



Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1415A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Vargiu

MATERIA: Meccanica dei Fluidi + Eserc., Prof.Camporeale

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

MECCANICA DEI FLUIDI

Un **FLUIDO** è definito come un corpo materiale dotato di altissima mobilità delle particelle che lo compongono. La caratteristica più importante sta nel fatto che se **impongo una sollecitazione al fluido, ciò che tende a zero è la VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE**, cioè la velocità con cui il fluido si deforma.

La **MECCANICA** dei fluidi studia il comportamento:

- STATICO \rightarrow le relazioni tra la velocità e la forza;
- DINAMICO \rightarrow solo le forze che agiscono
- CINEMATICO, velocità nel dominio del fluido.

I fluidi si dividono in:

- **LIQUIDI** \rightarrow Si comportano allo stesso modo se non che i liquidi oppongono **alta resistenza ai cambiamenti di volume** - il fluido tende ad assumere la **FORMA** del contenitore che lo ospita.
- **GAS** \rightarrow Il GAS tende invece ad assumere il **VOLUME** del contenitore \rightarrow infatti il gas non ha volume proprio.

L'ipotesi fondamentale che sta alla base della meccanica dei fluidi è **l'IPOTESI DEL CONTINUO**:

ovvero ogni corpo osservato infinitamente è discontinuo ma a scale più grosse si può imporre l'ipotesi che il corpo sia **CONTINUO**.
 \rightarrow questa scala è chiamata **SCALA D'OSSERVAZIONE INFERIORE** ed è la scala minima che consente di introdurre l'ipotesi del continuo ed evitare errori.

~~Questa scala deve essere sufficientemente grande in modo da mantenere un numero sufficientemente elevato di molecole, ma anche sufficientemente piccola per essere rappresentativa di ciò che sto studiando.~~

Esempio: In un cubetto d'aria di $10 \mu\text{m}$ ci sono 10^{10} molecole
 \rightarrow può essere la scala inferiore per i gas

\rightarrow Se consideriamo come **scale inferiori**: $\rightarrow 10 \mu\text{m} \rightarrow$ GAS
 $\rightarrow 1 \mu\text{m} \rightarrow$ LIQUIDI

Per cui considerando una scala maggiore o uguale a questa siamo in ipotesi del continuo.

DENSITÀ (o massa volumica): $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad [\text{kg}/\text{m}^3]$

PESO SPECIFICO: $\gamma = \rho \cdot g \quad [\text{N}/\text{m}^3]$

Esempio: se $dp \sim 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ $\rightarrow \frac{dV}{V} = -10^{-4}$ Per una Δp di 10^5 Pa si ha una variazione di volume di 10^{-3}

Esempio: $\rho_{20} = 2,03 \cdot 10^{-9} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} = 10^3 \text{ Pa}$

\Rightarrow Possiamo quindi dire che l'acqua, e più in generale i liquidi, sono FLUIDI INCOMPRESSIBILI.

Ma quando si può considerare incompressibile un fluido?

\rightarrow Abbiamo considerato la velocità di propagazione del suono:

$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ \rightarrow se la velocità è sufficientemente alta e il dominio del fluido è sufficientemente piccolo, allora le perturbazioni (pressioni \rightarrow a mano) si propagano subito e ovunque.

velocità di propagazione del suono

Considerando un dominio L e una scala dei tempi t , allora $L/t = u$, definita come "velocità caratteristica del problema".

\rightarrow Possiamo allora collegare c a u tramite il numero di Mach

$Ma = \frac{u}{c}$ \rightarrow Si può dire che un fluido si comporta come INCOMPRESSIBILE quando $Ma \ll 1 \rightarrow c \gg u$

Se invece $u \sim c$ devo considerare la comprimibilità del fluido.

Considerando un fluido incompressibile, si ha allora $m = \text{cost}$ e che vuol dire $dm = 0$
 Per un fluido incompressibile si ha allora:

$m = \rho \cdot V$

$dm = \rho dV + V d\rho = 0 \Rightarrow \frac{dV}{V} = - \frac{d\rho}{\rho}$

$NB: \frac{P_{\text{atm}}}{\rho} = \frac{848 T}{\rho}$

Ricordando che $\frac{dV}{V} = - \frac{1}{E} dp$ allora si ha:

$\Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\rho}{E}$ \rightarrow Relazione tra ρ e p
 per FLUIDO INCOMPRESSIBILE

NB: Per GAS - equazione di stato:
 $\frac{P}{\rho} = RT \Rightarrow \frac{848 \cdot T}{\rho} = \frac{P}{\rho}$
 $E = m p$ $n=1$ - isotermica
 $n=1,6$ - adiabatica

VISCOSITÀ:

Quando sottopongo un fluido a pressione esterna, o a movimento, all'interno si creano spazi in direzione tangenziale e normale che si oppongono a queste deformazioni esterne e al movimento. Queste componenti tangenziali dipendono sia dalla viscosità con cui interviene la deformazione, sia da particolari proprietà finche del fluido in moto.

Per esempio per il mercurio (Hg): $\mu = \frac{0,45}{T}$ dove T è espressa in K.

Nota: $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ [m²/s] è definito **VISCOSITÀ CINEMATICA**

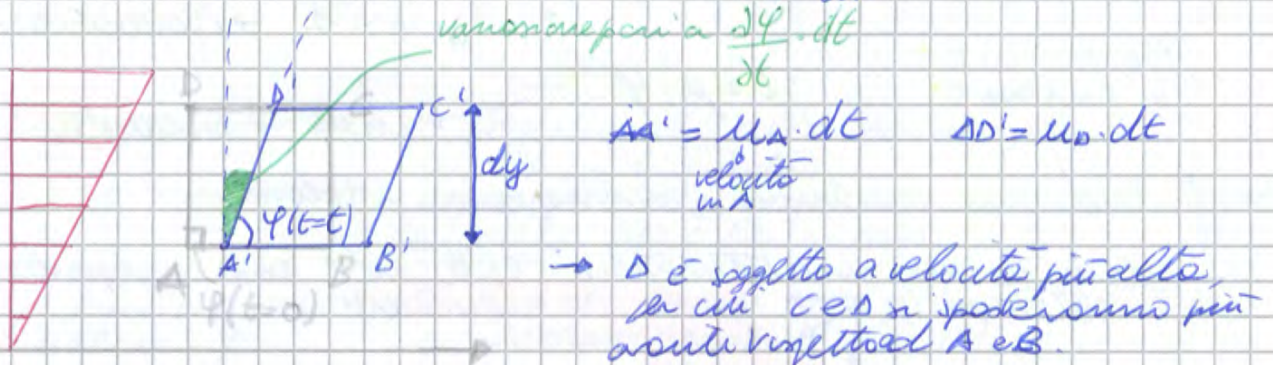
Acqua $\sim 10^{-3}$ [N·s/m²] \rightarrow $\nu_{acqua} = \frac{\mu_{acqua}}{\rho_{acqua} \rightarrow 1000 \text{ kg/m}^3} \sim 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

aria $\sim 10^{-5}$ [N·s/m²] \rightarrow $\nu_{aria} = \frac{\mu_{aria}}{\rho_{aria} \rightarrow 1 \text{ kg/m}^3} \sim 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

⇒ **no**: è la viscosità cinematica che va ad influenzare il comportamento meccanico dei fluidi \rightarrow infatti, quello ν l'acqua risulta più viscoso dell'aria (vero) mentre se guardo μ l'acqua risulterebbe meno viscoso.

113: la legge di Newton caratterizza solo i fluidi newtoniani, cioè quelli la cui viscosità, almeno per una determinata temperatura, è una costante caratteristica del fluido, indipendente dal movimento e da in particolare dalla velocità di deformazione.

\rightarrow la REOLOGIA studia la parte dei fluidi non newtoniani (considero quindi la velocità di deformazione \rightarrow posso vederla anche come velocità con cui cambia l'angolo φ : $\rightarrow \frac{d\varphi}{dt}$)



Calcolo la differenza di angolo tra inizio e fine:

$\varphi(0) - \varphi(t) = \varphi_0 - (\varphi_0 + \frac{d\varphi}{dt} dt) = - \frac{d\varphi}{dt} dt$

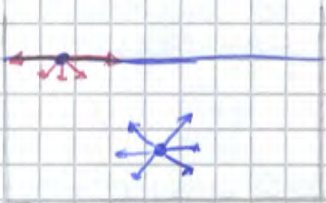
$-\frac{d\varphi}{dt} dt = \frac{\Delta D' - AA'}{dy} = \frac{u_B dt - u_A dt}{dy}$

$u_A = u_A + \frac{\partial u}{\partial y} dy \rightarrow = \frac{u_B dt - u_A dt}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} dt \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{d\varphi}{dt} dt = \frac{\partial u}{\partial y} dt \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{d\varphi}{dt} = -\dot{\gamma}} \rightarrow$ **LEGGE DI NEWTON**

TENSIONE SUPERFICIALE:

Quando c'è un'interfaccia di separazione tra due fluidi non miscelabili tra loro, o tra un fluido e un solido, all'interfaccia si creano delle tensioni, cioè dei legami lungo la direzione della superficie.



Se all'interno del liquido le forze che agiscono sulle molecole sono isotrope, mentre all'interfaccia è diverso perché verso l'aria non ho legami.

Quindi i legami si ridistribuiscono e lungo la superficie si creano dei legami più forti in modo che la superficie rimanga "tesa".

→ Generando quindi una taglio sulla superficie libera la tensione superficiale sarà pari alla forza che tende a riunire i due lembi di liquido diviso per la lunghezza del taglio.



tensione superficiale $\left[\frac{N}{m} \right]$

$$S = \frac{F}{l}$$

$$S_{H_2O} = 0,073 \text{ N/m}$$

$$S_{mercurio} = 0,55 \text{ N/m}$$

→ Per questo motivo che in assenza di gravità una goccia d'acqua ha forma sferica. Perché la sfera minimizza la superficie a parità di volume.

SFORZI NEI SISTEMI CONTINUI

Esistono due tipi di forze che agiscono sul fluido:

- forze di MASSA → sono proporzionali alle masse fluide (es. forza di gravità)
- forze di SUPERFICIE → agiscono sulle superfici indipendentemente da quella che è la massa

Vuole a separare una superficie interna del fluido, quindi posso vederlo formato da due parti, una di destra e una di sx.



→ Considero un elemento infinitesimo sulla superficie di area $d\Omega$ con normale \vec{n} entrante nella superficie. (con \vec{n} risulta positivo) e $d\vec{F}$ è la forza che agisce allora:

$$\vec{\phi} = \lim_{d\Omega \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{d\Omega} \quad \left[\frac{N}{m^2} \right] \rightarrow \text{SFORZO UNITARIO}$$

$$\Rightarrow d\vec{F} = \vec{\phi} \cdot d\Omega \quad \Rightarrow \vec{\pi} = \int_{\Omega} \vec{\phi} \, d\Omega$$

SPINTA che agisce sulla superficie

oss: lo sforzo unitario è proporzionale a \vec{n} , cioè a seconda dell'orientamento della superficie, e quindi di \vec{n} , lo sforzo $\vec{\phi}$ cambia → $\vec{\phi} = \vec{\phi}(\vec{n}) = \vec{\phi}_n$

Indicando con doppio indice le proiezioni degli sforzi secondo generiche direzioni, il primo indice designerà la direzione della giacitura lungo cui è esercitato lo sforzo e il secondo la componente della giacitura.

$$\vec{\sigma}_x = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_y = \begin{pmatrix} \sigma_{yx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_z = \begin{pmatrix} \sigma_{zx} \\ \sigma_{zy} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_n = \begin{pmatrix} \sigma_{nx} \\ \sigma_{ny} \\ \sigma_{nz} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}}_{\Phi} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \hat{m}_x \\ \cos \hat{m}_y \\ \cos \hat{m}_z \end{pmatrix}}_{\vec{m}}$$

$$\rightarrow \sigma_{nx} = \sigma_{xx} \cos \hat{m}_x + \sigma_{yx} \cos \hat{m}_y + \sigma_{zx} \cos \hat{m}_z$$

$$\sigma_{ny} = \dots$$

$$\sigma_{nz} = \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\sigma}_n = \Phi \cdot \vec{m}}$$

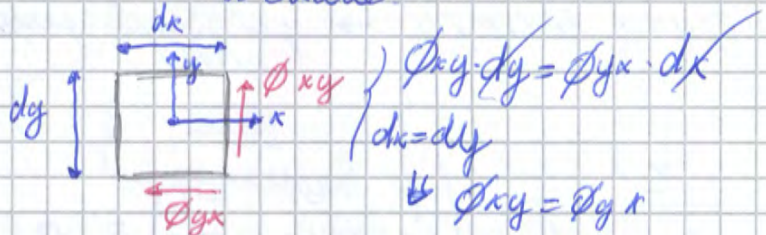
→ Dove la matrice Φ è chiamata **TENSORE DEGLI SFORZI**

Proprietà di Φ :

1) $\Phi_{ij} = \Phi_{ji} \rightarrow$ è SIMMETRICA

→ Deriva dal principio di conservazione del momento angolare. Facendo l'equilibrio delle rotazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{zx} \\ \sigma_{yz} &= \sigma_{zy} \end{aligned}$$



→ Le sei componenti rimaste si possono dividere in 2 categorie:

- 3 componenti normali: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$

- 3 componenti tangenziali: $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_z, \tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_x$

$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_y$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

STATICA DEI FLUIDI

Caratteristica fondamentale della statica: $\vec{u} = 0$ → la velocità è nulla

Equazione globale della statica

Considero un volume V racchiuso da una superficie di contorno Ω

su di esso agiscono forze di massa e forze di superficie:



Forze di massa:

$$\vec{F}_{\text{massa}} = \int_V \rho \vec{F} dV = \vec{p} = \rho \cdot V \quad \left[\frac{N}{kg} = \frac{m}{s^2} \right]$$

Forze di superficie o forze di contorno:

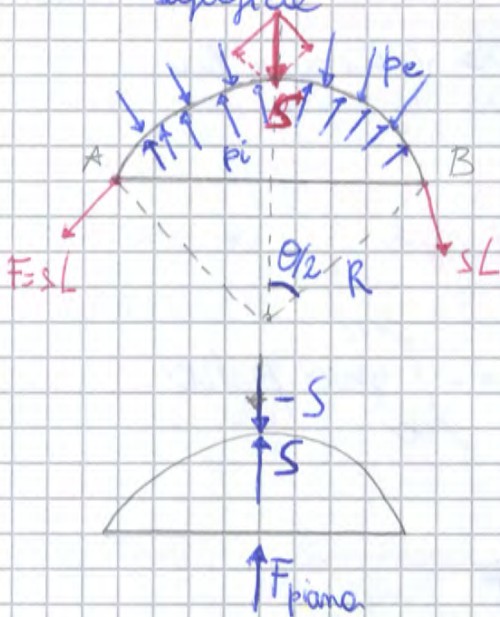
$$\vec{F}_c = \int_{\Omega} \vec{\sigma}_n \cdot d\Omega = \int_{\Omega} p \cdot \vec{n} \cdot d\Omega$$

Idrostatica → $\vec{\sigma}_n = p \cdot \vec{n}$

→ $\vec{p} + \vec{F}_c = 0$ → EQUAZIONE GLOBALE DELLA STATICA

Esempio: Considero il contorno di un cilindro di raggio r , sotteso da un angolo al centro θ e con generatrici di lunghezza L

su due bordi laterali agisce la tensione superficiale s e quindi la forza $F = s \cdot L$, contenuta nel piano tangente. p_i e p_e sono le pressioni agenti sulle due facce della superficie



$$AB = 2R \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\vec{S} = 2sL \sin \frac{\theta}{2}$$

← tensione superficiale

Per l'equazione globale devo considerare la forza che agisce dall'esterno sul liquido

$$F_{\text{piano}} - S + F_{\text{peso}} = 0$$

Considero la forza peso trascurabile

$$F_{\text{piano}} = S$$

Essendo la forza di massa, una forza per unità di massa, si può scrivere:

$$\vec{F} = -g \cdot \text{grad } z \quad \text{dove } \text{grad } z = (0; 0; 1)$$

$$\Rightarrow -\rho g \text{ grad } z = \text{grad } p$$

$$-\gamma \text{ grad } z = \text{grad } p$$

$$\text{grad} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right)$$

Se considero un fluido incomprimibile \Rightarrow quindi con densità costante cioè che non dipende dalla posizione, per cui posso portare dentro il gradiente

$$\Rightarrow z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost}$$

EQUAZIONE FONDAMENTALE DELLA STATICA (o LEGGE DI STEVINO)

- z è definito come **QUOTA GEODETICA**

- P_y è definita come **ALTEZZA PIEZOMETRICA**

- $h = z + P_y$ è chiamato **CARICO PIEZOMETRICO** o **QUOTA PIEZOMETRICA**

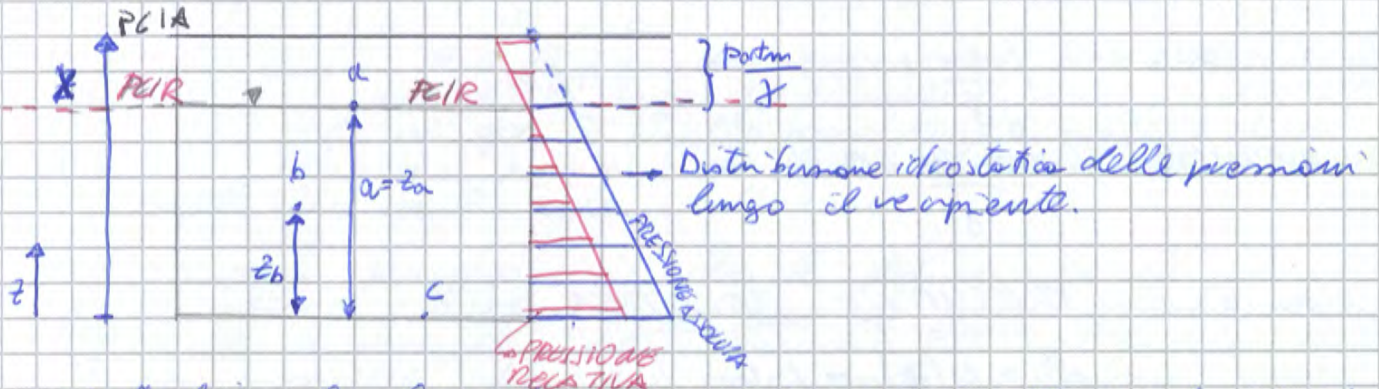
(carico, perché può essere anche definito come energia per unità di peso, mentre quota perché dimensionalmente è un'altezza).

L'equazione fondamentale a dice quindi che a tutti i punti di un fluido pesante incomprimibile in quiete completa lo stesso **carico piezometrico**.

\Rightarrow I punti che situavano alla stessa quota avranno quindi lo stesso **pressione**.

\Rightarrow Quindi, in idrostatica, i piani orizzontali sono **SUPERFICIE ISOBARE**.

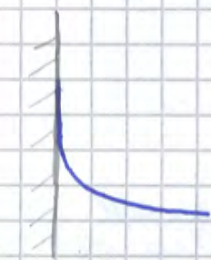
Considero un recipiente chiuso contenente un liquido di peso specif. cost.



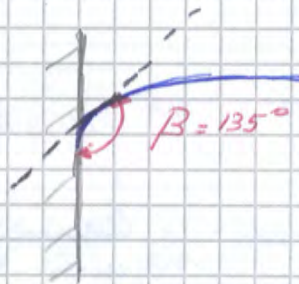
\Rightarrow Applico la legge fondamentale ai punti a e b, che devono avere lo stesso carico piezometrico h :

$$h_A = h_B$$

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} = z_B + \frac{p_B}{\gamma}$$



ACQUA



MERCURIO

→ Nel caso dell'ACQUA
si dice che il liquido
BAGNA il solido.

Nel caso del MERCURIO
che il liquido non
BAGNA il solido.

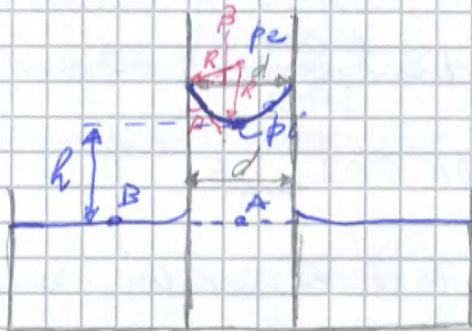
Quindi il liquido bagna o non bagna la parete, a seconda che $\beta \leq 90^\circ$.

Si verifica il 1° caso ($\beta < 90^\circ$) se prevalgono le forze di ADESIONE tra liquido e solido.

Si verifica il 2° caso ($\beta > 90^\circ$) se prevalgono le forze di COESIONE tra liquido e solido.

Considerando un sistema ARIA - ACQUA - VETRO

Inserisco un tubicino in un serbatoio contenente acqua.



→ Attraverso la superficie del menisco si determina un brusco salto di pressione Δp . Per l'equilibrio del sistema il liquido nel tubo deve innalzarsi, oppure abbassarsi, a seconda che la pressione nel liquido, in corrispondenza del menisco, sia inferiore o superiore alle pressioni nel gas.

$$\text{Si ha: } d = 2R \cos \beta \rightarrow R = \frac{d}{2 \cos \beta}$$

Per la variazione di pressione all'interfaccia:

$$-\Delta p = p_i - p_e = p_i - p_{atm}$$

Considerando il PCIR: $p_A = p_B = p_{atm} = 0$ pressioni relative nulle

$$\Rightarrow -\Delta p = p_i - 0$$

$$\bullet p_A = 0 = p_i + \gamma \cdot h \rightarrow p_i = -\gamma \cdot h$$

Per la formula di Laplace $[\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)]$

$$\Rightarrow -\Delta p = -\gamma h \rightarrow \gamma h = \Delta p$$

$$\gamma h = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad R_1 = R_2$$



$$\frac{1}{6} R^2 \gamma = S$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{6 \cdot \frac{S}{\gamma}} \cong 2,4 \cdot \sqrt{\frac{S}{\gamma}}$$

Il termine $\sqrt{\frac{S}{\gamma}}$ è definito LUNGHEZZA CAPILLARE (l_c)

Per l'acqua $l_c \cong 2,6 \text{ m} \rightarrow R \cong 6 \text{ mm}$

La lunghezza capillare è una caratteristica del fluido tale per cui le forze gravitazionali equilibrano le forze di superficie legate alla tensione superficiale

MISURE DI PRESSIONE

Possano essere eseguite tramite:

- 1) PIEZOMETRO
- 2) MANOMETRO SEMPLICE
- 3) MANOMETRO DIFFERENZIALE
- 4) MANOMETRO METALLICO

1) Il PIEZOMETRO è il dispositivo più semplice e pratico, costituito da un tubo, verticale o inclinato, aperto in sommità e collegato all'altra estremità con il recipiente contenente il liquido, il quale è immerso fino alla quota del PCIR.

Se pressioni del liquido sono elevate e quindi il PCIR è molto alto il dispositivo risulta di difficile attuazione pratica da cui si ricorre ad un manometro semplice.

2) Il MANOMETRO SEMPLICE è costituito da un tubo ad U di cui una estremità è collegata con il recipiente contenente il fluido e l'altra è in comunicazione con l'atmosfera. Nella parte inferiore del tubo ad U si dispone un liquido con peso specifico γ_m superiore a γ del fluido nel recipiente (in uso spesso il mercurio $\gamma_m = 133000 \text{ N/m}^3$).

Per la pressione del fluido nel recipiente il liquido manometrico si porta a quote diverse nei due rami e si può misurare il dislivello Δh tra i 2 fluidi.

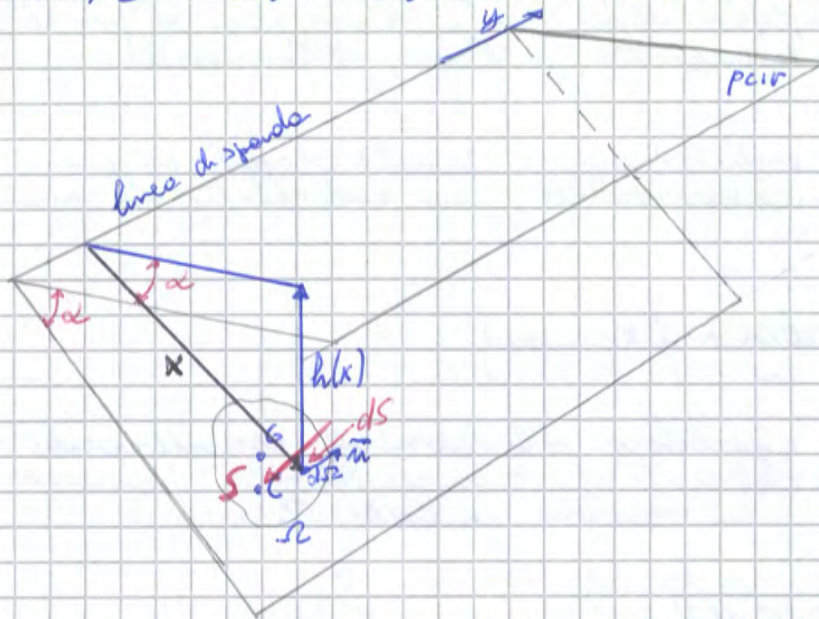


$$p_A = 0$$

$$p_{B'} = p_A + \gamma_m \cdot h$$

$$p_B = \gamma \cdot h$$

SPINTE SU SUPERFICIE PIANE



NB: La LINEA DI SPINTA è la linea che passa per l'intersezione del piano di centri idrostatici (pcir) con il piano della figura.

Considero, una superficie qualsiasi immersa in un piano inclinato di α sull'orizzontale. Questa superficie è a contatto con un liquido di peso specifico γ .

→ Le spinte elementari dS esercitate dal liquido su ogni elemento infinitesimo della superficie piana valgono:

$$d\vec{S} = p \cdot \vec{n} \, d\Omega \quad \rightarrow \quad \vec{S} = \int_{\Omega} p \vec{n} \, d\Omega = \vec{n} \int_{\Omega} p \, d\Omega$$

h è l'effondimento di $d\Omega$ rispetto a $pcir$
 x è la distanza dell'one g di un generico punto

Posso scrivere:

$$\begin{aligned} S &= \vec{n} \cdot \int_{\Omega} p \, d\Omega = \vec{n} \cdot \int_{\Omega} \gamma \cdot h \, d\Omega = \vec{n} \cdot \gamma \int_{\Omega} x \cdot \sin \alpha \, d\Omega = \\ &= \vec{n} \cdot \gamma \cdot \sin \alpha \int_{\Omega} x \, d\Omega \end{aligned}$$

Il termine $\int_{\Omega} x \, d\Omega$ è definito MOMENTO STATICO di Ω e si scrive come $M_s = \int_{\Omega} x \, d\Omega = x_G \cdot \Omega$ dove x_G è la coordinata del baricentro.

Allora:

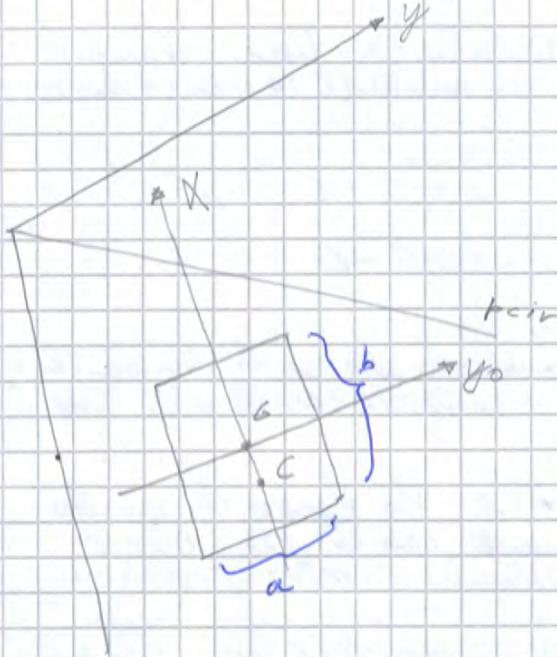
$$\begin{aligned} S &= \vec{n} \cdot \gamma \cdot \sin \alpha \int_{\Omega} x \, d\Omega = \vec{n} \cdot \gamma \cdot \underbrace{x_G}_{h_G} \cdot \sin \alpha \cdot \Omega = \\ &= \vec{n} \cdot \gamma \cdot h_G \cdot \Omega = \vec{n} \cdot p_G \cdot \Omega \end{aligned}$$

(1)
 $h_G \rightarrow$ effondimento del baricentro

$$\Rightarrow \vec{S} = \vec{n} \cdot p_G \cdot \Omega \quad \rightarrow \text{SPINTA SU SUPERFICIE PIANA}$$

Quando una superficie è simmetrica $I_{xy} = 0$

Considero allora una superficie rettangolare con una x passante per G :



- Genero un nuovo asse y_0 passante per G e parallelo a y , così ottengo $I_{xy} = 0$
- Così quindi nell'asse x ma detto b

Quanto vale \bar{CG} ?

Sfrutto la proprietà di traslazione del momento d'inerzia:
(Principio di Huygens-Steiner) da asse y a y_0 :

$$I_y = I_{y_0} + x_G^2 \cdot a$$

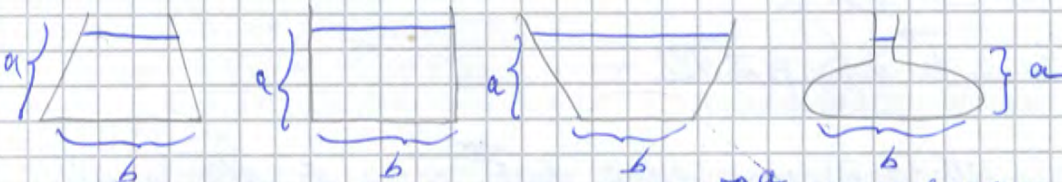
$$\Rightarrow x_G = \frac{I_{xy}}{M} = \frac{I_{xy}}{x_G \cdot a} = \frac{I_{y_0}}{x_G \cdot a} + x_G$$

$$\Rightarrow \bar{CG} = x_G - x_G = \frac{I_{y_0}}{x_G \cdot a} = \frac{I_{y_0}}{M}$$

dove I_{y_0} è il momento d'inerzia CENTRALE

→ Per il rettangolo $I_{y_0} = \frac{a \cdot b^3}{12}$

PARADOSSO IDROSTATICO

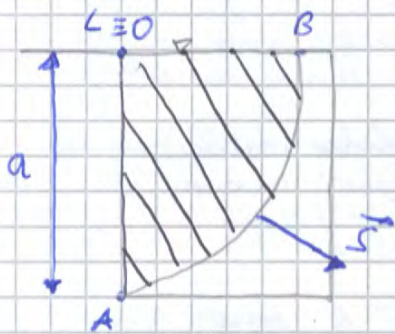


Spinta sul fondo: $|S| = \gamma \cdot h \cdot a$

La spinta ^{sul fondo} sarà la stessa per tutti i recipienti di base b con liquido di densità γ .

