NUMERO: 1414A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Uffreduzzi

MATERIA: Fisica II + Eserc.Prof.Gozzelino

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = V_A - V_B = -\int_A^B dV$$

$$\int_A^B \left(\vec{E}\cdot d\vec{s} + dV\right) = 0 \iff \vec{E}\cdot d\vec{s} + dV = 0 \qquad \vec{E}\cdot d\vec{s} = E_x\,dx + E_y\,dy + E_z\,dz$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

$$E_x\,dx + \frac{\partial V}{\partial x}dx + E_y\,dy + \frac{\partial V}{\partial y}dy + E_z\,dz + \frac{\partial V}{\partial z}dz = 0$$

$$\left(E_x + \frac{\partial V}{\partial x}\right)dx + \left(E_y + \frac{\partial V}{\partial y}\right)dy + \left(E_z + \frac{\partial V}{\partial z}\right)dz = 0$$

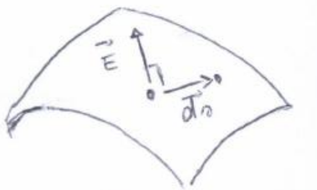
$$\iff E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \implies \vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z\right) = -\operatorname{grad} V$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

in coord. polari $\left(\frac{\partial}{\partial r},\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta},\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$

SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE



$V(xyz) = \text{cost} \quad \forall (xyz)$

$dV = 0 = -\vec{E}\cdot d\vec{s} \implies \vec{E} \perp d\vec{s}$

Caso carica puntiforme

sup. equipotenziali → sfere che in ogni punto sono $\perp$ alle linee di forza

OSSERVAZIONI EN. POT. ELETTROSTATICA E LAVORO

$\Delta U_e = q(V_B - V_A) = qV$ se $V(\infty) = 0$

2° cariche:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{12}}\cdot q_1$$

↗ q_1, q_2 stesso segno $U_e > 0$ → se r aumenta
- U_e diminuisce
- $W_{AB} = U_{e_A} - U_{e_B} > 0$ SPONT.

↘ q_1, q_2 segno opposto $U_e < 0$ → se r aumenta
- U_e aumenta
- $W_{AB} = U_{e_A} - U_{e_B} < 0$

FATTO DALL'ESTERNO

m cariche:

$$U = \frac{1}{2}\left(\sum_{1}^{N}{}_{ij}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}\right)\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{1}^{N}{}_{ij}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}\right)$$

③

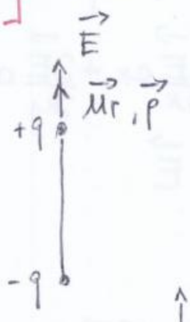
$$\vec{E} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{\mu}_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(p\cos\theta\,\vec{\mu}_r - \vec{p}) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3p\cos\theta\,\vec{\mu}_r - \vec{p}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3(\vec{p}\cdot\vec{\mu}_r)\vec{\mu}_r - \vec{p}\right]$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3(\vec{p}\cdot\vec{\mu}_r)\vec{\mu}_r - \vec{p}\right]$$

- asse del dipolo →

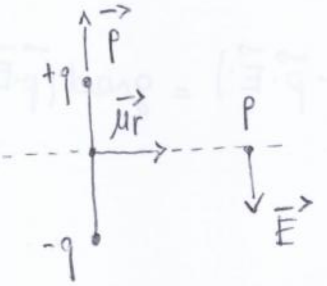
  $\vec{p} \parallel \vec{\mu}_r$



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\vec{p}\right] \Rightarrow \vec{E} \parallel \vec{p}$$

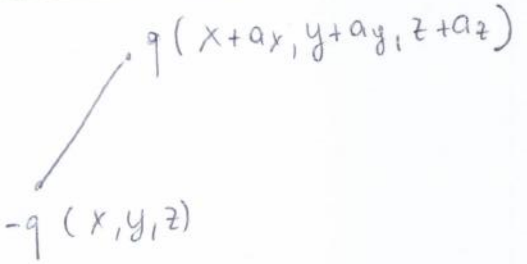
- ~~asse o piano mediano~~ →

  $\vec{p} \perp \vec{\mu}_r$



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[-\vec{p}\right]$$

ENERGIA POTENZIALE DIPOLO IN UN CAMPO ELETTROSTATICO UNIFORME



$$U_e = q\,V(x+a_x, y+a_y, z+a_z) - q\,V(x,y,z) =$$

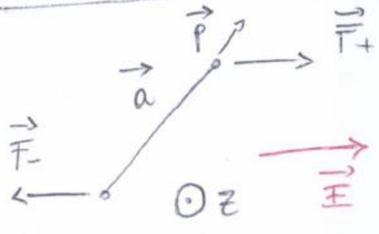
$$= q\left[\cancel{V(x,y,z)} + \frac{\partial V}{\partial x}a_x + \frac{\partial V}{\partial y}a_y + \frac{\partial V}{\partial z}a_z - \cancel{V(x,y,z)}\right] = p_x\frac{\partial V}{\partial x} + p_y\frac{\partial V}{\partial y} + p_z\frac{\partial V}{\partial z} =$$

$$= \vec{p}\cdot\text{grad}\,V = -\vec{p}\cdot\vec{E} = -pE\cos\theta$$

$U_e = -\vec{p}\cdot\vec{E}$ → min per $\theta = 0°$

max per $\theta = 180°$

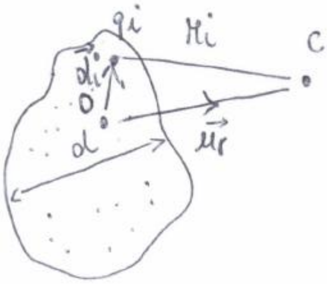
FORZA CHE AGISCE SU UN DIPOLO IN CAMPO ELETTR. UNIFORME



Se $\vec{E}$ uniforme

$\vec{F}_+ = \vec{F}_-$ → coppia di forze che genera un momento

SISTEMI DI CARICHE IN APPROSSIMAZIONE DI DIPOLO



$$V(c) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

O = punto qualsiasi all'interno della regione

$$\vec{p_i} \Rightarrow \sum_i q_i \vec{d_i} = \sum_i \vec{p_i} = \vec{p}$$

Se $r_i >> d$

$$V(c) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \overbrace{\sum_i q_i}^{Q} \frac{1}{r_i} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{\overbrace{q_i \vec{d_i}}^{\vec{p_i}} \cdot \vec{\mu_r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{\mu_r}}{r^2}$$

- $r >> d$ + SISTEMA CARICO

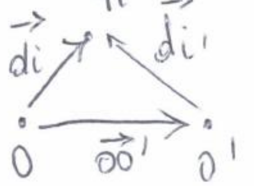
$$\Rightarrow V(c) \sim \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r} \qquad \text{perché} \quad \vec{p} \cdot \vec{\mu_r} = \underbrace{\sum_i q_i}_{Q} \underset{\vec{d}}{\vec{d_i}} = Q \cdot d$$

$$\frac{V_{dip}}{V_0} \simeq \frac{Q \cdot d}{r\, Q} = \frac{d}{r} << 1 \,!$$

- $r >> d$ + SISTEMA NEUTRO

$$V(c) \sim \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{\mu_r}}{r^2} \qquad \text{perché} \quad \sum_i q_i = 0$$

OSSERVIAMO CHE IL MOM. DI DIPOLO È INDIPENDENTE DAL PUNTO IN CUI È CALCOLATO:



$$\vec{d_i} = \vec{OO'} + \vec{d_i'}$$

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{d_i} = \underbrace{\sum_i q_i}_{=0 \text{ SIST. NEUTRO}} \vec{OO'} + \sum_i q_i \vec{d_i'} = \vec{p'}$$

RIEPILOGO

- $\vec{E}$ cons. e irrot.

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$, $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$

- $\int_{\Sigma ch} \vec{E}\cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad \mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

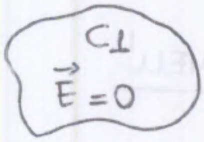
- $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,V$

- $-\nabla\cdot\nabla V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ Eq. Poisson

$\downarrow$

Laplaciano $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)$

CONDUTTORI



conduttore in equilibrio $\rightarrow$ cariche ferme

$\vec{E} = 0$

$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0 \rightarrow V_1 = V_2 = V_0$ cost. in ogni punto

SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE

$\Rightarrow$ Campo elettrostatico $\perp$ alla superficie del conduttore

$\phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma ch} \vec{E}\cdot\vec{u}_n \, d\Sigma = 0 = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sum_i q_i = 0$

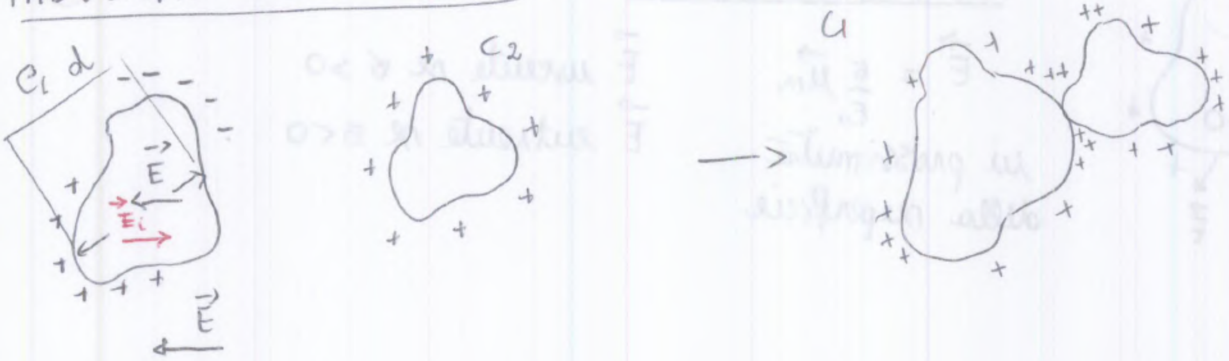
non ci sono cariche all'interno di un conduttore in equilibrio.

Eventuali cariche si distribuiscono in superficie in modo che $\vec{E}_{int} = 0$, in base al RAGGIO DI CURVATURA

$r_{min} \rightarrow \sigma_{max}$

$r_{max} \rightarrow \sigma_{min}$

INDUZIONE ELETTROSTATICA

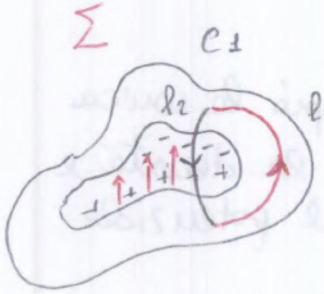


$\vec{E} + \vec{E}_i = 0$

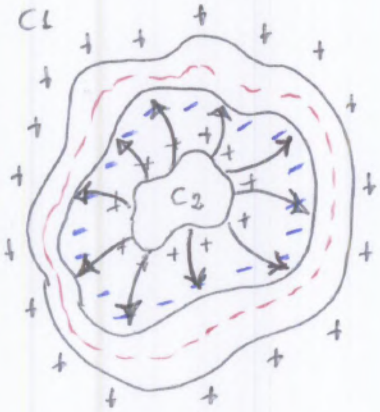
$t = \frac{d}{c}$

CONDUTTORE CAVO

$\phi(\vec{E}) = 0 = \frac{\sum_i q_{int}}{\varepsilon_0} = 0$



$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 = \underbrace{\cancel{\int_{l_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}}}_{=0} + \overbrace{\int_{l_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}}^{\neq 0}$ ↯



C1 privo di carica

C2 carico

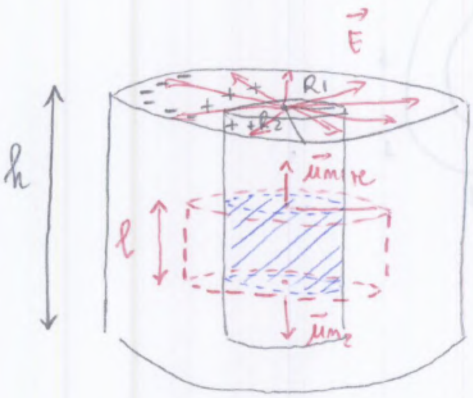
$\phi(\vec{E}) = 0 = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sum q_{int} = 0$

$\sum q_{int} = q_{C_2} + q_{IND\ C_1} = 0$

CONDIZIONE DI INDUZIONE ELETTROSTATICA COMPLETA

CAPACITÀ CONDENSATORE CILINDRICO

11



$$C = \frac{q}{V_1 - V_2}$$

σ

$$\phi(\vec{E}) = \int_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{\mu}_n \, d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\phi(\vec{E}) = \underbrace{\int_{\Sigma_{basi}} \vec{E} \cdot \vec{\mu}_n \, d\Sigma}_{=0} + \int_{\Sigma_{lat}} \vec{E} \cdot \vec{\mu}_{n_L} \, d\Sigma = E \cdot 2\pi r \ell$$

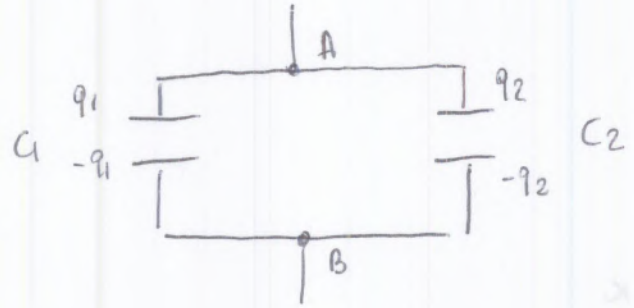
$$q = \sigma \cdot 2\pi R_1 \ell$$

$$E \cdot \cancel{2\pi} r \cancel{\ell} = \frac{\cancel{2\pi}\, \sigma \cancel{\ell} R_1}{\varepsilon_0} \longrightarrow \vec{E} = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0 r} \vec{\mu}_r$$

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0 r} dr = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\boxed{C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\cancel{\sigma}\, 2\pi \cancel{R_1} h}{\frac{\cancel{\sigma} \cancel{R_1}}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}}$$

PARALLELO



$$V_A - V_B = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$$

$$q_1 = C_1 (V_A - V_B)$$

$$q_2 = C_2 (V_A - V_B)$$

$$\underbrace{q_1 + q_2}_{q} = (V_A - V_B)(\underbrace{C_1 + C_2}_{C_{eq}})$$

$$C_{eq} = \frac{q}{V_A - V_B} = C_1 + C_2$$

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i \quad \rightarrow \quad C_{eq} > C_i$$

ENERGIA DEL CAMPO ELETTROSTATICO

Calcoliamo l'energia necessaria a caricare un condensatore

$$dW = dq' V'$$

$$W = \int_0^q dq' V' = \int_0^q dq' \frac{q'}{C} = \frac{1}{C}\int_0^q q' dq =$$

$$V' < V_f$$

$$= \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} q V$$

$$V' = \frac{q'}{C}$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} q V = U_e$$

• Per un condensatore piano:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{d}$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 \Sigma}{\cancel{d}}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2} d^{\cancel{2}} = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2}}_{E^2}\varepsilon_0 \underbrace{\Sigma d}_{Vol} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Vol = U_e$$

$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

DIELETTRICO OMOGENEO ISOTROPO

Ha le stesse prop. in ogni punto, indip. dalle direz. in cui misuriamo il materiale

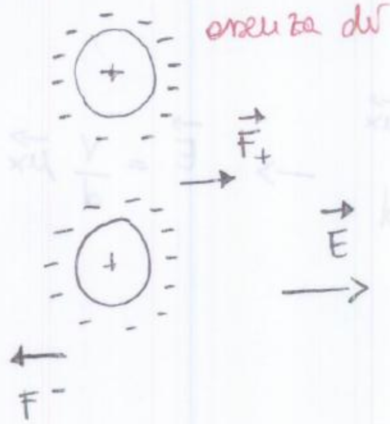
$\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0 k = \varepsilon \rightarrow$ cost. diel. assoluta del materiale
dipende dal sistema di misura
e dalle prop. del materiale

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{\mu_r} \rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 k\, r^2}\vec{\mu_r}$$

POLARIZZAZIONE NEI DIELETTRICI

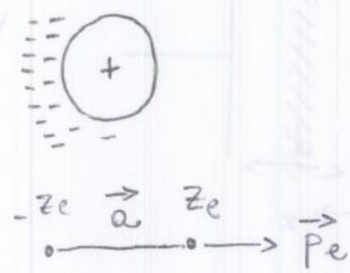
- Pol. lineare

assenza di campo elettrico



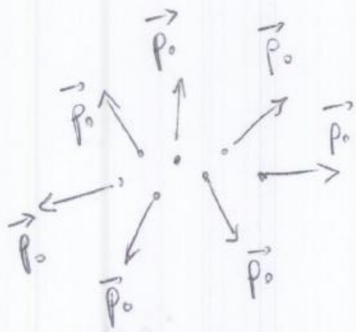
centro car. pos ≡ centro car negative

presenza di campo elettrico



$$\vec{p_e} = z_e \vec{a}$$

- Pol. per orientamento



molecole con mom. di dipolo intrinseco

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 0$$

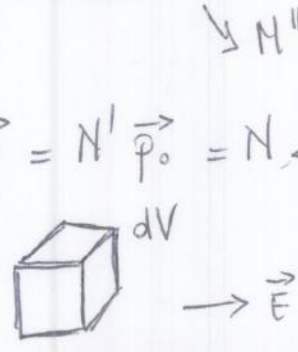
In presenza di campo elettrico:

N molecole ↗ N' orientate $/\!/ \vec{E}$
↘ N'' non orientate per agitazione termica

> temp
< pol. per orientam.

$$d\vec{P} = N' \vec{p_0} = N \langle\vec{p}\rangle$$

sia $\vec{p}$ per pol. elettronica
$\vec{p}$ per pol. orientamento

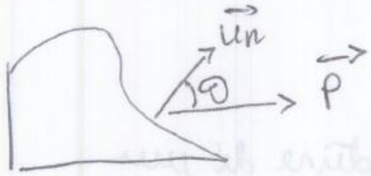


$$d\vec{P} = N\vec{p} \rightarrow \vec{P} = \frac{d\vec{P}}{dV} = \frac{dN}{dV}\vec{p}$$

POLARIZZAZIONE

Se una delle facce non è // a $\vec{P}$:

17



$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{u}_n = P\cos\theta$

$$\begin{cases} 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \rightarrow \sigma_p \text{ POSITIVA} \\ \pi/2 < \theta < \pi \rightarrow \sigma_p \text{ NEGATIVA} \end{cases}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sigma_p = 0!$$

Se $\vec{P}$ non uniforme ($\vec{P} \neq$ cost)

NO COMPENSAZIONE!

interno: $\rho_p = -\text{div}\,\vec{P}$

esterno: $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{u}_n$ ma $\Sigma q_p = 0 \rightarrow \int_{\Sigma diel} \sigma_p \, d\Sigma + \int_{V diel} \rho_p \, dV = 0$

EQUAZIONI GENERALI ELETTROSTATICA

In presenza di dielettrici:

- $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma ch} \text{rot}\,\vec{E}\,\vec{u}_n \, d\Sigma = 0 \Rightarrow \text{rot}\,\vec{E} = 0$ $\quad \vec{E}$ irrotazionale

$\vec{E} = -\text{grad}\,V$

- $\int_{\Sigma ch} \vec{E} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = \frac{q + q_p}{\varepsilon_0} \rightarrow \text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\varepsilon_0}$

$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\text{div}\,\vec{P}}{\varepsilon_0} \rightarrow \text{div}(\underbrace{\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}}_{\vec{D}}) = \rho$

$\vec{D}$ induzione dielettrica

$\text{div}\,\vec{D} = \rho$

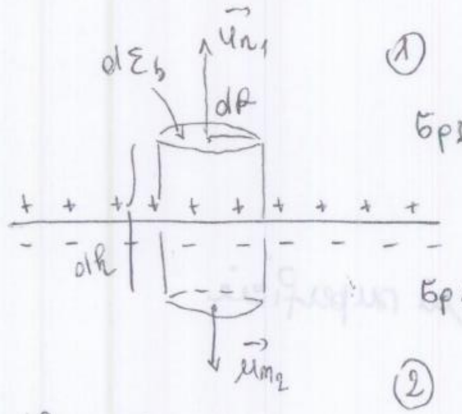
$\int_{\Sigma ch} \vec{D} \cdot \vec{u}_n \cdot d\Sigma = q_{\text{non pol.}}$

all'int. di un diel: $\text{div}\,\vec{D} = 0 \rightarrow \int_{\Sigma ch} \vec{D} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = 0$

RIGIDITÀ DIELETTRICA

massimo valore di campo elettrico che il diel. può sopportare rimanendo tale.

DIELETTRICI A CONTATTO



$E_{1t} = E_{2t}$

$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$d\phi(\vec{D}) = \vec{D_1} \cdot \vec{\mu}_{n1} \, d\Sigma_b + \vec{D_2} \cdot \vec{\mu}_{n2} \, d\Sigma_b +$
$\vec{D} \, \vec{\mu}_{nL} \, d\Sigma_L = (D_{1n} - D_{2n}) \, d\Sigma_b = 0$
$\rightarrow = 0$

$dh << dR$

$\boxed{D_{1n} = D_{2n}}$

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \varepsilon_0 E_{1n} + P_{1n} = \varepsilon_0 E_{2n} + P_{2n}$

$\varepsilon_0 (E_{2n} - E_{1n}) = P_{1n} - P_{2n} = \vec{P}_1 \cdot \vec{u}_{n_1} - \vec{P}_2 \vec{u}_{n_2} = \sigma_{p1} - \sigma_{p2}$

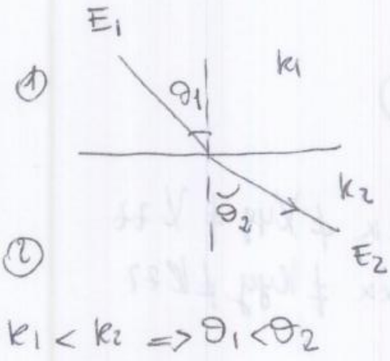
$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\overbrace{\sigma_{p1} - \sigma_{p2}}^{\text{somma algebrica}}}{\varepsilon_0}$

- Se diel isotropo

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

- $\boxed{E_{1t} = E_{2t}} \rightarrow \frac{D_{1t}}{\underbrace{\varepsilon_1}_{\varepsilon_0 k_1}} = \frac{D_{2t}}{\underbrace{\varepsilon_2}_{\varepsilon_0 k_2}} \Rightarrow \boxed{\frac{D_{1t}}{k_1} = \frac{D_{2t}}{k_2}}$

- $D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \Rightarrow \boxed{E_{1n} k_1 = E_{2n} k_2}$



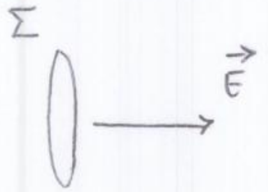
$$\begin{cases} E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2 \\ k_1 E_1 \cos\theta_1 = k_2 E_2 \cos\theta_2 \end{cases}$$

$\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{k_1} = \frac{\operatorname{tg}\theta_2}{k_2}$

$\boxed{\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{k_1}{k_2}}$ rifrazione delle linee di forza del campo elettrico

Se $k_1 < k_2 \Rightarrow \theta_1 < \theta_2$

CARICHE IN MOVIMENTO

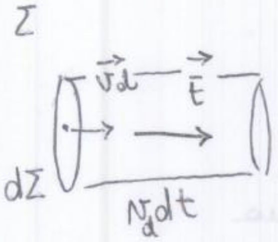


$$\vec{F} = e\vec{E}$$

v_d = vel. di deriva

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \qquad [i] \to A = 1\,C/s$$

$$1\,C = 1\,A \cdot 1\,s$$



$$dq = q_{port} \cdot n \cdot d\Sigma\, v_d\, dt$$

Se $\vec{u}_n \not\parallel \vec{E}$ $\quad dq = q_{port} \cdot n \cdot d\Sigma\, v_d\, dt \cos\theta$

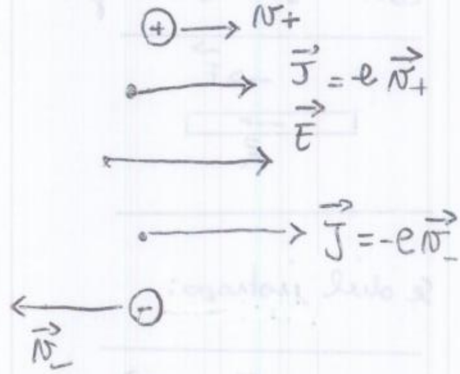
$$di = \frac{dq}{dt} = q_{port} \cdot n\, d\Sigma\, v_d \cos\theta$$

$\vec{J} = n\, q_{port}\, \vec{v}_d$ densità di corrente
corrente che attraversa l'unità
di superficie perpendicolare al
moto delle cariche

$\vec{J} \parallel \vec{v}_d \parallel \vec{E}$ se $q_{port} > 0$

$\vec{J} \parallel \vec{E}$, $\vec{v}_d$ verso opposto $\vec{E}$, $q_{port} < 0$

$\vec{J}$ sempre $\parallel \vec{E}$



$$di = J\, d\Sigma \cos\theta = \vec{J} \cdot \vec{u}_n\, d\Sigma$$

$$i = \int_\Sigma di = \int_\Sigma \vec{J}\, \vec{u}_n\, d\Sigma$$

Se $\vec{J}$ uniforme su Σ

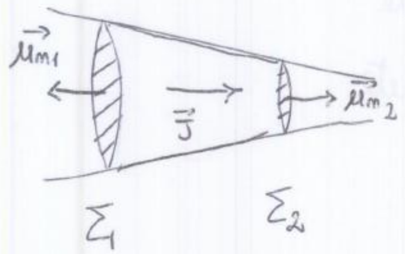
$\vec{u}_n \parallel \vec{J} \Rightarrow i = \int_\Sigma J\, d\Sigma = J \int_\Sigma d\Sigma = J\Sigma \quad \nearrow i = J\Sigma \quad \to \quad J = \frac{i}{\Sigma}$

Se 2 tipi di portatori:

$$\vec{J} = q_+ n_+ \vec{v}_{d+} + q_- n_- \vec{v}_{d-}$$

Applicazione regime stazionario:

23



$$\phi(\vec{J}) = 0$$

$$\int_{\Sigma_1} \vec{J}\cdot\vec{u}_{n1}\, d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \vec{J}\cdot\vec{u}_{n2}\, d\Sigma + \underbrace{\int_{\Sigma_L} \vec{J}\cdot\vec{u}_{nL}\, d\Sigma}_{\to\, = 0} =$$

$$= -i_1 + i_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{i_1 = i_2}$$

J uniforme:

$$J_1 = \frac{i_1}{\Sigma_1}, \quad J_2 = \frac{i_2}{\Sigma_2}$$

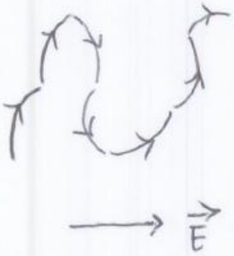
LEGGE DI OHM

Modello di Drude-Lorentz

reticolo di ioni fissi
elettroni in moto che percorrono una spezzata

v_{TH} = vel. di agitazione termica
l = libero cammino medio (distanza tra due urti successivi)

τ = tempo di libero cammino medio
$(\tau = l/v_{TH})$



RU + MRUA

$\vec{F} = -e\vec{E} \Rightarrow$ ogni elettrone subisce un accelerazione $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{e\vec{E}}{m}$

v_i = vel. elettrone subito dopo un urto
v_{i+1} = vel subito prima dell'urto successivo

$$\vec{v}_{i+1} = \vec{v}_i - \frac{e\vec{E}}{m}\tau$$

① se J unif su Σ

$$J = \frac{i}{\Sigma}$$

$$V_A - V_B = \int_A^B \rho J \, dl = \int_A^B \rho \frac{i}{\Sigma} dl$$

② se regime stazionario $\rightarrow i = \text{cost}$

$$V_A - V_B = \int_A^B \rho \frac{i}{\Sigma} dl = i \left(\int_A^B \frac{\rho}{\Sigma} dl \right) \rightarrow R = \text{resistenza}$$

se ρ, Σ costanti lungo tutto il conduttore $\Rightarrow R = \frac{\rho}{\Sigma} l$

In caso stazionario:

$$V_A - V_B = R i$$

• dipendenza della resistività dalla temperatura

$$\rho(\text{temp}) = \rho_{20} (1 + \alpha \, \Delta t_{\text{temp}})$$

$\Delta t_{\text{temp}} \rightarrow$ temp $- 20°C$

$\alpha \rightarrow$ coeff. termico

1) METALLI $\alpha > 0$ $\rightarrow$ ρ aumenta all'aumentare della temp.

