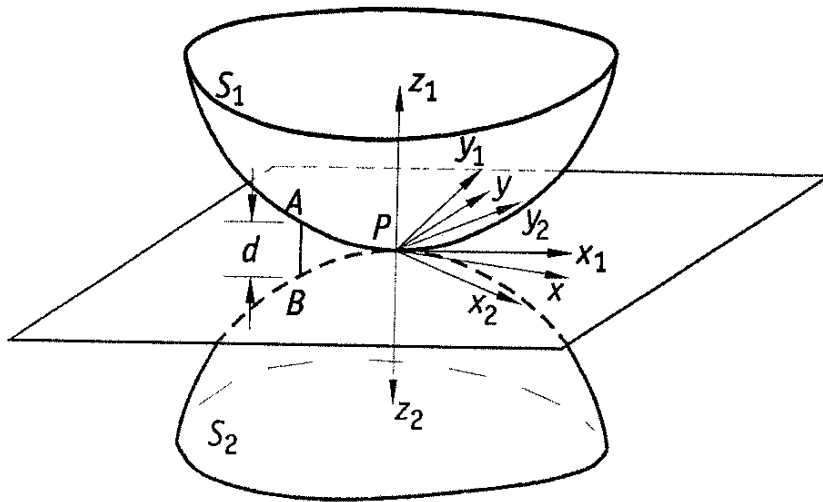
R_{22} = raggio di curvatura principale minima in P

$R_{11} = \pm \frac{1}{\rho_{11}}$ = curvatura minima in P

$R_{22} = \pm \frac{1}{\rho_{22}}$ = curvatura massima in P

3

• Quando a contatto due superfici S_1 e S_2 in P abbia i piani tangenti alle superfici a le normali $(z_1, e z_2)$ considereremo.



A e B sono due punti sulle superfici S_1 e S_2 , rispettivamente; la loro distanza è:

$$\begin{cases} 2AB = 2(z_1 - z_2) = p_{11}x_1^2 + p_{12}y_1^2 + p_{21}x_2^2 + p_{22}y_2^2 & \rightarrow \text{riferimento per ciascuna superficie agli assi } x_1, y_1 \text{ e } x_2, y_2 \\ 2AB = (a_{11} - a_{21})x^2 + 2(a_{12} - a_{22})xy + (a_{13} - a_{23})y^2 & \rightarrow \text{riferimento ad un unico sistema di assi } x, y \\ 2AB = Cx^2 + Dy^2 & \rightarrow \text{riferimento a un sistema "principale" } x', y' \text{ in cui il termine misto } \tilde{c} \text{ } \text{è nullo e dove:} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = p_{11} + p_{21} \\ D = p_{12} + p_{22} \end{cases}$$

NB: $2AB = 2(z_1 - z_2) = Cx^2 + Dy^2$

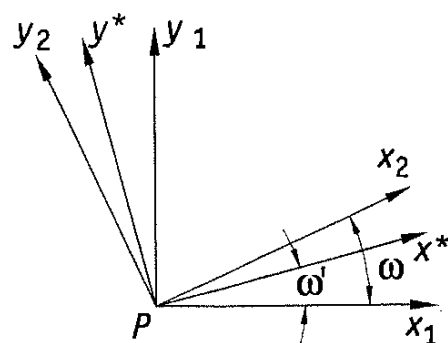
giusta è l'esistenza di un'ellisse lungo dei punti di S_1 ed S_2 presenti su rette parallele a z e aventi la stessa distanza tra loro.

Con riferimento al piano tangente, la relazione che lega tra loro i due sistemi di riferimento principali e il sistema di riferimento x', y' , sono:

$$\begin{cases} x_1 \\ y_1 \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos \omega^1 & -\sin \omega^1 \\ \sin \omega^1 & \cos \omega^1 \end{bmatrix} \begin{cases} x^* \\ y^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 \\ y_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos(\omega - \omega^1) & -\sin(\omega - \omega^1) \\ \sin(\omega - \omega^1) & \cos(\omega - \omega^1) \end{bmatrix} \begin{cases} x^* \\ y^* \end{cases}$$

↳ (Vd. pag. 3-bis !!)



3-bis

Sottraendo i due sistemi appena determinati all'interno della prima equazione della distanza "AB", si ottiene:

$$\begin{aligned}
 2AB &= 2(z_1 - z_2) = \beta_{11} x_1^2 + \beta_{21} y_1^2 + \beta_{12} x_2^2 + \beta_{22} y_2^2 = \\
 &= \beta_{11} (x^* \cos w' - y^* \sin w')^2 + \beta_{21} (x^* \sin w' + y^* \cos w')^2 + \beta_{21} [x^* \cos(w-w') - y^* \sin(w-w')]^2 + \\
 &+ \beta_{22} [x^* \sin(w-w') + y^* \cos(w-w')]^2 \quad \text{sviluppando i quadrati} \\
 &= \beta_{11} (x^{*2} \cos^2 w' - 2x^*y^* \sin w' \cos w' + y^{*2} \sin^2 w') + \beta_{21} (x^{*2} \sin^2 w' + 2x^*y^* \sin w' \cos w' + y^{*2} \cos^2 w') + \\
 &+ \beta_{21} [x^{*2} \cos^2(w-w') - 2x^*y^* \sin(w-w') \cos(w-w') + y^{*2} \sin^2(w-w')] + \\
 &+ \beta_{22} [x^{*2} \sin^2(w-w') + 2x^*y^* \sin(w-w') \cos(w-w') + y^{*2} \cos^2(w-w')] = \\
 &= x^{*2} \left[\beta_{11} \cos^2 w' + \beta_{21} \sin^2 w' + \beta_{21} \cos^2(w-w') + \beta_{22} \sin^2(w-w') \right] + \\
 &+ 2x^*y^* \left[-\beta_{11} \sin w' \cos w' + \beta_{21} \sin w' \cos w' - \beta_{21} \sin(w-w') \cos(w-w') + \beta_{22} \sin(w-w') \cos(w-w') \right] + \\
 &+ y^{*2} \left[\beta_{21} \sin^2 w' + \beta_{11} \cos^2 w' + \beta_{21} \sin^2(w-w') + \beta_{22} \cos^2(w-w') \right] \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2AB = I x^{*2} + 2II x^*y^* + III y^{*2}$$

e il sistema di riferimento x^*y^* deve essere tale da soddisfare la:

$$2AB = Cx^{*2} + Dy^{*2}$$

Il che deve valere:

$$I = C, \quad II = 0, \quad III = D$$

Il che è il sistema di equazioni delle tre condizioni sopra?

$$\boxed{II = 0} \rightarrow \sin w' \cos w' (\beta_{22} - \beta_{11}) + \sin(w-w') \cos(w-w') (\beta_{22} - \beta_{21}) = 0$$

$$\text{Considerando che: } \sin 2w' = 2 \sin w' \cos w' \Rightarrow \sin w' \cos w' = \frac{\sin 2w'}{2}$$

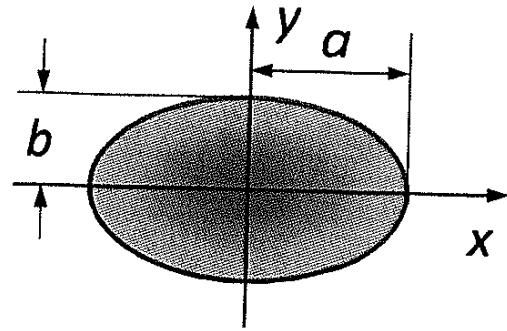
Risulta subito dalle le relazioni

$$p = 1,5 \cdot \frac{F}{\pi a b} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

dove p = pressione di contatto

F = forze applicate

$\pi a b$ = area ellisse



I semiasse dell'ellisse hanno le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} a = \mu q \\ b = \nu q \end{cases}$$

dove: μ, ν = fattori di proporzionalità geometrica; tabellati in funzione di un angolo critico α (vedi pag. 6)

Si determina inoltre:

$$q = \sqrt[3]{\frac{3}{8} F \frac{\theta_1 + \theta_2}{\sum p}} \quad (1)$$

dove: $\theta_i = 4 \cdot \frac{1 - \nu_i^2}{E_i}$, $i = 1, 2$ (ovvero θ di contatto)

$$\sum p = \frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{22}}$$

con: ν_i = coefficiente di Poisson del corpo i -esimo

E_i = modulo elastico del corpo i -esimo

R_{11} = raggio di curvatura principale massima del corpo i -esimo

R_{12} = raggio di curvatura principale minima del corpo i -esimo

NB. Le curvature vanno considerate positive se il centro di curvatura è all'INTERNO del corpo, NEGATIVE se il centro di curvatura è all'ESTERNO del corpo.

In generale, q è calcolabile con l'espressione (1) ma, nel caso in cui i materiali dei due corpi a contatto risultano uguali, allora vale:

$$\begin{cases} \nu_1 = \nu_2 \\ E_1 = E_2 \end{cases} \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = 8 \cdot \frac{1 - \nu^2}{E} \Rightarrow q = \sqrt[3]{3F \frac{1 - \nu^2}{E \sum p}}$$

Casi particolari

1) Contatto SFERA - SFERA

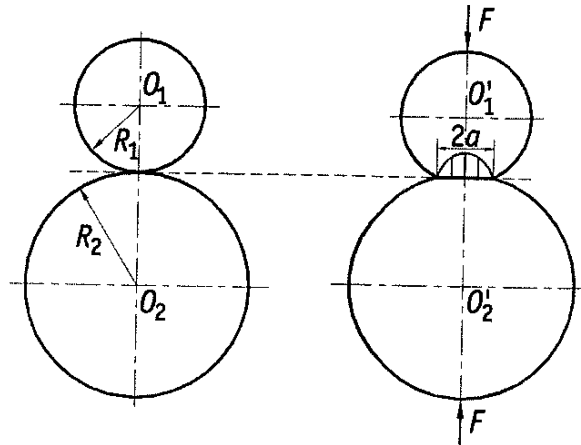
Acciaio $\rightarrow \nu = 0,3$
 $E = 210 \text{ GPa}$

Essendo le curvature delle due sfere uguali, valgono:

$$\begin{cases} R_{11} = R_{12} = \frac{1}{R_1} \\ R_{21} = R_{22} = \frac{1}{R_2} \end{cases} \Rightarrow p^* = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

quindi:

$$\sum p = 2 p^*$$

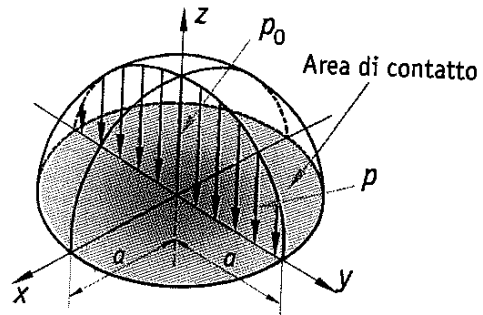


Di compressione, vale che: $\cos \gamma = \frac{(p_{11} + p_{21}) - (p_{12} + p_{22})}{\sum p} = 0$

La superficie di contatto non è più un'ellisse bensì una sfera!!

Poiché $\frac{2}{E^*} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}$ e $\nu = 0,3$, si ottiene:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3F}{2p^*E^*} \frac{1-0,3^2}}{2p^*E^*}} = 1,11 \sqrt[3]{\frac{F}{p^*E^*}}$$



dove a = raggio area di contatto

inoltre, si ottiene:

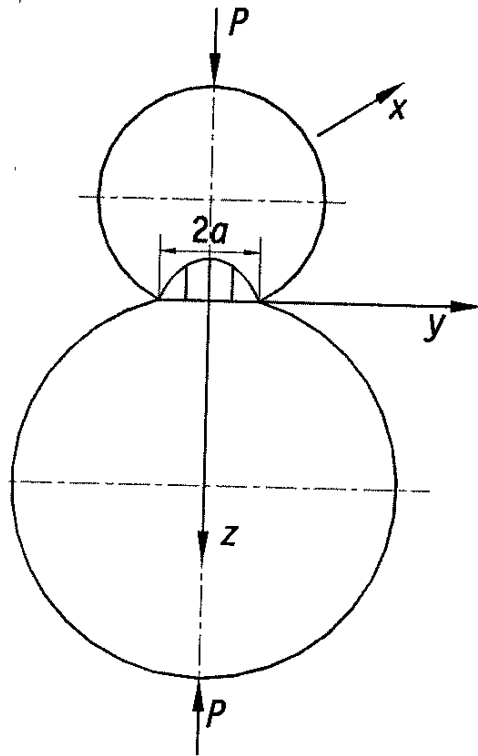
$$p_m = \frac{F}{\pi a^2} \quad (\text{pressione media agente sull'area di contatto})$$

$$p_0 = p_{max} = 1,5 \frac{F}{\pi a^2} = 1,5 p_m \quad (\text{pressione massima agente nell'area di contatto})$$

• Tensioni ideali nel contatto sfero-sfera

9

La conoscenza della sola pressione massima (P_{max}) non consente di definire il pericolo di collasso; nelle zone di contatto esiste infatti uno "stato di tensione triassiale" (in cui le tensioni principali sono tutte di compressione) e' pertanto necessario valutare lo stato di tensione al di sotto delle zone di contatto cedendo, lungo l'asse z , le tre tensioni principali e la tensione ideale massima:



In realtà, la $\sigma_{max, id}$ ideale data dallo stato triassiale di compressione è minore di P_{max} :

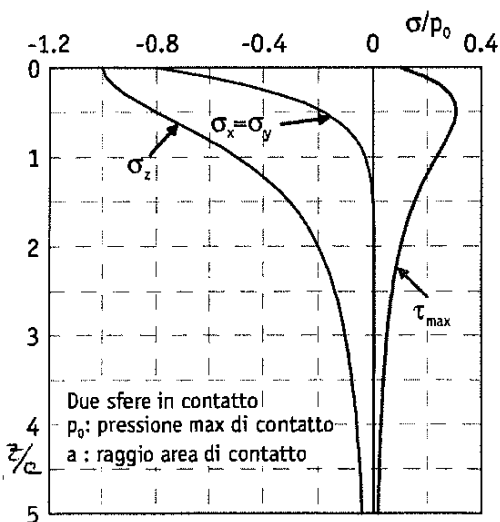
$$\sigma_{max, id} \approx 0,63 P_{max}$$

Alle periferie dell'area di contatto le tensioni tendono a diminuire (secondo le funzioni disincano anche sono più elevate in superficie).

Tuttavia, la tensione massima τ_{max} non è in superficie ma ad una quota: $z = 0,48 a$, in cui la tensione tangenziale massima è $\tau_{max} = 0,31 P_{max}$



Le ozioche portano sottopelle !!



Contatto tra due sfere
 Tensioni al di sotto della superficie,
 lungo l'asse di carico, $\nu = 0.3$

Analisi del contatto cilindro - cilindro

Considerando:

$$b = 1,52 \sqrt{\frac{F}{E^* l \sum \rho}}$$

e

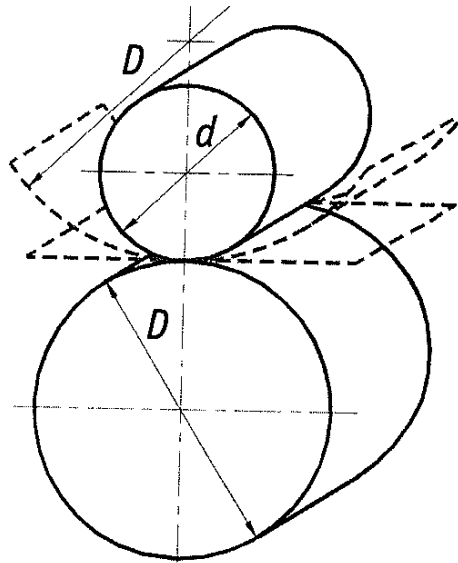
$$P_{max} = 0,418 \sqrt{\frac{FE^* \sum \rho}{l}}$$

dove: $P_{12} = P_{22} = 0$

$$\sum \rho = \rho_{12} + \rho_{22} = \frac{2}{d} + \frac{2}{D}$$

Sostituendo, si tiene:

$$P_{max} = 0,418 \sqrt{\frac{FE^*}{l} \cdot \frac{2}{d} \left(1 \pm \frac{1}{c}\right)} = 0,6 \sqrt{\frac{FE^*}{ld}} \sqrt{1 \pm \frac{1}{c}}$$

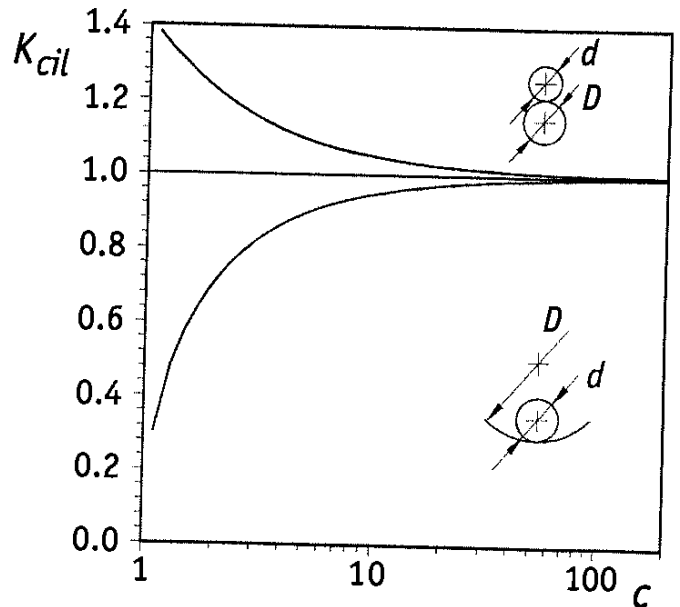


Fattore pedonale K_{cil}

$$K_{cil} = \sqrt{1 \pm \frac{1}{c}}$$

dove: il segno "+" si considera solo quando si ha un contatto con un cilindro cavo

NB: anche qui la curva del contatto interno non può passare da 1 per un caso di omochi uguali.

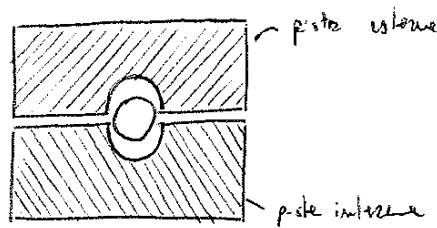


Come nel contatto sfero-sfero, anche in questo caso il contatto interno è in grado di sopportare carichi maggiori, rispetto al contatto esterno, poiché ha valori più bassi di K_{cil} .

di bis

CONTATTO HERTZIANO: Cuscinetto sfera-pista

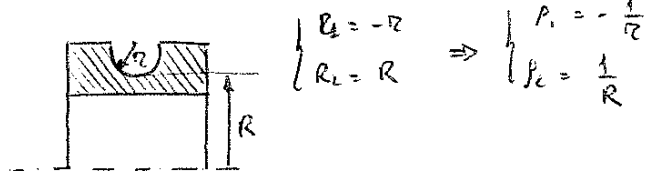
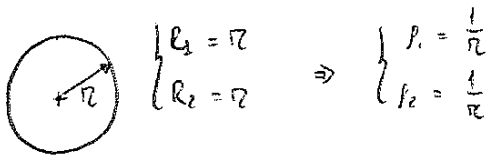
Calcolare nell'ipotesi di pista più sollecitata e distribuzione applicando la legge di Hertz



3) SFERA - PISTA INTERNA

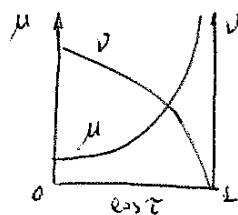
Sfera

PISTA INTERNA



$$P_{max} - P_{min} = (P_{max, sfera} + P_{max, snella}) - (P_{min, sfera} + P_{min, snella}) = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) - \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R} + \frac{1}{R}$$

$$\cos \tau = \frac{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} - \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = 1 \Rightarrow \cos \tau = 1$$



$$\cos \tau = 1 \Rightarrow \begin{cases} \mu = \infty \\ \nu = 0 \end{cases}$$

Demanda di contatto

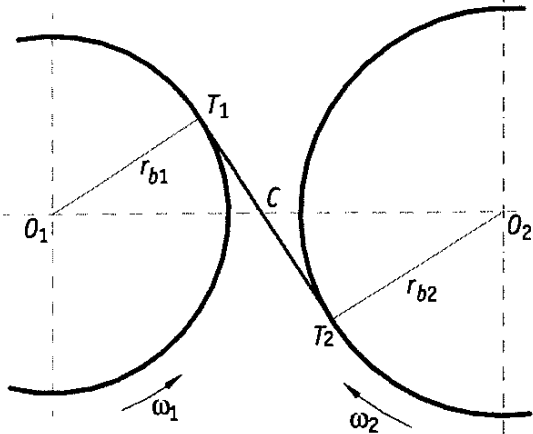
$$q = \sqrt[3]{\frac{3}{8} F \frac{\theta_1 + \theta_2}{\Sigma p}} \Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{3F(1-\nu^2)}{E \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}} \quad (1)$$

$$\left. \begin{matrix} \nu_1 = \nu_2 \\ \epsilon_1 = \epsilon_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = 8 \frac{1-\nu^2}{E}$$

RUOTE DENTATE

13

La trasmissione del moto tra due ruote è equivalente all' avvolgimento e allo svolgimento di un flessibile su due tamburi di raggio r_{b1} e r_{b2} .



$\overline{T_1 T_2}$ = Retta dei centri: retta allineata ai centri
 la trasmissione del moto e della coppia; da
 inoltre la direzione con cui i flanchi dei
 denti si scambiano la forza (F).

\overline{AB} = Segmento dei centri

La velocità periferica v_b delle due ruote è uguale, per cui:

$$v_b = \omega_1 \cdot r_{b1} = \omega_2 \cdot r_{b2}$$

dove: ruota 1 = ruota conduttrice (o motore)

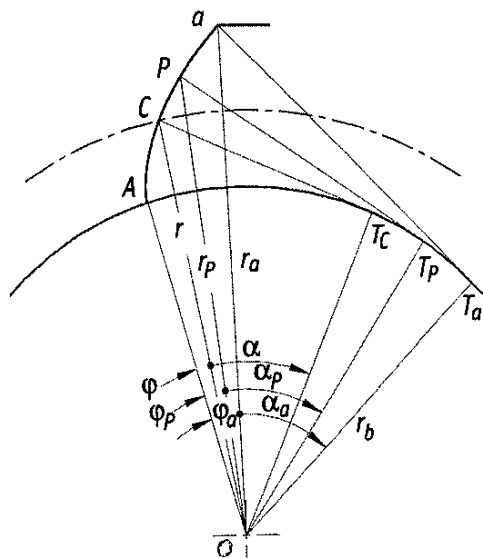
ruota 2 = ruota condotta

Il rapporto di trasmissione, quindi, si mantiene costante:

$$\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Profilo ed evolvente

L'evolvente è la curva descritta da un punto P che rotola senza strisciare su una circonferenza di base, di raggio r_b , detta circonferenza fondamentale.



Fissata la circonferenza base di raggio r_b , è possibile determinare il profilo ad evolvente tramite le "coordinate cinematiche".

• φ = angolo compreso tra due semirette uscenti dal centro O della circonferenza di base e passanti: una per il punto iniziale A sul profilo e l'altra per il generico punto P

• r = distanza del generico punto P dal centro O.

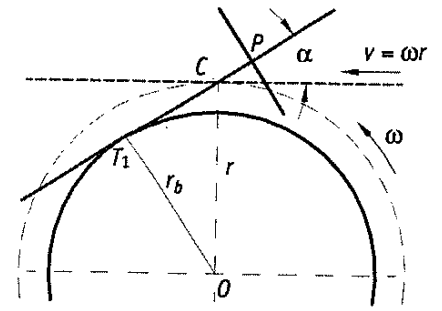
Si individua, inoltre, l'angolo di incidenza α compreso tra le due semirette uscenti da O e passanti: una per il punto P e l'altra per il punto di tangenza T.

Generazione della dentatura

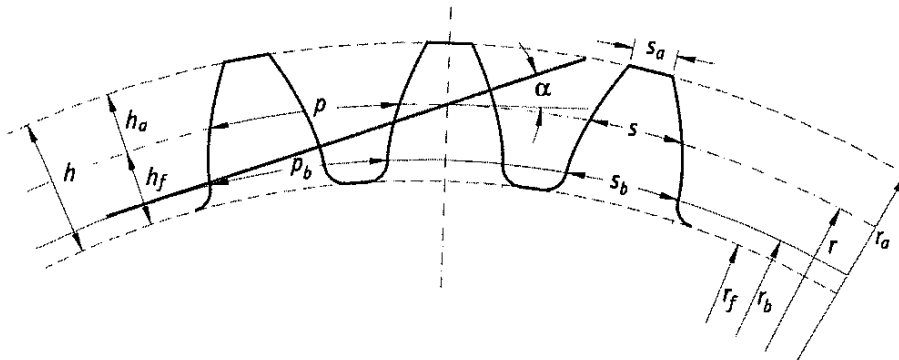
Dentatura normalizzata → generata a partire dalla dentatura normale normalizzata

Dentatura → quota dentata sviluppata lungo una linea

Togliolo con dentatura → si parte da un cilindro pieno facendo in modo che, durante il taglio, vi sia un ingranamento con la dentatura ideale



Geometria della dentatura ideale:



| | | |
|-------------------------------|--|---|
| <u>angolo di pressione</u> | $\alpha = 20^\circ$ | (misurata sul dente) |
| <u>modulo</u> | $m_o = \frac{d}{z} = \frac{2p}{z}$ | (rapporto tra diametro primitivo d e numero di denti z) |
| <u>passo</u> | $p = \pi m_o$ | (misurato su una retta parallela alla retta di riferimento e suddiviso in "larghezza teste" e "larghezza vena") |
| <u>passo base</u> | $p_b = p \cos \alpha$ | |
| <u>addendum</u> | $h_a = m_o$ | |
| <u>dedendum</u> | $h_f = 1,25 m_o$ | |
| <u>raggio base</u> | $r_b = r \cos \alpha$ | |
| <u>raggio primitivo</u> | $r = \frac{z p}{2\pi} = \frac{z m_o}{2}$ | |
| <u>raggio di base interna</u> | $r_f = r - h_f$ | |
| <u>raggio di base esterna</u> | $r_e = r + h_a$ | |

Avendo definito i parametri caratteristici di una quota dentata, si definiscono ora:

- Interasse di funzionamento ($\overline{O_1 O_2}$) $i = m_o \frac{z_1 + z_2}{2}$
- Rapporto di trasmissione (γ) $\gamma = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1}$

Spessore del dente

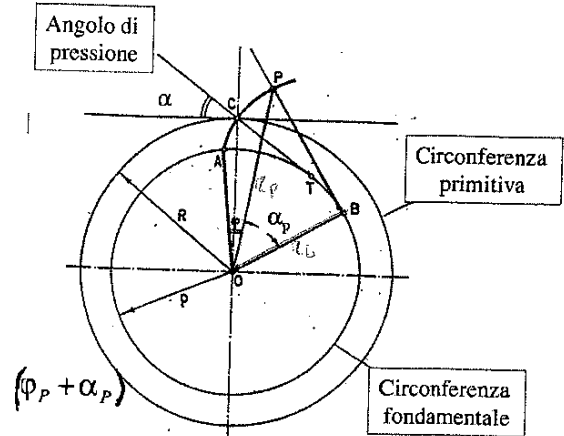
EQUAZIONE PARAMETRICA DELL'EVOLVENTE :

Si trovano le coordinate cilindriche del punto P,

ovvero $r_p = \varphi_p$

• Quanto vale r_p ?

$$r_p = \frac{r_b}{\cos \alpha_p}$$



• Quanto vale φ_p ?

Essendo OBP un triangolo rettangolo, si può scrivere che :

$$PB = AB \Rightarrow r_b \tan(\alpha_p) = r_b (\varphi_p + \alpha_p) \Rightarrow \varphi_p = \tan(\alpha_p) - \alpha_p = ev(\alpha_p)$$

Nel centro di intesa Zofessione C, vale :

$$r = \frac{r_b}{\cos \alpha} \quad \text{e} \quad \varphi = \tan(\alpha) - \alpha = ev(\alpha)$$

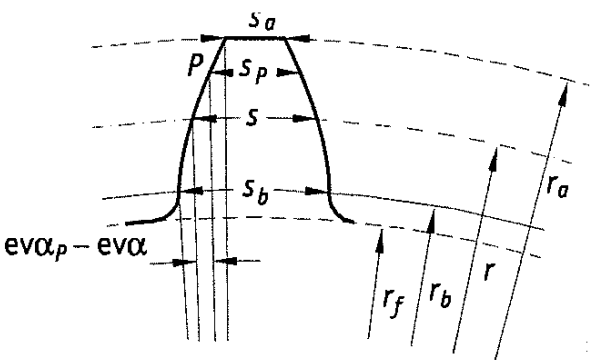
Lo spessore del dente in un punto qualsiasi P può essere calcolato conoscendo lo spessore "s" ($s = \frac{\pi \cdot M}{2}$) sulla circonferenza primitiva della ruota.

Nel punto P si ha :

$$r_b = r \cos \alpha = r_p \cos \alpha_p$$

Dati $\beta_p = \beta$ gli angoli sottesi degli archi di lunghezza s_p e s , vale :

$$\beta - \beta_p = 2 (ev(\alpha_p) - ev(\alpha))$$



$$\frac{s}{r} - \frac{s_p}{r_p} = 2 (ev(\alpha_p) - ev(\alpha)) \Rightarrow s_p = r_p \left[\frac{s}{r} + 2 (ev(\alpha_p) - ev(\alpha)) \right]$$

Sulla circonferenza di base, $ev(\alpha_b) = 0$:

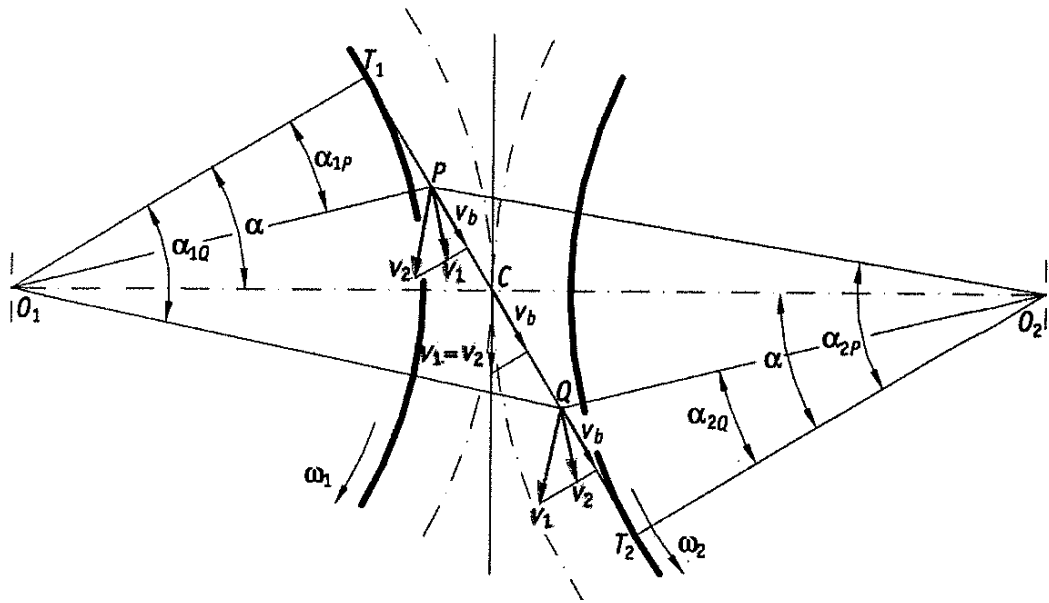
$$s_b = r_b \left(\frac{s}{r} + 2 ev(\alpha) \right)$$

Sulla circonferenza di testa :

$$s_a = r_a \left[\frac{s}{r} + 2 (ev(\alpha) - ev(\alpha_a)) \right]$$

• Sbriciamento specifico

Tale fenomeno è legato al fatto che, lungo il segmento \overline{AB} , le due ruote sbruciano; il termine "specifico" indica che esso riferisce a velocità relative.



Si introducono le seguenti grandezze:

- V_c = velocità di slancio comune
- V_1 = velocità assoluta ruota 1
- V_2 = velocità assoluta ruota 2
- V_b = proiezione di V_1 e V_2 sulla retta dei contatti

Si nota che $V_1 \neq V_2$ e, in particolare, vale che:

$$\begin{cases} V_1 < V_2 & \text{nel punto P} \\ V_1 > V_2 & \text{nel punto Q} \end{cases}$$

invece, nel punto C, vale che $V_1 = V_2$.

Nonostante ciò, le componenti normali delle velocità V_1 e V_2 devono essere uguali tra loro e pari a V_b ; invece, le componenti delle velocità perpendicolari alla retta dei contatti (V_t) sono diverse e indicano che si verifica sbriciamento (sono opposte passando dal tratto \overline{PC} al tratto \overline{QC} , mentre si annullano in C).

Effetti dello sbriciamento $\begin{cases} \rightarrow$ usura \\ \rightarrow calore \end{cases}

NB. all'uso, lo sbriciamento è un fenomeno continuo per la spianatura delle creste (rodaggio), dopo però si rischia di alterare il profilo della ruota.