⇒ Il paradosso sta nel fatto che la pressione esercitata dal fluido sul fondo di un recipiente è indipendente dalla quantità di fluido che lo sovrasta, e quindi del peso dello stesso, ma dipende esclusivamente dall'fondamento della superficie del fondo del pelo libero.

Considero una superficie curva con profondità unitaria:



Vado a considerare il volume di controllo formato da $\triangle ABO$, in modo che sia fatta dalla superficie curva AB più le superfici piane AO e OB

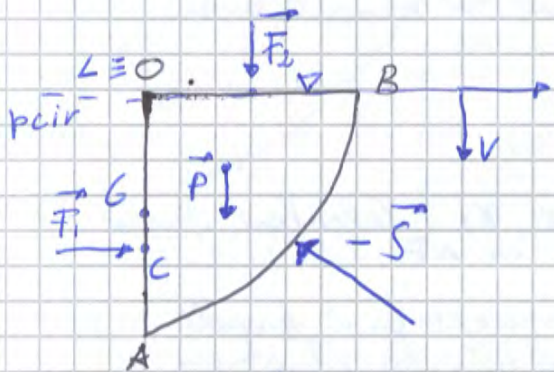
Con $-\vec{S}$ considero la spinta che dalla parete piana va al fluido

\vec{P} è la forza peso applicata nel centro di massa del volume (\neq Baricentro G)

\vec{F}_1 è la forza sulla superficie piana OA applicata nel centro di spinta C

\vec{F}_2 è la forza sulla superficie piana OB che sarà applicata nel punto medio di OB in quanto è una superficie orizzontale per cui la pressione è uniformemente distribuita.

$$\vec{F}_c = -\vec{S} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$



NB: $\vec{F}_2 = 0$ perché $\vec{F}_2 = p \cdot A$ ma proiettiva in $OB = 0$

$$|\vec{F}_1| = p_G \cdot A = \gamma \cdot \frac{a}{2} \cdot a \cdot 1 = \frac{\gamma a^2}{2}$$

$\overline{CG} = \frac{a}{6}$ \rightarrow valido perché il pcir coincide con la linea di spinta.

Per dimostrare:

$$\overline{CG} = \frac{\int y_0}{M} = \frac{a^3/12}{\gamma \cdot \frac{a}{2} \cdot a \cdot 1} = \frac{a^3/12}{\frac{\gamma a^2}{2}} = \frac{a^3/12}{\frac{\gamma a^2}{2}} = \frac{a}{6}$$

$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{F}_c = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{P} - \vec{S} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \vec{P} + \vec{F}_1 \quad \rightarrow \quad \vec{S} \text{ sarà data da una componente orizzontale e una verticale}$$

$S_0 = |\vec{F}_1|$ perché \vec{P} non ha componente orizzontale

$S_v = |\vec{P}|$ perché \vec{F}_1 non ha componente verticale

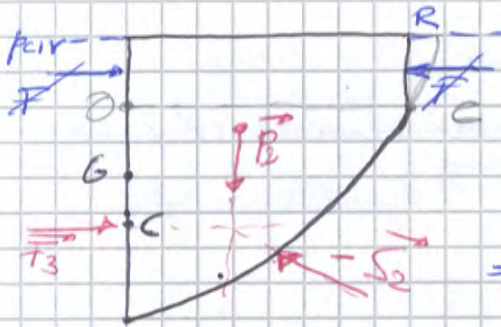
$$\Rightarrow |\vec{S}| = \sqrt{S_0^2 + S_v^2} = \sqrt{\left(\frac{\gamma a^2}{2}\right)^2 + (\gamma a)^2} = \sqrt{\frac{\gamma^2 a^4}{4} + \gamma^2 a^2}$$



\vec{F}_4 sarà applicata nel punto medio di OC ma \vec{P} non sarà sulla stessa retta d'azione di \vec{F}_4

→ Allora posso considerare come volume di controllo la somma della parte OAC + OTRC, per un controllo TRA.

Quindi \vec{F}_4 risulterà come il peso (fero peso) dell'volume TORC e di nuovo sull'asse linea per cui $\vec{F} = 0$



In definitiva avrà \vec{F}_3 uguale a prima perché nel tratto O-PC e C-PC agiscono due forze uguali e contrarie ma in bilanciano perché sto considerando il tratto CR (sottile).

\vec{P}_2 sarà il peso globale.

$$\vec{P}_2 + \vec{T}_3 - \vec{S}_2 = 0$$

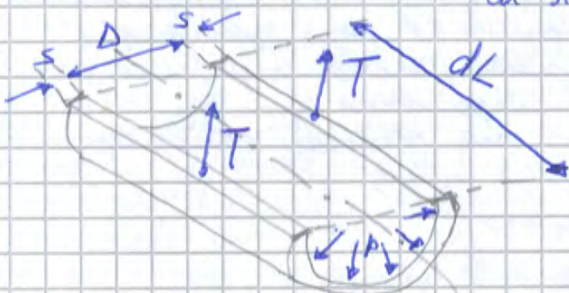
$$\vec{S}_2 = \vec{P}_2 + \vec{T}_3$$

APPLICAZIONI NOTEVOLI DELL'EQUAZIONE GLOBALE DELLA STATICA:

- 1) Legge di Laplace → vedi pagine prima
- 2) Formula di Rosette
- 3) Spinta di Archimede

FORMULA DI TARCIOTTE

2) Considero un tubo di diametro D di spessore s e costituito da un materiale cui corrisponde un coefficiente di sicurezza a trazione σ .



Immaginiamo di sezionarlo con un qualsiasi piano diametrico: i due semicilindri ottenuti si trasmettono due forze T attraverso le superfici longitudinali di area $s \cdot dl$ complementari uguali alla spinta che il liquido con pressione p esercita nel semicilindro.

NB: Si può ammettere che in tutto il fluido la pressione p sia costante e indipendente dalla quota: ciò corrisponde a ritenere il fluido ristretto al campo gravitazionale e quindi a trascurare il peso della massa fluida.

→ Questo si può fare perché sto considerando che l'altera pesometrica $h \gg D$ → Allora Δp è trascurabile

⇒ Un corpo immerso in un liquido riceve una spinta verticale, diretta verso l'alto, di modulo pari al peso di un volume di liquido uguale a quello del corpo immerso; essa pone per il benevento del volume fluido stesso.

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

EQUILIBRIO RELATIVO

Si ha questa situazione quando il fluido è sottoposto, oltre che al campo gravitazionale, anche ad un campo uniforme di forze di inerzia derivanti dal movimento del recipiente che lo contiene, rispetto al quale però esso appare in quiete (quindi quando esso è in un sistema non inerziale)

Considero l'equazione indefinita della statica:

$$\rho \vec{F} = \text{grad } p$$

In un campo gravitazionale si ha: $F = -\text{grad}(gz) = \text{grad}(U)$

$$U = -gz$$

In un sistema non inerziale esiste anche la forza di trascinamento $-A$ (accelerazione centripeta) derivante dal moto di tutto il mezzo fluido e del recipiente rispetto a una terra fissa.

Se $\vec{A}_c = \frac{v^2}{r}$ e il liquido sta ruotando con $v = \omega r$
accelerazione centripeta

allora l'equazione di equilibrio indefinita risulta:

$$\rho (\vec{F} - \vec{A}_c) = \text{grad } p$$

$$\text{Po } \vec{A}_c = \text{grad} \left(\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \right) = \omega^2 r$$

Quindi se: $\vec{F} = \text{grad}(-gz)$

$$\vec{A}_c = \text{grad} \left(\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \right)$$

$\vec{A}_c \rightarrow$ potenziale relativo

$$\Rightarrow \rho \left[\text{grad}(-gz) + \text{grad} \left(\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \right) \right] = \text{grad } p$$

Considerando un fluido incomprimibile, quindi con $\rho = \text{cost}$:

$$\Rightarrow \text{grad} \left(gz + \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \right) = 0$$

Se $\text{grad}(\) = 0$ allora vale $(\) = \text{cost}$ e dividendo per ρ :

$$\Rightarrow z + \frac{p}{\rho} - \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \text{cost}$$

LEGGE DI STEVINO
 PER SISTEMI
 NON INERZIALI

→ Trovata una terza equazione di riferimento di assi x, y, z , sono
 $u = \frac{dx}{dt}$; $v = \frac{dy}{dt}$; $w = \frac{dz}{dt}$

Le componenti del vettore velocità \vec{v} nel punto generico (x, y, z) all'istante.

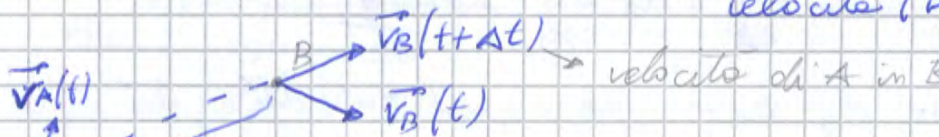
2) Possiamo allora considerare le **TRAIETTORIE**, ovvero le linee lungo dei punti successivamente occupati dalle singole particelle fluide in moto:

$$\begin{cases} dx = u(x, y, z, t) dt \\ dy = v(x, y, z, t) dt \\ dz = w(x, y, z, t) dt \end{cases}$$

→ Questo sistema di tre equazioni differenziali definisce il complesso delle traiettorie. Per definire la posizione di una particella avrà quindi bisogno delle condizioni iniziali:

$$CI = \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases} (t=0)$$

Consideriamo ora una particella fluide elementare che passa dal punto A al punto B, e una particella in B con velocità (\vec{v}_B)



Quanto vale l'accelerazione della particella A? (aggiungo e tolgo $v_B(t)$)

$$A_A = \frac{v_B(t+\Delta t) - v_A(t)}{\Delta t} = \frac{v_B(t+\Delta t) - v_B(t) + v_B(t) - v_A(t)}{\Delta t} =$$

moltiplico e divido per Δs

$$= \frac{v_B(t+\Delta t) - v_B(t)}{\Delta t} + \frac{v_B(t) - v_A(t)}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta s} \Rightarrow$$

⇒ Per Δt e $\Delta s \rightarrow 0$ si ha: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} \cdot \vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial s}$$

REGOLA DI DERIVAZIONE EULERIANA PER L'ACCELERAZIONE

⇒ l'accelerazione è data da due termini:

- il primo, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$, rappresenta il contributo di accelerazione determinato dalla variazione rispetto dalla velocità nel singolo punto di posizione del tempo. È detto **DERIVATA LOCALE** (accelerazione locale) e assume valore non nullo solo quando il moto è vario.

3) **MOTO UNIFORME**, a velocità costante dipende dal tempo e neanche dallo spazio.
 NB: Ho la dipendenza dallo spazio per le diverse traiettorie, ma sulla stessa no:
 $\Rightarrow \frac{d}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{d}{ds} = 0$

4) **MOTO PIANO**, sono i movimenti nei quali il vettore velocità è ovunque parallelo ad un piano P, ed i vettori velocità dei punti situati su una stessa perpendicolare al piano P sono tra loro uguali.
 \rightarrow è normale l'asse z normale al piano P:
 $u = u(x, y, t)$
 $v = v(x, y, t) \quad \Rightarrow$ NB: Ho solo due componenti vive
 $w = 0$

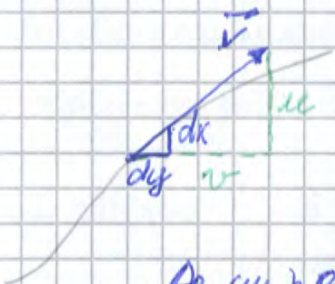
LINEE PARTICOLARI

Traiettorie: si definiscono come il luogo dei punti occupati nel tempo dalle particelle.
 Hanno equazione:

$$\begin{cases} dx = u(x, y, z, t) dt \\ dy = v(x, y, z, t) dt \\ dz = w(x, y, z, t) dt \end{cases}$$

Abbiamo così definito il vettore velocità: $\vec{u} = \vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$

Linee di corrente: viene definite ad un tempo preciso t e la sua proprietà è quella di essere tangente al vettore velocità \vec{u} in ogni suo punto



\rightarrow Per la relazione di similitudine dei triangoli possiamo scrivere:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{u}{v}$$

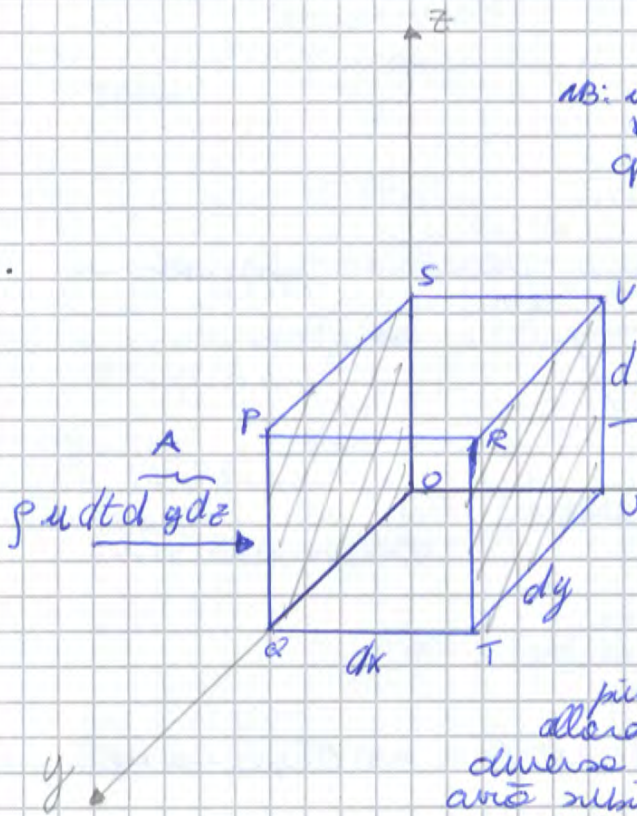
Da cui si deduce: $\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dt}{w(x, y, z, t)}$

dove t è una costante di tempo ben fissata in quanto la linee di corrente può cambiare istante per istante.

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

Esprime il principio di conservazione della massa, principio che comporta un legame fra i caratteri cinematici del processo di moto e la densità del fluido, chiamata EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

Considero un cubetto infinitesimo di lati dx, dy, dz in un riferimento cartesiano:



$\rho u dt dx =$ massa che attraversa la superficie PQRS nell'intervallo infinitesimo dt

NB: u è la componente lungo x del vettore velocità in O . NB: posso approssimare la velocità media alla velocità che ho in O (chiamo "vino")
 \rightarrow è trascurabile la variazione di u .

$$\left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx \right) dt dy dz$$

Se considero invece la massa uscente attraverso la superficie TRUV, che non ha più niente a che fare con O dov'è allora considerare che la velocità è diversa da quella in O , e che quindi avrà subito una variazione, ovvero:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} dx \rightarrow \text{NB: varia sia } u \text{ sia } \rho.$$

\Rightarrow Per il principio di conservazione, la massa uscente - massa entrante deve uguagliare la variazione di massa interna:

Se consideriamo anche le dimensioni x, y e z si ha:

$$\text{massa uscente} - \text{massa entrante} = \int \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} \right] \rho dx dy dz$$

(per effetto della densità)

mentre la variazione subita dal cubo: $-\frac{\partial}{\partial t} \left(\int \rho dx dy dz \right) dt = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$

Quindi - poiché sto considerando che massa u = massa e :

\rightarrow Si ottiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = 0$$

ovvero: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0$

\rightarrow 3° forma dell'equazione di continuità

CORRENTI:

Le correnti sono moti caratterizzati dal fatto che tutte le traiettorie hanno sensibilmente la stessa direzione, ovvero sono parallele.

Si definiscono CORRENTI GRADUALMENTE VARIATE, le correnti che oltre ad essere parallele hanno le traiettorie anche sensibilmente rettilinee.

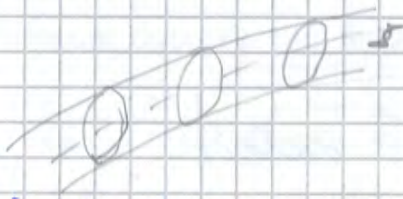
NB: Se il moto è permanente, le correnti coincidono con il tubo di flusso.

⇒ Immaginiamo di tagliare una corrente con una superficie che in ogni suo punto, e in un generico istante t , è un vettore normale al vettore velocità nel punto stesso. L'area A , di questa superficie, denominata SEZIONE TRASVERSALE DELLA CORRENTE, ne costituisce un elemento geometrico caratteristico.

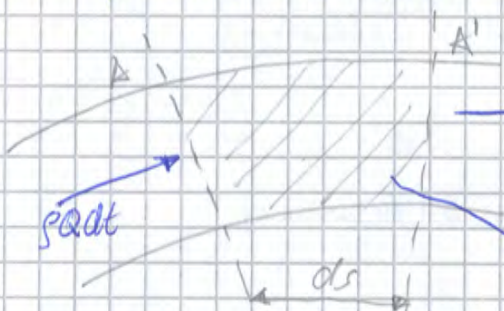
→ Definisco s come coordinata euleriana, ovvero la coordinata della traiettoria che passa per il baricentro delle sezioni trasversali. Quindi s identifica la posizione di ogni sezione trasversale

→ Con questa grandezza il moto è CARATTERIZZABILE, quindi:

$$\begin{aligned} A &= A(s, t) \\ V &= V(s, t) \\ Q &= Q(s, t) \end{aligned}$$



→ Se prendiamo in considerazione un tronco compreso fra due sezioni, poste alla distanza infinitesima ds , in un ~~tempo~~ intervallo di tempo dt , attraverso la sezione iniziale entra la massa $\rho Q ds dt$ mentre dalle sezioni finali esce $\rho(Q + dQ) ds dt$, mezzine della quantità che è entrata.



$$\rho (Q + \frac{d(Q)}{ds} ds) ds dt$$

$$\rho A ds = \text{massa contenuta tra } A \text{ e } A'$$

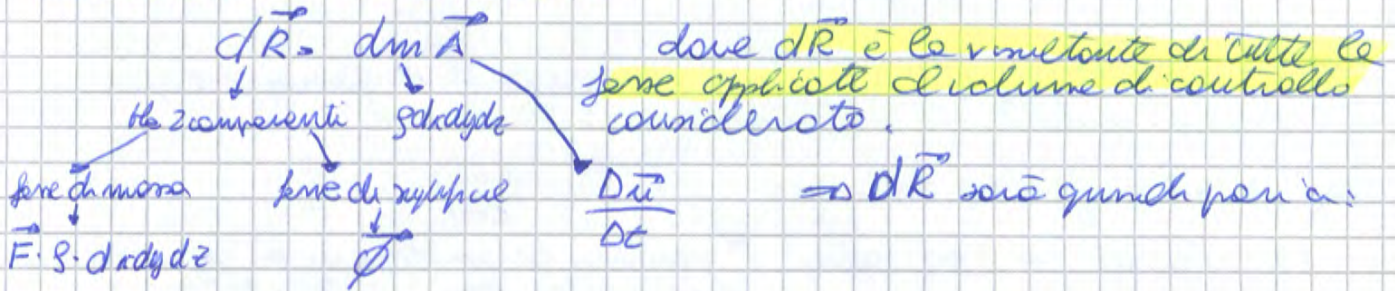
Per ds piccolo possiamo considerare $A \approx A'$, quindi per il principio di conservazione della massa, non c'è massa che viene creata o distrutta.

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} ds dt = - \frac{\partial(\rho A ds dt)}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} ds dt$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} \right] = 0 \quad \rightarrow \text{EQUAZIONE DI CONTINUITA' PER LE CORRENTI}$$

Considero una parallelepipedo elementare di lati dx, dy, dz

NB: Per la massa $dm = \rho dx dy dz$ contenuta nel volume considerato, deve essere verificata la prima equazione cardinale della dinamica:



$$\Rightarrow d\vec{R} = \rho \vec{F} dx dy dz + \left[\vec{\Phi}_x dy dz - \left(\vec{\Phi}_x + \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} dx \right) dy dz + \vec{\Phi}_y dx dz - \left(\vec{\Phi}_y + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} dy \right) dx dz + \vec{\Phi}_z dx dy - \left(\vec{\Phi}_z + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z} dz \right) dx dy \right]$$

$$\Rightarrow d\vec{R} = \left[\rho \vec{F} - \left(\frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z} \right) \right] dx dy dz$$

$dm \vec{A}$ è pari a:

$$\bullet dm \cdot \vec{A} = \rho dx dy dz \cdot \frac{D\vec{u}}{Dt}$$

Uguagliando i termini: $d\vec{R} = dm \vec{A}$

$$\Rightarrow \rho (\vec{F} - \vec{A}) = \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z}$$

EQUAZIONE INDEFINITA DELLA DINAMICA

L'equazione ottenuta è un'equazione vettoriale, quindi in forma scalare si può scrivere:

$$\rho (F_x - \frac{Du}{Dt}) = \frac{\partial \Phi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{zx}}{\partial z}$$

$$\rho (F_y - \frac{Dv}{Dt}) = \frac{\partial \Phi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{zy}}{\partial z}$$

$$\rho (F_z - \frac{Dw}{Dt}) = \frac{\partial \Phi_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{zz}}{\partial z}$$

Ricordando la definizione del tensore degli sforzi $\vec{\Phi}$:

$$\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{yx} & \Phi_{zx} \\ \Phi_{xy} & \Phi_{yy} & \Phi_{zy} \\ \Phi_{xz} & \Phi_{yz} & \Phi_{zz} \end{pmatrix} = \{ \vec{\Phi}_x, \vec{\Phi}_y, \vec{\Phi}_z \}$$

Possiamo considerarlo come un vettore di vettori per cui applicando l'operatore divergenza si ha:

$$\text{div } \vec{\Phi} = \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z}$$

EQUAZIONE GLOBALE DELLA DINAMICA

Nel riguardo delle azioni globali esercitate dal fluido su particolari superfici di contorno.

In queste situazioni risulta più convenientemente ricorrere, anziché ad una trattazione locale del processo di moto, ad un esame globale delle condizioni di movimento di un volume finito di fluido opportunamente limitato da una superficie di controllo.

→ scelto un volume finito \mathcal{V} delimitato dalla superficie di contorno chiusa Ω , fissa nello spazio per ogni elemento infinitesimo $d\mathcal{V}$ di esso vale l'equazione indefinita

$$\rho(\vec{F} - \frac{D\vec{u}}{Dt}) - \text{div} \vec{\Phi} = 0$$

→ integrando su tutto il volume di controllo finito \mathcal{V} :

$$\int_{\mathcal{V}} [\rho(\vec{F} - \frac{D\vec{u}}{Dt}) - \text{div} \vec{\Phi}] d\mathcal{V} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{V}} \rho \vec{F} d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \text{div} \vec{\Phi} d\mathcal{V} = 0 \quad \textcircled{1}$$

Il termine $\vec{P} = \int_{\mathcal{V}} \rho \vec{F} d\mathcal{V}$ rappresenta la risultante delle forze di massa

→ se il fluido è sottoposto esclusivamente al campo gravitazionale questo integrale fornisce il peso del fluido contenuto nel volume \mathcal{V} ; il vettore \vec{P} è verticale, diretto verso il basso, applicato al baricentro del volume e di modulo:

$$|\vec{P}| = \gamma \mathcal{V}$$

TA. GREEN $\int_{\mathcal{V}} \text{grad} a d\mathcal{V} = \int_{\Omega} a \cdot \vec{n} d\Omega$
o con DIVERGENZA

Il termine A: $\int_{\mathcal{V}} \text{div} \vec{\Phi} d\mathcal{V}$

$$\int_{\mathcal{V}} \text{div} \vec{b} d\mathcal{V} = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{n} d\Omega$$

→ indicando con \vec{n} la normale di generico punto della superficie di contorno, positiva verso l'interno, per il teorema di GREEN scriviamo:

$$\int_{\mathcal{V}} \text{div} \vec{\Phi} d\mathcal{V} = - \int_{\Omega} \underbrace{\vec{\Phi} \cdot \vec{n}}_{\vec{\Phi}_n} d\Omega$$

→ per il th. del tetraedro di Cauchy,

$$\vec{\Phi} \cdot \vec{n} = \vec{\Phi}_n$$

$$\Rightarrow \left\{ A = - \int_{\Omega} \vec{\Phi}_n d\Omega \right\}$$

→ è quindi l'effetto di tutti gli sforzi unitari che agiscono sulla superficie di controllo.

Per il termine B, utilizzando la definizione di derivata totale si ha:

$$B: \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \rho w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}$$

Istituendo tutto la (1) diventa:

$$\vec{P} + \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot v_n d\Omega - \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\Omega} \vec{F}_n d\Omega = 0$$

EQ. GLOBALE DELLA DINAMICA PER UN QUALSIASI FLUIDO

Ora considero il termine:

$\int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot v_n d\Omega \rightarrow v_n d\Omega = dQ \rightarrow$ portata volumetrica infinitesimale
 $\rightarrow \rho dQ = dm \rightarrow$ portata in massa infinitesimale

$\rightarrow \vec{u} dm =$ flusso di quantità di moto

\downarrow
 è la quantità di moto che attraversa nell'unità di tempo la superficie Ω .

$\rightarrow \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot v_n d\Omega = \vec{M}$, ovvero è la quantità di moto di tutto lo stesso fluido che attraversa nell'unità di tempo la superficie di contorno Ω del volume \mathcal{V} .

\rightarrow Ma nell'intera superficie Ω possiamo distinguere tre porzioni, una Ω_1 che è attraversata dal fluido entrante, Ω_2 del fluido uscente e Ω_3 che non è attraversata.

\rightarrow Nella prima v_n è positiva mentre nella seconda è negativa:

$$\int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot v_n d\Omega = \vec{M}_e - \vec{M}_u$$

\leftarrow flusso uscente

\rightarrow NB: le grandezze \vec{M} , \vec{M}_e , \vec{M}_u sono in realtà quantità di moto nell'unità di tempo ed hanno quindi le dimensioni di una forza

Per definizione: $\int_{\Omega} \vec{F}_n d\Omega = \vec{F}_c \rightarrow$ spinta totale che la superficie trasmette al fluido

Chiamo: $\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} d\mathcal{V} = \vec{I} \rightarrow$ "TERMINE DELLE VARIE LOCALI" \rightarrow rappresenta la diminuzione complessivamente subita, nell'unità di tempo, dalla quantità di moto dell'intero stesso fluido contenuto nel volume \mathcal{V} .

$$\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{M}_e - \vec{M}_u = \vec{I}$$

\rightarrow EQ. GLOBALE DELLA DINAMICA

\downarrow
 relazione vettoriale per quantità che hanno le dimensioni di una forza.

TEOREMA DI BERNOULLI

Il th. di Bernoulli fornisce la relazione che deve sussistere tra le diverse forme di energia in gioco

Vale sotto i ipotesi di:

- 1) FLUIDO PERFETTO;
- 2) FLUIDO PESANTE (soggetto alla gravità);
- 3) FLUIDO INCOMPRESSIBILE ($\Delta \rho / \rho = 0 \rightarrow$ lungo la traiettoria ρ è costante);
- 4) MOTO PERMANENTE.

1) Un fluido perfetto è descrivibile dall'equazione di EULERO:
 Se $\vec{A} = \frac{D\vec{u}}{Dt}$ = accelerazione:

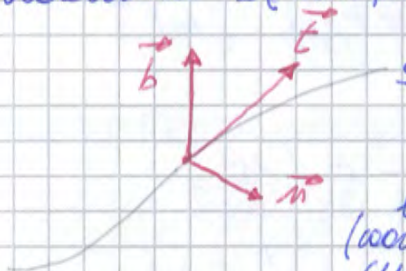
$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } p \quad (1)$$

2) Se il fluido è "pesante" cioè soggetto alla forza di gravità:
 $\vec{F} = -\text{grad}(gz) - g \text{ grad}(z) \quad (2)$

\Rightarrow da (1) e (2): $-\gamma \text{ grad}(z) - \rho \vec{A} = \text{grad } p$

\rightarrow Divido per γ : $-\frac{\vec{A}}{g} = \text{grad}(z) + \frac{1}{\gamma} \cdot \text{grad } p \quad (3)$

Definisco un sistema di riferimento curvilineo su una generica traiettoria s (3 componenti: tangenziale \vec{t} , normale \vec{n} , quoto \vec{b})



\rightarrow proietto l'equazione (3) dell'accelerazione lungo le 3 direzioni $\vec{b}, \vec{t}, \vec{n}$:

lungo \vec{t} (coordinate curvilinee): $-\frac{A_s}{g} = \frac{\partial}{\partial s} z + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial s} p \quad (4')$

lungo \vec{n} : $-\frac{A_n}{g} = \frac{\partial}{\partial n} z + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial n} p$

lungo \vec{b} : $-\frac{A_b}{g} = \frac{\partial}{\partial b} z + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial b} p$

oss: L'accelerazione \vec{A} ha notoriamente componenti per: la derivata della velocità tangenziale u (cioè del modulo della velocità) lungo la tangente alla traiettoria; componenti per: l'accelerazione centripeta u^2/r lungo la normale principale; componenti nulle lungo la binormale (\vec{b}):



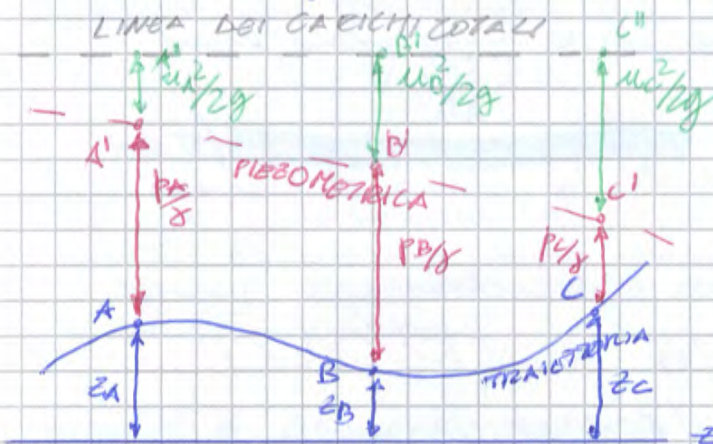
Il termine: $z + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2g}$ viene indicato con H ed è detto **CARICO TOTALE**:

$$z + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2g} = H = \text{CARICO TOTALE} = \text{cost}$$

→ Il Teorema di Bernoulli dice: "nel moto permanente di un fluido perfetto, pesante e incompressibile il carico si mantiene costante lungo ogni traiettoria."