Se la temp. cresce $\rightarrow$ cresce V_{TH} $\rightarrow$ aumento urti $\rightarrow$ elettroni si muovono con più difficoltà $\rightarrow$ AUMENTO ρ

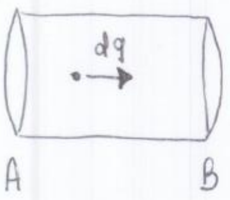
2) SEMICONDUTTORE $\alpha < 0$ $\rightarrow$ ρ diminuisce all'aumentare della temperatura

se la temp. cresce $\rightarrow$ più elettroni passano dalla banda di valenza a quella di conduzione $\rightarrow$ aumento n° di portatori per unità di volume

3) LEGHE $\alpha \sim 0$

- Potenza necessaria a far circolare corrente

27



$$dW = dq\,V = V\,i\,dt$$

Se $i = cost \Rightarrow W = Vit$

$V_A - V_B = V$

$$P = \frac{dW}{dt} = V \cdot i$$

Se conduttore è ohmico

$$V = Ri \rightarrow dW = Ri^2 dt = \frac{V^2}{R} dt$$

$$P = Ri^2 = \frac{V^2}{R}$$

Inoltre:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = -e\vec{E} \cdot \vec{v}_d$$

$$\frac{P_{TOT}}{vol} = (-e\,n\,\vec{v}_d)\,\vec{E} = \vec{J} \cdot \vec{E}$$

n n° portatori per unità di volume

- Se conduttore è Ohmico:

$$\frac{P_{TOT}}{vol} = \vec{J} \cdot \vec{E} = \rho J^2 = \frac{1}{\sigma}\sigma^2 E^2 = \sigma E^2 = \frac{E^2}{\rho}$$

$$\vec{E} = \rho \vec{J}$$

$$J = \sigma \vec{E}$$

EFFETTO JOULE

Un conduttore percorso da corrente si scalda a causa degli urti tra gli elettroni.

$$W = V \cdot i t = \underbrace{Ri^2 t = \frac{V^2}{R} t}_{\text{se conduttori ohmici}}$$

lavoro dissipato per effetto Joule sotto forma di calore

$$V_A - V_B + r_{int} \cdot i = \mathcal{E}$$

$$V_A - V_B = \mathcal{E} - r_{int} \cdot i \rightarrow i = 0 \Rightarrow V_A - V_B = \mathcal{E}$$

la fem è la ddp nel generatore quando non eroga corrente

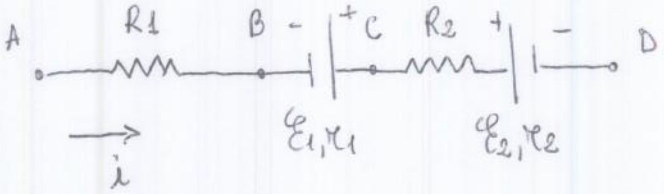
$$r_{int} = \left(\int_B^A (\vec{E}_{el} + \vec{E}^*) \cdot d\vec{l} \right) \cdot \frac{1}{i}$$

$$\mathcal{E} = R_{ext} \cdot i + r_{int} \cdot i$$

$$\mathcal{E} i \, dt = \underbrace{R_{ext}\, i^2 \, dt}_{\text{en dissipata sulla Rext in dt}} + \underbrace{r_{int}\, i^2 \, dt}_{\text{en. dissipata nella Rint in dt}}$$

$$P = \mathcal{E} i = R_{ext}\, i^2 + r_{int} \cdot i^2$$

- Consideriamo ora un tratto di circuito:



$$V_A - V_B = R_1 i$$

generatore

$$V_B - V_C + \mathcal{E}_1 = r_1 i$$

$$V_C - V_D - \mathcal{E}_2 = (R_2 + r_2) i$$

utilizzatore

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + V_A - V_D = (R_1 + R_2 + r_1 + r_2) i \Rightarrow \boxed{V_A - V_D + \sum_i \mathcal{E}_i = R_{TOT} \cdot i}$$

legge di ohm generalizzata

1°) NO GENERATORI:

$$\boxed{V_A - V_D = R_{TOT}\, i}$$

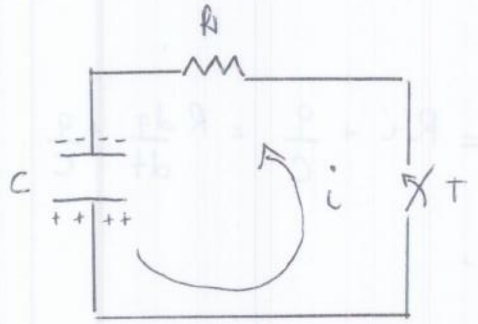
2°) A = D → CIRCUITO CHIUSO $\Rightarrow V_A - V_D = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_i \mathcal{E}_i = R_{TOT}\, i}$

31

$$\int_0^\infty i^2 R\,dt = \int_0^\infty \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-2t/RC}\,dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\left(-\frac{1}{2}RC\right)\left[e^{-2t/RC}\right]_0^\infty = \frac{\mathcal{E}^2 C}{2}$$

metà lavoro del generatore è diss. sulla resistenza

• processo di scarica



$t=0$, T chiuso

$i=0$

$q = q_0 = C\mathcal{E}$

$V_R + V_C = 0$

$$Ri + \frac{q}{C} = 0 \rightarrow R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \rightarrow R\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{C}$$

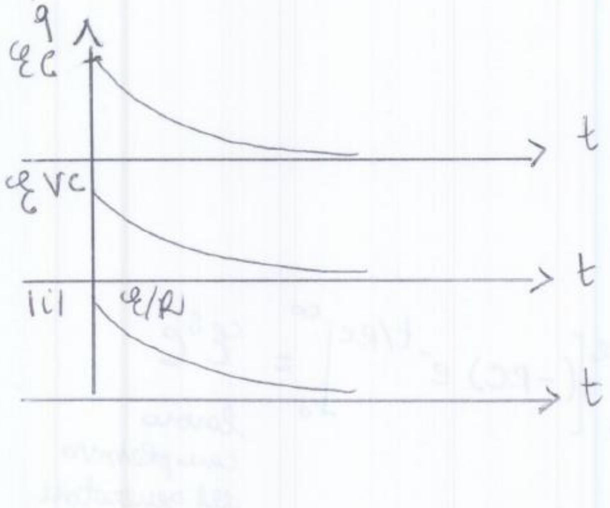
$$\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{q} = -\int_0^t \frac{1}{RC}\,dt$$

$$\ln\left(\frac{q}{q_0}\right) = -\frac{t}{RC} \rightarrow q = q_0 e^{-t/RC} = \mathcal{E}C e^{-t/RC}$$

$$V_C = \frac{q}{C} = \mathcal{E} e^{-t/RC}$$

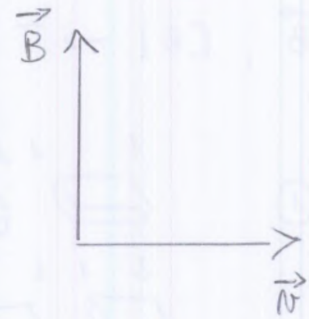
$$i = \frac{dq}{dt} = -\mathcal{E}C\frac{1}{RC}e^{-t/RC} = -\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC}$$

la corrente circola in senso opposto al precedente



FORZA DI LORENTZ

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$$



$q > 0$ F_L esce dal piano individuato da $\vec{v}, \vec{B}$

$q < 0$ F_L entra

$$F_L = q v B \sin\theta$$

$$W = \int \vec{F}_L \cdot d\vec{s} = \int \underbrace{\vec{F}_L \cdot \vec{v}}_{\vec{F}_L \perp \vec{v}} dt = 0$$

la forza di Lorentz non compie lavoro

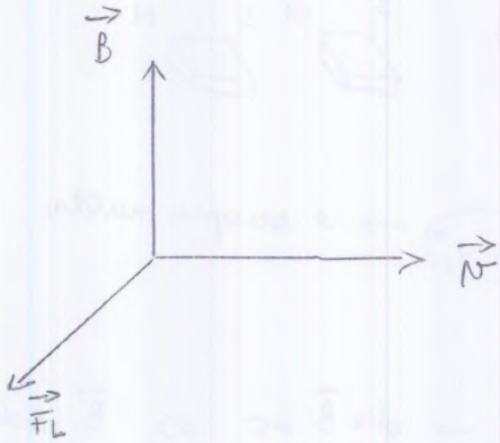
$$W = 0 = E_{kf} - E_{ki} \rightarrow v_f = v_i$$

la F_L non varia il modulo della velocità, ma cambia la direzione e il verso

- $\vec{B}$ unif, $\vec{B} \perp \vec{v}$

$$F_L = q v B$$

la traiettoria descritta da una particella avverrà su un piano perpendicolare a $\vec{B}$.



$$F_L = q v B = m\frac{v^2}{r} \rightarrow r = \frac{mv}{qB} = cost$$

la particella carica descrive una circonferenza su un piano $\perp \vec{B}$.

- Verso di percorrenza?

$\odot \vec{B}$ (unif)

$q > 0 \rightarrow \vec{\omega}$ entrante

$q < 0 \rightarrow \vec{\omega}$ uscente

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} = m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\vec{v} \times q\vec{B} = \vec{v} \times (-m)\vec{\omega}$$

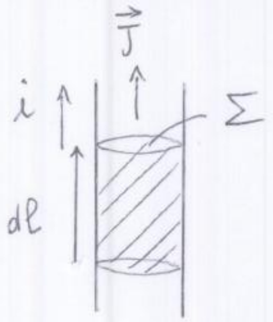
$$q\vec{B} = -m\vec{\omega}$$

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{m}\vec{B}$$

Un conduttore immerso in un campo magnetico, percorso da corrente, è soggetto a una forza che lo può spostare o deformare.

In genere parleremo di CONDUTTORI RIGIDI → INDEFORMABILI (35)

SECONDA FORMULA DI LAPLACE



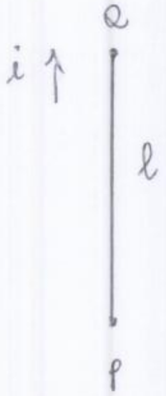
$$d\vec{F} = \vec{F_L}\Big|_{VOL} dV = \vec{F_L}\Big|_{VOL} d\ell\Sigma = \vec{J} \times \vec{B}\, d\ell\Sigma =$$

$$= J\vec{d\ell} \times \vec{B}\Sigma = \frac{i}{\Sigma}\vec{d\ell} \times \vec{B}\Sigma$$

$\vec{J} = \text{cost}$

$J = i/\Sigma$

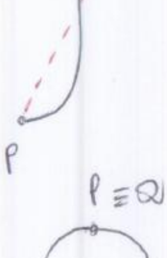
$$\boxed{d\vec{F} = i\vec{d\ell} \times \vec{B}}$$



$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int_\ell i\vec{d\ell} \times \vec{B}$$

- se $i = \text{cost} \to i\int_\ell \vec{d\ell} \times \vec{B}$
- se $i = \text{cost} + \vec{B}$ unif $\to i\left(\int_\ell \vec{d\ell}\right) \times \vec{B} = i\vec{\ell} \times \vec{B}$

In generale la forza su un filo che giace in un piano e immerso in un campo magnetico uniforme NON DIPENDE dalla forma del filo, ma solo dai punti iniziale e finale



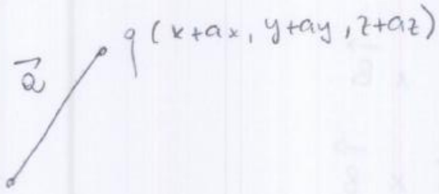
$$\vec{F} = \int i\vec{d\ell} \times \vec{B} = i\vec{PQ} \times \vec{B}$$

$$F = i\underbrace{\vec{PQ}}_{}\overset{0}{} \times \vec{B} = 0$$

Se il filo giace su un piano e forma un circuito CHIUSO, la forza risulta nulla

$$\vec{M}_e = \vec{b} \times \vec{F} = \vec{b}\, q \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$\vec{M}_b = \vec{m} \times \vec{B}$$



$$U_e = qV(x+a_x, y+a_y, z+a_z) - qV(x,y,z) =$$

$$= q\left(\cancel{V(x,y,z)} + \frac{\partial V}{\partial x} a_x + \frac{\partial V}{\partial y} a_y + \frac{\partial V}{\partial z} a_z - \cancel{V(x,y,z)}\right) =$$

$$= \vec{p} \cdot \text{grad}\, V = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

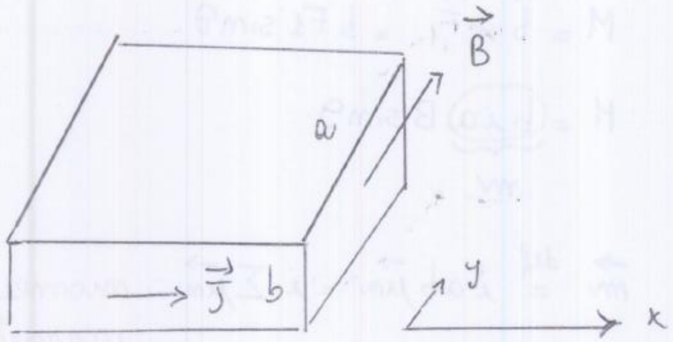
$$U_e = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

$$U_m = -\vec{m} \cdot \vec{B} \longrightarrow U_M = -m B \cos\theta$$

$\nearrow \theta = 0° \Rightarrow U_m$ MINIMA

$\searrow \theta = 180° \Rightarrow U_m$ MASSIMA

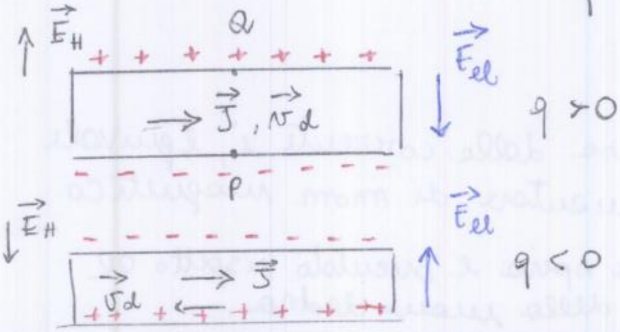
EFFETTO HALL



Su ciascun portatore agisce la forza di Lorentz:

$\vec{F}_L = q \vec{v}_d \times \vec{B}$ la struttura della formula mostra che sulla carica q agisce una forza F NON ELETTROSTATICA, pertanto definiamo un <u>campo elettromotore</u>

Campo di Hall $\rightarrow \vec{E}_H = \dfrac{\vec{F}_L}{q} = \vec{v}_d \times \vec{B}$

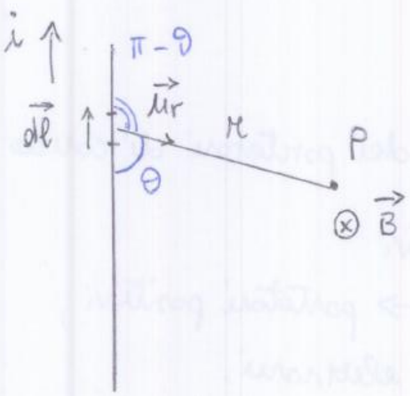


Il campo $\vec{E}_H$ provoca una deflessione nel moto delle cariche aggiungendo una componente trasversa alla v_d e provocando un accumulo di cariche di segno opposto sulle facce ortogonali alla direzione di $\vec{E}_H$.

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \times \vec{\mu_r}}{r^2} dV_{ol}$$

$$\vec{B} = \int_{vol} \vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{vol} \frac{\vec{J} \times \vec{\mu_r}}{r^2} dV_{ol}$$

LEGGE DI BIOT-SAVART

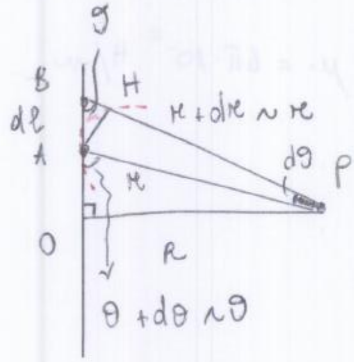


$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\vec{dl} \times \vec{\mu_r}}{r^2} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dl \sin(\pi - \theta)}{r^2} \vec{\mu_\phi} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dl \sin\theta}{r^2} \vec{\mu_\phi}$$

$$\vec{B} = \int \vec{dB} = i \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\int \frac{dl \sin\theta}{r^2} \right) \vec{\mu_\phi}$$ troppe cose che variano!



$\overline{AH} = dl \sin\theta \rightarrow dl = \frac{\overline{AH}}{\sin\theta}$

$\widehat{AH} = r\,d\theta$

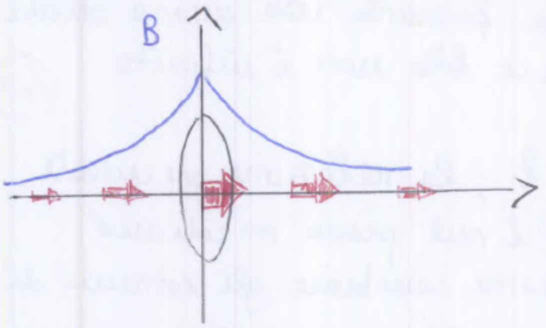
$\overline{AH} \sim \widehat{AH} \Rightarrow dl = \frac{r\,d\theta}{\sin\theta}$

$$r = \frac{R}{\sin\theta} \rightarrow \boxed{dl = \frac{R\,d\theta}{\sin^2\theta}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \left(\int \frac{\cancel{R}\,d\theta}{\cancel{\sin^2\theta}} \cdot \frac{\sin\theta}{R^{\cancel{2}}} \cancel{\sin^2\theta} \right) \vec{\mu_\phi} = 2 \frac{\mu_0}{4\pi R} i \left(\int_0^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta \right) \vec{\mu_\phi} =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi R} i \cos\theta \Big|_{\pi/2}^{0} \vec{\mu_\phi} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \vec{\mu_\phi}$$

- $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \vec{\mu_\phi} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \vec{\mu_l} \times \vec{\mu_r}$



Il campo ha sempre lo stesso verso

Cosa accade a grande distanza dalla spira?

$x >> R$

$$\vec{B} = \frac{2\mu_0}{4\pi} \frac{\overbrace{i \pi R^2 \, \vec{\mu}_x}^{m \vec{\mu}_m}}{x^3} \qquad m\vec{\mu}_m = \vec{m}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{m}}{x^3}$$ analogo al campo elettrico generato da un dipolo sul proprio asse

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi r^3 \varepsilon_0} \left[3(\vec{p} \cdot \vec{\mu}_r) \cdot \vec{\mu}_r - \vec{p} \right] \quad \text{ma } \vec{p} \parallel \vec{\mu}_r$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 r^3} \left[3\vec{p} - \vec{p} \right] = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{2\vec{p}}{r^3}$$

Analogamente:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[3(\vec{m} \cdot \vec{\mu}_r) \cdot \vec{\mu}_r - \vec{m} \right]$$

Valgono formule analoghe a quelle dei dipoli.

$$U_m = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

$$M = \vec{m} \times \vec{B}$$

In generale:

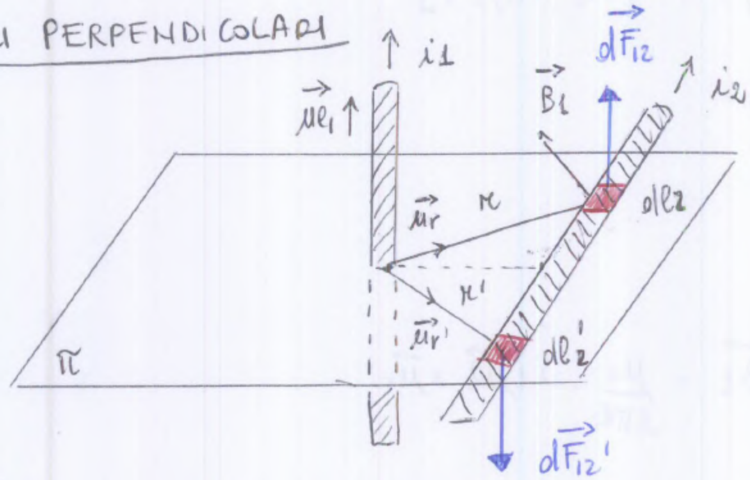
$$\begin{cases} \text{CONCORDI} \rightarrow \text{f. attrattiva} \\ \text{DISCORDI} \rightarrow \text{f. repulsiva} \end{cases}$$

Definiamo corrente di intensità 1 A quella che circolando in due fili rettilinei paralleli posti alla distanza di 1 m, dà luogo ad una forza $F = \frac{\mu_0}{2\pi} = 2 \cdot 10^{-7}$ N per metro di ciascun conduttore.

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/m

$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \rightarrow \varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m

FILI PERPENDICOLARI



$$\vec{B_1} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1}{r} \vec{\mu l_1} \times \vec{\mu r}$$

$$\vec{B_1}' = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1}{r'} \vec{\mu l_1} \times \vec{\mu r}'$$

$$\vec{dF_{12}} = i_2 \vec{dl_2} \times \vec{B_1} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{r} \left[\vec{dl_2} \times (\vec{\mu l_1} \times \vec{\mu r}) \right] =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{r} \left[(\vec{dl_2} \cdot \vec{\mu r}) \cdot \vec{\mu l_1} - \underbrace{(\vec{dl_2} \cdot \vec{\mu l_1})}_{=0} \vec{\mu r} \right]$$

$$\vec{dF_{12}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{r} dl_2 \cos\theta \, \vec{\mu l_1}$$

LEGGE DI AMPERE

45

Vale in regime stazionario

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \sum_{i=1}^{k} i_k \longrightarrow$$ segno delle correnti in base al verso di scorrimento rispetto alla linea di circuitazione.

forma integrale

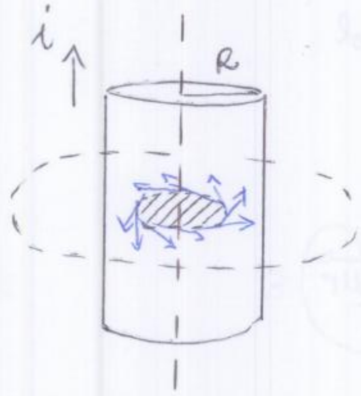
$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\vec{dl} = \int_\Sigma \text{rot}\,\vec{B}\cdot\vec{\mu_n}\, d\Sigma$$

$$\mu_0\, i_{TOT} = \mu_0 \int_\Sigma \vec{J}\,\vec{\mu_n}\, d\Sigma$$

$$\int_\Sigma (\text{rot}\,\vec{B} - \mu_0\vec{J})\,\vec{\mu_n}\, d\Sigma = 0 \longrightarrow \boxed{\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{J}}$$ forma locale

APPLICAZIONI

① Calcolare il valore di $\vec{B}$ al variare della distanza dall'asse del cavo. Supp. $\mu \sim \mu_0$

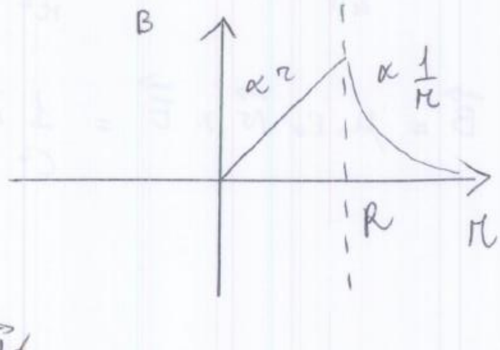


• $r < R$

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \sum_{1}^{n} i_n$$

$$B\cdot 2\pi r = \mu_0\, i' \qquad i' = J\Sigma' = J\cdot\pi r^2$$

$$B\cdot 2\cancel{\pi}\cancel{r} = \mu_0 J \cancel{\pi} r^{\cancel{2}}$$

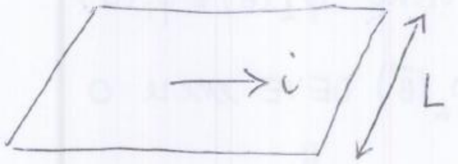


$$\vec{B} = \frac{\mu_0\, i\, r}{2\pi R^2}\vec{\mu_\phi} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2}\cdot r\,\vec{\mu_\phi}$$

• $r > R$

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = 2\pi r B = \mu_0\, i \longrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r}\, i\,\vec{\mu_\phi}$$

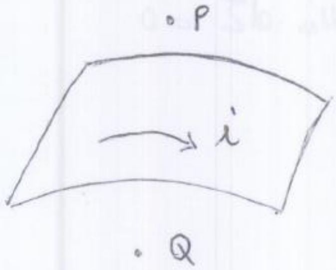
Un risultato analogo si otterrebbe considerando una lastra percorsa da corrente i, lunga L.



$$\vec{B}(z>0) = -\frac{\mu_0}{2} J_s \vec{\mu}_y \qquad J_s = \frac{i}{L}$$

$$\vec{B}(z<0) = \frac{\mu_0}{2} J_s \vec{\mu}_y$$

DISCONTINUITÀ CAMPO MAGNETICO



$J_s \rightarrow$ può variare da punto a punto

$$\vec{B}(P) = \vec{B}_{ext}(P) + \vec{B}_{lastra}(P)$$

$$\vec{B}(Q) = \vec{B}_{ext}(Q) + \vec{B}_{lastra}(Q)$$

$\vec{B}_{ext}(P) = \vec{B}_{ext}(Q) \Rightarrow$ non ne tengo conto nella discontinuità

