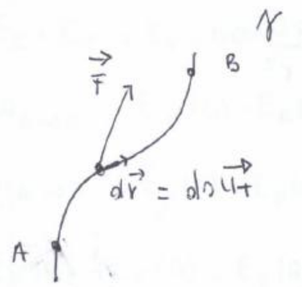
NUMERO: 1413A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Uffreduzzi

MATERIA: Fisica I + Eserc.Prof.Barbero

Th. energia cinetica



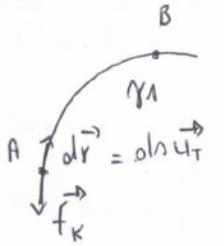
$$w^{(\gamma)}_{A\to B} = \int_{A\gamma}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{A\gamma}^{B} \vec{F}\cdot ds\,\vec{u}_T = \int_{A\gamma}^{B} m\vec{a}\cdot(ds\,\vec{u}_T) =$$

$$= \int_{A\gamma}^{B} m\left(\frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N\right)(ds\,\vec{u}_T) = \int_{A\gamma}^{B} m\frac{dv}{dt}\,ds =$$

$$= \int_{A\gamma}^{B} m\frac{dv}{dt}\cdot v\,dt = m\int_{A\gamma}^{B} v\,dv = \frac{1}{2}mv^2(B) - \frac{1}{2}mv^2(A)$$

$$w^{(\gamma)}_{A\to B} = E_K(B) - E_K(A)$$

altrito



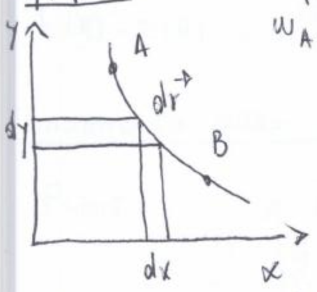
$$w^{(\gamma_1)}_{A\to B} = \int_{A\gamma_1}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{A\gamma_1}^{B} \vec{f}_K\cdot d\vec{r} = \int_{A\gamma_1}^{B} -mg\mu_K\vec{u}_T\,(ds\,\vec{u}_T) =$$

$$= \int_{A\gamma_1}^{B} -mg\mu_K\,ds = -mg\mu_K\int_{A\gamma_1}^{B} ds = -mg\mu_K\, S(\gamma_1)_{A\to B}$$

$$w^{(\gamma_1)}_{A\to B} = -\mu_K mg\, S(\gamma_1)_{A\to B}$$

$$w^{(\gamma_2)}_{A\to B} = -\mu_K mg\, S(\gamma_2)_{A\to B}$$

f. peso



$$w^{(\gamma)}_{A\to B} = \int_{A\gamma}^{B}(-mg\vec{u}_y)(dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y) = \int_{A\gamma}^{B} -mg\,dy = -mg\int_{A\gamma}^{B} dy = -mg\,y(B) + mg\,y(A)$$

$$w^{(*)}_{A\to B} = mg\,y(A) - mg\,y(B)$$

$$d\vec{r} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y$$

f. costante

$$\vec{F} = F_x\vec{u}_x + F_y\vec{u}_y + F_z\vec{u}_z$$

$$d\vec{r} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z$$

$$w^{(\gamma)}_{A\to B} = \int_{A\gamma}^{B}(F_x\vec{u}_x + F_y\vec{u}_y + F_z\vec{u}_z)(dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z) =$$

$$= \int_{A\gamma}^{B} F_x\,dx + \int_{A\gamma}^{B} F_y\,dy + \int_{A\gamma}^{B} F_z\,dz = F_x(x_B - x_A) + F_y(y_B - y_A) +$$

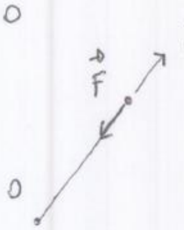
$$+ F_z(z_B - z_A) =$$

$$= \{F_x x_B + F_y y_B + F_z z_B\} - \{F_x x_A + F_y y_A + F_z z_A\}$$

$$w^{(*)}_{A\to B} = (\vec{F}\cdot\vec{r}_B) - (\vec{F}\cdot\vec{r}_A)$$

forza centrale

$\Omega \equiv O$



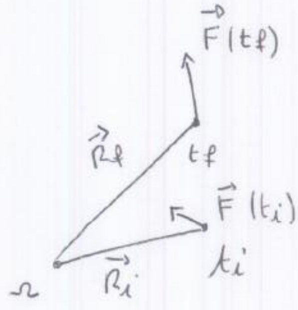
$$\vec{F} = -f(r)\,\vec{u}_r$$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = (r\vec{u}_r) \times (-f(r)\,\vec{u}_r) = 0$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}_O \text{ é costante}$$

Una particella che si muove sotto effetto di forze centrali ha momento angolare costante e si muove su un piano.

teorema del momento dell'impulso

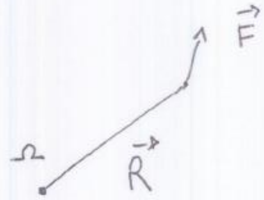


$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_\Omega$$

$$\int_{t_i}^{t_f} d\vec{L} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{M}_\Omega\, dt \rightarrow \vec{L}_\Omega(t_f) - \vec{L}_\Omega(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} \vec{M}_\Omega\, dt$$

nel caso di un urto $\rightarrow t_f \approx t_i$

$$\vec{R}_i \approx \vec{R}_f$$



$$\vec{L}_\Omega(t_f) - \vec{L}_\Omega(t_i) =$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{R}_\Omega \times \vec{F}\, dt \approx \vec{R} \times \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt =$$

$$= \vec{R} \times \vec{J}\,(t_i, t_f)$$

$$\vec{L}_\Omega(t_f) - \vec{L}_\Omega(t_i) = \vec{R} \times \vec{J}\,(t_i, t_f) \quad \text{(negli urti)}$$

lavoro moto circolare

$$w_{A\to B} = \int_A^B (F_T\,\vec{u}_r + F_T\,\vec{u}_\theta)(R\,d\theta\,\vec{u}_\theta) = \int_A^B F_T\,R\,d\theta = \int_A^B M_O\,d\vartheta$$

potenza

$$\mathcal{P} = \frac{dw}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

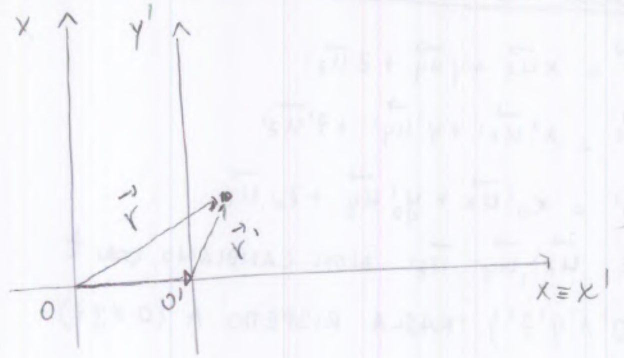
$$dw = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$Oxyz$ $\quad \vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z$

$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$

$O'x'y'z'$ $\quad \vec{v}' = \frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\vec{u}_{z'}$

$\vec{r}' = x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'}$



$\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r}'$ $\qquad \vec{u}_x = \vec{u}_{x'} \quad \vec{u}_y = \vec{u}_{y'}$

$x\vec{u}_x + y\vec{u}_y = x_{o'}\vec{u}_x + x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'}$

$x\vec{u}_x + y\vec{u}_y = x_{o'}\vec{u}_x + x'\vec{u}_x + y'\vec{u}_y$

$x\vec{u}_x + y\vec{u}_y = (x_{o'} + x')\vec{u}_x + y'\vec{u}_y$

$$\begin{cases} x = x_{o'} + x' \\ y = y' \end{cases}$$

$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_{o'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}$

$\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt}$ $\qquad \vec{u}_{x'} = \vec{u}_x \quad \vec{u}_{y'} = \vec{u}_y$

$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y = \frac{dx_{o'}}{dt}\vec{u}_x + \frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_y$

$$\vec{v} = \underbrace{\frac{dx_{o'}}{dt}\vec{u}_x}_{\vec{v}_{o'}} + \underbrace{\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'}}_{\vec{v}'}$$

$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_{o'} + \vec{v}'}$ TRASLAZIONE PURA

accelerazione:

$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_{o'}}{dt^2} + \frac{d^2x'}{dt^2}$

$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt^2}$ $\qquad \vec{u}_{x'} = \vec{u}_x \quad \vec{u}_{y'} = \vec{u}_y$

$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{u}_y = \left(\frac{d^2x_{o'}}{dt^2} + \frac{d^2x'}{dt^2}\right)\vec{u}_x + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{u}_y$

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2x_{o'}}{dt^2} + \frac{d^2x'}{dt^2}\right)\vec{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{u}_{y'} = \underbrace{\frac{d^2x_{o'}}{dt^2}}_{\vec{a}_{o'}} + \underbrace{\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{u}_{y'}}_{\vec{a}'}$$

$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_{o'} + \vec{a}'}$ TRASLAZIONE PURA

- $\frac{dx'}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{u}_{x'}) + \frac{dy'}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{u}_{y'}) = \vec{\omega}\times\left(\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'}\right) + \vec{\omega}\left(\frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'}\right) =$

$= \vec{\omega}\times\left(\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'}\right) = \vec{\omega}\times\vec{v}'$

- $\vec{\omega}\times(x'\vec{\omega}\times\vec{u}_{x'}) + \vec{\omega}\times(y'\vec{\omega}\times\vec{u}_{y'}) = \vec{\omega}\times\left[\vec{\omega}\times(x'\vec{u}_{x'})\right] + \vec{\omega}\times\left[\vec{\omega}\times(y'\vec{u}_{y'})\right] =$

$= \vec{\omega}\times\left\{\vec{\omega}\times(x'\vec{u}_{x'}) + \vec{\omega}\times(y'\vec{u}_{y'})\right\} = \vec{\omega}\times\left\{\vec{\omega}\times(x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'})\right\} =$

$= \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$

quindi:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \underbrace{2\vec{\omega}\times\vec{v}'}_{\text{accelerazione di Coriolis}} + \overbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')}^{\text{termine centrifugo}}}$$

accelerazione di Coriolis dipende dal moto del corpo rispetto al sistema mobile

TRASLAZIONI

$\vec{V} = \vec{V}_{0'} + \vec{V}'$

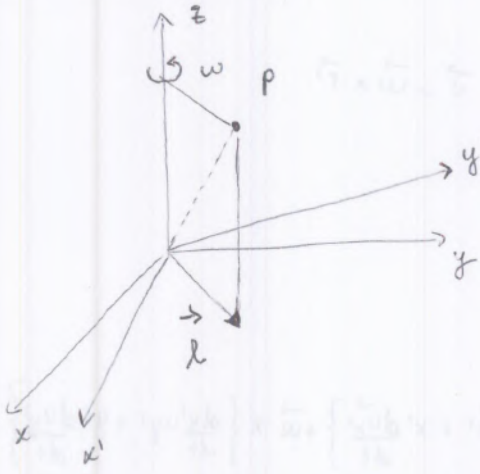
$\vec{a} = \vec{a}_{0'} + \vec{a}'$

ROTAZIONI

$\vec{V} = \vec{v}' + \omega\times\vec{r}'$

$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$

LA FORMULA OTTENUTA VALE ANCHE NEL CASO SEGUENTE:



$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$

$\vec{r}' = x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'} + z\vec{u}_z$

stesse componente z

$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_z$

$\vec{\omega}\times\vec{r}' = (\omega\vec{u}_z)(x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'} + z\vec{u}_z) = (x'u_{y'} - y'u_{x'})\omega$

$\vec{\omega}\times\vec{V}' = (\omega\vec{u}_z)(V_{x'}u_{x'} + V_{y'}u_{y'} + V_z u_z) = (V_{x'}\vec{u}_{y'} - V_{y'}\vec{u}_{x'})\omega$

$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = (\omega\vec{u}_z)(\omega x'\vec{u}_{y'} - \omega y' u_{x'}) = -\omega^2 x' u_{x'} - \omega^2 y' u_{y'} = -\omega^2(x'u_{x'} + y'u_{y'}) = -\omega^2\vec{l}$

CALCOLO ACCELERAZIONE:

$$\vec{a} = -g\vec{u}_{x'} - 2\omega\vec{u}_{z'} \times \left(\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'}\right) = -g\vec{u}_{x'} - 2\omega\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{y'} + 2\omega\frac{dy'}{dt}\vec{u}_{x'} =$$

$$= -\left(g - 2\omega\frac{dy'}{dt}\right)\vec{u}_{x'} - 2\omega\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{y'}$$

MA

$$\vec{a} = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{u}_{y'}$$

per cui

$$\begin{cases} \frac{d^2x'}{dt^2} = -\left(g - 2\omega\frac{dy'}{dt}\right) \\ \frac{d^2y'}{dt^2} = -2\omega\frac{dx'}{dt} \end{cases}$$

$g \sim 10\, m/s^2$, $\omega \sim 7 \cdot 10^{-5}$ $\Rightarrow$ $2\omega\frac{dy'}{dt} << g$ ed è trascurabile

$$\begin{cases} \frac{d^2x'}{dt^2} = -g \\ \frac{d^2y'}{dt^2} = -2\omega\frac{dx'}{dt} \end{cases}$$

cond. iniziali:

$$\begin{cases} x'(0) = R+h \\ \left(\frac{dx'}{dt}\right)_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ \left(\frac{dy'}{dt}\right)_0 = 0 \end{cases}$$

quindi:

$$\frac{dx'}{dt} = -gt$$

$$x'(t) = x'(0) - \frac{1}{2}gt^2$$

$$x'(t) = R+h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$x'(t_c) = R \Rightarrow R + h - \frac{1}{2}gt_c^2 = R$$

$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ tempo di caduta

DEVIAZIONE VERSO ORIENTE:

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = -2\omega\frac{dx'}{dt}$$

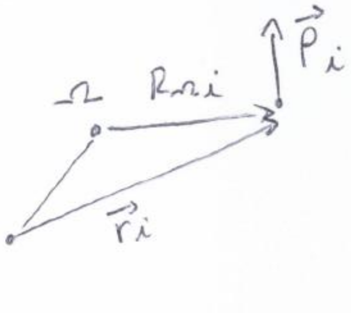
$$\frac{d^2y'}{dt^2} = -2\omega(-gt) = 2\omega gt$$

$$\frac{dy'}{dt} = \omega gt^2 \Rightarrow y'(t) = y'(0) + \frac{1}{3}\omega gt^3 \Rightarrow y'(t) = \frac{1}{3}\omega gt^3$$

positivo! il corpo cade in avanti rispetto alla torre!

$$y'(t_c) = \frac{1}{3}\omega g\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}$$

TEOREMA MOMENTO ANGOLARE PER SISTEMI DI PARTICELLE



$$\frac{dL_{\Omega i}}{dt} = -\vec{V}_{\Omega_i} \times \vec{p}_i + M_{\Omega i}$$

- $\vec{L}_\Omega = \sum_{i=1}^{N} L_{\Omega i}$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{dL_{\Omega i}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} L_{\Omega i} = \frac{d\vec{L}_\Omega}{dt}$$

- $\sum_{i=1}^{N} (-V_\Omega \times p_i) = -V_\Omega \times \sum_{i=1}^{N} p_i = -V_\Omega \times \vec{p}_{TOT}$

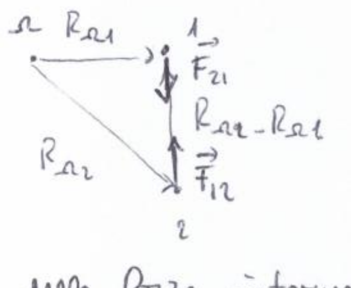
- $\vec{M}_\Omega = \vec{R}_\Omega \times \vec{F}$

$$\vec{M}_{\Omega i} = \vec{R}_{\Omega i} \times \vec{F}_i = R_{\Omega i} \times \left\{ \vec{F}_i^{(int)} + \vec{F}_i^{(ext)} \right\} = \vec{R}_{\Omega i} \times \vec{F}_i^{(int)} + \vec{R}_{\Omega i} \times \vec{F}_i^{(ext)} =$$

$$= \vec{M}_{\Omega i}^{(int)} + \vec{M}_{\Omega i}^{(ext)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{\Omega i} = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{R}_{\Omega i} \times \vec{F}_i^{(int)}\right) + \sum_{i=1}^{N} \left(R_{\Omega i} \times F_i^{(ext)}\right) = \vec{M}_\Omega^{(int)} + \vec{M}_\Omega^{(ext)}$$

$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = -\vec{V}_\Omega \times \vec{p} + \vec{M}_\Omega^{(int)} + \vec{M}_\Omega^{(ext)}$$



$$\vec{M}_\Omega = \vec{R}_{\Omega 1} \times \vec{F}_{21} + \vec{R}_{\Omega 2} \times \vec{F}_{12} =$$

$$= -R_{\Omega 1} \times \vec{F}_{12} + R_{\Omega 2} \times \vec{F}_{12} =$$

$$= (R_{\Omega 2} - R_{\Omega 1}) \times \vec{F}_{12} = 0$$

Il momento delle forze interne è uguale a 0!

$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = -\vec{V}_\Omega \times \vec{p}_{TOT} + \vec{M}_\Omega^{(ext)}$$

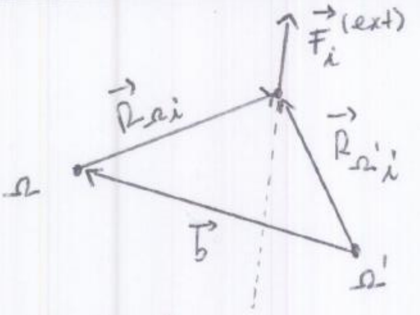
se Ω è fisso $\Rightarrow \frac{dL_\Omega}{dt} = \vec{M}_\Omega^{(ext)}$

se $\Omega = CM \Rightarrow \underset{0}{\underbrace{V_\Omega = V_{CM}}} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{M}_{CM}^{(ext)}$

Se non tutte le forze sono conservative:

$$E_m(B) - E_m(A) = W_{A \to B}^{(n.c)}$$

SISTEMI DI FORZE APPLICATI IN PUNTI DIVERSI



$$\vec{M}_\Omega^{(ext)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_{\Omega i} \times \vec{F}_i^{(ext)}$$

$$\vec{M}_{\Omega'}^{(ext)} = \sum_{i=1}^{N} R_{\Omega' i} \times \vec{F}_i^{(ext)}$$

$$\vec{R}_{\Omega'} = \vec{b} + \vec{R}_\Omega$$

$$\vec{M}_{\Omega'}^{(ext)} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{b} + \vec{R}_{\Omega i}) \times \vec{F}^{(ext)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{b} \times \vec{F}_i^{(ext)} + \overbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{R}_{\Omega i} \times \vec{F}}^{\vec{M}_\Omega^{(ext)}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{b} \times \vec{F}_i^{(ext)} + \vec{M}_\Omega^{(ext)} =$$

$$= \vec{b} \times \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(ext)} + M_\Omega^{(ext)} = \vec{b} \times \vec{R}^{(ext)} + \vec{M}_\Omega^{(ext)}$$

$$\boxed{\vec{M}_{\Omega'}^{(ext)} = \vec{b} \times \vec{R}^{(ext)} + \vec{M}_\Omega^{(ext)}}$$

in genere, cambiando polo cambia il momento.

$$R^{(ext)} = 0 \Rightarrow \vec{M}_{\Omega'}^{(ext)} = \vec{M}_\Omega^{(ext)}$$

solo se $\vec{R}^{(ext)} = 0$, il momento delle forze è indipendente dal polo

In generale, un sistema di forze applicate in punti diversi non può essere rappresentato solo dalla sua risultante.

Quindi: dato un sistema di forze applicate in punti diversi e fissato un polo per i momenti, con il che sono noti R e Mo, questo sistema può essere SEMPRE ridotto a una forza R con retta d'azione passante per il polo (il momento di R rispetto al polo è nullo) e ad una coppia di forze di momento Mo (ha risultante nulla e momento indipendente dal polo)

3) CORPO CON VOLUME

$$\begin{cases} x_{cM} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int \rho x \Delta V = \dfrac{\rho}{M}\int x \Delta V \\ y_{cM} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int \rho y \Delta V = \dfrac{\rho}{M}\int y \Delta V \\ z_{cM} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int \rho z \Delta V = \dfrac{\rho}{M}\int z \Delta V \end{cases}$$

se corpo omogeneo

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \Rightarrow \Delta m = \rho \Delta V$$

RICAPITOLAZIONE:

1) $M = \lambda L$

$$x_{cM} = \frac{\lambda}{M}\int_0^L x\,dx = \frac{1}{L}\int_0^L x\,dx$$

2) $M = \sigma S$

$$\begin{cases} x_{cM} = \dfrac{\sigma}{M}\displaystyle\int_S x\,dS = \dfrac{1}{S}\int_S x\,dS \\ y_{cM} = \dfrac{\sigma}{M}\displaystyle\int_S y\,dS = \dfrac{1}{S}\int_S y\,dS \end{cases}$$

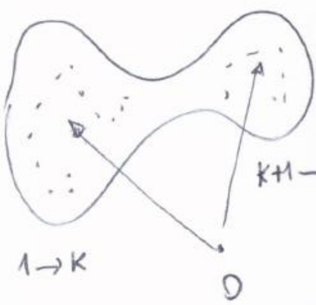
3) $M = \rho V$

$$\begin{cases} x_{cM} = \dfrac{\rho}{M}\displaystyle\int_V x\,dV = \dfrac{1}{V}\int_V x\,dV \\ y_{cM} = \dfrac{\rho}{M}\displaystyle\int_V y\,dV = \dfrac{1}{V}\int_V y\,dV \\ z_{cM} = \dfrac{\rho}{M}\displaystyle\int_V z\,dV = \dfrac{1}{V}\int_V z\,dV \end{cases}$$

Caso omogeneo.