Sostituendo nelle espressioni di k_{s1} e k_{s2} , si ottiene:

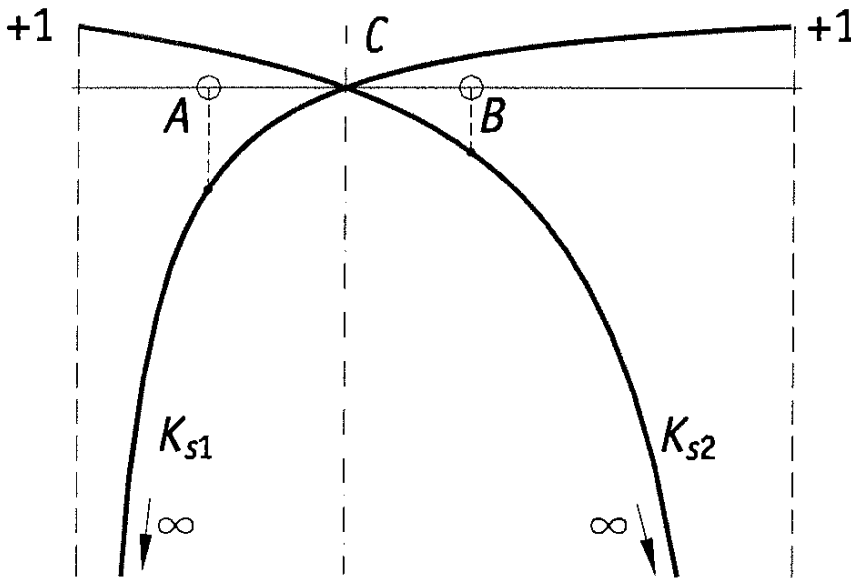
$$k_{s1} = \frac{(r_2 \sin \alpha + \delta) - \gamma (r_2 \sin \alpha - \delta)}{r_2 \sin \alpha + \delta}$$

$$k_{s2} = \frac{(r_2 \sin \alpha - \delta) - \frac{1}{\gamma} (r_2 \sin \alpha + \delta)}{r_2 \sin \alpha - \delta}$$

da cui:

$$k_{s1} = (1 + \gamma) \frac{\delta}{r_2 \sin \alpha + \delta}$$

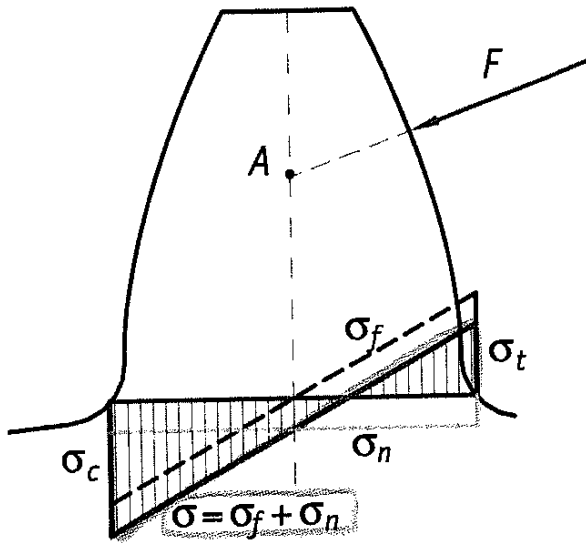
$$k_{s2} = - \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\delta}{r_2 \sin \alpha - \delta}$$



In prossimità degli esteri, lo
 sfasamento tende a infinito.
 Con ruote "normali" k_{s1} e k_{s2} ,
 rispettivamente in A e B, sono
 diverse; si può cercare di ridurre
 al minimo l'effetto del k_s
 "correggendo" le ruote!

Il tratto di interesse è il segmento sui vertici \overline{AB} perché così si limita lo
 sfasamento specifico che si avrebbe andando incontro alla condizione limite ($A = T_1$)
 e comunque si avrebbe un avvicinamento a $T_2 < T_1$.

TEORIA DI LEWIS



da σ_{max} dipende da:

- dimensioni del dente
- valore di F
- punto di applicazione di F

$$\begin{cases} \sigma_c = \sigma_{COMPRESSIVA} \\ \sigma_t = \sigma_{TRAZIONALE} \end{cases}$$

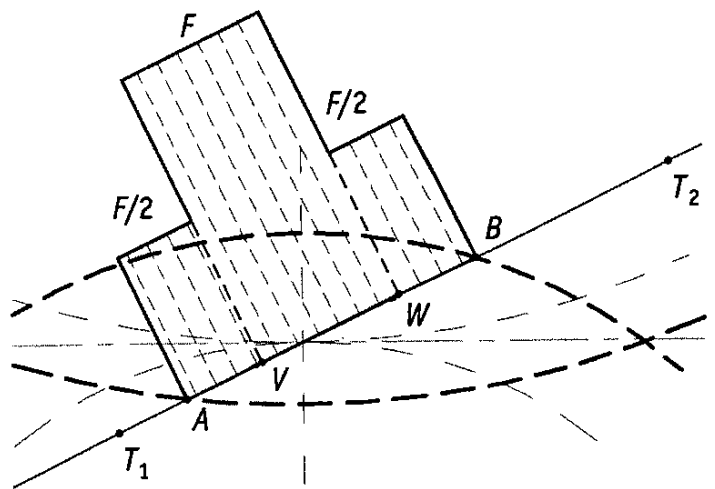
Si fanno alcune ipotesi:

- 1) dente sollecitato sulla sommità (caratteristica più sfavorevole) della forza F (farne porsi al centro necessitato a generare il σ).
- 2) tutto il corpo è formato da una sola coppia di denti in presa (caratteristica peggiore)
- 3) rapporto di condotta: $1 < E < 2$

Il segmento dei contatti \overline{AB} viene suddiviso in tre parti:

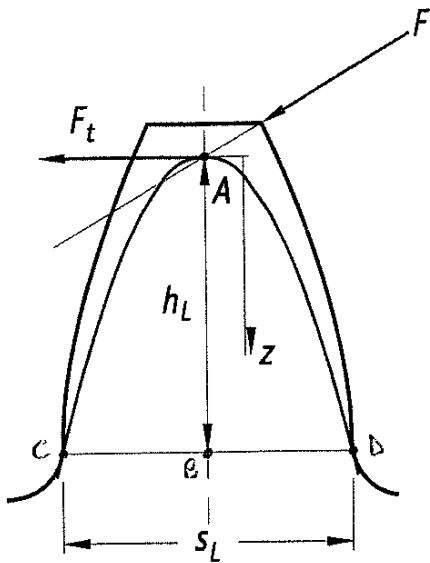
- \overline{VW} → una sola coppia di denti in presa
- \overline{AV} } → due coppie
- \overline{WB} }

Tale ipotesi più essere adattata no, nella realtà, la ripartizione del carico dipende dall'elasticità dei corpi, dalla presenza delle lammose, dalle lacerazioni e da altri fattori.



NB: la posizione della forza F varia, al variare della posizione del punto di contatto, lungo il segmento \overline{AB} , andando dalla radice alla punta del dente.

- Si determina ora a quale distanza z si ha la sollecitazione massima, ovvero dove si trova la SEZIONE CRITICA (25)



Secondo Lemma, la sollecitazione massima (σ_{max}) si ha nelle sezioni in cui la parabola di deformazione risulta tangente al profilo del dente stesso.

Nei punti C e D vi è la σ_{max}

$$\sigma_{max} = \frac{6 F_t \cdot z}{b \cdot s^2} \quad (1)$$

Ponendo $\sigma_{max} = \sigma_{ult}$, dalla (1) si ricava:

$$S(z)^2 = \frac{F_t}{\sigma_{max} \cdot \frac{1}{6} \cdot b} \cdot z \quad (\text{equazione parabola: } y^2 = kx)$$

portando il punto più sollecitato sta nel tratto CD (è l'intero tratto, in realtà) dove $z = h_L$ e $S(z) = S_L$.

Risultando, la massima sollecitazione a flessione si determina come:

$$\sigma_{f,max} = \sigma_{LW} = \frac{6 \cdot F_t \cdot h_L}{b \cdot S_L^2} = \frac{6 \cdot F_t}{b} \cdot \frac{h_L}{S_L^2} \cdot \frac{M_m^2}{M_m^2} = \frac{6 F_t}{b} \cdot \frac{h_L}{M_m^2} \cdot \frac{M_m^2}{S_L^2} =$$

moltiplico e divido per M_m^2

$$= \frac{F_t}{b \cdot M_m} \cdot 6 \frac{h_L}{M_m} \left(\frac{M_m}{S_L} \right)^2 \Rightarrow \sigma_{LW} = \frac{F_t}{b \cdot M_m} \gamma_{LW} \quad (2)$$

dove $\gamma_{LW} = \frac{6 \frac{h_L}{M_m}}{\left(\frac{S_L}{M_m} \right)^2}$

fattore di forma (adimensionale)

è un valore tabellato in funzione del numero di denti z e dell'angolo di pressione α

In conclusione, la (2) è ottenibile per la superficie critica quando è noto M_m e si vuole conoscere b , ponendo

$$\sigma_{LW} = \sigma_{amm} = \frac{RPOz}{c.s.} \quad \text{e noto } F_t = \frac{C}{R} \quad \begin{matrix} C = \text{coppia} \\ R = \text{raggio ruote} \end{matrix}$$

2) Dimensione delle Vite

27

Si ottiene un fattore di sicurezza:

$$\Delta \sigma_{LH} = \frac{F_t}{F_t + \Delta F_t}$$

NB: secondo l'associazione austriaca esattore di imprevisti (AGIA), vale: $\Delta F_t = \frac{5,6}{5,6 + \sqrt{v}}$

Il fattore da moltiplicare è:

$$T_{eff} = T \cdot k_v \cdot k_o \cdot k_H$$

dove: k_v = fattore di moltiplicazione dinamica del carico k_o = fattore di sovraccarico (overload) k_H = fattore tratto al supporto (mounting)↳ i funzione delle caratteristiche dei supporti: più i supporti sono precisi e più il k_H è elevato.

Si può concludere che, più k_o e k_H sono elevati e più sarà elevato la T_{eff} , $T_{eff} > T$; in questo modo si ottiene una σ_{LH} più elevata da tenere conto dei fattori non valutati precedentemente, i quali però devono essere considerati in progettazione.

I calcoli fino ad ora analizzati vanno bene in fase di verifica (m_m è noto e si vuole determinare b) ma non potranno essere utilizzati in fase di progetto (m_m e b entrambi incogniti), e tal fine si sviluppa l'equazione di Lewis:

$$\sigma_{LH} = \frac{F_t}{b m_m} Y_{LW} \Rightarrow Y_{LW} = \frac{\sigma_{LH} \cdot b \cdot m_m}{F_t}$$

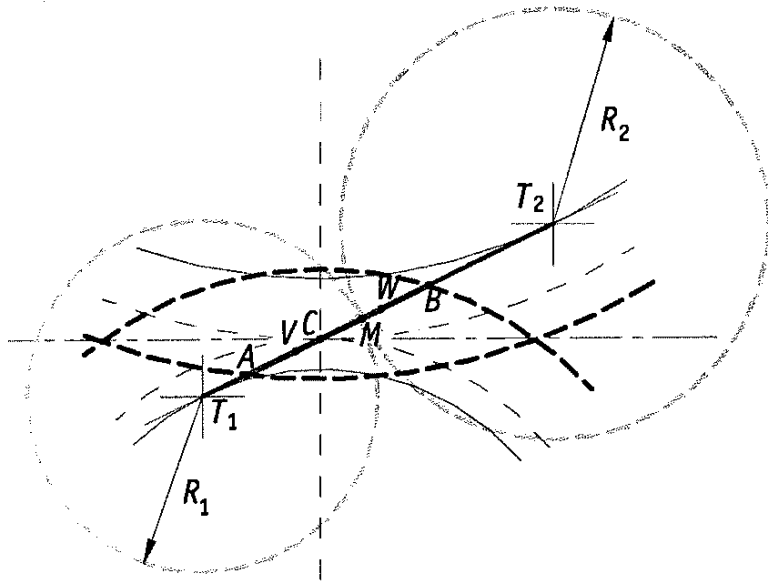
moltiplicando e dividendo per m_m

$$Y_{LW} = \frac{\sigma_{LH} \cdot b \cdot m_m}{F_t} \cdot \frac{m_m}{m_m}$$

introducendo il fattore adimensionale $\lambda = \frac{b}{m_m} = 10 \div 12$

$$Y_{LW} = \frac{\sigma_{LH} \lambda \cdot m_m^2}{F_t}$$

Si procede adesso al calcolo della σ_{Hz} nel caso di due denti a contatto nel punto H, i quali possono essere sostituiti da due cerchi equivalenti di raggi $\overline{T_1H}$ e $\overline{T_2H}$ e centri in T_1 e T_2 .



$$R_1 = \overline{T_1H}$$

$$R_2 = \overline{T_2H}$$

Per calcolare σ_{Hz} ci si riferisce alle teorie di Hertz nel caso di due cilindri puniti tra loro da una forza F . La superficie di contatto è un rettangolo di lunghezza "2a" e larghezza "b", per la larghezza delle ruote.

La pressione superficiale massima è:

$$\sigma_{Hz} = 0,59 \sqrt{F_{mv} \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}}$$

dove: 0,59 = valore di Hertz e del coefficiente di Poisson

$$F_{mv} = \frac{F_m}{b} = \frac{F_E}{b \cos \alpha} \quad (\text{forza normale per unità di larghezza})$$

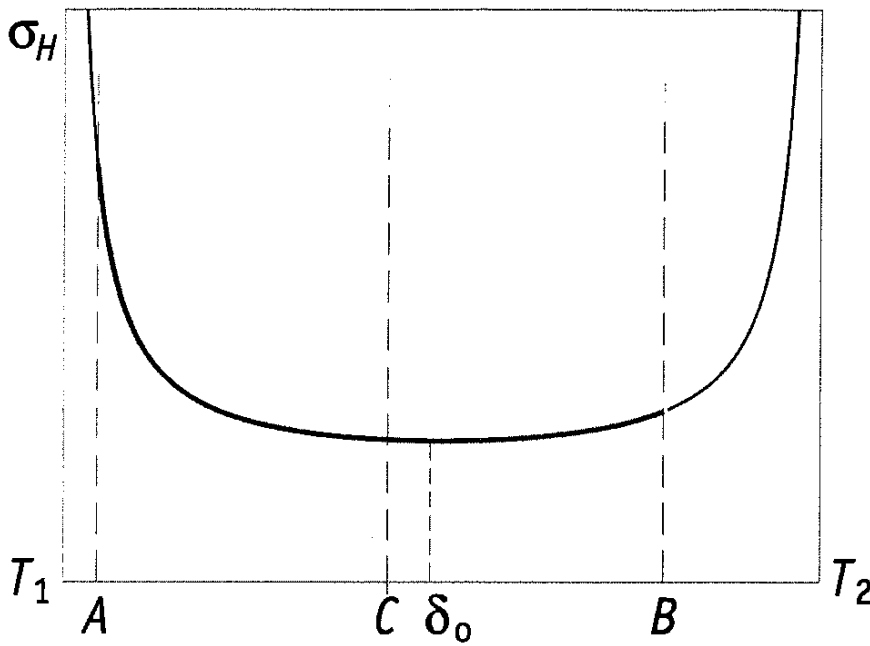
$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + 0 + 0 = \sum p \quad (\text{curvature})$$

$E_1, E_2 =$ moduli elastici

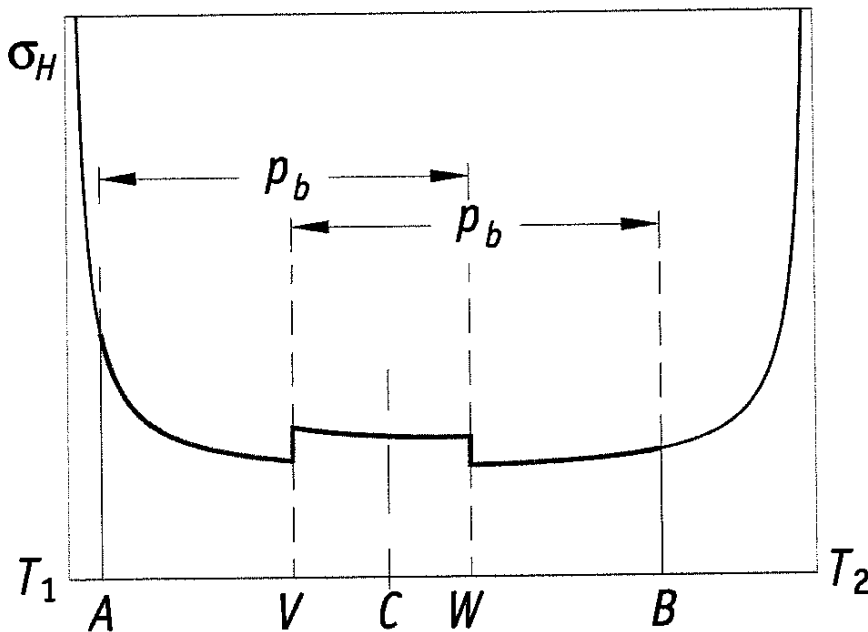
Se i due materiali hanno lo stesso modulo elastico:

$$\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} = \frac{2}{E}$$

Nel caso in cui il carico sui denti è costante (come se ci fosse un solo dente in presa) allora la $\sigma_{H, max}$ si ha in uno degli estremi di contatto:



Nel caso reale, in cui $1 < \epsilon < 2$, si può calcolare l'andamento teorico di σ_{H2} nel corso di equipartizione del carico per due coppie di denti in presa e vedere come varia σ_{H2} per una sola coppia di denti in presa.



Tuttavia, il punto critico è sempre nella ruota piccola in V in cui si ha $\sigma_{H, max}$, secondo la teoria di Hertz (che non tiene conto della lubrificazione).

La lubrificazione è ottimale quando la C perché lì si hanno velocità diverse, ma che nel punto C si ha sliscio nullo e quindi lubrificazione nulla.

NB: Tuttavia, sperimentalmente, si vede che la $\sigma_{H, max}$ è in C perché, essendo velocità relative nulle e lubrificazione nulla, in C si concentrano fenomeni di Pitting.

• Correzione delle ruote dentate

Come già visto nel caso dell'interferenza, il fenomeno dell'usura è legato all'"effetto" del k_s : dal momento che k_{s1} e k_{s2} sono molto diversi tra loro, sia in A che in B, sarà necessario effettuare la "correzione" della dentatura per ottenere "ruote normalizzate corrette".

TAGLIO CON SPOSTAMENTO: processo di corrette nella spostare il riferimento \bar{AB} in modo da avere $k_{s1}(A)$ prossimo al valore di $k_{s2}(B)$; ciò si ottiene portando, durante il processo di taglio, la linea mediana delle dentature in una posizione spostata rispetto alla tangente alle circonferenze primitive delle ruote.

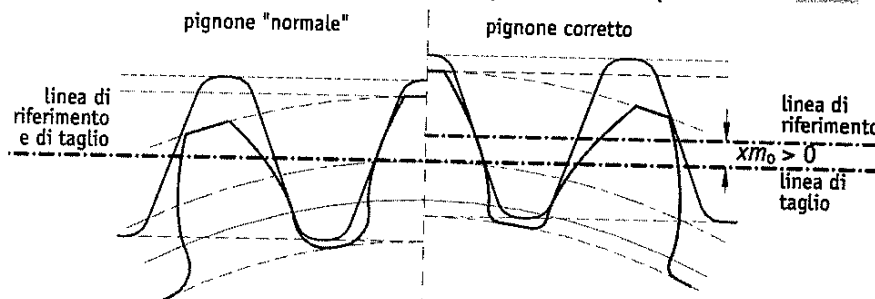
Si definisce "spostamento (V)" la distanza tra la linea di riferimento e la linea di taglio, mentre lo "spostamento relativo (X)" è detto anche "COEFFICIENTE DI SPOSTAMENTO":

$$X = \frac{V}{m_o}$$

- SPOSTAMENTO V POSITIVO → linea mediana FUORI della circonferenza primitiva

$$V = X \cdot m_o > 0$$

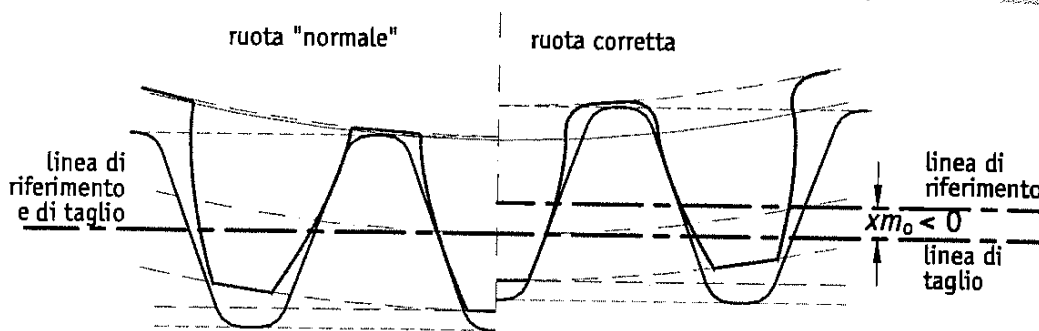
Il angolo di pressione deve essere un angolo esterno MINORE di quello corrispondente a un taglio normale: occorre SOMMARE a questo la quantità "2V"



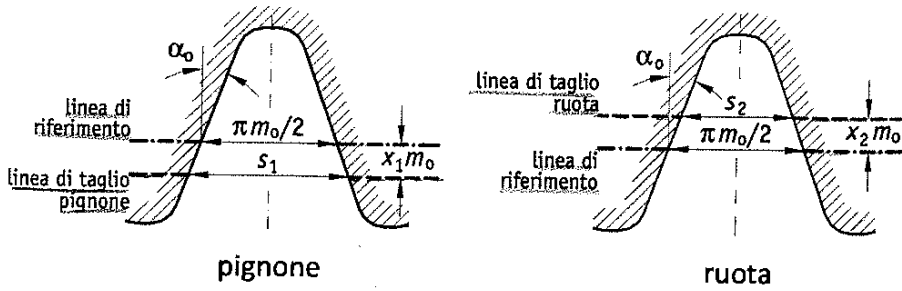
- SPOSTAMENTO V NEGATIVO → linea mediana DENTRO della circonferenza primitiva

$$V = X \cdot m_o < 0$$

Il angolo di pressione deve essere un angolo esterno MINORE di quello corrispondente a un taglio normale: occorre SOTTRARRE a questo la quantità "2V"



Per studiare i due tipi di correzione ci si riferisce alle seguenti figure:

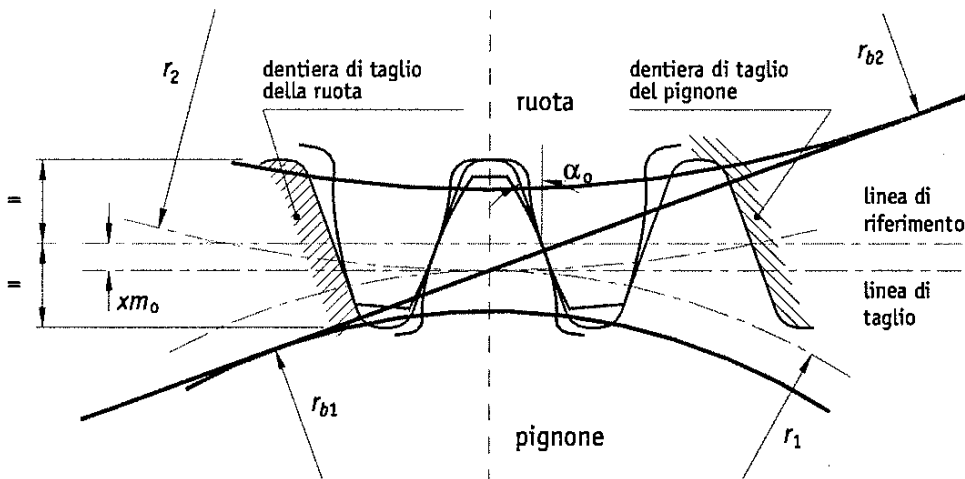


1) Correzione Simmetrica

- $x_1 + x_2 = 0$
- pignone (1) tagliato con spostamento $x_1 > 0$
- ruota (2) tagliata con spostamento $x_2 = -x_1$
- spostare s_2 sulle circonferenze primitive di taglio UGUALI al vero misurato sulle circonferenze primitive di taglio della ruota 2

Ponendo $x_1 = x$ e $x_2 = -x$, si ottiene:

$$\begin{cases} s_1 = \frac{\pi \cdot m_0}{2} + 2x m_0 \operatorname{tg} \alpha_0 \\ s_2 = \frac{\pi \cdot m_0}{2} - 2x m_0 \operatorname{tg} \alpha_0 \end{cases} \Rightarrow s_1 + s_2 = \pi m_0$$



Sono qui esposti i principali dati di una dentatura normale e di una dentatura corretta con correzione simmetrica:

| | Dentatura normale | Dentatura corretta simmetrica | |
|---------------------|------------------------|-------------------------------|----------------------|
| | Pignone e Ruota | Pignone | Ruota |
| addendum | $h_a = m_0$ | $h_{a1} = m_0 + v$ | $h_{a2} = m_0 - v$ |
| dedendum | $h_f = 1.25 m_0$ | $h_f = 1.25 m_0 - v$ | $h_f = 1.25 m_0 + v$ |
| altezza del dente | $h = 2.25 m_0$ | $h = 2.25 m_0$ | $h = 2.25 m_0$ |
| interasse | $i = m_0(z_1 + z_2)/2$ | $i = m_0(z_1 + z_2)/2$ | |
| Angolo di pressione | α_0 | α_0 | |

Versione di spessore v :

- circonferenze primitive di taglio
 $\Delta s = 2x m_0 \operatorname{tg} \alpha_0$
- circonferenze di base
 $\Delta s_b = 2x m_0 \cos \alpha_0$

Provando $S_1 + S_2 = p$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_R$, si scrive:

$$r_{1R} = \frac{z_1 \cdot p}{2\pi} = \frac{z_1 \cdot p}{2\pi}$$

$$r_{2R} = \frac{z_2 \cdot p}{2\pi} = \frac{z_2 \cdot p}{2\pi}$$

Se $p_1 = p_2 = p$, allora i i impedenze sono pure e sono interferente.

Sottraendo e semplificando si ottiene la relazione fondamentale per il calcolo dell'angolo di pressione di lavoro (α_R).

$$\sin \alpha_R = \sin \alpha_0 + 2 \frac{f_g}{d_0} \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2}$$

NB: se la cessione fosse simmetrica, si avrebbe:

$$x_1 + x_2 = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_R = \alpha_0 = 20^\circ$$

quindi, $\sin \alpha_R = \sin \alpha_0$.

Una volta determinato l'angolo di pressione di lavoro α_R , si possono ricavare i valori dei rapporti perimetri di lavoro (r_{1R}).

$$r_{1R} = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha_R}$$

$$r_{2R} = \frac{r_{b2}}{\cos \alpha_R}$$

Si calcola l'interasse di lavoro (i_R):

$$i_R = r_{1R} + r_{2R} = (r_{p10} + r_{p20}) \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_R}$$

Si calcola il modulo di lavoro (m_R):

$$m_R = \frac{2 r_{1R}}{z_1} = \frac{2 r_{2R}}{z_2} = m_0 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_R}$$

Per capire quali sono i criteri con cui vengono scelti i valori delle cessioni x_1 e x_2 per il taglio delle due ruote, ci si deve basare sugli effetti che si possono conseguire e rispetto di un taglio a profilo sporcato

MECANICA DELLA FESSURA LINEARE ELASTICA

Nelle strutture o componenti di macchine sono presenti difetti o discontinuità che possono propagarsi, sotto l'azione dei carichi, ad alta o bassa velocità; nel primo caso si parla di rotture fragili, nel secondo caso si può avere rotture duttili o propagazione per fatica del difetto con successive rotture fragili o duttili.

La MFLD permette di correlare l'intensità e la distribuzione delle tensioni, nell'intorno dell'apice del difetto, alla tensione nominale e alle dimensioni, alle forme e all'orientazione del difetto.

Parametri fondamentali:

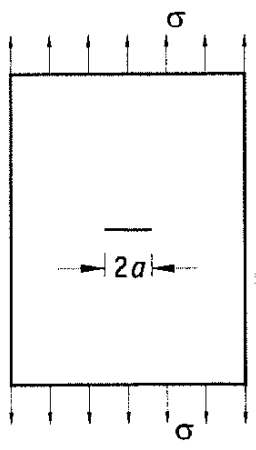
- a = dimensione del difetto o cricca
- σ = stato di tensione
- K_I = fattore di concentrazione delle tensioni
- K_{II} = tensione alla frattura (in condizioni statiche e in "stato di deformazione piano")
(K_{IIC})

↓
 indice del materiale di riferimento plasticamente o assorbire energia in presenza di un intaglio (pendolo di Charpy)

NB: i coefficienti K_I e K_{IIC} dipendono dalla temperatura a cui avviene la condiz. di carico e dalle modalità di applicazione del carico (dinamica del carico)

TEORIA DI GRIFFITH

Griffith studiò le fratture fragili e scoprì che, se un difetto si propaga allora è una versione dell'energia potenziale superficiale del componente, necessaria per la creazione di nuove superfici.



$$U = U_0 - U_a + U_f \quad (\text{energia totale})$$

- dove:
- U = energia potenziale elastica
 - U_0 = energia potenziale elastica della lastra prima del difetto
 - U_a = energia potenziale elastica sottratta all'introduzione del difetto nella lastra (energia persa)
 - U_f = incremento di energia superficiale dovuta alla formazione delle superfici del difetto.

► Calcolo di "R"

$$U_Y = 2\sigma \gamma_e$$

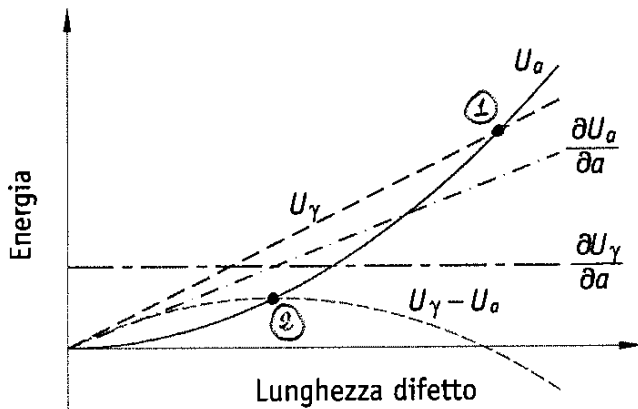
dove: γ_e = energia superficiale del materiale

Domanda si ottiene:

$$\frac{\partial U_Y}{\partial a} = 2\gamma_e = R \quad \Rightarrow \quad R = 2\gamma_e$$

con il "2" che indica che si stanno formando due superfici agli spigoli della cricca.

Risumando il tutto graficamente, si ha:



① $\rightarrow U_Y = U_a$ energia richiesta ed energia disponibile si eguagliano

② $\rightarrow \max(U_Y - U_a)$ CONDIZIONE DI CRITICITÀ:
 quando la dimensione delle cricche supera tale punto, allora la propagazione avviene in maniera INSTABILE, alla velocità del suono

Alfano si ottiene propagazione del difetto, dove vale:

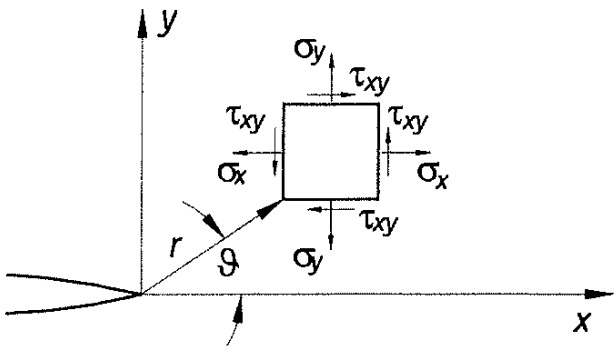
$$G = R \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sigma^2 \pi a^2 \epsilon}{E} = 2\gamma_e & \Rightarrow \quad \sigma \sqrt{a} = \sqrt{\frac{2\gamma_e E}{\pi}} \quad (TP) \\ \frac{\sigma^2 \pi a^2 \epsilon (1-\nu^2)}{E} = 2\gamma_e & \Rightarrow \quad \sigma \sqrt{a} = \sqrt{\frac{\gamma_e E}{\pi(1-\nu^2)}} \quad (DP) \end{cases}$$

Quando il prodotto " $\sigma \sqrt{a}$ " raggiunge il valore limite (critico), che dipende solo dal materiale, allora le cricche cominciano a propagarsi; tale valore critico è indicato come:

$$\begin{cases} K_{IC} & \text{in TP} \quad (\sigma_z = 0) \\ K_{IIC} & \text{in DP} \quad (\epsilon_z = 0) \end{cases}$$

- NB:
- $\epsilon_z = 0 \rightarrow$ Stato di deformazione piano: non ci sono deformazioni lungo l'asse z
 - $\sigma_z = \text{cost} \rightarrow$ Stato di deformazione piano generalizzato: non dipende da z e ha un unico valore, indipendentemente da dove si va a studiare la cricca.

Lo stato tensoriale all'apice del difetto e le espressioni caratterizzanti sono riportati di seguito:



Modo I

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} \end{aligned}$$

Modo II

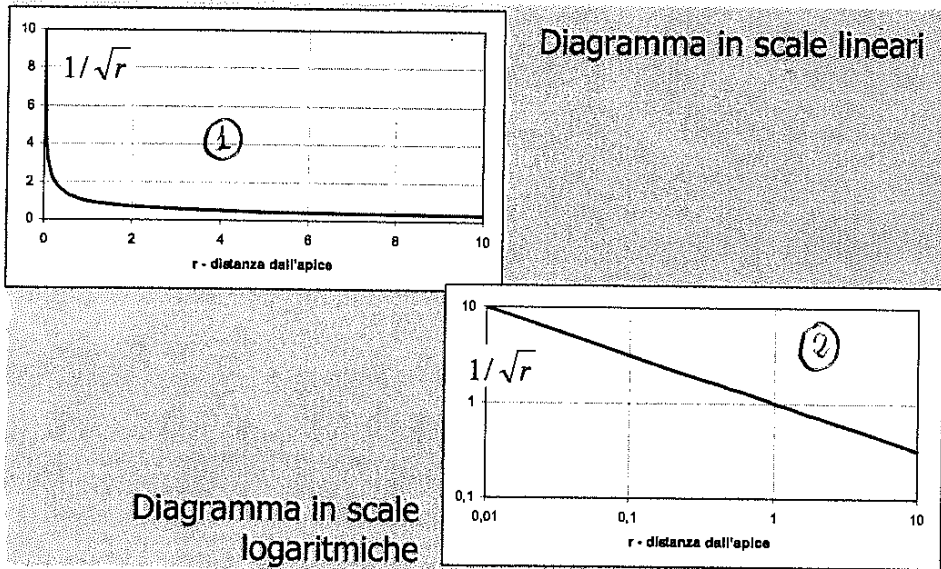
$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} \end{aligned}$$

Modo III

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \tau_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \end{aligned}$$

con: r = distanza dell'apice del difetto
 θ = orientazione (pro' senso prese nulla)

E' pertanto possibile rappresentare, in diagrammi lineari e logaritmici, gli andamenti dello stato di tensione, in funzione della distanza r :



Se $r \downarrow$ allora $\frac{1}{\sqrt{r}} \uparrow$, quindi le tensioni AUMENTANO notevolmente (fino a ∞) se ci si AVVICINA all'apice del difetto.