■ **INTERPRETAZIONE GEOMETRICA:**

$$H = z + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2g}$$



Nelle ipotesi considerate del th di Bernoulli è comune che la linea dei carichi totali appartiene a un piano orizzontale e quindi: $z_h = \text{cost}$

→ Piano orizzontale di riferimento

$$\rightarrow z_A + \frac{p_A}{\rho} + \frac{u_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\rho} + \frac{u_B^2}{2g} = z_C + \frac{p_C}{\rho} + \frac{u_C^2}{2g}$$

■ **INTERPRETAZIONE ENERGETICA:**

Il carico totale H rappresenta l'energia meccanica complessiva prodotta dall'unità di peso del fluido in movimento, ovvero l'energia specifica:

- z : la quota geodetica z rappresenta parte dell'energia potenziale disponibile che compete all'unità di peso del liquido per il fatto che esse occupa una determinata posizione nel campo gravitazionale. Possiamo indicarlo come **ENERGIA POSIZIONALE** e lo vediamo come **energia potenziale per unità di peso**.

$$E_p = mgz \Rightarrow \frac{E_p}{mg} = z$$

- $\frac{u^2}{2g}$: rappresenta l'energia cinetica per unità di peso o la **energia cinetica per unità di peso**.

$$E_c = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{g} u^2 = \frac{u^2}{2g}$$

→ le traiettorie sono quindi convergenti anche all'unità della luce.

13. Ma ad una certa quota ($\sim 0,5 \cdot d$) si crea una sezione trasversale del getto che subisce traiettorie sensibilmente rettilinee e parallele (in alcuni casi questo avviene proprio in modo esatto).
 Questa sezione è detta **SEZIONE CONTRATTA**. Quindi in essa la corrente si può considerare gradualmente variata per cui la distribuzione della pressione lungo la sezione sarà idrostatica e costante.

14. Poiché anche la quota z è costante \Rightarrow ha che:

$$z + \frac{p}{\rho} = \text{cost} \Rightarrow h = \text{cost}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial m} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial b} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial m} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \nabla p = 0$$

⇒ Nel caso considerato la sezione è in un piano orizzontale, quindi la pressione zero nulla in ogni punto della sezione, essendo nulla al contorno che è a contatto con l'atmosfera.

Applico il th. Bernoulli ad una generica traiettoria che va da A a B (A è sensibilmente lontano da B in modo che ~~non~~ si possa trascurare la velocità in A):

$$z_A + \frac{p_A}{\rho} + \frac{u_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\rho} + \frac{u_B^2}{2g}$$

≈ 0 perché sono zelle

⇒ $\frac{u_B^2}{2g} = z_A + \frac{p_A}{\rho} = z_B$ ⇒ Ora sposta il sistema di riferimento e lo metto in prossimità della luce

$$\Rightarrow z_B = \frac{d}{2}$$

⇒ $\frac{u_B^2}{2g} = z_A + \frac{p_A}{\rho} + \frac{d}{2}$ ma: se la luce non è molto prossima al pelo libero si annulla:

$$z_A + \frac{p_A}{\rho} \approx h$$

$$\Rightarrow \frac{u_B^2}{2g} = h + \frac{d}{2} \Rightarrow u_B = \sqrt{2g(h + \frac{d}{2})}$$

→ se $h \gg d$ posso trascurare $\frac{d}{2}$ →

$$u_B = \sqrt{2gh}$$

→ VELOCITÀ TORRICELLIANA
 $u_B = u_{\text{corn}}$

⇒ nelle CC, essendo la corrente gradualmente variata, la distribuzione delle pressioni sarà idrostatica e triangolare, annullandosi in corrispondenza dell'asse libero della corrente.

Applico Bernoulli tra A e B:

$$z_A + \frac{p_A}{\rho} + \frac{u_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\rho} + \frac{u_B^2}{2g}$$

= H (se contee stato definito da disegno anche $u_A \neq 0$)

cc. a \rightarrow vedi disegno

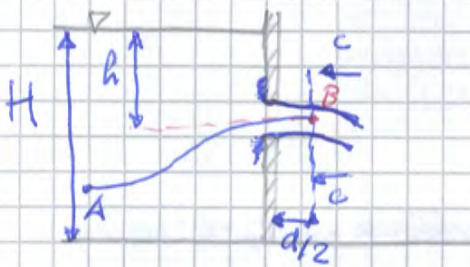
Unendo a l'attesa delle linee della sezione contratta risulta $cc. a = R$

$$\Rightarrow u_B = \sqrt{2g(H - c \cdot a)} \rightarrow \text{la } u_0 \text{ è costante lungo } cc$$

$$\Rightarrow Q = C_v \cdot C_c \cdot a \cdot L \cdot \sqrt{2g(H - c \cdot a)} = m \cdot a \cdot L \cdot \sqrt{2g(H - c \cdot a)}$$

proprietà foro

Corso: LUCE A PARETE OTTILE LATERALE



Anche qui la sera presenta una sezione contratta poco a valle della luce. La distribuzione di p sarà curv idrostatica.

$$z_A + \frac{p_A}{\rho} + \frac{u_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\rho} + \frac{u_B^2}{2g}$$

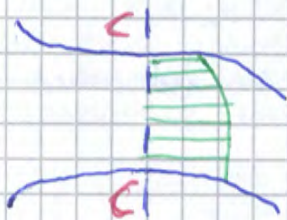
$H \quad \quad \quad \approx 0 \quad \quad \quad \approx 0$

$$\Rightarrow u_B = \sqrt{2g(H - z_B)}$$

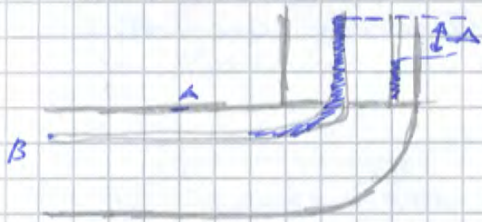
$$u_B \approx \sqrt{2gh}$$

$$Q \propto m \cdot a \cdot \sqrt{2gh}$$

Il rimettito dipende dalla quota di B lungo cc quindi la distribuzione delle velocità non sarà perfettamente lineare



L'andamento della velocità lungo cc, qui non sarà perfettamente lineare anche $u_B = f(z_B)$



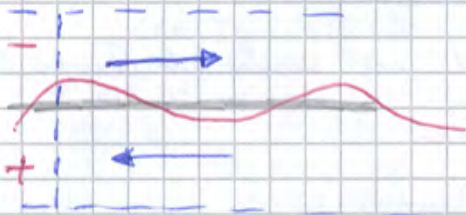
→ TUBO DI PITOT

Si utilizzano anche degli altri strumenti per misurare la velocità della corrente fluida:

- **Mulinelli:** Strumenti con pale, immersi in acqua. In funzione del numero di rotazioni delle pale nell'unità di tempo si misura la velocità della corrente.
- **Sistema a filo caldo:** Strumento che presenta un filo di materiale conduttore che viene attraversato da corrente elettrica (→ il filo si riscalda). Il filo viene immerso in acqua e l'acqua raffredda il filo. Più la velocità della corrente è alta e più il filo si raffredda.
- **Laser anemometri:** Permettono una misura molto precisa e si basano sull'effetto doppler (fenomeno fisico che consiste nella cambiamento della frequenza o della lunghezza d'onda percepita da un osservatore raggiunto da un'onda emessa da una sorgente che ritorna in movimento rispetto all'osservatore stesso).

INSTABILITÀ DI KELVIN HELMHOLTZ

Consideriamo l'interfaccia ^{piena} di separazione tra 2 fluidi immiscibili in moto relativo \vec{v} l'uno rispetto all'altro (con v opposto) e differenza di velocità u .

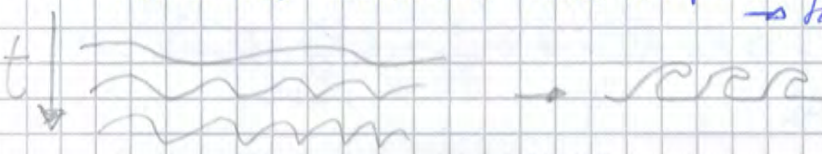


→ è l'interfaccia subisce una piccola perturbazione, particelle di fluido che erano a riposo (cioè con v nulla) vengono a trovarsi nelle regioni dove regna una velocità finita (e viceversa).

→ Questo comporta una instabilità: l'ampiezza della perturbazione diventa sempre più ampia e le particelle delle due diverse regioni si mescolano tra loro formando dei vortici e facendo perdere definitivamente la configurazione che era presente all'inizio.

→ la configurazione tenderà ad aumentare e a rimanere instabile nel tempo.

→ si vedono delle onde simili a quelle del mare.



NB: Nell'ipotesi di validità del teorema di Bernoulli (perdite nulle e moto permanente), sia H che dQ restano costanti in ognuno dei tubi di flusso elementari che costituiscono l'intera corrente.

→ Se $dQ = \text{cost}$ allora anche $dP = \text{cost}$ e quindi vale anche:

$P = \text{costante}$ → Estensione del th. Bernoulli a correnti

⇒ Nel moto permanente di una corrente di un fluido perfetto e incomprimibile, la potenza si mantiene costante, cioè assume lo stesso valore in tutte le successive sezioni trasversali.

Consideriamo ora una corrente gradualmente variata (caratterizzata dalla distribuzione idrostatica della pressione nelle singole sezioni trasversali) ⇒ $h = \text{cost} \rightarrow z + P/\gamma = \text{cost}$ lungo $d\Omega$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow P &= \int_{\Omega} \gamma H u d\Omega = \int_{\Omega} \gamma \left(z + \frac{P}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) u d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \gamma (z + P/\gamma) u d\Omega + \int_{\Omega} \gamma \frac{u^3}{2g} d\Omega = \int_{\Omega} \gamma (z + P/\gamma) u d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\gamma u^3}{2g} d\Omega = \end{aligned}$$

comenti grad variata

$$= \gamma Q (z + P/\gamma) + \gamma \int_{\Omega} \frac{u^3}{2g} d\Omega = \gamma Q (z + P/\gamma) + P_c$$

→ Il termine $\gamma \int_{\Omega} \frac{u^3}{2g} d\Omega$ rappresenta la parte cinetica ed è chiamata POTENZA CINETICA. Essa dipende dalla ~~semplice~~ distribuzione della velocità nelle sezione trasversale.

Possiamo giungere a una sua espressione in termini finiti ricorrendo all'introduzione di un coefficiente di ragguglio

⇒ $\alpha =$ COEFFICIENTE DI RAGGUGLIO PER LA POTENZA CINETICA (o COEFFICIENTE DI CORIOLIS)

→ ed è definito come il rapporto tra la potenza cinetica effettiva della corrente e la potenza cinetica di una corrente fittizia di pari portata, ma che abbia distribuzione uniforme della velocità nella sezione trasversale.

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\gamma \int_{\Omega} \frac{u^3}{2g} d\Omega}{\gamma U^2 \cdot U \cdot \Omega} = \frac{\int_{\Omega} u^3 d\Omega}{U^3 \Omega}$$

dove $U =$ velocità media nella sezione

Risultato $P_c = \gamma \alpha \frac{U^3}{2g} \cdot Q$

NB: $\gamma \Delta H Q$

⇒ $P = \gamma \cdot Q \left[z + \frac{P}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} \right] = \gamma Q H$

prevalenza della pompa

ce → Ammettiamo anche che in prima approssimazione la corrente possa considerarsi lineare ^{dei tronchi}
 → In ogni sezione trasversale la quota piezometrica sarà costante. Essi si mantengono ovunque nei due tronchi cilindrici, in ciascuno dei quali è costante la velocità.

NB: Nel tratto convergente, ovvero dove la corrente accelera, la linea piezometrica si abbassa, allontanandosi progressivamente dalla linea dei centri totali.

⇒ Applico Bernoulli tra A e B:

$$H_A = H_B \Rightarrow \underbrace{z_A + \frac{p_A}{\gamma}}_{h_A} + \alpha \frac{U_A^2}{2g} = \underbrace{z_B + \frac{p_B}{\gamma}}_{h_B} + \alpha \frac{U_B^2}{2g}$$

Considerando moto turbolento si ha $\alpha = 1$ e sostituendo il termine cinetico in la velocità media U si ha:

$$Q = U_A \cdot \Omega_A = U_B \cdot \Omega_B \Rightarrow U_A = \frac{Q}{\Omega_A} ; U_B = \frac{Q}{\Omega_B}$$

⇒ Si ottiene il dislivello fra le quote piezometriche f :

$$f = h_A - h_B = \frac{Q^2}{2g \Omega_B^2} - \frac{Q^2}{2g \Omega_A^2} = \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{\Omega_B^2} - \frac{1}{\Omega_A^2} \right)$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\Omega_A \cdot \Omega_B}{\sqrt{\Omega_A^2 - \Omega_B^2}} \cdot \sqrt{2g f}$$

⇒ Lo stesso f può essere dedotto dall'indicazione di un manometro differenziale inserito fra le due sezioni. Se Δ è il dislivello fra i menischi del manometro abbiamo:

$$f = \Delta \cdot \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\Omega_A \cdot \Omega_B}{\sqrt{\Omega_A^2 - \Omega_B^2}} \cdot \sqrt{\Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} \cdot 2g} \Rightarrow Q \propto \sqrt{\Delta}$$

NB: Il dispositivo consente dunque di determinare la portata di una corrente in pressione a mezzo di una semplice lettura manometrica.

ESTENSIONE DEL TH. DI BERNOULLI AL MOTTO VARIO

Tolgo l'ipotesi di moto permanente. Siamo allora ricaduti all'equazione del moto vario (per cui sono variazioni di moto nel tempo):

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{dU}{dt}$$

→ Formando il tempo e integrando lungo la traiettoria s tra 1 e 2 si ha:

$$(1) \quad H_2 - H_1 = -\frac{1}{g} \int_1^2 \frac{dU}{dt} ds \quad \text{dove } H_2 \text{ e } H_1 \text{ sono i valori che contemporaneamente assume il carico totale nei due punti}$$

Consideriamo ora che la corrente si muove in un tubo cilindrico con pareti rigide. Poiché l'area delle sezioni trasversali è costante nel tempo si può scrivere per l'equazione di continuità:

$$Q(s) = \text{cost} \Rightarrow V(s) = \text{cost}$$

Cio vuol dire che U (velocità media = Q/A) non dipenderà da s , e, allora:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{dU}{dt}$$

Se applichiamo la (1) a tutta la corrente, e tenendo conto che U non varia:

$$\text{→ posto } L = s: \quad H_2 - H_1 = -\frac{L}{g} \frac{dU}{dt} = -\frac{L}{g} \frac{dU}{dt} \quad \text{dove } L \text{ è la lunghezza del tronco di corrente compreso fra le sezioni 1 e 2}$$

→ e H_0 è il carico totale nel punto che possiamo assumere come origine delle coordinate di linea s ; allora lungo s il carico totale vale:

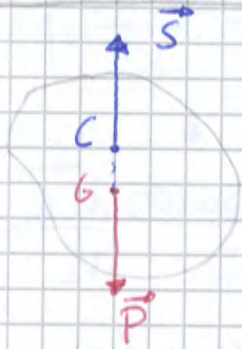
$$H(s) = H_0 - \frac{s}{g} \frac{dU}{dt}$$

→ In tutte le istanti il carico totale varia linearmente con s . Il carico diminuisce verso le s positive se ho una corrente accelerata e viceversa.

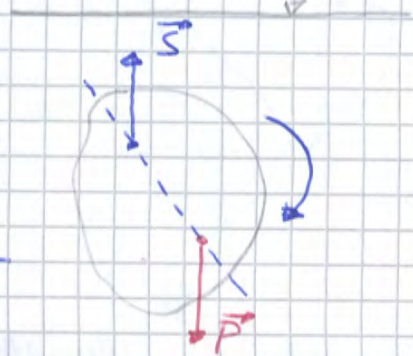
→ Seguiamo ora una particella fluida lungo la sua traiettoria, indagando le variazioni dell'energia specifica H . Esse sono date dalla derivata totale di H :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + U \frac{\partial H}{\partial s} \\ H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{U}{g} \frac{dU}{dt} = 0 \quad \text{perché la condotta è fino nello spazio}$$

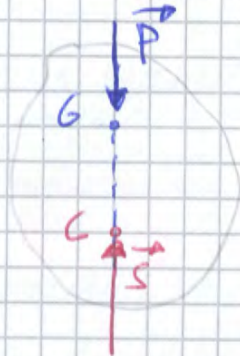
1° caso: C è più in alto di G



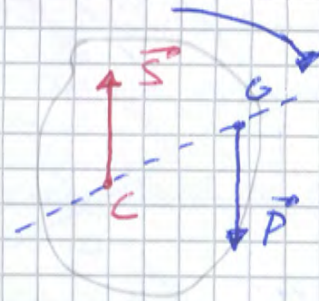
Se impongo una rotazione nasce una COPPIA STABILIZZANTE



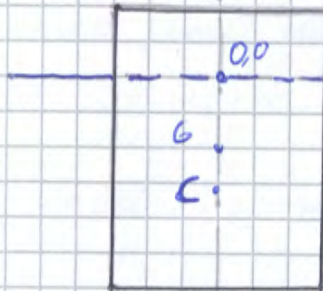
2° caso:



Se impongo una rotazione nasce una COPPIA DESTABILIZZANTE, che fa vibrare il corpo.



Consideriamo ora un parallelepipedo immerso in un liquido. Possiamo quindi individuare il PIANO DI GALLEGGIAMENTO e il VOLUME DI CARENA



Cosa succede quando questo viene fatto ruotare?



Il punto M è definito ~~metac~~ METACENTRO

$$P = \rho_s \cdot V = \rho \cdot V_c$$

$$\vec{M} = |\vec{S}| \cdot MG \cdot \sin \theta \rightarrow \text{Coppia stabilizzante}$$

$$\vec{M} = |\vec{S}| \cdot (\overline{MG} - \overline{GC}) \sin \theta$$

$$\overline{MC} - \overline{GC} > 0$$

$$\overline{MC} > \overline{GC}$$

Considerando che: $\frac{CC'}{v} = \frac{N_1 N_2}{V_c}$ e che $CC' = MC \sin \theta$

si ha:

$$\frac{MC \sin \theta}{v} = \frac{I_{0,0}}{V_c}$$

$$\Rightarrow \boxed{MC = \frac{I_{0,0}}{V_c}}$$

Se $MC > GC \rightarrow$ l'equilibrio è STABILE

EQUAZIONI DEL MOTTO DEI FLUIDI REALI

Per i FLUIDI REALI gli sforzi tangenziali hanno influenza determinante e non possono pertanto essere trascurati. Non considereremo il caso dei fluidi newtoniani, cioè quei fluidi caratterizzati da un valore della viscosità indipendente dagli sforzi e quindi dal moto.

EQUAZIONI DI NAVIER PERI FLUIDI VISCOSI:

Lo stato di sforzo è definito dalle tre componenti tangenziali τ_x, τ_y, τ_z e dalle tre normali $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$; queste possono assumere valori differenti ma la loro somma è un invariante, cioè è identica in tutte le terne di assi cartesiane nel generico punto considerato.

cioè si ha:
$$p = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

La stato di sforzo può essere considerato dato dalla sovrapposizione di due parti: - una costituita dai sei sforzi normali dovuti alla pressione p ;

- l'altre individuata dalle sei componenti che nascono durante il movimento a causa delle viscosità (e sono il comportamento del fluido reale).

Si ha il tensore degli sforzi nelle somme di una parte "idrostatica" e di una del tipo origine del movimento, indicate come DEVIATORE DEGLI SFORZI:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_x & \tau_y \\ \tau_x & \sigma_y & \tau_z \\ \tau_y & \tau_z & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - p & \tau_x & \tau_y \\ \tau_x & \sigma_y - p & \tau_z \\ \tau_y & \tau_z & \sigma_z - p \end{bmatrix}$$

all'annullarsi del movimento gli sforzi deviatori degli sforzi $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ tendono al valore idrostatico.

⇒ Ammettendo valide le relazioni di Newton risulta:

$$\Rightarrow \begin{cases} \tau_x = \mu \frac{d\delta x}{dt} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \tau_y = \mu \frac{d\delta y}{dt} = -\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (0) \\ \tau_z = \mu \frac{d\delta z}{dt} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{cases}$$

Consideriamo ora nel piano xy , il quadrato $ABCD$. Sui tre lati del triangolo ACA agiscono le forze: $AD \cdot \tau_z$; $CD \cdot \tau_z$; $AC \cdot (\sigma_y - p)$

→ Per il loro equilibrio deve essere: $2\tau_z \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}(\sigma_y - p) \Rightarrow$

Considerando il triangolo ABD si trova:

$$\begin{cases} \sigma_y - p = \tau_z \\ \sigma_x - p = -\tau_z \end{cases} \Downarrow$$

$$\boxed{\sigma_y - \sigma_x = 2\tau_z} \quad (1)$$

⇒ Consideriamo ora la deformazione, conseguente agli sforzi, nell'originario quadrato $ABCD$. R risulta:

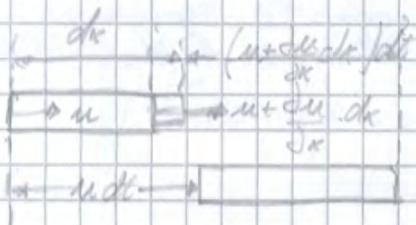
$$E_x = \frac{\Delta \delta x}{2} \quad E_y = -\frac{\Delta \delta z}{2}$$

Le corrispondenti velocità di annullamento sono dunque:

$$\frac{dE_x}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\delta x}{dt} \quad , \quad \frac{dE_y}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{d\delta z}{dt}$$

⇒ sottraendo le due si ha:

$$\boxed{\frac{d\delta z}{dt} = \frac{d(E_x - E_y)}{dt}} \quad (2)$$



→ Le consideriamo un elemento unitario di lunghezza infinitesima dx , allora l'allungamento unitario subito nel tempo dt è:

$$dE_x = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx dt}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} dt$$

→ quindi la velocità di allungamento nella direzione x risulta:

$$\frac{dE_x}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

e quindi anche:

$$\frac{dE_y}{dt} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{dE_z}{dt} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

(3)

Scriviamo:
$$\rho \left(F_x - \frac{Dv}{Dt} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \Delta_z v - \frac{4}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \text{div} \vec{v} \quad (*)$$

NB: lo stesso vale negli altri due piani, per cui le 3 equazioni scalari diventano:

3)
$$\rho \left(\vec{F} - \frac{D\vec{v}}{Dt} \right) = \text{grad} p - \mu \Delta_z \vec{v} - \frac{4}{3} \mu \text{grad} \cdot \text{div} \vec{v}$$

↓
EQUAZIONE INDEFINITA DI EQUILIBRIO DEL POCO DI UN FLUIDO VISCOSO

NB: se il fluido è incomprimibile, l'equazione assume una forma più semplice:

$$\rho \left(\vec{F} - \frac{D\vec{v}}{Dt} \right) = \text{grad} p - \mu \Delta_z \vec{v} \rightarrow \text{EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES} \quad (*)$$

NB: L'influenza delle viscosità è espressa dal termine " $-\mu \Delta_z \vec{v}$ " che rappresenta le viscosità, per unità di volume delle forze originate dalla viscosità in ogni punto della massa fluida.

Scalamente:
$$\rho \left(F_x - \frac{dv}{dt} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \Delta_z v$$

$$\rho \left(F_y - \frac{dv}{dt} \right) = \frac{\partial p}{\partial y} - \mu \Delta_z v$$

$$\rho \left(F_z - \frac{dw}{dt} \right) = \frac{\partial p}{\partial z} - \mu \Delta_z w$$

EQUAZIONE GLOBALE DI EQUILIBRIO:

Considerando il caso di un fluido incomprimibile, moltiplichiamo per l'elemento \vec{m} i due membri dell'(*) e integrando ad un generico volume finito V racchiuso da una superficie chiusa di contorno A , si trova:

$$\rho \int_V \vec{F} dV + \int_A p \vec{m} dA + \rho \int_V \vec{v} dV - \rho \int_V \frac{D\vec{v}}{Dt} dV + \mu \int_V \Delta_z \vec{v} dV = 0$$

Considerando il th. di Green l'ultimo termine diventa:

$$\mu \int_V \Delta_z \vec{v} dV = -\mu \int_A \frac{D\vec{v}}{Dn} dA$$
 dove \vec{m} è la normale alla superficie diretta verso l'interno.

Porto inoltre: $\vec{T}_i = \int p \vec{m} dA$, risultante delle spinte elementari agenti sulla superficie di contorno per effetto della sola pressione p , e introduco i simboli già usati in la: \Rightarrow

condotta omogenea per tutte le traiettorie di vortice toroidale

$$U_E = \sqrt{2g\gamma}$$

→ lungo la condotta sono predisposte una linea di gomme perimetriche le vedremo tutte allo stesso livello.

In realtà i menischi si allineano lungo una retta PQ, inclinata verso il basso nel senso del moto

→ Poiché la velocità media della corrente deve restare costante per il teorema di continuità, dobbiamo concludere che anche le linee dei condotti totali vincolate a declinare nel senso del moto, coincidono quasi con MN'

⇒ conferma sperimentale della progressiva diminuzione dell'energia meccanica.

NB: Se linee MN' è una retta vuol dire che in ugual misura corrispondono uguali diminuzioni di energia.

Chiamiamo CADENTE, l'obboramento delle linee dei condotti totali in un'unità di percorso delle corrente:

$$J = - \frac{\partial H}{\partial s} \quad (I)$$

→ Nel moto uniforme lo J equivale anche all'obboramento, in un'unità di percorso, della linea perimetrica:

$$J = - \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \quad \text{La in questo è diametro anche CADENTE PISTONETRICA}$$

In ogni caso J rappresenta la perdita di energia subita dall'unità di peso del liquido nell'unità di percorso.

→ La (I) può essere considerata come l'espressione differenziale del teorema di BERNOULLI in un liquido viscoso.

Se H_0 è il carico totale nella sezione di ascissa $s=0$, avremo:

$$H(s) = H_0 - \int_0^s J(s) ds$$

e per il caso di moto uniforme: $J = cost \Rightarrow H(s) = H_0 - J \cdot s$

→ lungo l'intera condotta le linee dei condotti totali si ottengono di LJ . → L'intero dislivello γ si mette:

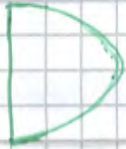
$$\gamma = LJ + \frac{V^2}{2g}$$

→ quindi in termini energetici possiamo dire che l'intera energia potenziale disponibile si trasforma solo in parte ($V^2/2g$) in energia cinetica, mentre la restante parte viene dissipata per le resistenze incontrate dalla corrente.

→ Nel moto turbolento non vedo più il filletto colorato perché nascono delle componenti di fluttuazione in tutte le direzioni che indicano dei moti agguerriti.

NB: In base al moto posso individuare il **PROFLO DI VELOCITÀ**:

- moto LAMINARE → profilo di velocità PARABOLICO → Alle pareti ho condizioni di aderenza e via via la v aumenta fino al MAX al centro della condotta.



- moto TURBOLENTO → Alle pareti si ha di nuovo $v=0$ ma, a seguito dei rimescolamenti nel fluido, avrà un profilo di velocità più uniforme (piatto).



Come so se sono in moto laminare o turbolento?

→ Esiste un numero adimensionale detto **NUMERO DI REYNOLDS** che esprime il rapporto tra le forze d'inerzia, che agiscono all'interno del fluido, e le forze viscosi.

$$Re = \frac{\text{forze inerzia}}{\text{forze viscosi}} \rightarrow \text{Da quindi un confronto di questi due tipi di forze.}$$

Nel caso di **CONDOTTE CIRCOLARI** il numero di Reynolds vale:

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{v D}{\nu}$$

ρ : densità dinamica
 v : velocità media
 D : diametro per g. cilindrico
 μ : viscosità dinamica
 ν : viscosità cinematica

→ **NUMERO DI REYNOLDS per tubazioni circolari.**

Per tubazioni circolari (correnti in pressione) siamo in moto laminare se $Re < 2000 \div 2500$

→ Se utilizziamo l'eq. globale in caso di **moto laminare**:

$$\vec{G} + \vec{\pi}(p) + \vec{I} + \vec{\pi}e - \vec{\pi}u - \int_A \mu \frac{d\vec{v}}{dn} dA = 0$$

→ Se siamo in moto laminare, allora i valori di velocità \vec{v} saranno quelli istantanei.

→ Se siamo in moto turbolento, allora avremo una portata Q che scema in una sezione trasversale A → Allora $v = Q/A$, ma essendo il moto turbolento la \vec{v} cambierà nel tempo e nello spazio.