CENTRO DI MASSA DI CORPI DIVISI IN DUE O PIÙ PARTI:

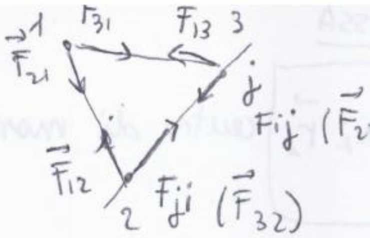
$$\vec{r}_{cM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = \frac{1}{M}\left\{\sum_{i=1}^{K} m_i \vec{r}_i + \sum_{i=K+1}^{N} m_i \vec{r}_i\right\}$$



$$\begin{cases} M_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{K} m_i \\ M_2 = \displaystyle\sum_{i=K+1}^{N} m_i \end{cases} \Rightarrow \vec{r}_{cM} = \frac{1}{M}\left\{M_1 \cdot \frac{1}{M_1}\sum_{i=1}^{K} m_i \vec{r}_i + M_2 \cdot \frac{1}{M_2}\sum_{i=K+1}^{N} m_i \vec{r}_i\right\} =$$

$$\boxed{\vec{r}_{cM} = \frac{1}{M}\left\{M_1 \vec{r}_{cM_1} + M_2 \vec{r}_{cM_2}\right\}}$$

SISTEMI DI PARTICELLE



$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{(int)} + \vec{F}_i^{(ext)}$$

$$\vec{R}^{(int)} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ji}$$

$$\vec{R}^{(int)} = \sum_{i=1}^{N} F_i^{(int)} = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji}\right) = \sum_{ij}\vec{F}_{ji}$$

quindi

$$\vec{R}^{(int)} = \vec{F}_1^{(int)} + \vec{F}_2^{(int)} + \vec{F}_3^{(int)} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = 0$$

La risultante delle forze interne è nulla per la terza legge di Newton

$$\sum_{ij}\vec{F}_{ji} = \frac{1}{2}\left\{\sum_{ij}\vec{F}_{ji} + \sum_{ji}\vec{F}_{ij}\right\} = \frac{1}{2}\sum_{ij}\left(F_{ji} + F_{ij}\right) = 0$$

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(ext)} + \vec{F}_i^{(int)}$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N}\left\{\vec{F}_i^{(ext)} + \vec{F}_i^{(int)}\right\} = \sum_{i=1}^{M}\vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{(int)} = \vec{R}^{(ext)} + \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\vec{R}^{(int)}} = \vec{R}^{(ext)}$$

La risultante delle forze che agiscono su una particella è uguale alla risultante delle forze esterne

PER UNA SINGOLA PARTICELLA

$$\begin{cases} \vec{P}_i = m\vec{v}_i \\ \vec{L}_{Ri} = \vec{R}_{Ri} \times \vec{p}_i \\ E_{Ki} = \frac{1}{2} m v_i^2 \end{cases}$$

PER PIÙ PARTICELLE

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i$$

$$\vec{L}_R = \sum_{i=1}^{M}\vec{L}_{Ri}$$

$$E_R = \sum_{i=1}^{N} E_{Ki}$$

sistemi di m_i particelle: $M_{TOT} = \sum_{i=1}^{M} m_i$

RIEPILOGO

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i$$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i = \frac{\vec{P}}{M}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\vec{P}}{M}\right\} = \frac{1}{M}\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{1}{M}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i =$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}\left\{\vec{F}_i^{(int)} + F_i^{(ext)}\right\} = \frac{1}{M}\left(\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\vec{R}^{(int)}} + \vec{R}^{(ext)}\right) = \frac{\vec{R}^{(ext)}}{M}$$

$$\vec{R}^{(ext)} = M\vec{a}_{CM} \Rightarrow \boxed{\vec{R}^{(ext)} = M\frac{dV_{CM}}{dt}}$$ 1ª eq. cardinale della dinamica dei sistemi

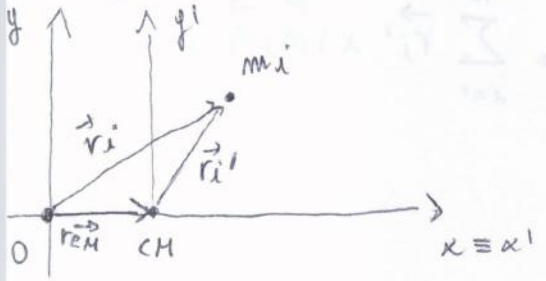
Se $\vec{R}^{(ext)} = 0 \Rightarrow V_{CM} = cost$ (MRU)

- $$\boxed{\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = -V_\Omega \times \vec{P} + \vec{M}_\Omega^{(ext)}}$$ 2ª eq. cardinale della dinamica dei sistemi

$$\begin{cases} \text{se } \Omega \text{ è fisso} \Rightarrow -\vec{V}_\Omega \times \vec{P} \equiv 0 \\ \text{se } \Omega \equiv CM \Rightarrow \vec{V}_\Omega \times \vec{P} = V_{CM} \times (MV_{CM}) = 0 \end{cases}$$

SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA

Ha origine nel centro di massa e trasla rispetto al sistema di rif. inerziale



$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i'$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r}_{CM} + \vec{r}_i') =$$

$$= \frac{1}{M}\left\{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_{CM} + \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i'\right\} =$$

$$= \frac{1}{M}\left\{\vec{r}_{CM}\sum_{i=1}^{N} m_i + \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i'\right\} = \frac{1}{M}\left\{M\vec{r}_{CM} + \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i'\right\}$$

$$\cancel{\vec{r}_{CM}} = \cancel{\vec{r}_{CM}} + \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i'$$

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i' = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i' = 0}$$

TEOREMA DI KÖNIG SULL'ENERGIA CINETICA

$$E_K = \sum_{i=1}^{n} E_{Ki} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\vec{V}_{CM} + \vec{V}_i')^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{V}_{CM}+\vec{V}_i')(\vec{V}_{CM}+\vec{V}_i') =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(V_{CM}^2 + \vec{V}_{CM}\vec{V}_i' + \vec{V}_i'\vec{V}_{CM} + V_i'^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1} m_i V_{CM}^2 + \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_{CM}\vec{V}_i' m_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} V_i'^2 m_i =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) V_{CM}^2 + \vec{V}_{CM} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i' \cdot m_i}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i'^2 =$$

$$= \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \rightarrow$ E_K rispetto al centro di massa

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + E_K'}$$

$\frac{1}{2} M V_{CM}^2$: E_K dovuta al moto del centro di massa

E_K': E_K dovuta al moto del sistema rispetto al centro di massa

FORZA CONSERVATIVA

$$W_{A\to B} = E_p(A) - E_p(B)$$

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$E_p(B) - E_p(A) = \int_A^B dE_p$$

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_A^B dE_p$$

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} + E_p = 0$$

Allora:

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} + dE_p = 0$$

$$\vec{F} = F_x\vec{u_x} + F_y\vec{u_y} + F_z\vec{u_z}$$

$$d\vec{r} = dx\,\vec{u_x} + dy\,\vec{u_y} + dz\,\vec{u_z}$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

$$G(x,y,z) \qquad dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial z}dz$$

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz$$

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz + \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz = 0$$

$$\left(F_x + \frac{\partial E_p}{\partial x}\right)dx + \left(F_y + \frac{\partial E_p}{\partial y}\right)dy + \left(F_z + \frac{\partial E_p}{\partial z}\right)dz = 0$$

dx, dy, dz L.I

$$\Rightarrow F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$$

$$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{u_x} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{u_y} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{u_z}$$

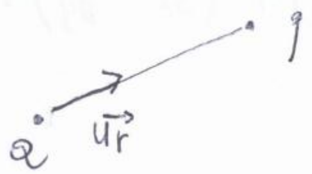
$$F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \qquad \vec{F} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u_y} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u_z}\right)E_p$$

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p} \quad \text{dove} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u_y} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u_z}$$

CONDIZIONE CONSERVATIVITÀ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

es. FORZA COULOMB



$$\vec{r} = r\,\vec{u_r} \implies \vec{u_r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{F} = k\frac{Qq}{r^2}\vec{u_r} = KQq\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{KQq}{r^3}\cdot\vec{r} = \frac{KQq}{r^3}(x\vec{u_x}+y\vec{u_y}+z\vec{u_z})$$

$$F_x = \frac{KQq}{r^3}x$$

$$F_y = \frac{KQq}{r^3}y$$

$$F_z = \frac{KQq}{r^3}z$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{KQq}{r^3}x\right) = x\frac{dG}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} = -3x\frac{KqQ}{r^4}\frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2) = \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -3\frac{xy}{r}\frac{KqQ}{r^4}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{KQq}{r^3}y\right) = y\frac{dG}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = -3y\frac{KQq}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2) = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = -3\frac{yx}{r}\frac{KqQ}{r^4}$$

$\dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x}$ e analogamente $\dfrac{\partial F_y}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial y}$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}$$

ROTORE DI UN VETTORE

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u_y} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u_z}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{u_x} + F_y\vec{u_y} + F_z\vec{u_z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$$

$f = \int M(x,y)\,dx + K(y) \rightarrow$ costanti in f. delle variabili che non devo integrare

es.

$$\vec{F} = \alpha x \vec{u_x} + \beta y^2 \vec{u_y} + \gamma \vec{u_z}$$

$$\begin{cases} F_x = \alpha x \\ F_y = \beta y^2 \\ F_z = \gamma \end{cases} \qquad \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \underline{\text{f. conservativa}}$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} = 0$$

$$F_x = \alpha x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \qquad \frac{\partial E_p}{\partial x} = -\alpha x$$

$$F_y = \beta y^2 = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E_p}{\partial y} = -\beta y^2$$

$$F_z = \gamma = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \qquad \frac{\partial E_p}{\partial z} = -\gamma$$

$$E_p = -\int \alpha x\,dx + \phi(y,z)$$

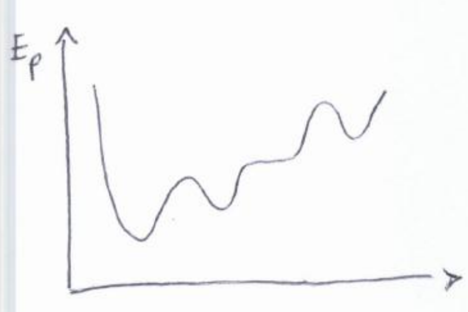
$$E_p = -\int \beta y^2 dy + \psi(x,z) \quad \Rightarrow \quad E_p = -\frac{1}{2}\alpha x^2 - \frac{\beta}{3} y^3 - \gamma z$$

$$E_p = -\int \gamma\,dz + \tau(x,y)$$

MOTO UNIDIMENSIONALE SENZA ATTRITO

$\vec{F} = F(x)\vec{u_x}$ conservativa

$E_p = E_p(x)$



- MINIMI DI $E_p \rightarrow$ ep. stabile
- MASSIMI DI $E_p \rightarrow$ ep. instabile
- E_p = COSTANTE $\rightarrow$ ep. indifferente

CORPO RIGIDO

Insieme di punti materiali in cui le distanze tra tutte le possibili coppie di punti non possono variare.

- gradi di libertà → numero di coordinate necessarie a def la posizione di un corpo

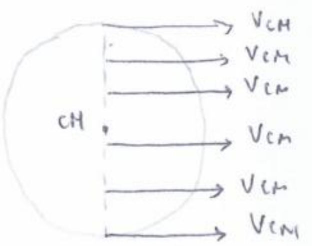
Corpo rigido → 6 gradi di libertà

- 3 COORD PER 1° PTO
- 2 COORD. PER 2° PTO
- 1 COORD. PER L'ORIENTAZIONE

MOTO TRASLAZIONE CORPO RIGIDO

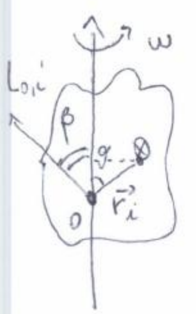
$\vec{v}_i = \vec{v} \quad \forall i$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\vec{v} = \vec{v}$$



ROTAZIONE ATTORNO A UN ASSE FISSO

Tutti i punti hanno la stessa ω e descrivono una traiettoria circolare attorno all'asse.



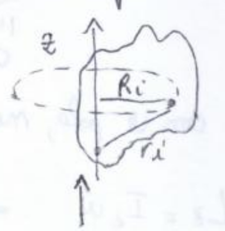
$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ velocità che entra nel foglio

$v_i = \omega r_i \sin\theta_i$

$\vec{L}_{0,i} = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = r_i \times (m_i \vec{v}_i) \qquad r_i, v_i \perp$

$L_{0,i} = r_i m_i v_i = r_i m_i \omega r_i \sin\theta_i$

$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^{n} L_{0,i} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)$$ in genere non è parallelo all'asse di rotazione

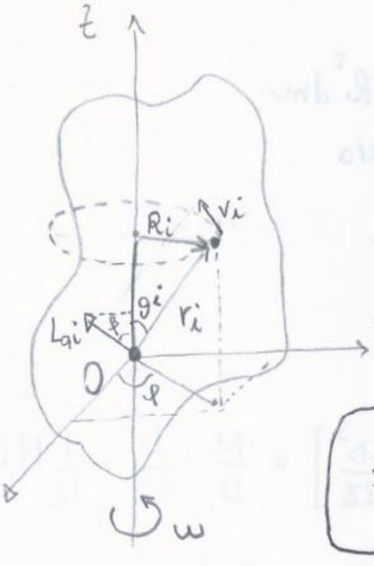


$L_{0,i\,z} = L_{0,i}\cos\beta_i = L_{0,i}\sin\theta_i$

quindi

$L_{0,i\,z} = r_i m_i \omega r_i \sin\theta_i \cdot \sin\theta_i = m_i (r_i \sin\theta_i)^2 \omega = m_i R_i^2 \omega$

$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^{(ext)}$ eq. cardinale della dinamica per corpi rigidi che ruotano attorno ad un asse.



$$v_i = \vec{\omega} \times \vec{r_i} = \omega\, r_i \sin\theta_i = \omega\, R_i$$

$$E_K = \sum_{i=1}^{n} E_{K_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} m_i \omega^2 R_i^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 \right) \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2} I_z \omega^2}$$

$$\begin{cases} I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^{(ext)} \\ E_K = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \end{cases}$$

$$W_{A \to B} = E_K(B) - E_K(A)$$

$$dW = dE_K = d\left\{ \frac{1}{2} I_z \omega^2 \right\} = \frac{1}{2} I_z \cdot 2\omega\, d\omega = I_z\, \omega\, d\omega$$

$$\frac{dW}{dt} = I_z\, \omega \frac{d\omega}{dt} = \omega\, I_z \frac{d\omega}{dt} = M^{(ext)} \omega = P$$

$$\frac{dW}{dt} = M^{(ext)} \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow \boxed{dW = M^{(ext)} d\phi}$$

$$\boxed{I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^{(ext)}}$$

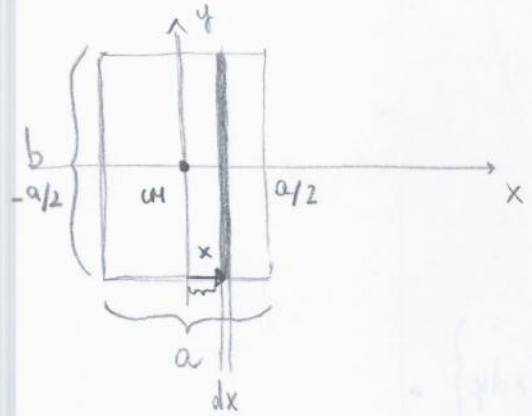
$$\boxed{E_K = \frac{1}{2} I_z \omega^2}$$

$$\boxed{dW = M^{(ext)} d\phi}$$

CALCOLO MOMENTI DI INERZIA

Momento d'inerzia lastra rettangolare:

ROTAZIONE INTORNO ALL'ASSE Y:



$$I_y = \int_{CORPO} x^2 dm$$

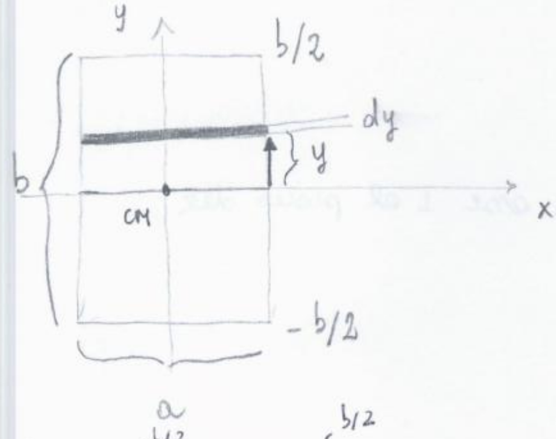
$\sigma = \dfrac{M}{S}$ costante se il corpo è omogeneo

$$dm = \sigma dS = \sigma b dx$$

$$I_y = \int_{CORPO} x^2 dm = \int_{CORPO} x^2 \sigma b dx = \sigma b \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx = \sigma b \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-a/2}^{a/2} = \sigma b \frac{a^3}{12} = \frac{M}{a\cancel{b}} \frac{\cancel{b} a^{\cancel{3}\,2}}{12} = \frac{1}{12} M a^2$$

$$\boxed{I_y = \frac{1}{12} M a^2}$$

ROTAZIONE INTORNO ALL'ASSE X:



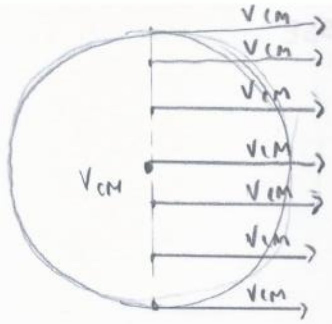
$$I_x = \int_{CORPO} y^2 dm$$

$$\sigma = \frac{M}{S}$$

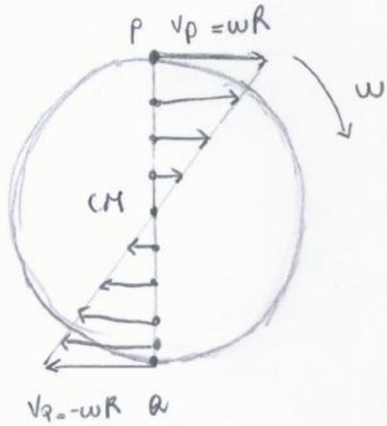
$$dm = \sigma dS = \sigma a dy$$

$$I_x = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dm = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \sigma a dy = \sigma a \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-b/2}^{b/2} = \frac{M}{\cancel{a}b} \cancel{a} \cdot \frac{b^{\cancel{3}\,2}}{12} = \frac{1}{12} M b^2$$

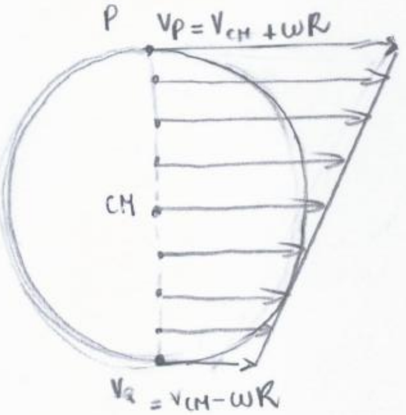
$$\boxed{I_x = \frac{1}{12} M b^2}$$



TRASLAZIONE PURA



ROTAZIONE PURA



ROTO-TRASLAZIONE

CM si sposta con V_{CM} + rotazione con ω attorno al CM.

MOTO DI ROTOLAMENTO PURO

$V_Q = 0 \Rightarrow V_{CM} - \omega R = 0$

$$\boxed{V_{CM} = \omega R}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{R}^{(ext)}$$

$$\vec{p} = M\vec{V}_{CM} \Rightarrow \boxed{M\frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \vec{R}^{(ext)}}$$

$$\boxed{I_{CM}\frac{d\omega}{dt} = M_{CM}^{(ext)}}$$

EQUAZIONI FONDAMENTALI

$$\begin{cases} M\dfrac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \vec{R}^{(ext)} \\ I_{CM}\dfrac{d\omega}{dt} = M_{CM}^{(ext)} \end{cases}$$

$F_0 > 3\mu_s Mg$

$f = f_K = \mu_K Mg$

$v_{CM} \neq \omega R$

$$\begin{cases} M \dfrac{dv_{CM}}{dt} = F_0 - \mu_K Mg \\ I_{CM} \dfrac{d\omega}{dt} = \mu_K Mg R \end{cases}$$

$$\frac{dv_{CM}}{dt} = \frac{F_0 - \mu_K Mg}{M}$$

$$v_{CM} = \frac{F_0 - \mu_K Mg}{M} t \quad \text{se a } t = 0 \rightarrow v_{CM} = 0$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\mu_K Mg R}{I_{CM}}$$

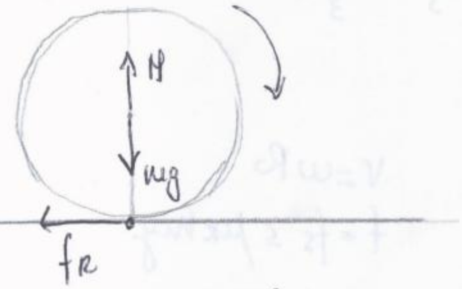
$$\omega = \frac{\mu_K Mg R}{I_{CM}} t \quad \text{se a } t = 0 \rightarrow \omega = 0$$

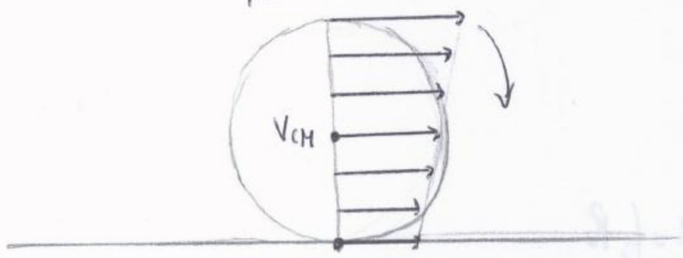
$$\begin{cases} v_{CM} = \dfrac{F_0 - \mu_K Mg}{M} t \\ \omega = \dfrac{\mu_K Mg R}{I_{CM}} t \end{cases} \quad \text{se } I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2 \quad \begin{cases} v_{CM} = \dfrac{F_0 - \mu_K Mg}{M} t \\ \omega = 2 \dfrac{\mu_K g}{R} t \end{cases}$$

$$v_Q = v_{CM} - \omega R = \frac{F_0 - \mu_K Mg}{M} t - 2 \frac{\mu_K g}{R} t = \left(\frac{F_0}{M} - 3\mu_K g \right) t$$

CASO ROTOLAMENTO CON STRISCIAMENTO

DISCO OMOGENEO





$$V_Q = V_{CM} - \omega R$$

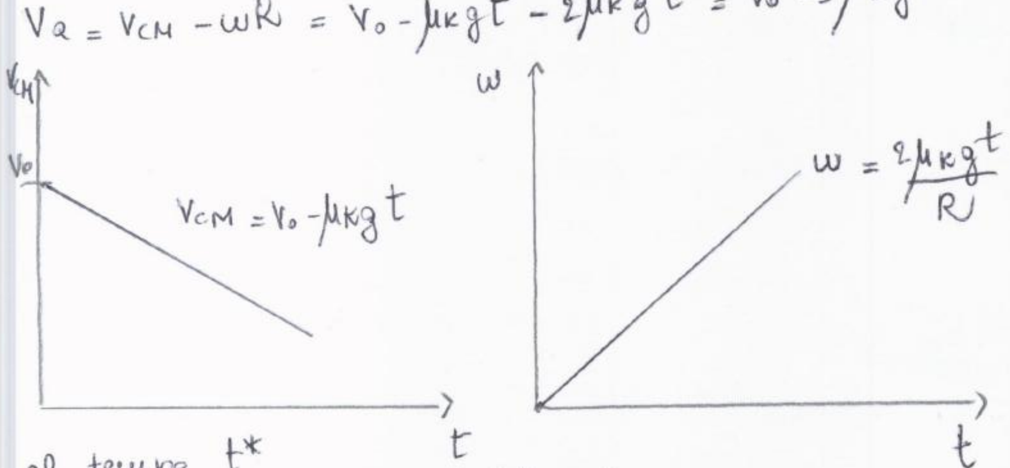
$$\begin{cases} N = mg \\ m \frac{dv_{CM}}{dt} = -f_R \\ I \frac{d\omega}{dt} = R f_R \end{cases}$$

$$f_K = \mu_K mg \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \cancel{m} \frac{dv_{CM}}{dt} = -\mu_K g \cancel{m} \\ \frac{1}{2} \cancel{m} R^{\cancel{2}} \frac{d\omega}{dt} = \cancel{R} \mu_K \cancel{m} g \end{cases}$$

$$\frac{dv_{CM}}{dt} = -\mu_K g \quad \longrightarrow \quad v_{CM}(t) = v_0 - \mu_K g t$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2\mu_K g}{R} \quad \longrightarrow \quad \omega(t) = \frac{2\mu_K g}{R} t$$

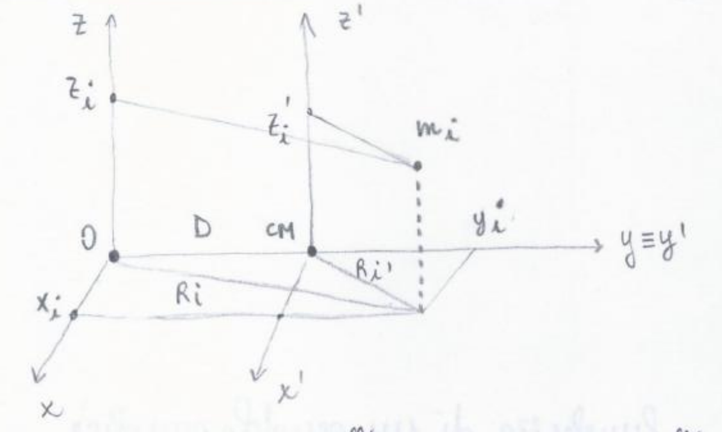
$$V_Q = v_{CM} - \omega R = v_0 - \mu_K g t - 2\mu_K g t = v_0 - 3\mu_K g t$$



al tempo t^*

$$V_Q = v_0 - 3\mu_K g t^* = 0 \quad \longrightarrow \quad t^* = \frac{V_0}{3\mu_K g}$$

TEOREMA DI HUYGENS - STEINER



$$\begin{cases} x_i = x_i' \\ y_i = y_i' + D \\ z_i = z_i' \end{cases}$$

$$I_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_{i=1}^{n} m_i \left\{ x_i'^2 + (y_i' + D)^2 \right\} =$$

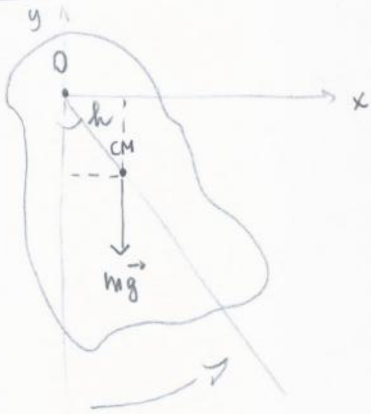
$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \left\{ x_i'^2 + y_i'^2 + 2Dy_i' + D^2 \right\} = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i'^2 + \underbrace{2D \sum_{i=1}^{n} m_i y_i'}_{= 0} + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right) D^2 =$$

$$= I_{CM} + MD^2$$

$$\boxed{I_0 = I_{CM} + MD^2}$$

N.B. D = distanza tra i due assi

PENDOLO COMPOSTO



posizione di eq. statico -> CM sulla retta verticale passante per O.

$$\begin{cases} x_{CM} = h \sin\theta \\ y_{CM} = -h\cos\theta \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}(I_0 \omega) = M_0^{(ext)}$$

$$\vec{M}_0^{(ext)} = \vec{r}_{CM} \times M\vec{g} = h(\sin\theta\, \vec{u}_x - \cos\theta\, \vec{u}_y) \times (-Mg\vec{u}_y) = -Mgh\sin\theta\, \vec{u}_z$$

$$I_0 \frac{d\omega}{dt} = -Mgh\sin\theta$$

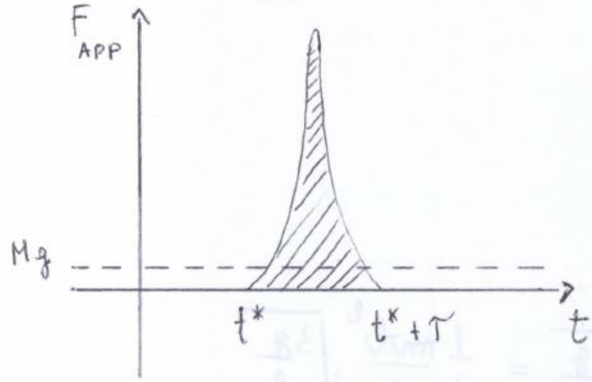
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Mgh}{I_0}\sin\theta = 0}$$

se θ è piccolo $\Rightarrow \sin\theta \sim \theta$

FENONENI DI URTO

$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = -\vec{v}_\Omega \times \vec{p} + \vec{M}_\Omega^{(ext)}$$

se Ω è fermo $\Rightarrow \dfrac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \vec{M}_\Omega^{(ext)}$

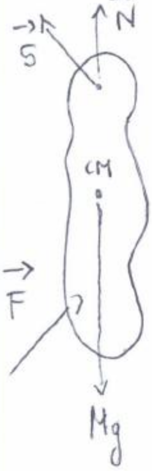


$$J_{Mg} = \int_{t^*}^{t^*+\tau} Mg\, dt = Mg\tau$$

$\rightarrow$ l'impulso delle forza peso è trascurabile rispetto a quello delle forza applicata

NEI FENONENI D'URTO SI TRASCURANO LE FORZE COSTANTI

$$J_{APP} = \int_{t^*}^{t^*+\tau} F_{APP}\, dt$$

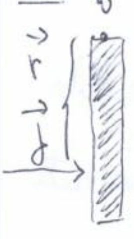


$$d\vec{L}_\Omega = M_\Omega^{(ext)}\, dt$$

$$\Delta\vec{L}_\Omega = \int_{t^*}^{t^*+\tau} M_\Omega^{(ext)}\, dt = \int_{t^*}^{t^*+\tau} \vec{r} \times \vec{F}_{APP} = \vec{r} \times \int_{t^*}^{t^*+\tau} \vec{F}_{APP}\, dt = \vec{r} \times \vec{J}$$

$$\boxed{\Delta\vec{L}_\Omega = \vec{r} \times \vec{J}}$$

es.