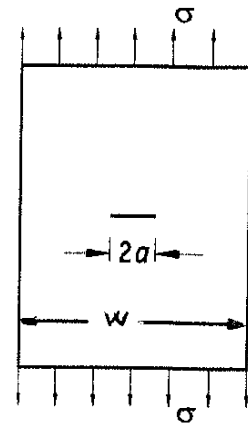
- NB:
- ① Integro → raggio di raccordo FINITO, in cui le tensioni aumentano ($\sigma \uparrow$)
 - ② Cricca → raggio di raccordo NULLO, in cui le tensioni tendono a ∞ ($\sigma \rightarrow \infty$)

• Fattore di intensificazione delle tensioni

Si analizzano diverse possibili situazioni:

1) LASTRA PIANA CON DIFETTO A TUTTO SPESSORE

Lastre soggette a sollecitazioni uniformi di trazione e contenute un difetto di lunghezza "2a"



• lunghezza INFINITA ($\frac{a}{w} \ll 1$)

$$K_I = Y \sigma \sqrt{a}$$

inoltre:

$$G = \frac{(\pi \sigma^2 a)(1-\nu^2)}{E} \Rightarrow G = \frac{K_I^2 (1-\nu^2)}{E}$$

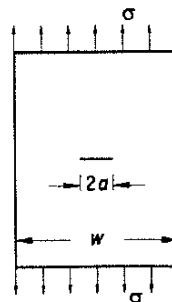
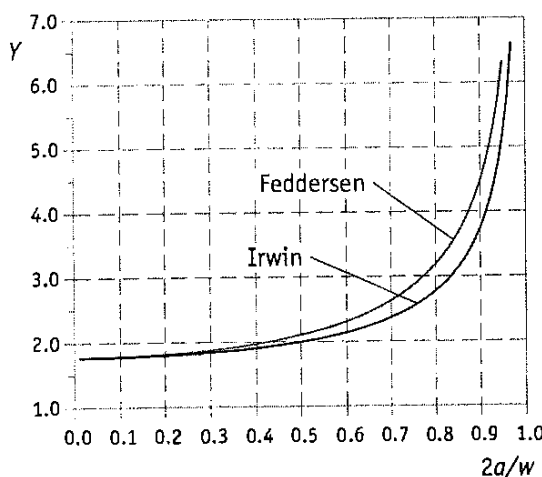
• lunghezza FINITA

$$K_I = Y \sigma \sqrt{a}$$

con $Y = \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{w}{\pi a} \tan\left(\frac{\pi a}{w}\right)}$ (Irwin)

$$Y = \sqrt{\pi} \sqrt{\sec\left(\frac{\pi a}{w}\right)} = \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi a}{w}\right)}} \text{ (Fedderson)}$$

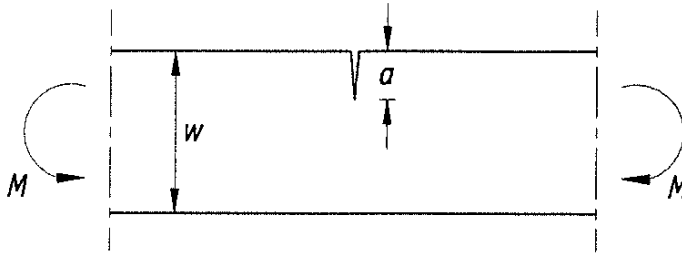
L'andamento di Y in funzione di $2a/w$, per le formulazioni di Irwin e Feddersen, è il seguente:



4) TRAVE INFLESSA CON DIFETTO LATERALE (MOMENTO FLETTENTE)

47

trave inflessa soggetta a momento flettente "M":



$$Y = 12,1\sqrt{w} - 2,12\left(\frac{a}{w}\right) + 11,92\left(\frac{a}{w}\right)^2 + 11,12\left(\frac{a}{w}\right)^3 - 74,8\left(\frac{a}{w}\right)^4$$

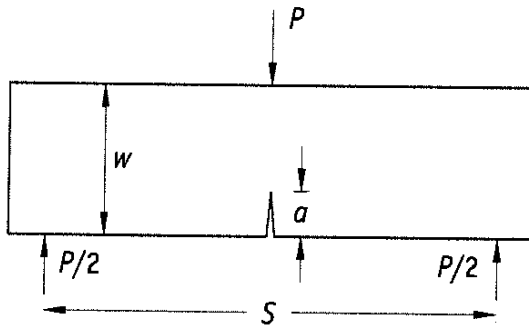
NB: da utilizzare solo se $a/w < 0,6$

$$k_I = Y \frac{6M}{(w-a)^{3/2}}$$

| | | | | | | | |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|
| a/w | 0,05 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 |
| Y | 0,36 | 0,49 | 0,60 | 0,66 | 0,69 | 0,72 | 0,73 |

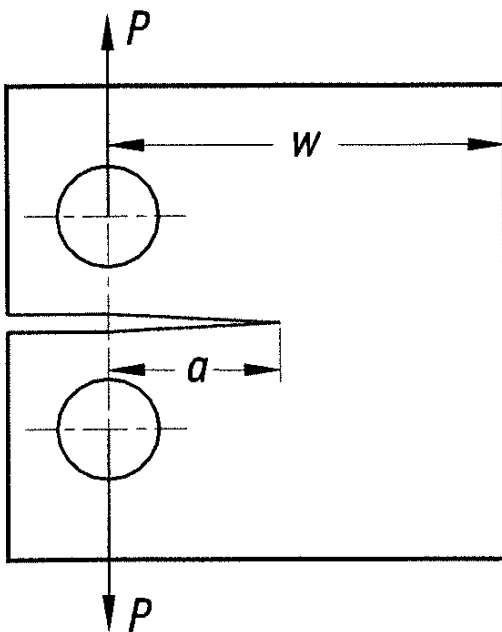
5) TRAVE INFLESSA CON DIFETTO LATERALE (CARICO CONCENTRATO)

trave di spessore B soggetta a carico concentrato "P" in mezzo:



$$k_I = \frac{PS}{Bw^{3/2}} \left[2,9\left(\frac{a}{w}\right)^{1/2} - 4,6\left(\frac{a}{w}\right)^{3/2} + 21,8\left(\frac{a}{w}\right)^{5/2} - 37,6\left(\frac{a}{w}\right)^{7/2} + 38,7\left(\frac{a}{w}\right)^{9/2} \right]$$

6) PROVA DI TRAZIONE CTS



NB: il carico P indica i val. "afferraggi", mentre la voce "a" è calcolata con il metodo delle fibre (sarebbe impossibile crearla meccanicamente)

$$k_I = \frac{P}{Bw^{1/2}} \left[29,6\left(\frac{a}{w}\right)^{1/2} - 185,5\left(\frac{a}{w}\right)^{3/2} + 655,7\left(\frac{a}{w}\right)^{5/2} - 1017,0\left(\frac{a}{w}\right)^{7/2} + 638,9\left(\frac{a}{w}\right)^{9/2} \right]$$

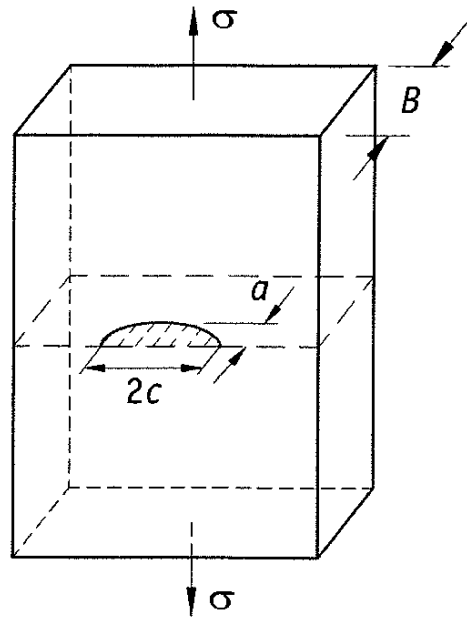
8) DIFETTO SUPERFICIALE DI TIPO ELLISSOIDALE

49

Il valore del fattore di intensificazione della tensione verso lungo il fronte del difetto, assumendo i seguenti valori:

$$K_{I,MAX} (\beta = \frac{\pi}{2}) = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\phi} \quad (\text{sull'asse minore } \beta = \frac{\pi}{2})$$

$$K_{I,MIN} (\beta = 0) = \frac{\sigma \sqrt{\pi a^2/c}}{\phi} \quad (\text{sull'asse maggiore } \beta = 0)$$



Vengono applicate delle CORREZIONI alle equazioni di cui sopra: la prima per tener conto del fatto che il difetto è superficiale, la seconda per tener conto della zona plastica. L'espressione finale per il valore massimo di K_I è:

$$K_{I,MAX} = 1,12 \sigma \sqrt{\frac{\pi a}{Q}}$$

dove: $Q = \phi^2 - 0,212 \left(\frac{\sigma}{\sigma_s}\right)^2$ fattore di forma

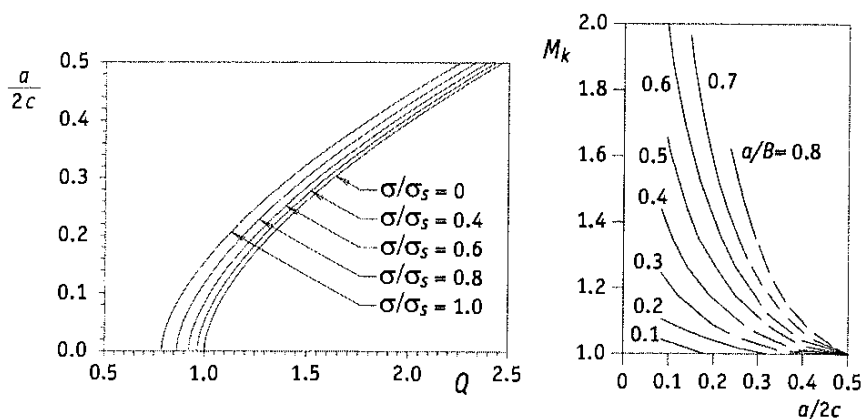
σ = tensione nominale

σ_s = tensione di snervamento

Una terza correzione è necessaria per tener conto di forme molto appiattite del difetto.

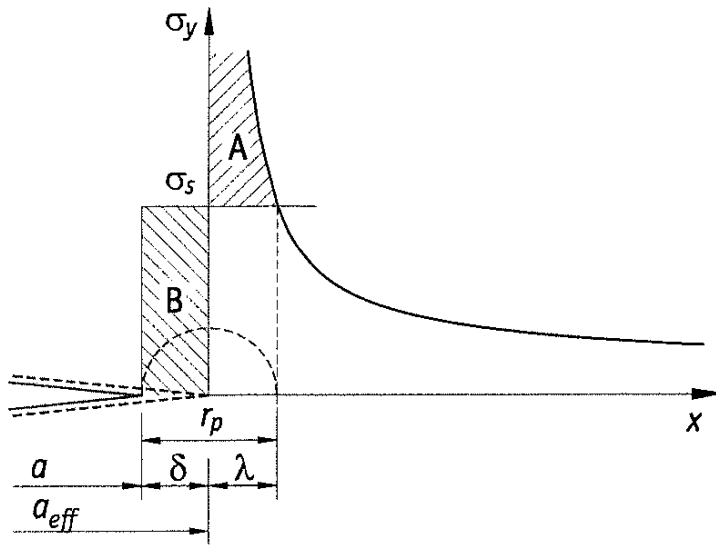
$$K_{I,MAX} = 1,12 M_k \sigma \sqrt{\frac{\pi a}{Q}}$$

dove: M_k = fattore di correzione di Kobayashi



A tal scopo Iannì suggerì che, in presenza di una zona plastica il fatto si comporta come se fosse caratterizzato da una dimensione effettiva a_{eff} più grande della sua dimensione fisica a di una quantità incognita δ :

(51)



$$a_{eff} = a + \delta$$

Se a tale energia si associa anche l'area B, allora si avrà il RAGGIO DI PLASTIFICAZIONE REALE:

$$r_p = \delta + \lambda$$

$$\text{base: } \lambda = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{Y \sigma \sqrt{a + \delta}}{\sigma_s} \right)^2$$

Questa ipotesi risulta valida in stato di tensione pura (TP):

$$\begin{cases} \sigma_3 = \sigma_2 = \sigma_x = \sigma_y \\ \tau_3 = \tau_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_y = \sigma_s$$

$$r_{p,TP}^* = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_s} \right)^2$$

In stato di deformazione pura (DP), invece, si avrà:

$$\begin{cases} \sigma_3 = \sigma_2 = \sigma_x = \sigma_y \\ \tau_3 = \tau_2 = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = 2\nu\sigma_y \end{cases}$$

Condizioni di mescolamento:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s \Rightarrow \sigma_y - 2\nu\sigma_y = \sigma_s \Rightarrow \sigma_y = \frac{\sigma_s}{1-2\nu} \Rightarrow \sigma_y = 3\sigma_s$$

Quindi, in DP, la tensione di mescolamento effettiva è tre volte più grande rispetto al corrispondente valore in TP; il raggio plastico in DP (rispetto al modo I), risulta:

$$r_{EP}^* = r_{p,DP}^* = \frac{1}{18\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_s} \right)^2$$

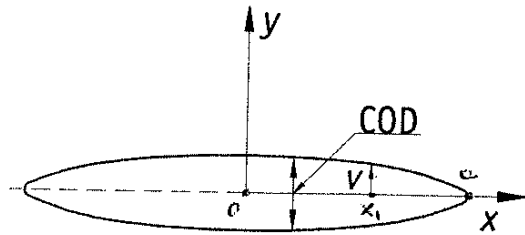
Prendendo e confrontando i due r_p^* , in TP e in DP, risulta che

$$r_{p,DP}^* = \frac{1}{9} r_{p,TP}^*$$

quindi, in DP, la zona plasticizzata risulta molto più piccola che in TP e, di conseguenza, si potrà applicare bene la teoria HFLE!!

• COD - CTOD

Si va a valutare il COD (Crack Opening Displacement) sui bordi del difetto:



NB: se non vi fosse zona plasticizzata in fondo alla cricca ($x=a$), si avrebbe $COD=0$ (coppio di estremità infinitesime)

- In un punto generico, $x=x_1$, si ha:

$$COD = 2V = \frac{4\sigma}{E} \sqrt{a^2 - x^2}$$

- Al centro del difetto, $x=0$, il COD raggiunge il suo massimo:

$$COD_{MAX} = \frac{4\sigma a}{E}$$

Il risultato fornito per $x=a$ ($COD=0$) non è corretto in presenza di una zona plastica in quanto l'apertura all'apice del difetto viene "CTOD" (Crack Tip Opening Displacement) è diversa da zero. Applicando la correzione plastica al COD, si ottiene:

$$CTOD = \frac{4\sigma}{E} \sqrt{(a + r_p^*)^2 - x^2}$$

• per $x=0$:

$$CTOD = \frac{4\sigma}{E} \sqrt{a^2 + r_p^{*2} + 2a r_p^* - a^2} = \frac{4\sigma}{E} \sqrt{2a r_p^*} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CTOD = \frac{4}{\pi E} \cdot \frac{k_I^2}{\sigma_s}$$

• Tenacità alle fratture

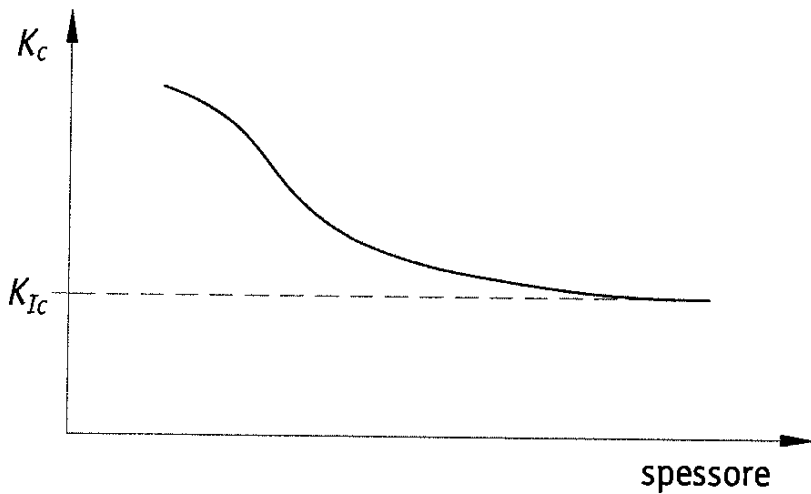
La tenacità alle fratture " K_{IC} " è il valore critico del fattore di intensificazione delle tensioni " K_I ", in corrispondenza del quale si ha propagazione instabile del difetto.

Il K_{IC} dipende da tre parametri:

- 1) spessore del componente
- 2) temperatura di applicazione del carico
- 3) velocità di applicazione del carico

1) Spessore del componente

K_{IC} DIMINUISCE all' AUMENTARE dello spessore, fino al raggiungimento di un valore limite, detto " K_{IC} ", e in corrispondenza lo stato di deformazione passa

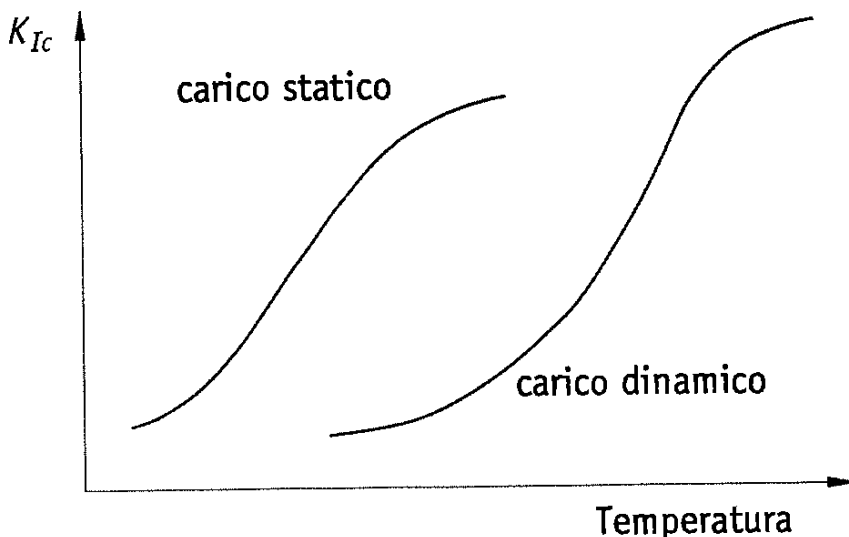


• $s \uparrow \Rightarrow K_{IC} \downarrow$

NB: $\begin{cases} K_{IC} & \text{se in TP} \\ K_{Ic} & \text{se in DP} \end{cases}$

2) temperatura di applicazione del carico + 3) velocità di applicazione del carico

K_{IC} AUMENTA all' AUMENTARE della temperatura, mostrando una zona di transizione fragile \rightarrow duttile.
 K_{IC} AUMENTA all' AUMENTARE della velocità; se si applica un carico in modo impulsivo, invece che lentamente, si ottiene un andamento diverso: sarà sempre fragile \rightarrow duttile ma le dislocazioni, non avendo tempo di "spira" formano il materiale spesso più fragile coniche la transizione fragile \rightarrow duttile avviene a temperature più elevate.

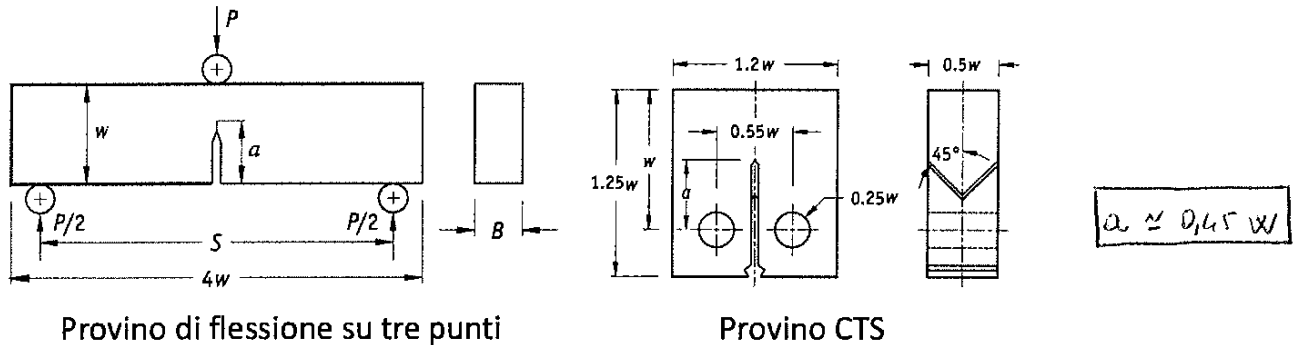


• $T \uparrow \Rightarrow K_{IC} \uparrow \Rightarrow \text{duttile} \uparrow$
 • $v \uparrow \Rightarrow K_{IC} \uparrow \Rightarrow \text{duttile} \uparrow$ (più lentamente)
 con: pedice "d" invece DINAMICO

Procedimento di prova

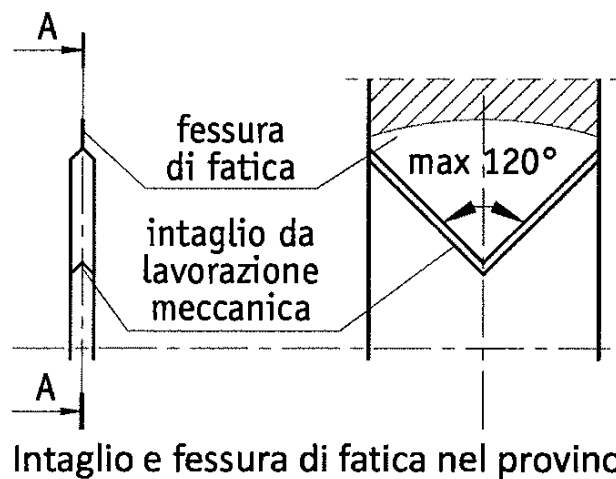
Le prove consistono di alcuni step successivi:

- 1) dimensionamento del provino alla base di una stima del k_{IC} , ottenuta dall'esperienza con materiali simili. In assenza di elementi per la stima, si fa riferimento alle tabelle UNI 7969 ($\sigma_{S/E} \rightarrow B [mm]$)
- 2) selezione del tipo di provino



NB: per le formule di calcolo del k_{IC} , ved. pag. 47 punti 5 e 6.

- 3) preferire per farce il provino in modo tale da sembrare un difetto piano ideale con un raggio nullo all'apice (ovvero per farce $\geq 0,05 w$).



Limite da rispettare \rightarrow il valore massimo di k_{IC} durante il ciclo di fatica (k_{ICmax}) deve essere minore di 0,6 k_{IC}

$$k_{ICmax} < 0,6 k_{IC}$$

infatti, la zona plastica davanti ai vertici di fatica con delle sforzi prevalente rispetto alle condizioni di prova offusca l'accrescimento per fatica del difetto con condizioni i necessari assoldati di rottura e di tenacità.

5) Calcolo k_{QA} , a seconda del profilo ottenuto, e verificare che:

$$a, B \geq 2,5 \left(\frac{k_{QC}}{\sigma_s} \right)^2$$

se le condizioni sono soddisfatte allora $k_{QC} = k_{QA}$, altrimenti è necessario aumentare lo spessore del profilo per determinare k_{QC} .

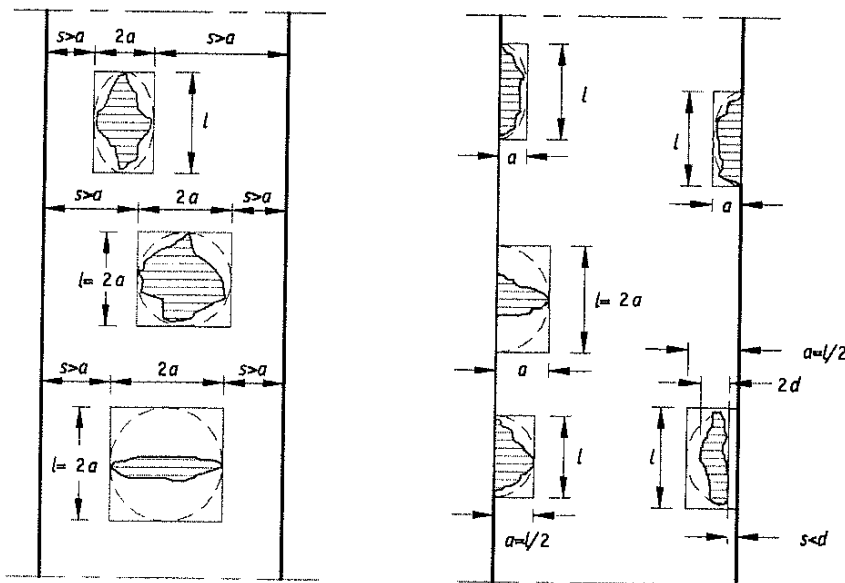
Caratterizzazione dei difetti

Per applicare la MFLE è necessario conoscere le caratteristiche principali del difetto (forma, dimensione e orientazione) al fine di poter determinare la classe a cui appartiene alla velocità delle analisi effettuate.

Tali informazioni possono essere ricavate da "PROVE NON DISTRUTTIVE", esperte nel campo; tuttavia, non sempre i difetti rilevati presentano una forma geometrica riconoscibile e "forme" semplici e più analizzate, e in caso sono riferite le classi per il calcolo del k_I .

In tal caso si devono fare delle ipotesi al fine di circoscrivere i difetti equivalenti a DIFETTI EQUIVALENTI, con geometrie note; in questo modo si possono applicare le formule note.

Si riportano alcuni esempi di difetti e in essi si può riferire.



Se la prova non distribuisce con uniformità sulla parete, si deve ipotizzare un difetto di dimensioni pari alle resistenze del metodo adottato.

NB: in fase di progetto, le caratteristiche del difetto sono note.

Propagazione del difetto sotto carichi ciclici

La propagazione a fatica consiste nel lungho delle lamine al di sotto del "limite di fatica", nell'ipotesi che il componente in studio sia privo di difetti. Tale procedura può essere affiancata dallo studio della meccanica delle fratture, che a velocità l'evoluzione del difetto nelle sue fase subcritica (innesco della frattura).

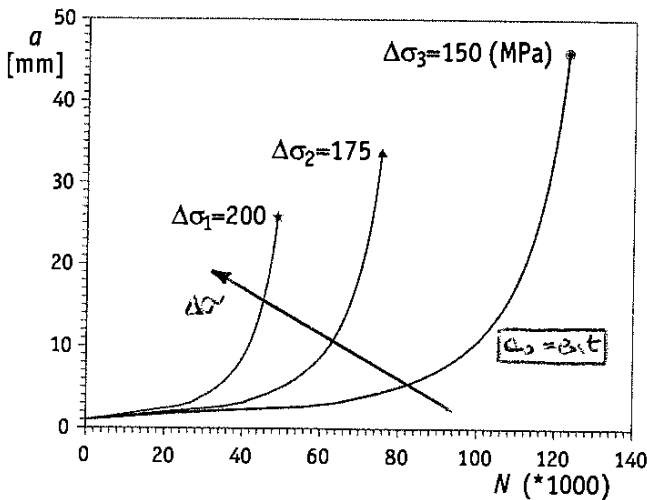
La propagazione del difetto si analizza sottoponendo un provino ad un ciclo carico dell'ordine di ampiezza costante ($\sigma_{min} = 0$ o $R = 0$ e $\sigma_{max} = \Delta\sigma$) in una macchina di prova a fatica.

Si riporta in grafico la lunghezza "a" del difetto in funzione del numero totale di cicli "N".

NB: se si sollecita un componente con un ciclo di carico, allora "a" aumenta fino a raggiungere un valore critico che potrebbe portare a:

- collasso per frattura lineare elastica
- collasso plastico (riduzione di sezione)

La propagazione dipende dal ciclo e dal valore iniziale della lunghezza del difetto (a_0):



Tre provini identici, con lo stesso difetto iniziale "a₀" e sottoposti a tre diversi cicli di tensione:

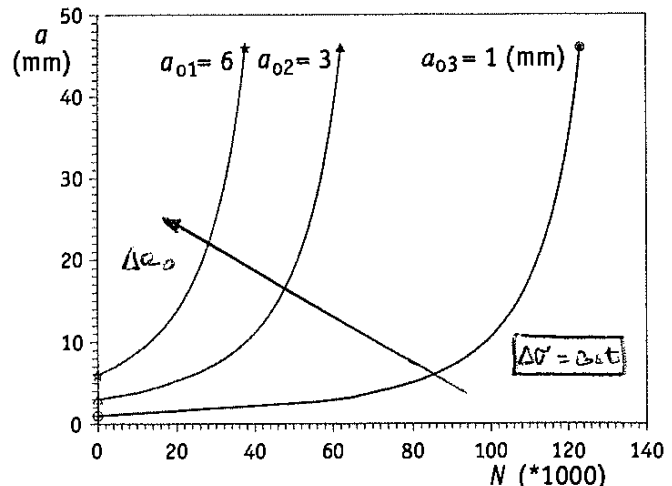
← $\Delta\sigma_1 > \Delta\sigma_2 > \Delta\sigma_3$

All' AVVANTARE della TENSIONE, AUMENTA la VELOCITÀ di PROPAGAZIONE e DIMINUISCE la DURATA A FATICA se la LUNGHEZZA del difetto e frattura.

Tre provini contenenti lo stesso tipo di difetto ma con diverse lunghezze iniziali "a₀":

$a_{01} > a_{02} > a_{03}$ →

e sottoposti allo stesso ciclo di tensione "Δσ". All' AVVANTARE della LUNGHEZZA iniziale del difetto, AUMENTA la VELOCITÀ di PROPAGAZIONE e DIMINUISCE la DURATA A FATICA.



NB: la lunghezza critica "aₐ" del difetto dipende solo dal ciclo e non dal valore iniziale di lunghezza (a₀); pertanto, a peso di ciclo, la crack iniziale può prendere errore e rottura preme.

Paris si occupa cioè, di graficare " $da/dN - \Delta K$ ", si ottiene per ogni materiale una sola curva; pertanto, formula una legge di proporzionalità del fatto, detta **LEGE DI PARIS**.

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m$$

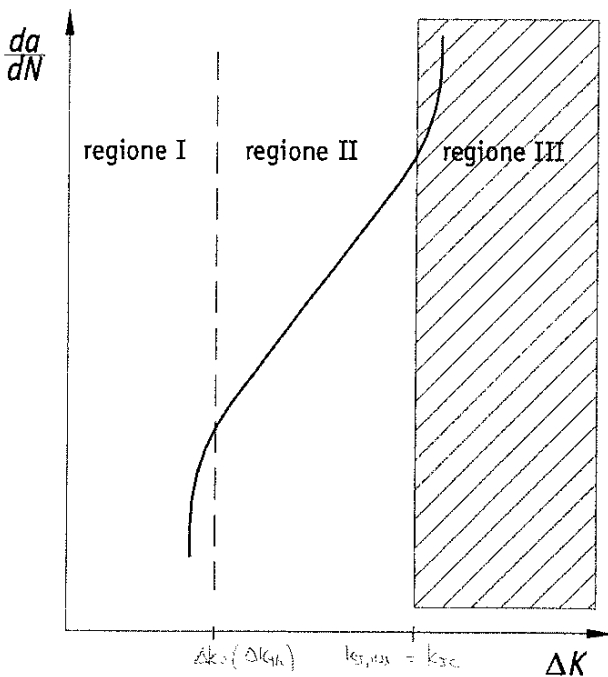
dove C, m = parametri che dipendono dal materiale e dal rapporto $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$; in particolare, la "m" indica la pendenza della curva " $da/dN - \Delta K$ " e vale $m = 3 \div 4$

NB: tale legge è valida solo per carichi ad ampiezza costante.

La distribuzione delle tensioni all'ipice del difetto è UNIFORME e dipende solo dal fattore di intensificazione delle tensioni: se due differenti difetti in un componente dello stesso materiale hanno ugual valore del fattore di intensificazione delle tensioni, allora le due distribuzioni di tensione all'ipice del difetto sono uguali.

Di conseguenza, se il ΔK è lo stesso, le velocità di propagazione del difetto sono le stesse e la curva di Paris rappresenta la risposta del materiale in ogni caso e può essere usata per cercare la curva di propagazione del difetto in componenti soggetti a diversi livelli di tensione e in cui vi sono difetti di diverse dimensioni iniziali.

La curva " $da/dN - \Delta K$ " ha tre forme a S in cui si distinguono tre regioni:



Ⓘ limite di innesco del difetto

Al di sotto di $\Delta K_0 = \Delta K_{th}$ (threshold = soglia) non vi ha propagazione del difetto.

Ⓙ limite di propagazione subcritica del difetto

Vi è una relazione lineare tra $\log\left(\frac{da}{dN}\right)$ e $\log(\Delta K)$

Ⓚ limite di propagazione instabile del difetto

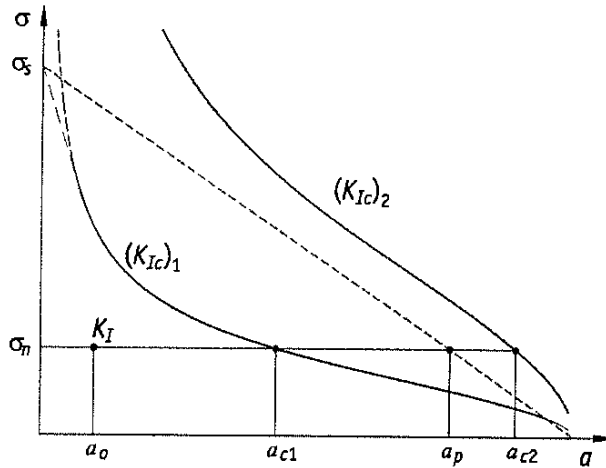
Quando il $K_{I,max}$ nel ciclo raggiunge il valore limite $K_{I,c}$ si ha propagazione instabile del difetto; questa regione è controllata dalle tensioni alla frattura $K_{I,c} = K_{Ic}$.