→ Per \vec{v} avrà quindi 3 componenti: $\vec{v} \leftarrow \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix}$

Quanto vale la media temporale delle fluttuazioni?

$$\boxed{\overline{u'} = 0} \rightarrow \text{loro nullo}$$

$u' = u - \bar{u}$
 $u'^2 = (u - \bar{u})^2$
 \bar{u} è cost. e posto fuori dell'integrale

Inoltre si dimostra: $u' = u - \bar{u} \rightarrow$

$$\rightarrow \overline{u'} = \frac{1}{T} \int_0^T u' dt = \frac{1}{T} \int_0^T (u - \bar{u}) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u dt - \frac{1}{T} \int_0^T \bar{u} dt$$

$$\rightarrow = \bar{u} - \frac{1}{T} \cdot \bar{u} \int_0^T dt = \bar{u} - \frac{1}{T} \cdot \bar{u} \cdot T = \bar{u} - \bar{u} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{u'} = 0} \Rightarrow \text{La media temporale delle fluttuazioni è nulla}$$

Ma non risulta nullo la media temporale del quadrato delle fluttuazioni:

$$\overline{u'^2} = \frac{1}{T} \int_0^T u'^2 dt \geq 0 \quad \text{perché } u'^2 \text{ sono solo grandezze positive} \rightarrow \overline{u'^2} \text{ non può essere } = 0.$$

Potremmo definire l'INTENSITÀ DELLA TURBOLENZA delle 3 componenti come:

$$I_u = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{\bar{u}}$$

$$I_v = \frac{\sqrt{\overline{v'^2}}}{\bar{v}}$$

$$I_w = \frac{\sqrt{\overline{w'^2}}}{\bar{w}}$$

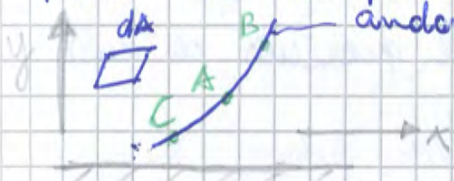
Per esempio: - nelle gallerie del vento: $I \approx 0,01$

- in un fiume: $I \approx 0,1$

\Rightarrow Nell'equazione globale dovremmo utilizzare \bar{v} o \overline{v} ?

Dobbiamo ancora considerare che la presenza della turbolenza induce ancora degli spostamenti all'interno del fluido.

ipotizziamo un moto piano (laminare):
 andamenti vorticosi



Immaginiamo una particella che da A si sposta in B a causa di una turbolenza.

u è la componente del moto in direzione x mentre v in direzione y

\rightarrow Affinché avvengano spostamenti in direzione trasversale dovremmo aver energia delle fluttuazioni v' .

La legge di Newton dell'impulso a una variazione di quantità di moto corrisponde una forza:

$$\vec{F} dt = m d\vec{v}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = - \frac{\rho u'v' dA dt}{dt} = - \rho u'v' dA$$

Ma la forza distribuita sulla superficie dA da origine ad uno sforzo detto **SFORZO TURBOLENTO**, che non è dovuto alle viscosità ma è dovuto alla turbolenza.

$$\Rightarrow \text{sforzo turbolento} = - \rho u'v' = \frac{\vec{F}}{dA}$$

La turbolenza fa nascere all'interno del fluido degli sforzi in più, rispetto a quelli viscosi, che sono dovuti alla frequenza di queste fluttuazioni.

Come diventa lo studio con l'eq. globale?

$$\vec{G} + \vec{T} + \vec{I} + \vec{\pi}e - \vec{\pi}u = 0 \quad (1)$$

$$\vec{G} + \vec{I} + \vec{\pi}e - \vec{\pi}u + \vec{u}(\rho) - \mu \int \frac{d\vec{v}}{dx} dA = 0 \quad (2) \quad \rightarrow \text{Per fluido newtoniano incompressibile}$$

⇒ Nel moto turbolento stazionario un equilibrio nel tempo T (T in condotte tubolari ≈ 1 sec) come:

$$\frac{1}{T} \int_0^T (1) dt = 0 \quad ; \quad \frac{1}{T} \int_0^T (2) dt = 0$$

05/05 Riassunto:

NB: Nel moto turbolento, oltre al moto di trasporto c'è un moto di agitazione.

La velocità avrà 3 componenti e ogni componente è dotata della media temporale più una fluttuazione:

$$x \Rightarrow u = \bar{u} + u'$$

$$y \Rightarrow v = \bar{v} + v'$$

$$z \Rightarrow w = \bar{w} + w'$$

A causa di queste fluttuazioni, anche la pressione può essere descritta in questo modo:

$$p = \bar{p} + p'$$

Quali medi si calcolano osservando le grandezze in un tempo di osservazione T piccolo, in modo di non perdere

$$\Rightarrow = \frac{1}{T} \int_0^T \int_A \rho (\vec{v} + \vec{v}') \cdot (\vec{v}_n + \vec{v}_n') dA dt \rightarrow \text{cambio ordine d'integrazione}$$

$$= \int_A \frac{1}{T} \int_0^T \rho (\vec{v} \cdot \vec{v}_n + \vec{v}' \cdot \vec{v}_n + \vec{v} \cdot \vec{v}_n' + \vec{v}' \cdot \vec{v}_n') dt dA =$$

due termini mediati si possono fare nell'integrale
 $\rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T \rho \vec{v} \cdot \vec{v}_n dt = 0$
 $\frac{1}{T} \int_0^T \rho \vec{v}' \cdot \vec{v}_n dt = 0$
il resto fuori ma è integrabile dalle fluttuazioni vale 0
 $\frac{1}{T} \int_0^T \rho \vec{v}' \cdot \vec{v}_n' dt \neq 0$
anche il prodotto di due fluttuazioni non da integrale nullo
sterometro del vortice
 $\rightarrow \text{Risultato} = \int_A (\rho \vec{v} \cdot \vec{v}_n + \rho \vec{v}' \cdot \vec{v}_n') dA$

$$\Rightarrow \text{Considerando i vari termini, la (1) diventa:}$$

$$\vec{G} + \vec{\pi}_p + \vec{I} \vec{v} + \vec{\pi}_e \vec{v} - \vec{\pi}_u \vec{v} + \int_A \rho \vec{v}' \cdot \vec{v}_n' dA - \mu \int \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} dA = 0 \quad (1')$$

*In moto laminare: $w'v'p=0$
 $\vec{u} \equiv u$*
nuovi termini dovuti alle turbolenze
termine viscoso se indica la resistenza al moto

Esprimono la FORZA DI TRASCINAMENTO della conchiglia = T
Assieme rappresentano la resistenza al moto che agisce sulla superficie di volume che stiamo considerando

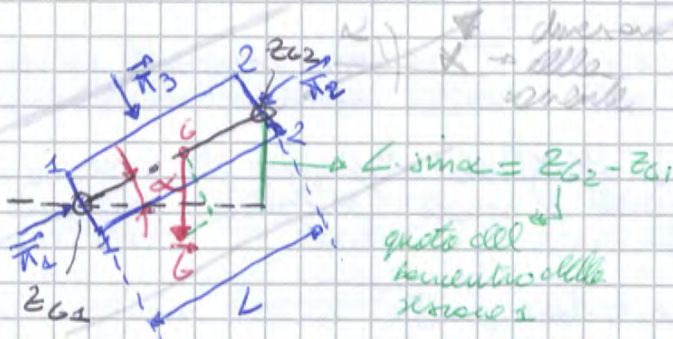
$$\rightarrow \vec{G} + \vec{\pi}_p + \vec{I} \vec{v} + \vec{\pi}_e \vec{v} - \vec{\pi}_u \vec{v} = \mu \int \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} dA - \int_A \rho \vec{v}' \cdot \vec{v}_n' dA = \vec{T}$$

Il volume V di conchiglia deve essere esercitata sull'esterno (fluido circostante) queste forze di trascinamento.

Quanto vale questa forza di trascinamento?

- caso 1: CORRENZA IN MOTO UNIFORME

Considero una condotta cilindrica e ne considero un volumetto lungo L con area di base $A_1 = A_2$



np: se il moto è uniforme la velocità media si mette da una sezione all'altra.

Se il moto è uniforme allora ho stazionarietà del moto $\rightarrow \vec{I} \vec{v} = 0$ (merci locali nulle)
 $\vec{\pi}_e \vec{v} = \vec{\pi}_u \vec{v}$

\rightarrow la forza di trascinamento T risulta:

$$\vec{T} = \vec{G} + \vec{\pi}_p = \vec{G} + \vec{\pi}_1 + \vec{\pi}_2 + \vec{\pi}_3 \quad (2)$$

→ L'AZIONE TANGENZIALE DI TRASCINAMENTO SULLA PARETE vale:

$$\tau_0 = \gamma \rho \cdot J$$

te ESEMPLI:

• Tubazione a sezione rettangolare piena di fluido:



$$\tau_0 = \gamma \cdot \frac{A_{sez}}{P} \cdot J = \gamma \cdot \frac{b \cdot h}{2b+2h} \cdot J$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{sh}{2b+2h}$$

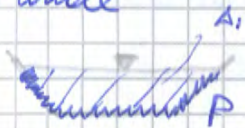
• Canone circolare



$$\tau_0 = \gamma \cdot \frac{\pi \frac{D^2}{4}}{\pi D} \cdot J = \gamma \cdot \frac{D}{4} \cdot J$$

$$\rightarrow \rho = \frac{\pi \frac{D^2}{4}}{\pi D} = \frac{D}{4} = \frac{R}{2}$$

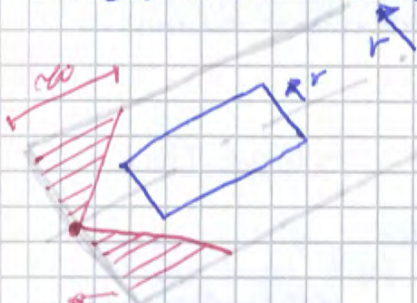
• Canale



$$\rho = \frac{A_1}{P}$$

P → diametro bagnato

Consideriamo ora una sezione circolare



Come variano le τ in funzione della distanza dell'asse ($\tau \neq \tau(r)$?)

Considero il elemento di fluido come:

$$\tau = \gamma \frac{A_{base}}{P} \cdot J =$$

Proporzionale τ

$$= \gamma \cdot \frac{\pi r^2}{2\pi r} \cdot J = \gamma \frac{r}{2} \cdot J = \tau \rightarrow \text{Andamento } \tau$$

⇒ $\tau = 0 \rightarrow$ quando $r = 0$

- $\tau_0 = \text{MAX} \rightarrow$ quando $r = R$ (alle pareti) ⇒ $\tau_0 = \gamma \frac{R}{2} \cdot J$

⇒ L'andamento è quindi lineare → gli spinti in una condotta percorso in moto uniforme sono nulla all'one e sono massimo alla parete → l'effetto dovuto cioè all'attenuazione dell'one della condotta.

Ma a cosa sono dovute le τ ?

→ Per il moto uniforme era valida:

$$T = \tau \cdot A_{cat} = \int_{A_{cat}} \mu \frac{dV}{dm} dA = \int_{A_{cat}} \rho \vec{v} \cdot \vec{v}_m dA$$

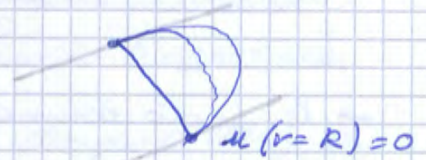
Le τ sono dovute a questi 2 termini

Vogliamo ora trovare l'andamento del profilo di velocità in un moto uniforme in condotte circolari:

$$\tau = r \frac{\rho}{2} J = -\mu \frac{du}{dr} + \rho u \bar{v} \Rightarrow \frac{du}{dr} = -\frac{r}{\mu} \frac{\rho}{2} J + \frac{\rho}{\mu} u \bar{v} \quad (0)$$

Integro la (0) per ottenere l'andamento della velocità media (\bar{u}) lungo l'asse.

$$\bar{u} = -\frac{\rho}{\mu} \frac{r^2}{4} J + \int_0^r \frac{\rho}{\mu} u \bar{v} dr + C_1 \quad (1)$$



C_1 lo posso ricavare imponendo che la velocità contro la parete sia nulla (in quanto ho aderenza alla parete).

→ Alla parete ($r=R$)

$$\bar{u} = 0 = -\frac{\rho}{\mu} J \frac{R^2}{4} + \int_0^{D/2} \frac{\rho}{\mu} u \bar{v} dr + C_1$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{\rho}{\mu} J \frac{R^2}{4} - \int_0^{D/2} \frac{\rho}{\mu} u \bar{v} dr \quad (2)$$

→ Sostituisco (2) in (1):

$$\bar{u}(r) = -\frac{\rho}{\mu} J \frac{r^2}{4} + \int_0^r \frac{\rho}{\mu} u \bar{v} dr + \frac{\rho}{\mu} J \frac{R^2}{4} - \int_0^{D/2} \frac{\rho}{\mu} u \bar{v} dr$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{u}(r) = \frac{\rho}{\mu} J \left(\frac{R^2}{4} - \frac{r^2}{4} \right) - \int_r^{D/2} \frac{\rho}{\mu} u \bar{v} dr} \quad (3)$$

Andamento del profilo di velocità in moto uniforme in condotte circolari in condizioni di flusso laminare

Ora per descriverlo bisogna conoscere l'andamento di $u \bar{v}$:

• caso: MOTO LAMINARE → $\begin{cases} u' = v' = 0 \\ \bar{u} = u \end{cases}$ → fluttuazioni nulle

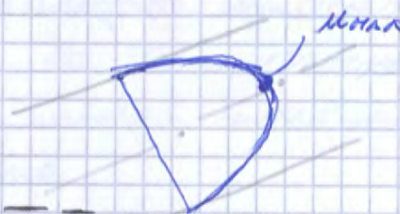
Per moto laminare il profilo di velocità risulta:

$$\boxed{u(r) = \frac{\rho J}{4\mu} (R^2 - r^2)}$$

Il profilo di velocità risulta parabolico

→ la u_{max} si ottiene all'asse ($r=0$)

$$u_{max} = \frac{\rho J}{4\mu} R^2 = \frac{\rho J}{4\mu} \frac{D^2}{4} = \frac{\rho J D^2}{16\mu} = u_{max}$$



NB: Se u è costante all'asse perché all'asse $\tau = \mu \frac{du}{dr} = 0$
 → all'asse non ho sforzi tangenziali:

VALUTAZIONE DELLE DISSIPAZIONI DI ENERGIA

CAUSE:

Essenzialmente le dissipazioni d'energia sono dovute alla presenza di vortici detti dagli "spazi tangenziali" e dovuti all'effetto delle viscosità (\rightarrow le τ sono responsabili delle dissipazioni d'energia)

- FLUIDI PERFETTI \Rightarrow sono caratterizzati dall'assenza di spazi tangenziali ($\tau=0$) \rightarrow NO ATRIZIO \rightarrow NO DISSIPAZIONE D'ENERGIA
- FLUIDI REALI \Rightarrow Presenza di spazi tangenziali che dissipano energia ($\tau \neq 0$)
 - \rightarrow Il conico totale H (misura dell'energia che possiede il fluido) ci permette di valutare la quantità di energia che un fluido possiede e quanto ne viene dissipato. (\Rightarrow Per fluidi perfetti $H = \text{cost}$ poiché non ho dissipazioni d'energia).
 - \rightarrow Per i fluidi reali ci saranno delle perdite di conico ΔH (quantità di energia dissipata per effetto degli spazi tangenziali).

\Rightarrow In alcuni casi le τ possono essere molto piccole, per cui posso considerare il fluido come perfetto \rightarrow devo capire quando posso trascurarle o meno.

SCABREZZA:

È un parametro che influenza la dissipazione ed entra in gioco quando c'è contatto tra parete e fluido

\Rightarrow Una parete reale infatti è caratterizzata da delle irregolarità più o meno grandi a seconda del livello di finitura della condotta
 ma come misura la scabrezza?

\rightarrow la geometria infatti non è l'unico parametro che entra in gioco.

Esempio (parete a sego): Se il fluido arriva da direzione opposta non vedrà la stessa resistenza.

\rightarrow Anche la scabrezza dipende solo dalla geometria

\Rightarrow Si introduce allora il concetto di SCABREZZA EQUIVALENTE (legato alla quantità di energia dissipata).

Questo concetto deriva da una serie di esperimenti studiati da NIKURADSE, in cui si occupava di valutare le perdite di energia legate alle scabrezza.

→ la particella dopo l'opertà non riesce più a seguire la parete e si stacca da essa → sotto si crea un vortice, → Dietro ognuna delle opertà che fuoriescono dal substrato comune si creano dei vortici (turbolenze)

→ ciò fa sì che le dissipazioni di energia crescano

In generale: Qualunque parete può comportarsi come liscia o scabra a seconda dello spessore del substrato limite comune.

Da cosa dipende il valore di f ?

NB: f è legato essenzialmente al n° di Reynolds → Al crescere del n° di Reynolds f diminuisce. (a volte se Re è troppo grande non c'è neanche lo strato limite).

• VELOCITÀ D'ATTEZZO (shear velocity):

È una velocità fittizia, indicata con u^* . È fittizia in quanto non è riferita a una zona del profilo di velocità ma rappresenta l'effetto degli sforzi tangenziali sui profili di velocità del fluido.

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad \left[\frac{m}{s} \right]$$

τ_0 → sforzo tangenziale in parete
 ρ → densità del fluido
 u^* → velocità d'attacco

→ tramite un numero, Re^* , la velocità d'attacco permette di distinguere i due comportamenti di una

condotta (liscia o scabra)

PARETE → USCIA → se $Re^* = \frac{u^* \cdot E}{\nu} < 5 \Rightarrow$ No effetto scabrezza

PARETE → SCABRA → se $Re^* = \frac{u^* \cdot E}{\nu} > 70$

↳ Il numero Re^* è un parametro graduale da una situazione all'altra.

→ Re^* è quindi proporzionale a $\frac{E}{\nu}$ (scabrezza).

• TEOREMA II (o TH. DI BUCKINGHAM):

Permette di ordinarizzare i parametri fondamentali che contengono un esponente o un'unità misurate. Si tratta di un'analisi dimensionale che serve a ridurre il n° di variabili in gioco.

In generale → studio un fenomeno con N grandezze angio (ai) e devo trovare il legame tra a_1 e le altre grandezze, in quanto a_1 dipende da tutte le altre grandezze.

$$\Rightarrow a_1 = f(a_2, a_3, \dots, a_N)$$

Ma come calcolo J ?

J è adimensionale \rightarrow conviene allora lavorare tutto che è legato a J .

$$\rightarrow \gamma_0 = \gamma \cdot \frac{\Delta}{4} \cdot J$$

\rightarrow Dato trovare il coefficiente γ_0 e le altre grandezze che influenzano l'angolo dimensionale. Questo si fa quindi:

$$\gamma_0 = f(\rho, \mu, \nu, D, E)$$

Proprietà del fluido

velocità media \rightarrow definire il metodo fluido

caratteristiche della condotta \rightarrow il D e la rugosità cambiano gli spari tangenziali.

- \Rightarrow In totale:
- $N=6$ grandezze in gioco;
 - $M=3$ \rightarrow grandezze dimensionalmente indipendenti tra loro
 - $\rightarrow N-M=3 \Rightarrow \bar{n}=3 \rightarrow$ gruppi adimensionali da determinare

Come M scelgo: ρ, μ, D (ottenerei comunque lo stesso risultato scegliendo altre)

$$\bullet [\gamma_0] = \frac{N}{m^2} = M \cdot L^{-2} \cdot T^{-2}$$

$$\bullet [D] = L$$

$$\bullet [\rho] = \frac{kg}{m^3} = M \cdot L^{-3}$$

$$\bullet [E] = L$$

$$\bullet [\mu] = Pa \cdot s = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$$

$$\bullet [u] = L \cdot T^{-1}$$

\Rightarrow E ho 3 gruppi adimensionali; per il teorema π potremmo avere:

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3)$$

$$\Rightarrow \pi_1 = \frac{\gamma_0}{\rho^a \cdot \mu^b \cdot D^c}$$

\rightarrow devo scegliere a, b, c in modo che π_1 sia adimensionale:

\Rightarrow In termini di:

- $[M] \rightarrow a=1$

$$- [L] \rightarrow -3a + b + c = -1$$

$$- [T] \rightarrow -b = -2$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a=1 \\ b=2 \\ c=0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_1 = \frac{\gamma_0}{\rho \cdot \mu^2}}$$

$$\Rightarrow \pi_2 = \frac{\mu}{\rho^a \cdot \mu^b \cdot D^c}$$

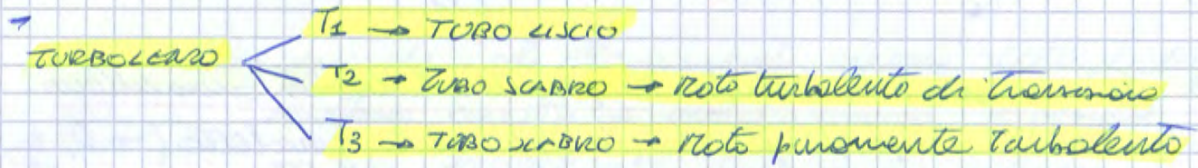
$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a=1 \\ -3a + b + c = 1 \\ -b = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a=1 \\ b=1 \\ c=3 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_2 = \frac{\mu}{\rho \mu D}}$$

Si divide principalmente in 2 zone:

- (1) Moto laminare in $Re < 2000$
- (2) Moto turbolento in $Re > 4000$

La zona di moto turbolento si suddivide in tre componenti:



• MOTO LAMINARE

(1) Una linea retta separa la zona di moto laminare (retta perché gli assi sono logaritmici)

La λ di moto laminare:

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64 \cdot \mu}{\rho u D}$$

→ valore di λ di moto laminare
MOTO L.A.

N.B. (il legame è sperimentale). Inoltre la scadenza relativa non entra in gioco perché non c'è turbolenza.

$$\Rightarrow J = \lambda \frac{u^2}{2g\Delta} = \frac{64 \mu}{\rho u D} \cdot \frac{u^2}{2g\Delta} \Rightarrow$$

$$J = \frac{32 \mu u}{\rho \Delta^2}$$

→ valore di J di moto laminare

Assunzione trovata: $u = \frac{\rho D^2 J}{32 \mu}$

(2) • T₁ → TUBO LISCIO:

$$\lambda = \lambda(Re, \frac{\epsilon}{D})$$

→ Anche in tubo liscio la scadenza relativa non entra in gioco

detta
FORMULA →
DI
BLASIUS

$$\lambda = 0,316 \cdot Re^{-0,25}$$

→ valore di λ in tubo liscio

→ eq: $\frac{T_2}{T_1} = 2 \log \left(\frac{Re \sqrt{\lambda}}{2,51} \right)$

• T₂ → Moto turbolento di transizione:

$$\lambda = \lambda(Re, \frac{\epsilon}{D})$$

T₂

• T₃ → Moto assolutamente turbolento

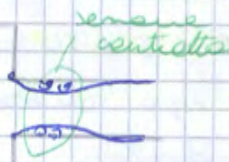
$$\lambda = \lambda(Re, \frac{\epsilon}{D})$$

→ il no di Re non entra più in gioco
ma $\lambda = cost$

→ infatti non ci sono più le ϵ viscosi, cioè non hanno + effetto
ma le ϵ turbolente sono troppo più forti.

vena fluida principale che si muove, anch'esso sarà vena in movimento e avremo deviazioni stazionarie, stabili in quella regione.
 → Questi vortici dissipano energia, sono quindi delle perdite concentrate ed esse sono il cerchio di D.

Caso:



In generale gli allargamenti causano delle perdite maggiori rispetto ai restringimenti di sezione.

→ Gli allargamenti dissipano più energia
 → anche in questo caso si creano deviazioni ma più piccole:

In generale:

come fenomeni turbolenti
 come fenomeni viscosi

- si creano vortici stazionari che sono in movimento;
- in un istante in un momento e un'ora gli vortici del fluido devono dissipare energia
- ⇒ Si vedrà la presenza di una perdita totale di carico totale del fluido (ΔH)

→ In generale lo valutazione avviene tramite:

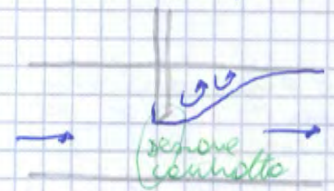
$$\Delta h_{conc} = K \cdot \frac{v^2}{2g}$$

costante che varia da caso a caso → dipende dalla geometria

terme cinetica → più è alta la velocità, più energia viene dissipata nel fluido e più grande sono le dissipazioni

NB: L'unico modo con il quale le perdite di carico sono ridotte drasticamente → ciò avviene tutte le volte che si usano strumenti in la regione della perdita (es. rubinetto, valvole/saracinesche ecc.)

Es. Saracinesca piena:



Il fluido è obbligato a passare per una parte ridotta di condotta. Si creerà allora una vena contratta. Per il fluido occorrerà tutto il D.

Caso: BRUSCO ALLARGAMENTO:

Considero una condotta inclinata (il ΔH non cambia se inclinata o meno) e considero un volume di controllo tra le sezioni ① e ②

$S_1 =$ sezione ①

NB: tutte le volte che c'è un allargamento o un restringimento si ha il RECUPERO DEL CARICO PIEZOMETRICO.

Per la perdita di carico totale si ha:

$$\Delta H = H_1 - H_2 \stackrel{\text{per def.}}{=} h_1 + \frac{u_1^2}{2g} - \left(h_2 + \frac{u_2^2}{2g} \right) = (h_1 - h_2) + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2g}$$

aggiungo $\frac{u_1^2 - u_2^2}{2g}$ a (1)

$$\Rightarrow \frac{2}{2} \cdot \frac{u_2}{2g} (u_2 - u_1) + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2g} = \frac{1}{2g} (u_2^2 - 2u_1 u_2 + u_1^2 - u_2^2) =$$

$$= \frac{u_1^2 - 2u_1 u_2 + u_2^2}{2g} = \frac{(u_1 - u_2)^2}{2g}$$

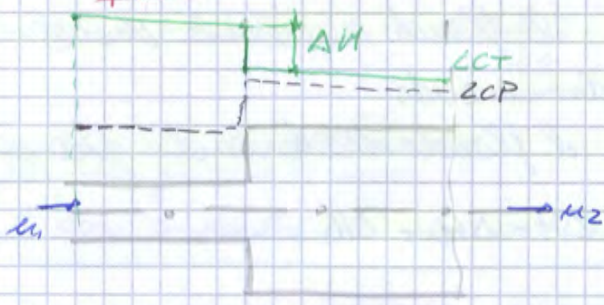
ΔH
BUNESCO
ALLARGA:
PIÙ
RISTRINGE:
MENO

$\Delta H_{conc} = \frac{(u_1 - u_2)^2}{2g}$

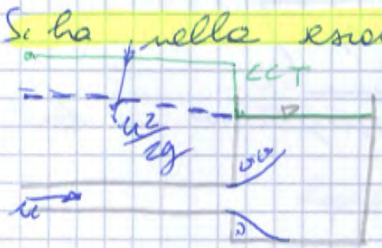
↑
per primo allargamento

→ Le misure della differenza di un aumento rispetto di carico.

→ Dove ho ΔH aumento invece Δh ma diminuisce u



Caso: PERDITA DI SBocco



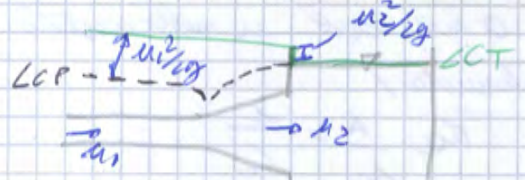
Si ha nella sezione terminale di una condotta. Nel serbatoio il fluido è più o meno fermo mentre all'imboccatura lo è meno.

→ Passando da una u massima maggiore a una u minore sono simili al caso di allargamento con $u_2 \rightarrow 0$.

NB: Nel caso di sbocco di condotta la perdita di carico è per il termine cinetico: $\Delta H = \frac{u^2}{2g}$ → ΔH di SBocco

→ Il fluido ha una certa energia cinetica e la dissipa completamente, perché u nel serbatoio è pari a 0.

→ Se voglio ridurre l'entità delle perdite di carico (ΔH) allora devo ridurre la velocità del fluido tramite un divergente.



→ $\Delta H = \frac{u^2}{2g}$

→ v_2 è collegata ad u_1 allora a una sezione di D solo nell'ultimo tratto.

$$\Rightarrow \Delta H_1 = \frac{u^2}{2g} \cdot \frac{1}{C_c^2} \left(\frac{1}{C_c^2} - 1 \right) = 0,1 \cdot \frac{u^2}{2g}$$

\rightarrow Nel tutto prima si perde il 10% del termine metrico che ha all'interno dello condotto.
 sono tutti termini noti \rightarrow vale 0,1

Per **Tubo 2** la tubazione è conduplicabile a brusco allargamento con cambio di velocità da $u_c \rightarrow u$ (con $u_c > u$)

$$\Rightarrow \Delta H_2 = \frac{(u_c - u)^2}{2g} = \frac{\left(\frac{u}{C_c} - u \right)^2}{2g} = \frac{u^2}{2g} \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2$$

$\rightarrow = 0,4$

formula con brusco allargamento

$$\Rightarrow \Delta H_2 = 0,4 \frac{u^2}{2g}$$

In definitiva, la perdita di carico d'imbocco risulta:

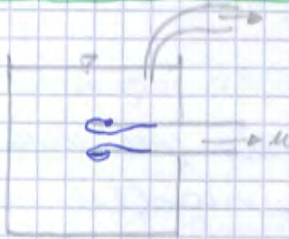
$$\Delta H_{\text{imb}} = \Delta H_1 + \Delta H_2 = 0,5 \frac{u^2}{2g}$$

\rightarrow Perdita di carico all'imbocco spigoloso
 \rightarrow complessivamente si ha una perdita di carico pari a metà del termine metrico.

NB: la perdita d'imbocco è minore rispetto alla perdita di sbocco

In questo caso si parla di perdita d'imbocco a spigolo vivo

Caso: PERDITA D'IMBOCCO CON TUBO ADDIZIONALE INTERNO



La tubazione non inizia in corrispondenza della parete ma è più interna

(È anche la configurazione che si verifica, e vede a perdere il liquido da una vasca raggiungendo al di sopra una tubazione.)

Proprio il caso precedente si ha sempre la formazione di una zona contratta, questa volta ancora più ~~colta~~ piccola (\rightarrow + perdite), dato che adesso alcune particelle di fluido devono fare un angolo di 90° .

$$\Rightarrow \text{Per questo caso si ha: } \left[C_c = \frac{A_c}{A} = 0,5 \right]$$

e si ottiene una perdita totale di carico pari a:

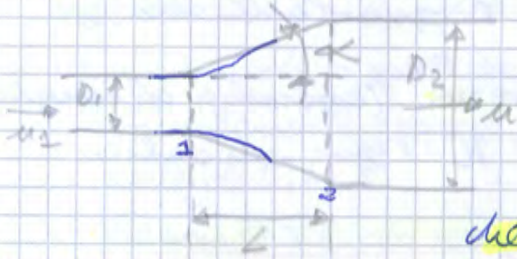
$$\Delta H = \frac{u^2}{2g}$$

\rightarrow Perdita di carico all'imbocco con tubo interno.

\rightarrow Si ha una perdita di carico doppia rispetto al caso prima.