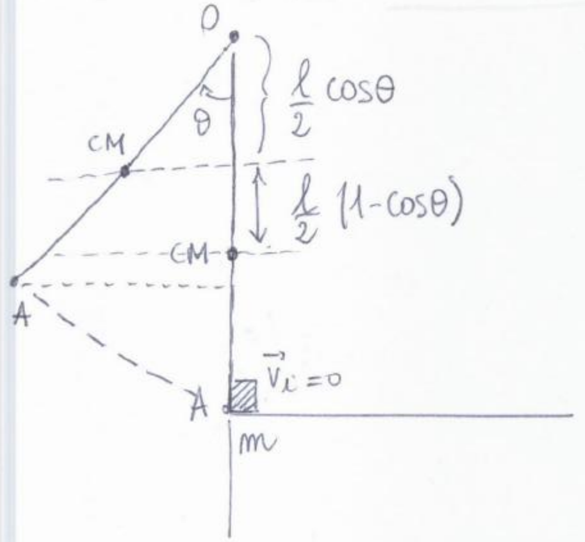


Quanto vale J affinché la sbarra si sposti in posizione orizzontale?

$$\Delta L_0 = L_0(\text{dopo}) - L_0(\text{prima}) = rJ$$

$$I_0 \omega_0 = rJ \Rightarrow \omega_0 = \frac{rJ}{I_0}$$

ESEMPIO DI URTO TRA CORPO RIGIDO E PUNTO MATERIALE



Il pendolo parte da fermo e urta il corpo puntiforme in modo COMPLETAMENTE ANELASTICO.

Che succede subito dopo l'urto?

Velocità del punto A al momento dell'urto:

Cons. dell'energia meccanica:

$$Mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$Mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}Ml^2 + Ml^2\right]\omega^2$$

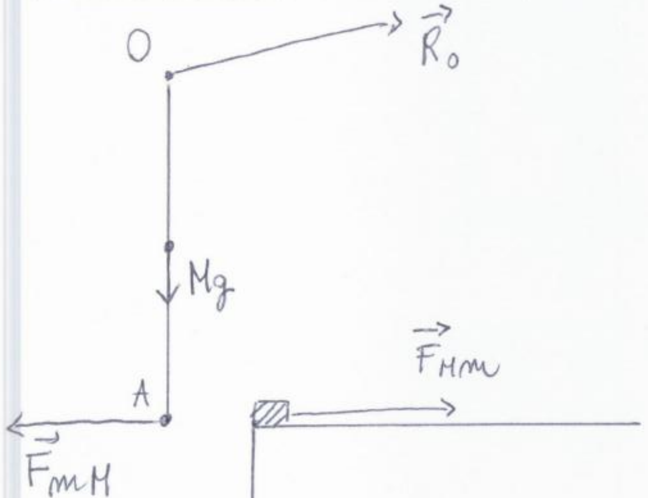
$$Mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta) = \frac{2}{3}Ml^2\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\theta)}$$ velocità angolare asta all'inizio dell'urto

velocità del punto A:

$$V_A = \omega l = \sqrt{3gl(1-\cos\theta)}$$

DIAGRAMMA CORPO LIBERO (al momento dell'urto)



$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(ext)} = \vec{R}_0 \text{ (impulsiva!)}$$

La quantità di moto totale NON si conserva.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_0^{(ext)} = 0$$ si conserva il momento angolare rispetto al polo O.

$$L_{0i} = L_{0f}$$

$$I_z\omega_i = I_z\omega_f + ml^2\omega_f$$

URTI TRA PARTICELLE LIBERE

(I vincoli non vengono eccitati dall'urto)

- In un urto si conserva la QUANTITÁ DI MOTO TOTALE se:

1) $\vec{R}^{(ext)} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$ e $\vec{p}$ = costante

2) Le forze esterne non sono impulsive:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(ext)} \longrightarrow d\vec{p} = \vec{R}^{(ext)} dt$$

$$\vec{p}(t_f) - \vec{p}(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} \vec{R}^{(ext)} dt = \vec{J}$$

se $t_i \simeq t_f$

$$\vec{p}(t_f) - \vec{p}(t_i) = \langle \vec{R}^{(ext)} \rangle (t_f - t_i) \simeq 0$$

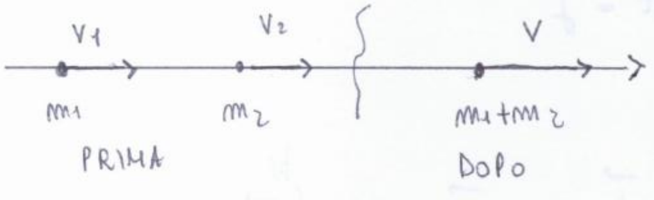
$$\vec{p}(t_f) = \vec{p}(t_i)$$

In questi casi si conserva la <u>QUANTITÁ DI MOTO TOTALE</u> mentre <u>VARIANO</u> le quantità di moto di ciascun punto materiale, per effetto dell'impulso della forza di interazione.

$$m_1 v_{1f} - m_1 v_{1i} = \vec{J}_{2,1} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{2,1} dt$$

$$m_2 v_{2f} - m_2 v_{2i} = \vec{J}_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{1,2} dt$$

URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO



$$p(t_i) = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$p(t_f) = (m_1 + m_2) V$$

$$p(i) = p(f)$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V \quad e \quad \boxed{V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}}$$ velocità particella dopo l'urto

$$E_K(i) = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$E_K(f) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V^2$$

$$\Delta E_k = E_k(f) - E_k(i) =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}m_2 v_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cancel{(m_1+m_2)} \cdot \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}} - m_1 v_1^2 - m_2 v_2^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\cancel{m_1^2 v_1^2} + \cancel{m_2^2 v_2^2} + 2m_1 m_2 v_1 v_2 - \cancel{m_1^2 v_1^2} - m_1 m_2 v_1^2 - m_1 m_2 v_2^2 - \cancel{m_2^2 v_2^2}}{m_1 + m_2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 m_2 \left[\frac{2v_1 v_2 - v_1^2 - v_2^2}{m_1+m_2}\right] = -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(v_1 - v_2)^2 = \boxed{-\frac{1}{2}\mu(v_1 - v_2)^2}$$

In un urto ANELASTICO la variazione di E_k è sempre negativa.

Tali considerazioni valgono anche nel caso bidimensionale:

$$\vec{V} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

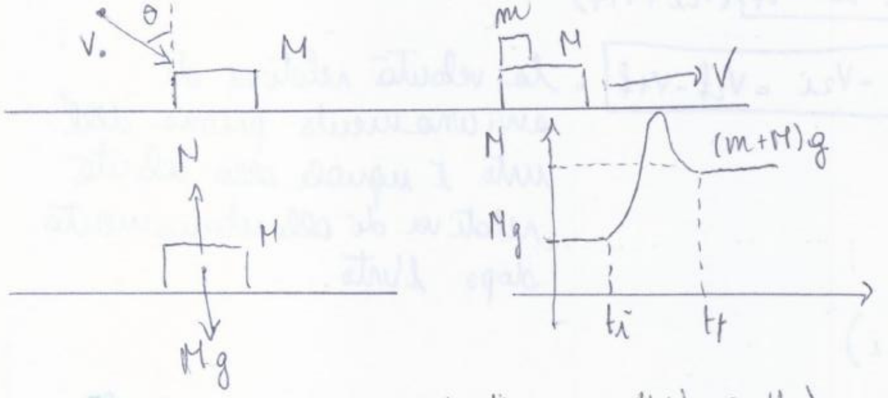
$$\Delta E_k = -\frac{1}{2}\mu(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2$$

N.B

L'urto si può studiare anche nel sistema di riferimento del CM:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{V}_{CM} + \vec{v}_1' \\ \vec{v}_2 = \vec{V}_{CM} + \vec{v}_2' \end{cases}$$

ESEMPIO VINCOLO ECCITATO DALL'URTO



$$\frac{dp_x}{dt} = R^{(ext)} = 0 \Rightarrow p_x = \text{costante} \quad p_x(t_i) = p_x(t_f)$$

$$m v_0 \sin\theta = (m+M)V \rightarrow \boxed{V = \frac{m}{m+M} v_0 \sin\theta}$$

Si conserva solo la quantità di moto orizzontale

URTI DI SECONDA SPECIE (esplosioni)

In un urto completamente anelastico tra particelle libere si conserva la quantità di moto totale

$$\boxed{m\vec{v}_i = m\vec{v}_f + M\vec{v}_f = (m+M)\vec{v}_f}$$

supp. che la particella 2 sia ferma prima dell'urto.

• q, il fattore di qualità, indica che la variazione di E_K è MASSIMA

$$\boxed{q = E_{Ki} - E_{Kf}}$$

Invertiamo la freccia del tempo:

$$\boxed{(m+M)\vec{v}_i = m\vec{v}_f}$$

l'equazione descrive una situazione in cui un corpo di massa $m+M$ che procede con $\vec{v}_i$ si spezza in due parti di cui una si ferma subito, mentre l'altra procede con maggiore velocità v_f.

$$v_{fx} = \frac{m+M}{m} v_{ix} = \left(1+\frac{M}{m}\right) v_{ix} > v_{ix}$$

L'E_K aumenta, quindi $q = q_{MAX} < 0$

$$\frac{1}{2}(m+M)v_i^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 + q_{MAX}$$

$$v_f = \frac{m+M}{m} v_i$$

$$q_{MAX} = E_{Ki} - E_{Kf} = \frac{1}{2}(m+M)v_i^2 - \frac{1}{2} m \left(\frac{m+M}{m}\right)^2 v_i^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(m+M)v_i^2 - \frac{1}{2m}(m+M)^2 v_i^2 =$$

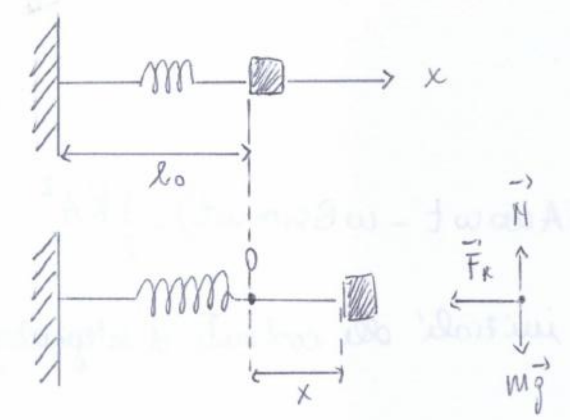
$$= \frac{1}{2}(m+M)v_i^2 \left[1 - \frac{m+M}{m}\right] = E_{Ki}\left(-\frac{M}{m}\right) = -E_{Ki}\frac{M}{m}$$

$$q_{MAX} = E_{Ki} - E_{Kf} = -E_{Ki}\frac{M}{m}$$

$$\boxed{\Delta E_K = -q_{MAX} = E_{Ki}\frac{M}{m}}$$

Prof. STRIGAZZI

OSCILLAZIONI



$\vec{F} = m\vec{a}$

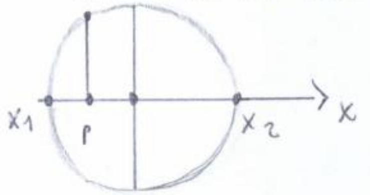
$F_{kx} = -Kx$

$-Kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \longrightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0}$ eq. differenziale dell'oscillatore armonico semplice

$\frac{K}{m} = \omega^2 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, dove ω^2 = pulsazione

a ← $\omega \equiv$ velocità angolare del moto circolare uniforme associato

PULSAZIONE PROPRIA



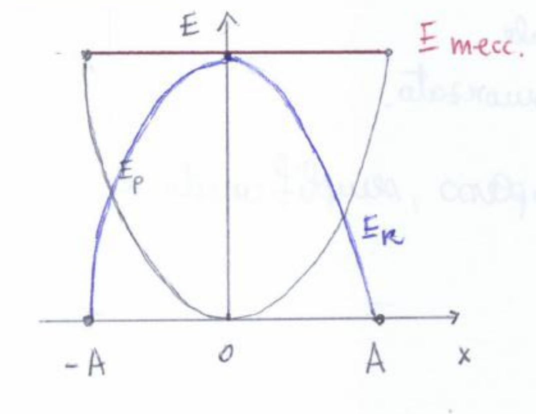
Come si è visto in cinematica:

$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$

$x(t) = B\cos(\omega t + \psi)$ $\Rightarrow$ descrizione equivalente del moto armonico semplice

$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$

ENERGIA OSCILLATORE ARMONICO



A: $E_K = 0$

$E_p = \frac{1}{2}KA^2$

O: $E_K = \frac{1}{2}mv_0^2$

$E_p = 0$

Per la conservazione dell'E mecc: $E = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$

$x = x_0 e^{\alpha t}$

$\frac{dx}{dt} = \alpha x_0 e^{\alpha t}$ $\Rightarrow$ sostituisco nell' eq. differenziale: $x_0 \alpha^2 e^{\alpha t} + 2\gamma x_0 \alpha e^{\alpha t} + \omega_0^2 x_0 e^{\alpha t} = 0$

$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 x_0 e^{\alpha t}$

$$\boxed{\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0}$$

equazione caratteristica associata

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

TRE CASI:

- $\gamma^2 > \omega_0^2$ SMORZAMENTO FORTE
- $\gamma^2 = \omega_0^2$ SMORZAMENTO CRITICO
- $\gamma^2 < \omega_0^2$ SMORZAMENTO DEBOLE

SMORZAMENTO FORTE E SMORZAMENTO DEBOLE

$\gamma^2 > \omega_0^2 \Rightarrow$ due soluzioni reali

$x_1 = x_0 e^{[-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}]t}$

$x_2 = x_0 e^{[-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}]t}$

$\Rightarrow$ $\omega_0'^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ PSEUDOPULSAZIONE

$\omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-(\omega_0^2 - \gamma^2)} = i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = i\omega_0'$

Quindi:

$x = Ax_1 + Bx_2$

$x(t) = e^{-\gamma t}\left(\underbrace{Ax_0}\, e^{-i\omega_0' t} + \underbrace{Bx_0}\, e^{i\omega_0' t}\right)$

$$\boxed{x(t) = \underbrace{e^{-\gamma t}}_{\text{fattore smorzante}} \underbrace{\left(c_1 e^{-i\omega_0' t} + c_2 e^{i\omega_0' t}\right)}_{\text{moto armonico semplice di pulsazione } \omega_0'}}$$

SOLUZIONE GENERALE

RICORDA!
Pol. caratteristico
$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$
se
$\Delta < 0 \Rightarrow \alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$

$y(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t)$
$= e^{\alpha t}(c_1\cos(\beta t) + c_2\sin(\beta t))$

In questo caso:
$x_1 = -\gamma + \omega_0' i$
$x_2 = -\gamma - \omega_0' i$

se ω_0' è REALE POSITIVO

$\omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \Rightarrow \omega_0^2 > \gamma^2$ SMORZAMENTO DEBOLE

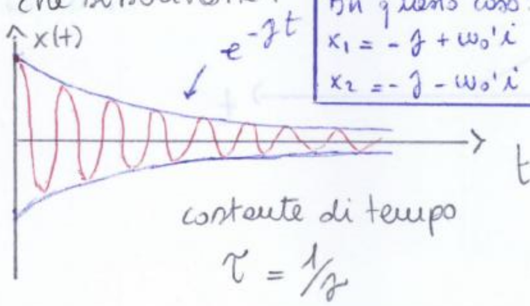
Quindi

$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = i\omega_0'$ ha $\Delta < 0$ e soluzioni che si scrivono:

$$\boxed{x(t) = e^{-\gamma t}(a\cos\omega_0' t + b\sin\omega_0' t)}$$

che si scrive anche:

$$\boxed{x(t) = A_0 e^{-\gamma t}(\sin\omega_0' t + \phi)}$$

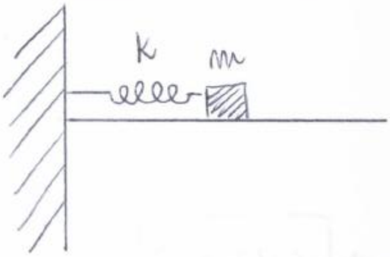


costante di tempo
$\tau = 1/\gamma$

OSCILLAZIONI E ONDE

Prof. Barbero

MOTO ARMONICO SEMPLICE



$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0 \qquad \omega_0^2 = \frac{K}{m}$$ con ω_0 freq. propria del sistema

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$$

la soluzione dell'eq. differenziale è:

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$v(t) = \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

Energia totale associata:

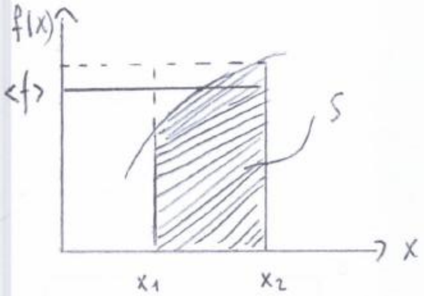
$$E_p = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}KA^2\sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t + \phi) = \frac{1}{2}mA^2\frac{K}{m}\cos^2(\omega_0 t + \phi) = \frac{1}{2}KA^2\cos^2(\omega_0 t + \phi)$$

$$E = E_K + E_p = \frac{1}{2}KA^2\sin^2(\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{2}KA^2\cos^2(\omega_0 t + \phi) = \frac{1}{2}KA^2$$

$\boxed{E_{TOT} = \frac{1}{2}KA^2}$ l'energia totale rimane costante dato che non ci sono dissipazioni

Calcoliamo i valori medi delle grandezze precedenti:



$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Data una funzione f, il VALOR MEDIO non è altro che:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

nel caso di funzioni PERIODICHE, $f(t+T) = f(t)$ con $T = \frac{2\pi}{\omega}$, il valor medio viene valutato su un periodo:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

- $$\langle x \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T A\sin(\omega_0 t + \phi)dt = \frac{A}{T}\int_0^T \sin(\omega_0 t + \phi)dt$$

$$u = \omega_0 t + \phi \rightarrow du = \omega_0 dt \rightarrow dt = \frac{du}{\omega_0}$$

$t = 0 \rightarrow u = \phi$

$t = T \rightarrow u = 2\pi + \phi$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{\omega_0 T}\int_\phi^{2\pi+\phi} \sin u\, du = \frac{1}{\frac{2\pi}{T}\cdot T}\int_\phi^{2\pi+\phi} \sin u\, du = \frac{1}{2\pi}\left[-\cos u\right]_\phi^{2\pi+\phi} = 0 \implies \boxed{\langle x \rangle = 0}$$

MOTO ARMONICO SMORZATO DA UNA FORZA VISCOSA - BARBERO

$$f = -\lambda v$$

$$ma = -Kx - \lambda v$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + Kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{K}{m}x = 0 \qquad \frac{K}{m} = \omega_0^2 \qquad \gamma = \frac{\lambda}{2m}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$ eq. differenziale del moto armonico smorzato

$$x = ce^{\alpha t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha c e^{\alpha t} \qquad \Longrightarrow \qquad c\{\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2\}e^{\alpha t} = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 c e^{\alpha t}$$

$$\boxed{\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0}$$ eq. caratteristica

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

- se $\gamma > \omega_0$ → due soluzioni reali negative (SMORZAMENTO FORTE)

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < 0 \\ \alpha_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < 0 \end{cases}$$

- se $\gamma < \omega_0$ → SMORZAMENTO DEBOLE caso interessante!

$$\alpha_1 = -\gamma + i\omega \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad \text{PSEUDOPULSAZIONE}$$

$$\alpha_2 = -\gamma - i\omega$$

$$x(t) = c_1 e^{-\gamma t} e^{i\omega t} + c_2 e^{-\gamma t} e^{-i\omega t} = e^{-\gamma t}(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t})$$

$$\bar{x}(t) = e^{-\gamma t}(\bar{c}_1 e^{-i\omega t} + \bar{c}_2 e^{i\omega t})$$

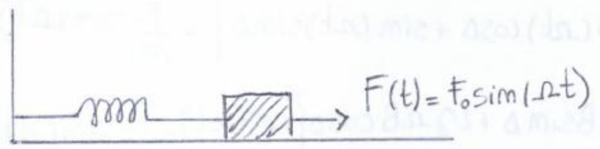
Dato che x è **REALE**
$x(t) = \bar{x}(t)$

$$c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} = \bar{c}_1 e^{-i\omega t} + \bar{c}_2 e^{i\omega t}$$

$$(c_1 - \bar{c}_2)e^{i\omega t} + (c_2 - \bar{c}_1)e^{-i\omega t} = 0$$

OSCILLATORE ARMONICO FORZATO

Se è presente attrito viscoso, si ha un'oscillazione smorzata che si esaurisce in un certo tempo.
Per avere un moto persistente, occorre esercitare una forza esterna.



Allora:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}$$

con $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsazione naturale del sistema

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ pseudopulsazione

Ω = pulsazione del motore

$$\boxed{F(t) = F_0 \sin(\Omega t)}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin(\Omega t)}$$

eq. diff. del 2° ordine lineare e completa

La soluzione generale dell'eq. è data dalla somma della sol. omogenea e di una soluzione particolare.

$$\frac{d^2x_p}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx_p}{dt} + \omega_0^2 x_p = \frac{F}{m}$$

$$\frac{d^2x_{OM}}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx_{OM}}{dt} + \omega_0^2 x_{OM} = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_p + x_{OM}) + 2\gamma\frac{d}{dt}(x_p + x_{OM}) + \omega_0^2(x_p + x_{OM}) = \frac{F}{m}$$

Quindi:

$$x(t) = x_{OM}(t) + x_p(t)$$

La soluzione dell'omogenea l'abbiamo già calcolata $\Rightarrow$ $\underline{x_{OM} = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t + \phi)}$
e sappiamo che dopo un certo tempo tende a zero.

Quindi:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_p(t)$$

La soluzione particolare, invece, è sempre dello stesso tipo della forza eccitatrice, quindi ci aspettiamo che sia:

$$\boxed{x_p = B\sin(\Omega t - \Delta)}$$

(Metto il segno negativo perché il sistema risponde dopo essere stato eccitato)

Allora:

$$\frac{dx_p}{dt} = \Omega B\cos(\Omega t - \Delta)$$

$$\frac{d^2x_p}{dt^2} = -\Omega^2 B\sin(\Omega t - \Delta)$$

La fase e l'ampiezza della soluzione particolare NON DIPENDONO dalle condizioni iniziali.

Dalla prima equazione di (1):

$$\boxed{B = \frac{\frac{F_0}{m}}{(\omega_0^2-\Omega^2)\cos\Delta + 2\gamma\Omega\sin\Delta}}$$

$$B = \frac{\frac{F_0}{m}}{(\omega_0^2-\Omega^2)\cdot\frac{(\omega_0^2-\Omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\gamma\Omega)^2}} + (2\gamma\Omega)\cdot\frac{2\gamma\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\gamma\Omega)^2}}} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\frac{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\gamma\Omega)^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\gamma\Omega)^2}}} \Rightarrow$$

$$\boxed{B = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\gamma\Omega)^2}}}$$

l'ampiezza della soluzione particolare dipende da Ω.

- se $\Omega \to 0 \Rightarrow B \to \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{K}$ poiché $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$
- se $\Omega \to \infty$, cioè $\Omega \gg \omega_0 \Rightarrow B \to \frac{F_0}{m\Omega^2} \to 0$

Ricapitolando:

Fase e ampiezza della soluzione particolare dipendono dalla Ω della f. esterna.

- $\Omega \to 0$, cioè $\Omega \ll \omega_0 \Rightarrow B = \frac{F_0}{K}$, $\operatorname{tg}\Delta \to 0 \Rightarrow \Delta \to 0$

$$x_p(t) = \frac{F_0}{K}\sin\Omega t$$ IN FASE CON LA FORZA ESTERNA

- $\Omega \to 0$, cioè $\Omega \gg \omega_0 \Rightarrow B \to 0$, $\Delta \to \pi$

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m\Omega^2}\sin(\Omega t + \pi) \to 0$$

Come varia l'ampiezza in funzione di Ω?