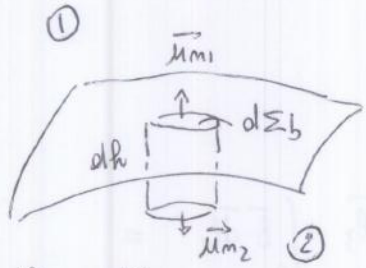
Componente tangenziale:

$$\vec{B}(P) = -\frac{\mu_0}{2} J_s \vec{\mu}_y$$

$$\vec{B}(Q) = \frac{\mu_0}{2} J_s \vec{\mu}_y$$

$$\boxed{|\Delta B_t| = |\vec{B}(P) - \vec{B}(Q)| = \mu_0 J_s \vec{\mu}_y}$$

Componente normale:



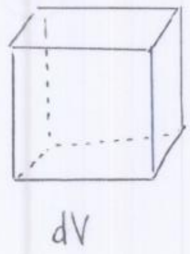
$dh << dR$

$$d\phi(\vec{B}) = 0 \qquad -\vec{u}_{m1} = $$

$$\vec{B}\cdot\vec{\mu}_{m1}\, d\Sigma_b + \vec{B}\,\vec{\mu}_{m2}\, d\Sigma_b + \underbrace{\vec{B}\cdot\vec{\mu}_{mL}}_{=0}\, d\Sigma_L = 0$$

$$(B_{1_m} - B_{2_m})\, d\Sigma_b = 0$$

$$\boxed{B_{1_m} = B_{2_m}}$$



$\langle \vec{m} \rangle$ $\quad d\vec{m} = \langle \vec{m} \rangle dN$

↳ mom. magnetico medio

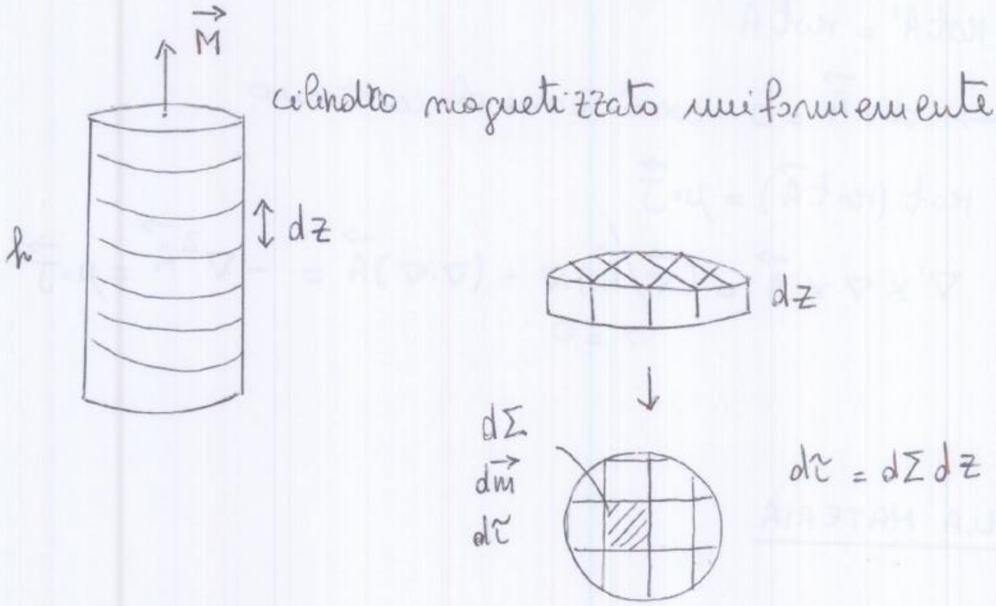
$$\frac{d\vec{m}}{dV} = \langle \vec{m} \rangle \frac{dN}{dV} = \vec{M} \rightarrow \text{MAGNETIZZAZIONE}$$

dV

Sotto l'azione di un campo magnetico, tutti gli atomi e le molecole acquistano un mom. magnetico medio $\langle \vec{m} \rangle$.

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV} = \langle \vec{m} \rangle n$$

n = n° di particelle per unità di volume



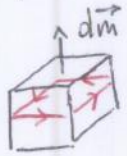
cilindro magnetizzato uniformemente

$$d\tau = d\Sigma\, dz$$

$$\frac{d\vec{m}}{dV} = \vec{M} \rightarrow d\vec{m} = \vec{M}\, d\Sigma\, dz = M\, d\Sigma\, dz\, \vec{\mu}_z$$

Per il principio di equivalenza spira-dipolo, il prisma è equivalente ad una spira, percorsa dalla corrente di.

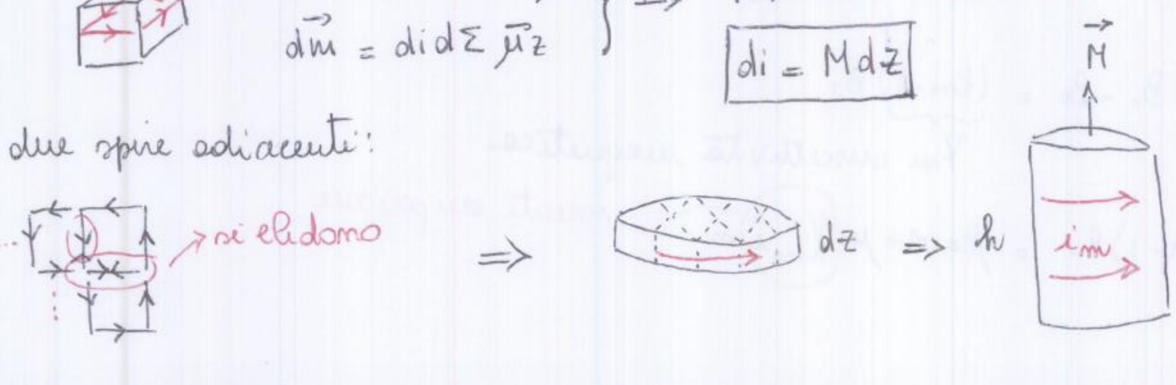
$$d\vec{m}_{spira} = di\, d\Sigma\, \vec{\mu}_z$$



$$\left.\begin{aligned} d\vec{m} &= M d\Sigma\, dz\, \vec{\mu}_z \\ d\vec{m} &= di\, d\Sigma\, \vec{\mu}_z \end{aligned}\right\} \rightarrow M d\cancel{\Sigma}\, dz = di\, d\cancel{\Sigma}$$

$$\boxed{di = M dz}$$

due spire adiacenti:



$$i_m = \int di_m = M \int dz = Mh$$

equazione di stato dei materiali magnetizzati

$$\begin{cases}\vec{M} = \chi_m \vec{H} \\ \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 K_m \vec{H} = \mu \vec{H}\end{cases}$$

- Ogni atomo é caratt. da:

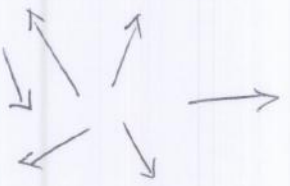
$$\left.\begin{array}{l}\vec{m} = \text{mom magnetico orbitale} \\ \vec{m}_s = \text{mom magnetico di spin}\end{array}\right\} \vec{m}_j \text{ mom. magnetico totale dell'atomo}$$

① DIAMAGNETICI $\rightarrow |\vec{m}_j| = 0$

Se un mezzo in un campo magnetico, il moto degli elettroni viene perturbato e compare un debole mom. magnetico $\langle \vec{m} \rangle$ che si oppone al campo esterno

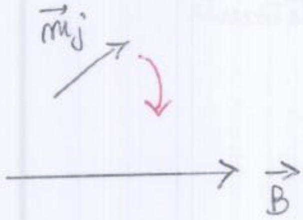
$$\left.\begin{array}{l}\langle \vec{m} \rangle \propto -\vec{B}_{loc} \\ \vec{M}_{loc} \propto -\vec{B}_{loc}\end{array}\right\} \text{punto per punto} \qquad \begin{cases}\chi_m < 0 \\ K_m < 1\end{cases}$$

② PARAMAGNETICI $\rightarrow \vec{m}_j \neq 0$ (mom. magnetico intrinseco)



$\langle \vec{m} \rangle = 0$ In cond. normali, senza campo magnetico esterno

$\vec{M} = 0$



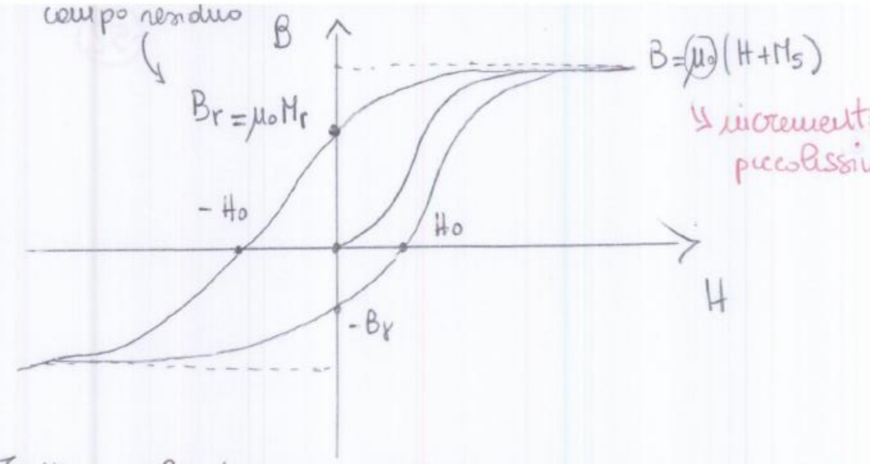
$\vec{M}_{loc} \propto \vec{B}_{loc}$

all'equilibrio:

$$N = N_{1\,allineati} + N_{2\,non\ allineati}$$

$$\langle \vec{m} \rangle N = \vec{m}_j N_{1\,allineati}$$

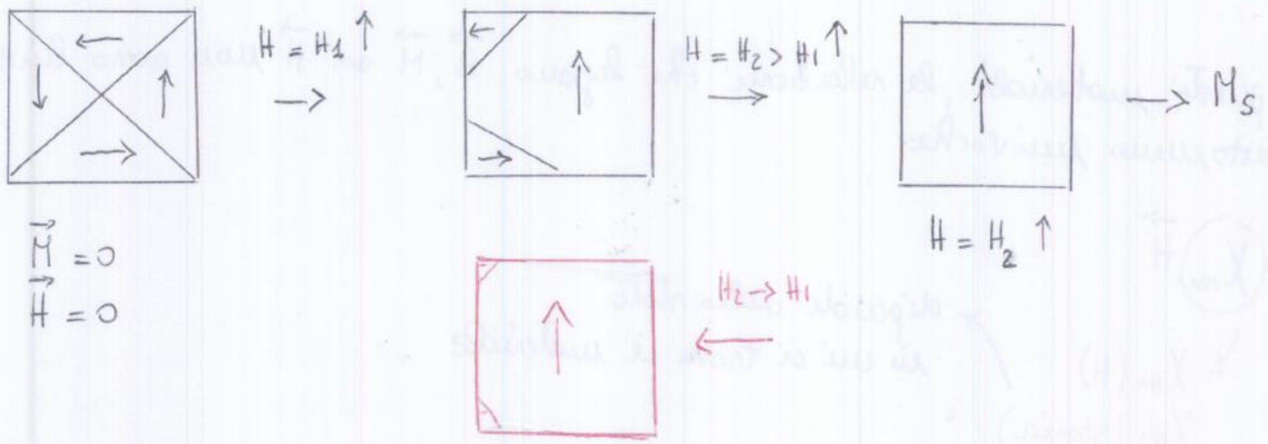
$$\begin{cases}K_m > 1 \\ \chi_m > 0\end{cases}$$



$B = \mu_0 (H + M)$

Tutti i valori di B all'interno del ciclo di isteresi sono raggiungibili scegliendo la storia adatta per ottenerli

• Da cosa dipende tale comportamento?



Tornando a diminuire H, le pareti di Bloch devono vincere un attrito al distacco che fa sì che a parità di H, i domini orientati parallelamente col esso siano più grandi al processo di ritorno risp. al processo di andata.

Con ciò spieghiamo l'isteresi magnetica

Il ciclo di isteresi diminuisce all'aumentare di T

Per T = T curie → materiale paramagnetico

Come smagnetizzare un materiale?

Come lo riporto alla condizione $M = B = 0$?
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \parallel$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad H$

① SCALDANDOLO OLTRE LA TEMP. DI CURIE

Se $T > T_c$ → materiale paramagnetico

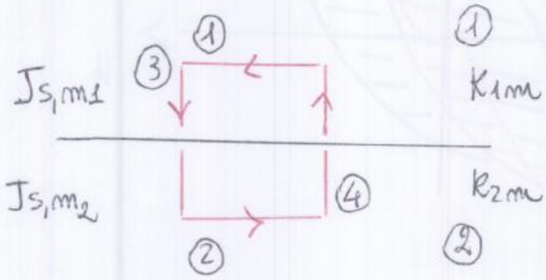
- DISCONTINUITÀ TRA DUE MEZZI CON PROPRIETÀ MAGNETICHE DIVERSE

$$\begin{cases} |\Delta B_t| = \frac{\mu_0}{2} J_s + \frac{\mu_0}{2} J_s = \mu_0 J_s \\ B_{1n} = B_{2n} \end{cases}$$ nel caso in cui la sup. è sede di correnti di conduzione

$$\begin{cases} |\Delta B_t| = \mu_0 (J_{s,m1} + J_{s,m2}) \\ B_{1n} = B_{2n} \end{cases}$$ nel caso in questione

$$B_{1n} = B_{2n} \underset{\substack{\text{se vale} \\ \vec{B} = \mu \vec{H}}}{\Longrightarrow} \mu_0 K_{1m} H_{1n} = \mu_0 K_{2m} H_{2n} \rightarrow K_{1m} H_{1n} = K_{2m} H_{2n}$$

$$\boxed{\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{K_{2m}}{K_{1m}}}$$ discontinuità componente normale di $\vec{H}$



$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = i = 0$$

$$H_1 \cdot \vec{dl_1} + H_2 \vec{dl_2} + H_3 \cancel{\vec{dl_3}} + H_4 \cancel{\vec{dl_4}} = 0$$

$\vec{dl_2} = -\vec{dl_1}$; $\vec{dl_3} \to 0$; $\vec{dl_4} \to 0$

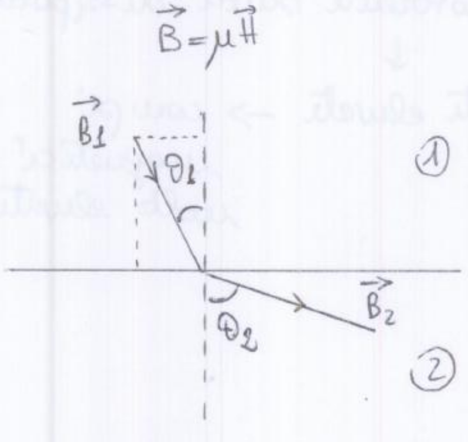
$dl_3, dl_4 << dl_1, dl_2$

$$(H_{1t} - H_{2t}) dl_1 = 0$$

$$\boxed{H_{1t} = H_{2t}}$$ si conserva la componente tangenziale

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{K_{2m}}{K_{1m}}$$

$$H_{1t} = H_{2t} \underset{\substack{\text{se vale} \\ \vec{B} = \mu \vec{H}}}{\longrightarrow} \frac{B_{1t}}{K_{1m}} = \frac{B_{2t}}{K_{2m}} \rightarrow \boxed{\frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{K_{1m}}{K_{2m}}}$$



$$tg\,\theta_1 = \frac{B_{1t}}{B_{1n}}$$

$$tg\,\theta_2 = \frac{B_{2t}}{B_{2n}}$$

$$\rightarrow \frac{tg\,\theta_1}{tg\,\theta_2} = \frac{B_{1t}}{B_{1n}} \cdot \frac{B_{2n}}{B_{2t}} = \frac{B_{1t}}{B_{2t}}$$

$$\boxed{\frac{tg\,\theta_1}{tg\,\theta_2} = \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{K_{1m}}{K_{2m}}}$$ legge di rifrazione linee di forza del campo magnetico

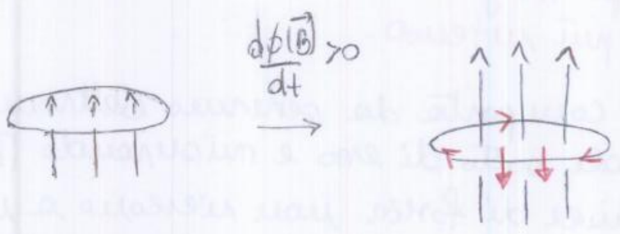
La variazione del flusso magnetico concatenato con una linea chiusa γ, dà origine a un campo elettrico indotto $\vec{E}_i$, la cui circuitazione è pari all'opposto della derivata temporale del flusso di $\vec{B}$.

57

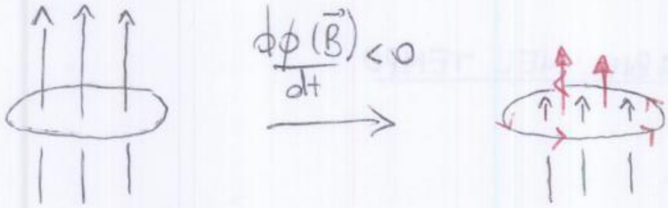
LA LINEA CHIUSA NON DEVE PER FORZA ESSERE UN CIRCUITO!

. *Legge di Lenz*

l'effetto della fem indotta generata dalla variazione di flusso è tale da opporsi alla causa che l'ha generata



La corrente indotta in questo caso circola in modo da generare un auto flusso che si oppone all'aumento di ϕ, in modo che il flusso complessivo cresca più lentamente.



Legge di Faraday in forma locale

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{u}_n \cdot d\Sigma$$

$$\int_\Sigma \text{rot}\, \vec{E}_i \cdot \vec{u}_n \cdot d\Sigma = -\int_\Sigma \frac{d\vec{B}}{dt}\, \vec{u}_n \cdot d\Sigma$$

$$\int_\Sigma \left(\text{rot}\,(\vec{E}_i) + \frac{d\vec{B}}{dt}\right) \vec{u}_n \, d\Sigma = 0 \iff \boxed{\text{rot}\, \vec{E}_i = -\frac{d\vec{B}}{dt}}$$

In generale:

$$\text{rot}\, \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

3) circuito fisso rigido, sorgenti di $\vec{B}$ in moto

4) Circuito fisso rigido, sorgenti di $\vec{B}$ fisse, alterazione delle linee di forza di $\vec{B}$ (ad esempio avvicinando un materiale ferromagnetico)

5) Circuito fisso rigido, sorgenti di $\vec{B}$ fisse, no modifica linee di campo, ma $\vec{B}(t) \neq cost$ a causa della variazione temporale della corrente che lo genera

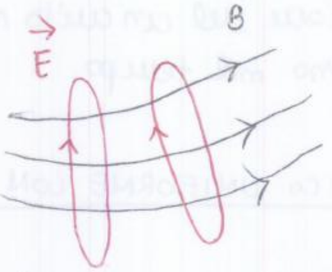
In questo caso abbiamo agito sul campo magnetico, non toccando il circuito.

· Correnti di Foucault

Sappiamo che:

$$rot\, \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

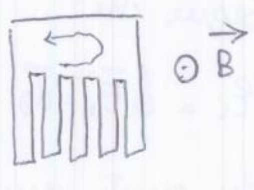
Se le linee di $\vec{B}$ stanno in una certa direzione, le linee di $\vec{E}_i$ stanno in un piano ortogonale a tale direzione e concatenano quelle di $\vec{B}$.



Quando il campo magnetico è variabile all'interno di un conduttore metallico, il campo elettrico indotto origina correnti concatenate alle linee di $\vec{B}$ che possono essere molto intense e causare il riscaldamento del materiale per effetto Joule.

Tale processo è sfruttato nei forni a induzione, in cui si fondono metalli sottoponendoli a campi magnetici variabili ad alta frequenza

Se si vogliono ridurre tali correnti, occorre RASTREMARE il materiale impedendo ad esse di scorrere in modo agevole



Processo di carica:

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = Ri \qquad \mathcal{E}_L = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}(Li) = -L\frac{di}{dt}$$

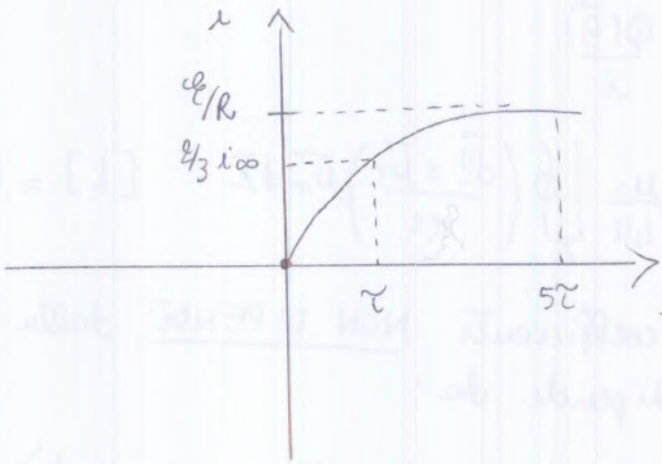
$$\mathcal{E} - L\frac{di}{dt} = Ri$$

$$\mathcal{E} - Ri = L\frac{di}{dt} \rightarrow \int_0^i \frac{di}{\mathcal{E} - Ri} = \frac{1}{L}\int_0^t dt$$

$$-\frac{1}{R}\ln\left(\frac{\mathcal{E} - Ri}{\mathcal{E}}\right) = \frac{t}{L}$$

$$\ln\left(\frac{\mathcal{E} - Ri}{\mathcal{E}}\right) = -\frac{R}{L}t \rightarrow \mathcal{E} - Ri = \mathcal{E}e^{-\frac{R}{L}t} \rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-R/L\, t}\right)$$

$$i(t) = \underbrace{\frac{\mathcal{E}}{R}}_{i_\infty} - \underbrace{\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-R/L\, t}}_{\text{extracorrente di chiusura}}$$



$$\tau = \frac{L}{R}$$

$3 \div 5\tau \rightarrow$ fine transitorio

Apriamo il circuito:

$t < 0$ T chiuso $\quad i = \frac{\mathcal{E}}{R}$

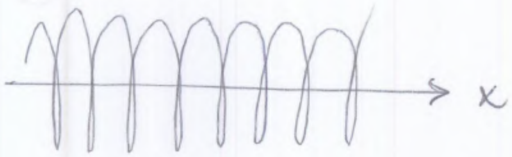
$t > 0$ T aperto $\quad i = i_\infty = \frac{\mathcal{E}}{R} \implies R \rightarrow R' >> R$

$$\mathcal{E} - L\frac{di}{dt} = R'i \rightarrow \int_{i_\infty}^{i} \frac{di}{\mathcal{E} - R'i} = \int_0^t \frac{dt}{L}$$

$$-\frac{1}{R'}\ln\left(\frac{\mathcal{E} - R'i}{\mathcal{E} - R'i_\infty}\right) = \frac{t}{L}$$

$$\ln\left(\frac{\mathcal{E} - R'i}{\mathcal{E} - R'i_\infty}\right) = -\frac{R'}{L}t \rightarrow \mathcal{E} - R'i = (\mathcal{E} - R'i_\infty)e^{-\frac{R'}{L}t}$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R'} - \frac{\mathcal{E}}{R'}e^{-\frac{R'}{L}t} + \frac{\cancel{R'}i_\infty}{\cancel{R'}}e^{-R'/L\, t} \sim \underbrace{\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-R'/L\, t}}_{\text{extracorrente di apertura}}$$



$$U_L = \frac{1}{2} L i^2$$

$$L = \frac{\phi(\vec{B})}{i}$$

$\vec{B} = \mu_0 i n \vec{\mu}_x$, con $n = \frac{N}{L}$

$$\phi_{spira}(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B}\cdot\vec{\mu}_n \, d\Sigma = B\Sigma \Rightarrow \phi_{TOT} = N\phi_{SPIRA} = NB\Sigma = \overset{nL}{\uparrow}{N}\mu_0 i n \Sigma = \mu_0 i n^2 L \Sigma$$

$$L = \frac{\phi_{TOT}(\vec{B})}{i} = \mu_0 n^2 \overbrace{L\Sigma}^{Vol} = \mu_0 n^2 Vol$$

$$U_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 Vol\, i^2 \frac{\mu_0}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0^2 i^2 n^2 Vol}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} Vol$$

$\boxed{u_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}}$ densità di energia magnetica

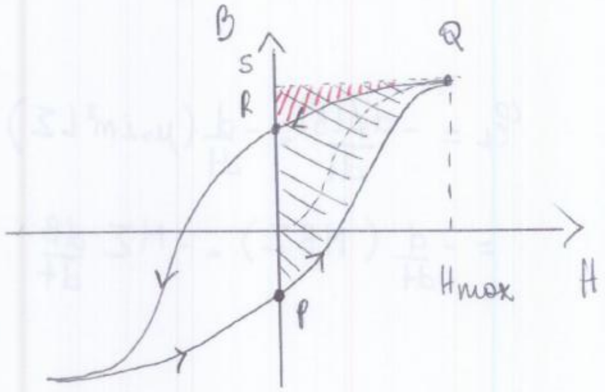
Il risultato trovato vale in generale, ovunque sia presente nello spazio un campo magnetico.

$$U_m = \int_{Vol} u_m(x,y,z)\, dVol$$

• Se no vuoto $u_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 222

- Se il materiale è FERROMAGNETICO:



$$W = \int_{-B_{res}}^{B_{max}} H\,dB = \text{area } \hat{PQS} > 0$$

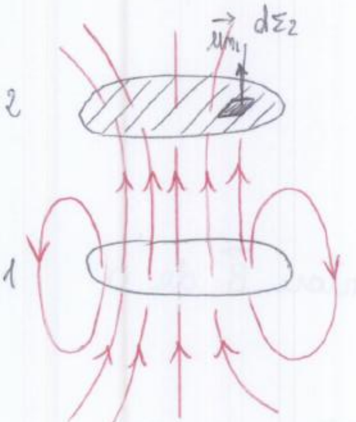
$$W = \int_{B_{max}}^{B_{res}} H\,dB = \text{area } \hat{RQS} < 0$$

Una parte di energia viene assorbita dal materiale e non viene più restituita.

In un intero ciclo, il lavoro speso e non recuperato PER UNITÀ DI VOLUME è pari all'area del ciclo di isteresi

L'en. non restituita è dissipata sotto forma di calore nel processo di allineamento e disallineamento dei domini di Weiss.