ΔH imbocco con tubo interno

Per il DIVERGENTE invece c'è la perdita di carico, perché opp.



il fluido entra nel divergente nella sezione 1 e tende ad esercitare una separazione della vena fluida dalla parete e quindi si crea una sezione contratta, che in questo caso non risulta trascurabile.

NB: Il tratto divergente deve essere connesso a α o da L .

⇒ Da prove sperimentali si è ottenuto:

ΔH
DIVERGENTE

$$\Delta H = K \cdot \frac{u^2}{2g} \quad \text{dove } K = K\left(\frac{D_2}{D_1}, \alpha\right)$$

↳ Perdita di carico per tratto divergente

NB: Più α è piccolo, e quindi L lungo, minore sarà la perdita di carico.

⇒ La forma che minimizza al massimo le perdite di carico è con il tratto divergente raccordato:



In questo modo il distacco tenderà ad avvenire nelle zone di valle dove il fluido è già più lento e quindi avrà meno ΔH .

⇒ In questo caso allora il ΔH risulta trascurabile $\Rightarrow \Delta H \approx 0$

NB: In ogni caso le perdite distribuite $\Delta H \propto \frac{u^2}{2g}$

↳ se divergente raccordato

• FORMULE EMPIRICHE (per le PERDITE DISTRIBUITE)

Invece di usare il diagramma di Moody (che comunque rimane valido e più preciso) si possono utilizzare formule empiriche più semplici.

NB: Sono valide solo per moto ASSOLUTAMENTE TURBOLENTO, cioè quando $\lambda = \text{cost}$.

L'obiettivo è quindi il calcolo di $\Delta H_{distrib.}$ in modo più semplice.

• LEGGE DI DARCY:

per moto TURBOLENTO

$$J = \beta \cdot \frac{Q^2}{D^5}$$

↳ Legge di Darcy → moto turbulento
dove J = costante della $l.c.t.$,
 β è un coefficiente che tiene conto della sabbrezza.

È elevato a n poiché questa formula

si può trovare con:

- $n=5 \rightarrow \beta = f(\text{sabbrezza, diametro})$
- $n=5,33 \rightarrow \beta = f(\text{sabbrezza})$

↳ il risultato che si ottiene è costante

LUNGHE CONDOTTE

Corso in cui la lunghezza della condotta diventa rilevante.

In questo modo si può fare una semplificazione: quando la lunghezza è sufficientemente grande, allora le perdite di carico che prevalgono sono quelle distribuite.

⇒ Possiamo allora semplificare l'equazione di bilancio energetico trascurando le perdite localizzate.

In questo modo possiamo risolvere problemi più complicati costituiti da più condotte nello stesso sistema ⇒ avere le RETI DI CONDOTTE. (es. decodotti, acquedotti, reti di distribuzione di impianti industriali ecc.)

Lunghe condotte: (definizione energetica) → una condotta è lunga quando le perdite di carico concentrate sono molto più piccole rispetto a quelle distribuite.

$$\Rightarrow \boxed{\Delta H_{conc} \ll \Delta H_{distr}}$$

$$\quad \quad \quad \propto \frac{u^2}{2g} \quad \quad \quad = J \cdot L$$

In termini analitici si considera lunga condotta quando:

$$\frac{u^2}{2g} \leq 0,01 \cdot J \cdot L \quad \Rightarrow \quad \frac{u^2}{2g} \leq 0,01 \cdot \lambda \cdot \frac{u^2}{2g} \cdot L$$

$$\Rightarrow \boxed{L \geq \frac{1}{0,01 \cdot \lambda} \cdot D}$$

→ L deve essere superiore a questo valore perché la condotta sia definita lunga.

Esempio: $\lambda = 0,015 \rightarrow L \geq 1000 \cdot D$

Semplificazioni:

(1) Trascuriamo le perdite concentrate (in quanto sono $\ll \Delta H_{distr}$)
→ allora il bilancio energetico diventa:

$$\boxed{H_{in} - H_{fin} = J \cdot L} \quad (1)$$

(2) Bilancio totale zero: $H = h + \frac{u^2}{2g}$ → se H è grande possiamo trascurare il termine metrico

⇒ trascuro termine metrico perché $\ll H$

⇒ Il carico totale coincide con il carico perimetrico

$$\Rightarrow \boxed{H \approx h \quad \rightarrow \quad \angle CT \approx \angle CP} \quad (2)$$

Per il caso (B) $\rightarrow \Delta H = J \cdot L$

\Rightarrow affinché i due sistemi siano equivalenti deve essere:

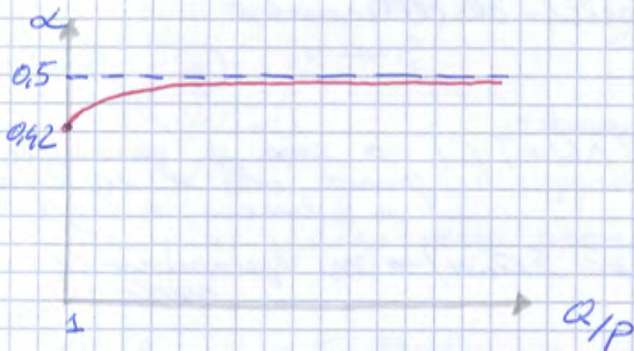
$$\Delta H(A) = \Delta H(B)$$

\downarrow reale \downarrow fictizio

N.B.: α molto come rapporto tra portate tra i due nodi.

$$\Rightarrow H_A - H_B = J \cdot L = \frac{B(Q - \alpha P)^2}{D_m}$$

Devo scegliere l'opportuno da usare l'equivalenza dei 2 casi:



Poiché $\alpha \rightarrow 0,5$ molto presto, di solito si prende $\alpha = 0,5$

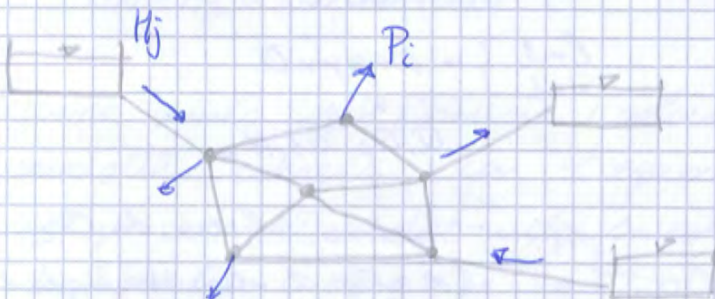
Stimanti le energie + precisi con un grafico.

Possibili problemi con lunghe condotte:

- PROBLEMI:
- VERIFICA, quando bisogna verificare una condotta esistente; l'obiettivo è quello di calcolare Q note le caratteristiche della condotta.
 - PROGETTO, quando devo progettare una condotta; il problema sarà determinare D mentre è nota Q .

VERIFICA DI UNA RETE: \rightarrow verifico una rete esistente.

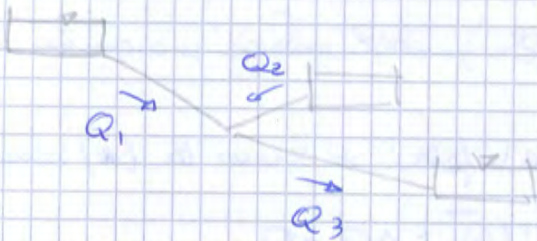
Caso: RETE A MAGLIA



I vertici rappresentano dei punti di un corso il cerchio. \rightarrow può essere un punto di alimentazione del sistema o può anche essere portata.

grazie alle semplici ipotesi possiamo concentrare sui nodi le portate distribuite.





⇒ Bilancio x massi:

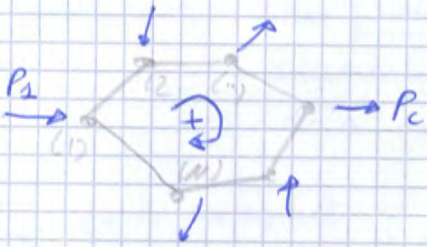
(1) $Q_1 + Q_2 = Q_3$

(2) e (4) ramorgono uguali

(3) ⇒ $H_2 - H_1 = k_2 Q_2^2$

MEZODO DI HARDY-CROSS:

È un metodo semplificato iterativo per la ricerca di rete a maglie.



1) Dev scegliere la direzione e il senso delle portate su tutti i lati

→ bisogna scegliere un senso di circolazione che rappresenti valori di portate positive ($Q > 0$)

Per esempio sceglgo verso orario ⇒ $Q > 0$ e contrario $Q < 0$ e discorde

tramite una strategia per dare segno negativo o meno di ΔH :

$$\Delta H = \beta \frac{Q^2}{D^5} L = k Q^2$$

$$\Rightarrow H_{i1} - H_{i2} = k_i |Q_{i1}| Q_{i1}$$

In generale si scrive:

$$\begin{cases} H_1 - H_2 = k_1 |Q_1| Q_1 \\ H_2 - H_3 = k_2 |Q_2| Q_2 \\ \vdots \\ H_N - H_1 = k_N |Q_N| Q_N \end{cases}$$

→ chiamando x il senso:

$$\sum k_i |Q_i| Q_i = 0$$

Questa lo chiamo $f(Q_i) = 0$

A questo punto devo istruire i valori delle portate (Q_i) nelle condotte, coerenti con l'equazione di continuità:

usò, per esempio, del nodo 1 entrerà $Q = 100$ → deve essere distribuito a dx e a sx → $100 \begin{matrix} 70 \\ -30 \end{matrix}$

⇒ In questo modo posso scrivere le Q_i come:

$$Q_i = \bar{Q}_i + \Delta Q$$

(vera) (oppur) (convenire)

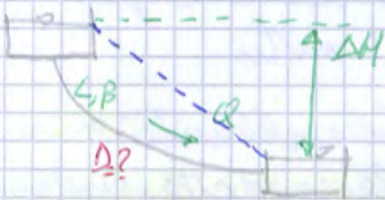
→ In questo ΔQ rimetterò l'incognita perché per ogni maglia si ha una sola convenzione.

EQUAZIONI : . Bilancio energetico [C] $\rightarrow (\Delta H = \rho c \Delta T \dot{V} L)$
 . Conservazione ($\sum Q_{in} = \sum Q_{out}$) \Rightarrow NB: questa equazione non serve per risolvere come uniche incognite le portate che in questo problema non sono incognite.

\rightarrow l'equazione \Rightarrow Ho più incognite che equazioni \Rightarrow è quindi un problema INDETERMINATO. \Rightarrow Esistono infinite soluzioni, \rightarrow Di tutte queste si sceglie quella che costa meno.

\Rightarrow $\left. \begin{array}{l} l + n \text{ incognite} \\ l \text{ equazioni} \end{array} \right\} n \text{ gradi di libertà} \Rightarrow$ esistono ∞ soluzioni (cioè combinazioni di diametri) che soddisfanno il problema
 \Rightarrow servono ulteriori vincoli (n) che servono equazioni di minimo costo.

Corso: Condotta semplice \rightarrow Corso non indeterminato perché ho un'unica incognita e ho 1 equazione.



$$\left. \begin{array}{l} l=1 \\ n=0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{incognita } \Delta$$

1 equazione \rightarrow bilancio energetico:

$$\Delta H = \beta \frac{Q^2}{D^5} \cdot L \Rightarrow D = \sqrt[5]{\frac{\beta Q^2 L}{\Delta H}} \rightarrow \text{DIAMETRO TEORICO}$$

È un diametro Teorico \rightarrow Non è detto infatti che i materiali abbiano disponibile questo diametro (es. ho $D=127 \text{ mm}$ ma nei cataloghi ho $0, 100 \text{ mm}$ o 150 mm)

\Rightarrow NB: Non posso utilizzare il diametro teorico che ho trovato ma ho dei DIAMETRI STANDARD/COMMERCIALI.

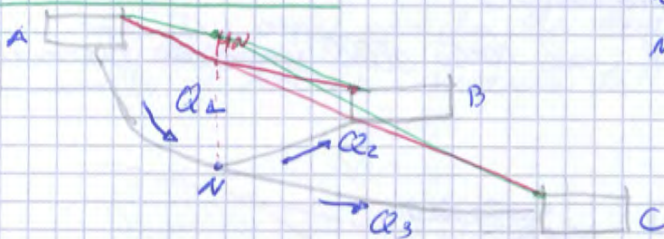
\rightarrow Devo fare un confronto:

$$D_1 < D_{\text{teorico}} < D_2 \Rightarrow \text{uso sia } D_1 \text{ che } D_2$$

Se la scelta è piccola si va su quello più prossimo e non usano problemi.
 Se la differenza è grande, quello che si può fare è fare la condotta con due diametri diversi.

nella condotta \Rightarrow grosso problema. Può essere così in cui invece che essere a contatto con cui la condotta è sotto il terreno e c'è gas o altre impurità che entrano automaticamente il fluido interno della condotta \Rightarrow quindi è quanto a ricerca di citate premiare troppo bene.

Case: 3 SERBAZOI



$l=3$
 $m=1$ } $n+l$ incognite
 D_1, D_2, D_3, H_w

NB: H_w non è noto \rightarrow l'andamento è qualitativo. Può essere \rightarrow dato o più bene ma non $H_w < H_A$

Autonomia: con potenze rappresentate una

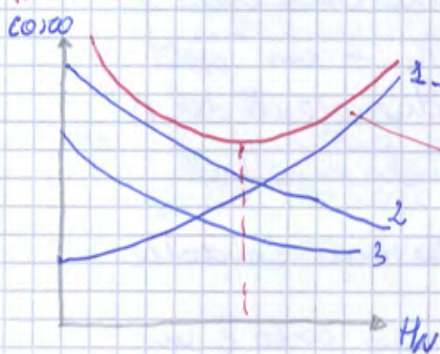
Nota: H_w deve essere $> H_B$ altrimenti la Q_2 non può scorrere lungo quel verso.

Non hanno tutte lo stesso costo per cui bisogna capire qual'uno le più vantaggiose.

diminuisce (\rightarrow I + piccolo vuol dire che ho aumentato il diametro)

Se H_w aumenta \rightarrow J_1 diminuisce $\rightarrow D_1$ aumenta
 J_2, J_3 aumentano $\rightarrow D_2, D_3$ diminuiscono

Il concetto fondamentale è che il costo di una condotta è direttamente proporzionale al diametro.



\rightarrow c'è sempre una configurazione di minimo. (qualitativo)

\rightarrow Andamento totale del costo \rightarrow ha un minimo

\rightarrow Esisterà un certo valore del costo e un certo valore del diametro che minimizzerà il valore complessivo

NB: il costo che voglio minimizzare però è la **PASSIVITÀ** dell'impianto. Questo \rightarrow rappresenta la spesa che devo sostenere in un dato periodo di tempo (di solito annualmente) per mantenere l'impianto funzionante. [€/anno]

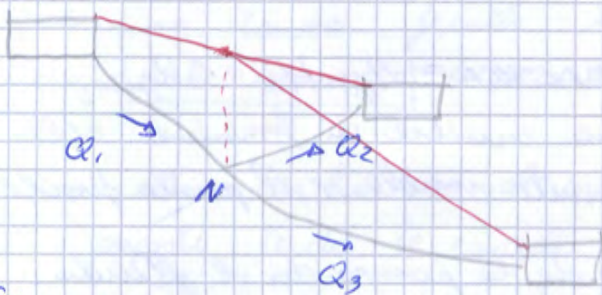
Si ottiene:

$$\sum_N \frac{D_i^{n+E}}{Q_i^2} = \sum_{out} \frac{D_i^{n+E}}{Q_i^2}$$

→ EQUAZIONE DI MINIMO COSTO (d'ordine)

in derivata da: $J = P \frac{Q^2}{D^{(n)}}$ mentre E dell'eq. del costo impianto

→ Poss. scrivere quindi n equazioni per il n nodi; cioè una per ogni grado di libertà del sistema → in questo modo il sistema diventa determinato



Come sarà il sistema finale da risolvere?

Inognite: D_1, D_2, D_3, H_N

Equazioni:

- 1) $H_A - H_N = \beta_1 \frac{Q_1^2}{D_1^n} \cdot L_1$
- 2) $H_N - H_B = \beta_2 \frac{Q_2^2}{D_2^n} \cdot L_2$
- 3) $H_N - H_C = \beta_3 \frac{Q_3^2}{D_3^n} \cdot L_3$
- 4) $\frac{D_1^{n+E}}{Q_1^2} = \frac{D_2^{n+E}}{Q_2^2} + \frac{D_3^{n+E}}{Q_3^2}$

→ Il sistema è determinato

→ sistema valido in reti adalbero e non in reti a maglie chiuse.

NB: Per un sistema a maglie chiuse questo sistema non è applicabile perché entrano altre equazioni in gioco → ho soluzioni differenti → non lo vedremo noi.

⇒ di ottenere:
$$P_{EN} = C_{EN} \cdot \frac{\rho Q^2 H_p}{\eta} \cdot T = C_{EN} \cdot \frac{\rho Q T}{\eta} \left(\Delta H_g + \frac{\beta Q^2}{D^5} L \right)$$

$[E/kWh] \cdot [kW] \cdot [h/anno]$
 $[E/kWh] \cdot [h/anno]$
 HP

NB: La P_{EN} è inversamente proporzionale al Δ → + aumento D meno costa la potenza.

⇒ Ci sarà quindi un diametro ottimale che minimizza i costi totali.

→ T non sarà 24 h al giorno in 365 giorni l'anno. Di solito è più conveniente pompare di notte perché costa di meno rispetto al giorno. → fluido nel serbatoio quando il costo dell'energia è minore e poi lo sfrutta durante il giorno.

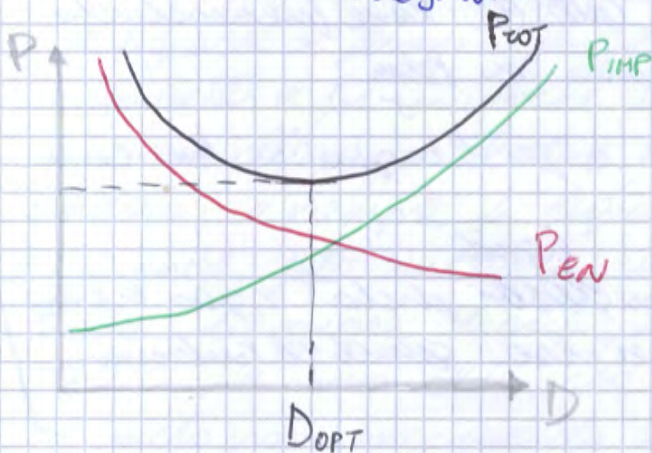
NB: → Allora si ha che il crescere del diametro l'effetto è opposto, perché le condotte hanno un costo maggiore e questo riflette sulla portata dell'impianto che risulta più alta.

→ Condotta maggiore implica costi maggiori.

Viceversa invece succede di termine legato all'energia perché se ho D grande vado a diminuire le perdite di carico distribuite.

⇒ D aumento ↑ P_{IMP} aumenta ↑
 P_{EN} diminuisce ↓

Possiamo disegnare:



→ domandando le due curve ottengo una funzione totale che avrà un punto di minimo. Possiamo andare a leggere allora il diametro ottimale dell'impianto → D_{OPT}

→ trovato il D devo ancora definire le caratteristiche pompe.

Ma una volta fissato il diametro sostituisco nella (1) e trovo il valore di H_p .

Possiamo poi trovare anche la potenza e definire completamente le caratteristiche della pompa: $POT_{max} = \frac{\rho Q H_p}{\eta}$

1) FUNG. NORMALE $\Rightarrow Q \leftrightarrow \Delta H = \beta \frac{Q^2}{D^5} \cdot L$

2) Andamento di una condotta che va ad intersecare la piezometrica relativa ma sta un po' al di sotto della linea del cono del 1° esbatoio.

→ il tratto AB si trova sopra la piezometrica relativa. Succede che quel tratto si troverà ad essere in DEPRESSIONE ($p < 0$)
 → il fenomeno un po' è analizzabile in termini di portate. In quanto ho la stessa portata della condotta + parte il bilancio di energia non cambia, ma quello che cambia è che ho il tratto AB in depressione.

Può essere o meno un problema in quanto non è chiaro dal punto di vista della condotta ma in termini di portate non cambia niente.

2) FUNG. ANOMALA (Q), HA TRATTO AB IN DEPRESSIONE

3) In questo caso la condotta sopra sempre la piezometrica relativa ma sopra anche il cono (relativo) del primo esbatoio.

Continuando ad avere la stessa portata, non vengono problemi di riduzione delle portate (il bilancio energetico è costante) e abbiamo un tratto in depressione tra C e D.

Però nei tratti che vanno a superare la linea relativa alla quota dell'esbatoio la condotta deve essere **INNESCATA**.

Ovvero, quando il liquido arriva in C se non faccio niente il liquido si ferma perché non c'è più un cono sufficiente a far muovere il fluido.

Innescare allora vuol dire rimuovere l'aria presente nella condotta e riempirla di liquido tutto la condotta.

→ può essere fatto inchiavim ma fondamentale in tratti di aspirare l'aria, in modo che il fluido possa andare oltre C, e una volta che mette in contatto il due esbatoi il moto poi prosegue da solo.

L'innescio è quindi solo una fase iniziale, devo aspirare l'aria per avviare il moto nella condotta e poi andare avanti da solo, a pompa spenta.

3) COME IN 2) MA IN + SERVE INNESCIO (es. trovare vino → serve pompa per aspirare aria)

Ho però lo stesso J' tra la condotta h e il punto del secondo vortice o $p_{oss} = 0$.

Nel tratto compreso tra F e P si sviluppa un moto particolare in quanto il liquido non riempie più tutta la sezione della condotta ma ne riempie solo una parte.

⇒ si ha allora un **MOTO A CANALICELLA**, cioè un moto che (stranamente e simile a un canale che ama condotta) in cui il liquido non riempie interamente la sezione della condotta ma solo una parte.

⇒ si ha allora che la piezometrica va a coincidere con la condotta stessa.

→ 4) **FUNE CON PORTATA RIDOTTA**: - in teoria $p_F^{acc} < 0$
 - in pratico $p_F^{acc} = 0$; $p_F^{vel} = -p_{oss}$

$$J' < J \Rightarrow Q' < Q$$

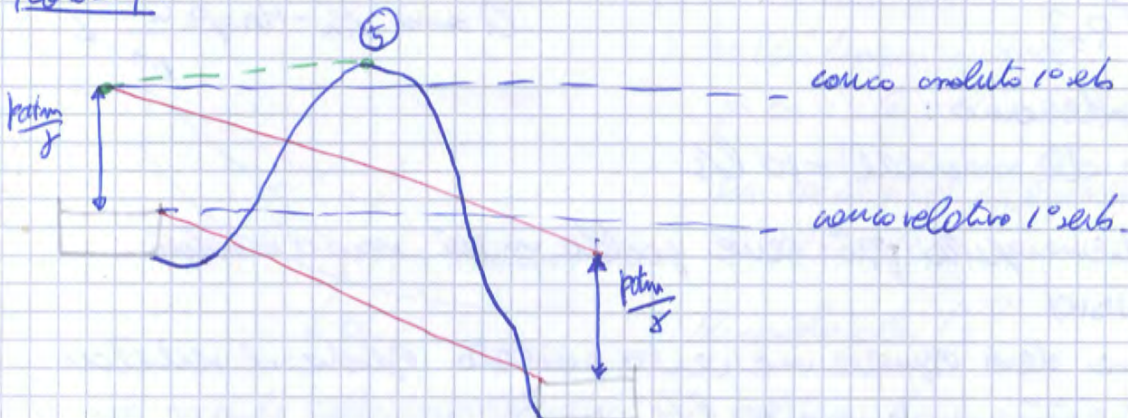
→ **TRATTO FP: MOTO A CANALICELLA**



→ In pratica teoricamente la pressione può essere zero → ma anche il moto non avviene a sezione piena e ciò permette che la piezometrica abbia quell'andamento particolare.

⇒ il concetto fondamentale è che la **PORTATA DIMINUISCE** quanto più il corso VF è grande.

Corso 5:



Corso limite, in cui la condotta riprende le quote del corso assoluto dell'imboccatura.

In questi corsi il deflusso non può avvenire, cioè la portata all'interno delle condotte non può che essere nulla.

NB: Quindi questa richiesta aggraverà molto tutto. Non solo la permeabilità del 2° tratto, ma di conseguenza anche quella del 1°. Nel tratto 1 ho J_1' che è più basso rispetto a quelle che avevo in condizioni normali.

TRATTO 2: $Q_2' = 30 \text{ l/s} \rightarrow J_2' > J$

TRATTO 1: $J_1' < J \rightarrow Q_1' < 20 \text{ l/s}$

NB: Se modifico J , ma ho lo stesso condotto, allora quello che cambia è la portata. Quindi nel tratto 1 non passeremo più 20 l/s come prima ma ne passeremo di meno.

Cono di portata emblematice che la portata entrante tende ad essere con:

⇒ PROCEDIMENTO CALCOLO P:

- calcolo conto $H_N' = H_B + J_2' \cdot L_2$

⇒ L_2 calcolato con 30 l/s

- $J_1' = \frac{H_2 - H_N}{L_1} \Rightarrow$ calcolato J_1' sono calcolate Q_1' (p.e. velocità 10 l/s)

- allora sarà $P = Q_2' - Q_1'(-1 + L_1)$

• SCARICO D'EMERGENZA:

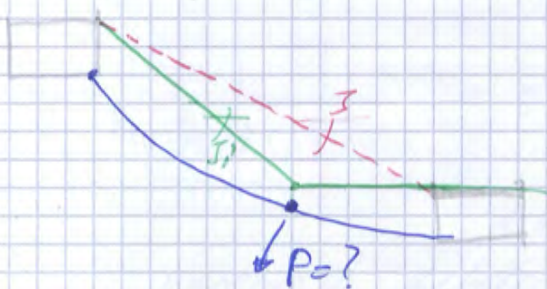
situazione per cui in qualche motivo è necessario (scattare) tutta la portata che passa nella condotta

• In condizioni normali:

p.e. $Q_1 = Q_2 = 20 \text{ l/s}$

• In condiz. d'emergenza voglio che = $Q_2' = 0$

Quanto vale P?



Se nel secondo tratto devo avere $Q_2' = 0$ allora la permeabilità deve essere orizzontale e J deve essere nullo.

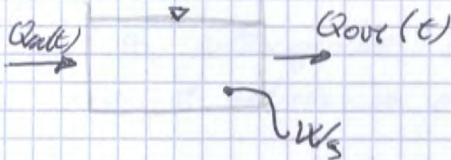
⇒ quindi $H_N \approx H_B$ e J_1' avrà un valore più elevato, ovvero sarà maggiore rispetto alle condizioni normali:

$H_N' = H_B \Rightarrow J_1' > J$

SERBATOI : REGOLAZIONE PORTATE

Quale volume devo avere il serbatoio in modo da regolare la portata che voglio?

→ Dimensionamento serbatoio → accumulo fluido in eccesso quando non serve e lo lascia quando la richiesta è in eccesso.



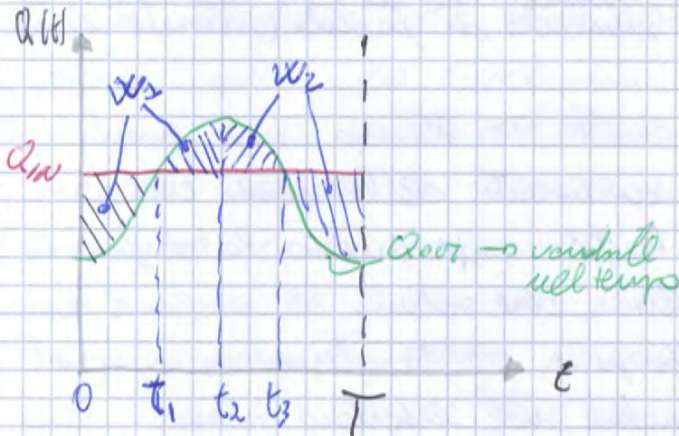
Q_{in} e Q_{out} sono funzione del tempo.
 → il livello cambierà nel tempo
 → quale volume si deve avere il serbatoio per gestire la Q ?

Esistono poi casi in cui Q_{in} e Q_{out} sono ^{costanti} e allora non ho problemi.

Definisco **CAPACITÀ DI COMPENSO** come volume minimo (W_s) che il serbatoio deve avere in modo da poter effettuare la regolazione delle portate.

• Caso: **alimentazione costante** ($Q_{in} = \text{cost}$)

$Q_{in} = \text{cost}$ $Q_{out} = Q_{out}(t)$

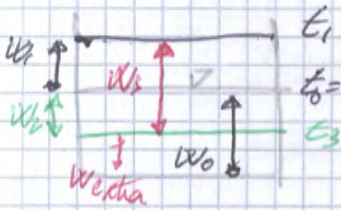


La regolazione consiste nel "mettere d'accordo" queste due leggi di portate, che hanno una finestra temporale tipica di variazione → nel senso che T sarà un tempo caratteristico di regolazione tale per cui, mediamente, all'interno del tempo

di regolazione, il volume di fluido in ingresso al serbatoio è pari a quello in uscita (T può essere grandezza o più breve o lunga ecc).

- || → NB: in media si deve avere un * equilibrio → strumenti
- Il serbatoio non funziona più con lo scopo di regolare.
- il fatto che media di Q_{out} in T deve essere uguale a Q_{in}

Come noi quei 2 volumi mi permettono di individuare t_2 ?



All'inizio ho accumulato \rightarrow accumulato w_1 .
 tra t_1 e t_2 ho fase di svuotamento e svuoto proprio w_1 . \rightarrow sistema quindi allivella di t_0 . \rightarrow per produrre svuotamento fino a t_2 e poi ho di nuovo accumulato e tempo a livello t_0 a T .
 \rightarrow il ado è quindi periodico

1) w_0 : per poter gestire tutte queste variazioni di portata (volume) deve avere il volume in $\text{cm}^3 / \text{s} = w_1 + w_2$

$t=0$: $w_0 \geq w_2$ \rightarrow cioè il volume iniziale deve essere almeno pari a w_2 altrimenti il sistema non funziona \rightarrow al limite quindi il serbatoio deve avere un volume pari a w_2 .

Il volume extra deriva proprio dal fatto che $w_0 > w_2$ in questo caso.

MOTI DI FILTRAZIONE

È una categoria di moto diverso da quelli visti finora.

1) In tutti i moti che avvengono attraverso un materiale poroso, in cui una parte del volume totale è occupato da una matrice solida e quindi solamente una quota del volume complessivo è a disposizione per il moto del fluido.