Ponendo $B = \frac{F_0/m}{\sqrt{D(\Omega)}}$ dove $D(\Omega) = (\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\gamma\Omega)^2$

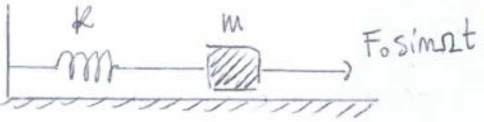
basta studiare la funzione $D(\Omega)$.

$$\frac{dD}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega}\left\{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\gamma\Omega)^2\right\} = -4\Omega\,(\omega_0^2-\Omega^2-2\gamma^2)$$

$$\frac{d^2D}{d\Omega^2} = -4(\omega_0^2-2\gamma^2)+12\Omega^2$$

$$\frac{dD}{d\Omega} = 0 \Rightarrow -4\Omega(\omega_0^2-\Omega^2-2\gamma^2) = 0 \begin{cases} \Omega = 0 \\ \Omega = \sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2} \end{cases}$$ per $\omega_0^2 > 2\gamma^2$, cioè per $\gamma < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$

RISONANZA IN ENERGIA



$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{V} \implies P = F v$$

$V = \frac{dx}{dt} = \frac{dx_{OM}}{dt} + \frac{dx_P}{dt}$ che, per t GRANDE $\sim \frac{dx_P}{dt}$

$V \to \frac{dx_P}{dt}$

$P = F_0 \sin(\Omega t) \cdot \frac{dx_P}{dt}$ con $x_P = B\sin(\Omega t - \Delta)$

$$\frac{dx_P}{dt} = -\Omega B \cos(\Omega t - \Delta)$$

Quindi:

$\boxed{P = F_0 \sin(\Omega t) \cdot \Omega B \cos(\Omega t - \Delta)}$ potenza trasferita dal motore al sistema

$$P = \Omega B F_0 \sin(\Omega t)\left\{\cos(\Omega t)\cos(\Delta) + \sin(\Omega t)\sin(\Delta)\right\} =$$

$$= \Omega B F_0 \left[\underline{\sin(\Omega t)\cos(\Omega t)}\cos\Delta + \sin^2(\Omega t)\sin\Delta\right] =$$

$$P = \frac{1}{2}\Omega B F_0 \cos\Delta \sin(2\Omega t) + \Omega B F_0 \sin\Delta \sin^2(\Omega t)$$

Definiamo:

$\boxed{\mathcal{P}_R = \frac{1}{2}\Omega B F_0 \cos\Delta \sin(2\Omega t)}$ potenza REATTIVA o potenza PALLEGGIATA

A volte è > 0 (passa dal motore al sistema), a volte è < 0 (passa dal sistema al motore)

$\boxed{\mathcal{P}_D = \Omega B F_0 \sin\Delta \sin^2(\Omega t)}$ potenza DISSIPATA

Va sempre dal motore al sistema

Ricordando la def. di valor medio di una funzione: $\langle f \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2}\Omega B F_0 \cos\Delta \underbrace{\langle \sin(2\Omega t)\rangle}_{=0} + \Omega F_0 B \sin\Delta \underbrace{\langle \sin^2(\Omega t)\rangle}_{=\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2}\Omega B F_0 \sin\Delta}$$

Ma, poiché $B = B(\Omega)$, $\Delta = \Delta(\Omega) \implies \langle \mathcal{P} \rangle = \langle \mathcal{P} \rangle(\Omega)$

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2}\Omega F_0 \cdot \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}} \cdot \frac{2\gamma\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}$$

SOMMA DI MOTI ARMONICI SEMPLICI CON LA STESSA PULSAZIONE E SULLO STESSO ASSE

1° oscillatore armonico: $\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = 0 \rightarrow x_1 = A_1 \sin(\omega t + \phi_1)$

2° oscillatore armonico: $\frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega^2 x_2 = 0 \rightarrow x_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$

Sommando le due equazioni si ottiene:

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) + \omega^2 (x_1 + x_2) = 0 \qquad \text{ponendo } x = x_1 + x_2$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0} \Rightarrow x = A\sin(\omega t + \phi)$$

la sovrapposizione di due moti armonici semplici con la stessa pulsazione origina ancora un moto armonico semplice con la stessa pulsazione.

Quindi:

$$A\sin(\omega t + \phi) = A_1 \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

$$A\{\sin(\omega t)\cos\phi + \cos(\omega t)\sin\phi\} = A_1\{\sin(\omega t)\cos\phi_1 + \cos(\omega t)\sin\phi_1\} + A_2\{\sin(\omega t)\cos\phi_2 + \cos(\omega t)\sin\phi_2\}$$

$$A\cos\phi\sin(\omega t) + A\sin\phi\cos(\omega t) = \{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2\}\sin(\omega t) + \{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2\}\cos(\omega t)$$

Poiché $\sin(x)$ e $\cos(x)$ sono linearmente indipendenti:

$$\begin{cases} A\cos\phi = A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2 \\ A\sin\phi = A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2 \end{cases}$$

Facendo il rapporto membro a membro:

$$\boxed{\operatorname{tg}\phi = \frac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2}}$$

la fase del moto armonico risultante dipende dalle fasi e le ampiezze dei moti armonici componenti.

Inoltre, elevando al quadrato:

$$\left.\begin{aligned} A^2\cos^2\phi &= A_1^2\cos^2\phi_1 + A_2^2\cos^2\phi_2 + 2A_1A_2\cos\phi_1\cos\phi_2 \\ A^2\sin^2\phi &= A_1^2\sin^2\phi_1 + A_2^2\sin^2\phi_2 + 2A_1A_2\sin\phi_1\sin\phi_2 \end{aligned}\right\} +$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\underbrace{(\sin\phi_1\sin\phi_2 + \cos\phi_1\cos\phi_2)}_{\cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

Quindi:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\sin\phi_1\sin\phi_2 + \cos\phi_1\cos\phi_2)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

L'ampiezza del moto armonico risultante dipende dalla differenza di fase dei moti armonici costituenti.

- Se $\phi_1 - \phi_2 = 2n\pi \Rightarrow A_M = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2$ INTERFERENZA COSTRUTTIVA
- Se $\phi_1 - \phi_2 = (2n+1)\pi \Rightarrow A_m = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = |A_1 - A_2|$ INTERFERENZA DISTRUTTIVA

Consideriamo il caso in cui $A_1 = A_2 = A$ e $\phi_1 = \phi_2 = 0$

$x_1 = A \sin(\omega_1 t)$

$x_2 = A \sin(\omega_2 t)$

$x = x_1 + x_2 = A[\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)]$

APPLICHIAMO LE FORMULE DI PROSTAFERESI $\sin(\alpha + \beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$$x(t) = \underbrace{2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)}_{\text{AMPIEZZA CHE VARIA CON IL TEMPO!}} \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$$

Poniamo $\begin{cases} \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \Omega \\ \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega \end{cases} \Rightarrow \boxed{x(t) = 2A\cos(\Omega t)\sin(\omega t)}$

La sovrapposizione di due moti armonici semplici con diverse pulsazioni dà origine a un moto che è MODULATO IN AMPIEZZA. Infatti, l'ultima relazione può essere scritta come:

$\boxed{x(t) = a(t)\sin(\omega t)}$

Nei casi pratici, si ha che $\omega_1 = \omega + \varepsilon$ con $\varepsilon \ll \omega$

$\omega_2 = \omega - \varepsilon$

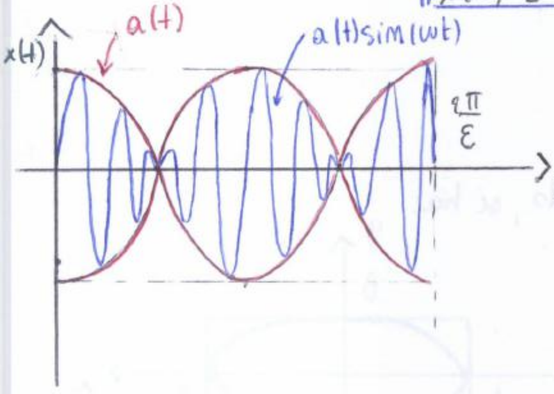
Quindi:

$\Omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \varepsilon$

$\omega = \omega$

$\Rightarrow \boxed{x(t) = 2A\cos(\varepsilon t)\sin(\omega t)}$, $T_A = \frac{2\pi}{\varepsilon}$

$x(t) = a(t)\sin(\omega t)$



MODULAZIONE IN AMPIEZZA

Quindi:

$x(t) = 2A\cos(\varepsilon t)\sin(\omega t)$

$a(t) = 2A\cos(\varepsilon t) \Rightarrow -2A\cos(\varepsilon t) < a < 2A\cos(\varepsilon t)$

Qual è il luogo dei punti descritto dalla particella se ϕ è generico?

$$\begin{cases} x = A\sin(\omega t) \\ y = B\sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$

Dalla prima equazione: $\sin(\omega t) = \frac{x}{A}$ $\qquad \cos(\omega t) = \pm\sqrt{1-\sin^2(\omega t)} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}$

Dalla seconda equazione: $\sin(\omega t+\phi) = \frac{y}{B}$

Quindi:

$$\frac{y}{B} = \sin(\omega t+\phi) = \sin(\omega t)\cos\phi + \cos(\omega t)\sin\phi$$

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A}\cos\phi \pm \sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}\sin\phi \longrightarrow \left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A}\cos\phi\right) = \left(\pm\sin\phi\sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}\right)$$

Elevo al quadrato entrambi i membri:

$$\left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A}\cos\phi\right)^2 = \left(\pm\sin\phi\sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}\right)^2$$

$$\left(\frac{y}{B}\right)^2 + \left(\frac{x}{A}\right)^2\cos^2\phi - 2\frac{x}{A}\frac{y}{B}\cos\phi = \left[1-\left(\frac{x}{A}\right)^2\right]\sin^2\phi$$

$$\left(\frac{y}{B}\right)^2 + \left(\frac{x}{A}\right)^2\cos^2\phi + \left(\frac{x}{A}\right)^2\sin^2\phi - 2\frac{x}{A}\frac{y}{B}\cos\phi = \sin^2\phi$$

Quindi:

$$\boxed{\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 - 2\frac{x}{A}\frac{y}{B}\cos\phi = \sin^2\phi}$$

La relazione trovata rappresenta un' ELLISSE NON RIFERITA AGLI ASSI e contiene tutti i casi già studiati.

- Se $\phi = 0$, $\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 - 2\frac{x}{A}\frac{y}{B} = 0$

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \Longrightarrow y = \frac{B}{A}x$$

- se $\phi = \pi$, $\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 + 2\frac{x}{A}\frac{y}{B} = 0 \longrightarrow \left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \Longrightarrow y = -\frac{B}{A}x$

- se $\phi = \frac{\pi}{2}$, $\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1$

Determiniamo come è percorsa l'ellisse:

Per $t=0$: $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = B\sin\phi \end{cases}$

Per $t = \tau$ (τ tale che $\omega\tau \ll 1$): $\begin{cases} x(\tau) = A\sin(\omega\tau) \simeq A\omega\tau > 0 \\ y(\tau) = B\sin(\omega\tau+\phi) \simeq B\sin\phi = y(0) \end{cases}$

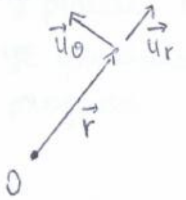
Al tempo τ il corpo si è spostato verso DESTRA, quindi possiamo avere due casi:

- Se $y(0) > 0$, cioè $B\sin\phi > 0$, cioè $0 < \phi < \pi$ $\Rightarrow$ ELLISSE PERCORSA IN SENSO ORARIO
- Se $y(0) < 0$, cioè se $\pi < \phi < 2\pi$ $\Rightarrow$ ELLISSE PERCORSA IN SENSO ANTIORARIO

GRAVITAZIONE UNIVERSALE

La gravità è una FORZA CENTRALE.

Vediamo alcune proprietà di tali forze:



$\vec F = f(r)\,\vec u_r$ se $f(r) > 0$ REPULSIVA

$f(r) < 0$ ATTRATTIVA

$$\frac{d\vec L_0}{dt} = \vec M_0$$

$$\vec M_0 = \vec r \times \vec F = \vec r \times \left(f(r)\,\vec u_r\right) = 0$$

quindi:

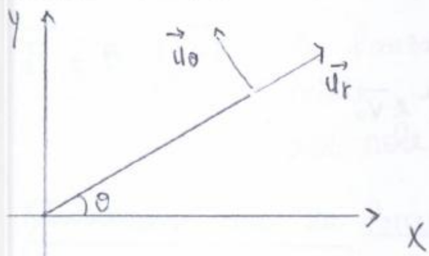
$$\frac{d\vec L_0}{dt} = 0 \Rightarrow \vec L_0 = \text{costante}$$

$$\vec L_0(0) = \vec r_0 \times (m\vec v_0)$$

$\vec r_0, \vec v_0$ stanno sullo stesso piano, quindi una particella sottoposta solamente a forze centrali si muove su un piano.

Bastano due coordinate per definire il movimento

Poiché il moto avviene su un piano:



$$\vec v = \frac{dr}{dt}\vec u_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec u_\theta$$

$$\vec L_0 = \vec r \times \vec p = (r\vec u_r) \times \left\{ m\left(\frac{dr}{dt}\vec u_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec u_\theta\right)\right\} =$$

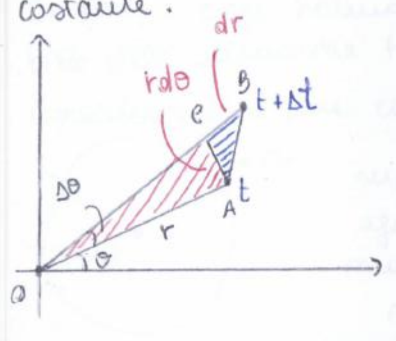
$$0$$

Quindi:

$$\boxed{\vec L_0 = m r^2 \frac{d\theta}{dt}\vec u_z}$$

il momento angolare rimane costante in modulo, direzione e verso.

Una particella sottoposta ad una forza centrale si muove con VELOCITÀ AREOLARE costante.



$$\Delta A_{OAB} = \Delta A_{OAC} + \Delta A_{ACB}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{OA \times AC}{2} \qquad \frac{AC \times CB}{2}$$

$$\Delta A = \frac{1}{2} r \cdot r\Delta\theta + \underline{r\Delta\theta\,\Delta r} \rightarrow$$ infinitesimo del secondo ordine

$$\text{per } \Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta A \sim \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{L}{m}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Ricordando che:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}$$

Sostituiamo:

$$E = \frac{1}{2}m\left\{-\frac{L}{m}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{K}{r} = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}$$

Poiché compare sempre $\frac{1}{r}$

Poniamo $\frac{1}{r} = \eta$

Per cui:

$$E = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{2m}\eta^2 - K\eta$$

Riduco l'eq. differenziale in forma canonica:

$$\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)^2 + \eta^2 - \frac{2mK}{L^2}\eta = \frac{2m}{L^2}E$$

$$\downarrow$$

$$2\frac{1}{r_0} = 2\eta_0$$

$$\frac{2m}{L^2}u_0\frac{E}{u_0} = \frac{\cancel{2}m}{L^2}\cdot\left(-\frac{mK^2}{\cancel{2}L^2}\right)\cdot\frac{E}{u_0} = -\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2\frac{E}{u_0} = -\eta_0^2\frac{E}{u_0}$$

$$\frac{mK}{L^2} = \eta_0$$

Riscrivendo:

$$\boxed{\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)^2 + \eta^2 - 2\eta\eta_0 = -\eta_0^2\frac{E}{u_0}}$$

dove η_0 ed E hanno lo stesso valore in ogni punto.

Deriviamo rispetto a θ:

$$\cancel{2}\frac{d\eta}{d\theta}\cdot\frac{d^2\eta}{d\theta^2} + \cancel{2}\eta\frac{d\eta}{d\theta} - \cancel{2}\eta_0\frac{d\eta}{d\theta} = 0$$

$$\left(\frac{d^2\eta}{d\theta^2} + \eta - \eta_0\right)\frac{d\eta}{d\theta} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\eta}{d\theta} = 0 \implies \eta \text{ non dipende da } \theta \\ \dfrac{d^2\eta}{d\theta^2} + \eta = \eta_0 \end{cases}$$

Due tipi di soluzioni.

La traiettoria di una particella sottoposta soltanto all'azione gravitazionale è una CONICA:

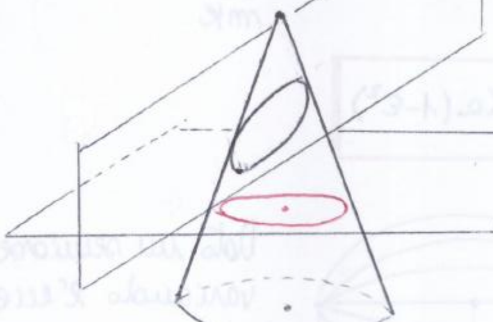
Si possono presentare diversi casi:

1) $\varepsilon = 0 \Rightarrow r(\theta) = r_0$, $E = u_0 \Rightarrow$ CIRCONFERENZA

2) $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow u_0 < E < 0 \Rightarrow$ ELLISSE

3) $\varepsilon = 1 \Rightarrow E = 0 \Rightarrow$ PARABOLA

4) $\varepsilon > 1 \Rightarrow E > 0 \Rightarrow$ IPERBOLE



- Se l'energia totale è negativa, il sistema è LEGATO, cioè esiste una dist. max a cui la particella può arrivare e poi ritorna indietro (ci sono dei punti di inversione).
- Altrimenti il sistema è libero.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{K}{r}$$

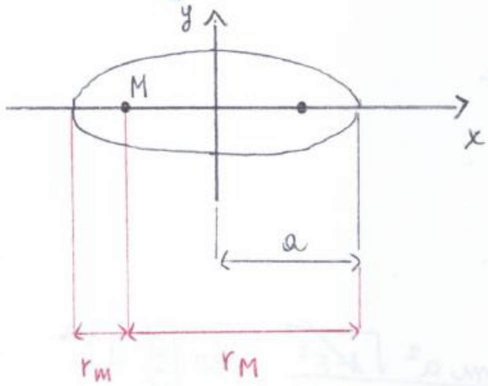
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{K}{r} + E$$

- Se $E < 0$, $E = -|E|$

Allora

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{K}{r} - |E| > 0 \Rightarrow \frac{K}{r} > |E| \rightarrow \boxed{r \le \frac{K}{|E|}}$$

- Verifichiamo che in un'orbita ellittica, il semiasse maggiore dipende solo dall'energia.



$$r_M = r(\theta = 0) = \frac{r_0}{1-\varepsilon}$$

$$r_m = r(\theta = \pi) = \frac{r_0}{1+\varepsilon}$$

$$a = \frac{r_M + r_m}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{1+\varepsilon} + \frac{r_0}{1-\varepsilon}\right) =$$

$$a = \frac{r_0 - r_0\varepsilon + r_0 + r_0\varepsilon}{2(1-\varepsilon^2)} = \frac{r_0}{1-\varepsilon^2}$$

MA $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{E}{u_0}}$

$$u_0 = -\frac{mK^2}{2L^2}$$

Quindi:

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{E}{u_0}} \rightarrow \varepsilon^2 = 1 - \frac{E}{u_0} \Rightarrow 1 - \varepsilon^2 = \frac{E}{u_0}$$

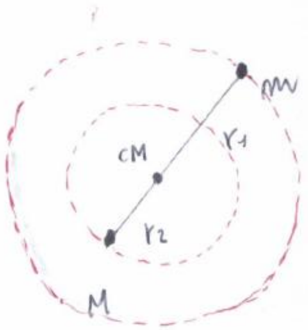
$$\frac{dE_{p,eff}}{dt} = 0 \rightarrow r_0 = \frac{L^2}{mK}$$

$$\rightarrow a = \frac{L^2}{mK} \cdot \left(-\frac{mK^2}{2L^2}\right) \cdot \frac{1}{E} = -\frac{K}{2E}$$

$$\boxed{a = K/2|E|}$$

ESERCIZIO GRAVITAZIONE

Due stelle di massa M, m, poste ad una distanza D, ruotano per effetto della loro interazione gravitazionale.
Determinare il periodo di rivoluzione delle stelle



Rispetto al centro di massa, i due corpi si muovono di MCU di raggio r_1, r_2 e hanno la stessa velocità angolare.

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\vec{r}_1 m - M\vec{r}_2}{m+M} = 0$$

Allora:

$$m r_1 - M r_2 = 0 \rightarrow m r_1 = M r_2$$

$$\begin{cases} m r_1 = M r_2 \rightarrow r_1 = \frac{M}{m} r_2 \\ r_1 + r_2 = D \end{cases}$$

$$\frac{M}{m} r_2 + r_2 = D \Rightarrow \left(1 + \frac{M}{m}\right) r_2 = D \Rightarrow r_2 = \frac{m}{m+M} D$$

$$\begin{cases} r_2 = \frac{m}{m+M} D \\ r_1 = \frac{M}{m+M} D \end{cases}$$

Per la legge di Newton:

$$\gamma \frac{mM}{D^2} = m\omega^2 r_1$$

$$\Rightarrow \cancel{m}\omega^2 \frac{\cancel{M}}{m+M} D = \gamma \frac{\cancel{m}\cancel{M}}{D^2} \Rightarrow \omega^2 = \gamma \frac{m+M}{D^3}$$

$$\gamma \frac{mM}{D^2} = M\omega^2 r_2$$

$$\omega = \sqrt{\gamma \frac{m+M}{D^3}}$$

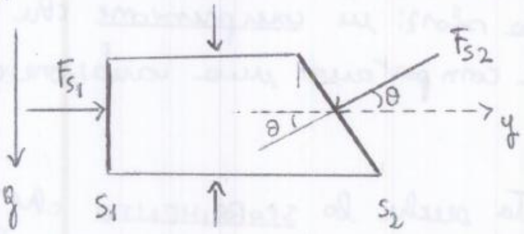
Quindi:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{D^3}{\gamma(m+M)}}$$

Introduciamo la grandezza PRESSIONE:

$$\boxed{P = \frac{dF_n}{dS}} \qquad [P] = \frac{N}{m^2} = Pa \quad , \quad 1\, bar = 10^5\, Pa$$

La pressione dipende dall'orientazione della superficie?



Se il sistema è in equilibrio, quanto vale la risultante delle forze lungo y?

Porzione di liquido in un liquido in equilibrio.

$$F_{S1} - F_{S2}\cos\theta = 0$$

$$\begin{cases} F_{S1} = P_1 S_1 \\ F_{S2} = P_2 S_2 \end{cases}$$

Poiché:

$$S_2 \cos\theta = S_1$$

$$P_1 S_1 = P_2 \underline{S_2 \cos\theta}$$

$$P_1 S_1 = P_2 S_1$$

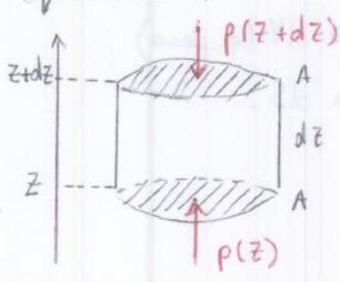
Quindi $\boxed{P_1 = P_2}$

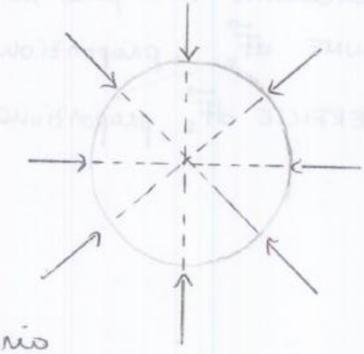
In un liquido in equilibrio, la pressione che si esercita in un punto è indipendente dall'orientazione della superficie.

LEGGE DI STEVINO

Ci proponiamo ora di osservare come cambia la pressione in un liquido quando l'unica forza di volume è quella di gravità.

Consideriamo un volumetto di liquido all'interno di un liquido in equilibrio:





In condizioni di equilibrio, la risultante delle forze che agiscono sulla sup. laterale del cilindro è uguale a zero, per simmetria.

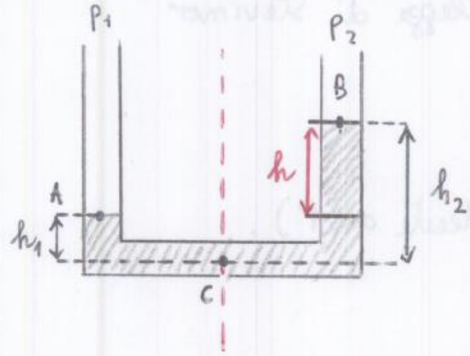
Consideriamo l'equilibrio lungo z:

$$dF_z = dF_{s,z} + dF_{v,z} = 0$$

$$\begin{cases} dF_{v,z} = -dm\,g = -\rho \underbrace{dV}_{A\,dz} g = -\rho g A\,dz \\ dF_{s,z} = p(z) A - p(z+dz) A = A\,(p(z) - p(z+dz)) \end{cases}$$

FUNZIONAMENTO DEL MANOMETRO

Se due rami comunicanti di un tubo a U vengono posti ciascuno in un ambiente a pressione diversa dall'altro, si produce un dislivello tra le due superfici libere.
Conoscendo tale dislivello è possibile risalire alla variazione di pressione.



$$P_C - P_A = \rho g h_1$$

$$P_C - P_B = \rho g h_2$$

Sottraendo membro a membro:

$$(P_C - P_B) - (P_C - P_A) = \rho g \underbrace{(h_2 - h_1)}_{h}$$

$$\boxed{P_A - P_B = \rho g h}$$

Quindi in generale:

$P_A = P_1$

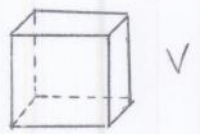
$P_B = P_0$

$P_1 = P_0 + \rho g h$

LEGGE DI STEVINO APPLICATA ALLA PRESSIONE ATMOSFERICA

Ci proponiamo ora di studiare come varia la pressione atmosferica con l'altitudine.