NB: Passando dalla regione Ⓙ alle Ⓚ si ha la transizione dalla propagazione STABILE a quella INSTABILE.

Presenza della difetta (CARICO AD AMPIEZZA COSTANTE)

In un componente contenente un difetto iniziale, la vita utile e fatica corrisponde alla proporzionale inversa del difetto

Si vuole determinare il numero di cicli (N) necessario affinché un difetto iniziale con lunghezza finale a_f , in corrispondenza del picco si provi il collasso della struttura.



Per passare a frattura completa si devono verificare le seguenti:

- a) condizioni critiche di frattura $\rightarrow a_f = a_c \Rightarrow K_{I,max} = K_{Ic}$
- b) condizioni critiche di collasso plastico $\rightarrow a_f = a_p$ (la tensione nominale si avvicina alle tensioni di snervamento a causa della riduzione di sezione in corrispondenza del difetto)

Per determinare il numero di cicli (N) necessari per passare alla frattura, si deve integrare le seguenti:

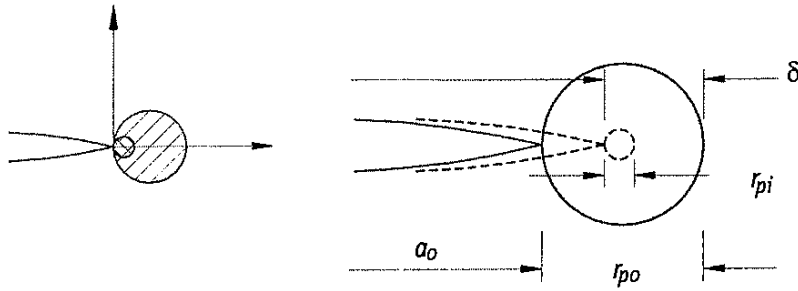
$$\boxed{\frac{da}{dN} = f(\Delta K, R)} \quad (1)$$

► Soluzione analitica

Integrando la (1), si ottiene:

$$N = \int_{a_0}^{a_f} \frac{da}{f(\Delta K, R)}$$

Il fenomeno del RITARDO può essere spiegato confrontando le dimensioni delle zone plastiche del cilo normale e di quella relative al sovraccarico di base.



Il sovraccarico provoca la formazione di una zona plastica di raggio r_{po} , prendendo come l'azione del sovraccarico tale zona si trova in uno stato di compressione residua che tende a ostendere la propagazione fino a che l'apice del difetto si trova all'interno di tale regione.

"MODELLO DI WHEELER": formulato in base al rapporto tra il raggio delle zone plastiche residue (r_{pi}) e il raggio delle zone plastiche corrispondente al sovraccarico.

$$\bullet \left[r_{po} = c \left(\frac{k_o}{\sigma_s} \right) \right] \quad \text{raggio plastico del "sovraccarico"}$$

dove: k_o = fattore di intensificazione delle tensioni corrispondente alla tensione di sovraccarico

$$c = \begin{cases} 1/2\pi & \text{in TP} \\ 1/6\pi & \text{in DP} \end{cases}$$

$$\bullet \left[r_{pi} = c \left(\frac{k_i}{\sigma_s} \right) \right] \quad \text{raggio plastico del "cilo normale"}$$

dove: k_i = fattore di intensificazione delle tensioni corrispondente alla tensione del cilo i-normale

Wheeler introduce un fattore di correzione "C_p", dato da:

$$C_p = \frac{r_{pi}}{\delta} = \frac{r_{pi}}{a_0 + r_{po} - a_i}$$

quindi:

$$\left(\frac{da}{dN} \right)_{ritardo} = C_p \left(\frac{da}{dN} \right)_{lineare}$$

dove C_p assume i seguenti valori:

$$\begin{cases} C_p = \left(\frac{r_{pi}}{a_0 + r_{po} - a_i} \right)^m & \text{se } a_i + r_{pi} < a_0 + r_{po} \\ C_p = 1 & \text{se } a_i + r_{pi} \geq a_0 + r_{po} \end{cases}$$

con: m = parametro che dipende dal materiale e dai casi precedenti.

PIASTRE E TRAVE

Piastre

Per introdurre la piastra, si parte dall'analisi della trave e, parallelamente, si analizza il modello della piastra in modo da rendere le analogie tra i due sistemi.

TRAVE (elemento unidimensionale)

Unidimensionale/soffice = una dimensione è prevalente in modo netto rispetto alle altre due; ci si riferisce:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} ; \quad \sigma_y = \sigma_z = 0$$

In caso di sforzo normale N e una deformazione dell'elemento soffice con conseguente allungamento della fibra al crescere di N ; la sua lunghezza iniziale l , dopo l'applicazione del carico, si passa a una lunghezza finale $l + \Delta l$.

Si definisce l'allungamento unitario "E", come:

$$E = \frac{\Delta l}{l} \quad (\text{deformazione})$$

Si definisce una proprietà elastica tratta tra sforzo applicato (σ_x) e deformazione (ϵ_x) secondo una relazione lineare, detta LEGGE DI HOOKE:

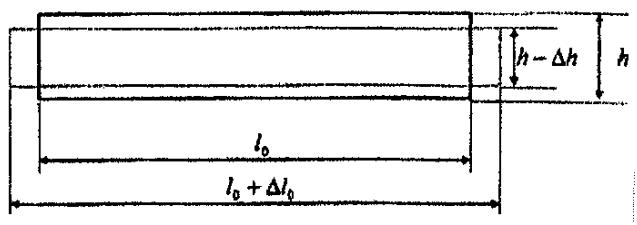
$$\sigma_x = E \epsilon_x \quad \Rightarrow \quad \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

In caso di una deformazione uniaxiale ϵ_x , dato a livello, si suppone contemporaneamente la contrazione laterale

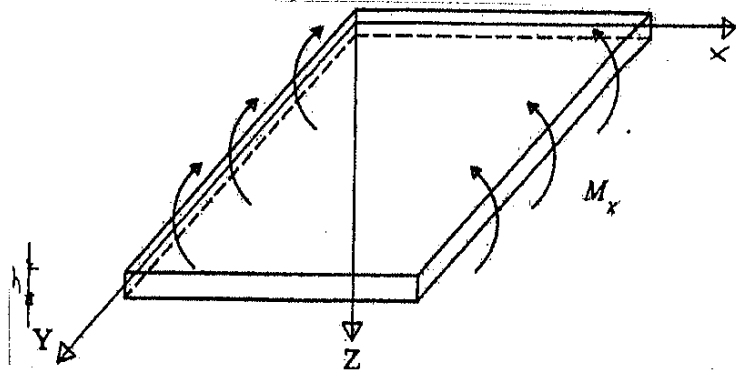
in y e, in campo elastico, vale la:

$$\epsilon_y = -\frac{\Delta h}{h} = -\nu \epsilon_x = \text{cost}$$

ovv: ν = coefficiente di Poisson



PIASTRA (elemento bidimensionale)



I assenti applicati sono:

$$\sigma_x \neq 0 ; \quad \sigma_y \neq 0 ; \quad \sigma_z = 0$$

Quindi, si osservano deformazioni lungo x e lungo y :

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x] (= 0)$$

Considerando che $\sigma_y = \nu \sigma_x$, dalla relazione di ϵ_x si ottiene:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu^2 \sigma_x] = \frac{1 - \nu^2}{E} \sigma_x$$

Anche in questo caso vale la LEGGE DI HOOKE (caso bidimensionale) in cui σ_x è legato alla contrazione dello spessore:

$$\epsilon_x = \frac{1 - \nu^2}{E} \sigma_x \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \epsilon_x \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = E^* \epsilon_x$$

dove: $E^* = \frac{E}{1 - \nu^2}$

TRAVE

l'allungamento vale:

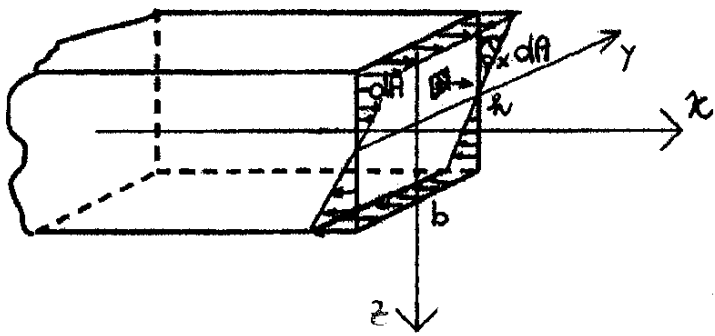
$$\epsilon_x = \frac{(\rho' + z) d\rho' - (\rho + z) d\rho}{(\rho + z) d\rho} = \frac{z}{1 + \frac{z}{\rho}} \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} \right)$$

in la trave indeformata, il raggio di curvatura vale $\frac{1}{\rho} = 0$ mentre, meccanicamente, si aveva $\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{R}$ per cui la deformazione risulta per cui:

$$\epsilon_x = \frac{z}{R}$$

considerando la legge di Hooke, si ottiene che:

$$\sigma_x = E \epsilon_x = E \frac{z}{R} \quad ; \quad \sigma_y = \sigma_z = 0$$



alle fibre di cui sopra si vede che le risultanti alle tensioni σ_x sulle sezioni \bar{i} sono nulle:

$$\int_A \sigma_x dA = \frac{E}{R} \int_A z dA = 0$$

il momento statico \bar{i} nullo ma il momento risultante (M_x) delle forze $\sigma_x dA$ non \bar{i} nullo su f.f.c. la sezione \bar{i} equilibra il M_x .

$$\int_A \sigma_x dA z = \frac{E}{R} \int_A z^2 dA = M_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{EI}{R} = M_x \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{M_x}{EI}$$

PIASTRA

(71)

Posto $\epsilon_y = 0$ (come visto prima) si giunge al seguente risultato:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \epsilon_x = \left| \frac{E}{1-\nu^2} \frac{z}{R} \right|$$

Dato che alla piastra agisce solo il momento M_x , vale:

$$\int_A \sigma_x dA = \frac{E}{R} \int_A z dA = 0 \quad (\text{momento statico nullo})$$

$$\int_A \sigma_x dA z = \frac{E}{R} \int_A z^2 dA = M_x \quad (\text{momento risultante})$$

da cui, considerando il momento M_x , si deduce:

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{R} I_z = M_x$$

dove $I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{h^3}{12}$ momento d'inerzia della piastra, con $b = 1$.

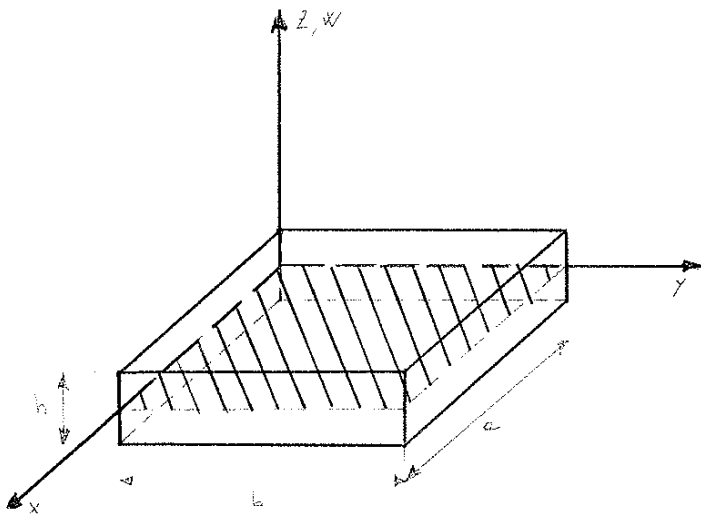
Sostituendo all'equazione precedente:

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{R} \frac{h^3}{12} = M_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{M_x}{\left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) \left(\frac{h^3}{12} \right)} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{M_x}{D}$$

Piastre in flessione piana

(73)



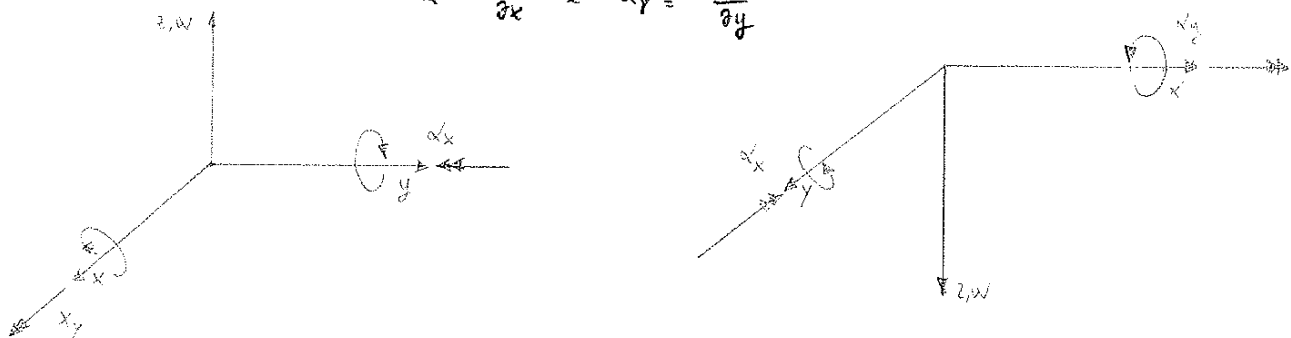
Le piastre possono essere considerate dei solidi con una dimensione (lo spessore h) piccola e confrontata alle altre due (a e b)
 Per lo studio dello stato di sollecitazione delle piastre, quando è in flessione, si considerano spostamenti normali al piano di piegatura della sua superficie media.

È però necessario fare delle ipotesi: ipotesi:

- 1) Materiale omogeneo, isotropo e che si comporta elasticamente
- 2) Spessore h costante e piccolo rispetto alle dimensioni nel piano $xy \Rightarrow$ stato di tensione piano (TP)
- 3) Spostamento w piccolo rispetto allo spessore h e uguale a quello del piano medio lungo lo spessore della piastra.
- 4) Si assume che una retta normale al piano medio della piastra indeformata si conserva piana e normale alle superficie media anche dopo la deformazione

NB: l'ipotesi 3) risulta in contrasto con la 2); infatti, se lo spostamento w è costante lungo lo spessore, allora $\epsilon_z = 0$ e ciò è in contrasto con l'ipotesi di stato di tensione piano.
 In realtà, nell'estremità (superficie interna della trazione) e nell'intremità (superficie interna della compressione) vale $\sigma_z = 0$, pertanto dato che lo spessore è piccolo si può assumere che $\sigma_z = 0 = \text{cost}$, commettendo un errore non significativo.

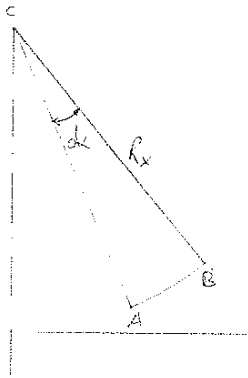
SISTEMI DI RIFERIMENTO : $\alpha_x = \frac{\partial w}{\partial x}$ e $\alpha_y = \frac{\partial w}{\partial y}$



Visto il nostro sistema di riferimento:

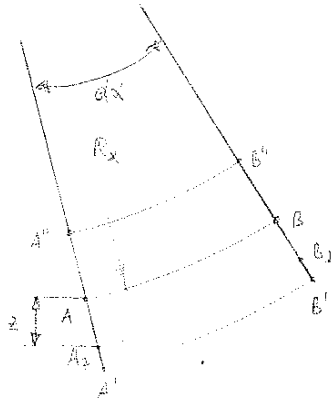
$$\begin{cases} \frac{1}{R_x} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{1}{R_y} = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{cases}$$

si vanno a valutare le deformazioni (come visto precedentemente per le travi)



$$AC = BC = R_x$$

$$AB = R_x \alpha$$



$$(AB)_z = (R_x + z) \alpha$$

↓

$$\frac{(AB)_z}{AB} = \frac{R_x + z}{R_x}$$

Essendo l'allungamento dato da:

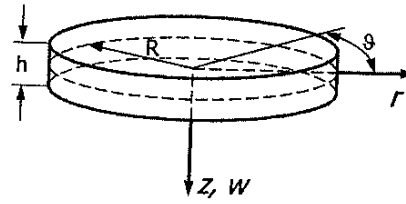
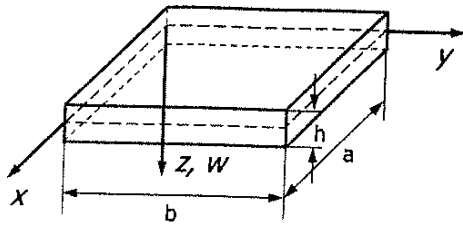
$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{(AB)_z - AB}{AB} = \frac{(R_x + z) \alpha - R_x \alpha}{R_x \alpha} = \frac{z}{R_x} \\ \epsilon_y = \frac{z}{R_y} \end{cases}$$

e avendo calcolato $\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_y}$, si ottiene:

$$\begin{cases} \epsilon_x = - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y = - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{cases}$$

Piastre circolari assialsimmetriche

(77)



Come per le piastre piatte, le piastre circolari sono caratterizzate da una spessore h piccolo rispetto alle dimensioni del piano medio; si studia lo stato di sollecitazione delle piastre quando queste si inflesse, con spostamenti normal al piano di proiezione delle sue superficie medie, sotto le seguenti **IPOTESI**:

- 1) il materiale è omogeneo, isotropo e si comporta elasticamente
- 2) lo spessore h è costante e piccolo rispetto alle dimensioni nel piano medio della piastra \Rightarrow stato di tensione piano (TP)
- 3) lo spostamento w è piccolo rispetto allo spessore
- 4) lo spostamento w lungo lo spessore della piastra è uguale a quello del piano medio \Rightarrow la deformazione lungo z è nulla

NB: questo appare affermato ($\epsilon_z = 0$) è in contrasto con l'ipotesi di stato di tensione piano ($\sigma_z = 0$)

5) si assume che una sistema normale al piano medio della piastra indiformata si comporta piano e normale alle superficie medie anche dopo la deformazione.

6) Vireli: assialsimmetriche \Rightarrow appoggio o incastro lungo il bordo

7) Carichi: assialsimmetrici e normali al piano della piastra \Rightarrow i carichi sono paralleli all'asse z e la legge di variazione del carico è funzione solo di R e non di θ .

SE VALIDE
 \Downarrow

- 1) lo spostamento w è funzione solo del raggio e non di θ
- 2) le tensioni σ_r , σ_θ e σ_{rz} sono funzioni del raggio e non di θ
- 3) le tensioni normali σ_z e σ_θ sono nulle sul piano $z = 0$
- 4) le tensioni tangenziali $\sigma_{\theta z}$ e σ_{rz} sono nulle
- 5) la tensione normale σ_z è nulla
- 6) la superficie elastica è di rivoluzione
- 7) non si discute in corso la richiesta membranda.

• Calcolo di tensioni e momenti:

Si considerano la tensione radiale " σ_r " e la tensione circonferenziale " σ_c ":

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_r + \nu \epsilon_c) \\ \sigma_c = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_c + \nu \epsilon_r) \end{cases} \quad (1)$$

Dato che vale la seguente relazione:

$$\sigma = \frac{M_F}{I_F} z = \frac{M_F}{\frac{h^3}{12}} z = \frac{12 M_F}{h^3} z$$

Le tensioni σ_r e σ_c possono anche essere scritte come:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{12 M_{Fr}}{h^3} z \\ \sigma_c = \frac{12 M_{Fc}}{h^3} z \end{cases} \quad (2)$$

Imponendo l'uguaglianza tra i sistemi (1) e (2), e sostituendo le relazioni delle deformazioni calcolate precedentemente, ovvero $\epsilon_r = -z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$ e $\epsilon_c = -\frac{z}{r} \frac{\partial w}{\partial r}$, si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{12 M_{Fr}}{h^3} z = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ \frac{12 M_{Fc}}{h^3} z = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{Fr} = -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ M_{Fc} = -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \end{cases}$$

da cui, avendo $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$, si osserva:

$$M_{Fr} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \frac{\partial w}{\partial r} \right) = D \left(\frac{1}{R_m} + \nu \frac{1}{R_c} \right) = D \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} + \nu \frac{\alpha}{r} \right)$$

$$M_{Fc} = -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) = D \left(\frac{1}{R_c} + \nu \frac{1}{R_m} \right) = D \left(\frac{\alpha}{r} + \nu \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)$$

21

da cui, semplificando, si ottiene:

$$-m_2 \cancel{r} + Q \left(r + \cancel{dr} + \cancel{\frac{dr}{r}} \right) + \left[m_2 + \frac{\partial m_2}{\partial r} dr \right] \left(r + \cancel{dr} \right) - m_c \cancel{dr} = 0$$

$$-m_2 \cancel{r} + Qr \cancel{dr} + m_2 \cancel{r} + m_2 \cancel{dr} + \frac{\partial m_2}{\partial r} r \cancel{dr} + \frac{\partial m_2}{\partial r} \cancel{dr}^2 - m_c \cancel{dr} = 0$$

$$Qr + m_2 + \frac{\partial m_2}{\partial r} r - m_c = 0 \quad \text{Espressione di equilibrio}$$

Esplorando tale equilibrio, si ottiene:

$$Qr + \frac{\partial}{\partial r} (m_2 r) - m_c = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial r} (m_2 r) - m_c = -Qr} \quad \text{EQUAZIONE DI EQUILIBRIO}$$

Considerando adesso le espressioni di m_2 e m_c , prima scritte, in funzione di α o di w :

$$\textcircled{\alpha} \begin{cases} m_2 = D \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} + \nu \frac{\alpha}{r} \right) \\ m_c = D \left(\frac{\alpha}{r} + \nu \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right) \end{cases} \quad ; \quad \textcircled{w} \begin{cases} m_2 = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ m_c = -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \end{cases}$$

Sostituendo tali espressioni all'interno dell'equazione di equilibrio, si ottiene:

In funzione di "α"

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[D \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} + \nu \frac{\alpha}{r} \right) r \right] - \left[D \left(\frac{\alpha}{r} + \nu \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right) \right] = -Qr$$

$$D \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} r \right) + \nu \frac{\partial \alpha}{\partial r} - \frac{\alpha}{r} - \nu \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right] = -Qr$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} r + \frac{\partial \alpha}{\partial r} - \frac{\alpha}{r} = -\frac{Q}{D} r$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial r} - \frac{\alpha}{r^2} = -\frac{Q}{D}}$$

⇓

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \alpha) \right] = -\frac{Q}{D}$$

In funzione di "w"

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) r \right] - \left[-D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \right] = -Qr$$

$$-D \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} r \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] = -Qr$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} r + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{Q}{D} r$$

$$\boxed{\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{Q}{D}}$$

⇓

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] = \frac{Q}{D}$$

Si risolve la derivata $\frac{\partial}{\partial r}$:

$$(m_r - v m_c) = (m_c - v m_r) \cdot 1 + r \left(\frac{\partial m_c}{\partial r} - v \frac{\partial m_r}{\partial r} \right)$$

$$m_r - v m_c - m_c + v m_r = r \left(\frac{\partial m_c}{\partial r} - v \frac{\partial m_r}{\partial r} \right)$$

$$(1+v)m_r - (1+v)m_c = r \left(\frac{\partial m_c}{\partial r} - v \frac{\partial m_r}{\partial r} \right)$$

$$\boxed{\frac{1}{r} (1+v)(m_r - m_c) = \frac{\partial m_c}{\partial r} - v \frac{\partial m_r}{\partial r}}$$

EQUAZIONE DI CONGRUENZA

Ricordando l'equazione di equilibrio:

$$m_c = \frac{\partial m_r}{\partial r} r + m_r + Qr$$

e derivandola, si ottiene:

$$\frac{\partial m_c}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial m_r}{\partial r} r + m_r + Qr \right) \quad \left[\Rightarrow \frac{\partial m_c}{\partial r} = \frac{\partial^2 m_r}{\partial r^2} r + 2 \frac{\partial m_r}{\partial r} + Q + r \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right]$$

Sostituendo $\frac{\partial m_c}{\partial r}$ e m_c nell'equazione di congruenza, si osserva:

$$\frac{1}{r} (1+v) \left(m_r - \frac{\partial m_r}{\partial r} r - m_r - Qr \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial m_r}{\partial r} r + m_r + Qr \right) - v \frac{\partial m_r}{\partial r}$$

$$- \frac{\partial m_r}{\partial r} - v \frac{\partial m_r}{\partial r} - Q - vQ = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial m_r}{\partial r} r + m_r + Qr \right) - v \frac{\partial m_r}{\partial r}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial m_r}{\partial r} r + m_r + Qr \right) = - \frac{\partial m_r}{\partial r} - Q - vQ}$$

EQUAZIONE DI EQUILIBRIO
(in termini di momenti)

Riepilogo Equazioni di Equilibrio

• Eq. di equilibrio: $\frac{\partial}{\partial r} (m_r \cdot r) - m_c = -Qr$

• Eq. di equilibrio in termini di α : $\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \alpha) \right] = - \frac{Q}{D}$

• Eq. di equilibrio in termini di w : $\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] = \frac{Q}{D}$

• Eq. di equilibrio in termini di momenti: $\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 m_r) \right] = -(2+v)Q - r \frac{\partial Q}{\partial r}$

• $z = a \Rightarrow \begin{cases} w = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$, sfruttando l'espressione (a), si ricava C_1 :

(85)

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \left(\frac{Pz^3}{16D} + C_1 \frac{z}{2} + 0 \right) = 0 \Rightarrow C_1 = - \frac{Pz^2}{8D} \Rightarrow C_1 = - \frac{Pa^2}{8D}$$

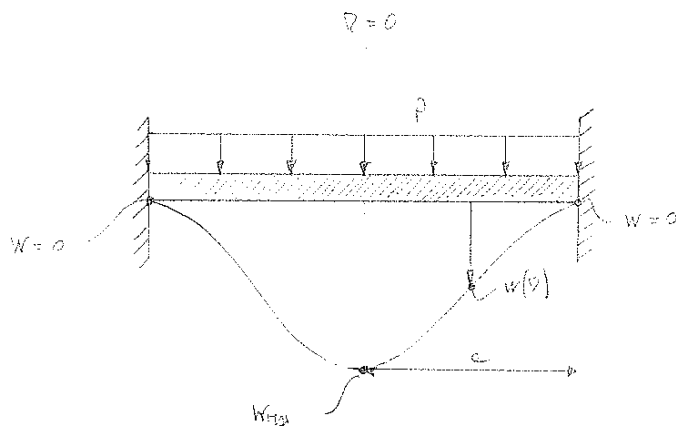
Insieme, sfruttando l'espressione (b), si ricava C_3 :

$$w = \frac{Pz^4}{64D} + \left(- \frac{Pa^2}{8D} \cdot \frac{z^2}{4} \right) + 0 + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = - \frac{Pa^4}{64D} + \frac{Pa^4}{32D} \Rightarrow C_3 = \frac{Pa^4}{64D}$$

Quindi, si determinano gli andamenti degli spostamenti :

$$w = \frac{Pz^4}{64D} - \frac{Pa^2}{8D} \frac{z^2}{4} + \frac{Pa^4}{64D} \Rightarrow w = \frac{P}{4D} (a^2 - z^2)^2$$

Portanto, lo spostamento massimo (w_{max}) è in corrispondenza della mezzespazza, in cui $z = 0$.



Se consideriamo adesso i momenti in termini di α :

$$M_z = D \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \nu \frac{\alpha}{z} \right) \quad \text{e} \quad M_c = D \left(\frac{\alpha}{z} + \nu \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right)$$

Avendo scoperto le costanti si integrano C_1, C_2, C_3 , è possibile scrivere l'espressione di α :

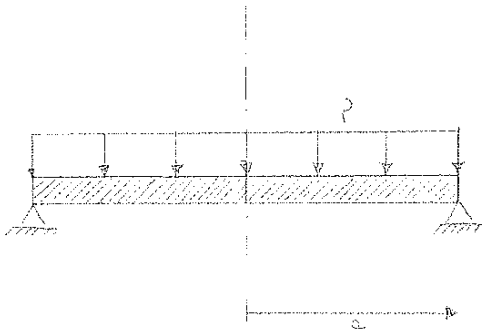
$$\alpha = - \frac{dw}{dz} = - \left(\frac{Pz^3}{16D} - \frac{Pa^2}{8D} \cdot \frac{z}{2} \right) = - \frac{Pz^3}{16D} + \frac{Pa^2 z}{16D} \Rightarrow \alpha = \frac{Pz}{16D} (a^2 - z^2)$$

Quindi, si calcola :

$$\frac{\partial i}{\partial z} = \frac{P}{16D} (a^2 - z^2) + \frac{Pz}{16D} (-2z) = \frac{P}{16D} a^2 - \frac{P}{16D} z^2 - z \frac{P}{16D} \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{P}{16D} (a^2 - 3z^2)$$

2) PIASTRA APPOGGIATA

87



Condizioni al contorno:

$$\bullet z=0 \Rightarrow \alpha=0$$

$$\bullet z=a \Rightarrow \begin{cases} W=0 \\ M_z=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \nu \frac{\alpha}{z} = 0$$

Imponendo le condizioni al contorno e sfruttando le equazioni (a) e (b), si ricavano le tre costanti C_1, C_2 e C_3 .

$$\bullet \alpha = - \frac{\partial W}{\partial z} = - \left(\frac{pz^3}{16D} + C_1 \frac{z}{2} + \frac{C_2}{z} \right)$$

da cui, per $z=0 \Rightarrow \alpha=0$, si ottiene $C_2=0$

$$\bullet \frac{\partial \alpha}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{pz^3}{16D} + C_1 \frac{z}{2} + \frac{C_2}{z} \right) = - \frac{3pz^2}{16D} - \frac{C_1}{2}$$

da cui, per $z=a \Rightarrow M_z=0$, si ottiene:

$$- \frac{3pe^2}{16D} - \frac{C_1}{2} = \frac{\partial \alpha}{\partial z}$$

ma essendo $\frac{\partial \alpha}{\partial z} = -\nu \frac{\alpha}{z} = -\nu \cdot \frac{1}{2} \cdot \alpha = -\frac{\nu}{2} \left(- \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \frac{\nu}{2} \left(\frac{pz^3}{16D} + C_1 \frac{z}{2} \right)$, si ottiene:

$$- \frac{3pe^2}{16D} - \frac{C_1}{2} = \frac{\nu}{2} \left(\frac{pe^3}{16D} + C_1 \frac{e}{2} \right) \Rightarrow - \frac{3pe^2}{16D} - \frac{C_1}{2} = \frac{\nu}{2} \frac{pe^3}{16D} + \frac{\nu}{2} C_1 \frac{e}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow - \frac{3pe^2}{16D} - \frac{C_1}{2} - \frac{\nu}{2} \frac{pe^3}{16D} - \frac{\nu C_1 e}{4} = 0 \Rightarrow C_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2} \right) = - \frac{3pe^2}{16D} - \frac{\nu}{2} \frac{pe^3}{16D} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 = - \frac{pe^2}{8D} \frac{(3+\nu)}{(1+\nu)}$$

$$\bullet W = \frac{pz^4}{64D} + C_1 \frac{z^2}{4} + C_2 \ln(z) + C_3$$

da cui, per $z=a \Rightarrow W=0$, si ottiene:

$$0 = \frac{pa^4}{64D} + C_1 \frac{a^2}{4} + C_3 \Rightarrow C_3 = - \frac{pa^4}{64D} - C_1 \frac{a^2}{4} = - \frac{pa^4}{64D} - \left(- \frac{pe^2}{8D} \frac{(3+\nu)}{(1+\nu)} \right) \frac{a^2}{4} =$$

$$= \frac{pe^2}{64D} \left(-\frac{1}{2} + \frac{(3+\nu)}{(1+\nu)} \right) \Rightarrow C_3 = \frac{pe^2}{64D} \frac{(5+\nu)}{(1+\nu)}$$

Combinando invece i due casi:

$$\begin{aligned}
 W &= W_1 + W_2 = \frac{P}{64D} (a^2 - z^2)^2 + \frac{Pa^2}{16D(1+\nu)} (a^2 - z^2) = \frac{P(a^2 - z^2)}{64D} \left[(a^2 - z^2) + \frac{4a^2}{1+\nu} \right] = \\
 &= \frac{P(a^2 - z^2)}{64D} \left[\frac{a^2 - \nu a^2 - z^2 - \nu z^2 + 4a^2}{1+\nu} \right] = \frac{P(a^2 - z^2)}{64D} \left[\frac{5a^2 + \nu a^2 - z^2(1+\nu)}{1+\nu} \right] \Rightarrow \\
 \Rightarrow W &= W_1 + W_2 = \frac{P(a^2 - z^2)}{64D} \left[a^2 \frac{(5+\nu)}{(1+\nu)} - z^2 \right]
 \end{aligned}$$

Riprendendo adesso i momenti M_D e M_C in termini di α .

$$M_D = D \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \nu \frac{\alpha}{z} \right) \quad \text{e} \quad M_C = D \left(\frac{\alpha}{z} + \nu \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right)$$

Note le costanti di integrazione e ricerca α , da \ominus , e poi: $\frac{\partial \alpha}{\partial z}$

$$\alpha = - \frac{\partial W}{\partial z} = - \left(\frac{Pz^3}{16D} - \frac{Pa^2}{8D} \frac{(3+\nu)}{(1+\nu)} \cdot \frac{z}{z} \right) \Rightarrow \alpha = - \frac{P \cdot z}{16D} \left(z^2 - a^2 \frac{3+\nu}{1+\nu} \right)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z} = - \frac{3Pz^2}{16D} + \frac{Pa^2}{16D} \frac{3+\nu}{1+\nu}$$

Quindi si calcolano M_D e M_C :

$$\begin{aligned}
 M_D &= D \left[- \frac{3Pz^2}{16D} + \frac{Pa^2}{16D} \frac{3+\nu}{1+\nu} - \frac{\nu}{z} \left(\frac{P \cdot z}{16D} \left(z^2 - a^2 \frac{3+\nu}{1+\nu} \right) \right) \right] = \\
 &= \frac{P}{16} \left[a^2 \frac{3+\nu}{1+\nu} - 3z^2 - \nu \left(z^2 - a^2 \frac{3+\nu}{1+\nu} \right) \right] = \\
 &= \frac{P}{16} \left[a^2 \frac{3+\nu}{1+\nu} - 3z^2 + \nu a^2 \frac{3+\nu}{1+\nu} - \nu z^2 \right] = \\
 &= \frac{P}{16} \left[a^2 \frac{(1+\nu)}{1+\nu} \cdot \frac{3+\nu}{1+\nu} - z^2(3+\nu) \right] \Rightarrow M_D = \frac{P}{16} (a^2 - z^2)(3+\nu)
 \end{aligned}$$

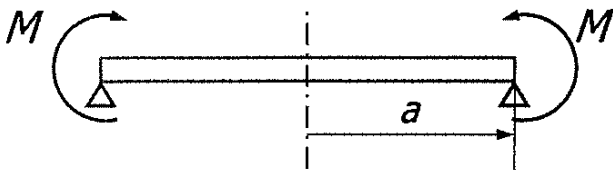
$$\begin{aligned}
 M_C &= D \left[- \frac{P \cdot z}{16D} \cdot \frac{1}{z} \left(z^2 - a^2 \frac{3+\nu}{1+\nu} \right) + \nu \left(\frac{Pa^2}{16D} \frac{3+\nu}{1+\nu} - \frac{3Pz^2}{16D} \right) \right] = \\
 &= \frac{P}{16} \left[a^2 \frac{3+\nu}{1+\nu} - z^2 + \nu a^2 \frac{3+\nu}{1+\nu} - 3\nu z^2 \right] = \\
 &= \frac{P}{16} \left[a^2 \frac{(1+\nu)}{1+\nu} \frac{3+\nu}{1+\nu} - z^2(1+3\nu) \right] \Rightarrow M_C = \frac{P}{16} \left[a^2(3+\nu) - z^2(1+3\nu) \right]
 \end{aligned}$$

Oss. le espressioni di M_D e M_C nel caso in esame possono essere ricavate anche con un metodo alternativo (vide 62)

ESEMPIO 2 - Momento costante sul bordo esterno

(1)

Si analizza una piastre opposte.