MUTUA INDUZIONE



$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 \oint \frac{\vec{dl} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

$$\phi_2(\vec{B}_1) = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \int_{\Sigma_2} \oint \left(\frac{\vec{dl} \times \vec{u}_r}{r_2} \right) \vec{u}_{m_2}\, d\Sigma_2$$

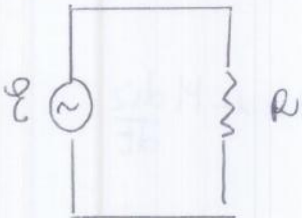
$$\underbrace{M_{12}}_{\text{coeff. di mutua induzione}} = \frac{\phi_2(\vec{B}_1)}{i_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Sigma_2} \oint \left(\frac{\vec{dl} \times \vec{u}_r}{r^2} \right) \cdot \vec{u}_{m_2}\, d\Sigma_2$$

1) NON DIPENDE dalla corrente che scorre nei due circuiti
2) dipende dal MEZZO e dalle CARATTERISTICHE GEOMETRICHE dei due circuiti
3) Dipende dalla DISTANZA tra i due circuiti
4) $M_{12} = \frac{\phi_2(\vec{B}_1)}{i_1} = M_{21} = \frac{\phi_1(\vec{B}_2)}{i_2} = M$

• CIRCUITI IN CORRENTE ALTERNATA

Una grandezza si dice alternata quando è periodica e il suo valor medio sul periodo è pari a 0.

CIRCUITO RESISTIVO

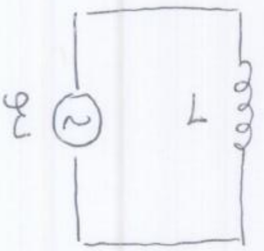


$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

$$\mathcal{E} = Ri \to i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \overbrace{\frac{\mathcal{E}_0}{R}}^{i_0} \cos(\omega t)$$

Corrente in fase con la tensione

CIRCUITO INDUTTIVO



$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = 0 \to \mathcal{E} = L\frac{di}{dt}$$

$$\mathcal{E}_0 \cos(\omega t)\, dt = L\, di$$

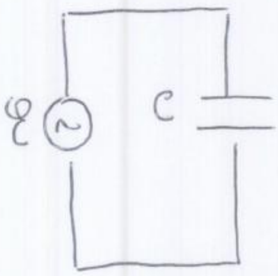
$$i = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \sin\omega t = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \cos(\omega t - \pi/2)$$

$\to i_0$

$\to$ reattanza induttiva

La corrente è in ritardo di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla tensione

CIRCUITO CAPACITIVO



$$\mathcal{E} = \frac{q}{C} = \frac{\int i\, dt}{C}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{i}{C} \longrightarrow -\mathcal{E}_0 \omega C \sin(\omega t) = i$$

reattanza capacitiva

$$i = -\mathcal{E}_0 \omega C \sin(\omega t) = \mathcal{E}_0 \omega C \cos(\omega t + \pi/2)$$

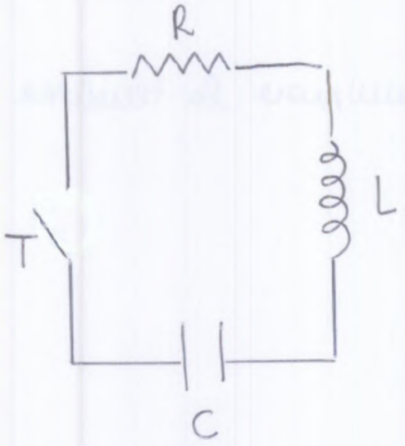
$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$

$\to i_0 = \mathcal{E}_0 \omega C$

$\mathcal{E}_0 = \frac{i_0}{\omega C}$

La corrente è in anticipo rispetto alla tensione

OSCILLAZIONI SMORZATE CIRCUITO RLC



$t=0$ tasto chiuso

$i=0,\ q=q_0$

$\mathcal{E}_L = V_R + V_C$

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{\int i\,dt}{C} = 0$$

$$\boxed{L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0}$$

eq. caratteristica:

$i = e^{kt}$

$$Lk^2e^{kt} + Rke^{kt} + \frac{1}{C}e^{kt} = 0,\quad e^{kt}\overbrace{\left(Lk^2 + Rk + \frac{1}{C}\right)}^{\text{eq. caratt.}}$$

$$k = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}}{2L} \longrightarrow \begin{cases} k_1 = -\dfrac{R}{2L} + \sqrt{\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 - \dfrac{1}{LC}} \\[2ex] k_2 = -\dfrac{R}{2L} - \sqrt{\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 - \dfrac{1}{LC}} \end{cases}$$

1° caso $k_1 k_2$, $k_1 \neq k_2$ reali

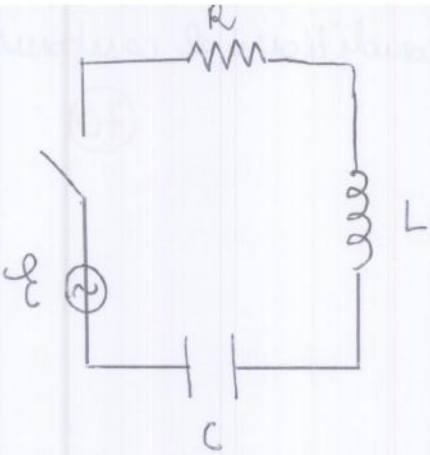
smorzamento forte $\rightarrow i(t) = Ae^{k_1t} + Be^{k_2t}$

2° caso $k_1 = k_2$

smorzamento critico $\rightarrow i(t) = Ae^{kt} + Bte^{kt}$

3° caso $k_1 \neq k_2$ complesse

SMORZAMENTO DEBOLE $\rightarrow \dfrac{R^2}{4L^2} - \dfrac{1}{LC} < 0 \Rightarrow k_{12} = -\dfrac{R}{2L} \pm i\overbrace{\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L}}}^{\omega_0}$



$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = Ri + \frac{\int i\,dt}{C}$$

$$\boxed{\frac{d\mathcal{E}}{dt} = L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C}}$$

La soluzione dell'eq. differenziale sarà data dalla somma dell'eq. omogenea associata $i(t) = Ae^{-\frac{R}{2L}t}\cos(\omega_0 t + \psi)$ e di una soluzione particolare che cerchiamo nella forma: $i(t) = i_0 \cos \omega t$.

Infatti, dato che il transitorio dopo un certo tempo scompare, a regime rimarrebbe solo la sol. particolare oscillante.

$$i(t) = Ae^{-R/2L\,t}\cos(\omega_0 t + \psi) + i_0 \cos(\omega t)$$

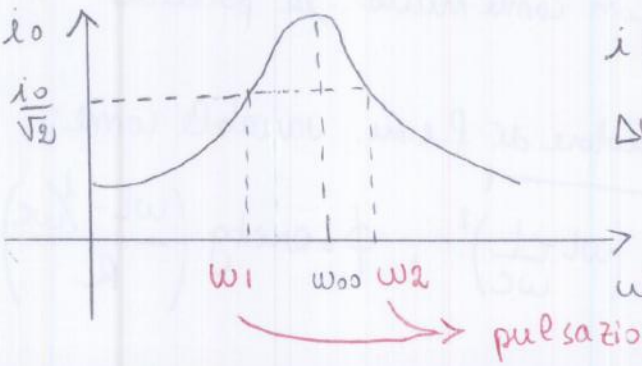
OSSERVIAMO CHE se $\omega = \omega_{00} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \longrightarrow$ RISONANZA

$$\omega = \omega_{00} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\Rightarrow \phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\overbrace{\omega L - \frac{1}{\omega C}}^{0}}{R}\right) = 0$$

$$\mathcal{E}_0 = i_0 \underbrace{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}_{0} = i_0 R$$

Quando $\omega = \omega_{00}$ il circuito trasporta la massima corrente



$\longrightarrow$ pulsazioni di taglio

$$i(\omega_1) = i(\omega_2) = \frac{\mathcal{E}_0}{R}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ LARGHEZZA RISONANZA

$Q = \frac{\omega_{00}}{\Delta\omega} = \frac{\omega_{00}}{\omega_2 - \omega_1}$ FATTORE DI MERITO

Maggiore è Q, più il circuito è selettivo

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho \quad \rightarrow \quad \mathrm{div}\,\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{J} = -\,\mathrm{div}\,\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \mathrm{div}\underbrace{\left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)}_{\text{solenoidale}} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \vec{J}_M\right)$$

$$\mathrm{rot}\,\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J} + \mathrm{rot}\,\vec{M} \quad \rightarrow \quad \mathrm{rot}\underbrace{\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right)}_{\vec{H}} = \vec{J}$$

- $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J}$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

<u>Legge di Ampere - Maxwell in forma integrale</u>:

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\oint_\gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\,(i + i_S) \qquad i = \int_\Sigma \vec{J}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma \qquad i_S = \int_\Sigma \vec{J}_S\, \vec{u}_n\, d\Sigma$$

$$i_S = \int_\Sigma \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,\vec{u}_n \cdot d\Sigma = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{u}_n\cdot d\Sigma = \varepsilon_0 \frac{\partial \phi(\vec{E})}{\partial t}$$

$$\boxed{\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\left(i + \varepsilon_0 \frac{\partial \phi(\vec{E})}{\partial t}\right)}$$ legge di Ampere - Maxwell in forma integrale

(3) $$\oint_\gamma \vec{E}_i\, d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma \vec{B}\, \vec{u}_n\, d\Sigma \quad \rightarrow \quad \text{rot}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

(4) $$\oint_\gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\left(i + \varepsilon_0 \frac{\partial \phi(\vec{E})}{\partial t}\right) \quad \rightarrow \quad \text{rot}\, \vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

MATERIALI

$$\text{rot}\, \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\downarrow$$

$$\text{rot}\, \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{J}_M)$$

$$\text{rot}\, \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J} + \text{rot}\, \vec{M} \quad \rightarrow \quad \text{rot}\underbrace{\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right)}_{\vec{H}} = \vec{J}$$

$$\text{rot}\, \vec{H} = \vec{J}$$

$$\text{div}\, \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\text{div}\, \vec{E} = \frac{\rho + \rho_P}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad \text{div}\, \vec{D} = \rho \quad \rightarrow \text{div}\, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\text{div}\left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\text{rot}\, \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

Esprimendo le eq. di Maxwell in f. dei vettori $\vec{D}$, $\vec{H}$, occorre anche aggiungere le relazioni:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} & (5) \\ \vec{B} = \mu \vec{H} & (6) \end{cases}$$

Tali eq. sono relativisticamente invarianti, cioè mantengono la stessa forma in qualsiasi sistema inerziale, a patto di usare le trasformazioni di Lorentz.

FENOMENI ONDULATORI

Onda: perturbazione impulsiva o periodica che si propaga nello spazio e nel tempo con una velocità ben definita.

IPOTESI

1) $\rho = 0$ NO CARICHE LIBERE
2) $\vec{J} = 0$ NO CARICHE CONDUZIONE
3) VUOTO
4) ONDE PIANE, cioè onde che, dato un piano perpendicolare alla direzione di propagazione, hanno la stessa intensità in ogni punto.
5) $\vec{E}, \vec{B}$ dipendono solo da x e t $\Rightarrow$ $\vec{E}(x,t)$, $\vec{B}(x,t)$

① $\text{div}\,\vec{E} = 0 \rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial z}} = 0$ 1.

② $\text{div}\,\vec{B} = 0 \rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial B_y}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial B_z}{\partial z}} = 0$ 2.

③ $\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial z}} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$ 3.

$\cancel{\frac{\partial E_x}{\partial z}} - \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial x}} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$ 4.

$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \cancel{\frac{\partial E_x}{\partial y}} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$ 5.

④ $\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \cancel{\frac{\partial B_z}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial B_y}{\partial z}} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$ 6.

$\cancel{\frac{\partial B_x}{\partial z}} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$ 7.

$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \cancel{\frac{\partial B_x}{\partial y}} = \cancel{\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}}$ 8.

La soluzione di tale eq. diff. è data in generale, per il principio di sovrapposizione, dalla somma tra due tipi di onde:

$$\xi(x,t) = \underbrace{\xi_1(x-ct)}_{\text{onda progressiva}} + \underbrace{\xi_2(x+ct)}_{\text{onda regressiva}}$$

l'argomento di ξ deve contenere le variabili x, t sotto forma di combinazione lineare, pertanto sono possibili soluzioni:

$$\xi = (x-ct)^m$$

$$\xi = \sin[K(x-ct)]$$

$$\xi = e^{K(x-ct)}$$

• MATERIALE ISOTROPO INDEFINITO

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \qquad c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \qquad v^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad \begin{cases} \xi_1(x-vt) \\ \xi_2(x+vt) \end{cases} \quad \text{o entrambe}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{K_m K}} = \frac{c}{\sqrt{K K_m}} = \frac{c}{n}$$

n = indice di rifrazione assoluto

$$\boxed{v = \frac{c}{n}}$$

Abbiamo visto che l'argomento delle soluzioni di un'onda sono del tipo $x-ct$, $x+ct$.

Prendiamo l'onda progressiva e poniamo $x-ct = u$

$$\xi = \xi_0 \sin\left[kx - \omega t\right] = \xi_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right] = \xi_0 \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$$

81

nel caso più generale:

$$\xi = \xi_0 \sin\underbrace{\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \phi_0\right]}_{\text{fase dell'onda}}$$

ϕ_0 fase iniziale, valore dell'onda quando $x, t = 0$

• Ipotizziamo che l'onda si propaghi in una direzione identificata da un vettore $\vec{k}$.

$\vec{k} = k_x\vec{u}_x + k_y\vec{u}_y + k_z\vec{u}_z$ vettore di propagazione

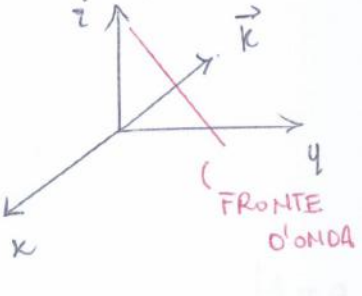
$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

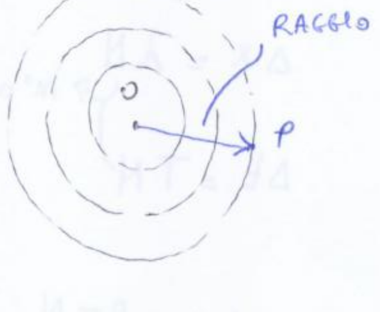
Volendo valutare l'onda in un punto $P(x,y,z)$ identificato da un vettore $\vec{r}$, l'equazione dell'onda diventa:

$$\xi = \xi_0 \sin\left[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi_0\right] = \xi_0 \sin\left[k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \phi_0\right]$$

• Definiamo FRONTE D'ONDA, una superficie in cui l'onda ha fase costante.

Nel caso di un'onda armonica piana del tipo $\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$ il fronte d'onda sarà un piano perpendicolare alla direzione di propagazione.





. Definiamo RAGGIO, una retta perpendicolare al fronte d'onda che id la direzione di propagazione nel punto considerato

Supp., come accade per un'onda reale, che N non sia completamente fissato, ma ammette un'incertezza ΔN:

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta k = \dfrac{2\pi \Delta N}{\Delta x} \\ \Delta \omega = \dfrac{2\pi \Delta N}{\Delta t} \end{cases}$$

Avremo un'incertezza anche su k, ω

Poniamo $\Delta N = 1$

$$\Delta k = \frac{2\pi}{\Delta x}$$

$$\Delta \omega = \frac{2\pi}{\Delta t} \rightarrow 2\pi \Delta \nu = \frac{2\pi}{\Delta t} \rightarrow \Delta \nu = \frac{1}{\Delta t}$$

maggiore è la durata dell'onda, minore sarà l'incertezza sulla frequenza e viceversa.

Mentre per l'onda armonica $\Delta x, \Delta t \rightarrow \infty$ e quindi λ e ν sono ben definite, nell'onda reale avremo una BANDA DI FREQUENZE $\Delta \nu = \frac{1}{\Delta t}$ nell'intorno della frequenza ν e un intervallo di numeri d'onda $\Delta k = \frac{2\pi}{\Delta x}$ nell'intorno di $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

PROPAGAZIONE PACCETTO D'ONDA

① MEZZO NON DISPERSIVO (vuoto) $\boxed{V_f = V_g}$

- tutte le onde armoniche che costituiscono il pacchetto viaggiano con la stessa velocità, che chiameremo VELOCITÀ DI FASE V_f
- la velocità del pacchetto, VELOCITÀ DI GRUPPO $V_g = V_f$

② MEZZO DISPERSIVO $\boxed{V_f \neq V_g}$

- Ogni onda armonica ha una velocità propria

$$V_f = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu \cdot \lambda}{2\pi} = \nu\lambda$$

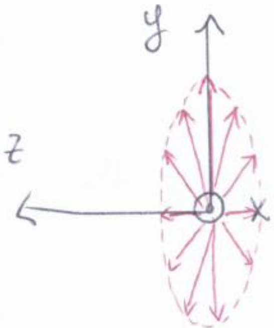
, con n = indice di rifrazione, dipende da ν, λ

$$V_f = V_f(\nu), V_f(\lambda)$$

- Il PIANO DI POLARIZZAZIONE è identificato dalla direzione di polarizzazione e dalla direzione di propagazione.

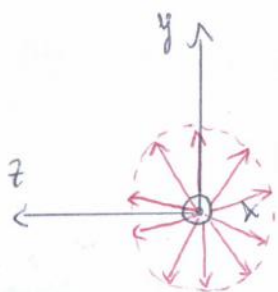
- POLARIZZAZIONE ELLITTICA

Si ha nei materiali ANISOTROPI
In tale polarizzazione il campo elettrico descrive un ellisse nel piano perpendicolare alla direzione di propagazione



- POLARIZZAZIONE CIRCOLARE

Si ha nei materiali ISOTROPI
Il campo elettrico descrive una circonferenza in un piano perpendicolare alla direzione di propagazione.
Il tempo che il campo elettrico impiega a compiere un giro completo è pari al periodo dell'onda.



- ENERGIA TRASPORTATA DA UN'ONDA

$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \qquad u_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} \longrightarrow u = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$$ densità di energia

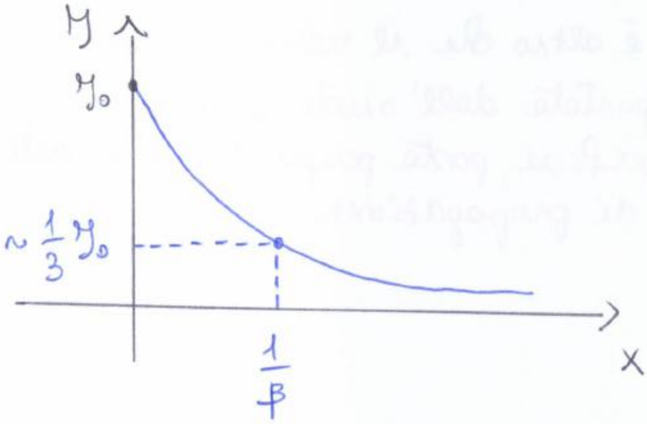
- Per un'onda piana $E = Bv \longrightarrow u = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\frac{E^2}{\mu v^2}$

ONDA ELETTROMAGNETICA IN UN MATERIALE

Quando un'onda elettromagnetica attraversa un materiale, può cedere energia ad esso, per cui l'intensità varierà secondo la legge:

$\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 e^{-\beta x}$ β = coeff. di assorbimento

$\frac{1}{\beta}$ = lunghezza di assorbimento



Poiché $\beta = \beta(\nu)$, per ogni materiale ci sono frequenze in cui l'assorbimento è massimo.

QUANTITÀ DI MOTO - PRESSIONE DI RADIAZIONE

La PRESSIONE DI RADIAZIONE P_{rad} è la forza media esercitata dall'onda per unità di superficie

Ciò implica che l'onda trasporti una certa quantità di moto, poiché $F_m = \frac{dp_m}{dt}$

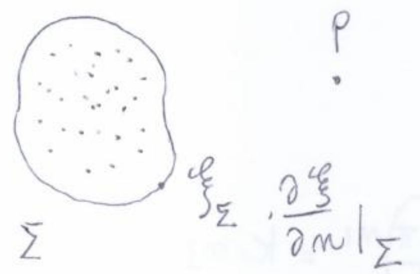
$$\underbrace{\frac{\mathcal{I}}{c}\cos^2\theta}_{\text{superficie assorbente}} < P_{rad} < \underbrace{\frac{2\mathcal{I}}{c}\cos^2\theta}_{\text{superficie riflettente}}$$

Se l'impatto è perpendicolare:

$$\frac{\mathcal{I}}{c} < P_{rad} < \frac{2\mathcal{I}}{c}$$

ENUNCIATO TEOREMA DI KIRCHHOFF

Il valore dell'ampiezza di un'onda elettromagnetica in un punto P qualunque dello spazio, generata da una distribuzione incognita di sorgenti, può essere determinata se, data una superficie chiusa Σ che separa lo spazio delle sorgenti dallo spazio in cui si trova il punto P, si è in grado di determinare il valore dell'onda ξ e della sua derivata normale $\frac{\partial \xi}{\partial n}$, in tutti i punti di Σ.

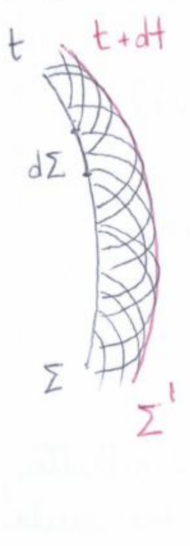


$\xi_P \rightarrow$ somma di tutti i contributi delle onde che raggiungono P in un certo istante

PRINCIPIO DI HUYGENS-FRESNEL

Ogni elemento $d\Sigma$ di una superficie d'onda Σ si può considerare formalmente come una sorgente di onde secondarie sferiche, la cui ampiezza, proporzionale all'ampiezza dell'onda primaria e all'area $d\Sigma$, varia con l'angolo che la direzione dell'onda secondaria ne forma con la direzione della primaria, secondo la funzione $f(\theta) \rightarrow$ FATTORE DI OBLIQUITÀ

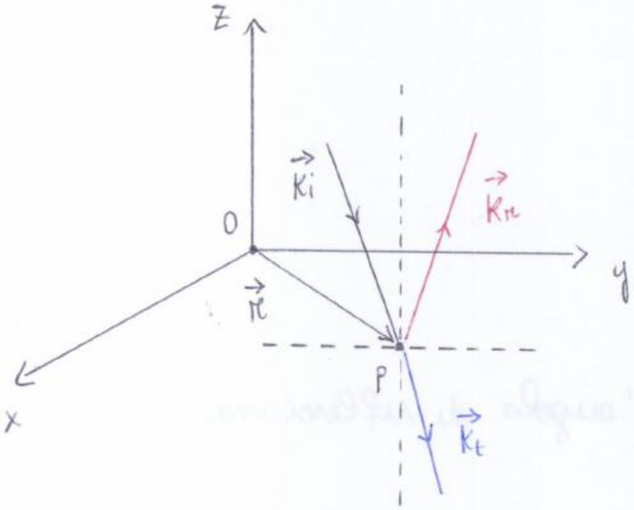
Il nuovo fronte d'onda Σ' sarà l'inviluppo delle onde secondarie



$$A_S \propto A_p \, d\Sigma \, f(\theta)$$

$\vec{K}_i \cdot \vec{r} - \cancel{\omega t} = \vec{K}_r \cdot \vec{r} - \cancel{\omega t} = \vec{K}_t \cdot \vec{r} - \cancel{\omega t}$

$\boxed{\vec{K}_i \cdot \vec{r} = \vec{K}_r \cdot \vec{r} = \vec{K}_t \cdot \vec{r}}$ $\rightarrow$ Relazione indipendente dal sistema di riferimento scelto.



• SUPERFICIE SEPARAZIONE: piano xy $\rightarrow$ P giace su xy

• $\vec{K}_i$ giace in yz

$\vec{r} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y$

$\vec{K}_i = K_{iy}\,\vec{u}_y + K_{iz}\,\vec{u}_z$

$\vec{K}_r = K_{rx}\,\vec{u}_x + K_{ry}\,\vec{u}_y + K_{rz}\,\vec{u}_z$

$\vec{K}_t = K_{tx}\,\vec{u}_x + K_{ty}\,\vec{u}_y + K_{tz}\,\vec{u}_z$

$y K_{iy} = K_{rx}\,x + K_{ry}\,y = K_{tx}\,x + K_{ty}\,y$

$\downarrow$

$\boxed{K_{iy}\,y = K_{ry}\,y = K_{ty}\,y}$

tale relazione deve valere $\forall (xy)$, cioè per qualsiasi punto P sul piano, per cui:

$K_{rx}\,x = K_{tx}\,x = 0$

$K_{rx} = K_{tx} = 0$

Definiamo PIANO DI INCIDENZA il piano ortogonale alla superficie di separazione, individuato dalla direzione di incidenza e dalla normale alla superficie nel punto di incidenza.

Poiché $K_{rx}, K_{ry} = 0$, anche $\vec{K}_r, \vec{K}_t$ giacciono nel piano di incidenza.

1ª LEGGE RIFLESSIONE E RIFRAZIONE

Le direzioni di propagazione dell'onda incidente, riflessa e rifratta giacciono sul piano di incidenza.

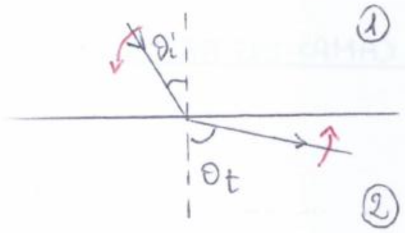
Partiamo da:

$K_{iy} = K_{ry} = K_{ty}$

RIFLESSIONE TOTALE

Ipotizziamo ora $n_2 < n_1$.

In questo caso l'onda trasmessa si allontana dalla normale alla superficie di separazione.



• Tale situazione presenta un caso limite: Al crescere di θ_i, l'angolo di trasmissione cresce fino a raggiungere il valore limite $\theta_t = \frac{\pi}{2}$.

L'angolo di incidenza a cui corrisponde $\theta_t = \frac{\pi}{2}$ si calcola come:

$$\theta_L = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

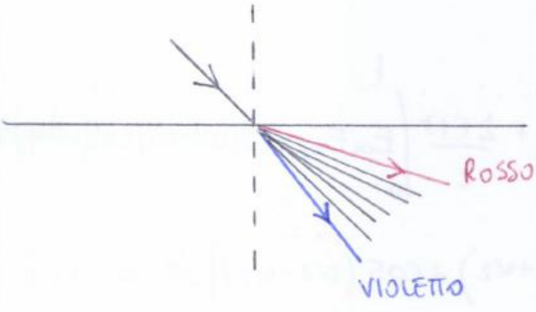
Per valori > di θ_L l'onda rifratta non si forma più e l'onda incidente è totalmente riflessa nel primo mezzo.