Non possiamo supporre che l'aria sia incomprimibile, ma possiamo supporre che si comporti come un gas perfetto in condizioni isoterme.



$$PV = nRT$$

$$n = \frac{m}{M} \implies PV = m\frac{R}{M}T \implies P = \frac{m}{V}\frac{R}{M}T$$

Quindi:

$$P = \rho \frac{RT}{M} \longrightarrow \begin{cases} \text{. A quota } z & P = \rho \frac{RT}{M} \\ \text{. A quota } 0 & P_0 = \rho_0 \frac{RT}{M} \end{cases} \implies \frac{P}{P_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \implies \boxed{\rho = \rho_0 \frac{P}{P_0}}$$

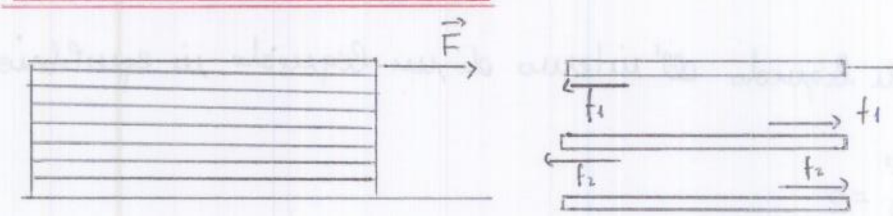
Applicando la legge di Stevino:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho_0 \frac{P}{P_0} g \implies \int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = -\int_0^z \rho_0 \frac{g}{P_0} dz \implies \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\rho_0 \frac{g}{P_0} z$$

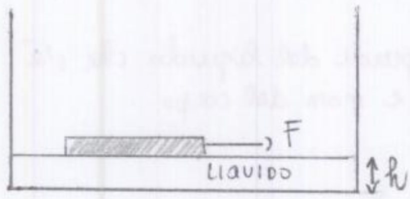
$$\frac{P_0}{\rho_0 g} = \alpha \simeq 8\ \text{Km} \implies \boxed{P(z) = P_0 e^{-z/\alpha}}$$

la pressione diminuisce esponenzialmente con l'altitudine

ATTRITO INTERNO. VISCOSITÀ



Un modello utile per spiegare cosa accade in un liquido in movimento è quello della PILA DI ASSI.
Tirando il primo asse con una forza $\vec{F}$, tra i vari assi nascono degli attriti.
Quando un liquido si muove in un condotto sufficientemente piccolo, il moto degli strati liquidi è di questo tipo.
I fenomeni di dissipazione in un liquido nascono proprio dalle differenze di velocità tra le varie parti.



Se voglio far muovere un corpo con velocità uniforme v_0, devo applicare una forza prop. alla velocità, all'area di contatto con il liquido, inversamente prop. all'altezza h e dipendente dal liquido stesso.

$$\boxed{F = \eta \frac{v_0 S}{h}}$$

legge fondamentale di attrito nei liquidi $\Rightarrow$ In forma differenziale

$$\boxed{dF = \eta \, dS \, \frac{dV}{dz}}$$

η: coeff. di viscosità
tiene conto dei fenomeni dissipativi

$$[\eta] = \frac{[F]}{[S]\left[\frac{dV}{dz}\right]} = \frac{N}{m^2 \cdot \frac{\cancel{m}}{s} \cdot \frac{1}{\cancel{m}}} = Pa \cdot s = Poise$$

Dalla forma differenziale ricaviamo:

$$\boxed{\frac{dF}{dS} = \eta \frac{dV}{dz}}$$ SFORZO DI TAGLIO

Noi ci occuperemo di FLUIDI IDEALI, ovvero di quei fluidi in cui non ci sono attriti, per cui $\eta = 0$ e $\rho =$ costante (incomprimibile).

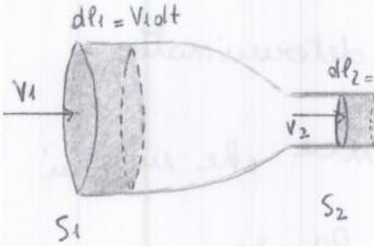
Quindi:

$dq = \vec{V} \cdot \vec{u_n}\, dS$ PORTATA VOLUMICA

$dq_m = \rho\, dq = \rho \vec{V} \cdot \vec{u_n} \cdot dS$ PORTATA IN MASSA

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

Consideriamo un fluido incompressibile in regime stazionario.



$$\begin{cases} \text{MASSA IN ENTRATA: } dm_1 = \rho_1 d\tau_1 = \rho_1 S_1 dl_1 = \rho_1 S_1 V_1 dt \\ \text{MASSA IN USCITA: } dm_2 = \rho_2 d\tau_2 = \rho_2 S_2 dl_2 = \rho_2 S_2 V_2 dt \end{cases}$$

Nel caso del fluido incompressibile in reg. stazionario:

$$\left.\begin{matrix} dm_1 = dm_2 \\ \rho_1 = \rho_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \cancel{\rho_1} S_1 V_1 dt = \cancel{\rho_2} S_2 V_2 dt \qquad \boxed{S_1 V_1 = S_2 V_2}$$

Quindi, in regime stazionario, se la densità è costante, è costante anche la portata. Per cui se diminuisce la sezione aumenta la velocità, se la sezione aumenta, la velocità diminuisce.

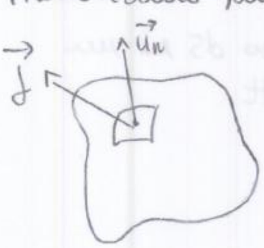
EQUAZIONE DI CONTINUITÀ NEL CASO GENERALE

$$\frac{dm}{dt} = \rho \vec{V} \cdot \vec{u_n}\, dS$$

↳ vettore densità di corrente di massa $\vec{J} = \rho \vec{V}$

$$\boxed{\frac{dm}{dt} = \vec{J} \cdot \vec{u_n} \cdot dS}$$

Prendiamo una superficie finita e una sua porzione infinitesima dS:



Qual è la massa complessiva che esce attraverso quella superficie?

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{USCITA} = \oint\!\!\oint_S \vec{J} \cdot \vec{u_n}\, dS$$

Quanto vale la massa contenuta nel volume limitato da questa superficie?

$$m = \iiint_\tau \rho\, d\tau$$

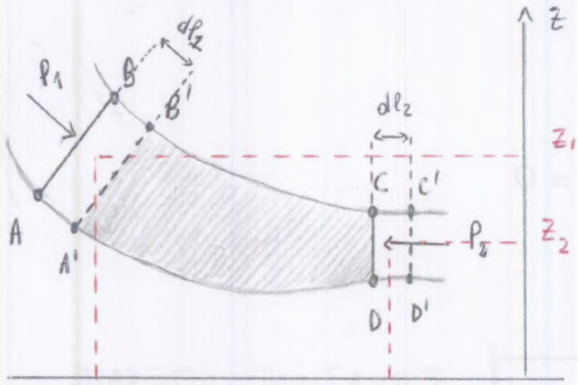
Con che rapidità varia la massa contenuta all'interno della superficie?

EQUAZIONE DI BERNOULLI

Tale equazione è valida solamente sotto certe ipotesi:

- Moto stazionario
- liquido incomprimibile
- Viscosità nulla
- unica forza di volume gravità.

Consideriamo un tubo di flusso:



Applico il teorema di conservazione dell'energia meccanica:

$$dE = dW$$

$$dW = F_{S1}\, dl_1 - F_{S2}\, dl_2 = P_1 S_1 dl_1 - P_2 S_2 dl_2$$

Supponiamo il LIQUIDO sia INCOMPRIMIBILE:

$$S_1 dl_1 = S_2 dl_2 = d\tau$$

Quindi:

$$dW = (P_1 - P_2)\, d\tau$$

$$dE = dE_k + dE_p$$

$$dE_p = E_p(A'B'C'D') - E_p(ABCD)$$

$$E_p(A'B'C'D') = E_p(A'B'CD) + E_p(CDC'D')$$

$$E_p(ABCD) = E_p(ABA'B') + E_p(A'B'CD)$$

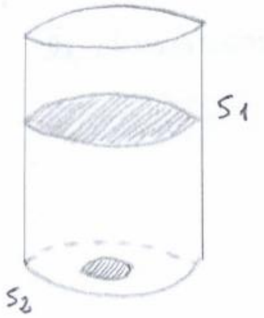
$$dE_p = E_p(CDC'D') - E_p(ABA'B')$$

$$dE_p = dm\, g\, z_2 - dm\, g\, z_1 = g(z_2 - z_1)\, dm$$

$$dE_k = E_k(A'B'C'D') - E_k(ABCD)$$

$$E_k(A'B'C'D') = E_k(A'B'CD) + E_k(CDC'D')$$

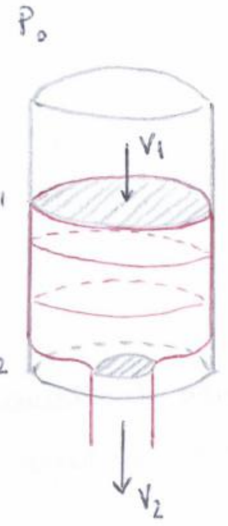
TEOREMA DI TORRICELLI



Supponiamo $S_2 << S_1$. Quanto vale la velocità di efflusso del liquido?

Poiché il recipiente ha sezione molto grande rispetto al foro S_2, il liquido può essere considerato quasi in quiete sulla superficie libera, quindi possiamo supporre che si muova di MOTO STAZIONARIO.

La pressione dell'ambiente in cui si trova il recipiente è ovunque P_0.



Consideriamo questo tubo di flusso:

- Per l'equazione di continuità $S_1 V_1 = S_2 V_2$

Quindi $V_2 = \frac{S_2}{S_1} V_2$

- Per l'equazione di Bernoulli:

$$\underset{\overset{\parallel}{P_0}}{\cancel{P_1}} + \frac{1}{2}\cancel{\rho} V_1^2 + \cancel{\rho} g z_1 = \underset{\overset{\parallel}{P_0}}{\cancel{P_2}} + \frac{1}{2}\cancel{\rho} V_2^2 + \cancel{\rho} g z_2$$

$$\frac{1}{2} V_1^2 + g z_1 = \frac{1}{2} V_2^2 + g z_2$$

$$V_2^2 - V_1^2 = 2g\underbrace{(z_1 - z_2)}_{H}$$

Sostituiamo il risultato ottenuto dall'eq. di continuità:

$$V_2^2 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 \cdot V_2^2 = 2gH$$

$$V_2^2\left(1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right) = 2gH \implies V_2 = \sqrt{\frac{2gH}{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}} \approx \sqrt{2gH}$$

↳ supponendo $S_2 << S_1$

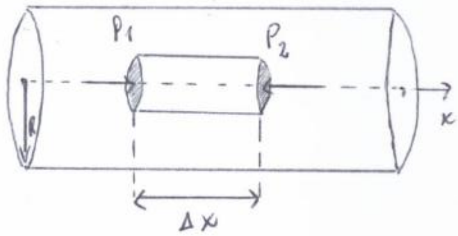
Quindi:

$$\boxed{V_2 = \sqrt{2gH}}$$

La velocità di efflusso non dipende né da ρ né da P_0, ed è pari a quella che avrebbe il liquido se scendesse in caduta libera da un'altezza H.

MOTO LAMINARE. FORMULA DI HAGEN - POISEULLE

Consideriamo ora un liquido reale, ovvero un liquido in cui $\eta \neq 0$.
Come si sposta tale liquido in un condotto orizzontale?



Consideriamo un elemento cilindrico all'interno del condotto.
Il moto avviene lungo x e il liquido viene pompato, per cui $P_1 > P_2$.
Ci aspettiamo che la velocità dipenda dalla dist. dal centro: $V = V(r)$.
Quindi il liquido a contatto con le pareti è fermo, $V(r=R) = 0$, mentre avvicinandosi all'asse del condotto la velocità aumenta.

$$dF = \eta \frac{dV}{dz} dS$$

$$\boxed{dF = \eta \frac{dV}{dr} dS}$$

FORZA NECESSARIA A MANTENERE QUESTO MOTO LAMINARE STAZIONARIO.

Forza che si esercita sul cilindretto:

$$(P_1 - P_2)\cancel{\pi} r^{\cancel{2}} + \eta \frac{dV}{dr} 2\cancel{\pi}\cancel{r} \Delta x = 0$$

(poiché dato il regime stazionario $F_p \left(= (P_1 - P_2)\pi r^2\right) + F_V\left(= \eta \frac{dV}{dz} dS\right) = 0$)

$$\boxed{\frac{dV}{dr} = -\frac{(P_1 - P_2) r}{2\eta \Delta x}}$$

dove $\frac{P_1 - P_2}{\Delta x}$ = caduta di pressione su Δx.

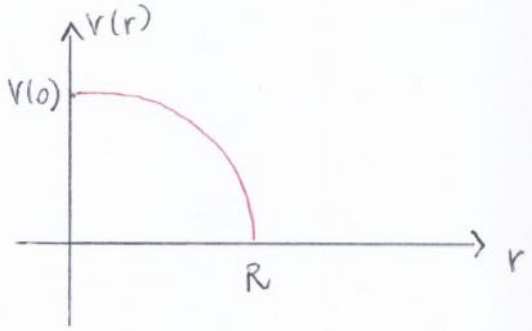
Integrando:

$$\int_{V(0)}^{V(r)} dV = -\frac{1}{2\eta} \int_0^r \frac{P_1 - P_2}{\Delta x} r \, dr$$

$$V(r) = V_0 - \frac{1}{4\eta} \frac{P_1 - P_2}{\Delta x} r^2$$

poiché $V(R) \equiv 0$ otteniamo:

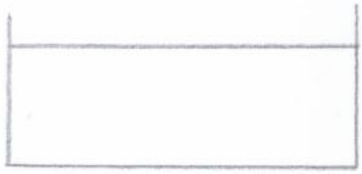
$$V_0 = \frac{1}{4\eta} \frac{P_1 - P_2}{\Delta x} R^2$$

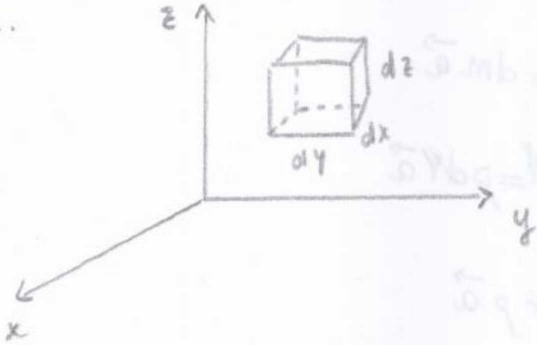


Allora:

$$\boxed{V(r) = \frac{1}{4\eta} \frac{P_1 - P_2}{\Delta x} (R^2 - r^2)}$$

Una vasca piena d'acqua avanza con accelerazione a. Calcolare l'inclinazione della superficie libera.





Per l'equilibrio:

$$d\vec{F}_S + d\vec{F}_V = 0$$

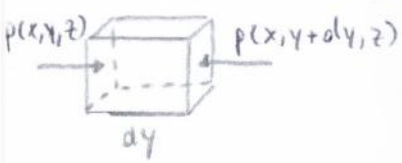
Ipotizziamo che la forza di pressione possa essere diretta in una generica direzione:

$$dF_{S,x} + dF_{V,x} = 0$$

$$dF_{S,y} + dF_{V,y} = 0$$

$$dF_{S,z} + dF_{V,z} = 0$$

Determiniamo la forza di pressione lungo y, che sarà analoga a quelle lungo x e z:



$$dP_y = \left[p(x,y,z) - p(x,y+dy,z)\right] dx\,dz =$$

$$= \left[p(x,y,z) - \frac{\partial P}{\partial y}dy - p(x,y,z)\right] dx\,dz =$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy\,dz = -\frac{\partial P}{\partial y}dV$$

Quindi:

$$dP_x = \frac{\partial P}{\partial x}dV$$

$$dP_y = \frac{\partial P}{\partial y}dV$$

$$dP_z = \frac{\partial P}{\partial z}dV$$

Poiché $dF_V = \rho V \vec{g}$ $\Rightarrow$ $\boxed{(-\vec{\nabla} P + \rho\vec{g})dV = 0}$ ALTRA ESPRESSIONE LEGGE DI STEVINO

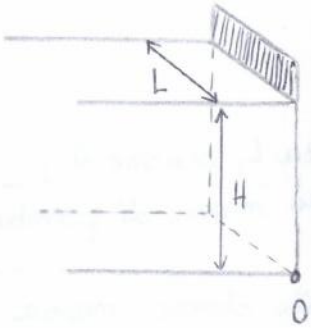
Allora:

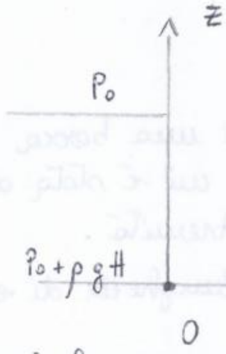
$$\frac{\partial P}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{u}_z = -\rho g\vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \end{cases}$$

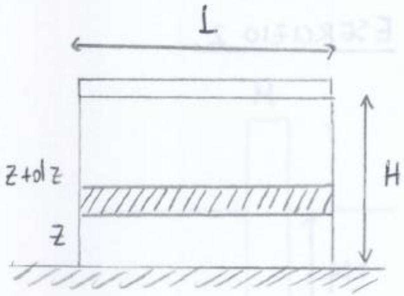
Se la vasca è ferma, la pressione dipende solo dall'altezza.

ESERCIZIO 1.

In una diga l'acqua raggiunge una profondità H contro la parete di sbarramento. Sia L la larghezza della diga. Calcolare la forza risultante F_{H_2O} contro la parete; il momento risultante M_{0,H_2O} rispetto al punto O (vedi figura) e la retta d'azione della forza risultante.







Scriviamo la legge di Stevino in funzione di z:

$$p(z) = P_0 + \rho g (H - z)$$

Consideriamo un areola infinitesima:

$$dA = L\,dz$$

$$dF = P(z)\cdot dA = \{P_0 + \rho g (H-z)\} L\,dz$$ forza esercitata sull'areola dA.

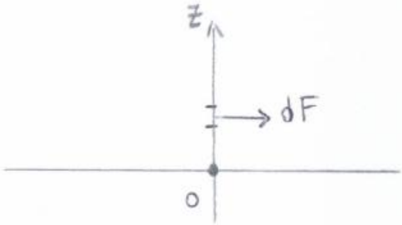
$$F = \int_0^H \{P_0 + \rho g (H-z)\} L\,dz = \int_0^H P_0 L\,dz + \rho g L \int_0^H (H-z)\,dz = P_0 L H + \rho g L \left(H^2 - \frac{1}{2}H^2\right)$$

$$F = P_0 L H + \frac{1}{2}\rho g L H^2$$ ma $P_0 L H$ è la forza esercitata dall'atmosfera!

Quindi:

$$\boxed{F_{H_2O} = \frac{1}{2}\rho g L H^2}$$

Calcoliamo il momento della forza infinitesima dF:



$$dM_0 = z\,dF$$

$$dM_0 = \{P_0 + \rho g (H-z)\} L z\,dz$$

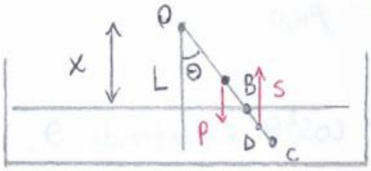
$$M_0 = \int_0^H P_0 L z\,dz + \int_0^H \rho g H L z\,dz - \int_0^H \rho g L z\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}P_0 L H^2 + \frac{1}{2}\rho g H L H^2 - \frac{1}{3}\rho g L H^3 = \frac{1}{2}P_0 L H^2 + \frac{1}{6}\rho g L H^3$$ ma $\frac{1}{2}P_0 L H^2$ è il momento esercitato dalla forza atmosferica

Quindi:

$$\boxed{M_0 = \frac{1}{2}P_0 L H^2 + \frac{1}{6}\rho g L H^3} \quad e \quad \boxed{M_{H_2O} = \frac{1}{6}\rho g L H^3}$$

ESERCIZIO 3



Sia data una barra di lunghezza L, sezione A immersa per una certa lunghezza in acqua. Quanto deve valere x affinché la posizione verticale sia di equilibrio instabile?

$$\overline{OB}\cos\theta = x$$

$$\overline{OB} = \frac{x}{\cos\theta}$$

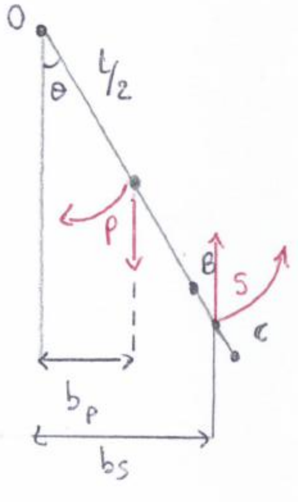
$$\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB} = L - \frac{x}{\cos\theta}$$

Calcoliamo le forze agenti sull'asta:

$$P = \rho A L g$$

$$S = \rho_{H_2O} A \left(L - \frac{x}{\cos\theta}\right) g$$

Calcoliamo i momenti rispetto al polo O:



$$M_o(P) = \rho A L g \frac{L}{2} \sin\theta = \rho A \frac{L^2}{2} g \sin\theta$$

$$\overline{OD} = \overline{OB} + \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{x}{\cos\theta} + \frac{1}{2}\left(L - \frac{x}{\cos\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(L + \frac{x}{\cos\theta}\right)$$

$$M_o(S) = \rho_{H_2O} A \left(L - \frac{x}{\cos\theta}\right) g \frac{1}{2}\left(L + \frac{x}{\cos\theta}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\rho_{H_2O} A \left(L^2 - \frac{x^2}{\cos^2\theta}\right) g \sin\theta$$

Se $\theta \to 0$, $\sin\theta \to \theta$, $\cos\theta \to 1$

$$\begin{cases} M_o(P) = \frac{1}{2}\rho A L^2 g\theta \\ M_o(S) = \frac{1}{2}\rho_{H_2O} A (L^2 - x^2) g\theta \end{cases}$$

$\theta = 0$ è un punto di ep. stabile se $M_o(P) \geq M_o(S)$:

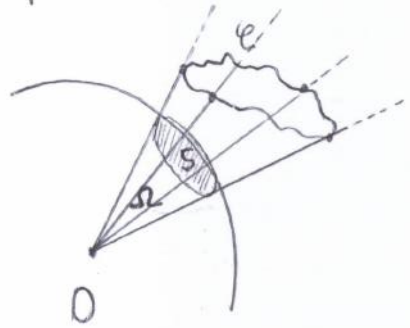
$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\rho \cancel{A} L^2 \cancel{g}\cancel{\theta} \geq \cancel{\tfrac{1}{2}}\rho_{H_2O}\cancel{A}(L^2 - x^2)\cancel{g}\cancel{\theta}$$

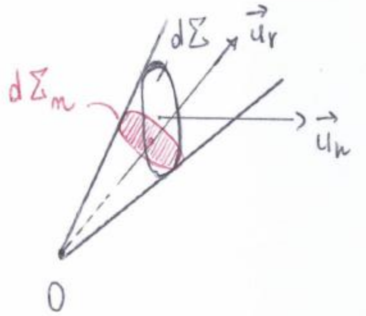
$$\rho L^2 \geq \rho_{H_2O}(L^2 - x^2) \implies x \geq L\sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_{H_2O}}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 101 di 246

ANGOLO SOLIDO

Dati, nello spazio tridimensionale, un punto O e una linea chiusa $\mathcal{C}$, si definisce ANGOLO SOLIDO la parte dello spazio delimitata dalla superficie laterale formata da tutte le semirette che hanno origine in O e passano per tutti i punti di $\mathcal{C}$.