• $Q = 0$

• $\frac{\partial M_z}{\partial z} = 0$

Espressione di equilibrio

$$M_z + \frac{\partial M_z}{\partial z} z - M_c + \frac{Q}{2} z = 0 \Rightarrow M_z = M_c = M$$

Si considerano le espressioni dei momenti in termini di α .

$$M_z = D \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \nu \frac{\alpha}{z} \right) \quad \text{e} \quad M_c = D \left(\frac{\alpha}{z} + \nu \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right)$$

Visto il risultato dell'espressione di equilibrio ($M_c = M_z$), si eguagliano le due espressioni precedenti:

$$D \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \nu \frac{\alpha}{z} \right) = D \left(\frac{\alpha}{z} + \nu \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial z} (1/\nu) = \frac{\alpha}{z} (1/\nu) \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{\alpha}{z} \quad (1)$$

Ricordando le espressioni delle costanti:

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{R_c}$$

Si ricavano M_c :

$$M_z = D \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \nu \frac{\alpha}{z} \right) \underset{(1)}{=} D \left(\frac{\alpha}{z} + \nu \frac{\alpha}{z} \right) = D \frac{\alpha}{z} (1+\nu) \Rightarrow \alpha = \frac{M_z \cdot z}{D(1+\nu)} \Rightarrow \alpha = \frac{M \cdot z}{D(1+\nu)}$$

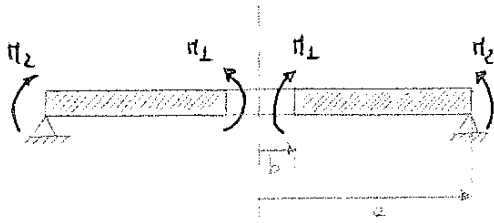
Dato che vale $\alpha = - \frac{\partial w}{\partial z}$, si ottiene:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\alpha = - \frac{M \cdot z}{D(1+\nu)}$$

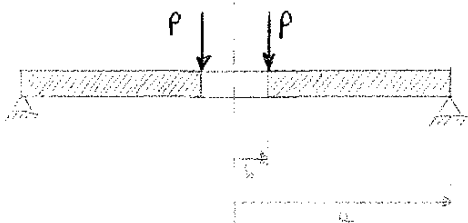
Integrando per ultime, si ottiene w .

$$w = - \frac{M \cdot z^2}{2D(1+\nu)} + C_1$$

ESEMPIO 3 - Piatte e calce forate

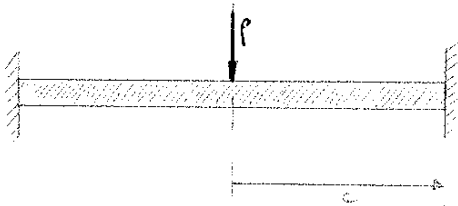


• Momenti applicati
(vd. dimostrazione da slide 76 a 77)



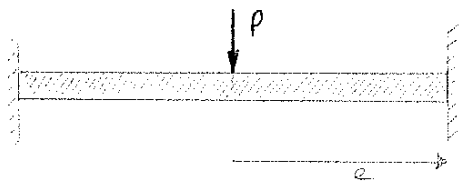
• Carico puntuale applicato sul bordo interno
(vd. dimostrazione da slide 78 a 84)

ESEMPIO 4 - Piatte e calce con carico concentrato in mezzo

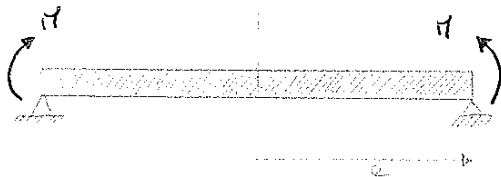


(vd. dimostrazione da slide 85 a 90)

ESEMPIO 5 - Piatte e calce piena con carico concentrato in mezzo (metodo iterativo)



(vd. dimostrazione da slide 99 a 103)



Esempio 3-1

- equazione di equilibrio in termini di α

- $Q = 0$

- integrare tre volte

- Richiedere M_2 , e cui si sottituisce α e $\frac{\partial \alpha}{\partial r}$ tramite le integrazioni precedenti

- Imporre le condizioni al centro: $\left\{ \begin{array}{l} r=b \Rightarrow M_2 = M_1 \\ r=e \Rightarrow M_2 = M_1 \end{array} \right.$

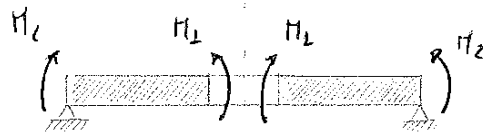
- Trovare C_2 facendo $M_2 = M_1$

- Trovare C_1 da M_1

- Imporre nuove condizioni al centro $r=e \Rightarrow w = 0$

- trovare C_3

- noti C_1, C_2 e C_3 determinare w, α, M_2 e M_1



Esempio 3-2

- equazione di equilibrio in α

- trovare Q

- integrare tre volte

- Imporre condizioni al centro $\left. \begin{array}{l} r=b \Rightarrow M_2 = 0 \\ r=e \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M_2 = 0 \\ w = 0 \end{array} \right. \end{array} \right\} \rightarrow C_1, C_2$

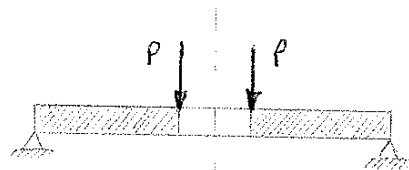
- scrivere M_2 in funzione di w e trovare $\frac{\partial w}{\partial r}$ e $\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$ e inserirle

- sostituire prima $r=b$ e $r=e$ in M_2 per poi sottrarre $(M_2)_{r=e} - (M_2)_{r=b}$

- trovare C_2

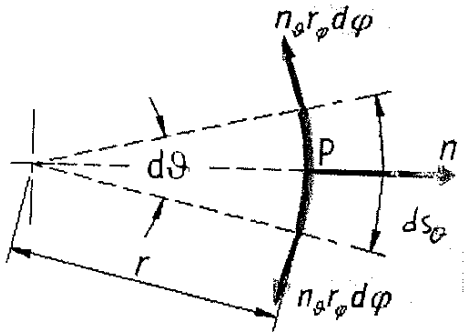
- noto C_1 , trovare C_1 da $(M_2)_{r=e}$

- noto C_1, C_2 , trovare C_3 da w





► Risultante della componente M_θ :

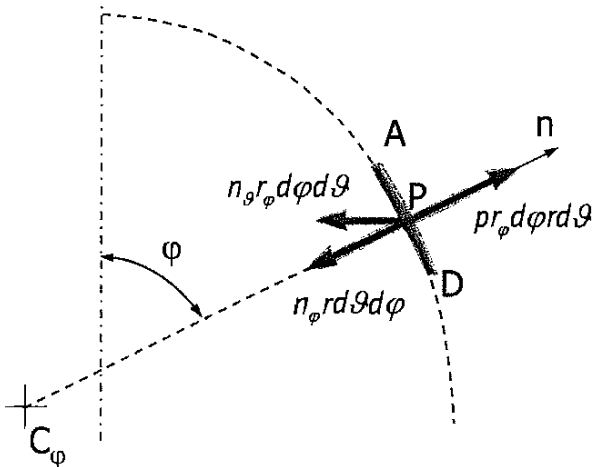


$$\begin{aligned}
 & -m_\theta r_\phi d\phi \sin \frac{d\theta}{2} - m_\theta r_\phi d\phi \sin \frac{d\theta}{2} = -2 m_\theta r_\phi d\phi \sin \frac{d\theta}{2} \\
 & \sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2} \\
 & = -2 m_\theta r_\phi d\phi \frac{d\theta}{2} = -m_\theta r_\phi d\phi d\theta
 \end{aligned}$$

► Risultante dell'estensione della pressione P lungo la normale n [$P_i > 0, P_e < 0$]

$$P r_\phi d\phi r d\theta$$

Quindi, si impone l'equilibrio lungo la normale n in P :



$$-m_\phi r d\theta d\phi - m_\theta r_\phi d\phi ds_\theta \sin \phi + p r_\phi r d\phi ds_\theta = 0$$

$$m_\phi r + m_\theta r_\phi \sin \phi = p r_\phi r$$

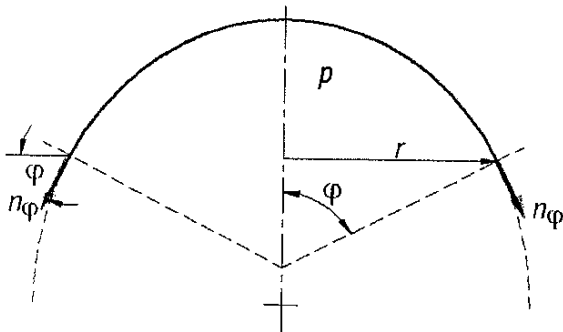
$$\frac{m_\phi}{r_\phi} + \frac{m_\theta}{r} \sin \phi = p$$

da cui, per $r = r_\theta \sin \phi$, si ottiene :

$$\frac{m_\phi}{r_\phi} + \frac{m_\theta}{r_\theta} = p \quad [N/m^2] \quad (1)$$

1^a EQUAZIONE DI EQUILIBRIO (equilibrio rispetto alla normale alla trazione)

2) Equilibrio rispetto a un elemento "verticale"



$$2\pi r n_\phi \sin \phi = P$$

$$2\pi r m_\phi \sin \phi = P \quad [N]$$

Le componenti orizzontali si annullano a due a due, invece quelle verticali si sommano.

Inoltre, dato che vale $P = \pi r^2 p$, si ottiene :

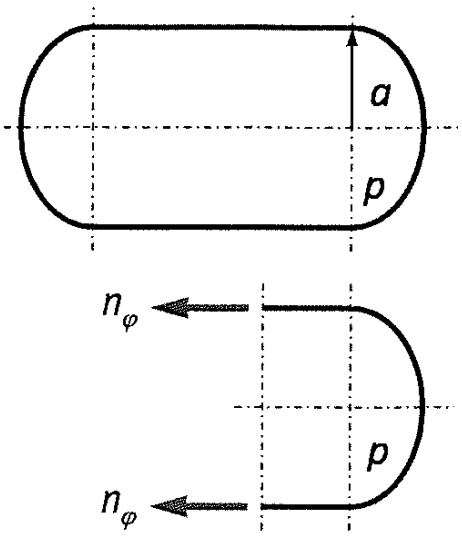
$$2\pi r m_\phi \sin \phi = \pi r^2 p \quad [N] \quad (2)$$

2^a EQUAZIONE DI EQUILIBRIO (equilibrio alle trazioni verticali)

2) Recipiente cilindrico, di raggio a e spessore h , soggetto a pressione interna p

• EQUILIBRIO ASSIALE

$$2\pi r M_\varphi \sin \varphi = P \Rightarrow 2\pi r M_\varphi \sin \varphi = \pi r^2 p \quad (3)$$



essendo $r = a$, si ottiene:

$$2\pi a M_\varphi \sin \varphi = \pi a^2 p \Rightarrow M_\varphi = \frac{pa}{2}$$

Quindi:

$$\bar{\sigma}_\varphi = \frac{pa}{2h}$$

• EQUILIBRIO LUNGO LA NORMALE

$$\frac{M_\varphi}{r_\varphi} + \frac{M_\theta}{r_\theta} = p$$

da cui, per $r_\varphi = \infty$ e $r_\theta = a$, si ottiene:

$$0 + \frac{M_\theta}{a} = p \Rightarrow M_\theta = pa$$

Quindi:

$$\bar{\sigma}_\theta = \frac{pa}{h}$$

3) Giunea emisferica, di raggio a e spessore h , piena di liquido

Al raggio r si deve la membrana più sollecitata in cui si vanno a calcolare lo sforzo e la sollecitazione di la membrana di liquido contenuta in quel punto.

Si va a valutare P partendo dalla 2^a equazione di equilibrio:

$$2\pi r M_\varphi \sin \varphi = P$$

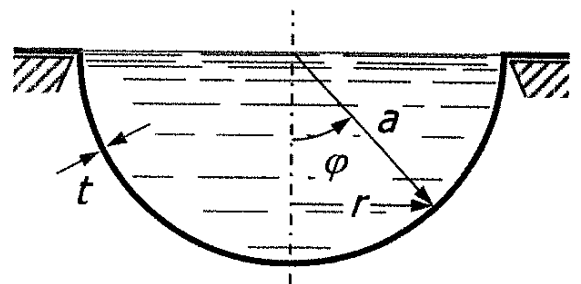
dove: P = risultante dei carichi verticali (peso della colonna d'acqua)

$$P = \gamma (V_1 + V_2) \quad [N]$$

con: V_1 = volume cilindro

V_2 = volume calotta

γ = peso specifico del liquido $[N/m^3]$



Si può calcolare momento M_θ :

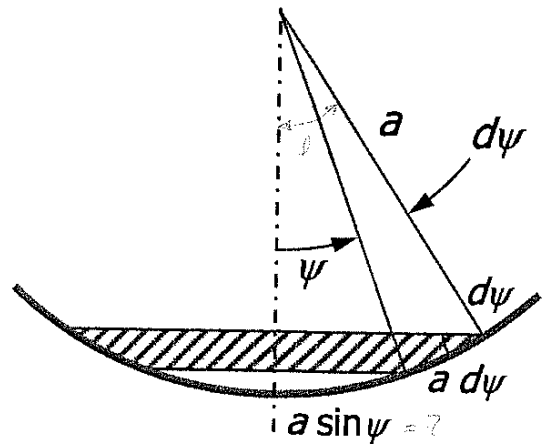
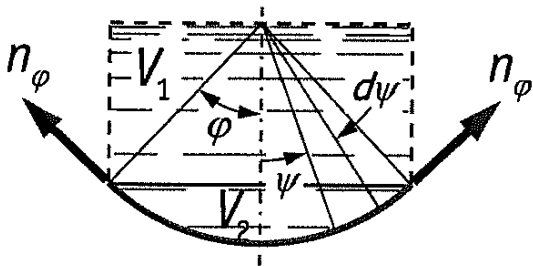
$$M_\theta = \gamma(a-y)a \cdot \frac{\gamma \left[r^2(a-y) + y^2 \left(a - \frac{y}{3} \right) \right]}{2r \sin \varphi} = \frac{2r \sin \varphi \cdot \gamma(a-y)a - \gamma \left[r^2(a-y) + y^2 \left(a - \frac{y}{3} \right) \right]}{2r \sin \varphi}$$

Inoltre, vale che: $\sigma_\theta = \frac{M_\theta}{h}$

Nota M_θ e va a determinare il suo valore per $y=0$ e per $y=a$:

$$\left\{ \begin{aligned} (M_\theta)_{y=0} &= \frac{2r \sin \varphi \gamma a^2 - \gamma a r^2}{2r \sin \varphi} = \gamma a^2 - \frac{\gamma a r^2}{2 \sin \varphi} = \gamma a^2 - \frac{\gamma a^2}{2} = \frac{\gamma a^2}{2} \\ &\quad \frac{r}{\sin \varphi} = a \\ (M_\theta)_{y=a} &= \frac{-\gamma a^2 + \frac{2}{3} \gamma a^2}{2r \sin \varphi} = -\frac{1}{3} \frac{\gamma a^3}{r \sin \varphi} = -\frac{1}{3} \frac{\gamma a^3}{r} = -\frac{1}{3} \frac{\gamma a^3}{a} = -\frac{\gamma a^2}{3} \\ &\quad \varphi = 90^\circ \Rightarrow \sin(90) = 1 \end{aligned} \right.$$

II° METODO (come slide)



$$\left\{ \begin{aligned} V_1 &= \pi (a \sin \varphi)^2 a \cos \varphi \\ V_2 &= \int_0^\varphi \pi (a \sin \psi)^2 a \sin \psi d\psi = \pi a^3 \int_0^\varphi \sin^3 \psi d\psi = \end{aligned} \right.$$

$$= \pi a^3 \left(-\frac{1}{3} \sin^2 \psi \cos \psi - \frac{2}{3} \cos \psi + \frac{2}{3} \right) \Rightarrow V_2 = \pi a^3 \left(\frac{2}{3} - \cos \varphi + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right)$$

Quindi:

$$V = V_1 + V_2 = \pi (a \sin \varphi)^2 a \cos \varphi + \pi a^3 \left(\frac{2}{3} - \cos \varphi + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right) = \frac{2}{3} \pi a^3 (1 - \cos^3 \varphi)$$

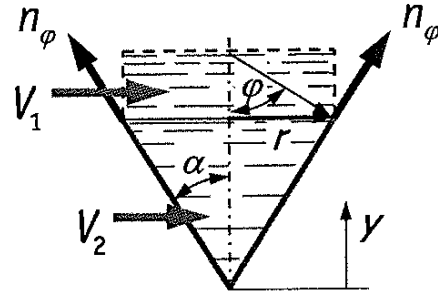
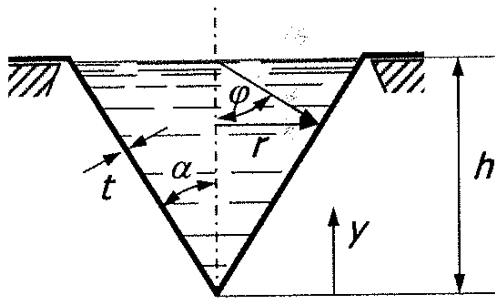
Si calcola la forza P.

$$P = \gamma V = \frac{2}{3} \pi a^3 (1 - \cos^3 \varphi) \gamma$$

Si sostituisce nella (3).

$$\cancel{2r} \sin \varphi \sin \varphi = \frac{2}{3} \pi a^3 (1 - \cos^3 \varphi) \gamma$$

4) Guscio conico, piano di liquido



$r_\varphi = 0$ caso piatto e coordinate radiale tendenti a ∞

$r_\theta = \frac{r}{\sin\varphi} = \frac{r}{\cos\alpha}$ coordinate circolari

$r = y \tan\alpha$

5. considerare la 1^a equazione di equilibrio:

$$\frac{M_\varphi}{r_\varphi} + \frac{M_\theta}{r_\theta} = P \quad \Rightarrow \quad M_\theta = \gamma(h-y) \cdot \frac{r}{\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad M_\theta = \gamma(h-y) \frac{y \tan\alpha}{\cos\alpha}$$

\uparrow
 $P = \gamma(h-y)$

6. considerare ora la 2^a equazione di equilibrio:

$2\pi r M_\varphi + m\varphi = P$

dove $P = \gamma(V_1 + V_2)$

Essendo:

$$\begin{cases} V_1 = \pi r^2 (h-y) \\ V_2 = \frac{\pi}{3} r^2 y \end{cases} \quad \rightarrow \quad V = V_1 + V_2 = \pi r^2 (h-y) + \frac{\pi}{3} r^2 y = \pi r^2 (h - \frac{2}{3}y)$$

sì allora:

$P = \gamma \pi r^2 (h - \frac{2}{3}y)$

Sostituendo nella 2^a equazione di equilibrio, si ricava M_φ :

$$2\pi r M_\varphi + m\varphi = \gamma \pi r^2 (h - \frac{2}{3}y)$$

$$M_\varphi = \frac{\gamma r (h - \frac{2}{3}y)}{2 \sin\varphi} = \frac{\gamma r \cos\alpha (h - \frac{2}{3}y)}{2} = \frac{\gamma r (h - \frac{2}{3}y)}{2 \cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad M_\varphi = \frac{\gamma y \tan\alpha (h - \frac{2}{3}y)}{2 \cos\alpha}$$

FATTI NEI MATERIALI

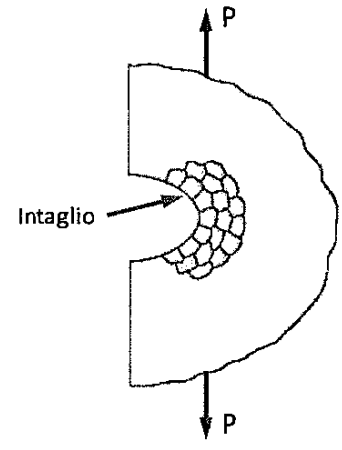
Introduzione

Il fenomeno delle fatigue si verifica quando un componente è sollecitato con un carico ciclico che può essere, ad esempio, meccanico o termico.

Il collasso generalmente inizia in superficie e/o in un punto in cui si ha una concentrazione delle tensioni (ad esempio, in corrispondenza di un intaglio, poro o di una cricca).

Una volta iniziata, la cricca ha una crescita progressiva (con lamezzamento progressivamente incrementale).

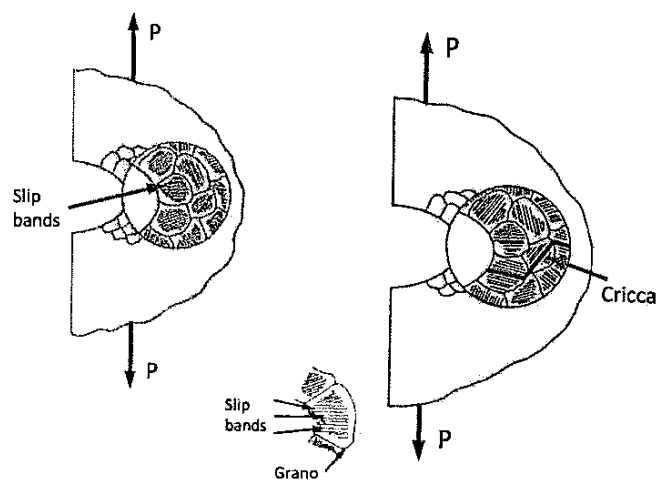
La crescita iniziale di una cricca non è facile da osservare, dopo l'ingresso e la fase di propagazione del difetto, il collasso finisce in una frattura della sezione residua. tale frattura è rapida e catastrofica dal momento che la cricca, in tali condizioni, si propaga alle velocità del suono.



In corrispondenza delle superficie di frattura si identificano tre zone:

- innesco del difetto
- strutture ("beach marks")
- area di frattura

In una struttura, inizialmente priva di difetti, il carico ciclico provoca il movimento delle dislocazioni influenzato da: tensioni, deformazioni di taglio, aree di tensioni elevate e orientamento favorevole, meno dai prezzi. Il moto delle dislocazioni porta alla formazione dei piani di scorrimento (slip bands) ed il sovrappasso non meno e raggiungono la superficie (invasioni e estrusioni), formando delle microcricche.



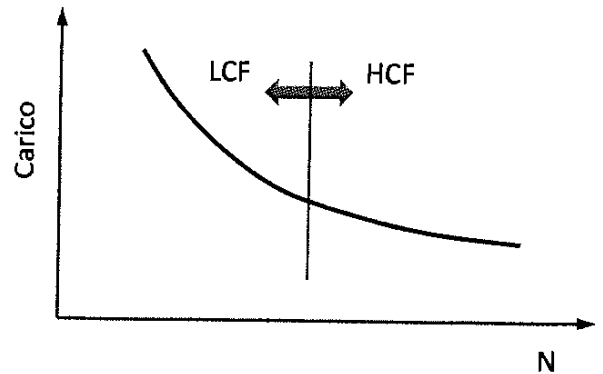
Queste microcricche crescono lungo i bordi liberi, nella direzione della massima tensione di taglio. Le crescite delle cricche di fatica è causata dalle tensioni variabili e parte continua a crescere fino a che non si arriva a:

- movimento della sezione netta
- frattura
- complesamento cricche (non si osservano più)

• Fatica ad alto e basso numero di cicli

HCF (High Cycle Fatigue) → fatica ad alto numero di cicli

- durata a fatica elevata
- piccole deformazioni plastiche
- durata controllata dalle microlesioni



LCF (Low Cycle Fatigue) → fatica a basso numero di cicli

- durata a fatica limitata
- elevate deformazioni plastiche
- durata controllata dalla propagazione (le microlesioni si formano prima)

► RELAZIONI TENSIONI - DURATA (σ -N)

Il metodo consiste nel condurre prove in "cambiali di carico" sul materiale, calcolare quindi σ con espositi in campo elastico finché il provino non cede (N_f) e, infine, valutare il comportamento del provino.

- Storia :
- Wöhler (1860) → curve di fatica, legge σ -N
 - Goodman (1870) → effetto della tensione media
 - 1930 - 1950 → miglioramento del metodo

Punti di forza :

- metodo di analisi semplice
- applicazioni per il progetto :
 - lunghe durata
 - carico ad ampiezza costante
 - carichi tattici in modo ripetitivo
 - carichi variabili
- ampia disponibilità di dati

Punti di debolezza :

- natura empirica del metodo
- dati disponibili per: esclusivamente per gli acciai
- limitata conoscenza del comportamento a fatica
- non tiene conto della deformazione plastica

Applicazioni : progetto di macchine (molle, alberi, bulloni, ...)

• Comportamento elastico σ - ϵ - Modulo di elasticità - diretto

1) Relazione tensione - deformazione

- equazione elastica tensione - deformazione
- equazione del ciclo di isteresi

2) Relazione deformazione - diretto

- equazione deformazione - diretto e pectro poroelastico

3) Effetto della tensione media

- equazione di Herzog
- equazione di Smith - Watson - Topper

4) Andamento delle tensioni - deformazioni all'apice di un intaglio

- equazione di Neuberger

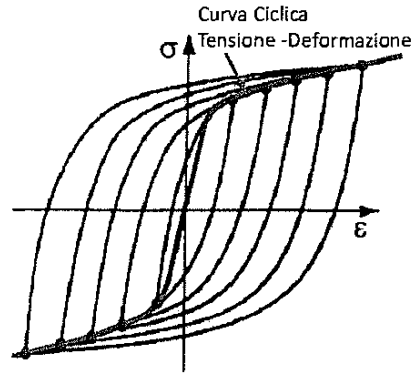
5) Danneggiamento e metodi di calcolo

- metodo linee (Thoms - Palmgren)
- conteggio cicli (Rumpher)

6) Fatica multipla

Curva monotona tensione - deformazione

- calcolate da test in trazione su materiale "nuovo"
- caratterizzata da $\sigma_R, \sigma_s, \% RA, k, n$

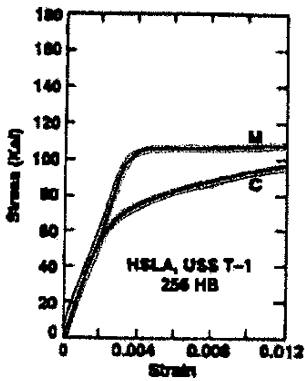


Curva ciclica tensione - deformazione

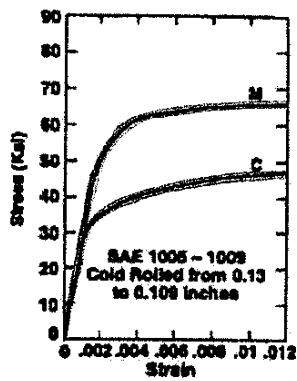
- calcolate da test su materiale dopo carico ciclico
- si ottiene un set di dati di stress stabilizzati
- si collegano i vertici dei cicli di interesse

NB: alcune proprietà monotone (σ_R, σ_s, k, n) possono in essere correlate al comportamento sotto carico ciclico.

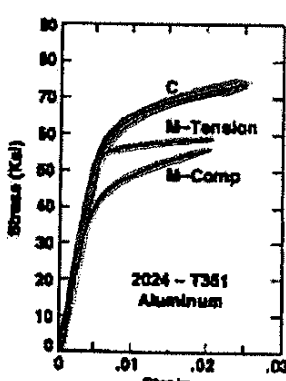
In realtà, visto che le due curve sono strettamente correlate, la curva ciclica e quella monotona risultano diverse, come si evince dai grafici sotto:



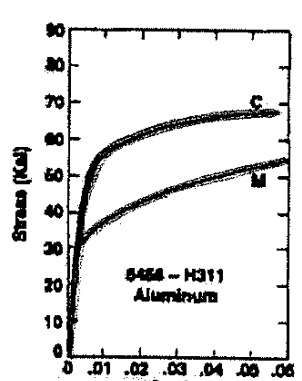
ADDOLGIMENTO



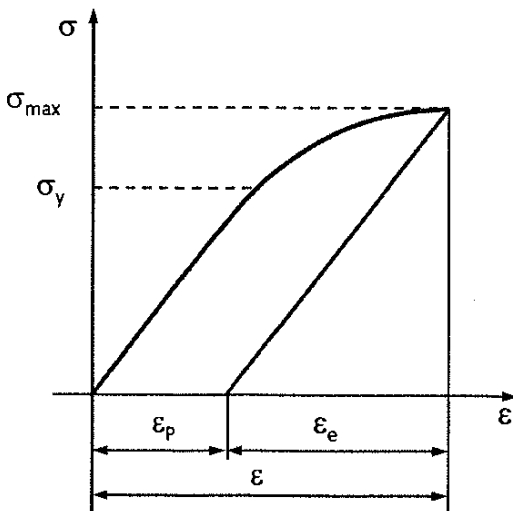
MATERIALE PIU' DUTTOILE



INCRODIMENTO



Si osserva che molti materiali con un buon comportamento a fatica sono calcolate stabili



Deformazione totale:

$$\epsilon_t = \epsilon_e + \epsilon_p$$

dove: $\epsilon_e = \frac{\sigma}{E}$ (deformazione elastica)

$$\epsilon_p = \left(\frac{\sigma}{k'}\right)^{1/n'}$$

E = costante, a corso del carico ciclico

k' = coefficiente di resistenza ciclica

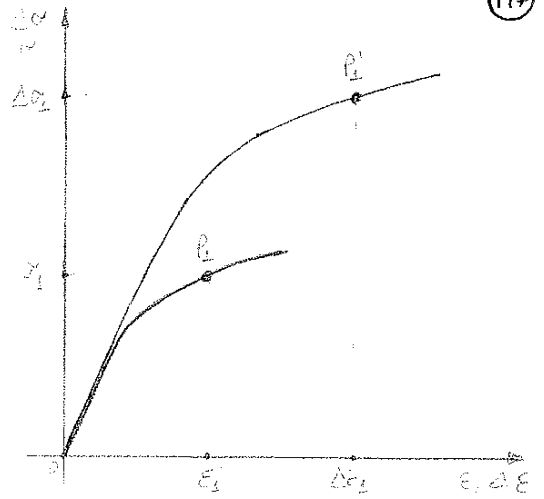
n' = coefficiente di incrudimento ciclico

$$\epsilon_t = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{k'}\right)^{1/n'}$$

IPOTESI DI HASSERING

Le curve di isteresi stabilizzata per mezzo di una raddoppiando i valori della curva ciclo tensione - deformazione $\Rightarrow \Delta\sigma_2 = 2\sigma_1$, $\Delta\epsilon_2 = 2\epsilon_1$

NB: si ipotizza che il materiale abbia lo stesso comportamento a trazione e a compressione.



Tutti i punti della curva ciclo seguono la seguente relazione:

$$\epsilon_t = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{k'}\right)^{\frac{1}{n'}}$$

EQUAZIONE CURVA CICLO σ - ϵ

Dato un punto P_1 della curva ciclo $(\sigma_1 - \epsilon_1)$, si scrive:

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} + \left(\frac{\sigma_1}{k'}\right)^{\frac{1}{n'}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\epsilon_1}{2} = \frac{\Delta\sigma_1}{2E} + \left(\frac{\Delta\sigma_1}{2k'}\right)^{\frac{1}{n'}}$$

da Hassering: $\begin{cases} \Delta\sigma_2 = 2\sigma_1 \\ \Delta\epsilon_2 = 2\epsilon_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_2 = \frac{\Delta\sigma_1}{2} \\ \epsilon_2 = \frac{\Delta\epsilon_1}{2} \end{cases}$

da cui, riscrivendola in termini generali, si ottiene:

$$\Delta\epsilon = \frac{\Delta\sigma}{E} + 2 \left(\frac{\Delta\sigma}{2k'}\right)^{\frac{1}{n'}}$$

EQUAZIONE CURVA DI ISTERESI

da risposta, di un sistema in termini σ - ϵ , ad un ciclo applicato può essere determinata osservando l'ampiezza delle curve di isteresi in funzione a quella della curva ciclo tensione - deformazione.