(es. acqua tra tenere \rightarrow falde acquifere).

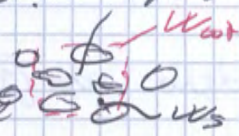
In ogni caso il mezzo poroso è costituito da una serie di vuoti connessi tra di loro in modo da permettere il movimento del fluido.

Quali sono le caratteristiche del mezzo poroso? w_{por}

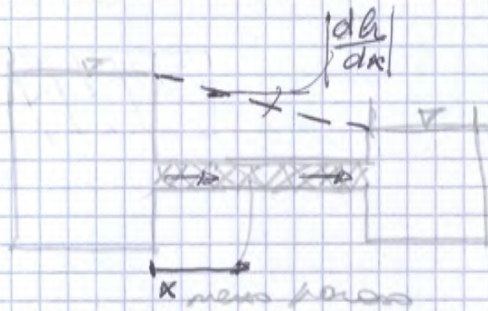
- POROSITÀ \rightarrow se considero un volume

all'interno del mezzo poroso, rappresentante

grande per poter rappresentare tutto il mezzo, all'interno di questo volume posso distinguere una parte occupata dai "grani" (w_s), cioè solida, e una parte occupata dai pori (w_{por}), cioè vuota e a disposizione del fluido.



Considero 2 tubi uniti da un mezzo poroso (filtro). A questa



"colonna" vedo a mpre i
condi a monte e valle,
formano spuntose la legge di Darcy.

La velocità che si sviluppa nel
sistema allora è:

NB: Velocità di campo
permeometrico può
essere zero e si
forma l'acqua.

$$v = K_0 \cdot \left| \frac{dh}{dx} \right|$$

$$\Rightarrow Q = v \cdot A$$

Considerando i 2 condotti per trovare dh/dx , poi usando la portata e
trovo $v \rightarrow$ in questo modo posso calcolare K_0 e K .

\Rightarrow NB: la velocità di Darcy è una velocità apparente, nel senso
che non è la velocità effettiva con cui si muove il fluido
ma è semplicemente il rapporto:

$$VELOCITÀ \text{ DARCY} = \frac{PORTATA}{AREA \text{ TOT}}$$

essendo l'area tot non tiene conto del
volume disponibile o mezzo filtrante (come
è il mezzo poroso non a pre)

Se voglio conoscere la velocità effettiva del fluido tra i
grani può essere calcolata come:

$$v_{eff} = \frac{v_{Darcy}}{\epsilon M} \rightarrow \text{velocità effettiva tra i grani}$$

↓
porosità



\Rightarrow In realtà questa rappresenta una
media di tutte le velocità che
sono effettivamente presenti tra i grani.

CORSO DI MECCANICA DEI FLUIDI - (Prof.ssa Ilaria Butera)

SCHEDA n°1

1 - Il peso molecolare del monossido di carbonio e' 28.01. Determinare la densita' del gas quando la pressione assoluta e' 350 KPa e la temperatura e' di 65 gradi Celsius.

- a)18 Kg/mc
- b)0,018 Kg/mc
- c)1800 Kg/mc
- d)3,5 Kg/mc
- e)3500 Kg/mc

2 - Un serbatoio di aria compressa contiene 5 Kg di aria (p.m. 28.5) alla temperatura di 80 gradi C. Un manometro segna la pressione del serbatoio pari a 300 KPa. Determinare il volume del serbatoio.

- a)1700 mc
- b)17 mc
- c)1,7 mc
- d)0,38 mc
- e)380 mc

3 - 1 mc di acqua e' contenuto in un recipiente rigido. Stimare la variazione del volume quando un pistone aumenta la pressione di 35 MPa.

- a)0, l'acqua e' incomprimibile.
- b)0,16 %
- c)1,6 %
- d)-0,16 %
- e)-1,6 %

4 - Stimare l'incremento di pressione richiesto per diminuire dello 0,1 per cento un volume unitario di mercurio (considerare la comprimibilita' del mercurio pari a circa 10 volte quella dell'acqua)

- a)2,05 Pa
- b)2,05 KPa
- c)20500 KPa
- d)20500 MPa
- e)incalcolabile, perche' il liquido e' incomprimibile.

5 - Dell'ossigeno (P.M. 32) inizialmente a 30 gradi C e a pressione assoluta pari a 300 KPa si espande a temperatura costante fino alla pressione di 170 KPa. Determinare la densita' finale del gas.

- a)21,8 Kg/mc
- b)0,002 Kg/mc
- c)2150 Kg/mc
- d)2,15 Kg/mc.
- e)I dati sono insufficienti per il calcolo.

6 - Qual e' il modulo di elasticita' di volume dell'azoto (P.M.28) mantenuto alla temperatura di 25 gradi C e con peso specifico pari a 30N/mc ?

- a)2,67 atm relative
- b)1,67 atm relative
- c)0,67 atm assolute
- d)0,22 atm assolute
- e)50 KPa

7 - Stimare la pressione relativa entro una goccia d'acqua sferica di diametro pari a 2 mm.

- a)0,019 Pa

- b)146 Pa
- c)19,61 Pa
- d)73 Pa
- e)0 Pa

8 - Ipotizzando che la tensione superficiale di una pellicola di acqua saponata sia il 70 per cento di quella dell'acqua, qual e' la pressione relativa entro una bolla di sapone di diametro pari a 7 cm.

- a)0,015 Pa
- b)1,45 Pa
- c)2,9 Pa
- d)145 Pa
- e)29 Pa

9 - Se R e' il peso specifico, D e' una lunghezza e b e' la tensione superficiale, quale delle seguenti espressioni e' adimensionale?

- a) bD^2/R
- b) RD/b
- c) $R^{1/3}b/D$
- d) RD^2/b
- e) RD/b

10 - Se V e' una velocita', l una lunghezza e f e' la tensione superficiale, indicare le dimensioni dell'espressione Vf/l :

- a) L^2/T^2
- b) $M/(LT^2)$
- c)L
- d) $M^2 L/T^3$
- e) M/T^3

4) Si ha di nuovo:

$$\frac{\Delta W}{W} = - \frac{\Delta P}{E} \rightarrow -0,001 = - \frac{\Delta P}{2,03 \cdot 10^9 \cdot 10}$$

$$\boxed{\Delta P = 2,03 \cdot 10^7 \approx 20500 \text{ kPa}} \quad \textcircled{c}$$

5) $P_1 = 32$
 $t_1 = 30^\circ\text{C}$
 $p_{01} = 300 \text{ kPa}$
 $p_2 = 170 \text{ kPa}$

Per una trasformazione isoterma vale:

$$pV = \text{cost} \rightarrow$$

$$\frac{p}{\rho} = \text{cost} \rightarrow p_2 = \frac{p_2}{p_1} \cdot p_1$$

Si trova l'eq. di stato dei gas:

~~$$p_1 V_1 = R T_1 \rightarrow \frac{p_1}{\rho_1} = R T_1$$~~

$$p \cdot V = n R T$$

$$\rightarrow p \cdot V \cdot m = \frac{n}{m} \cdot R T$$

$$\rightarrow \frac{p}{\rho} = \frac{n}{m} \cdot R T$$

$$\rightarrow \frac{p}{\rho} = \frac{R T}{M}$$

$$\rho_1 = \frac{p_1 \cdot M}{R T_1} \quad \text{con } R = 8314 \text{ J/KgK}$$

$$\Rightarrow \rho_2 = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{p_1 \cdot M}{R T_1} = 2,15 \text{ Kg/m}^3 \quad \textcircled{d}$$

9)

$$[R] = \frac{N}{m^3}$$

$$[D] = m$$

$$[b] = \frac{N}{m}$$

$$\frac{R \cdot D^2}{b} = \frac{\frac{N}{m^3} \cdot m^2}{\frac{N}{m}} = \frac{N \cdot m^2}{m^3} \cdot \frac{m}{N} = \frac{m^2}{m^2} = 1$$

(d)

10)

$$[V] = m/s$$

$$[p] = m$$

$$[f] = N/m$$

$$\frac{V \cdot f}{e} = \frac{\frac{m}{s} \cdot \frac{N}{m}}{m}$$

↓

$$1N = 1 \text{ Kg} \cdot \frac{m}{s^2}$$

→

$$\frac{\text{Kg} \cdot \frac{m}{s^2}}{m}$$

$$\boxed{\frac{V \cdot f}{e} = \frac{\text{Kg}}{s^3} = \frac{\text{massa}}{\text{tempo}^3}}$$

(e)

SCHEDA 2

(1)

1) La massa di una persona si considera di 80 kg



La mongolfiera è soggetta ad una spinta verso l'alto, da parte dell'aria (per principio d'Archimede) (S)
 Verso il basso si ha il peso del fluido contenuto all'interno della mongolfiera (F) e il peso delle persone (P).

$$S = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \rho_{aria}$$

$$F = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \rho_{aria} \cdot 0,6$$

$$P = n \cdot m \cdot g$$

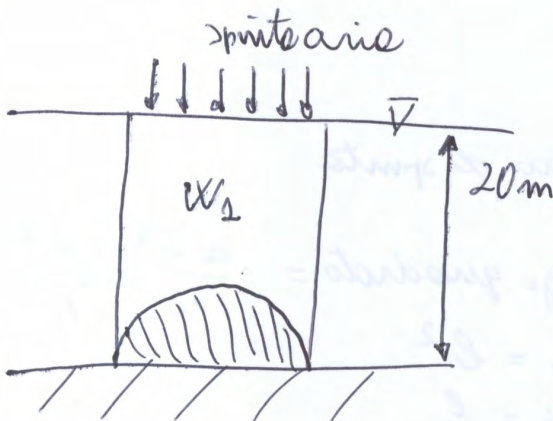
$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{aria} = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot 0,6 \cdot \rho_{aria} + n m g$$

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{aria} (1 - 0,6) = n m g$$

$$\rightarrow \left[n_{persone} = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{aria} (1 - 0,6)}{m g} \approx 3 \right]$$

(d)

2)



spinta verticale
 $S_v =$ peso del fluido compreso tra superficie e piano dei covichi idrostatici

$$S_v = \rho W_1$$

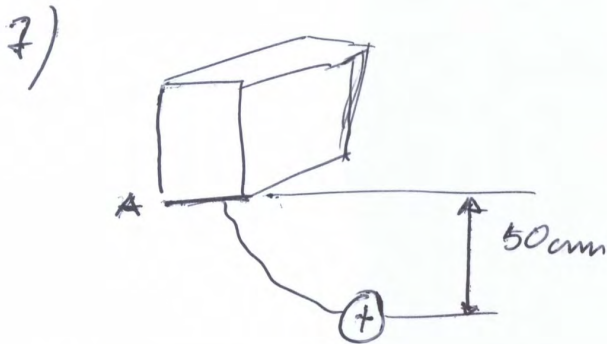
$$\text{con } W_1 = \pi R^2 h - \frac{2}{3} \pi R^3 = 1309,22 \text{ m}^3$$

m

La risposta esatta è la (d) → Facendo ruotare attorno ad AA' (2) si ottiene una circonferenza di raggio $x_c = \frac{2}{3} l$.

5) (d) → La spinta orizzontale su una superficie chiusa completamente immersa è SEMPRE nulla.

6) (a) → Per il principio d'Archimede la spinta verticale vale: $S_v = \gamma_{\text{liquido}} \cdot V$. E il volume e il liquido in cui sono immersi è lo stesso allora la spinta è uguale.

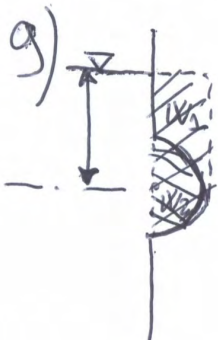


Il manometro metallico segna il valore di pressione alla quota del suo baricentro

$$p_A = p_{\text{man}} - \gamma \cdot 0,5 = 900 \text{ Pa} \quad (b)$$

8) (c) in quanto $x_c = \frac{I_{y_0}}{x_b \cdot \Omega} + x_b$ per cui $x_c = f(I_{y_0}, \Omega, x_b)$

\uparrow forma
 \downarrow nei p.c.i.e



$$\alpha = \arctg \frac{S_v}{S_0}$$

$$S_v = \rho (w_1 - w_2)$$

$$S_0 = \rho_0 \cdot \gamma$$

L'inclinazione risulta di $\approx 15^\circ$ circa

(c)



$$\downarrow P = m \cdot m \cdot g$$

$$\uparrow S_v = w \cdot \gamma$$

$$P = \gamma v$$

$$L \rightarrow \left[m = \frac{w \cdot \gamma}{m g} \approx 16 \right] \quad (d)$$

SCHEDA 3

(1)

- 1) (b) L'equazione di continuità esprime il principio di conservazione della massa.
- 2) (c) $[h] = m \rightarrow$ le coordinate parametriche si misurano in metri.
- 3) (b) Le traiettorie sono le linee dei punti successivamente occupati dalle singole particelle fluide in moto, quindi sono linee parallele al vettore velocità.
- 4) Per la conservazione della massa deve valere:

$$\operatorname{div} v = 0.$$

In questo caso abbiamo solo v_x , per cui:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \rightarrow 12x + y = 0 \rightarrow \boxed{y = -12x} \quad (e)$$

- 5) (b) Per fluidi incomprimibili in moto permanente si ha sempre $\frac{df}{dt} = 0$

- 6) la portata si può anche esprimere come:

$$Q = \frac{V}{t} \rightarrow t = \frac{V_{\text{can}}}{Q} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \text{ [m}^3\text{]}}{0,5 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^3\text{/s]}}$$

$$t \approx 1767 \text{ s} \rightarrow \boxed{t \approx 30 \text{ min}} \quad (d)$$

CORSO DI MECCANICA DEI FLUIDI - (Prof.ssa ILARIA BUTERA) -

Scheda n°4

1 - In generale il tubo di Pitot-Prandtl si usa per

- a) misure puntuali di velocità in una qualsiasi corrente fluida
- b) misure di velocità media nelle tubazioni
- c) misure di velocità media nei canali a pelo libero
- d) misure di velocità media limitatamente a fluidi incomprimibili
- e) misure di velocità media limitatamente a fluidi comprimibili

2 - Un ghiacciaio, sito a 2000 metri di quota, alimenta un torrente. Sotto l'ipotesi che l'acqua scorra nell'alveo come fluido ideale (o perfetto) si valuti l'ordine di grandezza della velocità di arrivo al mare

- a) 0.02 m/s
- b) 0.2 m/s
- c) 2 m/s
- d) 20 m/s
- e) 200 m/s

3 - Sull'asse di una tubazione cilindrica, nella quale scorre acqua in moto stazionario, è disposto un tubo di Pitot. Le due prese sono collegate ad altrettanti piezometri. L'altezza cinetica della corrente è'

- a) ricavabile dal livello nel piezometro collegato alla presa dinamica
- b) ricavabile dal livello del piezometro collegato alla presa statica
- c) data dalla differenza dei livelli nei due piezometri
- d) data dalla somma dei livelli nei due piezometri
- e) un dato puramente teorico che non ha un preciso significato fisico

4 - Un tubo di Pitot è allineato sull'asse di un getto d'acqua effluente da una luce sulla quale grava un carico di 2.5 metri. La pressione assoluta rilevata dalla presa dinamica e misurata con un manometro metallico, vale circa

- a) 2500 Pa
- b) 25000 Pa
- c) 12500 Pa
- d) 125000 Pa
- e) Zero

5 - Una condotta per acqua potabile passa appena al disotto del piano stradale: il minimo valore della pressione (relativa) nel suo baricentro affinché la fornitura sia assicurata al settimo piano degli edifici è all'incirca di

- a) 250 Pa
- b) 2500 Pa
- c) 25000 Pa
- d) 250000 Pa
- e) 2500000 Pa

6 - Un siluro viaggia orizzontalmente a due metri sotto il livello del mare ad una velocità di 70 km/h.

Esattamente in asse, sulla prua è posta una presa di pressione collegata ad un manometro. La pressione relativa misurata risulterà pari a circa

- a) 220 Pa
- b) 2200 Pa
- c) 22000 Pa
- d) 220000 Pa
- e) 2200000 Pa

7 - Un getto d'acqua circolare cilindrico il cui diametro è 4 cm ha velocità pari a 4 m/s. Se investe una piastra piana che si muove parallelamente all'asse del getto ed in verso contrario ad esso con una velocità di 3.5 m/s, la spinta sulla piastra

- a) vale circa 3.8 N
- b) vale circa 38 N
- c) vale circa 70 N
- d) vale circa 2.5 N
- e) vale circa 412 N

8 - Si vuole prelevare una portata idrica di 50 l/s mediante un tubo immerso contro una corrente di $V=10$ m/s; trascurando le perdite di carico e volendo tale portata alla quota di 2m sul pelo libero della corrente, il diametro del tubo deve superare:

- a) circa 0.1 cm
- b) circa 0 cm
- c) circa 10 cm
- d) circa 100 cm
- e) non è possibile il prelievo di quella portata a tale quota

9 - Si vuole praticare nella parete di un serbatoio due luci circolari di battente idraulico h_1 e h_2 . Ritenendo uguali i coefficienti di efflusso come devono risultare i due diametri perché le luci derivino una portata uguale?

- a) $D_1/D_2 = h_1/h_2$
- b) $D_1/D_2 = h_2/h_1$
- c) $D_1/D_2 = 1$
- d) $D_1/D_2 = (h_1/h_2)^{(1/2)}$
- e) $D_1/D_2 = (h_2/h_1)^{(1/4)}$

10 - Un getto orizzontale di aria di diametro 0.15m e $V=3$ m/s incide assialmente su una piastra circolare ($D=0.50$ m) forata al centro ($d=0.05$ m). Dal foro fuoriesce aria con $V=3$ m/s; determ. la componente orizz. della spinta dinamica sulla piastra

- a) 141 N
- b) 35 N
- c) 2.3 N
- d) 9 N
- e) 0.170 N

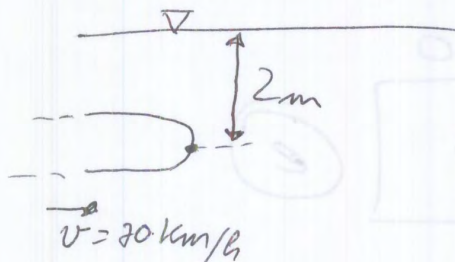
La $z_s = 0$ perché coincide con il piano della strada

L'altezza di un piano lo consideriamo di 3m.

La pressione al 7° piano misurato all'uscita del rubinetto è pari a 0 (pressione relativa)

$$p_s = \rho(z_7 - z_s) = \rho \cdot 3 \cdot 7 = 205200 \text{ Pa} \quad \textcircled{d}$$

6)



È la pressione anche sono 2m sotto il mare: $p = \rho \cdot z$.

Il fatto che il sifone si muova in acqua ferma, determina una pressione pari a quella che sentirebbe il manometro se il sifone stesse fermo e fosse investito dalla corrente che viaggia a 70 km/h.

Quindi:

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{p}{\rho} \rightarrow p = \frac{\rho v^2}{2}$$

Per la pressione totale devo aggiungere la pressione che ho sotto il mare:

$$p_{tot} = 9800 \cdot 2 + \frac{1000}{2} \left(\frac{70 \cdot 1000}{3600} \right)^2 = 215030 \text{ Pa}$$

\textcircled{d}

9)
$$Q_1 = \mu \cdot \pi \frac{D_1^2}{4} \cdot \sqrt{2gh_1}$$

$$Q_2 = \mu \pi \frac{D_2^2}{4} \cdot \sqrt{2gh_2}$$

Equilibrio $Q_1 = Q_2$

$$\mu \pi \frac{D_1^2}{4} \sqrt{2gh_1} = \mu \pi \frac{D_2^2}{4} \sqrt{2gh_2}$$

$$\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{D_1}{D_2} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{1/4}}$$

e

10) Come l'esercizio 7:

$$\boxed{\vec{S} = \vec{M} = \rho \cdot v^2 \cdot A = \rho \cdot v^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (d_g^2 - d^2) \approx 0,170 \text{ N}}$$

e

SCHEDA 5

①

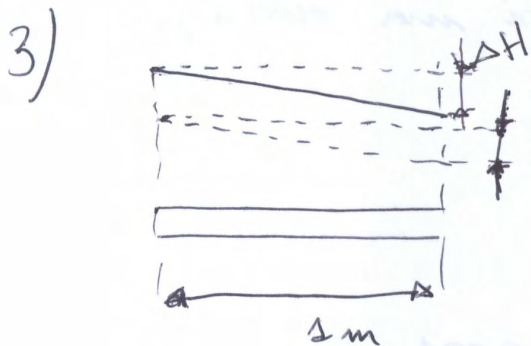
1) Noti J, D, E in moto turbolento:
il termine $Re\sqrt{\lambda}$ per sennò:

$$Re\sqrt{\lambda} = \frac{v \cdot D}{\nu} \cdot \sqrt{2gDJ}$$

per cui posso calcolare λ con la formula e posso poi ottenere la portata. (a)

2) (c) In questo caso non si può ottenere la soluzione in forma chiusa ma devo procedere per iterazioni con:

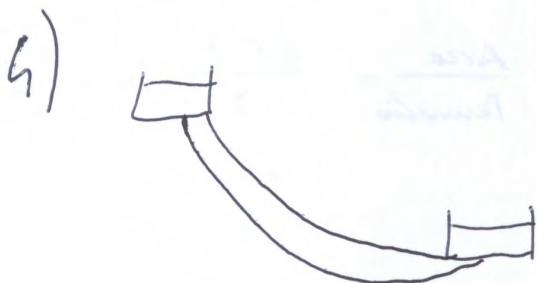
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10}(\dots) \\ J = \lambda \frac{v^2}{2gD} \end{cases} \rightarrow \text{devo iterare}$$



$\Delta h = \Delta H$ poiché siamo in moto uniforme

$$\text{e } l = 1 \text{ m} \rightarrow \boxed{\Delta h = \Delta H = J \cdot 1 = J}$$

(e)



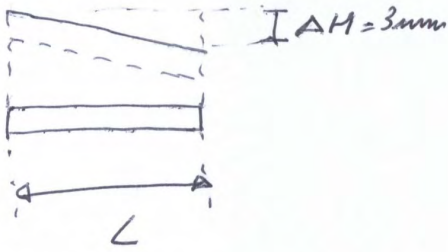
$$\begin{aligned} L_1 &= L_2 \\ A_1 &= 2A_2 \end{aligned}$$

In moto laminare le due condotte hanno stesso J perché hanno stesso L e stesso ΔH



(2)

8) $v = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$



$$J = \frac{\Delta H}{L} = \frac{3}{100} = 0,03$$

ipotizzo moto laminare: $J = \frac{32 \nu \mu}{g \Delta^2} \rightarrow \boxed{\mu = 0,03 \text{ m/s}}$

Ora verifico se il moto è laminare: $Re = \frac{\mu D}{\nu} \approx 30$

(d)

→ ok perché il moto è laminare

9) Procedo nello stesso modo:

$$J = \frac{\Delta H}{L} = 0,0083$$

$$J = \frac{32 \nu \mu}{g \Delta^2} \rightarrow \boxed{\mu = 0,13 \text{ m/s}} \text{ (e)}$$

verifico $Re \approx 60$ → ok sono in moto laminare

10)

$$J = \frac{\Delta H}{L} = 2 \cdot 10^{-5}$$

ipotizzo moto laminare: $J = \frac{32 \nu \mu}{g \Delta^2} \rightarrow \mu = 0,6 \text{ m/s}$

Ma c'è risposta, se verifico infatti $Re = \frac{\mu D}{\nu} = 6 \cdot 10^5 \rightarrow$

sono in moto turbolento, per cui non è valida l'ipotesi che ho fatto di moto laminare

Devo quindi utilizzare l'eq. di Colebrook:

calcolo: $Re \sqrt{\lambda} = 1980$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2,5}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{\epsilon/D}{371} \right)$$

→ trovo $\lambda = 0,03$

per cui: $J = \lambda \frac{\mu^2}{2g \Delta}$

$$\rightarrow \boxed{\mu = 0,11 \text{ m/s}} \text{ (d)}$$

Nell'esercizio 2, per calcolare la differenza di carica piezometrica usata:

$$S = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

→ differenza di quota tra i due menischi

differenza di carica piezometrica → somma di quota geodetica e altezza piezometrica

$$\left(z_S + \frac{P_S}{\gamma_S} \right) - \left(z_D + \frac{P_D}{\gamma_D} \right) = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

→ peso specifico del liquido che viene misurato (o liquido sinistro o liquido destro)

Il punto di applicazione è C (centro di spinta).

Il segmento CG è fornito da:

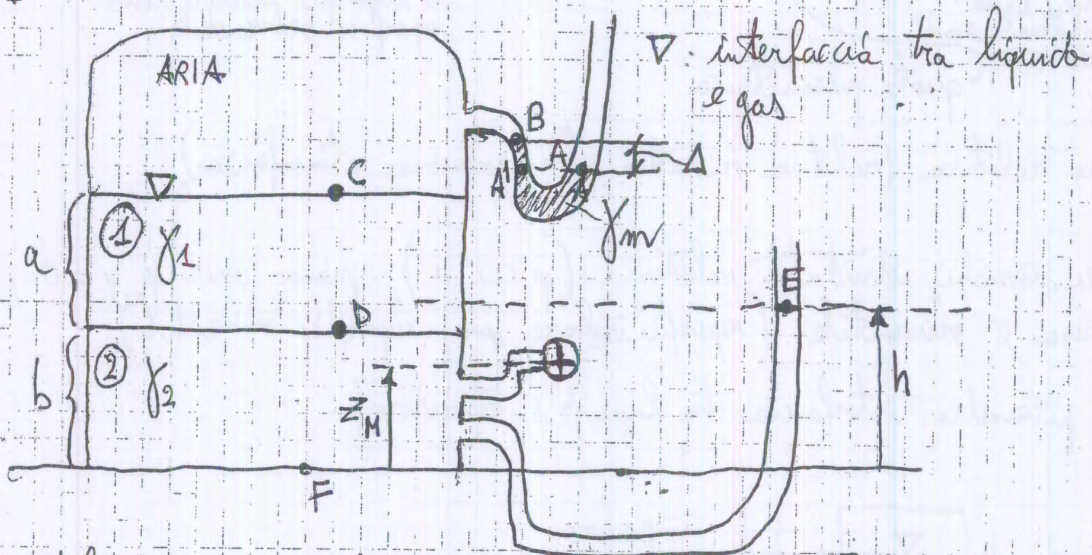
$$CG = \frac{I_{Oy}}{x_G A} \leftarrow \text{momento d'inerzia fatto rispetto ad un'asse passante per il baricentro e parallelo alla linea di spinta}$$

M
momento statico (non fatto rispetto al baricentro, perché per definizione sarebbe 0) rispetto alla linea di spinta

intersezione tra p.c.i.r. e il piano che contiene la superficie.

$$= \frac{I_{Oy}}{x_G A}$$

esercizio 1



Manometro metallica: non è importante la quota alla quale viene collegato al reservoir, ma è importante la quota in cui va a fare la misura (in questo caso z_M).

DATI: $\Delta, a, b, z_M, \gamma_2, \gamma_1, \gamma_m$

CHIANDE: $\rho_m, \rho_h, \rho_p(z)$

↑
pressione misurata dal manometro metallico

diagramma (distribuzione) delle pressioni

(dislivelli)

La pressione cambia poco all'interno del gas (fino ad altezze di circa 10 m), anche il peso specifico è molto basso. E' vero il peso specifico molto basso e ricordando che il peso specifico è il coeff. angolare della retta che descrive l'andamento delle pressioni, allora si può dire che il diagramma delle pressioni è costante.

pressioni, allora si può dire che...

h
↓
carico piezometrico

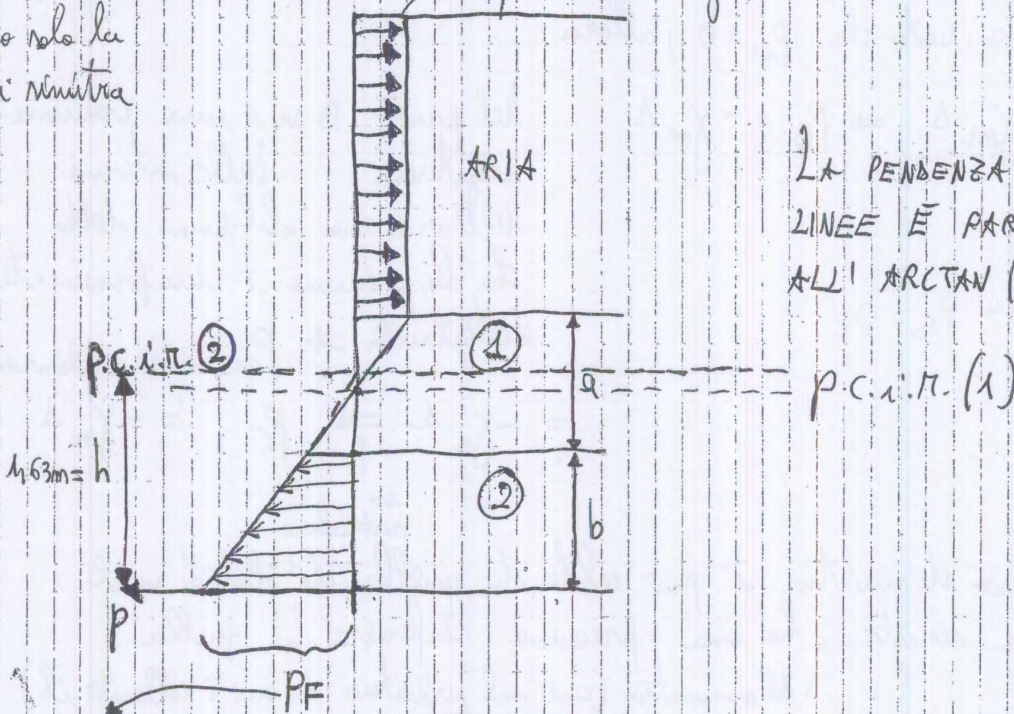
$$h = z_0 + \frac{-\gamma_m \Delta + \gamma_1 a = b + -\gamma_m \Delta + \gamma_2 a}{\gamma_2} = 1,63 \text{ m}$$

$b=1$ mentre $h=1,63 \Rightarrow$ a 1,63 ho il p.c.i.m. del liquido 2.
 hanno un caso in cui p.c.i.m. non coincide con l'interfaccia liquido-liquido, cioè con il condotto pelo libero.