RIFLESSIONE TOTALE

Osserviamo infine che, L'ANGOLO DI TRASMISSIONE DIPENDE DALLA FREQUENZA

$\sin\theta_t = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i \rightarrow n_1, n_2$ dipendono dalla frequenza, quindi θ_t dipende dalla frequenza.

Questo comporta che se a incidere sulla superficie di separazione tra due mezzi è per esempio la luce bianca, avremo tanti angoli di trasmissione quante sono le diverse lunghezze d'onda.



Poiché n decresce al crescere di λ, per la legge di Chouchy $n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$, il rosso sarà più deviato, il violetto meno deviato.

$$= I_1 + I_2 + 2 \underbrace{\frac{\sqrt{\varepsilon N}}{\sqrt{2}} E_{01}}_{\sqrt{I_1}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{\varepsilon N}}{\sqrt{2}} E_{02}}_{\sqrt{I_2}} \cos\delta = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta$$

Quindi:

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta} \quad , \quad \delta = \text{differenza di fase tra le due onde}$$

Osserviamo che:

se $\omega_1 \neq \omega_2 \rightarrow \cos(\omega_1 t + \alpha_1 - \omega_2 t - \alpha_2) \rightarrow$ l'integrale sarebbe stato nullo $\Rightarrow I = I_1 + I_2$

se $\delta = \delta(t) \rightarrow \cos(\delta(t)) \rightarrow$ l'integrale sarebbe stato nullo $\Rightarrow I = I_1 + I_2$

Non avremmo osservato il fenomeno dell'interferenza.

- **MAX** $\quad I = I_{max}$ quando $\cos\delta = 1 \rightarrow \delta = 2m\pi, \ m \in \mathbb{Z}$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2$$

$$\text{Se } I_1 = I_2 \rightarrow I_{max} = 4 I_1$$

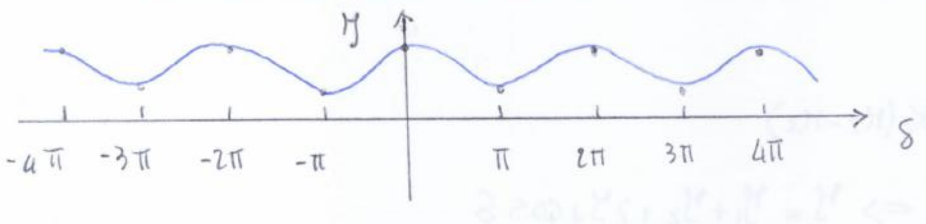
INTERFERENZA COSTRUTTIVA

- **MIN** $\quad I = I_{min}$ quando $\cos\delta = -1 \rightarrow \delta = (2m+1)\pi, \ m \in \mathbb{Z}$

$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2$$

$$\text{Se } I_1 = I_2 \Rightarrow I_{min} = 0$$

INTERFERENZA DISTRUTTIVA



Massimi e minimi con stessa intensità

- INTERFERENZA COSTRUTTIVA

$$\delta = k(r_2 - r_1) = 2m\pi \qquad m \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\cancel{2}\cancel{\pi}}{\lambda}(r_2 - r_1) = \cancel{2}m\cancel{\pi} \rightarrow \boxed{r_2 - r_1 = m\lambda}$$

- INTERFERENZA DISTRUTTIVA

$$\delta = k(r_2 - r_1) = (2m+1)\pi, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{2\cancel{\pi}}{\lambda}(r_2 - r_1) = (2m+1)\cancel{\pi} \rightarrow \boxed{r_2 - r_1 = \frac{\lambda}{2}(2m+1)}$$

- POSIZIONE ANGOLARE DI P

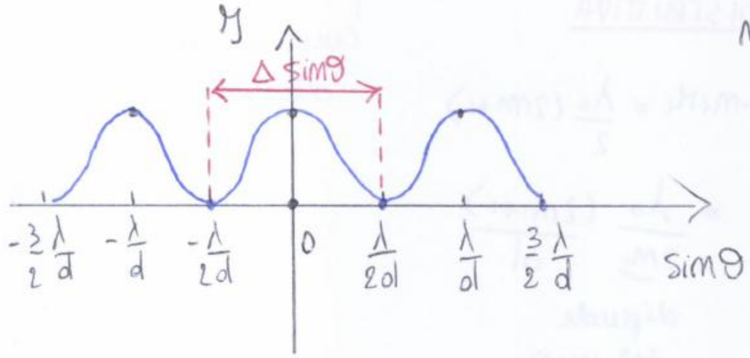
$$r_2 - r_1 \sim d \sin\theta$$

- Int. costruttiva in P: $d\sin\theta = m\lambda \rightarrow \boxed{\sin\theta = \frac{m\lambda}{d}}$

$m =$ n° massimo, $m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

- Int. distruttiva in P: $d\sin\theta = \frac{\lambda}{2}(2m+1) \rightarrow \boxed{\sin\theta = \frac{\lambda}{2d}(2m+1)}$

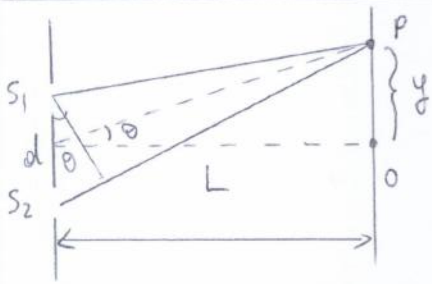
$m =$ n° minimo, $m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$



$\Delta\sin\theta$ = ampiezza angolare massimo

$$\boxed{\Delta\sin\theta = \frac{\lambda}{d}}$$

POSIZIONE LINEARE PUNTO P



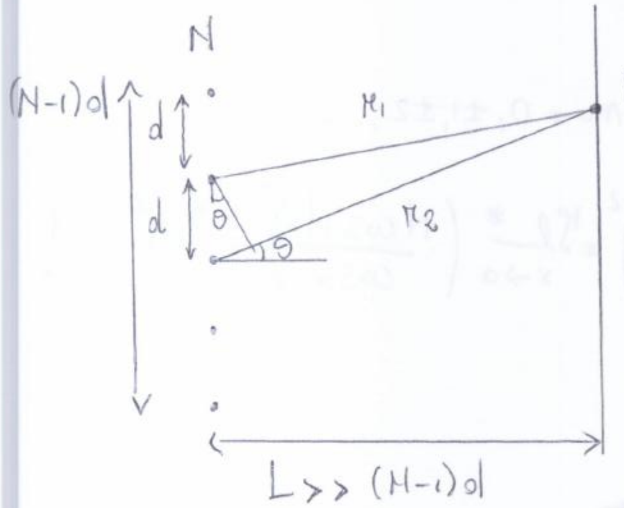
$$tg\,\theta = \frac{y}{L}$$

per θ piccoli:

$$tg\,\theta \sim \sin\theta = \frac{y}{L}$$

INTERFERENZA DA N SORGENTI COERENTI

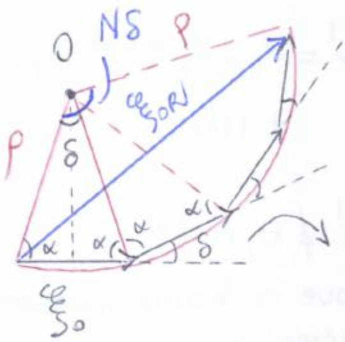
Consideriamo N sorgenti uguali di onde sferiche, coerenti, disposte lungo una retta ed equispaziate di una distanza d.



Tra due onde emesse da due sorgenti consecutive, esiste la differenza di fase:

$$\delta = K(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta$$

Sommiamo il contributo delle N onde con il metodo dei vettori rotanti, ciascuno con modulo pari all'ampiezza dell'onda.



$\alpha + \alpha + \delta = 180°$

Disegneremo una poligonale regolare circoscrivibile da una circonferenza di centro O e raggio ρ.

L'angolo che sottende la poligonale è pari a Nδ.

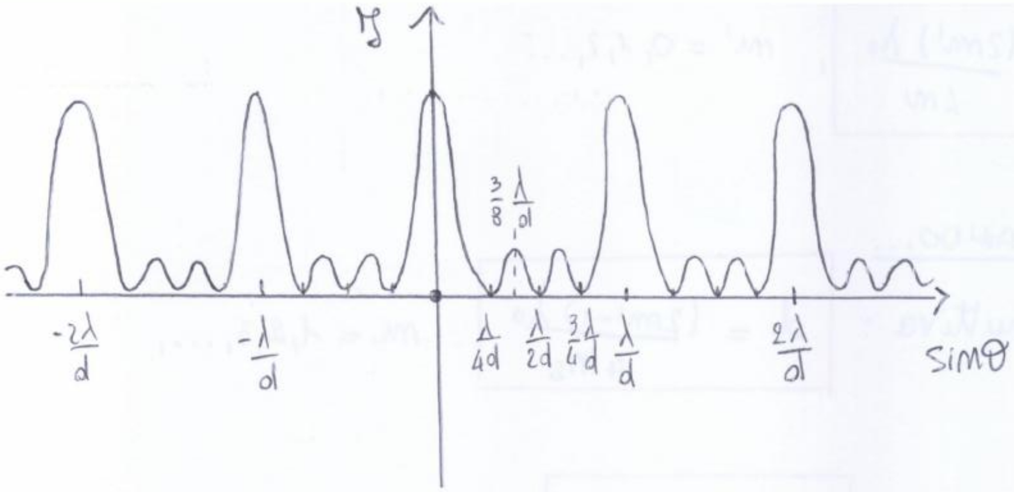
$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= 2\rho \sin\frac{\delta}{2} \\ \xi_{0R} &= 2\rho \sin\frac{N\delta}{2} \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\xi_{0R} = \xi_0 \left(\frac{\sin\frac{N\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\right) \cancel{f(\theta)}}$$

trascuriamo

L'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza:

$$\boxed{I_R = I\left(\frac{\sin\frac{N\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\right)^2} \qquad I_R = I\left(\frac{\sin\left(\frac{N\pi d \sin\theta}{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}\right)}\right)^2$$

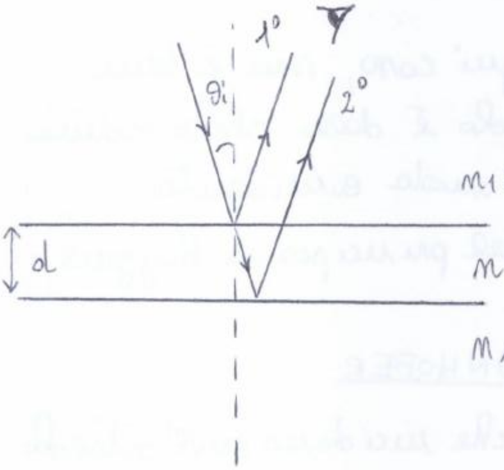
$N = 4$



INTERFERENZA DA LAMINE SOTTILI

Supponiamo di osservare a piccoli angoli rispetto alla normale una lamina sottile spessa d, formata da una sostanza trasparente con indice di rifrazione n_2, immersa in un mezzo con indice di rifrazione n_1.

Sia $n_2 > n_1$



Una parte dell'onda viene riflessa, l'altra trasmessa e riflessa dalla sup. inferiore

- Quando la luce passa da un materiale con indice di rifrazione inferiore a uno con indice di rifrazione superiore, la riflessione sulla superficie di separazione tra i due mezzi avviene con uno sfasamento di π.
- Se $n_1 > n_2$ non vi è alcuno sfasamento

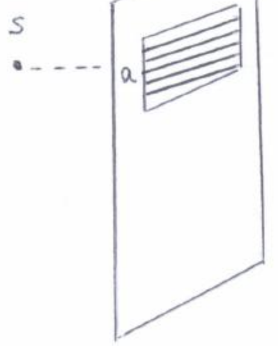
In questo caso quindi, le due onde giungono all'occhio sfasate sia per la differenza di cammino ottico, sia per lo sfasamento di π.

$$\delta = k_0 n_2 2d + \pi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot 2 d n_2 + \pi$$

$m = 1, 2, 3, \dots$

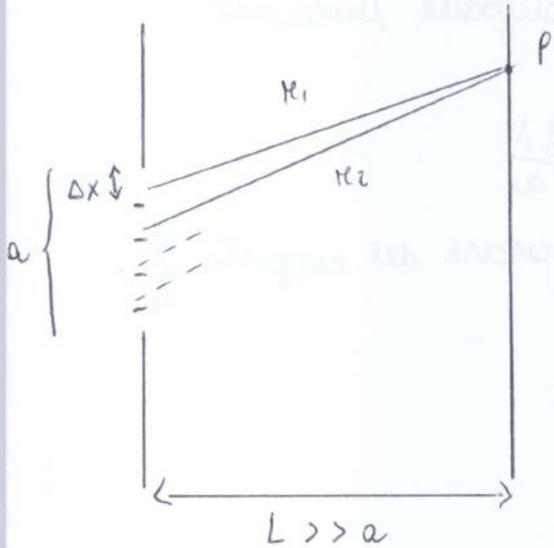
INTERFERENZA COSTRUTTIVA: $\delta = 2m\pi \Rightarrow \pi + \frac{4\pi}{\lambda_0} n_2 d = 2\pi m \rightarrow \boxed{d = \frac{(2m-1)\lambda_0}{4n_2}}$

INTERFERENZA DISTRUTTIVA: $\delta = (2m'+1)\pi \Rightarrow \frac{4\pi}{\lambda_0} n_2 d + \pi = (2m'+1)\pi$



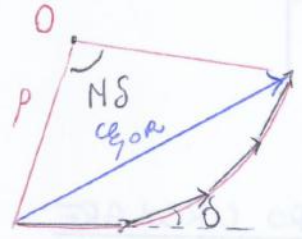
Suddividiamo la fenditura in strisce infinitesime, ciascuna delle quali funge da sorgente di onde secondarie ed è larga Δx.

103



$$\delta = k(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x \sin\theta$$

- Calcoliamo l'ampiezza dell'onda risultante con il metodo dei vettori rotanti:



$$\xi_{0R} = 2\rho \sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)$$

Poiché N è molto elevato, ξ_0 è molto piccolo $\Rightarrow$ CIRCONFERENZA $\sim$ POLIGONALE

$\xi_{0R_{MAX}} = \rho N \delta$ lunghezza arco circonferenza, corrisponde all'ampiezza massima che si osserva al centro dello schermo, quando $\theta = 0$.

Dividendo membro a membro:

$$\xi_{0R} = \xi_{0R_{MAX}} \frac{2 \sin \frac{N\delta}{2}}{N\delta} = \xi_{0R_{MAX}} \left(\frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\frac{N\delta}{2}} \right)$$

$$I_R = I_{MAX} \left(\frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\frac{N\delta}{2}} \right)^2 \cancel{f^2(\theta)} \text{ trascuro}$$

$$I_R = I_{MAX} \left(\frac{\sin\left(\frac{\overbrace{N 2\pi \Delta x}^{\to a} \sin\theta}{2\lambda}\right)}{\frac{N 2\pi \Delta x \sin\theta}{2\lambda}} \right) = I_{MAX} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}} \right)^2$$

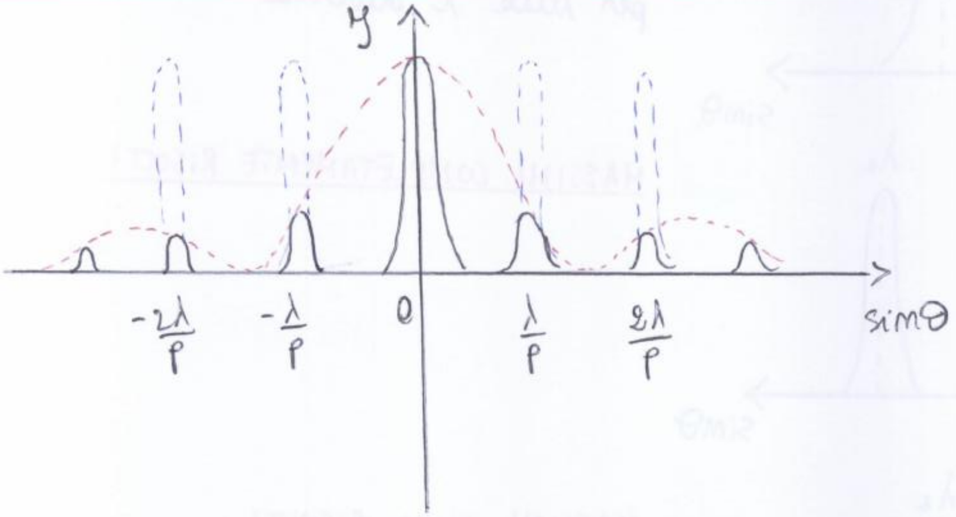
Dove I_1 è l'intensità di ogni singola fenditura, data dal fenomeno della diffrazione:

$$I_1 = I_{max}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}}\right)^2$$

Quindi:

$$I_R = I_{max}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}}\right)^2\left(\frac{\sin\left(\pi \frac{N p \sin\theta}{\lambda}\right)}{\sin\left(\pi \frac{p \sin\theta}{\lambda}\right)}\right)^2$$

L'INTENSITÀ DELLA FIGURA DI INTERFERENZA È MODULATA DALLA DIFFRAZIONE.



POTERE RISOLUTIVO E DISPERSIVO RETICOLI

La posizione di un massimo nel reticolo di diffrazione si ha ponendo:

$$\frac{\pi p \sin\theta}{\lambda} = m\pi \rightarrow \sin\theta = \frac{m\lambda}{p} \quad \left(\begin{array}{l}\text{come per le } N\\ \text{sorgenti coerenti}\end{array}\right)$$

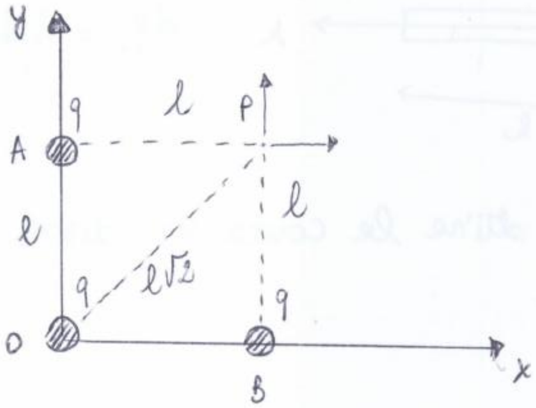
Deriviamo tale espressione:

$$\cos\theta \, d\theta = \frac{m}{p} d\lambda$$

Quindi, date due onde monocromatiche le cui lunghezze d'onda differiscono di $d\lambda$, i due massimi principali dello stesso ordine differiscono di $d\theta$.

Si definisce POTERE DISPERSIVO di un reticolo la grandezza $\boxed{D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{p} \cdot \frac{1}{\cos\theta}}$

ESERCIZIO 1



Calcolare campo e potenziale elettrostatico nel vertice libero.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_A + \vec{E}_B$$

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{l^2 2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\mu}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\mu}_y\right)$$

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{l^2}\vec{\mu}_x \qquad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{16\pi\varepsilon_0}\frac{q}{l^2}\left[\left(\sqrt{2}+4\right)\vec{\mu}_x + \left(\sqrt{2}+4\right)\vec{\mu}_y\right] =$$

$$\vec{E}_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{l^2}\vec{u}_y$$

$$= \frac{4+\sqrt{2}}{16\pi\varepsilon_0}\frac{q}{l^2}\left(\vec{\mu}_x + \vec{\mu}_y\right)$$

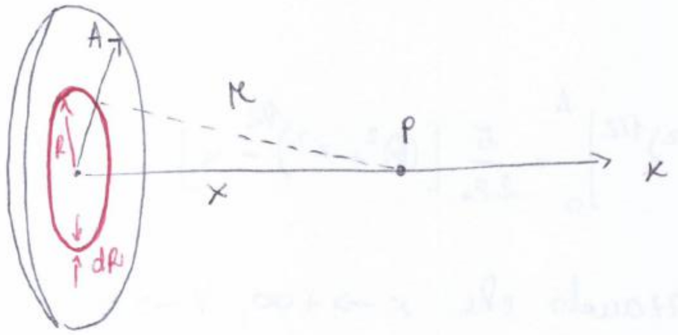
$$V_P = V_0 + V_A + V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{2}l} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{l}\cdot 2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+2\right) =$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 l}\left(\sqrt{2}+4\right)$$

$$W_{P\to\infty} = q_0\left(V_P - \underbrace{V_\infty}_{=0}\right) = q_0 V_P = \frac{q q_0}{8\pi\varepsilon_0 l}\left(4+\sqrt{2}\right)$$

ESERCIZIO 3 - 4

Una carica q è distribuita uniformemente su un disco sottile di raggio A. Calcolare il campo elettrostatico sull'asse del disco



$$\sigma = \frac{q}{\pi A^2}$$

$$dq = \sigma \, d\Sigma$$

$$dq = \sigma \, 2\pi R \, dR$$

Per un anello:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq \, x}{(R^2+x^2)^{3/2}} \vec{\mu}_x = \frac{\sigma \, 2\pi R \, dR \, x}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+x^2)^{3/2}} \vec{\mu}_x$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma \cancel{2}\pi x}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2} \int_0^A \frac{2R}{(R^2+x^2)^{3/2}} dR \, \vec{\mu}_x = \frac{\sigma x}{4\varepsilon_0} (-2) \Big[(R^2+x^2)^{-1/2} \Big]_0^A \vec{\mu}_x =$$

$$= -\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+A^2}} - \frac{1}{x} \right] \vec{\mu}_x = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+A^2}} \right] \vec{\mu}_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{A^2+x^2}} \right) \vec{\mu}_x$$

- Se $x >> R = A \rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\left(\left(\frac{A}{x}\right)^2+1\right)^{1/2}} \right) \vec{\mu}_x \sim \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{A}{x}\right)^2 \right) \vec{\mu}_x =$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{A}{x}\right)^2 \vec{\mu}_x = \frac{q}{\pi A^2} \cdot \frac{1}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \frac{A^2}{x^2} \vec{\mu}_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{x^2} \vec{\mu}_x$$

come se la carica fosse concentrata nel centro del disco

Quindi:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+A^2}} \right) \vec{\mu}_x$$

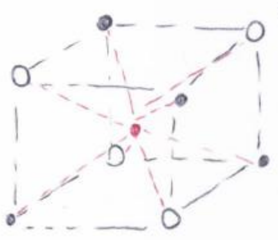
$\vec{E}$ del disco, considerando anche il semispazio negativo:

- N.B.
All'attraversamento del piano, il campo subisce una discontinuità delle comp. normale pari a $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2+A^2}} \right) \vec{\mu}_x \quad \rightarrow \text{se } A \rightarrow \infty \text{ (PIANO)} \Rightarrow \vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

ESERCIZIO 5

Si consideri la disposizione degli atomi di Cl e Na nella porzione cubica di reticolo cristallino di NaCl



- la distanza tra due ioni monovalenti vicini Na^+ e Cl^- vale $a = 2.82 \cdot 10^{-10}$ m
- $|q| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C

a) Det. l'energia potenziale di un elettrone posto al centro del reticolo cubico.

$U = qV$

Per ragioni di simmetria il potenziale complessivo al centro del cubo è nullo → sarà nulla anche l'en. potenziale

b) Lavoro per portare uno ione Cl^- da un vertice del cubo all'infinito

$W = -|q| V_A$ supp. $V(\infty) = 0$

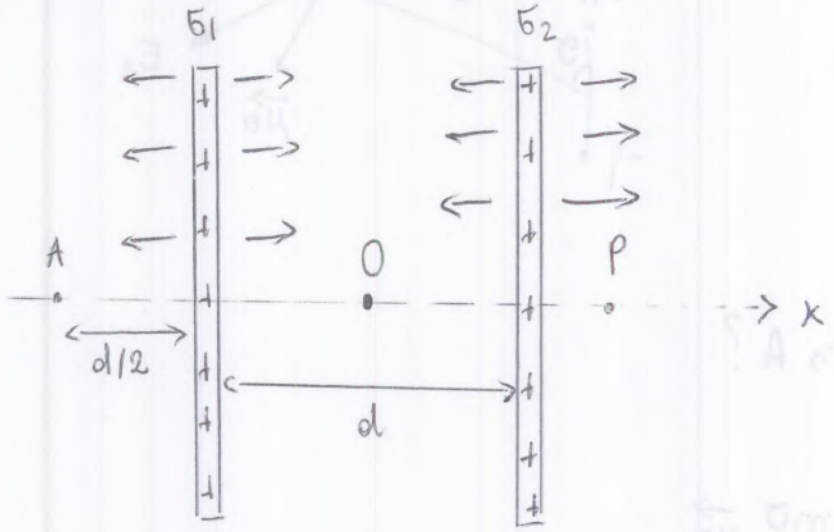
$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{a} \cdot 3 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{\sqrt{2}a} \cdot 3 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{\sqrt{3}a}$$

Per cui:

$$W = -|q| \cdot 3 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} \cdot |q| \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\right] = \frac{-3|q|^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\right] = -1,19 \cdot 10^{-18} J$$

$W < 0$ ⇒ effettuato dall'esterno sul sistema

ESERCIZIO 7 6-10 OTTOBRE



$\sigma_1 = 17.72 \cdot 10^{-8}\ C/m^2$

$\sigma_2 = 8.86 \cdot 10^{-8}\ C/m^2$

$d = 0{,}2\ m$

1) Potenziale lungo asse x, nell'ipotesi che $V(0) = 0$.

• $x < -d/2$ $\quad \vec{E} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}(-\vec{\mu}_x) + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}(-\vec{u}_x) = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{\mu}_x - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{\mu}_x =$

$$= -\left(\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\right)\vec{\mu}_x$$

$$\vec{E} = -\text{grad}\, V = -\frac{dV}{dx}$$

$$V_1 = -\int E\,dx = \left(\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\right)x + C_1$$

• $-d/2 < x < d/2$ $\quad \vec{E} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{\mu}_x - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{\mu}_x$

$$V_2 = -\int E\,dx = \left(\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\right)x + C_2$$

• $x > d/2$ $\quad \vec{E} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{\mu}_x + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{\mu}_x$

$$V_3 = -\int E\,dx = -\left(\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\right)x + C_3$$

• Determiniamo le costanti:

$V_2(0) = C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad \Rightarrow V_2 = \left(\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\right)x$

$$\frac{1}{2} m_p V_{min}^2 = qV_{x=-d/2} - qV_A = q\Delta V = E_{k\,A_{min}}$$

e) Un elettrone viene lasciato libero in A con $v=0$.
Riuscirà a raggiungere P?