- NB:
- sono necessari solo tre parametri del materiale (E, k', n')
 - se i dati di input sono i termini della deformazione (ϵ), allora i valori di tensione devono essere determinati con un metodo iterativo
 - per poter descrivere la risposta di un materiale in termini σ - ϵ , occorre assumere diverse ipotesi semplificative.

Comportamento E-N

117

Per conoscere il comportamento in termini di deformazione - durata (E-N) occorre condurre delle prove a diversi livelli di deformazione, sino alle rotture per fatica; la dimensione del ciclo di stress ($\frac{\Delta E}{2}$) sarà correlata alla durata e fatica ($2N_f$)

Successivamente, si traccia un grafico deformazione - durata ($\frac{\Delta E}{2} - 2N_f$) in scala bi-logaritmica; l'analisi sarà tanto migliore quanto migliore è l'interpolazione dei dati (di natura sia non-lineare anche in coordinate bi-logaritmiche) e si sarà curato delle condizioni limite, ovvero del comportamento ad una estensione.

In parte prove, il cedimento è dato dal controllo di deformazione oppure dal comportamento del componente alla rotture dell'intaglio.

Il modello più comune di equazione usato in fatica è del tipo:

$$C_{res} = A(Durata)^B$$

e, sebene non abbia alcune giustificazioni teoriche, è usato grazie alle sue origini dal punto di vista matematico. In tale modello, il "curcio" può essere inteso sia in termini di tensione o di deformazione, così come la durata può essere definita in col, alternanza o eventi.

Per studiare la durata e fatica in corrispondenza dell'ampiezza di sollecitazione si utilizza il seguente modello (1910): $[N] = f(\text{tensione})$

$$\sigma_a = A(N_f)^B$$

Basquin riceve un'esponente universale con un coefficiente "A" correlato alle resistenze a trazione e tenacità e, per una grande varietà di metalli, "B" risulta compreso tra:

$$-0,12 \leq B \leq -0,05$$

es. acciaio basso legato ($\downarrow C$): $\sigma_a = 1,62 \sigma_f (N_f)^{-0,085}$

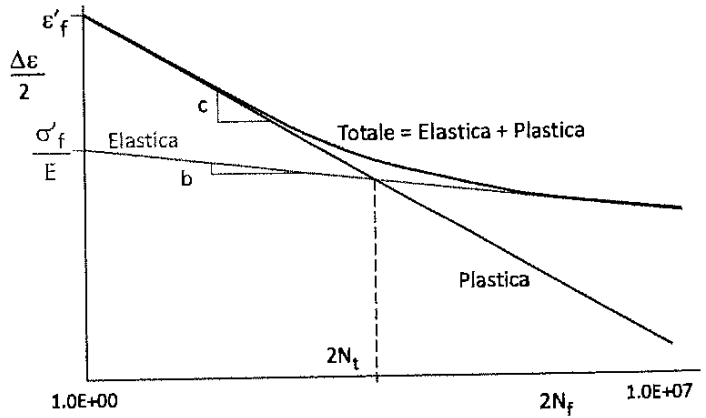
Tale metodo è usato principalmente per la fatica ad alto numero di cicli.

PUNTO FONDAMENTALE: la relazione tra σ e N può essere modellata usando un'espressione di potenza

FORMULAZIONE ALTERNATIVA $\rightarrow \frac{\Delta \sigma}{2} = \sigma_f' (2N_f)^b$

MODELLO A 4 PARAMETRI

$$\frac{\Delta E}{2} = \underbrace{\frac{\sigma_f^1}{E} (2N_f)^b}_{\text{elastica}} + \underbrace{\epsilon_f^1 (2N_f)^c}_{\text{plastica}}$$



Tale modello può essere usato per una grande varietà di metalli (costituisce un database comune ed unico modello di analisi); i quattro parametri $\sigma_f^1, b, \epsilon_f^1, c$ permettono una

miglior approssimazione (interpolazione) dei dati che, per molti metalli, spesso una linea curva anche in un diagramma E-N in scala logaritmica.

Oss: nella zona HCF per gli acciai, i due modelli (E-N e σ_f -N) sono gli stessi; però, il modello E-N non include il comportamento brittle di fatica ed è il più appropriato per le applicazioni con numero di cicli variabile.

Definizione di "2N_t": è la durata alla quale il ciclo strettamente di interesse ha ugual componente elastica e plastica (punto di incontro delle due curve E-N, elastica + plastica).

Dimostrazione:

$$\frac{\Delta E_e}{2} = \frac{\Delta E_p}{2} \Rightarrow \frac{\sigma_f^1}{E} (2N_t)^b = \epsilon_f^1 (2N_t)^c$$

dato che per definizione vale $N_f = N_t$:

$$\frac{\sigma_f^1}{E} (2N_t)^b = \epsilon_f^1 (2N_t)^c \Rightarrow (2N_t)^{b-c} = \frac{E \epsilon_f^1}{\sigma_f^1} \Rightarrow 2N_t = \left(\frac{E \epsilon_f^1}{\sigma_f^1} \right)^{\frac{1}{b-c}}$$

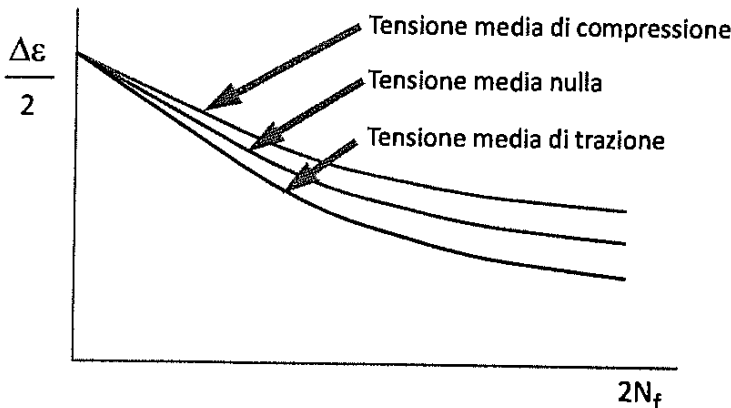
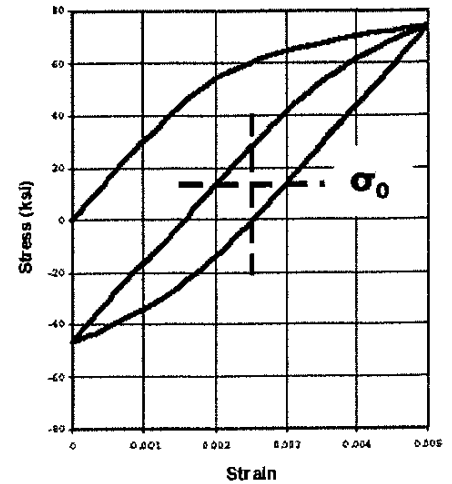
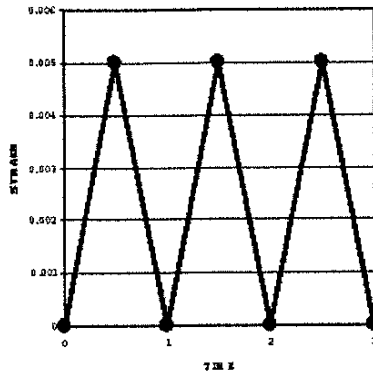
La durata di transizione può essere ottenuta per:

- determinare l'importanza della deformazione plastica per una particolare applicazione di progetto a fatica
- separare le fatiche a basso e ad alto numero di cicli.

Effetto della tensione media

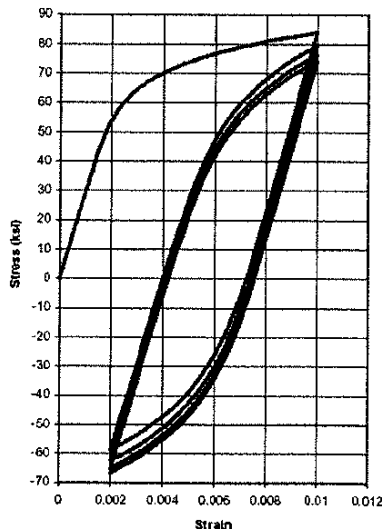
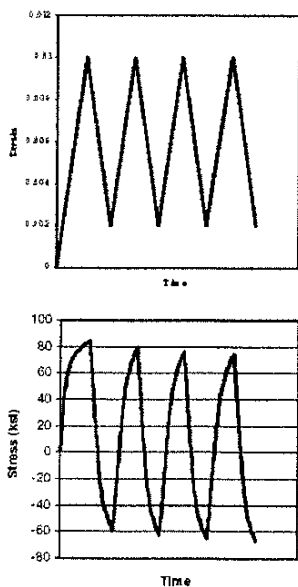
(11)

da maggior parte delle prove E-N sono condotte usando un carico alterno sinusoidale; tuttavia, i carichi di senso positivo causano una tensione media σ_0



- per carichi elevati, una tensione media di compressione ha un effetto benefico; al contrario, una tensione media di trazione peggiora il comportamento a fatica.
- per carichi bassi, la tensione media ha scarsa influenza sul comportamento a fatica.

Se si hanno dei cicli di var. var. alterna sinusoidale, ma di var. caratteristiche dell'area delle deformazioni plastiche, si verificano il fenomeno di RAFFINAMENTO DELLA TENSIONE MEDIA, ovvero la tensione media scende a zero ($\sigma_0 \rightarrow 0$).



Oss. Sebbene la storia delle deformazioni ha un valore medio - alto di trazione, il ciclo di interesse è per carichi sinusoidali.

Inoltre, il grado di allungamento dipende dal materiale e dalla deformazione plastica.

NB: non si deve confondere il raffinamento della tensione media con il rafforzamento a fatica: il primo dipende dai carichi e dalle deformazioni, mentre il secondo dipende dal materiale e dal comportamento del transitorio prima di raggiungere un ciclo di interesse stabilizzato.

Nell'analisi E-N, la tensione media è spesso trascurata perché:

- l'ampiezza della deformazione (e non la tensione media) è il fattore più importante per il danneggiamento
- deformazioni elevate possono colmare i difetti, questi ultimi;
- fenomeno del rilassamento (la caduta e poi la σ_0 quindi si può trascurare la tensione media)

Rosson propone una relazione al fine di modificare l'espressione tensione - deformazione ($\sigma-N$);

cambiando le ipotesi iniziali:

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_e} + \frac{\sigma_m}{\sigma_f} = 1 \quad \text{e} \quad S_N = \sigma_f (N_f)^b$$

(da σ_0)
(da σ_f)

si ottiene:

$$\sigma_0 + \sigma_m (N_f)^b = \sigma_f (N_f)^b \Rightarrow \frac{\Delta \sigma}{2} = (\sigma_f' - \sigma_0) (2N_f)^b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta \epsilon}{2} = \frac{\sigma_f' - \sigma_0}{E} (2N_f)^b + \epsilon_f' (2N_f)^c} \quad \text{EQUAZIONE DI ROSSON}$$

dove: σ_f' = resistenza reale e zettina

σ_0 = tensione media

ϵ_f' = tenacità alla frattura

Ritornando l'espressione di Rosson:

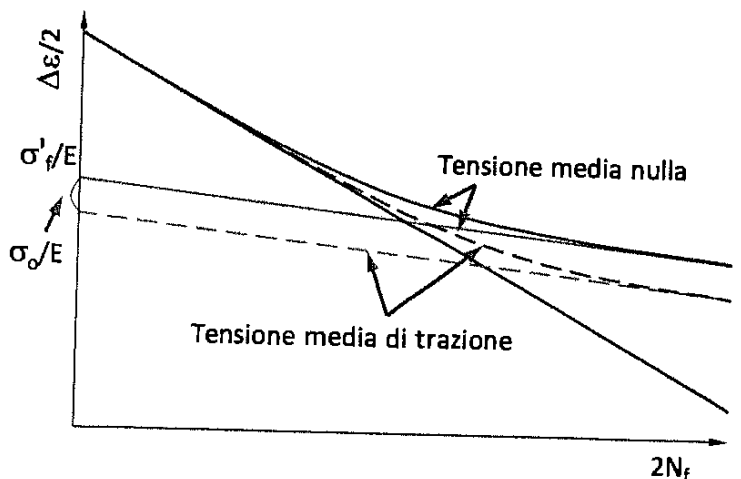
$$\frac{\Delta \epsilon}{2} = \frac{\sigma_f' - \sigma_0}{E} (2N_f)^b + \epsilon_f' (2N_f)^c \quad (1)$$

tale espressione causa una discrepanza tra la relazione $\sigma-N$ e $\epsilon-N$:

$$\frac{\Delta \sigma}{2} = \sigma_f' (2N_f)^b \quad \text{e} \quad \frac{\Delta \epsilon_f}{2} = \epsilon_f' (2N_f)^c$$

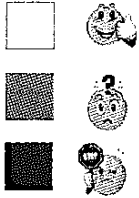
da cui:

$$\frac{\Delta \epsilon}{2} = \frac{\Delta \sigma}{2E} + \frac{\Delta \epsilon_f}{2} \quad (2) (\neq 1)$$



$l_{pelle} = 2,54 \text{ cm}$
 $l_{CV} = 455 \text{ V}$
 $l_{pelle} = 2,54 \text{ cm}$

$MELC$
 Smezzato $\rightarrow \gamma_s \gamma_m = \frac{\pi}{\alpha}$
 Trattore $\rightarrow k_s < \frac{450}{z_1}$
 Pando $\rightarrow k_s = \gamma_s \cos \alpha$



| | | | |
|----|------|------|-----|
| 1 | 1.25 | 1.25 | 1.5 |
| 2 | 2 | 2.25 | 2.5 |
| 3 | 3 | 3.5 | 4 |
| 4 | 4 | 4.5 | 5 |
| 5 | 5 | 5.5 | 6 |
| 6 | 6 | 6.5 | 7 |
| 7 | 7 | 7.5 | 8 |
| 8 | 8 | 8.5 | 9 |
| 9 | 9 | 9.5 | 10 |
| 10 | 10 | 10.5 | 11 |
| 11 | 11 | 11.5 | 12 |
| 12 | 12 | 12.5 | 13 |
| 13 | 13 | 13.5 | 14 |
| 14 | 14 | 14.5 | 15 |
| 15 | 15 | 15.5 | 16 |
| 16 | 16 | 16.5 | 17 |
| 17 | 17 | 17.5 | 18 |
| 18 | 18 | 18.5 | 19 |
| 19 | 19 | 19.5 | 20 |

Parametri caratteristici della ruota normalizzata "normale"

| parametro | valore |
|---|------------------------------|
| modulo | $m_n = p_n/\pi$ |
| angolo di pressione | $\alpha_n = 20^\circ$ |
| raggio primitivo di taglio | $r = z p_n/2\pi = z m_n/2$ |
| raggio base | $r_b = r \cos \alpha_n$ |
| passo | $p = p_n = \pi m_n$ |
| passo base | $p_{bn} = p_n \cos \alpha_n$ |
| sulla linea di riferimento: spessore = vano | $p_n/2 = \pi m_n/2$ |
| addendum | $h_{a1} = m_n$ |
| dedendum | $h_{f1} = 1.25 m_n$ |
| altezza del dente | $h_t = 2.25 m_n$ |
| raggio di tronatura esterna | $r_s = r + h_s$ |
| raggio di tronatura interna | $r_i = r - h_i$ |

caratteristiche funzionamento due ruote normali

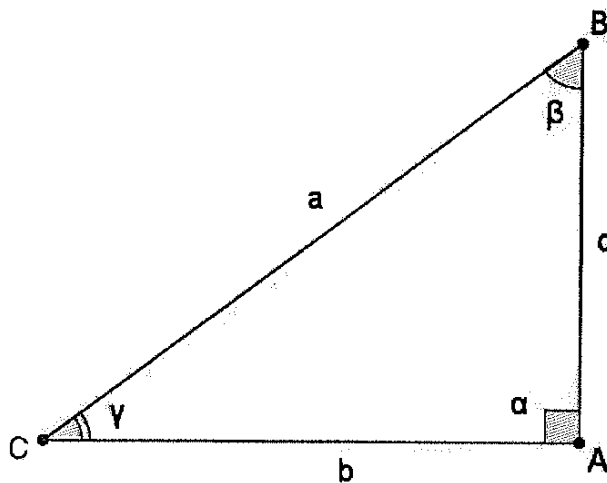
| | |
|----------------------------|--|
| interasse di funzionamento | $i = m_n(z_1 + z_2)/2$ |
| rapporto di trasmissione | $\tau = \omega_1/\omega_2 = r_2/r_1 = z_2/z_1$ |

| Z_1, Z_2 | $\alpha_n=20^\circ$ | | | Z_1, Z_2 | $\alpha_n=20^\circ$ | | |
|------------|---------------------|----------|-------|------------|---------------------|----------|-------|
| | $1/y_{LW}$ | y_{LW} | k | | $1/y_{LW}$ | y_{LW} | k |
| 12 | 0,245 | 4,08 | 0,88 | 28 | 0,352 | 2,84 | 0,588 |
| 13 | 0,261 | 3,83 | 0,839 | 30 | 0,358 | 2,79 | 0,571 |
| 14 | 0,276 | 3,62 | 0,803 | 34 | 0,371 | 2,70 | 0,541 |
| 15 | 0,289 | 3,46 | 0,773 | 38 | 0,383 | 2,61 | 0,516 |
| 16 | 0,295 | 3,39 | 0,751 | 43 | 0,396 | 2,53 | 0,49 |
| 17 | 0,302 | 3,31 | 0,73 | 50 | 0,408 | 2,45 | 0,451 |
| 18 | 0,308 | 3,25 | 0,712 | 60 | 0,421 | 2,38 | 0,43 |
| 19 | 0,314 | 3,18 | 0,695 | 75 | 0,434 | 2,30 | 0,395 |
| 20 | 0,32 | 3,13 | 0,679 | 100 | 0,446 | 2,24 | 0,355 |
| 21 | 0,327 | 3,06 | 0,663 | 150 | 0,459 | 2,18 | 0,307 |
| 22 | 0,33 | 3,03 | 0,651 | 300 | 0,471 | 2,12 | 0,242 |
| 24 | 0,336 | 2,96 | 0,629 | ∞ | 0,484 | 2,07 | |
| 25 | 0,346 | 2,89 | 0,606 | | | | |

| Material | Grade | Standard | Heat Treatment | Reference | |
|-----------------|-------|----------|------------------|------------------|------------------|
| | | | | Reference Stress | Reference Length |
| Steel | A2 | A2 | Through hardened | 100 HB | 100-200 |
| | A3 | A3 | Through hardened | 120 HB | 100-200 |
| | A4 | A4 | Through hardened | 130 HB | 100-200 |
| | A5 | A5 | Through hardened | 140 HB | 100-200 |
| | A6 | A6 | Through hardened | 150 HB | 100-200 |
| | A7 | A7 | Through hardened | 160 HB | 100-200 |
| | A8 | A8 | Through hardened | 170 HB | 100-200 |
| | A9 | A9 | Through hardened | 180 HB | 100-200 |
| | A10 | A10 | Through hardened | 190 HB | 100-200 |
| | A11 | A11 | Through hardened | 200 HB | 100-200 |
| Stainless Steel | A12 | A12 | Through hardened | 100 HB | 100-200 |
| | A13 | A13 | Through hardened | 110 HB | 100-200 |
| | A14 | A14 | Through hardened | 120 HB | 100-200 |
| | A15 | A15 | Through hardened | 130 HB | 100-200 |
| Aluminum | A16 | A16 | Through hardened | 100 HB | 100-200 |
| | A17 | A17 | Through hardened | 110 HB | 100-200 |
| | A18 | A18 | Through hardened | 120 HB | 100-200 |
| | A19 | A19 | Through hardened | 130 HB | 100-200 |
| Titanium | A20 | A20 | Through hardened | 100 HB | 100-200 |
| | A21 | A21 | Through hardened | 110 HB | 100-200 |
| | A22 | A22 | Through hardened | 120 HB | 100-200 |
| | A23 | A23 | Through hardened | 130 HB | 100-200 |
| Inconel | A24 | A24 | Through hardened | 100 HB | 100-200 |
| | A25 | A25 | Through hardened | 110 HB | 100-200 |
| | A26 | A26 | Through hardened | 120 HB | 100-200 |
| | A27 | A27 | Through hardened | 130 HB | 100-200 |
| Copper | A28 | A28 | Through hardened | 100 HB | 100-200 |
| | A29 | A29 | Through hardened | 110 HB | 100-200 |
| | A30 | A30 | Through hardened | 120 HB | 100-200 |
| | A31 | A31 | Through hardened | 130 HB | 100-200 |
| Brass | A32 | A32 | Through hardened | 100 HB | 100-200 |
| | A33 | A33 | Through hardened | 110 HB | 100-200 |
| | A34 | A34 | Through hardened | 120 HB | 100-200 |
| | A35 | A35 | Through hardened | 130 HB | 100-200 |

Table 11-20
 AGMA Bending-Fatigue Strength S_{b0} for a Selection of Gear Materials*

TRIANGOLI RETTANGOLI RELAZIONI



$$a = \frac{b}{\cos \gamma} \Rightarrow b = a \cdot \cos \gamma$$

$$\frac{c}{b} = \frac{\text{sen } \gamma}{\cos \gamma} \Rightarrow c = b \cdot \tan \gamma$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\cos \gamma}{\text{sen } \gamma} \Rightarrow b = c \cdot \cot \gamma$$

$$a = \frac{b}{\text{sen } \beta} \Rightarrow b = a \cdot \text{sen } \beta$$

$$a = \frac{c}{\cos \beta} \Rightarrow c = a \cdot \cos \beta$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\text{sen } \beta}{\cos \beta} \Rightarrow b = c \cdot \tan \beta$$

$$\frac{c}{b} = \frac{\cos \beta}{\text{sen } \beta} \Rightarrow c = b \cdot \cot \beta$$

ANGOLI CHE DIFFERISCONO DI UN ANGOLO PIATTO

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\pi + \alpha) &= -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{cos}(\pi + \alpha) &= -\operatorname{cos} \alpha \\ \operatorname{tg}(\pi + \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(\pi + \alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha \end{aligned}$$

ANGOLI SUPPLEMENTARI

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\pi - \alpha) &= \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{cos}(\pi - \alpha) &= -\operatorname{cos} \alpha \\ \operatorname{tg}(\pi - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha \end{aligned}$$

ANGOLI ESPLEMENTARI

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2\pi - \alpha) &= -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{cos}(2\pi - \alpha) &= \operatorname{cos} \alpha \\ \operatorname{tg}(2\pi - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha \end{aligned}$$

ANGOLI OPPOSTI

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(-\alpha) &= -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{cos}(-\alpha) &= \operatorname{cos} \alpha \\ \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(-\alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha \end{aligned}$$

FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) &= \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta \pm \operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \alpha \\ \operatorname{cos}(\alpha \pm \beta) &= \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta \mp \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \\ \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \end{aligned}$$

FORMULE DI DUPLICAZIONE

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2\alpha &= 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha \\ \operatorname{cos} 2\alpha &= \operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha = 2 \operatorname{cos}^2 \alpha - 1 \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \end{aligned}$$

FORMULE DI BISEZIONE

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{2}}, \quad \operatorname{cos} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} \alpha}{2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{1 + \operatorname{cos} \alpha}}$$

FORMULE PARAMETRICHE

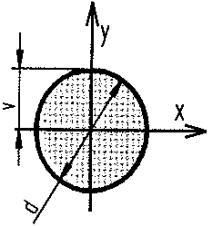
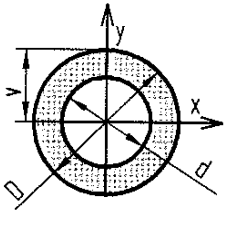
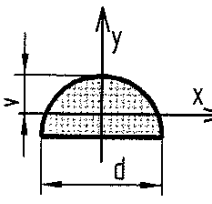
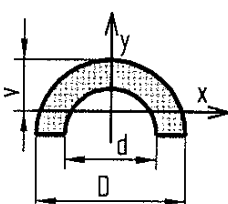
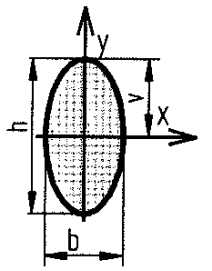
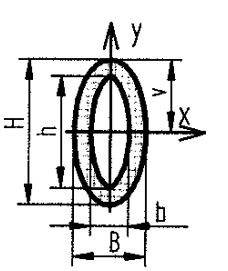
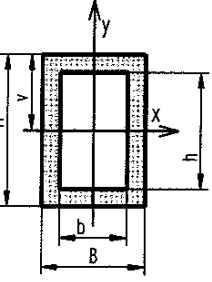
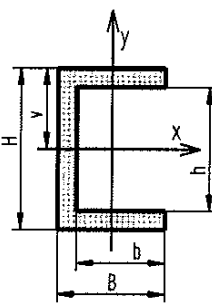
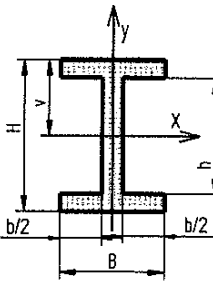
$$\alpha \neq \pi + 2k\pi, \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \operatorname{cos} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ANGOLI

PARTICOLARI

[Tabella completa pdf]

| Gradi | Radiani | sen | cos | tg | ctg |
|-------|------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 0° | 0 | 0 | 1 | 0 | non esiste |
| 30° | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| 45° | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | 1 |
| 60° | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 90° | $\frac{\pi}{2}$ | 1 | 0 | non esiste | 0 |
| 180° | π | 0 | -1 | 0 | non esiste |
| 270° | $\frac{3\pi}{2}$ | -1 | 0 | non esiste | 0 |
| 360° | 2π | 0 | 1 | 0 | non esiste |

| | | | |
|---|---|--|---|
|  | $I_x = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$ $W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$ $v = \frac{d}{2}$ |  | $I_x = \pi \frac{(D^4 - d^4)}{64}$ $W_x = \pi \frac{(D^4 - d^4)}{32 \cdot D}$ $v = \frac{D}{2}$ |
|  | $I_x = 0,07 d^4$ $W_x = 0,024 d^3$ $v = 0,288 d$ |  | $I_x = 0,1098 (R^4 - r^4) + \frac{0,238 R^3 r^3 (R - r)}{R - r}$ $W_x = \frac{I_x}{v}$ $v = 0,424 \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$ |
|  | $I_x = \frac{\pi}{64} b \cdot h^3$ $W_x = \frac{\pi}{32} b \cdot h^2$ $v = \frac{h}{2}$ |  | $I_x = \frac{\pi \cdot (B \cdot H^3 - b \cdot h^3)}{64}$ $W_x = I_x = \frac{\pi \cdot (B \cdot H^3 - b \cdot h^3)}{32 \cdot H}$ $v = \frac{H}{2}$ |
|  |  |  | $I_x = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$ $W_x = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$ $v = \frac{H}{2}$ |

Esercizio 5.3

Calcolare le tensioni nel lavabo emisferico mostrato in figura quando riempito con acqua. Diametro 350 mm; spessore 0.8 mm.

Calcolare le tensioni al fondo e al bordo.

Determinare i valori massimi di tensione.

Tracciare l'andamento delle tensioni.



Aree e volumi di alcuni solidi di rivoluzione

| | |
|---|--|
| <p>Cilindro</p> $S = 2\pi R(R + y)$ $V = \pi R^2 y$ | |
| <p>Cono</p> $S = \pi R \sqrt{R^2 + y^2}$ $V = \frac{\pi}{3} R^2 y$ | |
| <p>Tronco di cono</p> $S = \pi(R + r) \sqrt{y^2 + (R - r)^2}$ $V = \frac{\pi}{3} y(R^2 + r^2 + Rr)$ | |
| <p>Sfera</p> $S = 4\pi r^2$ $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ | |
| <p>Segmento sferico (calotta sferica)</p> $S = 2\pi y r$ $V = \pi y^2 \left(r - \frac{y}{3} \right)$ | |

Esercizio 1.4

Una piastra larga 1.4 m e lunga 2.8 m deve resistere ad una forza di trazione di 4.0 MN nella direzione della lunghezza. Le ispezioni sul materiale sono in grado di rilevare cricche passanti al bordo della lastra di lunghezza minima pari a 2.7 mm.

Per questo tipo di applicazione occorre scegliere una delle due leghe di Titanio Ti-6AL-4V:

| Tipo | Materiale | K_{Ic} (MPa \sqrt{m}) | σ_t (MPa) |
|------|-----------|----------------------------|------------------|
| A | Ti-6AL-4V | 115 | 910 |
| B | Ti-6AL-4V | 55 | 1035 |

Per minimizzare il peso per un fattore di sicurezza pari a 1.3, quale lega conviene usare?

Esercizio 1.5

Data una trave in PE ($K_{Ic} = 5$ MPa \sqrt{m}) con sezione rettangolare di altezza 50 mm, spessore 10 mm, soggetta ad un momento flettente di 100 Nm che presenta un difetto laterale di lunghezza caratteristica 8 mm, calcolare il coefficiente di sicurezza.

Esercizio 1.6

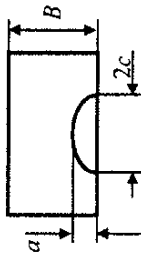
Una piastra in ABS ($K_{Ic} = 5$ MPa \sqrt{m} , $\sigma_u = 39$ MPa), di larghezza imposta $w = 100$ mm, deve sopportare un carico di trazione di 22.5 kN. Si determini lo spessore della piastra (approssimato al mm) necessario affinché si abbia un coefficiente di sicurezza $CS = 1.5$ supponendo che vi sia una cricca laterale passante con dimensione caratteristica 3.5 mm.



POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Meccanica

Difetto semiellittico superficiale

È una tipologia di difetto a cui vengono spesso assimilate le cricche da corrosione.



Anche in questo caso il valore massimo del fattore di intensità delle tensioni si raggiunge sull'asse minore:

$$K_{I,max} = 1.12\sigma\sqrt{\frac{\pi a}{Q}}$$

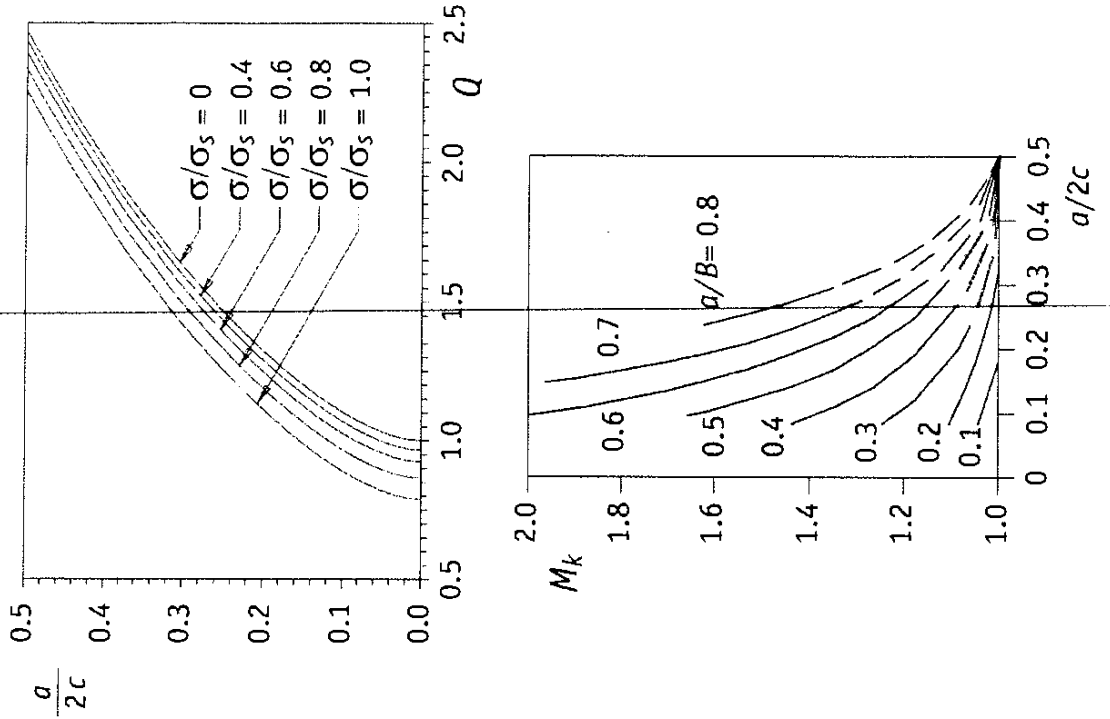
dove il fattore 1.12 tiene conto dell'effetto del bordo libero rispetto al caso precedente, mentre Q è dato da:

$$Q = \phi^2 - 0.212 \left(\frac{\sigma}{\sigma_p} \right)^2$$

con σ_p tensione di snervamento.

I valori di Q sono riportati nella figura in funzione del rapporto $(a/2c)$. Un'ulteriore correzione fu proposta da Kobayashi et al, e si rende necessaria per tenere conto di forme molto appiattite di difetti:

$$K_{I,max} = 1.12M_k\sigma\sqrt{\frac{\pi a}{Q}}$$



→ Se non si ha alcune certezze sulla dimensione della ossica, si sceglie una Y per una classe di ammassare infinite ($a \rightarrow \infty$)

es. $Y = 1,12 \sqrt{\pi}$ (se le lesche \dot{e} abbastanza grande)

Altimenti \dot{e} use la sviluppo in serie.

→ Fare attenzione ai procedimenti iterativi !!

Essendo Y in funzione di $\frac{a}{w}$, se " a " (o " h ", nei notatori) \dot{e} incognita, allora la Y non pu \dot{o} essere considerata costante, e meno che mai \dot{e} indicato di farlo.

Per \dot{u} to, si parte considerando $Y = \text{cost}$ e si fa un calcolo iterativo, in base al caso in esame.