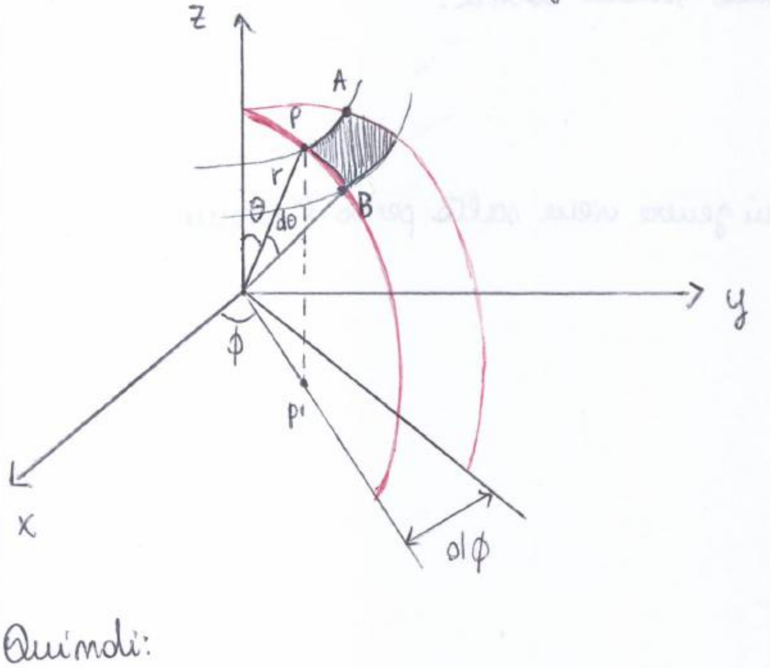


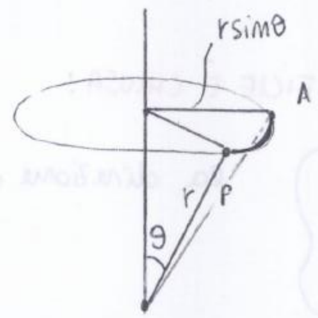
Definiamo quindi ANGOLO SOLIDO la quantità

$d\Omega = \dfrac{d\Sigma_n}{r^2}$, dove $d\Sigma_n$ è la proiezione di $d\Sigma$ sulla sfera passante per O.

$$d\Omega = \frac{d\Sigma_n}{r^2} = \frac{d\Sigma\, \vec{u}_r \cdot \vec{u}_n}{r^2}$$

Esprimiamo l'elemento di angolo solido in coordinate polari sferiche:





$$\overline{AP} = r \sin\theta \, d\phi$$

$$\overline{PB} = r\, d\theta$$

$$d\Sigma_n = \overline{AP} \cdot \overline{PB} = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

Quindi:

$$d\Omega = \frac{d\Sigma_n}{r^2} = \frac{r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi}{r^2} = \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$ l'angolo solido non dipende da r.

$$\Omega_T = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\phi = \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \left[-\cos\phi\right]_0^{\pi} \cdot 2\pi = 4\pi$$

Vettore campo elettrico di una carica q

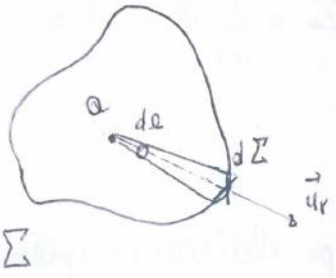
$\vec{F} = m\vec{G}$ e analogamente $\vec{F} = q\vec{E}$

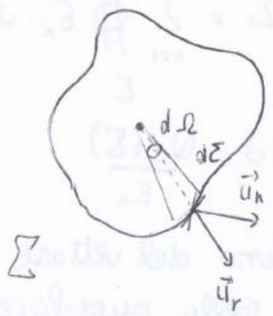
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\vec{u}_r = q\left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r\right\}$$

Allora:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r}$$

Calcoliamo ora il flusso generato dalla carica elettrica racchiusa dalla superficie Σ.



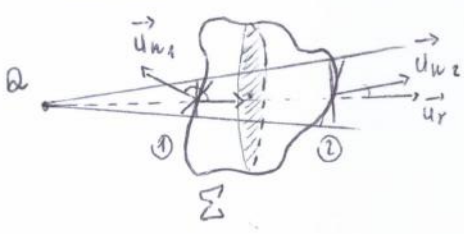


$$\phi_\Sigma = \oiint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = \oiint_\Sigma \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\oiint_\Sigma \vec{u}_r\cdot\vec{u}_n\frac{d\Sigma}{r^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\,4\pi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Il FLUSSO ϕ attraverso Σ vale $\frac{Q}{\varepsilon_0}$ indipendentemente dalla posizione occupata dalla carica elettrica.

Cosa accade se la carica é esterna?



$$d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 = \vec{E}_1\cdot\vec{u}_{n1}\cdot d\Sigma_1 + \vec{E}_2\cdot\vec{u}_{n2}\cdot d\Sigma_2 =$$

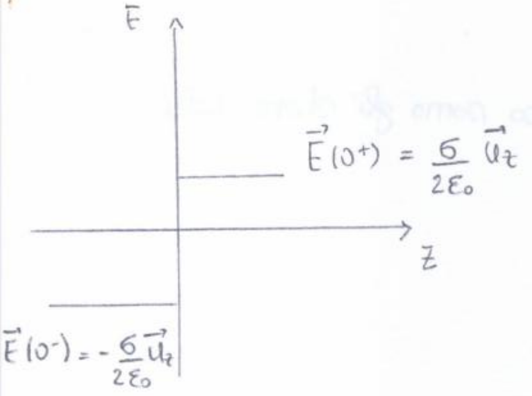
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_1^2}\vec{u}_r\cdot\vec{u}_{n1}\, d\Sigma_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_2^2}\vec{u}_r\cdot\vec{u}_{n2}\, d\Sigma_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\left\{-\frac{d\Sigma_{n1}}{r_1^2} + \frac{d\Sigma_{n2}}{r_2^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\left\{-d\Omega + d\Omega\right\} = 0$$

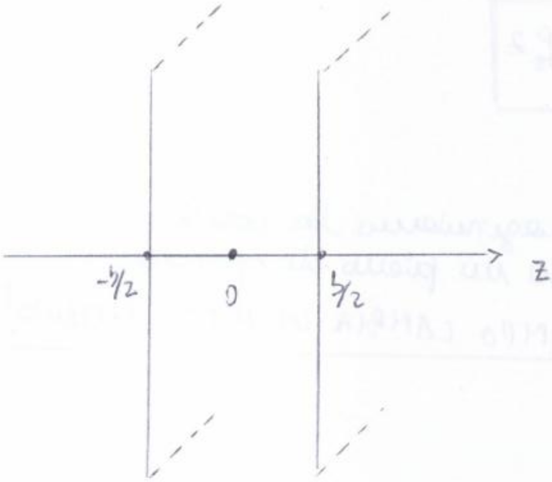
Il FLUSSO ϕ del campo elettrico di una particella carica posta all'esterno di una superficie Σ É UGUALE A 0.

CAMPO ELETTRICO DI UNO STRATO



$$\Delta\vec{E} = \vec{E}(0^+) - \vec{E}(0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z$$

Invece di considerare una distribuzione piana infinita di carica, consideriamo ora uno STRATO e applichiamo il teorema di Gauss.



ρ = costante

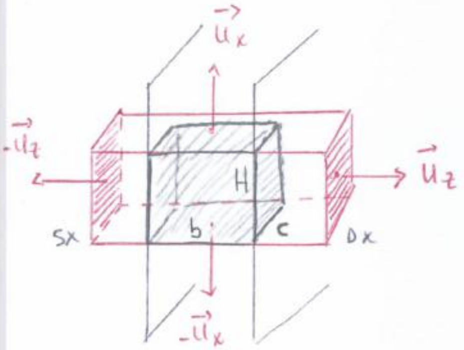
Il campo può dipendere solo da z, per cui

$\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$

$E(z) = -E(-z)$

$$\phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{q(\Sigma)}{\varepsilon_0}$$

1) $|z| > \frac{b}{2}$



Il flusso è solo lungo $\vec{u}_z$:

$$q\left(|z| > \frac{b}{2}\right) = \rho H b c$$

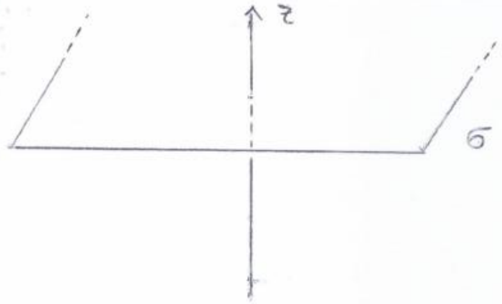
$$\phi_\Sigma(\vec{E}) = \oint\!\!\!\oint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{u}_n \, d\Sigma = \iint_{\Sigma_{SX}} \underbrace{E(-z)(-\vec{u}_z)}_{E(-z)\vec{u}_z(-\vec{u}_z) = -E(-z)} d\Sigma_{SX} + \iint_{\Sigma_{DX}} \underbrace{\vec{E}(z)\,\vec{u}_z}_{E(z)\vec{u}_z\cdot\vec{u}_z = E(z)} \, d\Sigma_{DX} =$$

$$= \iint_{\Sigma_{SX}} -E(-z)\,d\Sigma_{SX} + \iint_{\Sigma_{DX}} E(z)\,d\Sigma_{DX} = 2E(z)Hc$$

$$\Rightarrow \phi_\Sigma(\vec{E}) = 2E(z)\cancel{H}\cancel{c} = \frac{\rho \cancel{H} b \cancel{c}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(z) = \frac{\rho b}{2\varepsilon_0}}$$

Il campo fuori della lastra è costante e il prodotto ρb gioca il ruolo di densità superficiale

CAMPO ELETTRICO PIANO OMOGENEO INFINITO (densità di carica σ)



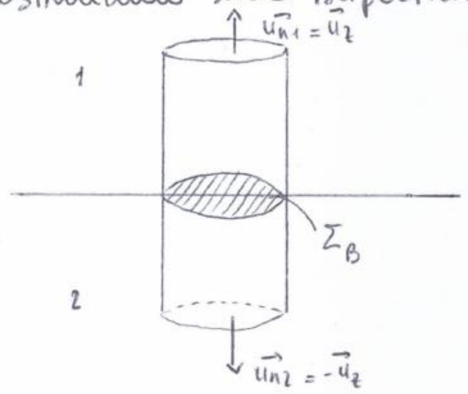
Se il piano omogeneo, il campo elettrico può dipendere solo da z.

Per cui:

$$\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$$

$$E(z) = -E(-z)$$

· Costruiamo una superficie gaussiana cilindrica:



Applichiamo la LEGGE DI GAUSS:

$$\phi_\Sigma(\vec{E}) = \oint\!\!\!\oint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{u}_n \, d\Sigma = \frac{1}{\varepsilon_0} Q(\Sigma)$$

$$Q(\Sigma) = \Sigma_B \sigma$$

$$\phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\Sigma_B \sigma$$

$$\phi_\Sigma(\vec{E}) = \iint_{\Sigma_1} \vec{E}\cdot\vec{u}_{n1}\, d\Sigma_1 + \iint_{\Sigma_2} \vec{E}\cdot\vec{u}_{n2}\cdot d\Sigma_2 + \underbrace{\iint_{\Sigma_L} \vec{E}\cdot\vec{u}_{nL}\cdot d\Sigma_L}_{=0}$$

$\forall P \in \Sigma_L \quad \vec{u}_{nL} \perp \vec{u}_z$

$\vec{E} = E(z)\vec{u}_z \Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{u}_{nL} = 0$

$$\phi_\Sigma(\vec{E}) = \iint_{\Sigma_1} \vec{E}\cdot\vec{u}_{n1}\, d\Sigma_1 + \iint_{\Sigma_2} \vec{E}\cdot\vec{u}_{n2}\cdot d\Sigma_2$$

$$\iint_{\Sigma_1} \vec{E}\cdot\vec{u}_{n1}\cdot d\Sigma_1 = \iint_{\Sigma_1} E(z)\vec{u}_z\cdot\vec{u}_z\cdot d\Sigma = E(z)\cdot\Sigma_B$$

$$\iint_{\Sigma_2} \vec{E}\cdot u_{n2}\cdot d\Sigma_1 = \iint_{\Sigma_2} E(-z)\vec{u}_z(-\vec{u}_z)\, d\Sigma = -E(-z)\Sigma_B = E(z)\Sigma_B$$

Allora:

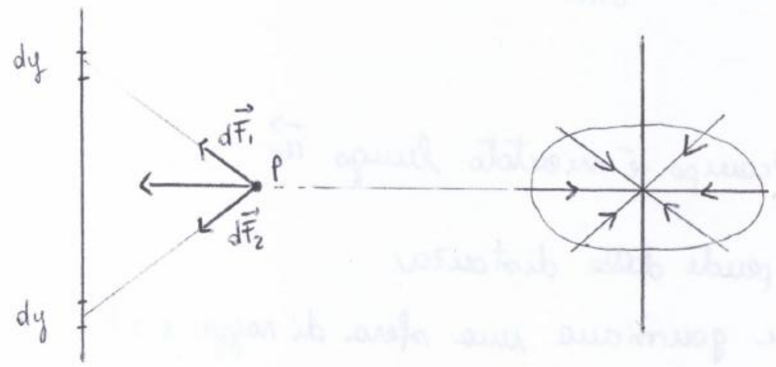
$$\phi_\Sigma(\vec{E}) = 2E(z)\cancel{\Sigma_B} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cancel{\Sigma_B}\sigma$$

Quindi:

$$\boxed{E(z) = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma}$$

CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UN FILO INFINITO UNIFORMEMENTE CARICO

(densità di carica λ)



Il campo può avere componenti solo lungo $\vec{u}_r$.

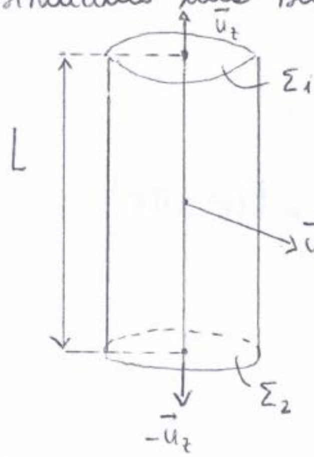
$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$

$\lambda = \frac{Q}{L}$

Applichiamo il teorema di Gauss:

$$\phi_\Sigma(\vec{E}) = \oint\!\!\oint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{u}_n \, d\Sigma = \frac{1}{\varepsilon_0} Q(\Sigma)$$

Costruiamo una superficie gaussiana:



$\lambda = \frac{Q}{L} \Rightarrow Q_c = \lambda L$

Quindi:

$$\phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda L$$

$$\phi = \oint\!\!\oint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{u}_n \, d\Sigma = \underbrace{\iint_{\Sigma_1} \vec{E}\cdot\vec{u}_{n_1} \, d\Sigma}_{E\cdot\vec{u}_r\cdot\vec{u}_z = 0} + \underbrace{\iint_{\Sigma_2} \vec{E}\cdot\vec{u}_{n_2} \, d\Sigma}_{E\cdot\vec{u}_r(-\vec{u}_z) = 0} + \iint_{\Sigma_L} \vec{E}\cdot\vec{u}_{n_L} \, d\Sigma =$$

$$= \iint_{\Sigma_L} \vec{E}\cdot\underbrace{\vec{u}_{n_L}}_{\vec{u}_r} \, d\Sigma = E(r)\cdot 2\pi r L$$

Quindi:

$$2\pi r L \, E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda L \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

Quanto vale a questo punto il potenziale?

$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

Sappiamo che $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$

Quindi:

$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{u}_\phi$ equazione vettoriale

Per cui:

- $r<R$ $\quad \vec{E} = 0 = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r \Rightarrow -\frac{dV_{INT}}{dr} = 0$
- $r>R$ $\quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r \Rightarrow -\frac{dV_{EXT}}{dr} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$

Poiché il potenziale dipende solo da r, la derivata diventa totale

$$\begin{cases} -\frac{dV_{EXT}}{dr} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \Rightarrow V_{EXT} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + \gamma \\ -\frac{dV_{INT}}{dr} = 0 \Rightarrow V_{INT} = \beta \end{cases}$$

PONIAMO $\gamma = 0$ AFFINCHÉ $V(\infty) = 0$

Determiniamo β, imponendo la continuità di V in $r=R$

$V_{EXT}(R) = V_{INT}(R) \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} = \beta$

Quindi:

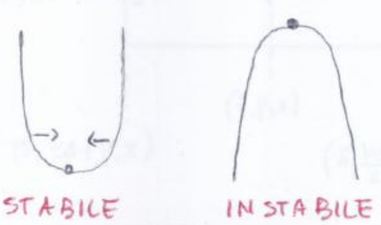
$$V_{INT} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$$

$$V_{EXT} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

TEOREMA

Se in una regione di spazio è presente un campo elettrico, allora in tale regione non ci sono punti di equilibrio (STABILE, INSTABILE).

- Un punto è di EQ. STABILE se, ponendo in esso una particella e spostandola, nasce una forza che tende a riportarla in tale punto
- Un punto è di EQ. INSTABILE se, ponendo in esso una particella e spostandola, nasce una forza che la allontana dal punto.



Sviluppando al primo ordine:

$$F_y\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right) = F_y(x,y,z) + \frac{\partial F_y}{\partial y}\left(-\frac{\Delta y}{2}\right)$$

$$F_y\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) = F_y(x,y,z) + \frac{\partial F_y}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)$$

Quindi:

$$\Delta\phi_y = \frac{\partial F_y}{\partial y}\Delta y\,\Delta x\,\Delta z \qquad \text{ma } \Delta x\,\Delta y\,\Delta z = \Delta\tau$$

$$\Delta\phi_y = \frac{\partial F_y}{\partial y}\Delta\tau \qquad \text{e analogamente,}$$

$$\Delta\phi_x = \frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta\tau$$

$$\Delta\phi_z = \frac{\partial F_z}{\partial z}\Delta\tau$$

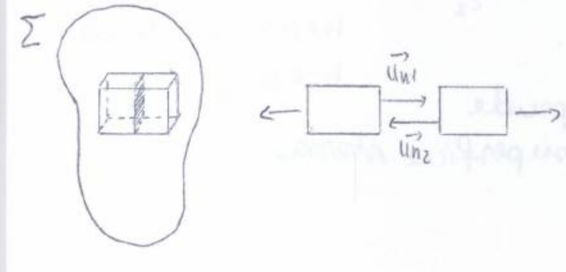
Per cui:

$$\Delta\phi = \Delta\phi_x + \Delta\phi_y + \Delta\phi_z = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)\Delta\tau = \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)\Delta\tau$$

Si chiama DIVERGENZA ed è una quantità scalare

$$\left.\begin{matrix}\vec{\nabla}\cdot\vec{F} \\ \operatorname{div}\vec{F}\end{matrix}\right\} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Se anziché un punto, consideriamo un corpo di estensione finita, lo possiamo approssimare con tanti cubetti elementari.



Considerando tutte le coppie di cubetti che hanno una faccia comune, il flusso totale uscente dai due cubetti attraverso la faccia comune è nullo. Quindi, sommando tutti i contributi, rimangono solo i flussi attraverso il bordo.

Per cui:

$$\phi_\Sigma = \oint\!\!\oint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{u}_n\cdot d\Sigma = \sum_{i=1}^{N}\phi_i \quad \text{dove } \phi_i \text{ è il flusso di } \vec{F} \text{ attraverso il parallelepipedo } i.$$

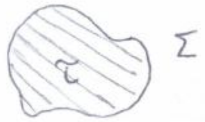
$$\phi_\Sigma = \oint\!\!\oint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{u}_n\cdot d\Sigma = \sum_{i=1}^{N}\phi_i = \sum_{i=1}^{N}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})_i\cdot\Delta\tau_i$$

$$\oint\!\!\oint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{u}_n\cdot d\Sigma = \iiint_{\tau(\Sigma)} \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\cdot d\tau$$

Passando al limite della sommatoria otteniamo:

EQUAZIONE DI POISSON

Supponiamo che la massa sia distribuita con continuità in una regione di spazio con densità $\rho = \rho(\vec{r})$.
Consideriamo all'interno di questo spazio una certa superficie chiusa Σ, che delimita un volume τ.



$$\rho = \frac{Q}{\tau} \Rightarrow dQ = \rho \, d\tau$$

$$Q(\Sigma) = \iiint_{\tau(\Sigma)} \rho \, d\tau$$

Per il teorema di Gauss:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n \cdot d\Sigma = \frac{Q(\Sigma)}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\tau(\Sigma)} \rho \, d\tau$$

Allora:

$$\iiint_{\tau(\Sigma)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\tau(\Sigma)} \rho \, d\tau \Rightarrow \iiint_{\tau(\Sigma)} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \right) d\tau = 0 \quad \forall \Sigma$$

Per cui:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho}$$ EQUAZIONE DI POISSON

L'equazione di Poisson è un'equazione locale.

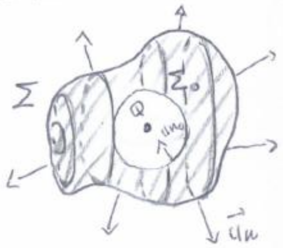
- Prendiamo una particella carica all'esterno di una superficie chiusa

$\forall P \in \tau(\Sigma)$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ poiché $\vec{E}$ SOLENOIDALE

$$\phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n \cdot d\Sigma = \iiint_{\tau(\Sigma)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, d\tau \equiv 0 \implies \boxed{\phi_{\Sigma}(\vec{E}) = 0}$$

- Consideriamo ora una particella carica all'interno di una superficie chiusa Σ e consideriamo una superficie Σ_0 racchiusa da Σ.

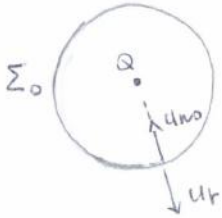


Nella regione tratteggiata, la divergenza è nulla. $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$. ($\forall P \in$ alla regione limitata da Σ e Σ_0)

$$\phi_{\Sigma + \Sigma_0} = \oiint_{\Sigma + \Sigma_0} \vec{E} \cdot \vec{u}_n \cdot d\Sigma = \oiint_{\Sigma} \vec{E}(P) \vec{u}_n \, d\Sigma + \oiint_{\Sigma_0} \vec{E}(P_0) \vec{u}_{n_0} \, d\Sigma_0 = 0$$

Per cui:

$$\boxed{\oiint_{\Sigma} \vec{E}(P) \vec{u}_n \, d\Sigma = - \oiint_{\Sigma_0} \vec{E}(P_0) \vec{u}_{n_0} \, d\Sigma_0}$$



$$E(P_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\oiint_{\Sigma_0} \vec{E}(P_0) \vec{u}_{n_0} \, d\Sigma_0 = \oiint_{\Sigma_0} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \overbrace{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_{n_0}}^{-1} \, d\Sigma_0 = - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \oiint_{\Sigma_0} d\Sigma_0 =$$

$$= - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = - \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Per cui:

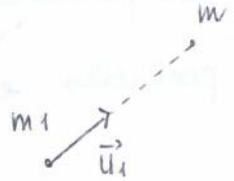
$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}(P) \vec{u}_n \, d\Sigma = - \oiint_{\Sigma_0} \vec{E}(P_0) \vec{u}_{n_0} \, d\Sigma_0$$

$$\shortparallel$$

$$\boxed{\phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

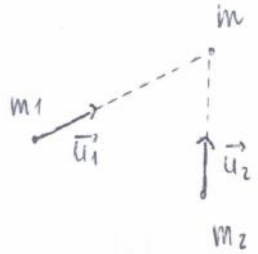
Abbiamo dimostrato il teorema di Gauss senza utilizzare il concetto di angolo solido

CAMPO E POTENZIALI GRAVITAZIONALI



$$\vec{F} = -\gamma \frac{m m_1}{r_1^2}\vec{u}_1$$

$$E_p = -\gamma \frac{m m_1}{r_1}$$



Per il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\gamma \frac{m m_1}{r_1^2}\vec{u}_1 - \gamma \frac{m m_2}{r_2^2}\vec{u}_2$$

Nel caso di N particelle:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} -\gamma \frac{m m_i}{r_i^2}\vec{u}_i = \left(-\gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{u}_i}{r_i^2}\right) m$$

$$E_p = \sum_{i=1}^{N} -\gamma \frac{m m_i}{r_i} = \left(-\gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{r_i}\right) m$$

Nel caso siano presenti più masse, definite MASSE POTENZIANTI, la forza che si esercita sulla massa di prova è proporzionale alla massa di prova stessa

Si definisce CAMPO GRAVITAZIONALE $\vec{G}$ la quantità: $\vec{G} = -\gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{r_i^2}\vec{u}_i$

Si definisce POTENZIALE GRAVITAZIONALE ϕ la quantità: $\phi = -\gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{r_i}$

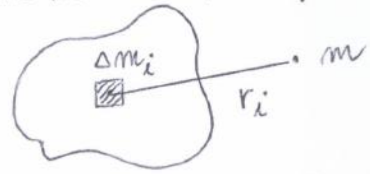
Quindi:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{F} &= m\vec{G} \\ E_p &= m\phi \end{aligned}}$$

Dato che $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$

$$m\vec{G} = -\vec{\nabla} m\phi \implies \boxed{\vec{G} = -\vec{\nabla}\phi}$$

Consideriamo ora una distribuzione continua, anziché discreta e vediamo come si modifica quanto detto.

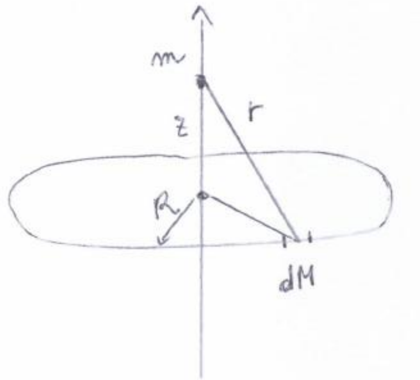


$$\vec{F} \sim \sum_{i=1}^{N} -\gamma \frac{m \Delta m_i}{r_i^2}\vec{u}_i$$

$$\vec{F} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} -\gamma \frac{m \Delta m_i}{r_i^2}\vec{u}_i = \int_{CORPO} -\gamma \frac{m\, dM}{r^2}\vec{u} \implies \vec{G} = \int_{CORPO} -\gamma \frac{dM}{r^2}\vec{u}$$

$$E_p = \int_{CORPO} -\gamma \frac{m\, dM}{r} \implies \phi = \int_{CORPO} -\gamma \frac{dM}{r}$$

RZA GRAVITAZIONALE CHE UN ANELLO OMOGENEO DI MASSA M E RAGGIO R
ESERCITA SU UNA PARTICELLA POSTA SUL SUO ASSE.



$$\lambda = \frac{M}{2\pi R}$$

$$r = \sqrt{R^2 + z^2}$$

$$E_p = \int_{CORPO} -\gamma \frac{m\, dM}{r} = -\gamma \frac{m}{r} \int_{CORPO} dM = -\gamma \frac{mM}{r}$$

$$E_p = -\gamma \frac{mM}{(R^2+z^2)^{1/2}}$$

$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$ e in questo caso $E_p = E_p(z)$

$$\vec{F} = -\vec{u}_z \frac{dE_p}{dz} \Rightarrow \vec{F} = -\vec{u}_z \frac{d}{dz}\left\{\frac{-\gamma mM}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right\} = -\vec{u}_z \frac{d}{dz}\left\{-\gamma mM (R^2+z^2)^{-1/2}\right\} =$$

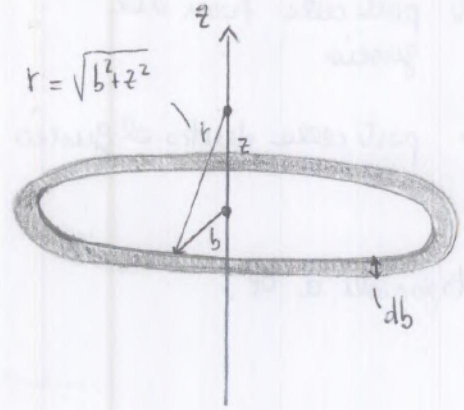
$$= -\gamma m M \frac{1}{2}(R^2+z^2)^{-3/2} \cdot 2z = -\frac{\gamma m M z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

$$\boxed{\vec{F} = -\gamma \frac{mMz}{(R^2+z^2)^{3/2}} \vec{u}_z}$$

Se $z >> R \rightarrow \underline{\vec{F} = -\gamma \frac{mM}{z^2} \vec{u}_z}$

Se $z << R \rightarrow \vec{F} = -\gamma m M \frac{z}{R^3} \vec{u}_z = \underline{-\left(\frac{\gamma m M}{R^3}\right) z \vec{u}_z}$ ricorda la forza elastica!