$-qE_A > -qE_{x=-d/2} \Rightarrow \Delta E < 0$

l'elettrone accelera fino a $x=-d/2$ per effetto dell'aumento del potenziale, poi comincerà a decelerare per effetto della sua diminuzione fino a fermarsi quando l'E_{pot} raggiunge il valore che aveva in A. ($x=-d/2$)

in A $\rightarrow$ $U_A = -eV_A = -e\left[-\left(\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\right)d + \frac{\sigma_1 d}{2\varepsilon_0}\right] = 1{,}6\cdot 10^{-16}\,J$

in $-d/2 < x < d/2$:

$V_{x=-d/2} = V_2(x=-d/2) = -\left(-\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\right)\frac{d}{2} = 5\cdot 10^2\,V \rightarrow U_{x=-d/2} = -eV_{x=-d/2} = -8\cdot 10^{-17}\,J$

$V_{x=d/2} = V_2(x=d/2) = \left(-\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\right)\frac{d}{2} = -5\cdot 10^2\,V \rightarrow U_{x=d/2} = 8\cdot 10^{-17}\,J$

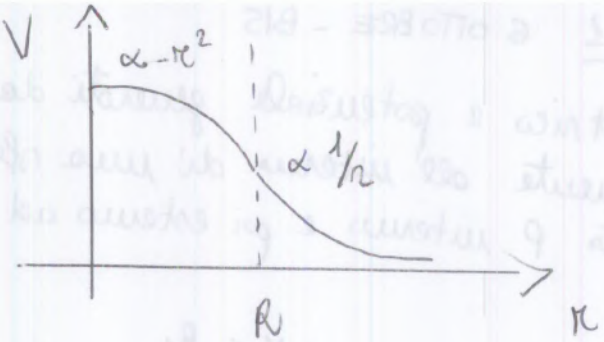
l'elettrone riesce a raggiungere il punto P, purché

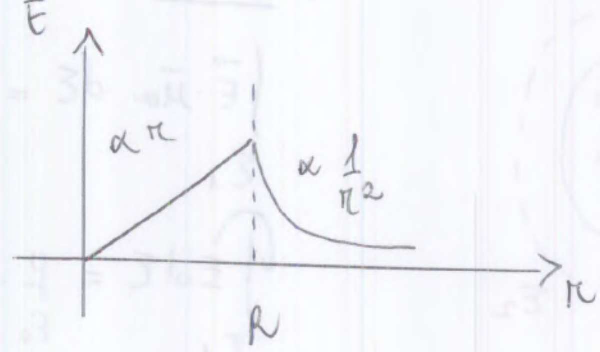
$U_{x^*} \le -eV_{x=-d/2}$

$$-e\left[-\left(\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\right)x^* + \frac{\sigma_2 d}{2\varepsilon_0}\right] = 1.6\cdot 10^{-16}\,J \rightarrow x^* \le 13{,}3\,cm$$

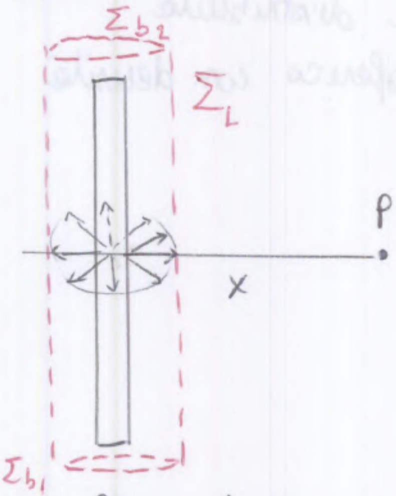
$$V_1 = \frac{-\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$$

$$V_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$$





ESERCIZIO 3 13-17 OTTOBRE



Calcolare il campo elettrostatico $\vec{E}$ e il potenziale V in un pto P che dista x dal filo. (FILO INFINITO)

Si ipotizzi $\lambda = dq/dl > 0$

$$\int_{\Sigma ch} \vec{E} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad (q = \lambda l)$$

$$\int_{\Sigma_L} \vec{E} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma + \underbrace{\int_{\Sigma_{b_1}} \vec{E} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma}_{=0} + \underbrace{\int_{\Sigma_{b_2}} \vec{E} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma}_{=0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{u}_r \implies \text{nel punto P: } \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} \vec{u}_x$$

$$V(P) = -\int E \cdot dx = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln x + c$$

$V(+\infty) = c \overset{?}{=} 0 \implies c = 0$? in questo caso non possiamo usare queste condizione al contorno!

$$V(P) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln x + cost$$

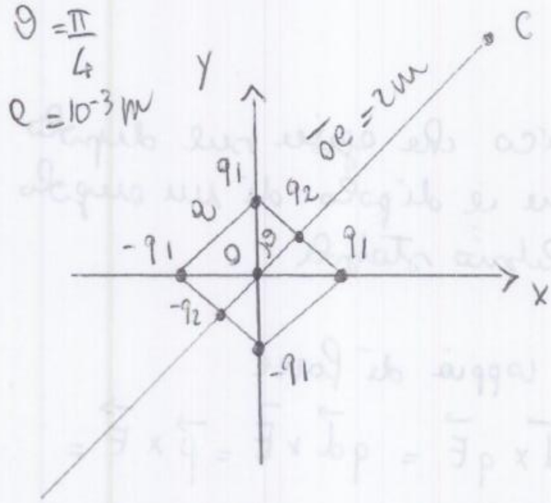
Perché la distribuzione non è limitata in una zona finita dello spazio!

ESERCIZIO 2 13-17 OTTOBRE

Si determini il momento di dipolo e il potenziale generato dalla seguente distribuzione di cariche in un pto C a grande distanza da essa

$\vartheta = \frac{\pi}{4}$

$e = 10^{-3}\,m$



• Trattiamo il sistema in approssimazione di dipolo:

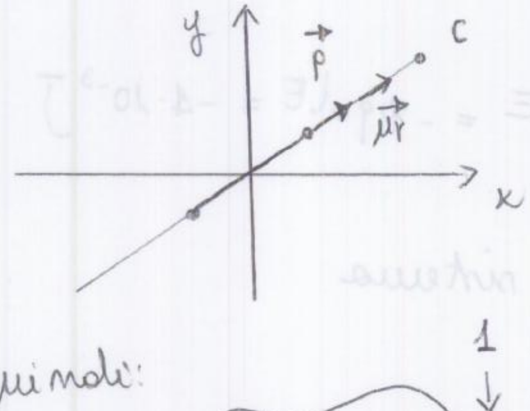
$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{d}_i$ dove $\vec{d}_i$ è il vettore che congiunge il punto O che scegliamo come riferimento alla carica i-esima

$$\vec{p} = \frac{\sqrt{2}}{2} a q_1 \vec{u}_y + \frac{\sqrt{2}}{2} a q_1 \vec{u}_y + \frac{\sqrt{2}}{2} a q_1 \vec{u}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} a q_1 \vec{u}_x + \frac{a}{2} q_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_y\right) + \frac{a}{2} q_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_y\right) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{2} a q_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a}{2} q_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a}{2} q_2\right)\vec{u}_x + \left(\frac{2\sqrt{2}}{2} a q_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a}{2} q_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a}{2} q_2\right)\vec{u}_y =$$

$$= \left(\sqrt{2} a q_1 + 2 \frac{\sqrt{2}}{4} a q_2\right)\vec{u}_x + \left(\sqrt{2} a q_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} a q_2\right)\vec{u}_y =$$

$$= \frac{\sqrt{2}a}{2}(2q_1 + q_2)\vec{u}_x + \frac{\sqrt{2}a}{2}(2q_1 + q_2)\vec{u}_y =$$

$$= (2q_1 + q_2)\frac{\sqrt{2}a}{2}(\vec{u}_x + \vec{u}_y) = 6{,}36 \cdot 10^{-12}(\vec{u}_x + \vec{u}_y)\,C \cdot m$$



$$V(C) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{p\cos\theta}{r^2} = \frac{\overbrace{\vec{p}}^{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$p = \frac{\sqrt{2}a}{2}(2q_1 + q_2)$$

quindi:

$$V(C) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\sqrt{2}a(2q_1+q_2)\overbrace{\cos\theta}^{1}}{2 r^2} = 2.02 \cdot 10^{-2}\,V$$

Troviamo c_1:

$$V_1(R) = V_2(R) \longrightarrow -\frac{1}{\varepsilon_0}\left(A\frac{R^3}{12} - B\frac{R^4}{20}\right) + c_1 = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R}\left(\frac{AR^4}{4} - B\frac{R^5}{5}\right)$$

$$c_1 = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\left(A\frac{R^3}{4} - B\frac{R^4}{5}\right) + \frac{AR^3}{12} - \frac{BR^4}{20}\right] =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\frac{4}{12}AR^3 - \frac{5}{20}BR^4\right] =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\frac{AR^3}{3} - \frac{1}{4}BR^4\right]$$

Quindi:

$$V_1 = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left(A\frac{r^3}{12} - B\frac{r^4}{20}\right) + \frac{1}{\varepsilon_0}\left[A\frac{R^3}{3} - B\frac{R^4}{4}\right]$$

$$V_2 = \frac{1}{\varepsilon_0 r}\left(\frac{AR^4}{4} - B\frac{R^5}{5}\right)$$

ESERCIZIO 7   13-17 OTTOBRE

In una regione di spazio compresa tra due piani paralleli il pot. elettrostatico varia secondo:

$V(x) = V_0 + Kx^{5/4}$, dove x rappresenta la dist. dal piano a pot. minore e V_0 e K sono due costanti.

•) Det. campo elettrostatico e densità volumica di carica in tale regione, operando in vuoto.

$$\vec{E} = -\,\text{grad}\,V = -\frac{dV}{dx}\vec{u}_x = -\frac{5}{4}Kx^{\frac{1}{4}}$$

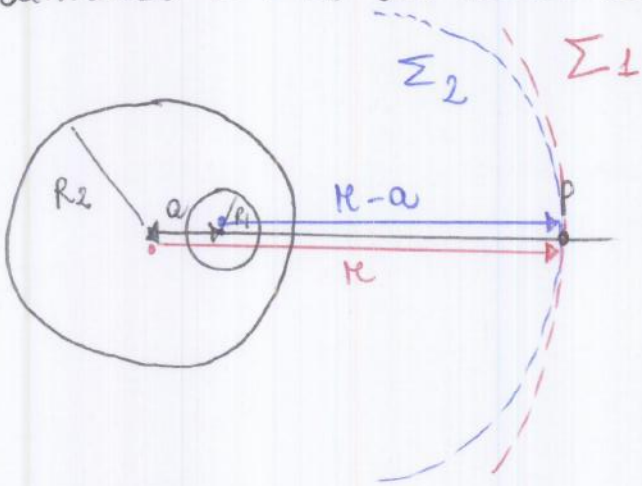
$$\text{div}\,\vec{E} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = \rho/\varepsilon_0 \quad \rightarrow \quad \rho = \varepsilon_0 \frac{dE_x}{dx} = -\varepsilon_0 \frac{5}{16} K x^{-3/4}$$

$$\rho = -\frac{5}{16}\varepsilon_0 k x^{-3/4}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 127 di 222

ESERCIZIO 5 13-17 OTTOBRE

Si consideri una sfera di raggio R_2 contenente cariche uniformemente distribuite con densità volumica ρ eccetto che in una cavità, priva di cariche, anch'essa sferica di raggio R_1, ma non concentrica alla sfera maggiore. I centri delle due sfere distano a ($< R_2 - R_1$). Si determini campo elettrico e potenziale in un pto P congiungente i centri delle due sfere, a distanza $r > R_2$ dal centro della sfera maggiore



Utilizziamo il principio di sovrapposizione, calcolando separatamente i due campi e i due potenziali, poi ne facciamo la differenza

• $r > R_2$ (1)

$$\int_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot \vec{\mu}_n \cdot d\Sigma = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \left(\frac{4}{3} \pi R_2^3 \right)$$

$$E_1 \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0} \rho R_2^3 \longrightarrow \vec{E}_1 = \frac{1}{3\varepsilon_0} \frac{\rho}{r^2} R_2^3 \vec{\mu}_r$$

$$V_1 = -\int E_1 dr = \frac{\rho R_2^3}{3\varepsilon_0 r} + \underbrace{c}_{=0} \quad V(\infty) = 0$$

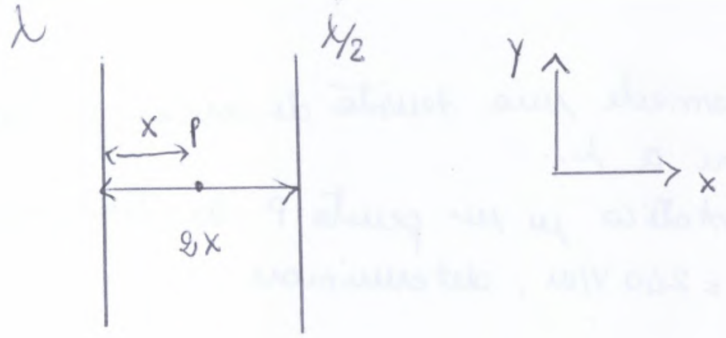
• $r - a > R_2$ (2)

$$E_2 \, 4\pi (r-a)^2 = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0} \rho R_1^3 \longrightarrow \vec{E}_2 = \frac{1}{3\varepsilon_0} \frac{\rho}{(r-a)^2} R_1^3 \vec{\mu}_r$$

$$V_2 = -\int E dr = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 (r-a)} + \overset{=0}{c}$$

$$\vec{E}_P = \vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left[\frac{R_2^3}{r^2} - \frac{R_1^3}{(r-a)^2} \right] \vec{\mu}_r$$

$$V(P) = V_1 - V_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left[\frac{R_2^3}{r} - \frac{R_1^3}{(r-a)} \right]$$

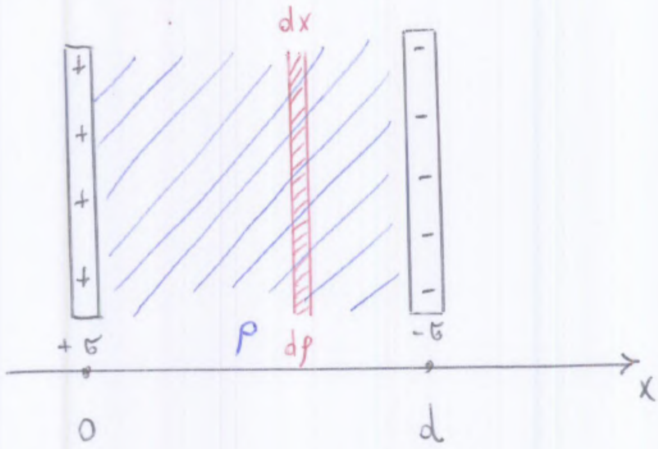


$$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{\mu}_x$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}(P) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\vec{\mu}_x$$

$$E_2 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}(-\vec{\mu}_x)$$

ESERCIZIO 8 13-17 OTTOBRE 2014



$\rho = \rho_0 x$

- Determinare potenziale elettrostatico e campo elettrostatico.

Sia $V = 0$ per $x = d$

$$V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

$$E = -\text{grad} V \rightarrow -\nabla \cdot \nabla V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \frac{dV}{dx} = -\int \frac{\rho_0 x}{\varepsilon_0} dx = -\frac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon_0} + c_1$$

$$V = \int \left(-\frac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon_0} + c_1 \right) dx = -\frac{\rho_0 x^3}{6\varepsilon_0} + c_1 x + c_2$$

$$\left.\begin{array}{l} x = d \rightarrow 0 = -\frac{\rho_0 d^3}{6\varepsilon_0} + c_1 d + c_2 \\ x = 0 \rightarrow V = V_0 = c_2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} c_2 = V_0 \\ c_1 = \frac{\rho_0 d^3}{6\varepsilon_0 d} - \frac{V_0}{d} = \frac{\rho_0 d^2}{6\varepsilon_0} - \frac{V_0}{d} \end{array}$$

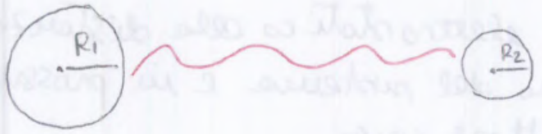
$$\vec{E} = -\text{grad} V = -\frac{dV}{dx} \vec{\mu}_x$$

$$\vec{E}(x) = \left(+\frac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho_0 d^2}{6\varepsilon_0} + \frac{V_0}{d} \right) \vec{\mu}_x$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 133 di 222

ESERCIZIO 2 27 OTTOBRE 2014

Si considerino due conduttori sferici a distanza molto grande, di raggio $R_1 = 0,3\ m$, $R_2 = 0,2\ m$.
Essi posseggono, se isolati, la stessa densità di carica elettrica superficiale $\sigma = 5 \cdot 10^{-4}\ C/m^2$.
Trovare la densità di carica elettrica superficiale su ciascun conduttore dopo che sono stati collegati da un filo metallico.



Prima del contatto:

$$q_1 = \sigma 4\pi R_1^2 = 5,65 \cdot 10^{-4}\ C$$

$$q_2 = \sigma 4\pi R_2^2 = 2,51 \cdot 10^{-4}\ C$$

$$V_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

$$V_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

Dopo il contatto → stesso potenziale
stessa carica totale

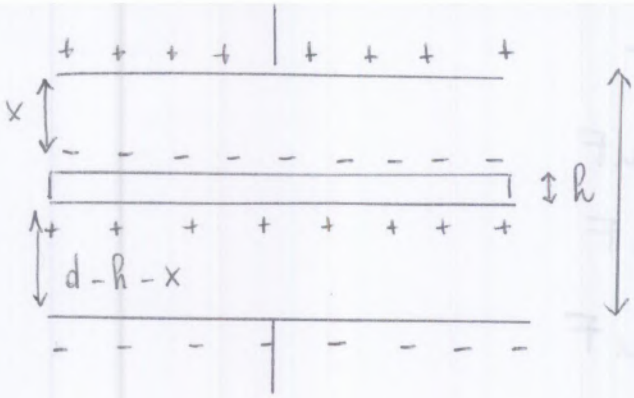
$$V = \frac{q_1'}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{q_2'}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \Rightarrow \boxed{q_1' = q_2' \frac{R_1}{R_2}}$$

$$q_1' + q_2' = q_1 + q_2 = 8.16 \cdot 10^{-4}\ C$$

$$\Rightarrow q_2' \frac{R_1}{R_2} + q_2' = 8.16 \cdot 10^{-4}\ C \rightarrow q_2' = 3,26 \cdot 10^{-4} C$$

$$q_1' = 4,89 \cdot 10^{-4} C$$

$$\Rightarrow \sigma_1' = \frac{q_1'}{4\pi R_1^2}, \quad \sigma_2' = \frac{q_2'}{4\pi R_2^2}$$

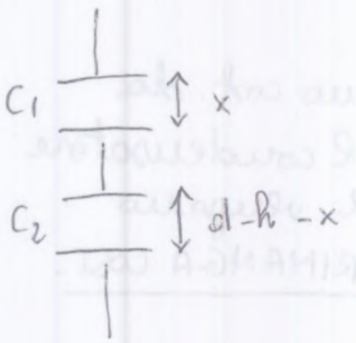


$$W = U_i - U_f$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0}{d}L^2V^2$$

Il sistema è equivalente a due condensatori in serie:



$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{L^2}{x}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 L^2}{d-h-x}$$

$$\longrightarrow \quad C_{eq} = \frac{1}{\frac{x}{\varepsilon_0 L^2} + \frac{d-h-x}{\varepsilon_0 L^2}} = \frac{\varepsilon_0 L^2}{d-h} = C'$$

come se diminuisse la distanza tra le armature del cond. di una dist. h.

Poiché $q = \text{cost}$, l'energia U' varierà per effetto della variazione della capacità:

$$U' = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C'}$$

senza lastra : $C = \frac{q}{V} \rightarrow q = CV$

$$q = \frac{\varepsilon_0 L^2}{d}V$$

Quindi:

$$U' = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0^{\cancel{2}} L^{\cancel{4}\,2} V^2}{d^2} \cdot \frac{d-h}{\cancel{\varepsilon_0}\cancel{L^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 L^2 V^2 \frac{d-h}{d^2}$$

$$W = U - U' = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0}{d}L^2V^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_0 L^2V^2\frac{d-h}{d^2} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 L^2V^2}{d}\left(1 - \frac{d-h}{d}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0}{d^2}L^2V^2h > 0$$ lavoro fatto dal sistema

Il sistema equivale a due condensatori in parallelo:
↓
STESSA ΔV

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{2}{3} d} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{1}{3} d} = 3 \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$$V_1 = \frac{q_1}{C_1} = V_2 = \frac{q_2}{C_2} \longrightarrow \frac{q_1 \cdot 2d}{3\cancel{\varepsilon_0 S}} = \frac{q_2 \cdot d}{3\cancel{\varepsilon_0 S}}$$

La carica totale che si distribuisce sulle armature è pari a $-q$:

$$\boxed{q_1 = \frac{q_2}{2}}$$

$$q_1 + q_2 = -q$$

$$\frac{q_2}{2} + q_2 = -q \longrightarrow \begin{cases} q_2 = -\frac{2}{3} q \\ q_1 = -\frac{1}{3} q \end{cases}$$

ESERCIZIO 7 27-10-2014

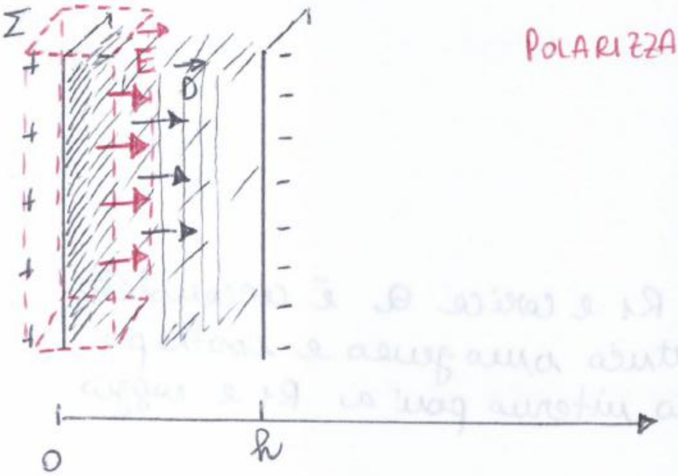
Un condensatore ad armature piane e parallele, di area S e distanza h, è riempito con un dielettrico con $k = \frac{4h}{x+h}$ con $0 < x < h$. Le armature sono caricate con una carica Q_0. Determinare:

a) Campo elettrostatico all'interno del condensatore

b) σ_P sulle sup. del diel. a contatto con le armature

c) ρ_P all'interno del diel.

d) Capacità condensatore



POLARIZZAZIONE NON UNIFORME

a) $\phi(\vec{D})_\Sigma = \int_\Sigma \vec{D} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = D_n \int_\Sigma d\Sigma = D_n S = q = Q_0$

$D_n = \frac{Q_0}{S} = \varepsilon E_n \Rightarrow \vec{E}_n = \vec{E} = \frac{Q_0}{S} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \vec{u}_x = \frac{Q_0}{S} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0 k} \vec{u}_x = \frac{Q_0}{S} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{(x+h)}{4h} \vec{u}_x$

$\vec{E} = \frac{Q_0 (x+h)}{4h \varepsilon_0 S} \vec{u}_x$

b) $\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{u}_n$

$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \varepsilon_0 (k-1) \vec{E} = \varepsilon_0 \frac{4h - x - h}{\cancel{x+h}} \cdot \frac{Q_0 \cancel{(x+h)}}{4h \cancel{\varepsilon_0} S} \vec{u}_x = \frac{(3h - x) Q_0}{4h S} \vec{u}_x$

$\sigma_{P(x=h)} = \vec{P} \cdot \vec{u}_{n_1} = P = \frac{\cancel{2h} Q_0}{\cancel{4h} S} = \frac{Q_0}{2S}$

$\sigma_{P(x=0)} = -P = -\frac{3Q_0}{4S}$

c) $\rho_P = -\operatorname{div} \vec{P} = -\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{3hQ_0}{4hS} - \frac{Q_0 x}{4hS}\right) = \frac{Q_0}{4hS}$

- $r > R_2 \quad \rightarrow \quad \int_{\Sigma_{ch}} \vec{D} \cdot \vec{u_n} \, d\Sigma = Q$

$$D \cdot 4\pi r^2 = Q \rightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{u_r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u_r}$$

2) $u_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$

$$u_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 k E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\varepsilon} = \frac{1}{2} DE$$

- $r < R_1 \quad \vec{E} = 0 \rightarrow u_e = 0$
- $R_1 < r < R_2 \quad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 k r^2} \vec{u_r}$

$$u_e = \frac{1}{2} \cancel{\varepsilon_0 k} \frac{Q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 k^2 r^4} = \frac{1}{32} \frac{Q^2}{\pi^2 \varepsilon_0 k r^4}$$

$$U_e = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\cancel{32}_{8}} \frac{Q^2}{\pi^2 \varepsilon_0 k \cancel{r^4}_{r^2}} \cancel{4\pi r^2} \, dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 k r^2} \, dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 k} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

- $r > R_2 \quad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u_r}$

$$u_e = \frac{1}{2} \cancel{\varepsilon_0} \frac{Q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 r^4} = \frac{1}{32} \frac{Q^2}{\pi^2 \varepsilon_0 r^4}$$

$$U_e = \int_{R_2}^{\infty} \frac{1}{\cancel{32}_{8}} \frac{Q^2}{\pi^2 \varepsilon_0 \cancel{r^4}_{2}} \cdot \cancel{4\pi r^2} \, dr = \int_{R_2}^{\infty} \frac{1}{8} \frac{Q^2}{\pi \cdot \varepsilon_0 r^2} \, dr = \frac{Q^2}{8\varepsilon_0 \pi} \left[\frac{1}{R_2} \right]$$

$$U_{e_{TOT}} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{kR_1} - \frac{1}{kR_2} + \frac{1}{R_2} \right]$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 143 di 222

$$C = \frac{k_1 k_2 \varepsilon_0 S}{k_1 d_2 + k_2 d_1}$$

$$Q = CV = \frac{k_1 k_2 \varepsilon_0 S\, V}{k_1 d_2 + k_2 d_1}$$

d) $\sigma_p = \vec{P}\,\vec{u}_n$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \Rightarrow \vec{P_1} = \varepsilon_0 (k_1 - 1)\vec{E_1} = \frac{\varepsilon_0 (k_1-1) k_2 V}{k_2 d_1 + k_1 d_2}\vec{\mu_x}$$

$$\sigma_{p1} = P_{(x=d_1)} = \frac{\varepsilon_0 (k_1-1) k_2 V}{k_2 d_1 + k_1 d_2} \qquad \vec{P_2} = \frac{\varepsilon_0 (k_2-1) k_1 V}{k_2 d_1 + k_1 d_2}\vec{\mu_x}$$

$$\sigma_{p2} = \vec{P}\cdot\vec{u}_{n_2} = -P(x=d_1) = -\frac{\varepsilon_0 (k_2-1) k_1 V}{k_2 d_1 + k_1 d_2}$$

$\sigma_{p_{TOT}}$ sulla sup. di separazione $= \sigma_{p1} + \sigma_{p2} = \left(\frac{\varepsilon_0 (k_1-1) k_2 V - \varepsilon_0 (k_2-1) k_1 V}{k_2 d_1 + k_1 d_2}\right) =$

$$= \frac{\varepsilon_0 V}{k_2 d_1 + k_1 d_2}\Big((k_1-1)k_2 - (k_2-1)k_1\Big) =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 V}{k_2 d_1 + k_1 d_2}\left(\cancel{k_1 k_2} - k_2 - \cancel{k_2 k_1} + k_1\right) = \frac{(k_1 - k_2)\varepsilon_0 V}{k_2 d_1 + k_1 d_2}$$

$$\rho_P = -\operatorname{div}\vec{P} = 0$$

ESERCIZIO 2 31 OTTOBRE - 3 NOV. 2014

In un punto di un dielettrico non omogeneo la polarizzazione vale $\vec{P} = ax^2\vec{\mu}_x + by\vec{u}_y + cy\vec{u}_z$. Determinare se è presente una densità di carica di polarizzazione all'interno del diel. e in caso affermativo calcolarne il valore.

$$\rho_P = -\operatorname{div}\vec{P} = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right) = -2ax - b$$

$$\Rightarrow \sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{\mu}_n = \pm \frac{q(k-1)}{L\left(L+(k-1)x\right)}$$

RICORDA CHE $\sigma_p = \sigma_1 \cdot \left(\frac{k-1}{k}\right)$

densità di carica sul condensatore.
(Parte di armatura affacciata al dielettrico)

c) $D_{1n} = D_{2n}$

$k_1 E_{1n} = E_{2n} k_2$

$$\begin{cases} k_1 E_1 = k_2 E_2 & \rightarrow E_1 = \frac{k_2}{k_1} E_2 \\ V = E_1 d_1 + E_2 d_2 & \rightarrow E_2 = \frac{V}{\left(\frac{k_2}{k_1} d_1 + d_2\right)} = 4{,}17 \cdot 10^4 \ V/m \end{cases}$$

$$E_1 = \frac{3}{2} E_2 = 6{,}25 \cdot 10^4 \ V/m$$

$C_3 = 7.08 \cdot 10^{-10}$ F

$q_3 = C_3 V = 1.77 \cdot 10^{-7}$ C

$\sigma_3 = \frac{q_3}{\Sigma_3} = 4{,}425 \cdot 10^{-6}$ C/m²

$\Rightarrow E_3 = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_0 k_3} = 5 \cdot 10^4$ V/m

d) non ci sono cariche di pol. sulle sup. di separazione tra il diel 1,2 e il diel 3, poiché $\vec{P} \cdot \vec{u}_n = \sigma_p = 0$

$\sigma_{p1} = \vec{P_1} \, \vec{u}_{n1} = P_1 = \varepsilon_0 (k_1 - 1) \cdot E_1 = 3.87 \cdot 10^{-6}$ C/m²

$\sigma_{p2} = \vec{P_2} \cdot \vec{u}_{n2} = -P_2 = -\varepsilon_0 (k_2 - 1) E_2 = -4{,}059 \cdot 10^{-6}$ C/m²

$\sigma_{p\,tot} = \sigma_{p1} - \sigma_{p2} = -0.189 \cdot 10^{-6}$ C/m² $= 1{,}89 \cdot 10^{-7}$ C/m²

ESERCIZIO ESAME

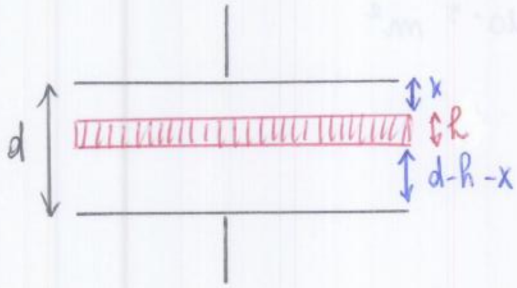
Un condensatore ad armature piane parallele distanti $d = 4\,mm$, con $C = 0{,}05\,nF$ viene collegato ad un generatore con $V_0 = 600\,V$

a) determinare carica ed en. immagazzinata dal condensatore

Succ. una lamina di spessore $h = 10^{-3}\,m$ viene inserita parallelam. alle armature. Determinare:

b) capacità del condensatore dopo che la lamina è stata inserita

c) lavoro compiuto per inserire la lamina (discutere il risult.)