DISEGNAMO IL DIAGRAMMA DELLE PRESSIONI

Diregnamo solo la parete di sinistra

la metto con frecce orientate a destra, perché la pressione è negativa.



LA PENDENZA DELLE LINEE È PARI ALL' ARCTAN (peso specifico)

$P_F = P_D + \gamma_2 b$ pressione massima

Ora: ? pressione alla quota z_M

$$P_{z_M} = P_E + \gamma_2 (z_E - z_M)$$

$\leftarrow z_E = h$

$$P(z_M) = \gamma_2 (h - z_M) = 10509,4 \text{ Pa}$$

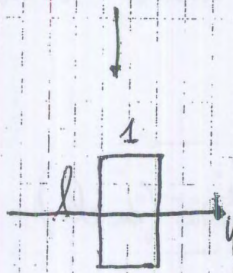
1 atm = 101325 Pa

↓ unità di misura sistema internazionale

$\Rightarrow P(z_M) = 0,103 \text{ atm}$

Dobbiamo trovare \bar{c} :

$$\bar{c} = \frac{I_{Oy}}{M} = \frac{l^3 \cdot 1}{12} \cdot \frac{1}{M} = \frac{l^3 \cdot 1}{12} \cdot \frac{1}{\rho \cdot A} = \frac{l^3}{12} \cdot \frac{1}{\left(\frac{a}{\sin \alpha} + \frac{l}{2}\right) l} = 0,292 \text{ m}$$



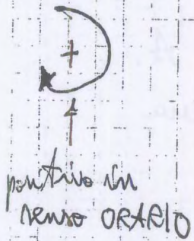
Coordinate del baricentro rispetto alla linea di appoggio (il s.d.c. è allineato con la superficie piana).

asse y entrante nel foglio

Dobbiamo imporre un bilancio di momento angolare (tra \vec{P} e \vec{F}):

$$M_{\vec{P}} + M_{\vec{F}} = 0$$

condizione di equilibrio statico



quindi: $M(A)$

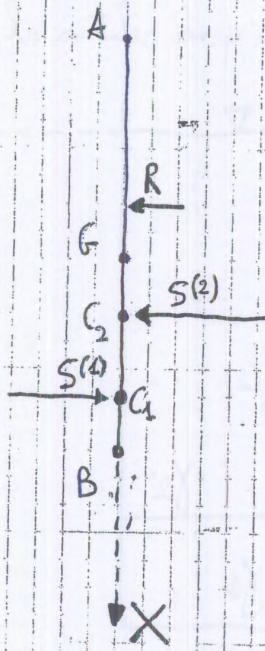
$$P \cos \alpha \frac{l}{2} - |F| \bar{c} = 0 \Rightarrow P = \frac{|F| \left(\frac{l}{2} + \bar{c}\right)}{(\cos \alpha) \frac{l}{2}} = 28902 \text{ N}$$

È se la paratoia fosse ancorata in B??? Quanto deve valere il peso (P')?

= avrò un braccio minore che rispetto ad A \rightarrow la paratoia potrà avere un peso minore

$$P' \left(\frac{l}{2} \cos \alpha\right) = F \left(l - \frac{l}{2} - \bar{c}\right)$$

$$P' = \frac{F \left(\frac{l}{2} - \bar{c}\right)}{\frac{l}{2} \cos \alpha} = 15837,90 \text{ N}$$



R ha direzione più corta di $S^{(1)}$ e $S^{(2)}$ perché è data dalla risultante (differenza) tra $S^{(1)}$ e $S^{(2)}$ appunto.

$$\vec{R} = \vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)}$$

prende come positive le forze applicate da destra verso sinistra.

$$|R| = -|S_1| + |S_2| = 1970 \text{ N}$$

Dove è applicata \vec{R} ?

La somma dei momenti di S_1 e S_2 deve eguagliare il momento di \vec{R} (rispetto ad un punto qualsiasi (ad esempio rispetto al baricentro)).

$$\oplus M_{S^{(1)}} = -|S^{(1)}| \overline{GC_1}$$

rispetto al baricentro

$$\oplus M_{S^{(2)}} = |S^{(2)}| \overline{GC_2}$$

$$\oplus M_R = |R| x$$

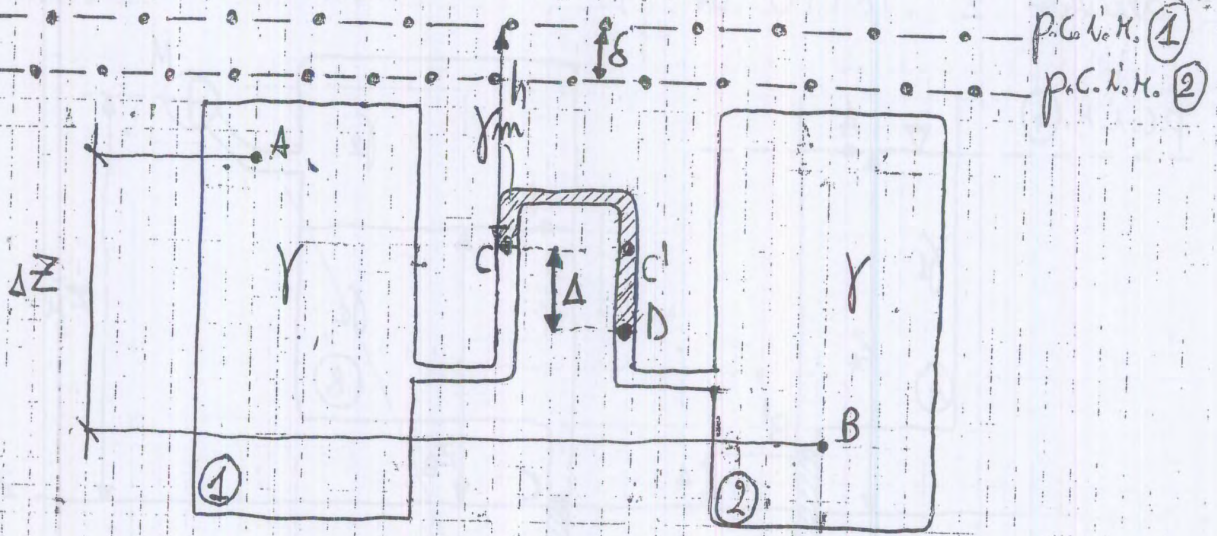
è l'incognita: distanza del punto di applicazione della spinta dal baricentro

$$M_{S^{(1)}} + M_{S^{(2)}} = M_R \Rightarrow -|S^{(1)}| \overline{GC_1} + |S^{(2)}| \overline{GC_2} = |R| x \Rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{|S^{(2)}| \overline{GC_2} - |S^{(1)}| \overline{GC_1}}{|R|} = -0,0423 \text{ m}$$

Il - indica che \vec{R} è applicato a sinistra del baricentro.

Esercizio 4 FATTO DA ME



$$P_c = \gamma h$$

$$\delta = \Delta \frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma}$$

$$P_{c'} = P_D + \gamma_m (z_D - z_{c'}) = \underbrace{\gamma (h + \Delta - \delta)}_{P_D} - \gamma_m \Delta$$

$P_c = P_{c'}$ (poiché si trovano alla stessa quota) \Rightarrow

$$\gamma h = \gamma h + \gamma \Delta - \gamma \delta - \gamma_m \Delta \Rightarrow \gamma \delta = \Delta (\gamma - \gamma_m) \Rightarrow \delta = \Delta \frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma}$$

Quota piezometrica del punto A: $z_A + \frac{P_A}{\gamma}$

Quota piezometrica del punto B: $z_B + \frac{P_B}{\gamma}$

Poiché la differenza tra i p.c.i.m. (e quindi delle quote piezometriche) è pari a δ :

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \delta \Rightarrow z_A - z_B + \frac{1}{\gamma} (P_A - P_B) = \delta \Rightarrow$$

$$(z_A - z_B) + \frac{(P_A - P_B)}{\gamma} = \Delta \frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma} \Rightarrow \frac{\Delta P}{\gamma} = (z_B - z_A) + \Delta \frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma} \Rightarrow$$

$$\Delta P = \gamma (z_B - z_A) + \Delta (\gamma - \gamma_m) \Rightarrow P_A - P_B = - 9500 \left[\frac{N}{m^3} \right] 0,5 [m] + 0,15 [m] [9500 \left[\frac{N}{m^3} \right] - 8600 \left[\frac{N}{m^3} \right]] =$$

$$- 4615 \frac{N}{m^2}$$

OSSERVAZIONE: la P_B è $>$ P_A poiché B si trova ad una quota più bassa di A. A parità di quota della pressione in un punto di sinistra, si avrebbe la massima differenza di quota del serbatoio di destra.

Esercitazione n. 2 (Idrostatica: spinte su pareti curve)

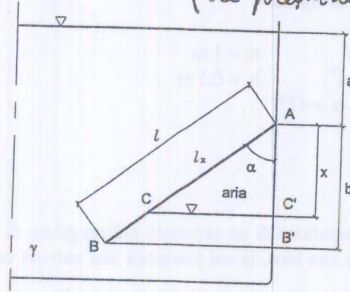
Altri esercizi

$p_1 = \rho g h_1 \Rightarrow p_1 h_1 = p_2 h_2$ (bisogna usare le pressioni ASSOLUTE)

4 Valutare in grandezza e segno il momento all'incastro di un deflettore su una parete piana verticale, in una vasca che è stata riempita in maniera graduale ed isoterma con acqua (fare riferimento ad un metro di profondità normalmente al piano del disegno).

Dati:

- $l = 2 \text{ m}$
- $a = 1 \text{ m}$
- $b = 1,5 \text{ m}$
- $[M = 7144 \text{ Nm}]$
- $\gamma = 9800 \text{ N/m}^3$
- $P_a = 101.300 \text{ Pa}$

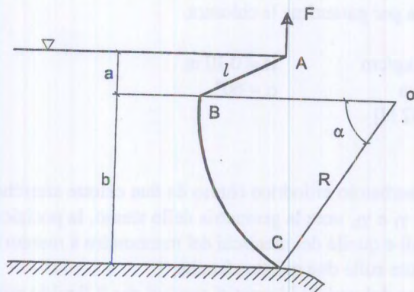


5 Il disegno allegato rappresenta la sezione di una traversa fluviale. Per la paratoia a settore, con la soprastante ventola, lo schema e le dimensioni possono essere assunte come segue:

- $a = 2,50 \text{ m}$
- $b = 14,00 \text{ m}$
- $R = 24,00 \text{ m}$
- $l = 5,00 \text{ m}$

Calcolare, con riferimento ad una larghezza unitaria, le seguenti forze:

1. la spinta sulla paratoia piana AB;
 2. lo sforzo nel tirante F, ammettendo la paratoia AB incernierata in B;
 3. la spinta sulla paratoia a settore BC.
- $[S_{AB} = 61250 \text{ N}; F = 23566 \text{ N}; S_{BC} = 1407000 \text{ N}]$

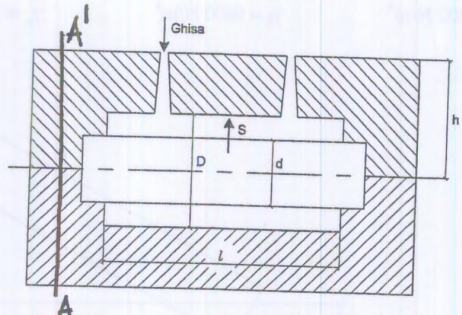


6 A formare, con asse orizzontale, un tubo di ghisa di diametro esterno D, spessore $(D-d)/2$ e lunghezza l viene versata la ghisa fra l'anima di diametro d e la forma di diametro D. Il carico di ghisa sull'asse del tubo è h.

Detti γ_γ il peso specifico della ghisa e γ_α quello del materiale dell'anima, determinare il peso minimo G che deve avere la parte superiore della forma per non sollevarsi.

Dati:

- $D = 420 \text{ mm}$
- $d = 380 \text{ mm}$
- $l = 1800 \text{ mm}$
- $[G = 23076 \text{ N}]$
- $h = 38 \text{ cm}$
- $\gamma_\gamma = 70.560 \text{ N/m}^3$
- $\gamma_\alpha = 13.720 \text{ N/m}^3$



Bisogna tener conto che l'anima, essendo più leggera della forma ha una spinta verso l'alto che rappresenta una spinta addizionale nella forma.

$$\frac{1}{2} b y_1^2 + \rho \frac{Q^2}{b y_1^3} = \frac{1}{2} \cancel{b y_2^2} + \rho \frac{Q^2}{b y_2^3}$$

$$y_1^2 - y_2^2 = -\frac{2\rho Q^2}{b^2 y_1^3} + \frac{2\rho Q^2}{b^2 y_2^3}$$

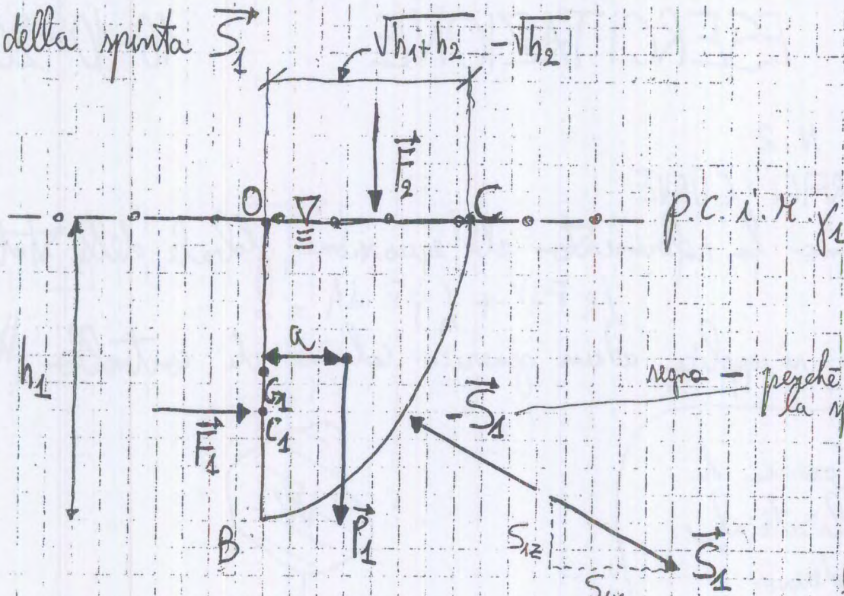
$$y_1^2 - y_2^2 = \frac{2Q^2}{b^2 g} \left(-\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} \right) =$$

$$y_1^2 - y_2^2 = \frac{2Q^2}{b^2 g} \left(\frac{y_1 - y_2}{y_1 y_2} \right)$$

$$(y_1 + y_2) \cancel{(y_1 - y_2)} \frac{(y_1 y_2)}{\cancel{(y_1 - y_2)}} = \frac{2Q^2}{b^2 g}$$

$$(y_1 + y_2)(y_1 y_2) = \frac{2Q^2}{b^2 g}$$

Calcolo della spinta \vec{S}_1



negro - perché a noi interessa la spinta opposta, cioè \vec{S}_1

P_1 è applicata nel baricentro dell'area OBC. a = distanza tra baricentro e OB

Scriviamo l'eq. globale della statica:

$$\vec{P}_1 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + (-\vec{S}_1) = 0$$

è data dal contributo delle pressioni (relative) che agiscono nel pelo libero $\Rightarrow \vec{F}_2 = 0$

Proiettiamo questa eq. vettoriale lungo due assi:

lungo x: $\begin{cases} F_1 - S_{1x} = 0 \\ S_{1x} = F_1 \end{cases}$

lungo z: $\begin{cases} P_1 - S_{1z} = 0 \\ S_{1z} = P_1 \end{cases}$

$$P_1 = \gamma_1 W_1 = \gamma_1 \left[(h_2 + h_1) (\sqrt{h_1 + h_2} - \sqrt{h_2}) - \int_{\sqrt{h_2}}^{\sqrt{h_1 + h_2}} x^2 dx \right] = \gamma_1 \cdot 0,231 = 2463 \text{ N}$$

(a negro) ci va il negro - perché il verso positivo dell'asse z è verso l'alto

troviamo la posizione del baricentro dell'area OBC:

$$a = \frac{1}{\Omega_1} \int_{\Omega_1} (x - x_0) d\Omega \Rightarrow a = \frac{1}{\Omega_1} \int_{\sqrt{h_2}}^{\sqrt{h_1 + h_2}} \int_{\sqrt{h_2}}^x (x - \sqrt{h_2}) dx dz = \frac{0,0506}{\Omega_1} = 0,17 \text{ m}$$

area OBC: è esattamente 0,231

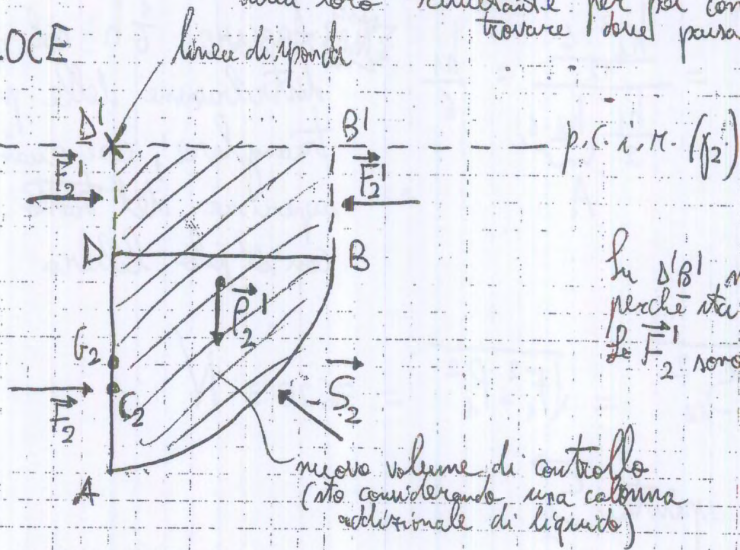
per definizione di baricentro: $\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{h_2} \leq x \leq \sqrt{h_1 + h_2}, x^2 \leq y \leq h_1 + h_2\}$ dove varia z

= 0,17 m : questa è la distanza del baricentro dell'area OBC dalla traccia OB (ma solo la a equindi la x)

Non abbiamo calcolato la z del baricentro, tanto a noi basta solo a

$\vec{P}_2 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 - \vec{S}_2 = 0$ ← questa strada viene abbandonata perché \vec{P}_2 e \vec{F}_3 non hanno la stessa linea d'azione e dunque bisogna trovare la linea d'azione della loro risultante per poi comparla con \vec{F}_2 e trovare l'asse \vec{S}_2

STRADA PIU VELOCE



$\vec{P}'_2 + \vec{F}_2 - \vec{S}_2 = 0$

$\begin{cases} S_{2x} = F_2 \\ S_{2z} = P'_2 \end{cases}$

$P'_2 = \gamma_2 \left[(h_2 + \Delta) \int_0^{h_2} \sqrt{h_2} - \int_0^{h_2} x^2 dx \right] = \gamma_2 \cdot 0,82 = 84045 \text{ N}$ (a rigore dovremmo mettere il segno -)

ci è un unico peso specifico nel volume di controllo considerato; non facciamoci confondere che nella realtà ci sarebbe γ_1 e non γ_2 .

$|F_2| = p_{G_2} \cdot \overline{AD} \cdot \Delta = \gamma_2 \left(\Delta + \frac{h_2}{2} \right) \cdot h_2 = 6368 \text{ N}$

è applicata su DA e non su D'A.

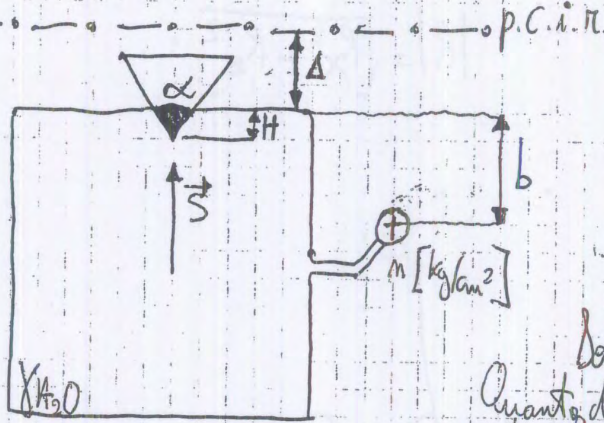
per trovare il centro di spinta C_2 devo fare riferimento alla linea di spinta in D' → in questo esercizio non ci serve ma ne me l'avessero chiesto...

$|S_2| = \sqrt{S_{2x}^2 + S_{2z}^2} = \sqrt{F_2^2 + P_2'^2} = 11603 \text{ N}$

$\vec{R} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$

Esercizio n. 2

ESERCIZIO CLASSICO ALL'ESAME: questo esercizio con una valvola sferica ma anche quella conica



Dati: H, α, m, b

Domanda: la richiesta che c'è sul foglio deve essere così interpretata:

Quanto deve valere il peso di questa valvola per fare sì che solo grazie al suo peso controbilanci la spinta esercitata dal fluido del lato verso l'alto???

La spinta è una spinta su una parete curva (il persegno di cono che è immerso)

\vec{S} , per questioni di simmetria, non avrà componenti orizzontali

$$m = \gamma (\Delta + b) \Rightarrow \Delta = \frac{m}{\gamma} - b$$

CONVERSIONI

$$1 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

$$N = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

$$[F] = [m][g] \Rightarrow 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} = g \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

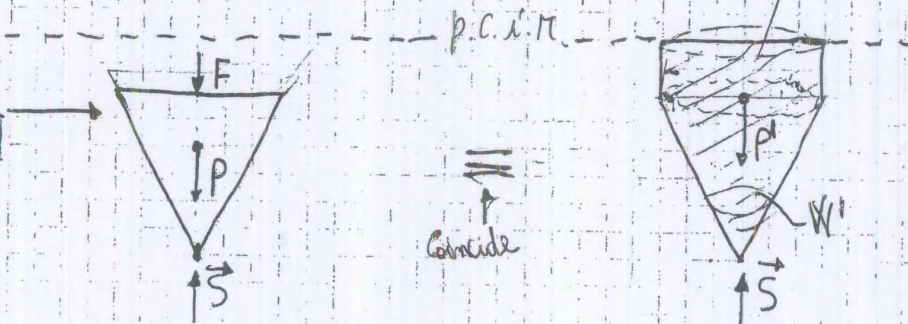
$$m \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 10^4 g \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 10^4 g \rho$$

$$\Delta = \frac{10^4 g \rho}{\gamma} - b = 0,4 \text{ m}$$

aggiungo una colonna di fluido (che sarà cilindrica) e, per simmetria, la spinta esercitata lateralmente si compensano a vicenda

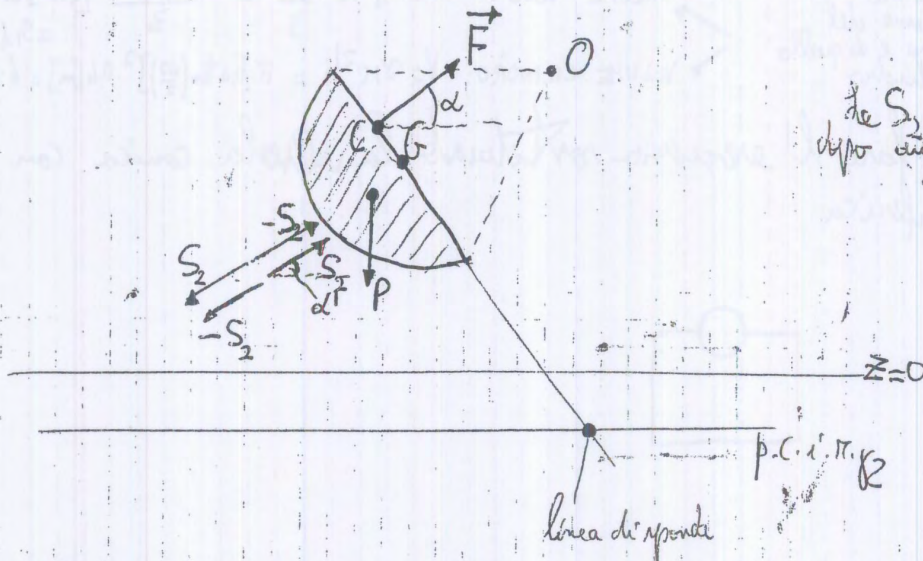
questo cono è quello disegnato in blu nel disegno in alto

Per simmetria, la risultante \vec{S} sarà applicata lì.



Quindi tutto il liquido ρ_2 è in depressione poiché si trova tutto sopra il p.c.i.m. ρ_2 .

Calcoliamo S_2 scegliendo il volume di controllo rosso.



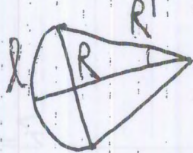
Per S_2 vedi lo disegno dopo avere risolto l'esercizio.

Si come il fluido è tutto in depressione (tutte pressioni negative) \Rightarrow sulla sup. piana il fluido non è in pressione, ma in decompressione.

$$\vec{F} + \vec{P} - \vec{S}_2 = 0 \Rightarrow \vec{S}_2 = \vec{F} + \vec{P}$$

$$\vec{P} = \rho_2 \frac{\pi}{6} l (\sqrt{3R^2 + l^2})$$

volume calotta sferica



$$P = 179334 \text{ N}$$

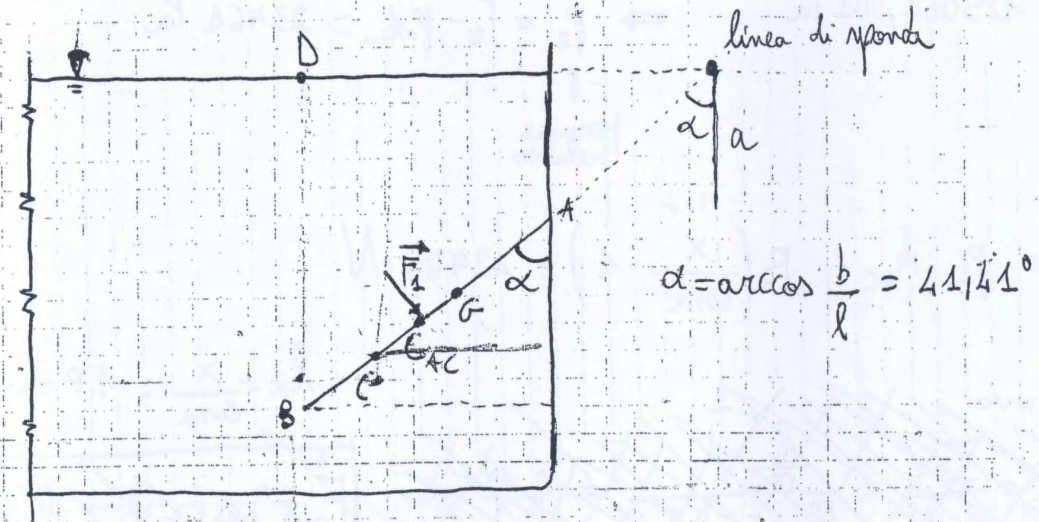
$$|F| = \rho_2 \pi R^2 = \rho_2 (z_0 + |h_2|) \pi R^2$$

La risultante degli sforzi di pressione sulla calotta sferica sarà sicuramente normale alla superficie e passante per il centro di curvatura (O).

$$\vec{S}_2 = \vec{F} + \vec{P}$$

$$S_2 = F = F \cos \alpha = 250164 \text{ N}$$

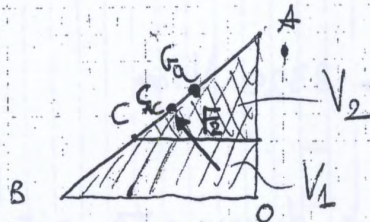
Esercizio 4 FATTO DA ME



$$F_1 = \rho_g A_{AC} = \gamma \left(a + \frac{l_x \cos \alpha}{2} \right) l_x = 29547 \text{ N}$$

$$e_{ACG} = \frac{I_{O4}}{x_G A} = \frac{\frac{l_x^3 \cdot 1}{12}}{\left(\frac{l_x + a}{2} \cos \alpha \right) l_x} = 0,121 \text{ m}$$

$$P_D = 0$$



$$P_2 V_2 = P_1 V_1 \quad (\text{usando le pressioni assolute})$$

$$P_2 = \frac{P_1 V_1}{V_2} = \frac{101300 \text{ Pa} \left(\frac{b \cdot l \sin \alpha}{2} \right)}{\frac{x^2 \cdot \tan \alpha}{2}} \quad (1)$$

Ma posso scrivere P_2 anche così $P_2 = P_c + P_{atm} = \gamma (a+x) + P_{atm} \quad (2)$

Uguagliando (1) e (2)

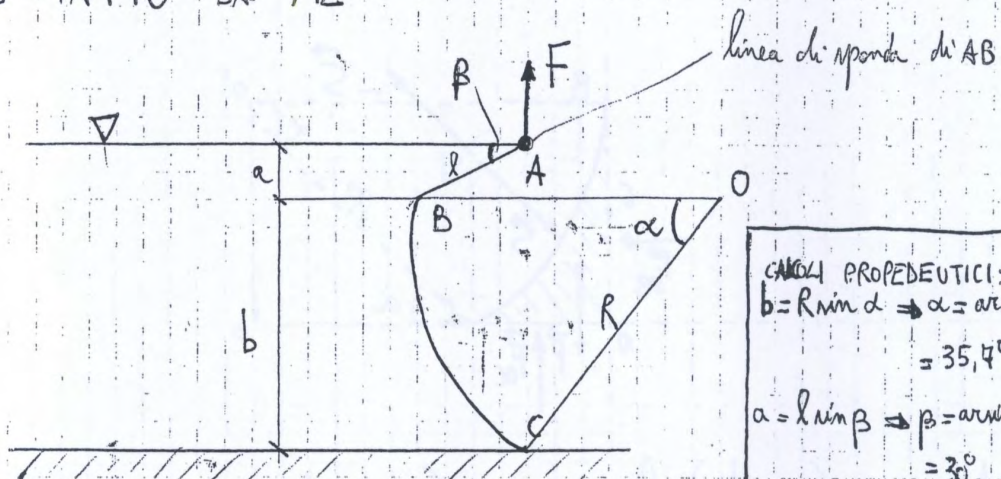
$$\frac{0,66}{x^2 \cdot 0,88} = 9800 + 9800x + 101300$$

$$0,75 = x^2 \cdot (111100 + 9800x)$$

$$9800x^3 + 111100x^2 - 224923,7 = 0 \Rightarrow x_1 = -11,14 \text{ m}$$

$$x_2 = 1,35 \text{ m}$$

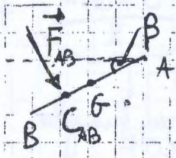
PROBLEMA 5 FATTO DA ME



CALCOLO PROPEDEUTICI:
 $b = R \sin \alpha \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{b}{R} = 35,4^\circ$
 $a = l \sin \beta \Rightarrow \beta = \arcsin \frac{a}{l} = 30^\circ$

SVOLGIMENTO

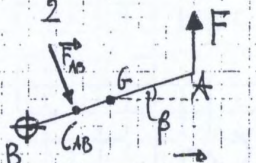
① Spinta sulla paratoia piana AB



$$F_{AB} = \rho_G A_{AB} = \gamma \frac{l}{2} \sin \beta \cdot \underbrace{l \cdot 1}_{A_{AB}} = \frac{\gamma}{2} l^2 \sin \beta = 61250 \text{ N}$$

② Effetto nel tirante F

$$\overline{C_{AB} G} = \frac{I_{04}}{x_G A_{AB}} = \frac{\frac{l^3 \cdot 1}{12}}{\frac{l}{2} \cdot l \cdot 1} = \frac{l}{6} = 0,83 \text{ m}$$



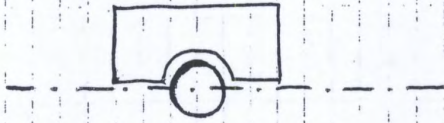
Equilibrio dei momenti di F_{AB} e F rispetto al baricentro G:

$$F_{AB} \overline{C_{AB} G} = F \frac{l}{2} \cos \beta \Rightarrow F = \frac{2 F_{AB} \overline{C_{AB} G}}{l \cos \beta} = 23545,1 \text{ N}$$

③ Spinta sulla paratoia a rettoia BC

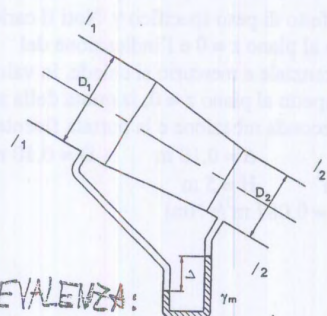
Esercizio 6 FATTO DA ME

Considero la sezione AA' (vedi fotocopia):



è lo schema del venturimetro solo che le tubature sono invertite.