CAMPO GRAVITAZIONALE esercitato da un disco omogeneo di massa M e raggio b, su una particella di massa m posta sul suo asse.



$$\sigma = \frac{M}{A} = \frac{M}{\pi B^2} \rightarrow dM = \sigma\, dA$$

$$dA = \pi(b+db)^2 - \pi b^2 = \cancel{\pi b^2} + 2\pi b\,db + \pi(db)^2 - \cancel{\pi b^2} =$$

$$= 2\pi b\,db + \pi(db)^2$$ ← infinitesimo secondo ordine

$$dA = 2\pi b\,db$$

Quindi:

$$dM = \sigma\, dA \rightarrow dM = 2\pi\sigma b\, db$$

$$E_p = -\int_{CORPO} \gamma \frac{m\, dM}{r} = -\gamma \frac{m}{r}\int_{CORPO} dM = -\gamma\frac{mM}{r}$$

$$E_p = -\frac{\gamma m M}{\sqrt{b^2+z^2}}$$

Poiché:

$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$ e in questo caso $d\vec{F} = -\vec{u}_z \frac{dE_p}{dz} \Longrightarrow d\vec{F} = -\vec{u}_z \frac{d}{dz}\left\{-\frac{\gamma m dM}{\sqrt{b^2+z^2}}\right\} =$

$$= -\vec{u}_z \cdot \left\{\frac{d}{dz}\left(-\gamma m dM\,(b^2+z^2)^{-1/2}\right)\right\} = -\vec{u}_z\left(\frac{1}{2}\frac{\gamma m dM \cdot 2z}{(b^2+z^2)^{3/2}}\right) =$$

$$= -\frac{\gamma m dM\, z}{(b^2+z^2)^{3/2}}\vec{u}_z$$

Allora:

$$d\vec{F} = \frac{-\gamma m\, dM}{(b^2+z^2)^{3/2}} z\,\vec{u}_z = -\gamma\frac{m \cdot 2\pi\sigma b\, db\, z}{(b^2+z^2)^{3/2}}\vec{u}_z$$

$$\vec{F} = \int_0^B -2\pi\gamma m\sigma z \frac{b\,db}{(b^2+z^2)^{3/2}}\vec{u}_z \qquad db^2 = 2b\,db = d(b^2+z^2)$$

$$\vec{F} = -\pi\gamma m\sigma z\int_{u(0)}^{u(B)} \frac{du}{u^{3/2}} = -\pi\gamma m\sigma z\left|\frac{2}{u^{1/2}}\right|_{u(0)}^{u(B)}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$$

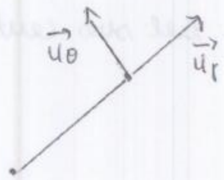
$$\boxed{\vec{F} = -\vec{u}_x \frac{\partial E_p}{\partial x} - \vec{u}_y \frac{\partial E_p}{\partial y} - \vec{u}_z \frac{\partial E_p}{\partial z}}$$ COORD. CARTESIANE

In coordinate polari:

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y)$$

$$\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{u}_x - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{u}_y \qquad \vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y$$



$$\vec{F} = F_r \vec{u}_r + F_\theta \vec{u}_\theta$$

$$\vec{r} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta$$

$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_r\,dr + F_\theta\,r\,d\theta$ → elemento di lavoro elementare

$$dW = -dE_p$$

$$F_r\,dr + F_\theta\,r\,d\theta = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial r}dr + \frac{\partial E_p}{\partial \theta}d\theta\right)$$

$$\left(F_r + \frac{\partial E_p}{\partial r}\right)dr + \left(rF_\theta + \frac{\partial E_p}{\partial \theta}\right)d\theta = 0$$

$dr, d\theta$ L.I

$$F_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial r}\vec{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\vec{u}_\theta} = -\left(\frac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{u}_\theta\right)E_p$$

$$F_\theta = -\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\cdot\frac{1}{r} \qquad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

In questo caso dobbiamo utilizzare le COORDINATE POLARI SFERICHE

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial r}\vec{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\vec{u}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_p}{\partial \phi}\vec{u}_\phi}$$ COORDINATE POLARI SFERICHE

Poiché nel nostro caso $E_p = E_p(r)$ soltanto:

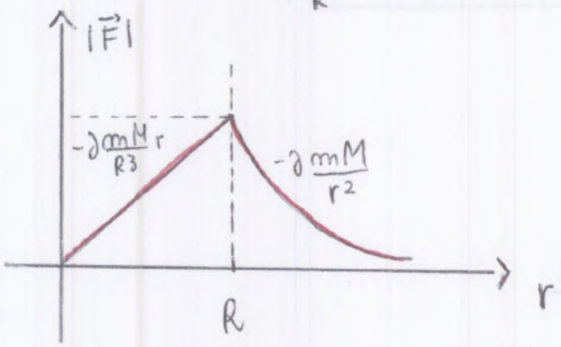
$$\boxed{\vec{F} = -\vec{u}_r \frac{dE_p}{dr}}$$

Quindi:

$$\vec{F}(r<R) = -\gamma \frac{m}{r^2} \cdot M \frac{r^3}{R^3} \vec{u}_r = -\gamma \frac{mM}{R^3} \cdot r \, \vec{u}_r$$ forza proporzionale alla distanza dal centro

$$\vec{F}(r>R) = -\gamma \frac{mM}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{F}(r<R) = -\gamma \frac{mM}{R^3} r \, \vec{u}_r$$



Determiniamo ora la forma dell'Ep creata da una massa omogenea

$$E_p(r>R) = -\gamma \frac{mM}{r} = E_{p,EX}(r)$$

$$\vec{F}(r<R) = -\vec{u}_r \frac{d}{dr} E_p(r<R)$$

$$-\gamma \frac{mM}{R^3} r \, \vec{u}_r = -\vec{u}_r \frac{dE_p(r<R)}{dr}$$

$$\frac{dE_p(r<R)}{dr} = \gamma \frac{mM}{R^3} r$$

Quindi:

$$E_p(r<R) = \int \gamma \frac{mM}{R^3} r \, dr + K$$

$$E_p(r<R) = \frac{1}{2} \gamma \frac{mM}{R^3} \cdot r^2 + K = E_{p,INT}(r)$$

Poiché Ep non può avere una discontinuità per $r = R$, poiché altrimenti in quel punto la forza sarebbe infinita, devo imporre:

$$E_{p,INT}(R) = E_{p,EXT}(R)$$

$$\frac{1}{2} \gamma \frac{mM}{R^3} \cdot R^2 + K = -\gamma \frac{mM}{R} \implies K = -\frac{3}{2} \gamma \frac{mM}{R}$$

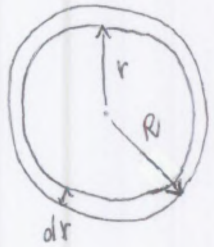
Quindi:

$$E_p(r<R) = \frac{1}{2} \gamma \frac{mM}{R^3} \cdot r^2 - \frac{3}{2} \gamma \frac{mM}{R}$$

$$E_p(r<R) = \frac{1}{2} \gamma \frac{mM}{R} \left\{ \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 3 \right\}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 129 di 246

• Quanto vale l'energia propria di una sfera omogeneamente carica?



$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$ densità di carica volumica

$r < R$

$$Q_c(r<R) = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = Q\frac{r^3}{R^3}$$

$$dQ = \underbrace{4\pi r^2 dr}_{\text{VOLUME GUSCIO}} \rho = 4\pi r^2 dr \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3Q r^2 dr}{R^3}$$

$$dE_p = K\frac{Q_c\, dQ}{r}$$ Em. propria che devo spendere per aggiungere un nuovo guscio sferico a quello già presente.

$$dE_p = KQ\frac{r^3}{R^3} \cdot 3\frac{Q}{R^3} r^2 dr \cdot \frac{1}{r} = 3\frac{KQ^2}{R^6} r^4\, dr$$

$$\boxed{E_p = \int_0^R 3\frac{KQ^2}{R^6} r^4 = 3\frac{KQ^2}{R^6} \cdot \frac{1}{5}R^5 = \frac{3}{5}K\frac{Q^2}{R}}$$ energia propria, che coincide con l'E_{pot} del sistema.

Allora:

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$

$$E_x = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{xp_x + yp_y + zp_z}{r^3}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xp_x+yp_y+zp_z}{r^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p_x}{r^3} - (xp_x+yp_y+zp_z)\frac{\partial}{\partial x}(r^{-3})\right)$$

Ma:

$$\frac{\partial}{\partial x}(r^{-3}) = (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} = -\frac{3}{\cancel{2}}\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\cdot\cancel{2}x = -3\frac{x}{r^5}$$

Quindi:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p_x}{r^3} - 3\frac{x}{r^5}(xp_x+yp_y+zp_z)\right)$$

e analogamente:

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p_y}{r^3} - 3\frac{y}{r^5}(xp_x+yp_y+zp_z)\right)$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p_z}{r^3} - 3\frac{z}{r^5}(xp_x+yp_y+zp_z)\right)$$

Ma

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p_x}{r^3} - \frac{3x}{r^5}\cdot\vec{p}\cdot\vec{r}\right)\vec{u}_x$$

$$E_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p_y}{r^3} - \frac{3y}{r^5}\vec{p}\cdot\vec{r}\right)\vec{u}_y \quad \Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{p}}{r^3} - 3\vec{r}\cdot\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^5}\right)$$

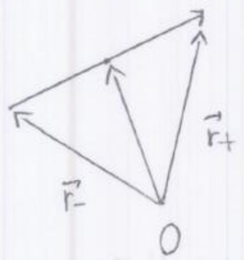
$$E_z = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p_z}{r^3} - \frac{3z}{r^5}\vec{p}\cdot\vec{r}\right)\vec{u}_z \qquad \text{ma } \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

Allora:

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{3\vec{u}_r(\vec{p}\cdot\vec{u}_r)}{r^3}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{p} - 3\vec{u}_r(\vec{p}\cdot\vec{u}_r)}{r^3}\right)$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{p}-3\vec{u}_r(\vec{p}\cdot\vec{u}_r)}{r^3}\right)}$$

Quanto vale il momento di un dipolo posto in un campo esterno uniforme?



$$\vec{M}_0 = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = \vec{r}_+ \times \left(q\vec{E}(r_+)\right) + \vec{r}_- \times \left(q\vec{E}(r_-)\right)$$

Se $\vec{E}$ UNIFORME

$$\vec{E}(r_+) = \vec{E}(r_-) = \vec{E}$$

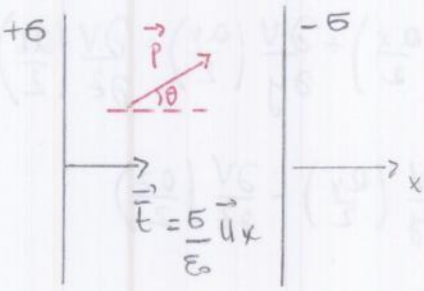
Allora:

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_+ \times (q\vec{E}) + \vec{r}_- \times (q\vec{E}) = q(\vec{r}_+ + \vec{r}_-) \times \vec{E} = q\vec{a} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$\vec{M}_0 = \vec{p} \times \vec{E}$$

Un dipolo posto in un campo elettrico uniforme è sottoposto ad una coppia $\vec{p} \times \vec{E}$, per cui non trasla, ma RUOTA fino a disporsi nella posizione di equilibrio.

Qual è la posizione di equilibrio?



$$E_p = -pE\cos\theta$$

$$\frac{dE_p}{d\theta} = pE\sin\theta = 0 \rightarrow \theta = 0, \quad \theta = \pi$$

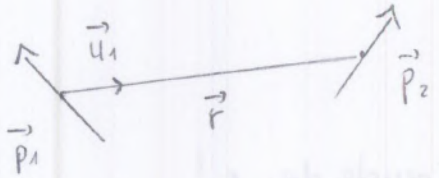
$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = pE\cos\theta$$

$$\left(\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right)_0 = pE > 0 \Rightarrow \text{MINIMO. eq. stabile}$$

$$\left(\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right)_\pi = -pE < 0 \Rightarrow \text{MASSIMO. eq. instabile}$$

Il momento $\vec{p} \times \vec{E}$ fa ruotare il dipolo fino a quando θ non sarà uguale a zero.

Calcoliamo ora l' ENERGIA DI INTERAZIONE DIPOLARE, ovvero l'E_p di un dipolo, nel campo creato da un altro dipolo.

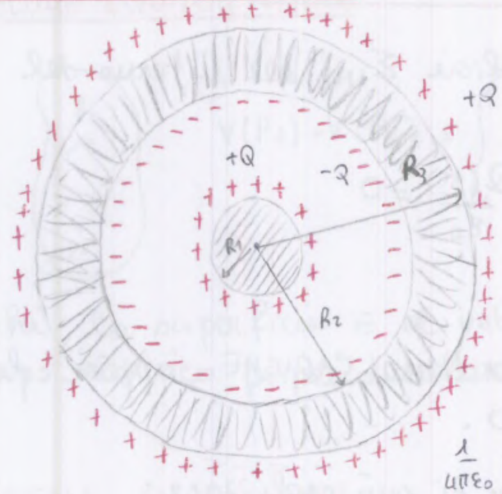


Campo elettrico generato da $\vec{p}_1$:

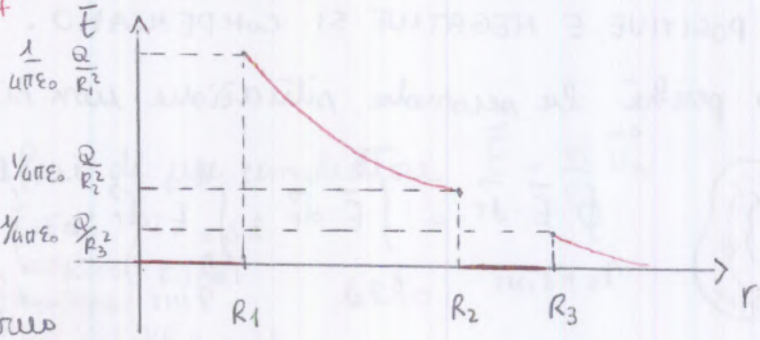
$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3\vec{u}_1(\vec{p}_1\vec{u}_1) - \vec{p}_1}{r^3}$$

$$\begin{cases} E_{p_2} = -\vec{p}_2\vec{E}_1 = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{3(\vec{p}_2\vec{u}_1)(\vec{p}_1 \cdot \vec{u}_1) - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{r^3} \\ E_{p_1} = -\vec{p}_1\vec{E}_2 = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{3(\vec{p}_1\vec{u}_2)(\vec{p}_2 \cdot \vec{u}_2) - \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_1}{r^3} \end{cases}$$

CONDENSATORE SFERICO



- $r < R_1 \Rightarrow \vec{E} = 0$
- $R_1 < r < R_2 \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$
- $R_2 < r < R_3 \Rightarrow \vec{E} = 0$
- $r > R_3 \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$



Calcoliamo la diff. di potenziale tra conduttore interno ed esterno:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r$$

$$dV = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}dr \Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + A}$$

Quindi:

$$V(R_1) = V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_1} + A$$

$$V(R_2) = V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_2} + A$$

$$\Rightarrow \Delta V = V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Allora:

$$\boxed{\Delta V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}}$$

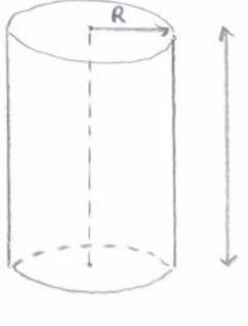
Si definisce CAPACITÀ la quantità $C = \frac{Q}{\Delta V}$ e $[C] = \frac{C}{V} = \text{Farad}$

In questo caso:

CAPACITÀ CONDENSATORE SFERICO: $C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ F

CAPACITÀ CONDENSATORE CILINDRICO

Calcoliamo in primo luogo il campo elettrico generato da un cilindro pieno.

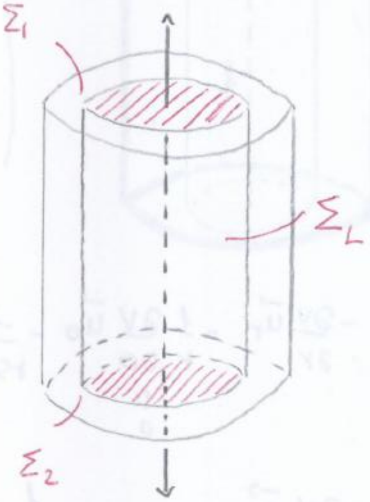


$$\phi_\Sigma = \oint\!\!\!\oint_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma$$

In questo caso $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$

Per il teorema di Gauss:

$$\phi_\Sigma = \frac{Q(\Sigma)}{\varepsilon_0}$$



Poiché $\rho = \frac{Q}{\pi R^2 h} \Rightarrow Q(\Sigma) = \rho \pi R^2 h$

Quindi:

$$\phi_\Sigma = \rho \frac{\pi R^2 h}{\varepsilon_0}$$

Costruiamo una superficie gaussiana cilindrica:

$$\phi_\Sigma(\vec{E}) = \oint\!\!\!\oint_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{u}_n \cdot d\Sigma = \underbrace{\iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot \vec{u}_{n1} \, d\Sigma_1}_{=0} + \underbrace{\iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot \vec{u}_{n2} \cdot d\Sigma_2}_{=0} + \iint_{\Sigma_L} \vec{E} \cdot \vec{u}_{nL} \cdot d\Sigma_L$$

$E(r)\vec{u}_r \cdot \vec{u}_{n_1} = 0$

$\vec{u}_r \perp \vec{u}_{n_1}$

$$\phi_\Sigma(\vec{E}) = \iint_{\Sigma_L} E(r)\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r \, d\Sigma_L = E(r) \cdot 2\pi R h$$

Quindi:

$$\rho \frac{\pi R^2 h}{\varepsilon_0} = E(r)\, 2\pi R h \Rightarrow \vec{E}(r) = \rho \frac{R}{2\varepsilon_0} = \frac{Q R}{\pi R^2 h \, 2\varepsilon_0} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 h} \cdot \frac{Q}{R}$$

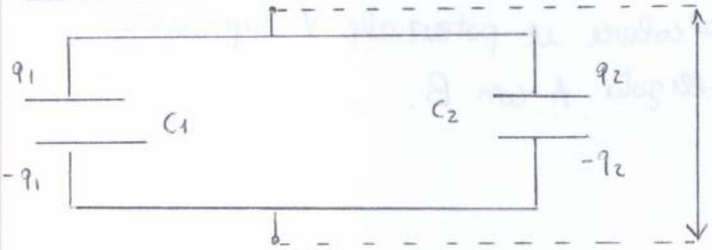
$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 h} \frac{Q}{R}}$$

Ricorda che nel caso di conduttori la carica si distribuisce solo in superficie, quindi si avrà una densità di carica lineare

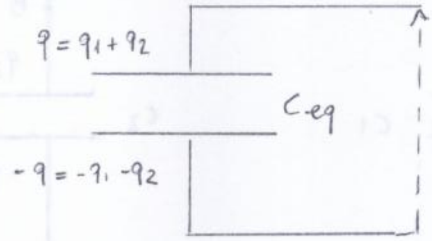
$\lambda = \frac{Q}{L}$ e il campo generato dal cilindro potrà essere espresso come

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \vec{u}_r$$

CONDENSATORI IN PARALLELO



$\equiv$



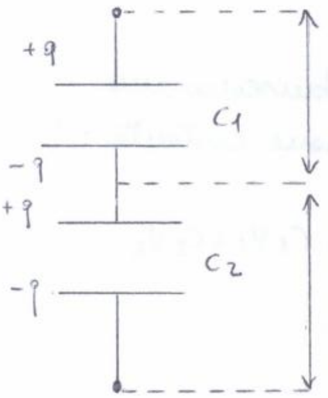
$$C = \frac{q}{V} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} C_1 = \frac{q_1}{V} \\ \\ C_2 = \frac{q_2}{V} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow q_1 = C_1 V \\ \\ \Rightarrow q_2 = C_2 V \end{array}$$

$$q = q_1 + q_2 = C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2) V$$

$$\boxed{C_{eq} = \frac{q}{V} = \frac{(C_1 + C_2) V}{V} = C_1 + C_2}$$

Due condensatori in parallelo sono equivalenti ad una capacità che è uguale alla somma delle capacità dei singoli condensatori

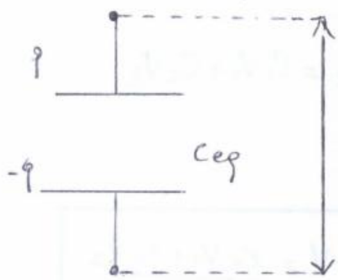
CONDENSATORI IN SERIE



Tali condensatori hanno la stessa carica su facce contigue.

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = \frac{q}{V_1} \\ \\ C_2 = \frac{q}{V_2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow V_1 = \frac{q}{C_1} \\ \\ \Rightarrow V_2 = \frac{q}{C_2} \end{array}$$

$$|||$$



$$V = V_1 + V_2$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = q \, \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$$

$$V = q \, \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$$

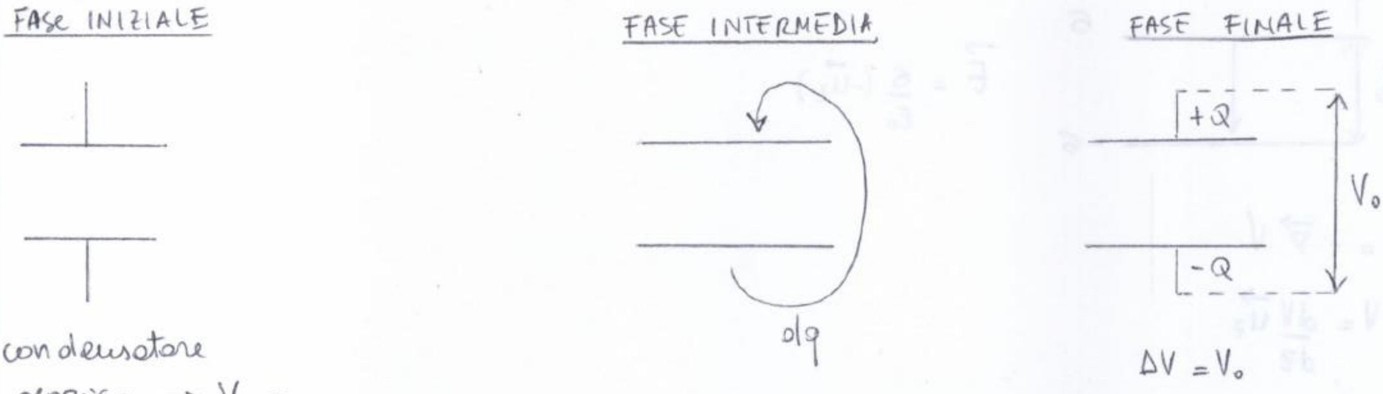
$$C_{eq} = \frac{q}{V} = q \cdot \frac{C_1 C_2}{q(C_1 + C_2)} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

L'inverso della capacità equivalente di due condensatori in serie è uguale alla somma degli inversi delle singole capacità.

ENERGIA PER CARICARE UN CONDENSATORE



condensatore scarico $\Rightarrow V=0$

Quanto vale il lavoro dW per spostare le cariche dq da sotto a SOPRA?

$$dW_{EXT} = \vec{F}_{EXT} \cdot \vec{dr} = \ominus \vec{F}_c \cdot \vec{dr} = dE_p = dq\, V \qquad (\vec{F} \cdot \vec{dr} = -dE_p \text{ se } \vec{F} \text{ conservativa})$$

(F_{EXT} è opposto a F_c

$$dW_{EXT} = dE_p$$

$$W_{EXT} = \Delta E_p = \int_0^Q V\, dQ$$

Poiché

$C = \frac{q}{V} \Rightarrow q = cV$ e se la carica cambia di una quantità infinitesima

$$dq = c\, dV$$

Quindi:

$$E_p = \int_0^Q V dQ = \int_0^{V_0} CV\, dV = \frac{1}{2} C V_0^2$$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2} C V_0^2}$$

oppure, considerando che $C = \frac{Q}{V_0} \Rightarrow V_0 = \frac{Q}{C}$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}}$$

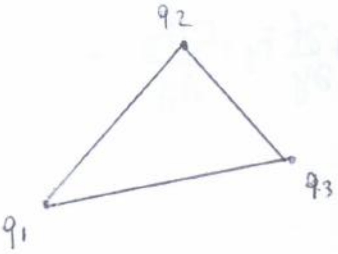
oppure

$$E_p = \frac{1}{2} C V_0 \cdot V_0 = \frac{1}{2} C \cdot \frac{Q}{C} \cdot V_0 = \frac{1}{2} V_0 Q$$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2} V_0 Q}$$

Se invece di un condensatore piano ho un altro tipo di condensatore, è sempre vero che la densità di energia vale $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$?