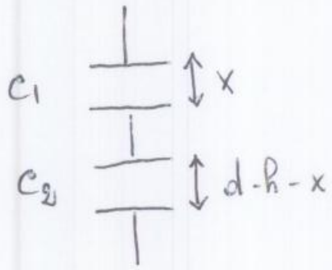


• Prima della lamina:

$$C_i = \frac{q}{V} \rightarrow q = C_i V = 3 \cdot 10^{-8}\,C$$

$$U_{e_i} = \frac{1}{2} C V^2 = 9 \cdot 10^{-6}\,J$$

Inserisco la lamina:



$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{x}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{d-h-x}$$

la superficie la trovi dalla cond. iniziale

$$C_i = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{d}$$

$$\Sigma = \frac{C_i\, d}{\varepsilon_0}$$

$$C_{eq} = \frac{\varepsilon_0^2 \Sigma^2}{\cancel{x}(\cancel{d-h-x})} \cdot \frac{(\cancel{x})(\cancel{d-h-x})}{\varepsilon_0 \Sigma (d-h-x) + \varepsilon_0 \Sigma (x)} = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{d-h} =$$

$$= \frac{\cancel{\varepsilon_0} C_i\, d}{\cancel{\varepsilon_0}(d-h)} = C_i \left(\frac{d}{d-h}\right) = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,F$$

$$U_{ef} = \frac{1}{2} C_{eq} V^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{(d-h)} V^2$$

$$W = U_{e_i} - U_{ef} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{d} V^2 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \Sigma V^2}{(d-h)} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \Sigma V^2 \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d-h}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \Sigma V^2 \left(\frac{-h}{d(d-h)}\right) = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 h \Sigma V^2}{d(d-h)} < 0 \quad \left(W = -3{,}00 \cdot 10^{-6}\,J\right)$$

Il lavoro è fatto sul sistema (generatore).

$t = \frac{Q}{P_{diss}} = 19{,}2\ s$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 153 di 222

a) $\mathcal{E} = \left(3R + \frac{R}{5}\right) i \rightarrow i = \dfrac{\mathcal{E}}{\left(3R + \frac{R}{5}\right)} = \dfrac{5}{16} \dfrac{\mathcal{E}}{R}$

$P = 3Ri^2 = 3R \cdot \dfrac{25}{256} \dfrac{\mathcal{E}^2}{R^2} = 0.293 \dfrac{\mathcal{E}^2}{R}$

b) $\mathcal{E} = \left(\frac{R}{5} + \frac{3}{2}R\right) i \rightarrow i = \dfrac{\mathcal{E}}{\left(R/5 + 3/2 R\right)} = \dfrac{10}{17} \dfrac{\mathcal{E}}{R}$

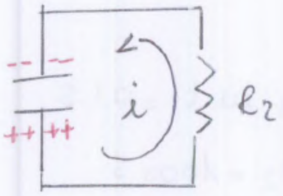
$P = \dfrac{3}{2} R i^2 = \dfrac{3}{2} R \dfrac{100}{289} \dfrac{\mathcal{E}^2}{R^2} = 0.519 \dfrac{\mathcal{E}^2}{R}$

c) $\mathcal{E} = \left(R/3 + \frac{R}{5}\right) i \rightarrow i = \dfrac{\mathcal{E}}{\left(R/3 + R/5\right)} = \dfrac{15}{8} \dfrac{\mathcal{E}}{R}$

$P = \dfrac{R}{3} i^2 = \dfrac{R}{3} \cdot \dfrac{225}{64} \dfrac{\mathcal{E}^2}{R^2} = 1.17 \dfrac{\mathcal{E}^2}{R} \Rightarrow$ più conveniente.

All'istante $t_3 (> t_2)$ T_1 viene aperto e T_2 viene chiuso
Determinare:

c) carica presente sulle armature del condensatore a t_4, dopo che è trascorso un tempo di 0.1 s dalla chiusura di T_2.



$V_C + V_R = 0 \qquad q_0 = \mathcal{E} C$

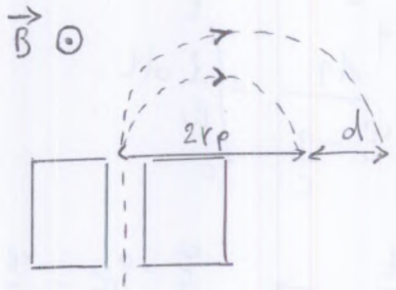
$$\frac{q}{C} + R_2 \frac{dq}{dt} = 0$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{C} \rightarrow \int_{q_0}^{q} \frac{dq}{q} = \int_{t_3}^{t} -\frac{1}{RC}\,dt$$

$$\ln\left(\frac{q}{q_0}\right) = -\frac{(t-t_3)}{RC} \rightarrow q = q_0 e^{-\frac{(t-t_3)}{R_2 C}} = \mathcal{E} C e^{-\frac{(t-t_3)}{R_2 C}}$$

$$q(t_4 - t_3 = 0.1\,s) = \mathcal{E} C e^{-0.1/R_2 C} = 2{,}7 \cdot 10^{-5}\,C$$

ESERCIZIO 2



$V = 10^4\,V$

$B = 0.1\,T$

$d = 0{,}12\,m$

Calcolare la carica specifica $\frac{q}{m_i}$ degli ioni incogniti sapendo che per i protoni $e/m_p = 9.6 \cdot 10^7\,C/kg$.

Cons. energia:

$$qV = eV = \frac{1}{2} m_p v_p^2 \rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2eV}{m_p}} = 1{,}385 \cdot 10^6\,m/s$$

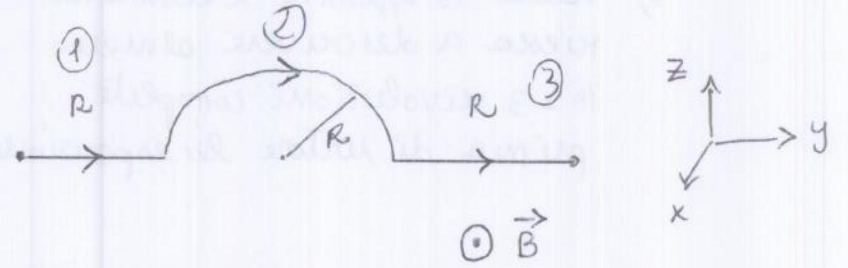
$$F = e v_p B = m_p \frac{v_p^2}{r_p} \rightarrow r_p = \frac{m_p v_p}{eB} = 0{,}144\,m$$

$$r_i = \frac{2r_p + d}{2} = 0.204\,m$$

$$r_i = \frac{m_i v_i}{qB} = \frac{m_i}{qB} \cdot \sqrt{\frac{2qV}{m_i}} \rightarrow \frac{q^2 B^2 r_i^2}{m_i^2} = \frac{2qV}{m_i} \rightarrow \frac{q}{m_i} = \frac{2V}{B^2 r_i^2} = 4{,}805 \cdot 10^7\,C/kg$$

ESERCIZIO 4

Un tratto di filo avente forma in figura è percorso da una corrente $i = 0.5A$ ed è sottoposto all'azione di un campo magnetico $B = 0.4T$ perpendicolare, uscente dal piano contenente il filo. Se il tratto della semicirconferenza disegnato dal filo vale $R = 0{,}1\,m$ e i due tratti rettilinei sono lunghi $l = R = 0{,}1\,m$, calcolare la forza F che agisce sul filo



$$d\vec{F} = i\,d\vec{l} \times \vec{B}$$

Potremmo subito dire, dalla teoria, che $\vec{F} = -4RBi\,\vec{\mu}_z$

Calcoliamo analiticamente:

① $d\vec{F} = i\,d\vec{l} \times \vec{B} \;\rightarrow\; \vec{F}_1 = \int i\,d\vec{l} \times \vec{B} = i\left(\int_0^R d\vec{l}\right) \times \vec{B} = i\vec{R} \times \vec{B} = -iRB\vec{\mu}_z$

③ Analogamente a ①

② $\vec{dl} = dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{\mu}_z \;\rightarrow\; \vec{F}_2 = \int i\left(dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z\right) \times \vec{B} =$

$$= i\left[\left(\int_0^{2R} dy\right)\vec{\mu}_y \times \vec{\mu}_x\right]\cdot B + i\left[\left(\int dz\right)\vec{\mu}_z \times \vec{\mu}_x\right]B =$$

$$= i\cdot 2R\,(-\vec{\mu}_z) + i\underbrace{\left[\left(\int_0^R dz\right)\vec{\mu}_z \times \vec{\mu}_x + \left(\int_R^0 dz\right)\vec{\mu}_z \times \vec{\mu}_x\right]}_{0}B = -2RiB\vec{\mu}_z$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{TOT} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -2RBi\,\vec{\mu}_z - 2RBi\,\vec{\mu}_z = -4RBi\,\vec{u}_z$$

$$\mathcal{E}_H = \int_P^Q \vec{E}_H \cdot d\vec{l} = -v_d B b = -\frac{J}{ne} B b$$

in valore assoluto:

$$\mathcal{E}_H = \frac{J}{ne} B b \longrightarrow \begin{cases} B = \dfrac{ne\,\mathcal{E}_H}{J b} = \nearrow B_1 = 0{,}068\,T \\ \qquad\qquad \longrightarrow B_2 = 0{,}136\,T \\ \quad = \dfrac{ne\,\mathcal{E}_H\, a}{i} \searrow B_3 = 0{,}170\,T \end{cases}$$

$$v_d = \frac{J}{ne} = \frac{i}{abne} = 7.37 \cdot 10^{-4}\ m/s$$

$$\mathcal{E}_H = v_d B b \rightarrow v_d = \frac{\mathcal{E}_H}{Bb} = 7.35 \cdot 10^{-4}\ m/s$$ in tutti e tre i casi

$$\cos\theta = \frac{d}{r} = \frac{d}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

$$\vec{dB}_p = -2\frac{\mu_0}{2\pi}\, di \cdot \frac{d}{x^2+d^2}\,\vec{\mu_y} = \qquad di = \frac{i}{h}dx$$

$$= -2\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{h}dx \cdot \frac{d}{x^2+d^2}\,\vec{\mu_y} \Rightarrow \vec{B}_p = -\frac{\mu_0}{\pi}\frac{i}{h}\int_0^{h/2}\frac{d\,dx}{x^2+d^2}\,\vec{\mu_y} =$$

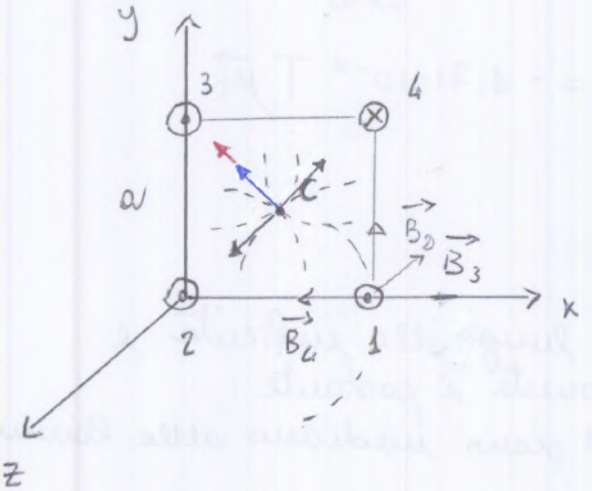
$$= -\frac{\mu_0}{\pi}\frac{i}{h}\int_0^{h/2}\frac{\frac{1}{d}dx}{1+\left(\frac{x}{d}\right)^2}\,\vec{\mu_y} = -\frac{\mu_0}{\pi}\frac{i}{h}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{d}\right)\Big|_0^{h/2}\vec{\mu_y} =$$

$$= -\frac{\mu_0}{\pi}\frac{i}{h}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{h}{2d}\right)\vec{\mu_y}$$

↘ J_s densità di corrente per unità di lunghezza

$$\vec{B}_p = -\frac{\mu_0}{\pi}J_s\,\mathrm{arctg}\left(\frac{h}{2d}\right)\vec{\mu_y}$$

ESERCIZIO ESAME



$a = 0,5\ m$

$i = 20\ A$

Calcolare:
- campo magnetico nel centro del quadrato
- forza per unità di lunghezza che agisce sul filo 1
- densità di energia magnetica nel centro del quadrato

$$\vec{dF} = i\,\vec{dl} \times \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\,\vec{\mu_l} \times \vec{\mu_r}$$

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi a \frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\vec{\mu}_x \frac{\sqrt{2}}{2} + \vec{\mu}_y \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{B}_1 + \vec{B}_3 = 0$$

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 i}{2\pi a \frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\mu}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\mu}_y\right)$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 i}{\frac{2\sqrt{2}\pi a}{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\mu}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\mu}_y\right)$$

$$\Rightarrow \vec{B}_c = \vec{B}_2 + \vec{B}_4 = \frac{2\mu_0 i}{\sqrt{2}\pi a}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\mu}_y - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\mu}_x\right)$$

$$\vec{B}_4 = \frac{\mu_0 i}{\frac{2\sqrt{2}\pi a}{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\mu}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\mu}_y\right)$$

$$\vec{B}_c = \frac{\mu_0 i}{\pi a}\left(\vec{\mu}_y - \vec{\mu}_x\right)$$

b) $d\vec{F} = i_1 d\vec{l}_1 \times \vec{B}$ $\qquad \vec{F} = \frac{\vec{F}_{TOT}}{l_1} = \frac{i_1 l_1 \vec{u}_z \times \vec{B}}{l_1} = i_1 \vec{u}_z \times \vec{B}$

$d\vec{F}_{21} = i_1 \cdot d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2$ $\qquad$ mi conviene prima trovare B_{TOT} in 1

$$\vec{B}_2' = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}\vec{u}_y$$

$$\vec{B}_3' = \frac{\mu_0 i}{2\sqrt{2}\pi a}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\mu}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\mu}_y\right) \Rightarrow \vec{B}_{1\,TOT} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}\vec{\mu}_y + \frac{\mu_0 i}{4\pi a}\left(\vec{\mu}_x + \vec{\mu}_y\right) + - \frac{\mu_0 i}{2\pi a}\vec{\mu}_x$$

$$\vec{B}_4' = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}\left(-\vec{\mu}_x\right)$$

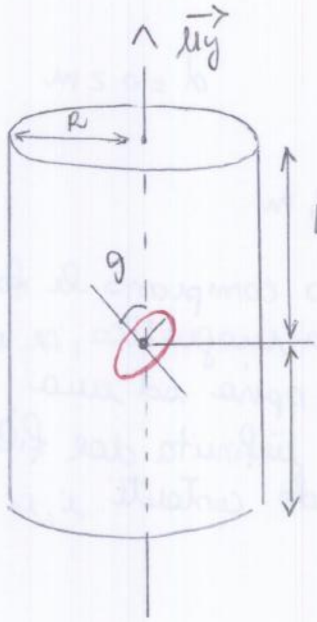
$$\vec{B}_{1\,TOT} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}\left(-\frac{\vec{\mu}_x}{2} + \frac{3\vec{\mu}_y}{2}\right)$$

Quindi: $\qquad \vec{\mu}_z$ perché $\frac{F_{TOT}}{l}$

$$\vec{F}_{TOT} = \frac{i^2 \mu_0}{2\pi a}\left[d\vec{l}_1 \times \left(\frac{3\vec{\mu}_y}{2} - \frac{\vec{\mu}_x}{2}\right)\right] = -\frac{3}{2}\frac{i^2\mu_0}{2\pi a}\vec{\mu}_x - \frac{1}{2}\frac{\mu_0 i^2}{2\pi a}\vec{\mu}_y$$

c) $$\mu_{m_c} = \frac{1}{2}\frac{B_c^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0^2 i^2}{\pi^2 a^2}\cdot\frac{1}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 i^2}{\pi^2 a^2}$$

ESERCIZIO ESAME



$L = 2m$ $I_0 = 30A$

$N = 3000$ spire $r = 0{,}01\,m$

$R = 0{,}1\,m$ $\theta = 45°$

$I_1 = 2A$

a) Modulo del campo magnetico sull'asse del solenoide e al suo esterno

b) Modulo del momento meccanico che agisce sulla spira.

$$\vec{B} = \mu_0 i n \vec{u_y} \rightarrow B = \mu_0 i n = \mu_0 i \frac{N}{L} = \mu_0 I_0 \frac{N}{L}$$

All'esterno del solenoide il campo magnetico è nullo

$$|\vec{M}| = |\vec{b} \times \vec{F}| = |\vec{m} \times \vec{B}| = mB\sin\theta = I_1 \pi r^2 B \sin\theta$$

Non appena la spira ha raggiunto la posizione di equilibrio la corrente all'interno del solenoide decresce linearmente come $I = I_0 - kt$, con $k = 0.3$ A/s

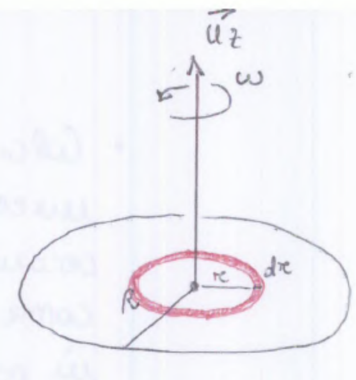
Determinare la f.e.m indotta nella spira.

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$$

$$\phi(\vec{B}) = \int_\Sigma \vec{B}\cdot\vec{u_n}\,d\Sigma = B\Sigma = \mu_0 (I_0 - kt)\frac{N}{L}\cdot\pi r^2 = \mu_0 \frac{N\pi r^2}{L} I_0 + - \mu_0 \frac{N}{L}\pi r^2 k t$$

$$\frac{d\phi(\vec{B})}{dt} = -\mu_0 \frac{N}{L}\pi r^2 k$$

$$\mathcal{E}_i = \mu_0 \frac{N}{L}\pi r^2 k$$



$$\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$$

$$dq = \sigma 2\pi r dr$$

$$di = \frac{dq}{T} = \frac{dq\,\omega}{2\pi}$$

$$di = \sigma r \omega dr$$

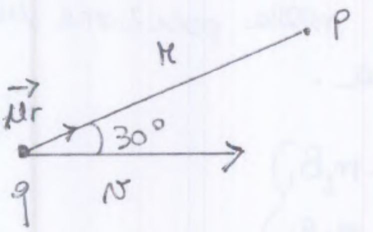
$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{2} di \frac{r^2}{(r^2+x^2)^{3/2}} \vec{\mu}_z \Rightarrow \vec{dB}\Big|_{x=0} = \frac{\mu_0}{2}\frac{di}{r}\vec{\mu}_z = \frac{\mu_0 \sigma r \omega dr}{2r}\vec{\mu}_z =$$

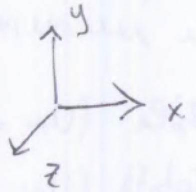
$$= \frac{\sigma\mu_0 \omega dr}{2}\vec{\mu}_z$$

$$\vec{B} = \int \vec{dB} = \int_0^R \frac{\mu_0 \omega dr}{2}\sigma\vec{\mu}_z = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}\cdot R\vec{u}_z = \frac{\mu_0 q \omega R}{2\pi R^2}\vec{\mu}_z = \frac{\mu_0 q \omega}{2\pi R}\vec{\mu}_z$$

ESERCIZIO 7

Una carica puntiforme pari a 10^{-9} C si muove in vuoto con $V = 10^5$ m/s in direzione concorde all'asse x. Determinare il valore di $\vec{E}, \vec{B}$ in un punto P che dista $r = 0{,}1$ m dalla carica.





$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{\mu}_r$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2 c^2} q v \vec{\mu}_z$$

$$|\vec{B}| = \frac{1}{c^2} v E \sin\theta = 5{,}00\cdot 10^{-10}\ T$$

direzione $\perp$ a $xy \Rightarrow \vec{\mu}_z$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cos 30° = 778.7\ V/m$$

$$\longrightarrow |\vec{E}(P)| = 899.2\ V/m$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\sin 30° = 449{,}6\ V/m$$

c) $\langle \vec{m} \rangle = M/n$, con n = n° atomi per unità di volume

$P = \Sigma d\rho = 0.395$ kg → peso barretta

$$n° \text{ mol} = \frac{P}{A} = 7.073 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot N_A = 4.26 \cdot 10^{21} \text{ molecole}$$

così ho trovato il n° di particelle nel volume della barretta, a me servono il n° di particelle per unità di volume (in un metro quadrato)

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV} = \langle \vec{m} \rangle \frac{dN}{dV} = \langle \vec{m} \rangle n$$

$$\frac{\rho}{A} = 141.45 \text{ mol} \cdot N_A = 8.519 \cdot 10^{25} \text{ molecole}/m^3$$

$$|\langle \vec{m} \rangle| = \frac{M}{n} = \frac{1414 \text{ A/m}}{8.519 \cdot 10^{25} \text{ molecole}} = 1.66 \cdot 10^{-23} \text{ A m}^2$$

- $c < r < d$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = i'' = i - J\Sigma'' = i - \frac{i}{\pi(d^2-c^2)} \cdot \pi(r^2-c^2) = i\left(1 - \frac{r^2-c^2}{d^2-c^2}\right) =$$

$$= i\left(\frac{d^2-r^2}{d^2-c^2}\right)$$

$$H \cdot 2\pi r = i\left(\frac{d^2-r^2}{d^2-c^2}\right) \rightarrow \vec{H} = \frac{i}{2\pi r}\left(\frac{d^2-r^2}{d^2-c^2}\right)\vec{\mu}_\phi$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \frac{\mu_0 k_{m_2} i}{2\pi r}\left(\frac{d^2-r^2}{d^2-c^2}\right)\vec{\mu}_\phi$$

$$\vec{M} = \chi_{m_2}\vec{H} = \frac{\chi_{m_2} i}{2\pi r}\left(\frac{d^2-r^2}{d^2-c^2}\right)\vec{\mu}_\phi$$

- $r > d$

$\vec{B} = 0$

$\vec{M} = 0$

Correnti di magnetizzazione:

- $a < r < b$

$$\vec{J}_{s,m_1} = \vec{M} \times \vec{u}_m \nearrow \vec{M}\Big|_{r=a} \times \vec{\mu}_m = 0$$

$$\vec{J}_{s,m_1} = \vec{M} \times \vec{u}_m \searrow \vec{M}\Big|_{r=b} \times \vec{\mu}_m = \frac{|\chi_{m_1}| i}{2\pi b}\vec{\mu}_z$$

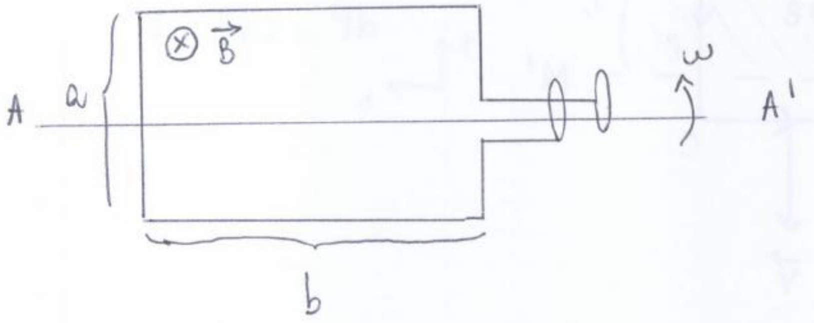
$$\vec{J}_{m_1} = \text{rot}\,\vec{M} = \text{rot}\left(\chi_{m_1}\vec{H}\right) = \chi_{m_1}\,\text{rot}\,\vec{H} = \chi_{m_1}\vec{J}_1 = -|\chi_{m_1}| J_1 \vec{\mu}_z$$

$$i_{m_1\,TOT} = \frac{|\chi_{m_1}| i}{2\pi b} 2\pi b - |\chi_{m_1}| J_1 \pi(b^2-a^2) = |\chi_{m_1}|\left[i - \frac{i}{\pi(b^2-a^2)} \cdot \pi(b^2-a^2)\right] = 0$$

la corrente totale di magnetizzazione che scorre nel conduttore 1 è nulla

ESERCIZIO 1 24 - 28 NOVEMBRE 2014

bobina rettangolare composta di N spire



a) Ricavare l'espressione del flusso di campo magnetico concatenato con la bobina e il valore della ddp tra i due collettori

$$\phi(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{u_n} \, d\Sigma$$

$$\phi(\vec{B})_{spira} = \int_{spira} \vec{B} \cdot \vec{u_n} \, d\Sigma = B \cos\theta \, ab \Rightarrow \phi(\vec{B})_{bobina} = NBab\cos\theta$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \theta = \omega t \Rightarrow \phi(\vec{B})_{bobina} = NBab\cos(\omega t)$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt}\phi(\vec{B}) = -NBab\frac{d}{dt}(\cos\omega t) = \omega NBab \sin\omega t$$

La ddp. tra i due collettori è uguale alla f.e.m. indotta misurata ai capi del circuito aperto.

$$\Delta V = \omega NBab \sin\omega t$$

b) Se $a = 0{,}01\,m$, $b = 0{,}05\,m$, $N = 100$, $B = 0.4\,T$, calcolare a quale velocità angolare deve ruotare la bobina per ottenere $\Delta V_{max} = 100\,V$

ΔV è max per $\sin(\omega t) = 1$

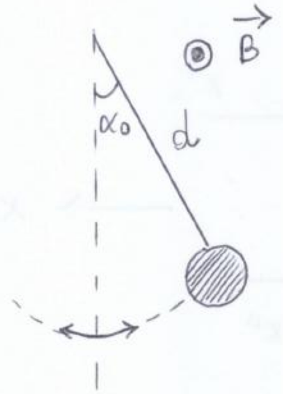
$$\Rightarrow 100V = \omega NBab \rightarrow \omega = \frac{100\,V}{NBab} = 5 \cdot 10^{-3}\,rad/s$$

ESERCIZIO 3

$d = 0{,}15\,m$

$\alpha_0 = 7°$

$B = 0.5\,T$



Si ricavi l'espressione della f.e.m. indotta nel filo metallico in f del tempo e il suo valore massimo.