NB: attenzione alle unit \dot{a} di misura fornite per le funzioni alle frontiere:

$$[k_{zc}] = \begin{cases} H k_a \sqrt{\pi m} & , \text{ se } [a] = m \\ H k_a \sqrt{\pi m m} & , \text{ se } [a] = m m m \end{cases}$$

Esercizio 1.2

$l = 5 \text{ m}$

$d = 0,8 \text{ m} \rightarrow r = 0,4 \text{ m} = 400 \text{ mm}$

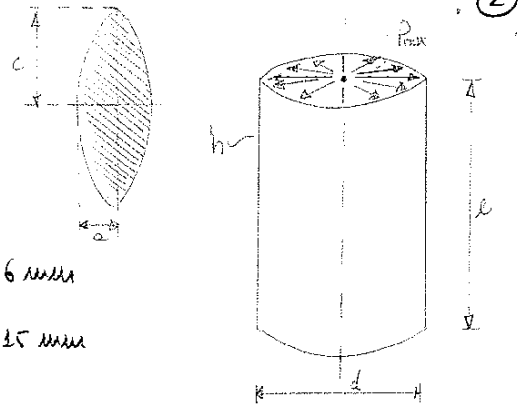
$P_{max} = 150 \text{ bar} = 150 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 15 \text{ MPa}$

Difetto ellittico superficiale: $\begin{cases} c \geq 6 \text{ mm} \\ \frac{c}{2c} = 0,2 \Rightarrow c = \frac{c}{0,4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 6 \text{ mm} \\ c = 15 \text{ mm} \end{cases}$

$h = ?$
 $cs = 2$ (richiesto)

PESO MINIMO \Rightarrow SCELTA MATERIALE

$\begin{cases} \text{Acciaio: } k_{IC} = 106 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}} ; \sigma_s = 1200 \text{ MPa} ; \rho = 7800 \text{ kg/m}^3 \\ \text{Alluminio: } k_{IC} = 32 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}} ; \sigma_s = 560 \text{ MPa} ; \rho = 2800 \text{ kg/m}^3 \\ \text{Titanio: } k_{IC} = 107 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}} ; \sigma_s = 835 \text{ MPa} ; \rho = 4500 \text{ kg/m}^3 \end{cases}$



VERIFICA A FRATTURA

$k_{II} \leq k_{IC} \Rightarrow k_{II} \leq \frac{k_{IC}}{cs} \Rightarrow cs = \frac{k_{IC}}{k_{II}}$ con $cs \geq 2$ (da verificare)

Nel caso di difetto ellittico, si considera:

$k_{II} = \frac{\sigma_c \sqrt{\pi a}}{\phi}$

con: $\phi = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8} \left(\frac{a}{w} \right)^2 = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8} \left(\frac{6}{15} \right)^2 = 1,24$

$\sigma_c = \frac{P_{max} \cdot r}{h_{min}}$ (Tensione circonferenziale)

Da materiale, vale:

$h_{min} = 2,5 \left(\frac{k_{IC}}{\sigma_s} \right)^2 \Rightarrow h_{min, Acc} = 2,5 \left(\frac{106 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}}{1200 \text{ MPa}} \right)^2 = 0,0195 \text{ m} = 19,5 \text{ mm}$

$h_{min, ALL} = 2,5 \left(\frac{32 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}}{560 \text{ MPa}} \right)^2 = 8,16 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 8,16 \text{ mm}$

$h_{min, TIT} = 2,5 \left(\frac{107 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}}{835 \text{ MPa}} \right)^2 = 0,042 \text{ m} = 42 \text{ mm}$

Il più alto determinare:

$\sigma_c = \frac{P_{max} \cdot r}{h_{min}} \Rightarrow \sigma_{c, Acc} = \frac{15 \text{ MPa} \cdot 400 \text{ mm}}{19,5 \text{ mm}} = 307,7 \text{ MPa}$

$\sigma_{c, ALL} = \frac{15 \text{ MPa} \cdot 400 \text{ mm}}{8,16 \text{ mm}} = 735,3 \text{ MPa}$

$\sigma_{c, TIT} = \frac{15 \text{ MPa} \cdot 400 \text{ mm}}{42 \text{ mm}} = 142,9 \text{ MPa}$

(4)

Esercizio 1.3

Acciaio L360 forgiato

$$\sigma_s = (1360 \div 1455) \text{ MPa}$$

$$k_{IC} = (79 \div 81) \text{ MPa} \sqrt{\text{mm}}$$

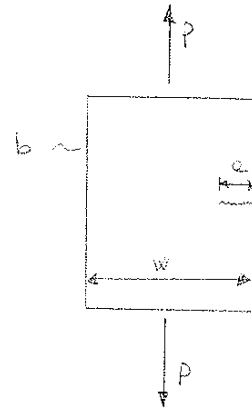
$$e = ?$$

$$w = 100 \text{ mm}$$

$$b = 10 \text{ mm}$$

$$P = 100 \text{ kN}$$

$$c_s = 2$$



VERBA A SNERMIAMENTO

$$\sigma \leq \sigma_s \Rightarrow \sigma = \frac{\sigma_s}{c_s} = \frac{1360}{2} = 680 \text{ MPa}$$

$$\sigma = \frac{P}{A_{\text{EFF}}} = \frac{P}{b(w-a)} \Rightarrow w-a = \frac{P}{b\sigma} \Rightarrow a = w - \frac{P}{b\sigma} = 100 - \frac{100 \cdot 10^3}{10 \cdot 680} = 85,3 \text{ mm} = 0,0853 \text{ m}$$

VERBA A FATTURA

$$k_I \leq k_{IC} \Rightarrow k_I = \frac{k_{IC}}{c_s} = \frac{79}{2} = 39,5 \text{ MPa} \sqrt{\text{mm}}$$

$$k_I = \gamma \sigma \sqrt{a}$$

(calcolo γ)
?

Essendo $\frac{a}{w} = \frac{85,3}{100} = 0,853 < 1$, si considera $\gamma = 1,12 \sqrt{1-0,853} = 1,99$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{wb} = \frac{100 \cdot 10^3}{100 \cdot 10} = 100 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = \frac{k_I}{\gamma \sigma} \Rightarrow a = \left(\frac{k_I}{\gamma \sigma} \right)^2 = \left(\frac{39,5 \text{ MPa} \sqrt{\text{mm}}}{1,99 \cdot 100 \text{ MPa}} \right)^2 = 0,039 \text{ m} = 39,4 \text{ mm}$$

Esercizio 1.5

⑥

Trave in PE: $k_{IC} = 5 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$

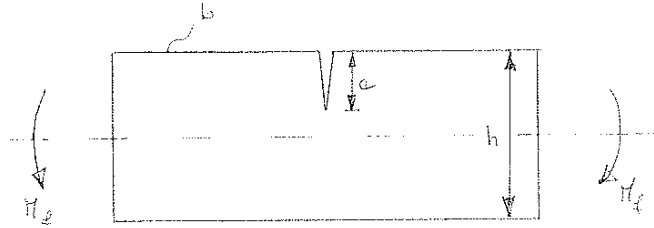
$$h = 50 \text{ mm} \quad (w)$$

$$b = 10 \text{ mm}$$

$$M_F = 100 \text{ Nm} = 100 \cdot 10^3 \text{ Nmm}$$

$$c = 8 \text{ mm}$$

$$cs = ?$$



NB: Verificare subito se il momento M_F provoca apertura o chiusura della cesoia; se la cesoia tende a chiudersi, allora non si avrà nessa propagazione del difetto

VERIFICA A SNERVIAMENTO

$$\sigma \leq \sigma_s \Rightarrow \sigma = \frac{\sigma_s}{cs}, \quad \text{dove } cs \text{ è l'incognita del problema}$$

$$\sigma = \frac{M_F}{W_{p,eff}} = \frac{M_F}{\frac{b(h-c)^2}{6}} = \frac{6M_F}{b(h-c)^2} = \frac{6 \cdot 100 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{10 \text{ mm} (50 - 8)^2 \text{ mm}^2} = 34,01 \text{ MPa}$$

VERIFICA A FRATURA

$$k_I \leq k_{IC} \Rightarrow k_I = \frac{k_{IC}}{cs}, \quad \text{dove } cs \text{ è l'incognita del problema}$$

$$k_I = Y\sigma\sqrt{a}$$

$$Y = 1,12\sqrt{\pi} - 2,47\left(\frac{c}{w}\right) + 12,97\left(\frac{c}{w}\right)^2 - 23,17\left(\frac{c}{w}\right)^3 + 24,8\left(\frac{c}{w}\right)^4 = 1,85$$

$$\sigma = \frac{M_F}{W_F} = \frac{M_F}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{6M_F}{bh^2} = \frac{6 \cdot 100 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{10 \text{ mm} \cdot 50^2 \text{ mm}^2} = 24 \text{ MPa}$$

$$k_I = 1,85 \cdot 24 \text{ MPa} \cdot \sqrt{8 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 3,97 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$$

$$k_{IC} = k_I \cdot cs \Rightarrow cs = \frac{k_{IC}}{k_I} = \frac{5 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}}{3,97 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}} = 1,26$$

Problemi

Esercizio 2.2 nella pagina di B, si vuole sapere se?
 l'energia è in relazione al N. [s] e in quale modo?

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica
12ALPNE Costruzione di Macchine

2. Esercizi: MFLE, propagazione difetti

Esercizio 2.1

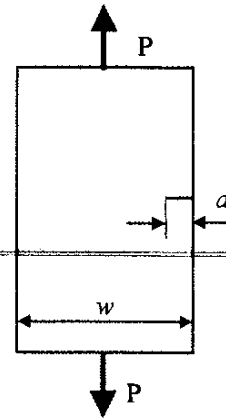
Una piastra in policarbonato (spessore $B = 20$ mm, larghezza $W = 100$ mm) presenta una cricca laterale con $a = 4$ mm. La piastra viene sollecitata a fatica con un carico $P = 0-10000$ N.

Assumendo che valga la legge di Paris e che il fattore di forma rimanga costante durante l'avanzamento della cricca calcolare il numero di cicli che porta a rottura la piastra.

Dati del materiale:

$$K_{Ic} = 2.2 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}, \sigma_u = 61 \text{ MPa}$$

Coefficienti della legge di Paris: $C = 10^{-4}$; $n = 4.3$



Esercizio 2.2

Avendo determinato (coefficiente di sicurezza $S = 1.5$) lo spessore minimo $B_{min} = 19.5$ mm, di una lastra rettangolare di larghezza $W = 100$ mm soggetta ad un carico di trazione $P = 550$ kN con due cricche laterali a tutto spessore di lunghezza $a = 3.5$ mm, in acciaio 4340 (tensione di snervamento 1495 MPa, $K_{Ic} = 50 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$), si sceglie lo spessore da assegnare alla lastra.

Supponendo poi di applicare un carico ciclico ($P_{min} = 0$; $P_{max} = 300$ kN) determinare, utilizzando la soluzione analitica e quella numerica, quanti cicli di carico e scarico può subire il componente prima di giungere a rottura. ($C = 2.33 \times 10^{-11}$; $n = 3$)

$$\Delta \sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} = \frac{P}{BW}$$

$$Y = 2.3$$

K for practical geometries

$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left(\sec \frac{\pi a}{W} \right)$
 $K_{II} = \tau \sqrt{\pi a} \left(\text{small } \frac{a}{W} \right)$
 $K_I = 1.12 \sigma \sqrt{\pi a} \left(\text{small } \frac{a}{W} \right)$
 or $K_I = Y \sigma \sqrt{a}$
 with $Y = 1.99 - 0.41 \frac{a}{W} + 18.7 \left(\frac{a}{W} \right)^2 - 38.48 \left(\frac{a}{W} \right)^3 + 53.85 \left(\frac{a}{W} \right)^4$
 (1.99 = 1.12 $\sqrt{\pi}$)
 $K_I = 1.12 \sigma \sqrt{\pi a} \left(\text{small } \frac{a}{W} \right)$
 or $K_I = Y \sigma \sqrt{a}$
 with $Y = 1.99 + 0.76 \frac{a}{W} - 8.48 \left(\frac{a}{W} \right)^2 + 27.36 \left(\frac{a}{W} \right)^3$
 (1.99 = 1.12 $\sqrt{\pi}$)
Thickness B
 $K_I = \frac{PS}{BW^{3/2}} \left[2.9 \left(\frac{a}{W} \right)^{1/2} - 4.6 \left(\frac{a}{W} \right)^{3/2} + 21.8 \left(\frac{a}{W} \right)^{5/2} - 37.6 \left(\frac{a}{W} \right)^{7/2} + 38.7 \left(\frac{a}{W} \right)^{9/2} \right]$
Thickness B
 $K_I = \frac{P}{BW^{3/2}} \left[29.6 \left(\frac{a}{W} \right)^{1/2} - 185.5 \left(\frac{a}{W} \right)^{3/2} + 655.7 \left(\frac{a}{W} \right)^{5/2} - 1017 \left(\frac{a}{W} \right)^{7/2} + 619 \left(\frac{a}{W} \right)^{9/2} \right]$
 p per unit thickness
 $K_I = p \sqrt{\pi a}$
 $K_{I, \text{max}} = 1.12 \frac{\sigma}{\phi} \sqrt{\pi a}$
 $K_{I, \text{min}} = 1.12 \frac{\sigma}{\phi} \sqrt{\pi a^2 \epsilon}$
 $\phi = \int_0^{\pi/2} \left[1 - \frac{c^2 - a^2}{c^2} \sin^2 \phi \right] d\phi$

Caratteristiche del Ti-6Al-4V (ST 954°C + A 538°C/4h)

| Proprietà | Valore | Unità |
|-----------------|------------------------|------------------------------|
| UTS | 930.8 | MPa |
| YS | 861.8 | MPa |
| K_{Ic} | 1390 | MPa $\sqrt{\text{mm}}$ |
| C | 2.15×10^{-11} | mm(MPa $\sqrt{\text{mm}})^n$ |
| n | 2.58 | |
| p | 0.25 | |
| q | 0.25 | |
| ΔK_{Ih} | 110 | MPa $\sqrt{\text{mm}}$ |
| f | 0.33 | |
| K_C | 1995 | |

$$\frac{da}{dN} = C \left[\frac{(1-f) \Delta K}{(1-R) \Delta K} \right]^p \left(\frac{\Delta K_{Ih}}{\Delta K} \right)^q \left(\frac{K_{\text{max}}}{1 - \frac{K_{\text{max}}}{K_C}} \right)^q$$

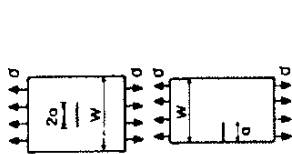
$$K_{\text{max}} = \Delta K / (1 - R)$$

$$R = \sigma_{\text{min}} / \sigma_{\text{max}}$$

$$t_0 = 2.5 \left(K_{Ic} / \sigma_{ys} \right)^2$$

$$K_c / K_{Ic} = 1 + B e^{-A (\epsilon / \epsilon_0)^2}$$

K for practical geometries



$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left(\sec \frac{\pi a}{W} \right)$$

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi a} \left(\text{small } \frac{a}{W} \right)$$

$$K_I = 1.12 \sigma \sqrt{\pi a} \left(\text{small } \frac{a}{W} \right)$$

$$\text{or } K_I = Y \sigma \sqrt{a}$$

$$\text{with } Y = 1.99 - 0.41 \left(\frac{a}{W} \right) + 18.7 \left(\frac{a}{W} \right)^2 - 38.48 \left(\frac{a}{W} \right)^3 + 53.85 \left(\frac{a}{W} \right)^4$$

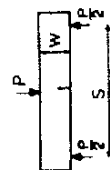
$$(1.99 = 1.12 \sqrt{\pi})$$

$$K_I = 1.12 \sigma \sqrt{\pi a} \left(\text{small } \frac{a}{W} \right)$$

$$\text{or } K_I = Y \sigma \sqrt{a}$$

$$\text{with } Y = 1.99 + 0.76 \left(\frac{a}{W} \right) - 8.48 \left(\frac{a}{W} \right)^2 + 27.36 \left(\frac{a}{W} \right)^3$$

$$(1.99 = 1.12 \sqrt{\pi})$$



Thickness B

$$K_I = \frac{P}{BW^{3/2}} \left[2.9 \left(\frac{a}{W} \right)^{1/2} - 4.6 \left(\frac{a}{W} \right)^{3/2} + 21.8 \left(\frac{a}{W} \right)^{5/2} - 37.6 \left(\frac{a}{W} \right)^{7/2} + 36.7 \left(\frac{a}{W} \right)^{9/2} \right]$$

Thickness B

$$K_I = \frac{P}{BW^{3/2}} \left[29.6 \left(\frac{a}{W} \right)^{1/2} - 185.5 \left(\frac{a}{W} \right)^{3/2} + 655.7 \left(\frac{a}{W} \right)^{5/2} - 1017 \left(\frac{a}{W} \right)^{7/2} + 63.9 \left(\frac{a}{W} \right)^{9/2} \right]$$

p per unit thickness

$$K_I = p \sqrt{\pi a}$$

$$K_{I, \text{max}} = 1.12 \phi \sqrt{\pi a}$$

$$K_{I, \text{min}} = 1.12 \phi \frac{\sigma}{c} \sqrt{\pi a^2 c}$$

$$\phi = \int_0^{\pi/2} \left[1 - \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \varphi \right] d\varphi$$

Caratteristiche del Ti-6Al-4V (ST 954°C + A 538°C/4h)

| Proprietà | Valore | Unità |
|-----------------|------------------------|-------------------------|
| UTS | 930.8 | MPa |
| YS | 861.8 | MPa |
| K_{Ic} | 1390 | MPa√mm |
| C | 2.15×10^{-11} | mm(MPa√mm) ⁿ |
| n | 2.58 | |
| p | 0.25 | |
| q | 0.25 | |
| ΔK_{I0} | 110 | MPa√mm |
| f | 0.33 | |
| K_c | 1995 | |

$$\frac{da}{dN} = C \left[\frac{(1-f)\Delta K}{(1-R)\Delta K} \right]^n \frac{\left(1 - \frac{\Delta K_{I0}}{\Delta K} \right)^p}{\left(1 - \frac{K_{\text{max}}}{K_c} \right)^q}$$

$$K_{\text{max}} = \Delta K / (1 - R)$$

$$R = \sigma_{\text{min}} / \sigma_{\text{max}}$$

$$t_0 = 2.5 \left(K_{Ic} / \sigma_{\text{ys}} \right)^2$$

→ dopo la base molto efficace il base unito del rapporto $\frac{K_{Ic}}{\sigma_{\text{ys}}}$

ESERCIZIO NOME MFLE - PROPAGAZIONE CRACKI

1

Esercizio 2.1

Piastre in poliacrilato : $k_{IC} = 2,2 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$
 $\nu = 0,3$

$b = 20 \text{ mm}$

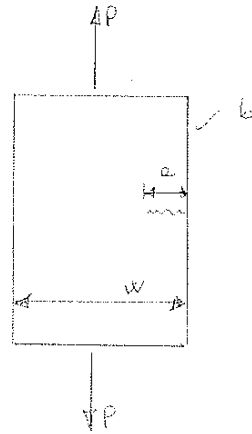
$w = 100 \text{ mm}$

$a = 4 \text{ mm}$

$P_{min} = 0 \text{ N}$

$P_{max} = 10000 \text{ N}$

$C = 10^{-4}$, $m = 2,3$



Assumendo valida la legge di Paris e che il fattore di forma (Y) rimane costante durante l'evoluzione della cricca, determinare il numero di cicli a rottura (N)

In condizioni critiche di propagazione, vale:

$k_{IC} = Y_c \Delta\sigma \sqrt{a_c}$

$Y_c = 1,12\sqrt{\pi}$, perché $\frac{a}{w} = \frac{4}{100} = 0,04 \ll 1$

$\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_{max} = \frac{P_{max}}{A} = \frac{P_{max}}{b \cdot w} = \frac{10000 \text{ N}}{20 \cdot 100 \text{ mm}^2} = 5 \text{ MPa}$

$\Rightarrow a_c = \left(\frac{k_{IC}}{Y_c \Delta\sigma} \right)^2 = \left(\frac{2,2 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}}{1,12\sqrt{\pi} \cdot 5 \text{ MPa}} \right)^2 = 0,0481 \text{ m} = 48,1 \text{ mm}$

Nota: a_c è la lunghezza critica della cricca. Per trovare il numero di cicli a rottura si utilizza la legge di Paris.

Quindi, si può calcolare il numero di cicli a rottura come:

$$N = \frac{a_c^{1-\frac{m}{2}} - a_0^{1-\frac{m}{2}}}{(1-\frac{m}{2}) C Y_c^m \Delta\sigma^m} = \frac{0,0481^{1-\frac{2,3}{2}} - 0,004^{1-\frac{2,3}{2}}}{\left(1-\frac{2,3}{2}\right) 1 \cdot 10^{-4} (1,12\sqrt{\pi})^{4,3} \cdot 5^{2,3}} = 241 \text{ cicli}$$

3

Esercizio 2.2 (pag 26 - Avalle)

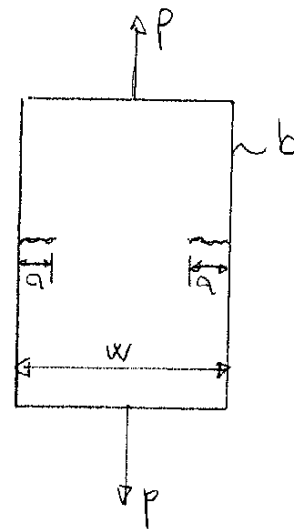
$CS = 1,5$

$b_{min} = 19,5 \text{ mm}$

$W = 100 \text{ mm}$

$P = 550 \text{ KN} = 550 \cdot 10^3 \text{ N}$

$a = 3,5 \text{ mm}$



Acciaio 4340 : $\begin{cases} \sigma_s = 1495 \text{ MPa} \\ K_{Ic} = 50 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}} \end{cases}$

- Verificare lo spessore della piastra b

Lo spessore b_{min} era stato calcolato nell'es 1 a sollecitazione 1, quello che si fa ora è rifare Tale calcolo (come sopra) e arrotondarlo per eccesso ad uno spessore poco maggiore il minimo

Verifica a snervamento

$\sigma_{eff} \leq \sigma_{lim} \Rightarrow \sigma = \frac{\sigma_s}{CS} = \frac{1495}{1,5} = 996,7 \text{ MPa}$

$\sigma = \frac{P}{A_{eff}} = \frac{P}{b(W-2a)} \Rightarrow b = \frac{P}{\sigma(W-2a)} = \frac{550 \cdot 10^3 \text{ N}}{996,7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} (100 - 2 \cdot 3,5) \text{ mm}} = 5,93 \text{ mm}$

Verifica a rottura

$K_I \leq K_{Ic} \Rightarrow K_I = \frac{K_{Ic}}{CS} = \frac{50}{1,5} = 33,3 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$

$K_I = Y \sigma \sqrt{a}$

dove $Y = 1,12 \sqrt{\pi} + 0,7 \left(\frac{a}{W}\right) - 8,48 \left(\frac{a}{W}\right)^2 + 27,36 \left(\frac{a}{W}\right)^3 = 2,0025$

$\sigma = \frac{P}{W \cdot b}$

b_{min}

11

$\hookrightarrow K_I = Y \frac{P}{Wb} \sqrt{a} \Rightarrow b = Y \frac{P}{W K_I} \sqrt{a} = 2,0025 \frac{550 \cdot 10^3 \text{ N}}{100 \text{ mm} \cdot 33,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \sqrt{\text{mm}}} \sqrt{3,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 19,5 \text{ mm} \approx 20 \text{ mm}$

oss: Da ora in poi non devo più usare il coeff di sicurezza perché calcolata la propagazione

Esercizio 2.3

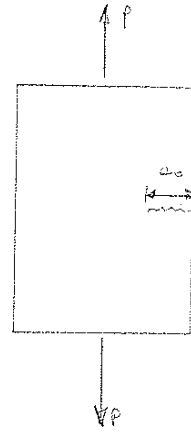
③

$e_0 = 8 \text{ mm}$

$\sigma_{max} = 300 \text{ MPa}$

$k_{IC} = 210 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$

$C = 2,43 \cdot 10^{-12}$; $m = 3,3$



• Determinare il numero di cicli a rottura (N)

$k_{IC} = Y_c \Delta \sigma \sqrt{e_c}$

$Y_c = 1,12 \sqrt{\pi}$, poiché non è known information regarding the length w

$\Delta \sigma = \sigma_{max} = 300 \text{ MPa}$

$\Rightarrow \sqrt{e_c} = \frac{k_{IC}}{Y_c \sigma_{max}} \Rightarrow$

$\Rightarrow e_c = \left(\frac{k_{IC}}{Y_c \sigma_{max}} \right)^2 = \left(\frac{210 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}}{1,12 \sqrt{\pi} \cdot 300 \text{ MPa}} \right)^2 = 0,1243 \text{ m} = 124,3 \text{ mm}$

$N = \frac{e_c^{1-\frac{m}{2}} - e_0^{1-\frac{m}{2}}}{(1-\frac{m}{2}) C Y_c^m \cdot \Delta \sigma^m} = \frac{0,1243^{1-\frac{3,3}{2}} - 0,008^{1-\frac{3,3}{2}}}{(1-\frac{3,3}{2}) \cdot 2,43 \cdot 10^{-12} \cdot (1,12 \sqrt{\pi})^{3,3} \cdot 300^{3,3}} = 8459 \text{ cicli}$

• Supponendo la lunghezza della piastra pari a $w = 1000 \text{ mm}$, ripetere il calcolo precedente.

$k_{IC} = Y_c \Delta \sigma \sqrt{e_c}$

$Y_c = 1,99 - 0,41 \left(\frac{124,3}{1000} \right) + 18,7 \left(\frac{124,3}{1000} \right)^2 - 38,48 \left(\frac{124,3}{1000} \right)^3 + 53,85 \left(\frac{124,3}{1000} \right)^4 = 2,167 \Rightarrow$

$\Delta \sigma = \sigma_{max} = 300 \text{ MPa}$

$\Rightarrow e_c = \left(\frac{k_{IC}}{Y_c \sigma_{max}} \right)^2 = \left(\frac{210 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}}{2,167 \cdot 300 \text{ MPa}} \right)^2 = 0,1043 \text{ m} = 104,3 \text{ mm}$

$N = \frac{0,1043^{1-\frac{3,3}{2}} - 0,008^{1-\frac{3,3}{2}}}{(1-\frac{3,3}{2}) \cdot 2,43 \cdot 10^{-12} \cdot 2,167^{3,3} \cdot 300^{3,3}} = 6180 \text{ cicli}$

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

12ALPNE Costruzione di Macchine

3. Esercizi: piastre

Esercizio 3.1

Ricavata l'equazione risolvete per una piastra circolare caricata da pressione uniforme e incastrata lungo il bordo, si determinino i valori dello spostamento massimo e delle tensioni nel punto centrale per il diaframma di un separatore di fluido costituito da una piastra incastrata sui bordi, in acciaio inossidabile AISI316L ($E = 206 \text{ GPa}$; $\nu = 0.3$).

Dati: raggio $a = 37 \text{ mm}$, spessore 0.06 mm , pressione uniforme pari a 823.7 Pa .

Esercizio 3.2

Studiare la stessa piastra dell'esercizio precedente quando i bordi sono appoggiati invece che incastrati e confrontare i risultati.

Esercizio 3.3

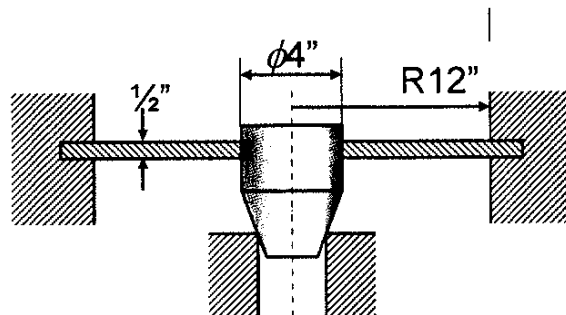
Un carico Q per unità di lunghezza è collocato sul bordo interno ($r = r_i$) di una piastra forata. Disegnare l'andamento della rotazione α , dello spostamento verticale w e dei momenti flettenti m_r e m_t in funzione del raggio r assumendo $r_i = 250 \text{ mm}$, $r_e = 500 \text{ mm}$ e lo spessore t come parametro.

Esercizio 3.4

Una valvola a diaframma per il controllo di un grande serbatoio è mostrata in figura. La valvola è calcolata per aprirsi ad una differenza di pressione di 137.9 kPa .

Se per un errore di montaggio ci fosse un abbassamento relativo della piastra di 0.127 mm , quale sarebbe la pressione differenziale che causa l'apertura della valvola? La piastra ha spessore $\frac{1}{2}$ pollice, il pistoncino 2 pollici, la piastra 12 pollici.

$E = 206.8 \text{ GPa}$.

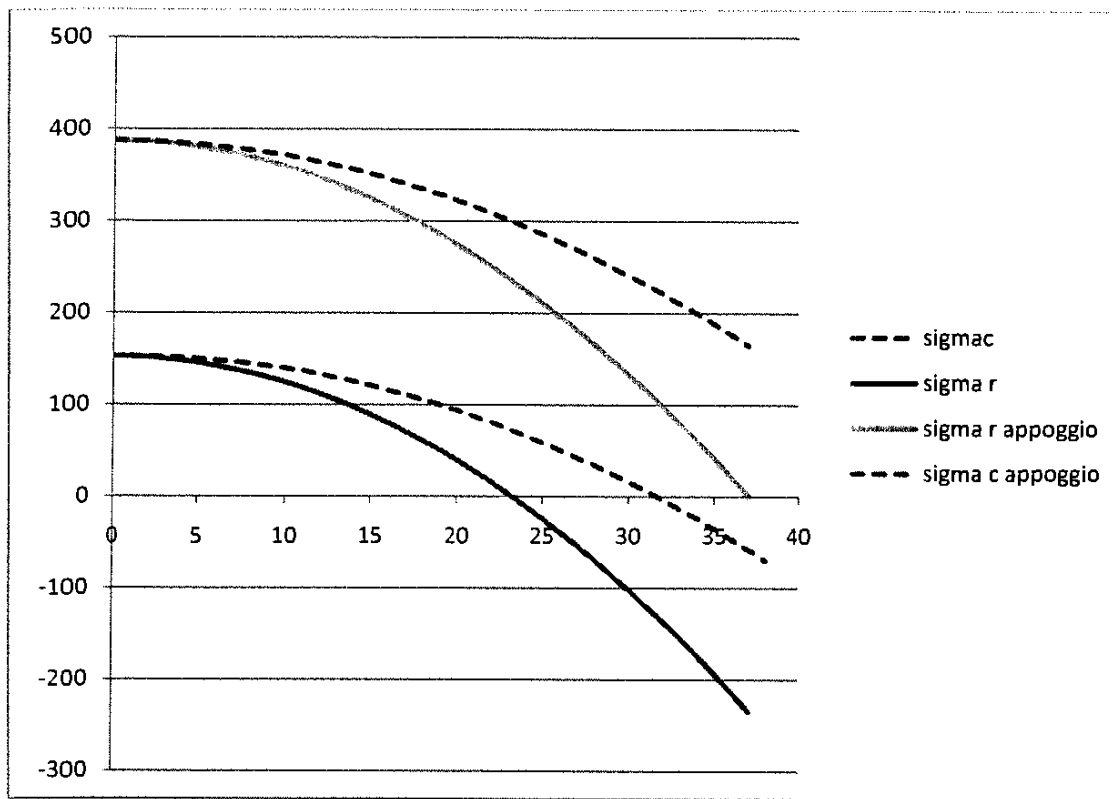


Esercizio 3.5 (facoltativo)

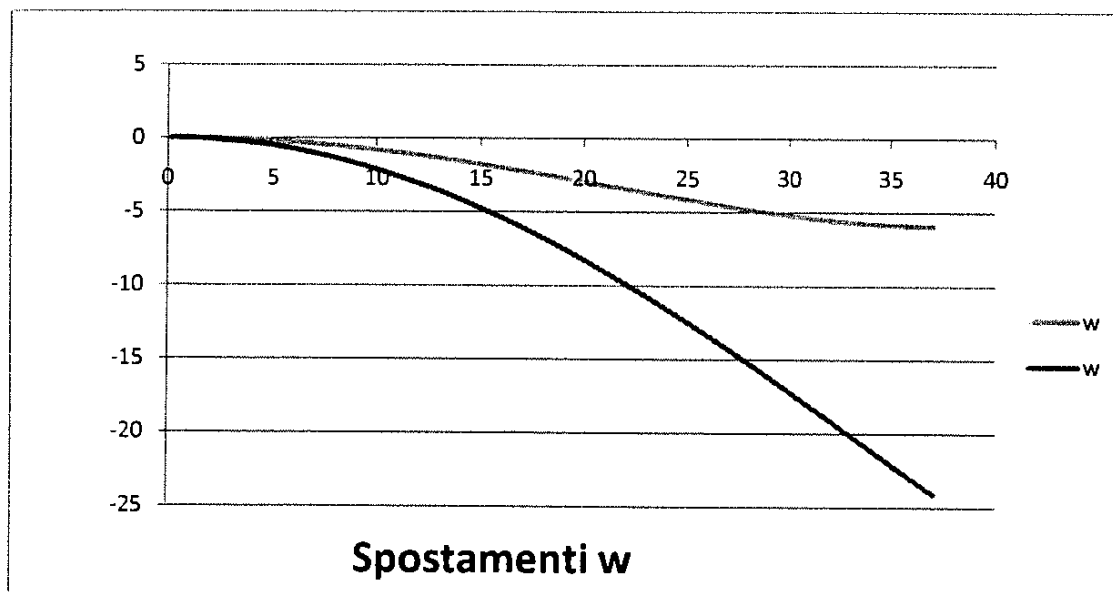
Scrivere un programma o un foglio di calcolo per risolvere numericamente, per mezzo del metodo delle differenze finite, il problema dell'esercizio VII.1.

Utilizzare lo stesso programma di calcolo per calcolare il massimo spostamento quando lo stesso carico complessivo agente sia applicato su di un'area avente raggio $r_0' = 1.2 \text{ mm}$ e $r_0'' = 12 \text{ mm}$.