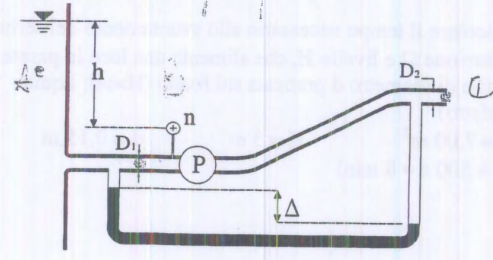
5 Nella condotta in figura defluisce una portata Q di olio. Ammesso il liquido perfetto di peso specifico γ , determinare l'indicazione Δ del manometro differenziale a liquido di peso specifico γ_m .
 $\gamma = 8140 \text{ N/m}^3$; $\gamma_m = 133300 \text{ N/m}^3$
 $Q = 240 \text{ l/s}$; $D_1 = 0,4 \text{ m}$; $D_2 = 0,3 \text{ m}$
 $[\Delta = 0,026 \text{ m}]$



si chiede l'energia assorbita dalla pompa, è pari a $\gamma \Delta H_Q$ (ENERGIA DEL LA POMPA)

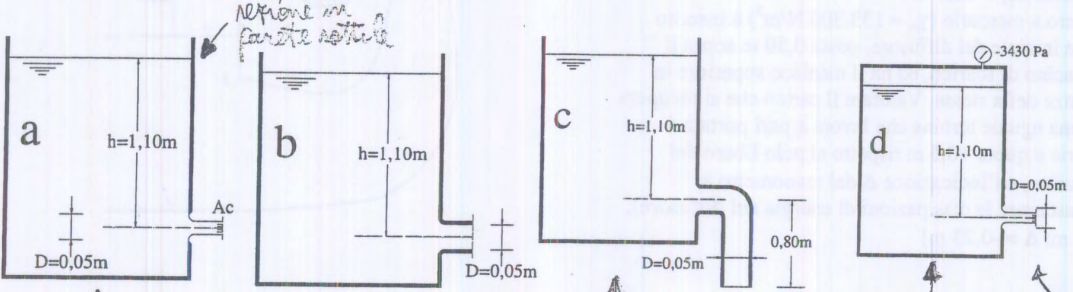
6 Determinare la potenza P ceduta dalla pompa al liquido, note le indicazioni del manometro metallico n e di quello differenziale Δ . Il liquido, avente peso specifico γ , è da ritenersi perfetto.
 $\gamma = 12257 \text{ N/m}^3$; $\gamma_m = 133362 \text{ N/m}^3$; $\Delta = 1,8 \text{ m}$;
 $h = 7 \text{ m}$; $D_1 = D_2 = 0,25 \text{ m}$; $n = 7,845 \text{ N/cm}^2$;
 $[P = 37 \text{ kW}]$

PREVALENZA: differenza di carico tra monte e valle della pompa



7 Calcolare la portata d'acqua effluente dal serbatoio nei vari casi indicati nelle figure. Si supponga, in ogni caso, che il livello nel serbatoio resti costante.

[(a) $Q = 5.5 \text{ l/s}$; (b) $Q = 9.1 \text{ l/s}$; (c) $Q = 12 \text{ l/s}$; (d) $Q = 4.6 \text{ l/s}$]



va considerato C_c

non va considerato C_c

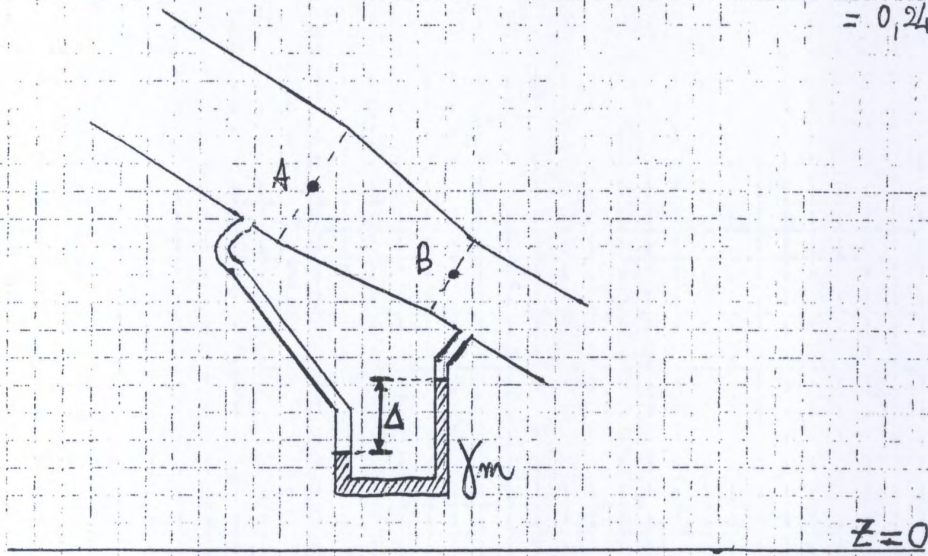
serbatoio in vuoto

il pelo libero non è a pressione zero d'aria

questo caso si applica il teorema di Bernoulli a un punto qualsiasi lungo la condotta e si trova che il pelo libero è a 0 Pa

ESERCIZIO 5 FATTO DA ME

$$Q = 240 \text{ l/s} = 240 \text{ dm}^3/\text{s} = 0,24 \text{ m}^3/\text{s}$$



Applico Bernoulli alla traiettoria A → B:

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g}$$

Il dislivello S fra le quote piezometriche dei due punti è:

$$S = h_A - h_B = \left(z_A + \frac{P_A}{\gamma} \right) - \left(z_B + \frac{P_B}{\gamma} \right) = \frac{V_B^2}{2g} - \frac{V_A^2}{2g} \quad (1)$$

Tale S lo può anche ricavare come:

$$S = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} \quad (2)$$

Da qui, uguagliando (1) e (2), si ottiene:

$$\frac{V_B^2}{2g} - \frac{V_A^2}{2g} = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} \Rightarrow \Delta = \frac{\frac{V_B^2}{2g} - \frac{V_A^2}{2g}}{\frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}}$$

poiché $Q = VA$

$$= \frac{1}{2g} \frac{\left[\left(\frac{Q}{\pi \frac{D^2}{4}} \right)^2 - \left(\frac{Q}{\pi \frac{D^2}{4}} \right)^2 \right]}{\frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}} = 0,026 \text{ m}$$

$$-\frac{dH}{\sqrt{H}} = A\sqrt{2g} dt$$

integrando:

$$-2\sqrt{H} = A\sqrt{2g}t + C \quad (a)$$

Condizioni iniziali: $H = H_0 = 3 \text{ m}$ per $t = 0$

$$\Rightarrow C = -2\sqrt{H_0}$$

↓
sostituendo nella (a)

$$\Rightarrow 2\sqrt{H} = 2\sqrt{H_0} - A\sqrt{2g}t \Rightarrow H = \left(\sqrt{H_0} - \frac{A}{2}\sqrt{2g}t\right)^2$$

H dipende dal tempo in termini quadratici.

tempo di svuotamento: quanto deve valere t affinché H(t) sia zero?

$$\sqrt{H_0} - \frac{A}{2}\sqrt{2g}t = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{H_0}{2g}} \frac{2}{A}, \quad A = \frac{C\sqrt{H_0}^2}{4\Omega}$$

$$\Rightarrow T \approx 8 \text{ min}$$

Osservazioni:

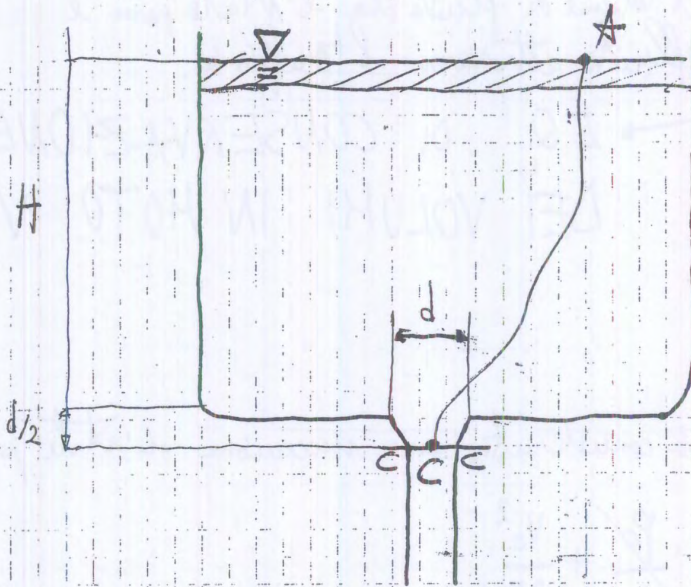
- La ricezione di stati permanenti vale finché il livello è alto.

(vicino alla bocca)
Quando il livello è basso T non vale più la ricezione di stati permanenti, ma di solito si fa questa approssimazione.

- Fluidi perfetti: per gran parte del moto le velocità sono basse \Rightarrow posso trascurare gli attriti (le velocità sono proporzionali al quadrato della velocità)

Però quando il livello è prossimo al foro \Rightarrow non è più vero che le vel. sono basse \Rightarrow non posso trascurare gli attriti, ma lo facciamo ugualmente.

Esercizio 2 LUCE IN PARETE SOTTILE (porta sul fondo del serbatoio)



Dati: Ω, H, d

Domanda: $? T$

tempo di svuotamento del serbatoio

È il moto vario e non moto permanente: il pelo libero si abbassa nel tempo!!!

Approssimiamo ad una successione di stati permanenti: assumiamo che, poiché le dimensioni del foro sono piccole rispetto a quelle del serbatoio, il livello si abbassa molto lentamente. ^{dira che questo posto, in base a questo T} per istante ho un moto permanente \Rightarrow successione di stati permanenti.

Consideriamo un volumetto ^(blu) infinitesimo τ come quel volumetto infinitesimo di liquido che viene perso in un intervallo infinitesimo di tempo dt .

volume $\rightarrow V(t+dt) = \Omega \left(H - \frac{dH}{dt} dt \right)$ $V(t+dt) = V(t) + dV$

$V(t) = \Omega H$ ↓ diminuzione di carico

volume al tempo t

$dV = - \frac{dH}{dt} dt \Omega$ ①

↓
variazione di volume

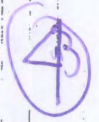
portata (è un volume per unità di tempo)

La conservazione della massa ci dice che: $dV = Q dt$ ②

Uguagliando la ① e la ② si ottiene:

Bernoulli:

$$\cancel{z_A} + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = \cancel{z_{A'}} + \frac{P_{A'}}{\gamma} + \frac{V_{A'}^2}{2g}$$



come A' e A sono posti sull'asse della stessa res. trasversale, per l'invarianza della portata $\Rightarrow V_A = V_{A'}$

Quindi:

$$\underbrace{z_{A'} + \frac{P_{A'}}{\gamma}}_{h_1} = 0$$

$$h_1 = 0$$

per tutti i punti nella traiettoria individuata da A e A' , il carico piezometrico è nullo. Quindi, poiché il carico piezometrico è costante (in questo caso 0), allora ha una distribuzione idrostatica delle pressioni.

In A' avrò pressioni negative (z è positiva, quindi affinché h sia nullo, allora la p dovrà essere negativa).

$$\cancel{z_B} + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} = \cancel{z_{B'}} + \frac{P_{B'}}{\gamma} + \frac{V_{B'}^2}{2g}$$

$$V_B = V_{B'}$$

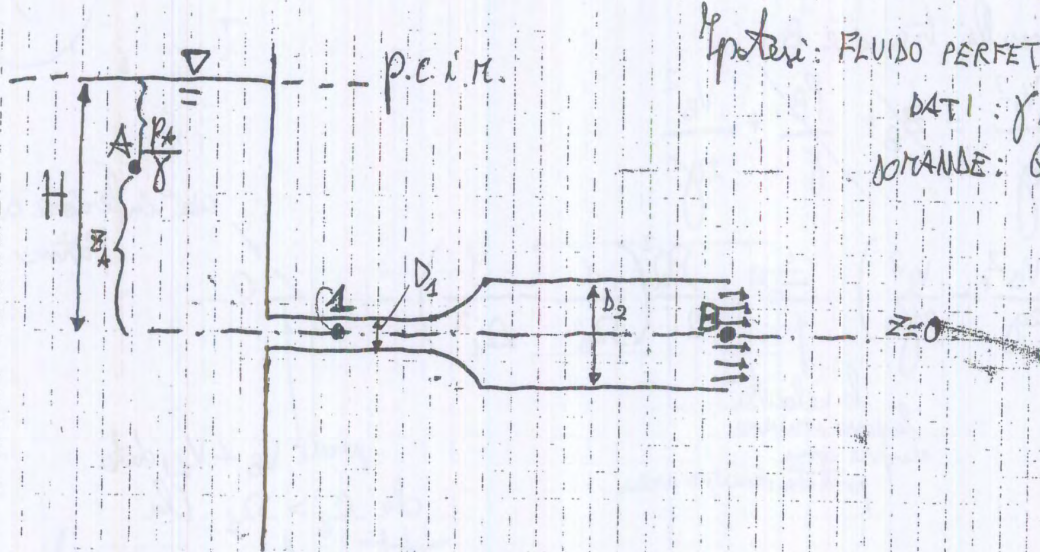
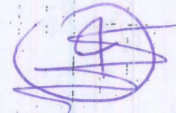
(con abbiamo ipotizzato che in tutti B)

$$h_2 = z_{B'} + \frac{P_{B'}}{\gamma} = z_B$$

Se z_B deve essere negativo \Rightarrow il carico piezometrico della 2° condotta è negativo.

Non importa dove pesca il manometro differenziale; può pescare dove vuole perché il carico piezometrico è costante lungo la condotta. Tale costanza deriva dall'ipotesi di fluido perfetto. Se il fluido invece fosse stato reale e non perfetto, allora il carico piezometrico sarebbe diminuito verso per sezione andando

Esercizio 4



Ipotesi: FLUIDO PERFETTO

DATI: γ, H, D_1, D_2

DOMANDE: Q, P_A

Tutte le volte che il tratto di condotta considerato non è
 esageratamente lungo \Rightarrow posso fare l'ipotesi di fluido perfetto.
 Infatti gli attriti sono proporzionali alla lunghezza del condotto.

alla fine della condotta.

Prendo un punto A sufficientemente lontano dalla condotta e un punto B.
 Ci sarà una traiettoria che unisce A e B.

La velocità di A è trascurabile (tanto più il serbatoio è grande e
 tanto più posso trascurarla)

Immaginiamo che il pelo libero sia costante

o perché rimbocco il
 serbatoio man mano

o perché il livello si abbassa
 così lentamente che posso
 considerarlo costante.

Floto permanente, perché ipotizziamo un livello abbastanza costante, quindi
 non ci sono variazioni temporali.
 Acqua \Rightarrow incompressibile e pesante.

Applichiamo Bernoulli:

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g}$$

$\underbrace{z_A + \frac{P_A}{\gamma}}_H$

$$z_B = H + z_0$$

$$V_B = \sqrt{2gH}$$

poiché B è a contatto con l'atmosfera

$$\Rightarrow V_B = \sqrt{2gH}, \quad Q = V_B \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{\pi D_2^2}{4} \sqrt{2gH} = 0,084 \text{ m}^3/\text{s}$$

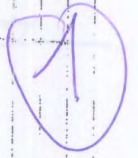
IDRAULICA ESERCITAZIONE

25-10-2011

ESERCITAZIONE N. 3

$$F = \rho \mathbf{g} z$$

$$\rho(F - \rho) = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{P}$$



Richiamo del Teorema di Bernoulli

IPOTESI FONDAMENTALI

- fluido pesante (cioè soggetto al campo gravitazionale \vec{g})
- fluido perfetto (ipotesi più importante di tutte), cioè in cui gli sforzi tangenziali vengono assunti pari a 0, ossia non dissipa energia meccanica in calore o sia non ci sono attriti.
- fluido incompressibile (i liquidi generalmente sono considerati incompressibili)
- moto permanente quando si trascurano le derivate temporali

(moto uniforme: quando si trascurano anche le derivate spaziali) (ad esempio lungo)

le derivate temporali e

una condotta si trascura la derivata lungo la direzione dell'asse della condotta (\vec{s}) direzione

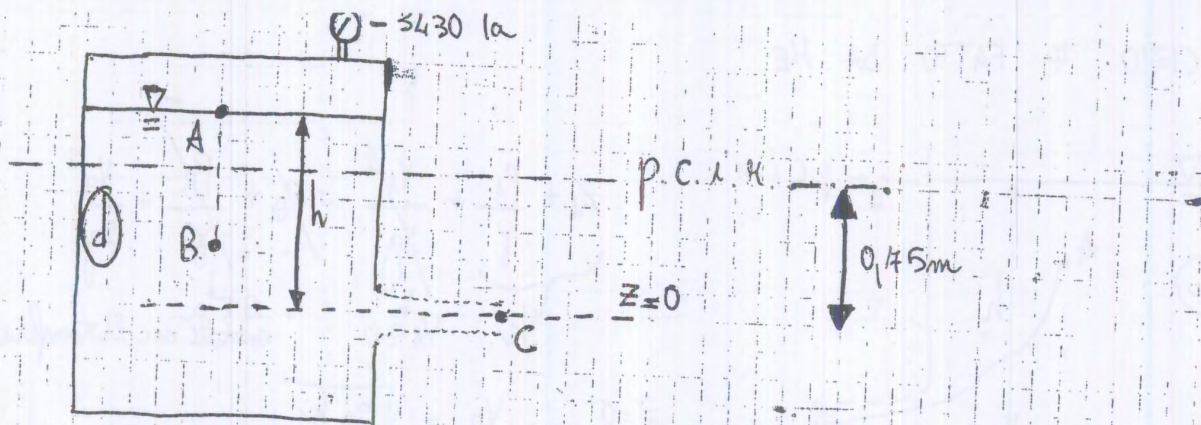
Il teorema di Bernoulli, sotto queste ipotesi, è costante lungo le traiettorie (cioè lo applichiamo ad una particella e ad una traiettoria)

$$H = z + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2g}$$

energia per unità di peso specifico (infatti dividendo un'energia per un peso otteniamo un'altezza).
 H è un'altezza.

Il H di Bernoulli non può essere applicato tra due traiettorie diverse.

Due traiettorie diverse hanno H diversi.



Considero i punti A e B sufficientemente lontani dalla luce, così da poterli considerare in condizioni statiche (fermi); applico dunque Stevino:

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} = z_B + \frac{p_B}{\gamma}$$

Io voglio trovare la posizione del p.c.i.r. e dunque dove la $p_B = 0$, imponendo $p_B = 0$, si ottiene:

$$z_B = z_A + \frac{p_A}{\gamma} = h + \frac{p_A}{\gamma} = 1,10 \text{ m} + \frac{-3430 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{9800 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}} = 0,45 \text{ m}$$

Dirigo il p.c.i.r. (verde)

$$V = (0 \hat{i} + z_B \hat{j})$$

Applico Bernoulli alla traiettoria B → C:

$$z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g} = z_C + \frac{p_C}{\gamma} + \frac{v_C^2}{2g}$$

$\underbrace{z_B}_{0,45}$

$$v_C = \sqrt{2 \cdot 0,45 \cdot g} = 3,036 \text{ m/s}$$

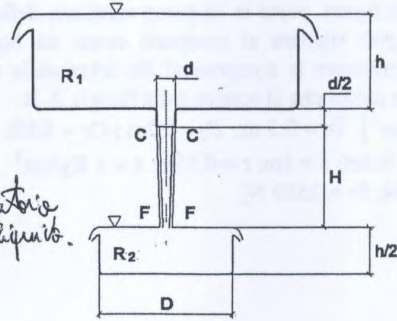
$$Q = v_C \Omega_C = v_C C_C \Omega = v_C \cdot 0,6 \cdot \pi \frac{D^2}{4} = 4,52 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 4,52 \frac{\ell}{\text{s}}$$

Esercitazione n. 4 (Eq. globale di equilibrio dinamico in moto permanente)

1. Sul fondo di un recipiente R_1 , pieno d'acqua per l'altezza h , è ricavata una luce circolare di diametro d . Ad una profondità H sotto la sezione contratta, il getto si immerge nel recipiente R_2 di diametro D e pieno d'acqua per l'altezza $h/2$. Le altezze h ed $h/2$ restano costanti. Determinare:

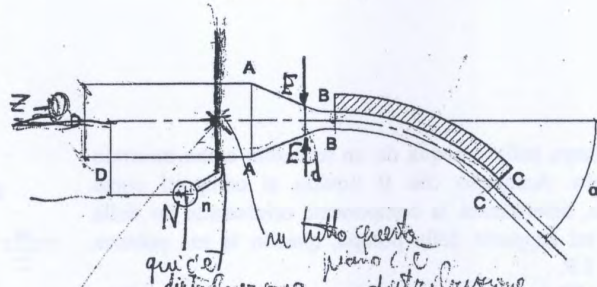
- il peso P del getto fra la sezione contratta e la sezione FF;
 - la spinta S sul recipiente R_2 .
- $h = 1 \text{ m}$ $H = 3,3 \text{ m}$ $D = 1 \text{ m}$ $d = 10 \text{ cm}$
 [$P = 103,4 \text{ N}$; $S = 4051,5 \text{ N}$]

avere la punta che il fondo del recipiente riceve dal liquido.



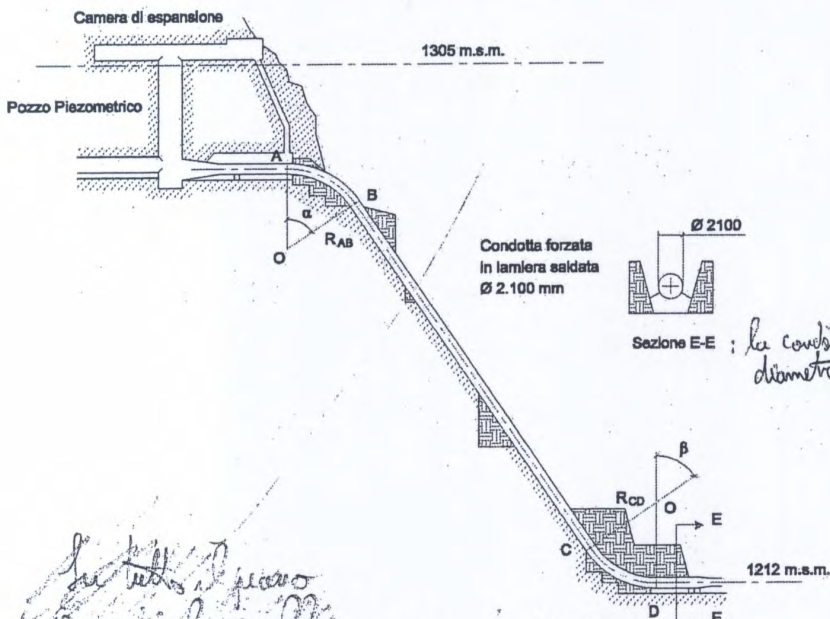
2. Il getto d'acqua uscente da un bocchello di diametri D e d investe un tegolo che lo devia di un angolo α . Calcolare la spinta sul tegolo, note la geometria del sistema e l'indicazione n del manometro metallico, sotto le seguenti ipotesi: perdite trascurabili, sezione BB coincidente con la sezione contratta, velocità uguali in modulo in BB e CC, peso del liquido trascurabile fra BB e CC.

- $n = 30 \text{ kg/cm}^2$; $D = 0,80 \text{ m}$; $d = 0,20 \text{ m}$;
 $\alpha = 45^\circ$; coeff. di contraz. del getto $C_c = 0,85$.
 [$Q = 2,1 \text{ m}^3/\text{s}$; $R = 121.500 \text{ N}$]



qui c'è distribuzione di velocità nel tubo questo qui c'è distribuzione di velocità nel tubo questo

3. Assegnata la sezione longitudinale di una condotta forzata (v. figura), note la geometria della stessa, la portata ($14 \text{ m}^3/\text{s}$), la quota del piano dei carichi totali (1305 m s.l.m.), e nell'ipotesi di perdite trascurabili, determinare le spinte sui tronchi di condotta AB, CD.



- Dati:
 $R_{AB} = 6,8 \text{ m}$;
 $R_{CD} = 4,6 \text{ m}$;
 $\alpha = \beta = 56^\circ$;
 $L_{BC} = 82 \text{ m}$;
 $[S_{AB} = 499.156 \text{ N}$;
 $S_{CD} = 3.051.531 \text{ N}$;
 $\delta_1 \approx 60^\circ$; $\delta_2 \approx 62^\circ$]

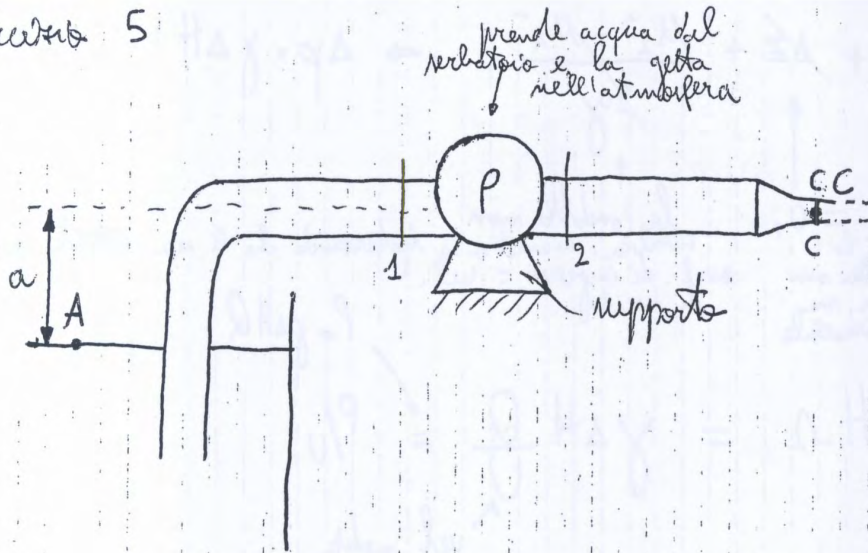
*qui * come
 $P = \rho v^2 D$
 è o valore quindi
 dopo quello
 rettilineo*

Sezione E-E; la condotta si assume cilindrica di diametro costante.

Se il tubo è piccolo rispetto al carico alla corrente il tubo va come in idraulica: dalla 1305x!

perché le tubazioni sono rettilinee (curvatura nulla) e parallele; è più importante che siano parallele (curvatura nulla)

Esercizio 5



in en. meccanica

Svolgimento

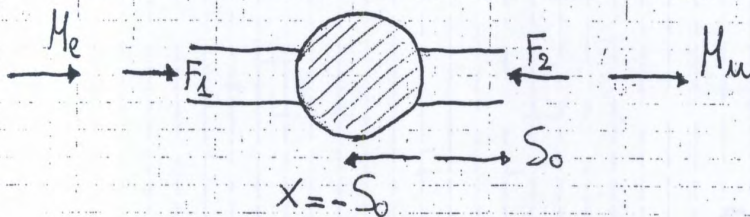
La pompa introduce carico nella corrente: fa passare lo stato di carico della corrente da un valore minore a uno maggiore (per far ciò assorbe energia dall'energia elettrica trasformandola). Fa l'opposto di una turbina (che trasforma in una elettrica grazie a un alternatore).

$$P = \gamma \Delta H Q$$

La pompa aumenta la pressione del fluido.

PREVALENZA DELLA POMPA (quantità di carico che la pompa riesce ad introdurre nella corrente).

Applichiamo l'equaz. globale considerando come volume di controllo quello idealmente contenuto nella pompa:



$$\pm \rightarrow F_1 - F_2 + M_e - M_u - X = 0$$

$$S_0 = -X = F_2 - F_1 = (p_2 - p_1) \Omega = \Delta p \Omega$$