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$$

AREA SETTORE CIRCOLARE $dA = \pi r^2 \cdot \frac{d\alpha}{2\pi} = \frac{r^2}{2} d\alpha$

$$d\phi(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = B \cdot \frac{d^2}{2} d\alpha$$

Per l'oscillatore armonico:

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega t) \rightarrow d\alpha = \alpha_0 \omega \cos(\omega t)$$

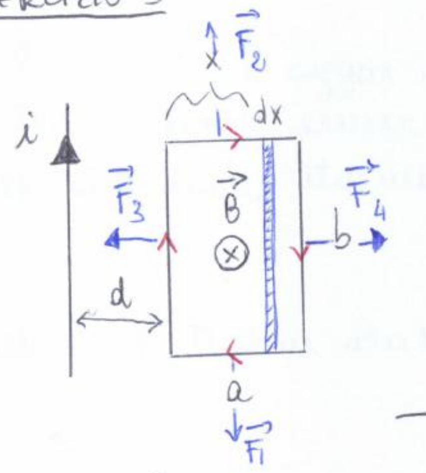
$$d\phi(\vec{B}) = B \frac{d^2}{2} \alpha_0 \omega \cos(\omega t)$$

Quindi:

$$\mathcal{E}_i = -B \frac{d^2}{2} \alpha_0 \omega \cos(\omega t)$$

$\mathcal{E}_{i\,max}$ si ha per $\cos(\omega t) = -1 \Rightarrow \mathcal{E}_{i\,max} = B \frac{d^2}{2} \alpha_0 \omega$

ESERCIZIO 5



$i = \frac{C}{t^2}$, $C = cost$

Determinare $\mathcal{E}_i$ nella spira e il verso di scorrimento della corrente in essa

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r_e}\vec{\mu}_e \times \vec{\mu}_r$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$$

$$d\phi(\vec{B}) = \vec{B}\,\vec{\mu}_n\,d\Sigma = B\,d\Sigma = B\,b\,dx = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{C}{t^2}\cdot\frac{1}{d+x}\,b\,dx$$

$$\phi(\vec{B}) = \int_\Sigma \vec{B}\,\vec{\mu}_n\,d\Sigma = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{C}{t^2}b\Big[\ln(d+x)\Big]_0^a = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Cb}{t^2}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt} = +2\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Cb}{t^3}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right) = \frac{\mu_0}{\pi}\frac{Cb}{t^3}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

La spira viene attirata o respinta dal filo?

$$\vec{dF} = i_0\vec{dl} \times \vec{B}$$

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ perché spira rigida

$$\int d\vec{F}_3 = \int i_0 \vec{dl}_3 \times \vec{B} = \frac{i_0 i}{2\pi d}\mu_0 b(-\vec{\mu}_x) = \mu_0\frac{i i_0 b}{2\pi d}(-\vec{\mu}_x)$$

$$\int d\vec{F}_4 = \int i_0 \vec{dl}_4 \times \vec{B} = \frac{\mu_0 i i_0 b}{2\pi(d+a)}\vec{\mu}_x$$

$$\vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \mu_0\frac{i i_0 b}{2\pi}\left[\frac{1}{d+a} - \frac{1}{d}\right]\vec{u}_x = \mu_0\frac{i i_0 b}{2\pi}\frac{(-a)}{d(d+a)}\vec{\mu}_x = -\frac{\mu_0 i i_0 b a}{2\pi d(d+a)}\vec{u}_x$$

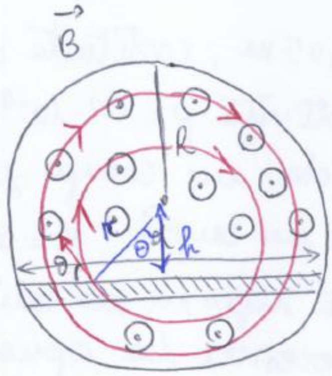
la spira viene attirata dal filo

ESERCIZIO 7   24-28 NOVEMBRE 2014

$R = 2\ m$

$B = At$, $A = 0.1\ T/s$

$d = 1\ m$



Determinare il valore della f.e.m. indotta all'interno della sbarretta

$$\oint_\gamma \vec{E}_i \cdot \vec{ds} = -\frac{d}{dt}\int_\Sigma \vec{B}\cdot \vec{u}_n\, d\Sigma$$

$$E_i \cdot 2\pi r = -\frac{d}{dt}\left(B\cdot \pi r^2\right) \rightarrow E_i \cdot 2\cancel{\pi}\cancel{r} = -\cancel{\pi} r^2 \cdot \frac{d}{dt}(At)$$

$$\vec{E}_i = -\frac{Ar}{2}\vec{\mu}_r$$

$$\mathcal{E}_i = \int_d \vec{E}_i\cdot\vec{dl} = -\frac{A}{2}\int_d r\cdot\vec{\mu}_r\cdot\vec{dl} = -\frac{A}{2}\int_d r\cos\theta\, dl = -\frac{A}{2}\int_d h\, dl =$$

$$= -\frac{A}{2}h\,l = -\frac{A}{2}h\,d$$

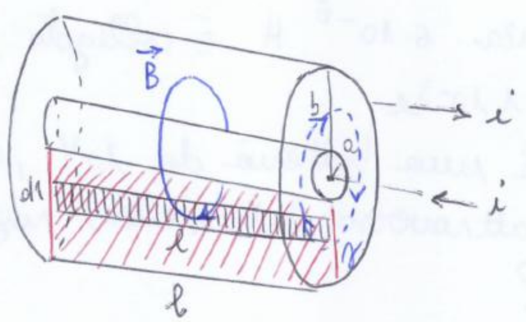
$$h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} \Rightarrow \mathcal{E}_i = -\frac{Ad\sqrt{R^2-\left(d/2\right)^2}}{2}$$

ESERCIZIO 1 5-12 DICEMBRE 2014

Un cavo coassiale costituito da due cilindri cavi di spessore trascurabile e raggio a e b. Una corrente i scorre in un verso nel cilindro interno e nel verso opposto in quello esterno. Calcolare:

a) Coeff. di autoinduzione per unità di lunghezza
b) Um immagazzinata per unità di lunghezza (vuoto)

Come varia il risultato se il sistema è immerso in un mezzo con p. relat. Km?



a) $L_{|\ell} = \dfrac{\phi(\vec{B})}{i\ell}$

• $a < r < b$

$$\oint_\gamma \vec{B}\cdot\vec{d\ell} = \mu_0 (i) \rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 i$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\vec{\mu}_\phi$$

$$d\phi(\vec{B}) = \vec{B}\cdot\vec{\mu}_n\, dr \cdot \ell$$

$$\int_\Sigma \vec{B}\cdot\vec{\mu}_n \cdot d\Sigma = \int_\Sigma B\cdot \ell\, dr = \frac{\mu_0 i \ell}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i \ell}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$L_{|\ell} = \frac{\mu_0 i}{2\pi i}\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

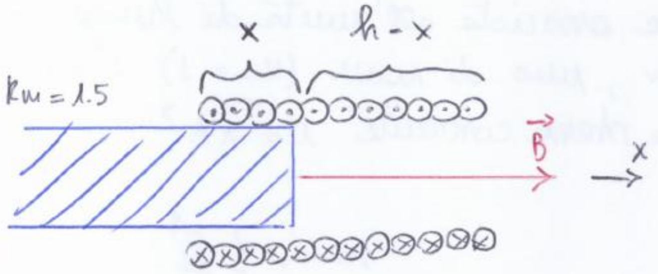
b) $= \mathcal{U}_{m_{|\ell}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{B^2}{\mu_0 \ell} \Rightarrow \dfrac{Um_{TOT}}{\ell} = \displaystyle\int_{Vol} u_m \frac{dV}{\ell} = \int_{Vol} u_m \cdot \frac{2\pi r\, dr\, \ell}{\ell} = \int_{Vol} u_m \cdot 2\pi r\, dr$

$$e^{-R/L\,t} = \frac{1}{5}$$

$$-\frac{R}{L}t = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \rightarrow \frac{R}{L}t = \ln(5) \rightarrow t = \frac{L}{R}\ln(5) = 9{,}66 \text{ ms}$$

. dopo un tempo $\tau = \frac{L}{R} \rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\cdot\frac{L}{R}}\right) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 6321{,}2 \text{ A}$

ESERCIZIO 3



$h = 1$ m

$r = 0{,}01$ m

$n = 2000$ spire/m

$i = 5$ A

La corrente è MANTENUTA COSTANTE NEL TEMPO

Det. la forza che il solenoide applica sulla sbarretta, in f di x, tratto della sbarretta all'interno del solenoide

$$L = \frac{\phi(\vec{B})}{i}$$

$$\phi_{spira}(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B}\cdot\vec{\mu}_n\, d\Sigma = B\cdot\Sigma = \mu_0 i n \pi r^2$$

$$\vec{B} = \mu_0 i n\, \vec{\mu}_x$$

$$\phi_{TOT}(\vec{B}) = \mu_0 i n^2 \pi r^2 l = \mu_0 i n^2 \pi r^2 h \quad \text{(se fosse complet. in vuoto)}$$

$$L = \mu_0 n^2 \pi r^2 l$$

$$L = \mu_0 n^2 (h-x)\pi r^2 + k_m \mu_0 n^2 x \pi r^2$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}(Li) = -\frac{dL}{dt}i$$

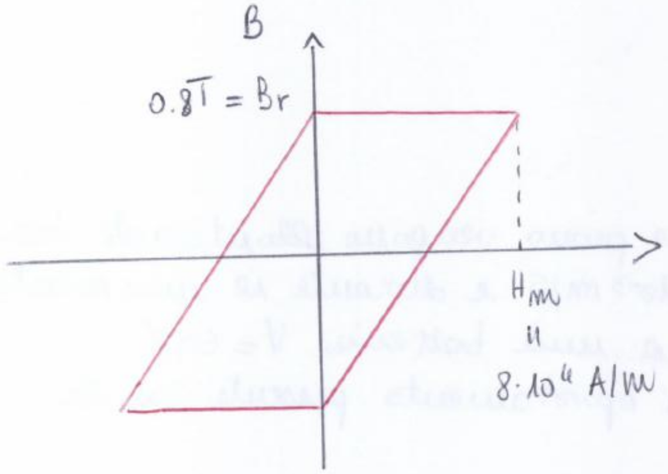
$$\Rightarrow \mathcal{E}_{gen} = -\mathcal{E} = \frac{dL}{dt}i \Rightarrow dW_{gen} = \mathcal{E}_{gen}\, i\, dt = i^2 dL$$

$$U_L = \frac{1}{2}Li^2 \rightarrow dU_L = \frac{1}{2}i^2 dL \Rightarrow dW_{gen} = 2dU_L$$

$$dW_{gen} = 2dU_L = -dU_{gen}$$

$$U_{m|\ell}(Fe) - U_{m|\ell}(Cu) = \frac{\mu_0 k_m i^2}{16\pi} - \frac{\mu_0 i^2}{16\pi} = \frac{\mu_0 i^2}{16\pi}(1000-1) = \frac{999\,\mu_0 i^2}{16\pi}$$

ESERCIZIO 5



$\rho = 7.3 \cdot 10^3\ Kg/m^3$

$c = 500\ J/(Kg\,K)$

$\nu = 50\,Hz$

$V = 5 \cdot 10^{-2}\ m^3$

Calcolare l'energia dissipata dal materiale ferromagnetico durante ogni ciclo e l'aumento della sua temperatura in un minuto.

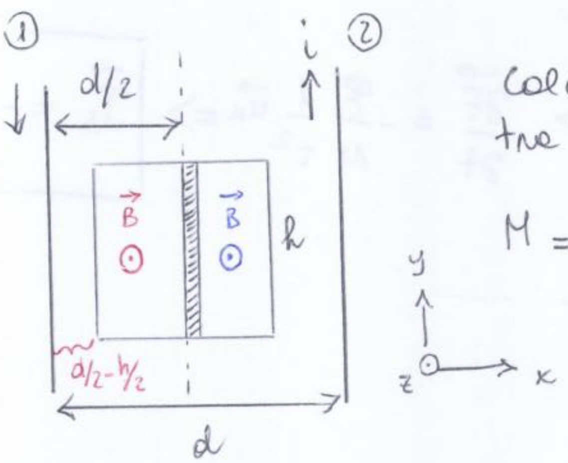
$\nu = 50\,Hz \rightarrow T = 0.02\,s \Rightarrow$ 1 ciclo di isteresi in 0.02 s

$$U_{diss} = A \cdot V = 8 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 0{,}8 \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 6400\ J$$

In 1 m $\Rightarrow$ 3000 cicli di isteresi $= 1{,}92 \cdot 10^7\ J$

$$Q = mc\Delta T \rightarrow \Delta T = \frac{Q}{mc} = \frac{Q}{c\rho V} = 105.2\ K$$

ESERCIZIO 6



$B = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}\vec{\mu}_\ell \times \vec{\mu}_r$

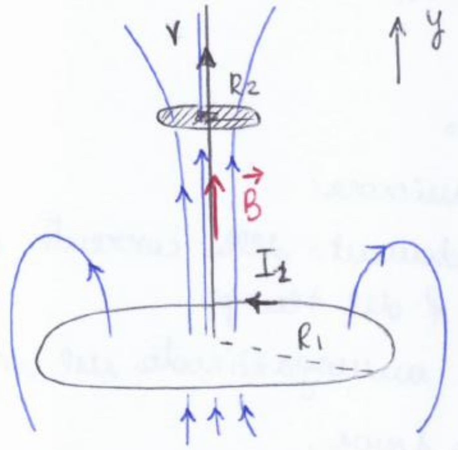
Calcolare la mutua induttanza tra fili e spira

$$M = \frac{\phi_2(\vec{B}_1)}{i_1}$$

$$d\phi_2(\vec{B}_1) = \vec{B}_1 \, \vec{u}_n d\Sigma = B_1 \cdot h\,dx$$

$$\phi_1(\vec{B}_1) = \frac{h\mu_0 i}{2\pi}\int_{d/2-h/2}^{d/2+h/2} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 i h}{2\pi} \ln\left(\frac{d/2+h/2}{d/2-h/2}\right) = \frac{\mu_0 i h}{2\pi}\ln\left(\frac{d+h}{d-h}\right)$$

ESERCIZIO 7



$\uparrow y$

$R_1 = 0{,}5\ m$

$I_1 = 20\ A$

$R_2 = 0{,}03\ m$

$v = 0{,}02\ m/s$

a $t=0 \to y=0$

Calcolare il coeff. di mutua induzione del sistema e il contributo alla f.e.m. indotta nella spira mobile dovuto alla mutua induzione, dopo un tempo $t = 2s$.

($R_1 >> R_2$, vuoto)

$$M = \frac{\phi_2(\vec{B_1})}{I_1}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2} I_1 \frac{R_1^2}{(R_1^2+y^2)^{3/2}} \vec{\mu}_y \qquad \text{con } y = vt$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2} I_1 \frac{R_1^2}{(R_1^2+v^2t^2)^{3/2}} \vec{\mu}_y$$

$$\phi(\vec{B}_1) = \int_{\Sigma_2} \vec{B}_1 \cdot \vec{\mu}_{n2}\, d\Sigma_2 = B_1 \cdot \pi R_2^2 = \frac{\mu_0}{2} I_1 \frac{\pi R_1^2 R_2^2}{(R_1^2+v^2t^2)^{3/2}}$$

$$M = \frac{\mu_0}{2} \pi \frac{R_1^2 R_2^2}{(R_1^2+v^2t^2)^{3/2}}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0}{2}\pi \frac{R_1^2 R_2^2 I_1}{(R_1^2+v^2t^2)^{3/2}}\right) = +\frac{\mu_0 \pi}{\cancel{2}} R_1^2 R_2^2 \cdot \frac{\cancel{2} v^2 t\, I_1}{(R_1^2+v^2t^2)^{5/2}} \cdot \frac{3}{2} =$$

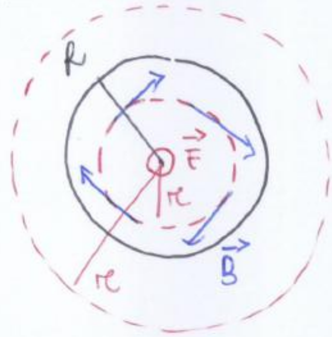
$$= \frac{3\mu_0 \pi R_1^2 R_2^2 v^2 t\ I_1}{2(R_1^2+v^2t^2)^{5/2}}$$

ESERCIZIO 10

Un condensatore ad armature piane e parallele di raggio $R = 0,2\,m$, avente il vuoto tra le armature, viene caricato con un opportuno generatore.

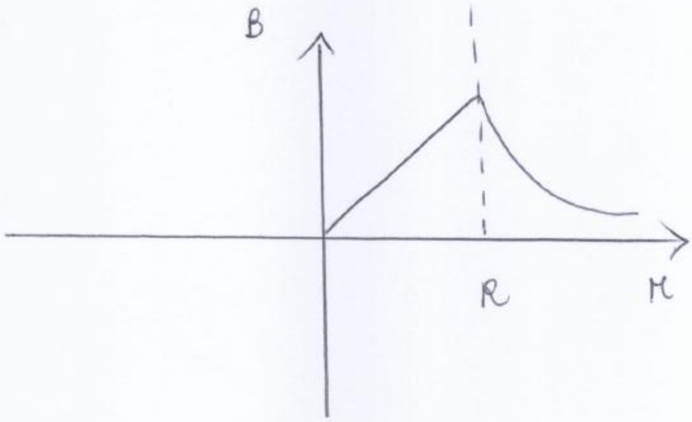
a) Stabilire una relazione che esprima l'andamento di $\vec{B}$ indotto durante il processo di carica. per $r < R$, $r > R$

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \Big(\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\cancel{i}} + \underbrace{\varepsilon_0 \frac{\partial \phi(\vec{E})}{\partial t}}_{i_s} \Big)$$



•) $B \cdot 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{\partial E}{\partial t}$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} r \frac{\partial E}{\partial t}} \quad \text{per } r < R$$



•) $B \cdot 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \pi R^2 \frac{\partial E}{\partial t}$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 R^2}{2r} \frac{\partial E}{\partial t}} \quad \text{per } r > R$$

$$i_s = \varepsilon_0 \frac{\partial \phi(\vec{E})}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(E \pi R^2 \right) = \varepsilon_0 \pi R^2 \frac{\partial E}{\partial t}$$

↳ tutta l'armatura

ESERCIZIO 12

Un' onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 30\,Hz$ polarizzata linearmente lungo y si muove lungo la direzione x di un sistema di coordinate dato.
Al tempo $t=0$ si osserva in (0,0,0) un massimo del campo elettrico pari a $E_0 = 1\,V/m$

1) Scrivere l'espressione del campo elettrico in f. di x, t, ν ed E_0
2) Scrivere l'espressione del vettore campo magnetico $\vec{B}$ in f. di x, t, ν ed E_0.

$$\vec{E} = E_0 \cos(kx - \omega t)\,\vec{u}_y \qquad \phi = 0$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c} = 6.28 \cdot 10^{-7}\ m^{-1}$$

$$\vec{E} = E_0 \cos\left(\frac{2\pi\nu}{c}x - 2\pi\nu t\right)\vec{u}_y$$

$$B = \frac{E_0}{c}$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c}\cos\left(\frac{2\pi\nu}{c}x - 2\pi\nu t\right)\vec{u}_z$$

ESERCIZIO 2

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 180\,MHz$ e ampiezza $E_0 = 2\,mV/m$ si propaga nel vuoto lungo l'asse x ed è polarizzata nel piano xy. Calcolare λ, K, ω. Scrivere inoltre l'equazione di $\vec{E}$, $\vec{B}$ e calcolare la densità di energia elettromagnetica e l'intensità I associate all'onda.

$$\nu\lambda = c \rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} = 1{,}67\,m$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = 3.76\,m^{-1}$$

$$\omega = 2\pi\nu = 1{,}13\cdot10^9\,rad/s$$

$$\vec{E} = 2\,mV/m \cos(-1{,}13\cdot10^9\,rad/s\cdot t + 3{,}76\,m^{-1}x)\,\vec{u}_y$$

$$\vec{E} = 2\cdot10^{-3}\cos(3{,}76\,m^{-1}x - 1{,}13\cdot10^9\,rad/s\cdot t)\,\vec{u}_y\,V/m \quad \text{ipotizzando } \phi_0 = 0$$

$$B = \frac{E}{c} = 6{,}67\cdot10^{-12}\cos(3{,}76\,m^{-1}x - 1{,}13\cdot10^9\,rad/s\cdot t)\,\vec{u}_z\,T$$

$$u = \varepsilon_0 E^2 = \varepsilon_0(2\cdot10^{-3})^2\cos^2(3{,}76\,m^{-1}x - 1{,}13\cdot10^9\,rad/s\cdot t)$$

$$I = \frac{1}{t}\int_0^t \varepsilon_0 E^2 v\,dt = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 v = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 c$$

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{01}^2 c \rightarrow E_{01} = \sqrt{\frac{2\mathcal{I}_1}{\varepsilon_0 c}}$$

$$\mathcal{I}_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{02}^2 c \rightarrow E_{02} = \sqrt{\frac{2\mathcal{I}_2}{\varepsilon_0 c}} = 2\sqrt{\frac{2\mathcal{I}_1}{\varepsilon_0 c}} = E_{01}\cdot 2$$

Quindi:

$$\vec{E} = E_{01}\cos(kz-\omega t)\left[\vec{\mu}_x + 2\vec{\mu}_y\right]$$

onda piana, pol. linearmente, perché non varia il piano di oscillazione, monocromatica, perché oscilla ad una sola frequenza

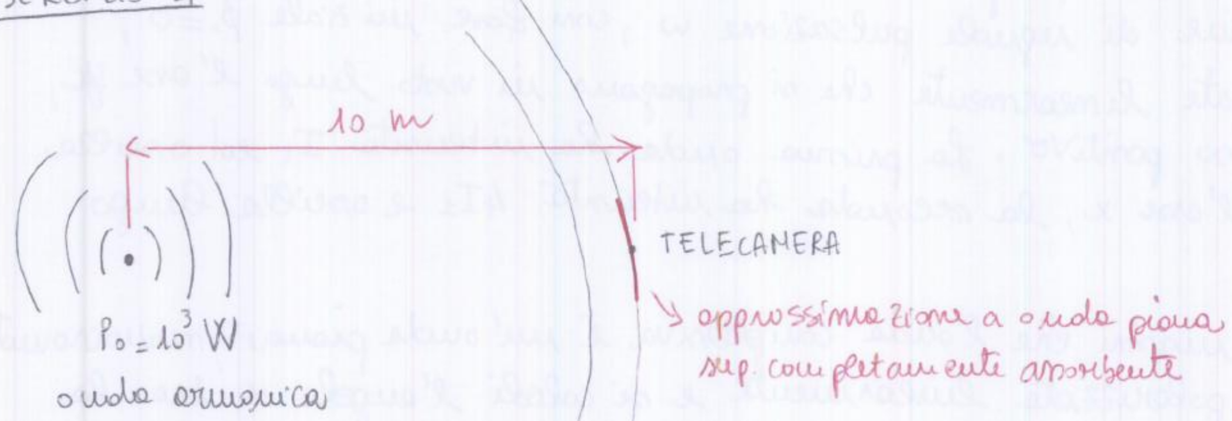
- $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{E_{02}}{E_{01}}\right) = \operatorname{arctg} 2 = 63.43^\circ$

2) Si calcoli l'ampiezza del campo elettrico risultante.

$$E_0 = \sqrt{E_{01}^2 + E_{02}^2} = \sqrt{E_{01}^2 + 4E_{01}^2} = E_{01}\sqrt{5}\ \text{V/m}$$

3) $\mathcal{I}_{TOT} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_1 + 4\mathcal{I}_1 = 5\mathcal{I}_1$

ESERCIZIO 4



Calcolare E_0 e B_0 nel punto occupato dalla telecamera

$\mathcal{I} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 c$ energia trasportata per unità di tempo e superficie (energia media)

P_0 energia trasportata nell'unità di tempo attraverso la superficie (energia media)