**Tensioni lungo il raggio di una piastra circolare caricata da un carico distribuito:
casi di bordo incastrato e semplicemente appoggiato**



**Spostamenti lungo il raggio di una piastra circolare caricata da un carico distribuito:
casi di bordo incastrato e semplicemente appoggiato**



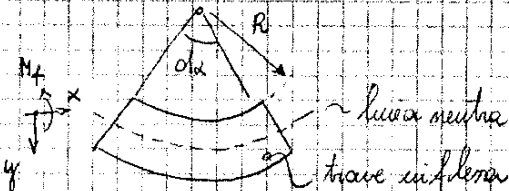
Veronica 25/05/2017

Piastre

per una generica piastra abbiamo il modulo elastico E^* , che deriva da quello di una trave ANALOGA, secondo la relazione:

$$E^* = \frac{E}{1 - \nu^2}$$

Prendiamo un RICHIAMO alle TRAVI:

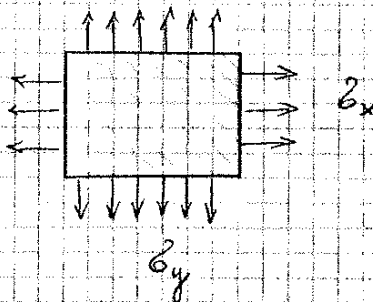


$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{y}{R} \\ \gamma_x &= \frac{E y}{R} \\ M_F &= \frac{E \cdot I_x}{R} \end{aligned}$$

data l'equazione differenziale della linea elastica è:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M_F}{EI_x} ; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = + \frac{1}{R}$$

Prendiamo ora alla nostra PIASTRA RETTANGOLARE:

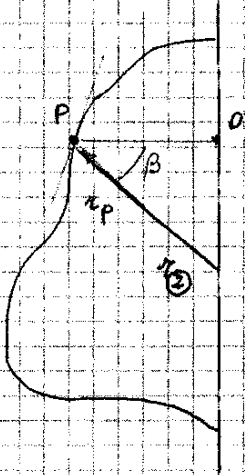


$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \end{aligned}$$



Teorema di Meusnier

Dato un γ solido di rivoluzione (anisimmetrico), si trova la tangente in un punto P , e si hanno infiniti piani passanti per P perpendicolari. Trovando ruotare questo fascio di piani trovo una curvatura MAX. ed una MIN.

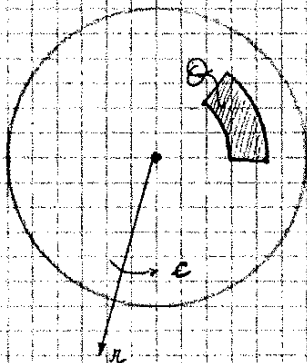


r_p è il raggio di curvatura locale, non si può però calcolare il r_p in un altro piano senza il teorema di Meusnier.

$r_0 = \frac{r_0}{\cos(\beta)}$ è il raggio di curvatura del piano \perp al foglio, che è un piano PRINCIPALE (l'altro è quello del FOLGIO)

Piastina curvata

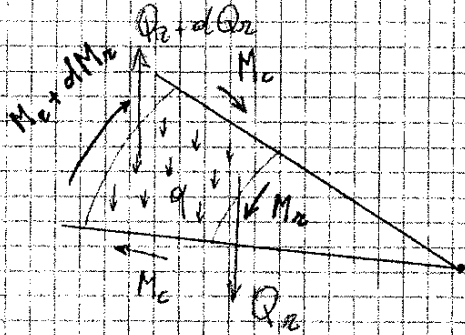
è un solido anisimmetrico caratterizzato da una coordinata radiale (r) e circonferenziale (α); si ha che:



$$E_r = \frac{E}{R_r} \quad ; \quad E_c = \frac{E}{R_c}$$

$$\text{con} \quad \frac{1}{R_r} = \frac{d\alpha}{dr} \quad e \quad \frac{1}{R_c} = \frac{\alpha}{r}$$

negli esercizi la difficoltà non applicare le equazioni al continuo e calcolare lo sforzo di taglio. Le presentiamo uno "specchio" sul tema a:



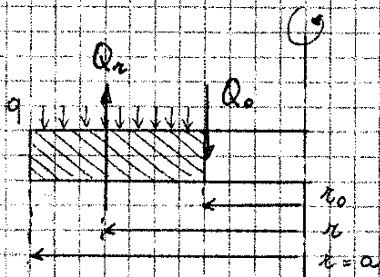
Q_x è lo sforzo di taglio;
 q è il carico distribuito sulla piastra.

per cui ha:

$$\frac{dM_x}{dx} + \frac{M_x - M_c}{x} + Q_x = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dM}{dx} \right) \right] = \frac{Q_x}{D}$$

es: una piccola piastra forata



Q_0 è in $\frac{N}{mm}$, lo voglio la forza...

$$2\pi r_0 Q_0 + \pi q (x^2 - r_0^2) = 2\pi x Q_x$$

$$Q_x = \frac{Q_0 r_0}{x} + q \cdot \frac{(x^2 - r_0^2)}{2x} = \frac{Q_0 r_0}{x} + \frac{q}{2x} (x^2 - r_0^2)$$

Adesso, sfruttando le condizioni di contorno:

$$\begin{cases} r=0 & \Rightarrow & \alpha=0 \\ r=a & \Rightarrow & w=0 \\ r=a & \Rightarrow & \alpha=0 \end{cases}$$

Si vuole a ricevere le costanti di integrazione (C_1, C_2, C_3) e quindi determinare l'equazione che descrive gli spostamenti.

• Sfruttando $r=0 \Rightarrow \alpha=0$ e sostituendo in (a), si ottiene C_2 .

$$\frac{\partial w}{\partial r} = -\alpha = 0 \Rightarrow \frac{p r^3}{16D} + C_1 \frac{r}{2} + C_2 \frac{1}{0} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

NB: C_2 deve essere pari a zero perché, se fosse $C_2 \neq 0$ per $r=0$, si avrebbe $\alpha \rightarrow \infty$

• Sfruttando $r=a \Rightarrow \alpha=0$ e sostituendo in (a), si ottiene C_1 .

$$\frac{\partial w}{\partial r} = -\alpha = 0 \Rightarrow \frac{p a^3}{16D} + C_1 \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{p a^2}{8D}$$

• Sfruttando $r=a \Rightarrow w=0$ e sostituendo in (b), si ottiene C_3 :

$$w=0 \Rightarrow \frac{p a^4}{64D} - \frac{p a^4}{32D} + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = \frac{p a^4}{64D}$$

Ricavate le tre costanti, si sostituiscono nella (b) e si ricorre:

$$w = \frac{p r^4}{64D} - \frac{p a^2}{8D} \cdot \frac{r^2}{4} + \frac{p a^4}{64D} = \frac{p}{64D} (a^2 - r^2)^2$$

ovvero $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$, si ottiene:

$$w = \frac{p 12(1-\nu^2)}{64 E h^3} (a^2 - r^2)^2$$

Dato che lo spostamento massimo (w_{max}) si ha in mesura, quindi per $r=0$, si ottiene:

$$w = \frac{p 12(1-\nu^2)}{64 E h^3} (a^2 - 0)^2 = \frac{12 p (1-\nu^2) a^4}{64 E h^3} = \frac{12 \cdot 823,7 \cdot 10^{-6} \text{ N/mm}^2 \cdot (3-0,3^2) \cdot 37^4 \text{ mm}^4}{64 \cdot 206 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,06^3 \text{ mm}^3} = 5,92 \text{ mm}$$

Esercizio 3.2

4

Piastre circolari col bordo appoggiato e caricate da pressione uniforme

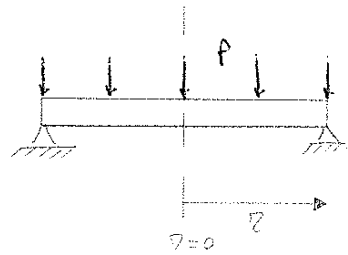
Acciaio AISI 316 L : $E = 206 \text{ GPa}$

$\nu = 0,3$

$a = 37 \text{ mm}$ (2)

$s = 0,06 \text{ mm}$ (4)

$p = 823,7 \text{ Pa}$



Determinare lo spostamento massimo e la torsione nel punto centrale e fare un confronto con i risultati ottenuti per la base incollata (esercizio 3.1)

Oss.

$$\begin{aligned} w_{\text{MAX}}(r=0)_{\text{INCANTRO}} &< w_{\text{MAX}}(r=0)_{\text{APPOGGIO}} \\ M_{r,c}(r=0)_{\text{INCANTRO}} &< M_{r,c}(r=0)_{\text{APPOGGIO}} \\ \sigma_{r,c}(r=0)_{\text{INCANTRO}} &< \sigma_{r,c}(r=0)_{\text{APPOGGIO}} \end{aligned}$$

Partendo dall'equazione di equilibrio e integrando necessariamente, si ricorre la soluzione.

$$w = \frac{p r^4}{64 D} + C_1 \frac{r^2}{4} + C_2 \ln(r) + C_3$$

che è uguale a quella dell'esercizio precedente (non la si ricicla!!) perché la piastra è sempre piena e il carico p è distribuito; ciò che cambia sono le condizioni al contorno e, quindi, anche le costanti C_1, C_2, C_3 .

Si impongono le nuove condizioni al contorno.

$$\begin{cases} r=0 & \Rightarrow & \alpha = 0 \\ r=a & \Rightarrow & w = 0 \\ r=a & \Rightarrow & M_r = 0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial r} + \nu \frac{w}{r} = 0 \end{cases}$$

sostituendo tali condizioni e ottenendo nell'equazione di equilibrio, si determinano le costanti di integrazione C_1, C_2 e C_3 e si ottiene la relazione di interesse (l'andamento degli spostamenti).

④

sostituito in w , si ottiene:

$$w = \frac{P \cdot l^2 (1-\nu^2) a^4}{64 E h^3} \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} \right) = \frac{823,7 \cdot 10^{-6} \text{ N/mm}^2 \cdot (1-0,3^2) \cdot 37^4 \text{ mm}^4}{64 \cdot 206 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,06^3 \text{ mm}^3} \left(\frac{5+0,3}{1+0,3} \right) = 24,13 \text{ mm}$$

Si nota che $(W_{max})_{INERZIA} \approx h (W_{max})_{APPESO}$.

Si richiama adesso M_2 e M_c in funzione di α :

$$M_2 = D \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \nu \frac{\alpha}{r} \right) \quad ; \quad M_c = D \left(\frac{\alpha}{r} + \nu \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)$$

e questi si vanno a sostituire $\alpha = \frac{\partial w}{\partial x}$ prima derivata e mettendo il C_1 accanto.

Sviluppo i calcoli in funzione:

$$\begin{cases} M_2 = \frac{P}{16} (a^2 - r^2)(3+\nu) \\ M_c = \frac{P}{16} (a^2(3+\nu) - r^2(1+3\nu)) \end{cases}$$

Visto di α vogliono le tensioni in mezzo, si impone $r=0$.

$$\begin{cases} M_2 = \frac{P}{16} a^2(3+\nu) \\ M_c = \frac{P}{16} a^2(3+\nu) \end{cases} \Rightarrow M_2 = M_c = \frac{823,7 \cdot 10^{-6} \cdot 37^2 (3+0,3)}{16} = 0,232 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

In conclusione, la sezione:

$$\sigma_2 = \sigma_c = \frac{M_{2,c}}{I^2} = \frac{6 M_{2,c}}{h^2} = \frac{6 \cdot 0,232}{0,06^2} = 386,6 \text{ N/mm}^2$$

Esercizio 5.3

Calcolare le tensioni nel lavabo emisferico mostrato in figura quando riempito con acqua. Diametro 350 mm; spessore 0.8 mm.



Calcolare le tensioni al fondo e al bordo.

Determinare i valori massimi di tensione.

Tracciare l'andamento delle tensioni.

Aree e volumi di alcuni solidi di rivoluzione

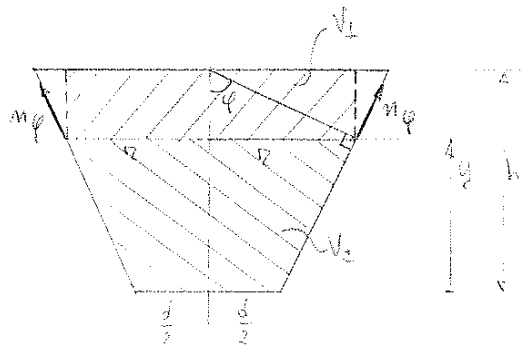
| | |
|---|--|
| <p>Cilindro</p> $S = 2\pi R(R + y)$ $V = \pi R^2 y$ | |
| <p>Cono</p> $S = \pi r \sqrt{R^2 + y^2}$ $V = \frac{\pi}{3} R^2 y$ | |
| <p>Tronco di cono</p> $S = \pi(R + r) \sqrt{y^2 + (R - r)^2}$ $V = \frac{\pi}{3} y(R^2 + r^2 + Rr)$ | |
| <p>Sfera</p> $S = 4\pi r^2$ $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ | |
| <p>Segmento sferico (calotta sferica)</p> $S = 2\pi r y$ $V = \pi y^2 \left(r - \frac{y}{3} \right)$ | |

2° equazione di equilibrio:

$$2\pi r m_{\varphi} \sin(\varphi) = P$$

dove: $P = \gamma (V_1 + V_2)$

$$\begin{cases} \gamma = \rho g \\ V_1 = V_{\text{cil.}} = \pi r^2 (h-y) \\ V_2 = V_{\text{tr. cono}} = \frac{\pi}{3} y \left(r^2 + \frac{d^2}{4} + r \frac{d}{2} \right) \end{cases}$$



oss. pressione di quello che sta sopra e peso di quello che sta sotto, rispetto al livello di y scelto.

Quindi, P risulta essere:

$$P = \gamma \left[\pi r^2 (h-y) + \frac{\pi}{3} y \left(r^2 + \frac{d^2}{4} + r \frac{d}{2} \right) \right] = \gamma \pi \left[r^2 h - r^2 y + \frac{y}{3} r^2 + \frac{d^2 y}{12} + \frac{r y d}{6} \right]$$

Sostituendo P nell'eq. di equilibrio, si ottiene m_{φ} :

$$2\pi r m_{\varphi} \sin(\varphi) = \gamma \pi \left[r^2 h - r^2 y + \frac{y}{3} r^2 + \frac{d^2 y}{12} + \frac{r y d}{6} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{\varphi} = \frac{\gamma \left[r^2 \left(h - y + \frac{y}{3} \right) + \frac{y d}{6} \left(\frac{d}{2} + r \right) \right]}{2 r \sin(\varphi)}$$

Considerando che $r = f(y) \Rightarrow r = \frac{d}{2} + y \tan(\alpha)$, e sostituendo, si ha:

$$m_{\varphi} = \frac{\gamma \left[\left(\frac{d}{2} + y \tan(\alpha) \right)^2 \left(h - \frac{2}{3} y \right) + \frac{y d}{6} \left(\frac{d}{2} + \frac{d}{2} + y \tan(\alpha) \right) \right]}{2 \left(\frac{d}{2} + y \tan(\alpha) \right) \sin(\varphi)}$$

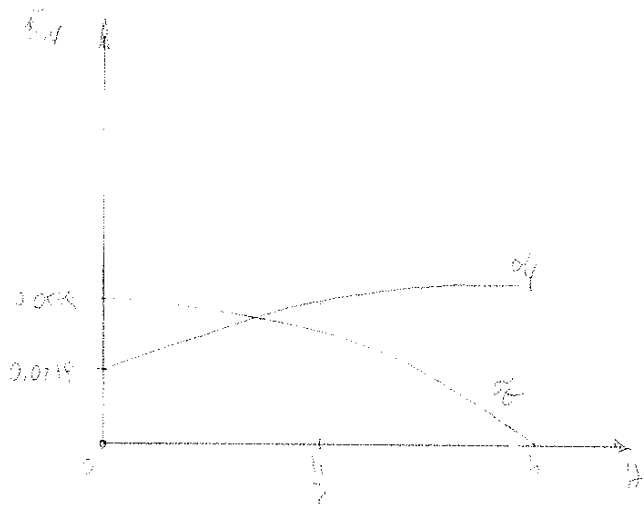
Quindi:

$$\tilde{\sigma}_{\varphi} = \frac{m_{\varphi}}{s}$$

Per trovare gli spostamenti qualsiasi delle tensioni, si devono determinare i valori di queste anche per $y = \frac{h}{2}$:

$$(\sigma_x)_{y = \frac{h}{2}} = \frac{(M_x)_{y = \frac{h}{2}}}{s} = \frac{\gamma \frac{h}{2} \left(\frac{d}{2} + \frac{h}{2} \operatorname{tg}(\alpha) \right)}{s \cdot \cos(\alpha)} = 0,0561 \text{ MPa}$$

$$(\sigma_y)_{y = \frac{h}{2}} = \frac{(M_y)_{y = \frac{h}{2}}}{s} = \frac{\gamma \left[\left(\frac{d}{2} + \frac{h}{2} \operatorname{tg}(\alpha) \right)^2 \left(h - \frac{2}{6} h \right) + \frac{hd}{12} \left(d + \frac{h}{2} \operatorname{tg}(\alpha) \right) \right]}{2 \left(\frac{d}{2} + \frac{h}{2} \operatorname{tg}(\alpha) \right) \cos(\alpha)} = 0,0552 \text{ MPa}$$



Quindi, sostituendo:

$$2 \cancel{\gamma} \sin \varphi m_{\varphi} = \gamma \cancel{\gamma} \cancel{z}^2 \left(H+h - \frac{2}{3} y \right)$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \uparrow \\ z = y \tan \alpha \end{matrix}$$

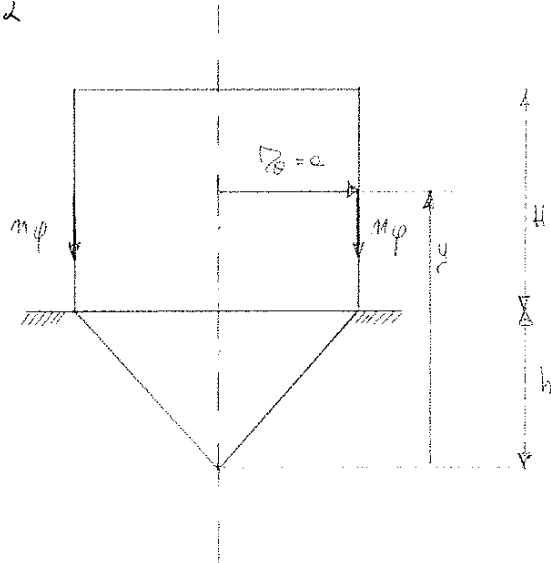
$$m_{\varphi} = \frac{\gamma y^3 \tan^2 \alpha \left(H+h - \frac{2}{3} y \right)}{2 \sin \varphi}$$

$$\check{\sigma}_{\varphi} = \frac{m_{\varphi}}{s}$$

$$\boxed{y > h}$$

- Condizioni

$$\begin{cases} \tau_{\varphi} = \infty & \Rightarrow \frac{1}{\tau_{\varphi}} = 0 \\ \tau_{\theta} = \alpha \end{cases}$$



- I^a equazione di equilibrio

$$\frac{m_{\varphi}}{\tau_{\varphi}} + \frac{M_{\theta}}{\tau_{\theta}} = P \quad \Rightarrow \quad M_{\theta} = P r_{\theta} = P a$$

$$P = \gamma (H+h-y)$$

Quindi:

$$\boxed{M_{\theta} = \alpha \gamma (H+h-y)}$$

$$\boxed{\check{\sigma}_{\theta} = \frac{M_{\theta}}{s}}$$

Per quanto riguarda la parte cilindrica, dato che il peso del volume cilindrico il di sopra del punto di congiunzione cilindro-capo si scarica in supporti, allora:

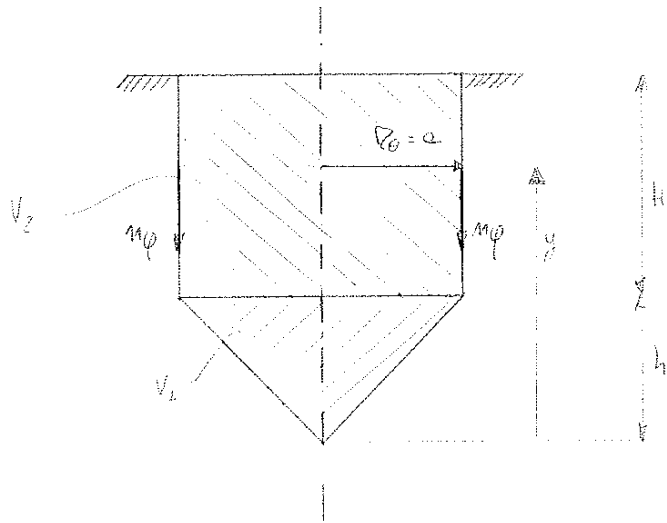
$$\boxed{M_{\varphi} = 0}$$

$$\boxed{\check{\sigma}_{\varphi} = \frac{m_{\varphi}}{s} = 0}$$

$y > h$

• Assunzione

$$\begin{cases} r_{\varphi} = \infty \Rightarrow \frac{1}{r_{\varphi}} = 0 \\ r_{\theta} = a \end{cases}$$



• I° eq. di equilibrio

$$\frac{M_{\varphi}}{r_{\varphi}} + \frac{M_{\theta}}{r_{\theta}} = P \Rightarrow M_{\theta} = P \cdot r_{\theta} = P \cdot a$$

$$P = \gamma (H+h-y)$$

Quindi:

$$M_{\theta} = \gamma a (H+h-y)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{M_{\theta}}{s}$$

• II° eq. di equilibrio

$$2\pi r \sin \varphi \cdot M_{\varphi} = P$$

NB momento esterno rispetto sulle parti alte del cilindro, il peso non potrà incrementare con il cos. φ , perché $\sin \varphi \neq 0$

$$P = \gamma (V_1 + V_2)$$

$$\begin{cases} V_1 = \frac{\pi}{3} a^2 h \\ V_2 = \pi a^2 H \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = \gamma \pi a^2 \left(\frac{1}{3} h + H \right)$$

Quindi, sostituendo:

$$2\pi r \sin \varphi \cdot M_{\varphi} = \gamma \pi a^2 \left(\frac{1}{3} h + H \right)$$

$$\Rightarrow 2 \cancel{\pi} M_{\varphi} = \gamma a^2 \left(\frac{1}{3} h + H \right) \Rightarrow$$

$$\varphi = 90^\circ \Rightarrow \sin \varphi = 1$$

$$\Rightarrow M_{\varphi} = \frac{\gamma a^2 \left(\frac{1}{3} h + H \right)}{2}$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{M_{\varphi}}{s}$$

2) Soli supportato dall'elica

$y \leq h$

$(M_\theta)_{y=0} = 0$

$(M_\theta)_{y=h} = \frac{\gamma \cdot H \cdot h \cdot \tan \alpha}{\cos \alpha} = 183,9 \text{ N/mm}$

$(m_\varphi)_{y=0} = 0$

$(m_\varphi)_{y=h} = \frac{\gamma h \cdot \tan \alpha \cdot (H+h - \frac{2}{3}h)}{\cos \alpha} = 98,1 \text{ N/mm}$

$y > h$

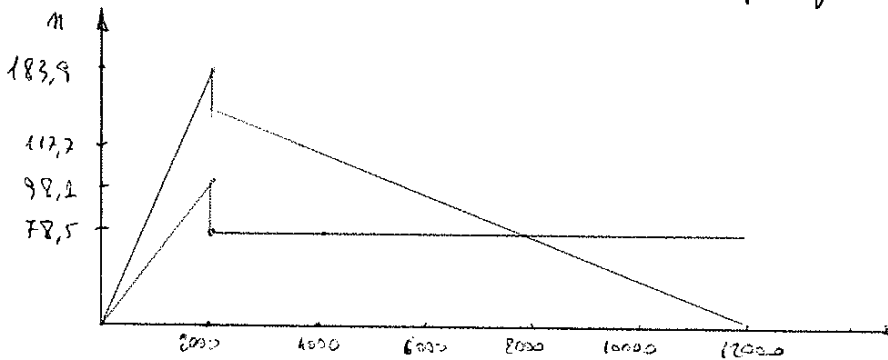
$(M_\theta)_{y=2h} = \gamma(H+h-2h) \cdot a = 117,7 \text{ N/mm}$

$(M_\theta)_{y=(H+h)} = \gamma(H+h - h - H) = 0$

$(m_\varphi)_{y=2h} = \frac{\gamma a (\frac{h}{3} + H)}{2} = 78,5 \text{ N/mm}$

$(m_\varphi)_{y=(H+h)} = \frac{\gamma a (\frac{h}{3} + H)}{2} = 78,5 \text{ N/mm}$ } indipendente da y

NB: il valore di m_φ è costante per $y > h$!!



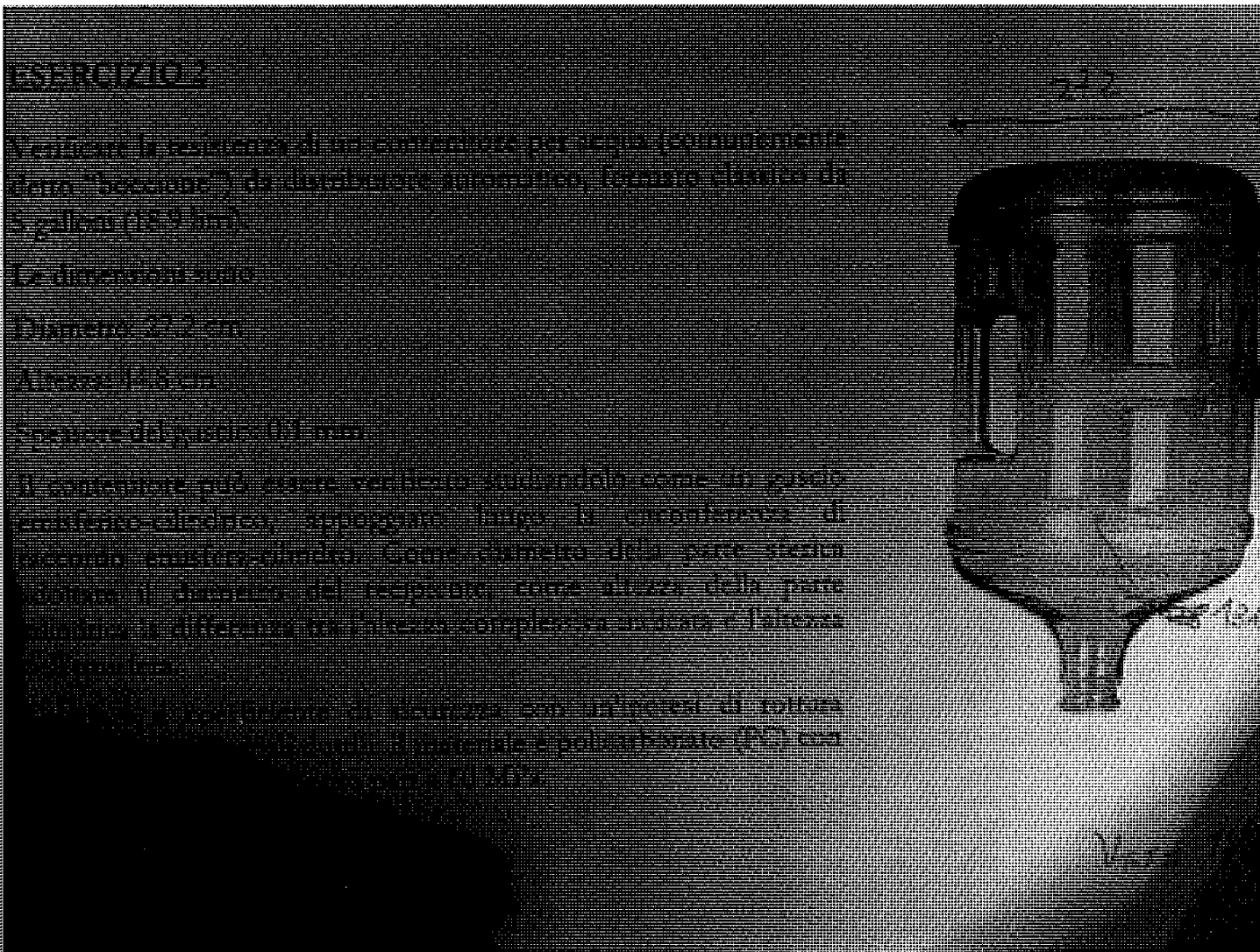
Nota più forte per unità di lunghezza in tutto il solco, si nota che all'altezza h (2000 mm) si hanno gli stessi momenti e punti, come richiede il testo, si li si vanno a differenziare le funzioni momento e, dopo, il coefficiente di torsione.

NB: da ciò deriva bene il calcolo di M_θ e m_φ , al posto di σ_θ e σ_φ , cambia poco essendo σ_θ e σ_φ sul tratto vero il bene, dato che: $\sigma = m/s$, dove $s = \text{spessore}$

$\begin{cases} (M_\theta)_{y=2h} = 183,9 \text{ N/mm} \\ (m_\varphi)_{y=h} = 98,1 \text{ N/mm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_\theta = \frac{183,9}{4} = 45,9 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_\varphi = \frac{98,1}{4} = 24,52 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$

Trovare equivalente con Von Mises:

$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_\theta^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_\theta \sigma_\varphi} = 39,78 \text{ MPa}$



Ipotesi di un ingranse $i_{1,2} = 150$ mm, si può determinare z_2 :

②

$$i_{1,2} = \frac{m_{n,1,2} (z_1 + z_2)}{2} \Rightarrow \boxed{z_2} = \frac{2 \cdot i_{1,2} - m_{n,1,2} \cdot z_1}{m_{n,1,2}} = \boxed{272}$$

Calcolo di $\gamma_{1,2}$:

$$\boxed{\gamma_{1,2}} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{272}{28} = \boxed{9,7}$$

Calcolo i raggi:

$$d = m_{n,1,2} \cdot z \Rightarrow \begin{cases} d_1 = m_{n,1,2} \cdot z_1 = 28 \text{ mm} & \Rightarrow \boxed{r_1 = 14 \text{ mm}} \\ d_2 = m_{n,1,2} \cdot z_2 = 272 \text{ mm} & \Rightarrow \boxed{r_2 = 136 \text{ mm}} \end{cases}$$

Calcolo C_2 :

$$\gamma_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Rightarrow \boxed{C_2} = \frac{\omega_1}{\gamma_{1,2}} = \frac{209,4}{9,7} = \boxed{21,6 \text{ rad/s}}$$

$$P_1 = P_2 \Rightarrow C_1 \omega_1 = C_2 \omega_2 \Rightarrow \boxed{C_2} = \frac{C_1 \omega_1}{\omega_2} = \frac{0,279 \cdot 209,4}{21,6} = \boxed{2,81 \text{ Nm}}$$

La forza F_t esercitata ha le componenti 1 e 2 i:

$$\boxed{F_{t,12}} = \frac{C_1}{r_1} \left(= \frac{C_2}{r_2} \right) = \frac{2,81}{136 \cdot 10^{-3}} = \boxed{20,7 \text{ N}}$$

Conoscendo τ_{TOT} e $\gamma_{1,2}$, calcolo $\tau_{3,4}$:

$$\tau_{TOT} = \gamma_{1,2} \cdot \tau_{3,4} \Rightarrow \boxed{\tau_{3,4}} = \frac{\tau_{TOT}}{\gamma_{1,2}} = \frac{20}{9,7} = \boxed{2,06}$$

Insediando le ruote 2 e 3 collettate sullo stesso albero, $C_2 = C_3$, quindi parlo:

$$\boxed{z_3 = 28} \Rightarrow m_{n,3,4} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot C_3 \cdot \gamma_{3,4}}{2 \cdot \sigma_{adm} \cdot z_3}} = 0,46 \text{ mm} \Rightarrow \boxed{m_{n,3,4} = 1 \text{ mm}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_3 = 2,81 \cdot 10^3 \text{ Nm} \\ \gamma_{3,4} = 2,81 \\ \lambda = 10 \\ \sigma_{adm} = 570 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

Dato di si trova la forza, si deve considerare le sollecitazioni "normali"; e per potere da $C_{u, max}$ ($= C_{u, min}$), calcolo.

$$F_{t, max} = \frac{C_{h, max}}{R_h} = \frac{5 N_{mm}}{29 \cdot 10^{-3} m} = 172,4 N$$

Parametri dell'ingranaggio

• $y_{Fa} \cdot y_{So} = y_{FS} = 4,43$ (per $\alpha = 20^\circ$)

• $y_E \rightarrow \epsilon_\alpha$

$$\epsilon_\alpha = \frac{\sqrt{r_{a3}^2 - r_{b3}^2} + \sqrt{r_{a4}^2 - r_{b4}^2} - (r_3 + r_4) \sin \alpha}{p \cos \alpha} = 1,68$$

$$\left\{ \begin{aligned} r_{a3} &= r_3 + m_{n3,4} = 15 \text{ mm} \\ r_{b3} &= r_3 \cos(\alpha) = 13,2 \text{ mm} \\ r_{a4} &= r_4 + m_{n3,4} = 30 \text{ mm} \\ r_{b4} &= r_4 \cos(\alpha) = 27,3 \text{ mm} \\ p &= \pi \cdot m_{n3,4} = 3,14 \text{ mm} \end{aligned} \right.$$

Essendo $\epsilon_\alpha = 1,68 < 2$, allora vale: $y_E = 0,25 + \frac{0,25}{\epsilon_\alpha} = 0,7$

• $y_p = 1$

Parametri di funzionamento

• $k_A = 1,25$ (sommatori leggeri)

• $k_v = \frac{5,6 + \sqrt{v_p}}{5,6} = 1,09$

$v_p = \omega_2 \cdot r_{a2} = 10,47 \cdot 29 \cdot 10^{-3} = 0,3$

• $k_{F\alpha} \cdot k_{F\beta} = 1$

Parametri di fatica

• $y_{ST} = 2$; $y_{Smin} = 1,5$; $y_{Dnt} = 1$; $y_{Sult} = 1$; $y_{Srelt} = 1$; $y_k = 1$

sulla (1) • $\sigma_F = 72,8 \text{ MPa}$
 sulla (2) • $\sigma_{FP} = 553 \text{ MPa}$
 $\left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma_F < \sigma_{FP} \text{ VERIFICATO !!}$