Immaginiamo di costruire un sistema di cariche:



$W_1 = 0$

$W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$

$W_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_3}{r_{23}}$

Per cui:

$$U = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)$$

Nel caso di i cariche:

(1) → $i \neq j$, poiché la carica non esercita un effetto su se stessa

$$U = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{ij}{}' \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

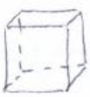
↳ poiché non contiamo le ripetizioni di coppie, come $q_1 q_2, q_2 q_1$

Allora:

$$U = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{ij}{}'\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \underbrace{\left\{\sum_{j=1}^{N}{}'\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{r_{ij}}\right\}}_{\text{potenziale di tutte le cariche tranne la carica } i.} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i \quad \text{DISTRIBUZIONE DISCRETA}$$

Cosa accade per una DISTRIBUZIONE CONTINUA?

$dq = \rho\, d\tau$



$d\tau$

$$U = \frac{1}{2}\iiint_{\tau} \rho V\, d\tau$$

Notiamo che integrando su un volume $\tau' > \tau$ il risultato non cambia, in quanto le cariche sono contenute solo all'interno di τ.

In particolare possiamo estendere τ' a tutto lo spazio, per cui:

$$U = \iiint_{\tau_\infty} \rho V\, d\tau \quad \text{, dove } \tau_\infty \text{ è tutto lo spazio}$$

Per la formula di Poisson:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla}\vec{E}$$

quindi: $U = \iiint_{\tau_\infty} \varepsilon_0 (\vec{\nabla}\vec{E}) V\, d\tau$

Quindi:

$$U = \frac{1}{2}\iiint_{\tau_\infty} \varepsilon_0 V(\vec{\nabla}\vec{E})\,d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{\tau_\infty}\left\{\vec{\nabla}(V\vec{E}) + \vec{E}^2\right\}d\tau = \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{\tau_\infty}\vec{\nabla}(V\vec{E})\,d\tau}_{\parallel} + \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{\tau_\infty} E^2\,d\tau$$

$$\oiint_{\Sigma_\infty} V\cdot\vec{E}\cdot\vec{u}_n\cdot d\Sigma = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{Q^2}{R}4\pi \longrightarrow 0$$

per $R \to \infty$

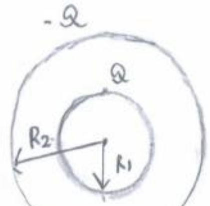
Per cui:

Se τ_∞, $R \to \infty$

$$U = \iiint_{\tau_\infty} \underline{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}\,d\tau$$

In generale quindi la densità del campo elettrostatico vale $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$.

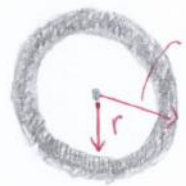
ENERGIA ELETTROSTATICA CONDUTTORE SFERICO DI RAGGIO R_1 e R_2



$$\begin{cases} \cdot\ r < R_1 \to \vec{E} = 0 \\ \cdot\ R_1 < r < R_2 \to \vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} \\ \cdot\ r > R_2 \to \vec{E} = 0 \end{cases}$$

Sappiamo che:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0\iiint_{\tau_\infty} E^2\,d\tau$$



$$d\tau = 4\pi r^2\,dr$$

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0\iiint_{\tau_\infty} E^2\,d\tau = \int_0^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(r)\,4\pi r^2\,dr$$

DATO CHE: $E(r) \equiv 0$ $\begin{cases} 0 < r < R_1 \\ r > R_2 \end{cases}$

Allora:

$$u = \int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 4\pi r^2\,dr = \frac{1}{2}\cancel{\varepsilon_0}\,\cancel{4\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{Q^2}{r^{4}}r^2\,dr = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q^2\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q^2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}Q^2\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)$$

Ricordiamo che

$$C = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\right) \Longrightarrow \boxed{u = \frac{Q^2}{2C}}$$

TERMODINAMICA

La termodinamica è una scienza assiomatica ed è una teoria macroscopica, perché si occupa di grandi sistemi.
Ciascuna particella, che possiede una posizione, una velocità e un'accelerazione, contribuisce a definire lo STATO DINAMICO del sistema, detto SISTEMA TERMODINAMICO.
In realtà al posto dello stato dinamico, è stato introdotto lo STATO TERMODINAMICO, uno stato che può essere descritto attraverso poche coordinate termodinamiche.
Conoscendo lo stato termodinamico del sistema, non conosciamo affatto lo stato dinamico del sistema.
Definiamo:

SISTEMA TERMODINAMICO: l'oggetto del nostro studio
AMBIENTE TERMODINAMICO: tutto ciò con cui il sistema può interagire

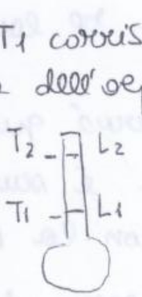
↓

UNIVERSO TERMODINAMICO

SISTEMA → ISOLATO: non scambia né energia né materia con l'ambiente
SISTEMA → CHIUSO: scambia solo energia con l'ambiente
SISTEMA → APERTO: scambia energia e materia con l'ambiente

• TEMPERATURA

Per poter misurare tale grandezza, occorre definire una GRANDEZZA TERMOMETRICA, ovvero una grandezza che vari con le sensazione di caldo e di freddo.
Come variabile termometrica è stato scelto il volume (vedi term. a mercurio).
A questo punto, si fissano due temperature di riferimento, T_1 corrispondente alla temp. del ghiaccio fondente, T_2 corrispondente a quella dell'acqua bollente.



Infine si divide la lunghezza $L_2 - L_1$ in un certo n° di parti, a seconda della scala utilizzata.
Allora, mettendo il termometro in un liquido, per esempio, otteniamo:

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}\, x$$

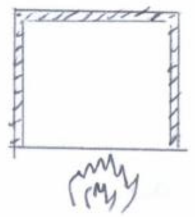
Due corpi hanno la stessa temperatura se il termometro a contatto con essi segna lo stesso valore.

Il lavoro è dovuto ad una differenza tra una proprietà dello stato 2 e una dello stato 1.

$W_{EXT} = U_2 - U_1$

U è chiamata ENERGIA INTERNA e caratterizza lo stato termodinamico di equilibrio.

In realtà posso indurre una stessa transizione $T_1 \rightarrow T_2$ senza compiere lavoro meccanico.



Allora:
L'energia interna dipende solo dallo stato del sistema.
Se il sistema è isolato, ottengo una variazione di energia interna tramite un lavoro meccanico esterno.
Se il sistema non è isolato, posso ottenere tale variazione fornendo calore.

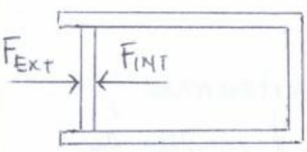
Per il PRINCIPIO DI EQUIVALENZA:

$Q = -W$ Il calore è una forma di energia

Il calore scambiato per far variare la temp. di un sistema è uguale, in cond. adiabatiche, al lavoro che deve essere speso per ottenere la stessa variazione ΔT

Se alla variazione di energia interna del sistema contribuisce sia il calore che il lavoro:

$\boxed{Q + W_{EXT} = U_2 - U_1}$ 1° PRINCIPIO TERMODINAMICA



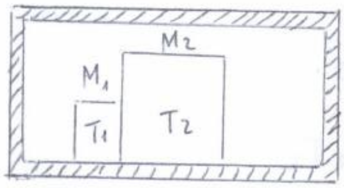
più in generale del sistema

Poiché però $W_{EXT} = -W_{GAS}$, il primo principio viene formulato in questo modo:

$\boxed{Q_{1\to 2} = W_{1\to 2} + \Delta U}$ dove $\Delta U = U_2 - U_1$

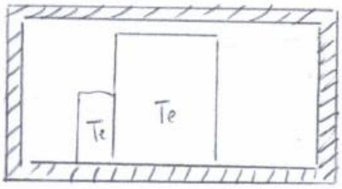
Se un sistema compie una trasformazione dallo stato 1 allo stato 2 scambiando calore e lavoro con l'ambiente, Q e W dipendono dalla trasformazione che congiunge i due stati termodinamici mentre la differenza Q-W è indipendente dalla trasformazione.

ESEMPIO



A

Due corpi sono a contatto in un recipiente adiabatico rigido. Le temp. iniziali dei due corpi sono diverse. Analizzare la quantità di calore scambiata tra i due corpi e determinare la temperatura di equilibrio.



B

- Stato iniziale:
  A) (M_1, T_1) (M_2, T_2)
- stato finale:
  B) (M_1, M_2, T_e)

$$\underbrace{Q_{A\to B}}_{\substack{\| \\ 0 \\ \text{PERCHÉ ADIABATICO}}} = \underbrace{W_{A\to B}}_{\substack{\| \\ 0 \text{ PERCHÉ} \\ \text{RIGIDO}}} + U_B - U_A \implies \boxed{U_B = U_A}$$

$$U_1(B) + U_2(B) = U_1(A) + U_2(B)$$

Poiché l'energia interna è una grandezza estensiva.

Quindi:

$$U_1(B) - U_1(A) + U_2(B) - U_2(A) = 0 \quad \circledast$$

Consideriamo ora i singoli corpi come sistemi termodinamici:

$$\overset{A}{(M_1 ; T_1)} \to \overset{B}{(M_1 ; T_e)}$$

$$(M_2 ; T_2) \to (M_2 ; T_e)$$

Allora:

$$Q_{1\,A\to B} = \underbrace{W_{1\,A\to B}}_{\substack{\| \\ 0 \text{ PERCHÉ IL CORPO È RIGIDO}}} + U_1(B) - U_1(A)$$

$$Q_{2\,A\to B} = \underbrace{W_{2\,A\to B}}_{\substack{\| \\ 0 \text{ PERCHÉ IL CORPO È RIGIDO}}} + U_2(B) - U_2(A)$$

Per cui:

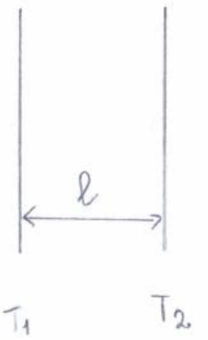
$$U_1(B) - U_1(A) = Q_{1\,A\to B}$$

$$U_2(B) - U_2(A) = Q_{2\,A\to B}$$

sostituiamo in $\circledast$:

$$Q_{1\,A\to B} + Q_{2\,A\to B} = 0$$

CONDUZIONE



Consideriamo una parete di spessore l.
Qual è il calore che occorre fornire per unità di tempo per scaldarla?

Dalla legge di FOURIER otteniamo:

$$\boxed{\frac{\delta Q}{\delta t} = K\,\frac{T_1 - T_2}{l}\,S}$$

Tale legge può essere riscritta:

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = -K\left(\frac{dT}{dx}\right)S$$

modulo del gradiente di temperatura

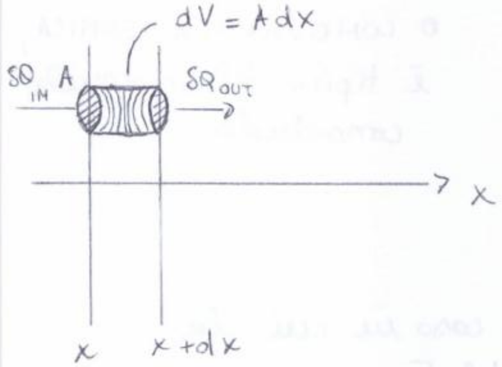
Il segno negativo sta ad indicare che la direzione del flusso termico deve corrispondere al decrescere della temperatura. (ovvero dalla zona più calda alla meno calda)

$$\boxed{\frac{\delta Q}{\delta t} = -K\,(\vec{\nabla}T)\cdot\vec{u}_n\,dS}$$

equazione che regola la conduzione in un corpo solido.

Come cambia la temperatura in un corpo qualunque?

Immaginiamo che T cambi solo lungo l'asse x:



$$\delta Q_{IN} = -K\left(\frac{dT}{dx}\right)_x A\,\delta t$$

$$\delta Q_{OUT} = -K\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} A\,\delta t$$

$$\delta Q = \delta Q_{IN} - \delta Q_{OUT} = -K\left\{\left(\frac{dT}{dx}\right)_x - \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx}\right\}A\,\delta t$$

Quindi:

$$\delta Q = -K\left\{\left(\frac{dT}{dx}\right)_x - \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx}\right\}A\,\delta t$$

ma:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} = \left(\frac{dT}{dx}\right)_x + \left(\frac{d^2T}{dt^2}\right)dx$$

Allora:

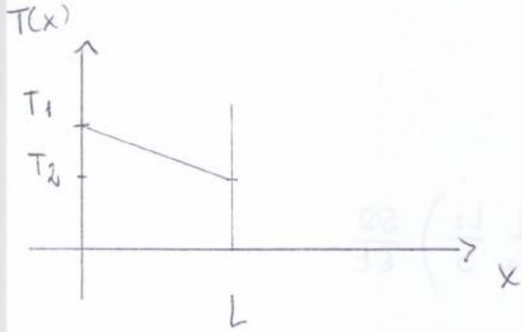
$$\delta Q = K\,\frac{d^2T}{dx^2}\,dx\,A\,\delta t \;\Rightarrow\; \boxed{\delta Q = K\,\frac{d^2T}{dx^2}\,dV\,\delta t}$$

$$\begin{cases} T(0) = b \\ T(L) = aL + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = b \\ T_2 = aL + T_1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

Per cui:

$$T(x) = ax + b$$

$$\boxed{T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x}$$ PROFILO DI TEMPERATURA



Quanto vale il calore che esce dalla camera?

$$\delta Q = -K \frac{dT}{dx} S \, \delta t$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

Quindi

$$\delta Q = -K \frac{T_2 - T_1}{L} S \, \delta t = K \frac{T_1 - T_2}{L} S \, \delta t$$

Quanto vale l'en. che bisogna fornire alla cosa affinché mantenga la stessa temperatura?

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = K \frac{S}{L} (T_1 - T_2)$$

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{K} \frac{L}{S} \frac{\delta Q}{\delta t}$$ poniamo $\frac{1}{K}\frac{L}{S} = R$ con R = resistenza termica

Quindi:

$$\boxed{T_1 - T_2 = R \frac{\delta Q}{\delta t}} \Rightarrow P = \frac{\delta Q}{\delta t} = KS \frac{T_1 - T_2}{L}$$

per cui:

$$r\frac{dT}{dr} = = \frac{Q}{-2\pi K L} = \alpha$$

Quindi:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{\alpha}{r} \Rightarrow dT = \frac{\alpha}{r}dr \Rightarrow \boxed{T = \alpha \ln r + \beta}$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

$T(R_1) = T_1$

$T(R_2) = T_2$

$$\begin{cases} T_1 = \alpha \ln R_1 + \beta \\ T_2 = \alpha \ln R_2 + \beta \end{cases} \Rightarrow T_1 - T_2 = \alpha \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

Quindi:

$$\alpha = \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}$$

Sostituiamo nella prima equazione:

$$T_1 = \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \ln R_1 + \beta \Rightarrow \beta = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \ln R_1$$

Quindi, conoscendo α e β, conosciamo il profilo di temperatura:

$$\boxed{T = \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \ln r + T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \ln R_1}$$

Quanto vale la potenza dissipata?

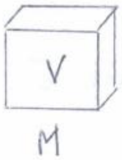
$$\frac{\delta Q}{\delta t} = -K \frac{dT}{dr} 2\pi r L$$

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = -K \frac{\alpha}{r} 2\pi r L = -2K\pi \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} L$$

$$\boxed{\frac{\delta Q}{\delta t} = 2\pi K \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} L} \Rightarrow T_1 - T_2 = \overbrace{\frac{1}{2\pi K} \frac{\ln(R_2/R_1)}{L}}^{\text{RESISTENZA TERMICA}} \frac{\delta Q}{\delta t}$$

DENSITÀ

Ci proponiamo di determinare come varia la densità di un liquido al variare della temperatura.



M non varia con la temperatura

V varia

$\Downarrow$

$$V - V_0 = V_0 \alpha (T - T_0) \Rightarrow dV = V_0 \alpha (T - T_0)$$

Quindi:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{V(T)}$$

Cambiando la temperatura, varia la densità:

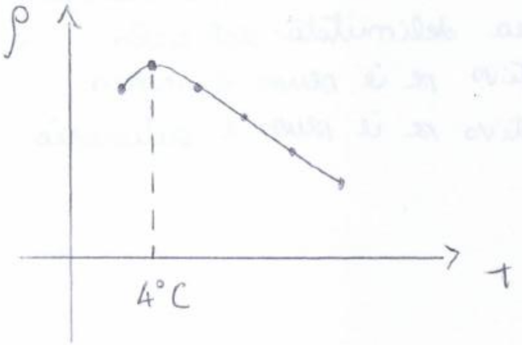
$$\frac{d\rho}{dT} = \frac{d}{dT}\left(\frac{M}{V}\right) = -\frac{1}{V^2} M \frac{dV}{dT} = -\rho \cdot \frac{1}{V}\frac{dV}{dT} \quad \text{ma} \quad dV = V_0 \alpha (\underset{\substack{\uparrow \\ dT}}{T - T_0})$$

quindi:

$$\frac{dV}{dT} = V_0 \alpha \Rightarrow \boxed{\frac{d\rho}{dT} = -\alpha \rho}$$

la densità diminuisce in seguito a una dilatazione volumica.

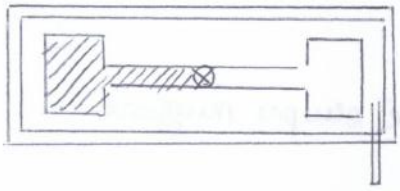
Per l'acqua la situazione è diversa:



- Tra 0°-4° la densità dell'acqua aumenta
- Dopo 4° la densità diminuisce

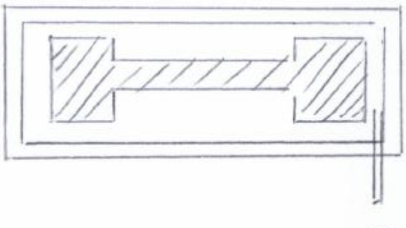
ESPERIMENTO DI JOULE (sui gas perfetti)

Consideriamo un gas perfetto in un recipiente metallico:



T_0

Joule notò che aprendo la valvola, la temperatura non cambiava. Dunque nella trasformazione da A a B non c'è passaggio di calore tra il sistema e l'ambiente circostante.



T_0

$$Q_{A \to B} = 0$$

$$\underbrace{Q_{A \to B}}_{=0} = \underbrace{W_{A \to B}}_{=0 \text{ PERCHÉ RIGIDO}} + U(B) - U(A) \Rightarrow \boxed{U(B) = U(A)}$$ l'energia interna non cambia

. Per un gas perfetto quindi, l'energia interna dipende solo dalla temperatura

RELAZIONE DI MAYER

$\Delta Q = c \cdot m \Delta T$ dove c è il CALORE SPECIFICO

Introduciamo:

$\Delta Q = c \cdot n \Delta T$ dove c è invece il CALORE SPECIFICO MOLARE

Se la variazione di temp. è piccola:

$\delta Q = c \cdot n \, \delta T$

. Per un gas in una trasf. ISOBARA $\delta Q_p = n c_p dT$

. Per un gas in una trasf. ISOCORA $\delta Q_V = n c_V dT$

Per un gas perfetto, il calore specifico misurato a $p = \text{cost}$ e quello misurato a $V = \text{cost}$ sono legati dalla relazione di MAYER.

$\delta Q = \delta W + dU$

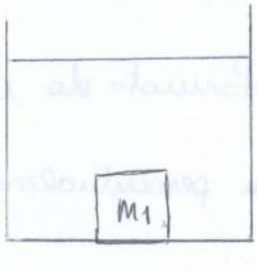
$\delta Q = p dV + dU$ dove $pV = nRT$

TRASF. ISOCORA $(V = \text{cost}) \Rightarrow \delta Q_V = dU = n c_V dT$

TRASF. ISOBARA $(P = \text{cost}) \Rightarrow \delta Q_p = p dV + dU = p dV + n c_V dT = nR dT + n c_V dT$

12.3

$T_1 = 90°C$, m_1, c_1



$Te = 15,9°C$

$m_2 = 1,5\ Kg$

$c_2 = 4186,8\ J/Kg\ K$

$T_2 = 15°C$

Calcolare la CAPACITÁ TERMICA del corpo.

$$\delta Q = \delta W + dU$$
$$\delta Q = 0 \qquad \delta W = 0$$

$U(B) - U(A) = 0$

$U_1(B) - U_1(A) + U_2(B) - U_2(A) = 0$

Considero i due corpi come sistemi:

$\delta Q_1 = dU$

$c_1 \delta m_1 (Te - T_1) = U_1(B) - U_1(A) \implies c_1 m_1 (Te - T_1) = U_1(B) - U_1(A)$

$\delta Q_2 = dU$

$c_2 \delta m_2 (Te - T_2) = U_2(B) - U_2(A) \implies c_2 m_2 (Te - T_2) = U_2(B) - U_2(A)$

Quindi:

$c_1 m_1 (Te - T_1) = - c_2 m_2 (Te - T_2)$

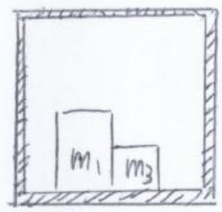
$$c_1 m_1 = C = \frac{c_2 m_2 (T_2 - Te)}{Te - T_1} = 76,27\ J/K$$

Successivamente, il corpo alla temp. Te viene posto in un contenitore adiabatico, con un altro corpo dello stesso materiale, di massa m_3 e $T_3 = 5°C$.

$Te' = 12.2°C$

Calcolare la capacità termica del secondo corpo.

Analogamente ai calcoli precedenti:



$c_1 m_1 (Te' - Te) = - c_3 m_3 (Te' - T_3)$

$$c_3 m_3 = \frac{c_1 m_1 (Te - Te')}{Te' - T_3} = 39,19\ J/K$$

EQUAZIONI DI POISSON – ADIABATICHE REVERSIBILI

$Q_{A \to B} = W_{A \to B} + U(B) - U(A)$

$\delta Q = \delta W + dU$

Per un gas o un liquido:

$\delta W = p\,dV$

Quindi

$\delta Q = p\,dV + dU$

$dU = n c_v\,dT$

$\delta Q = p\,dV + n c_v\,dT$

Per una T. ADIABATICA REVERSIBILE

GAS PERFETTO:

$\delta Q = 0$

$p\,dV + n c_v\,dT = 0$ ma $p = n\frac{RT}{V}$

Allora:

$\cancel{n} R T \frac{dV}{V} + \cancel{n} c_v\,dT = 0$

$R\frac{dV}{V} + c_v\frac{dT}{T} = 0$

$\frac{R}{c_v}\frac{dV}{V} + \frac{dT}{T} = 0$ ma per Mayer: $c_p - c_v = R$

Quindi:

$\frac{c_p - c_v}{c_v}\frac{dV}{V} + \frac{dT}{T} = 0$ ma $\frac{c_p}{c_v} = \gamma > 1$

$(\gamma - 1)\frac{dV}{V} + \frac{dT}{T} = 0$

Integriamo da $(V_0, T_0) \longrightarrow (V, T)$

$(\gamma - 1)\ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) = 0$

$\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\gamma - 1} = 0$

Quindi

$\boxed{T V^{\gamma - 1} = c}$ equazione adiabatica reversibile in termini di T, V.

PRIMO PRINCIPIO TERMODINAMICA PER UNA TRASFORMAZIONE ISOTERMA, ISOBARA, ISOCORA

- ISOTERMA

$\delta Q = \delta W + dU$

$dU = n c_v dT$

$\delta Q = \delta W + n c_v dT$

ISOTERMA $\rightarrow dT = 0$

Quindi:

$\boxed{\delta Q = \delta W}$ Il calore assorbito è trasformato tutto in lavoro

- ISOBARA

$\delta Q = \delta W + dU$

$\delta Q = p dV + dU$

ISOBARA $\rightarrow p =$ costante

$p dV = d(pV)$

Quindi:

ENTALPIA $H = pV + U$

$\delta Q = d(pV) + dU = d(pV + U)$

Allora:

$\boxed{\begin{array}{l} \delta Q = dH \\ Q = H(B) - H(A) \end{array}}$ Il calore assorbito è uguale alla variazione di entalpia.

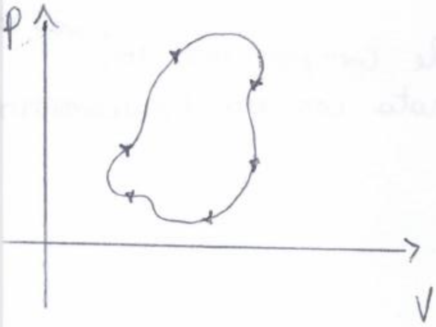
- ISOCORA

$\delta Q = \delta W + dU$

$\delta Q = p dV + dU$ ma $V = \text{cost} \Rightarrow dV = 0$

$\boxed{\delta Q = dU}$ Il calore assorbito è uguale alla variazione di energia interna.

CICLO DI CARNOT



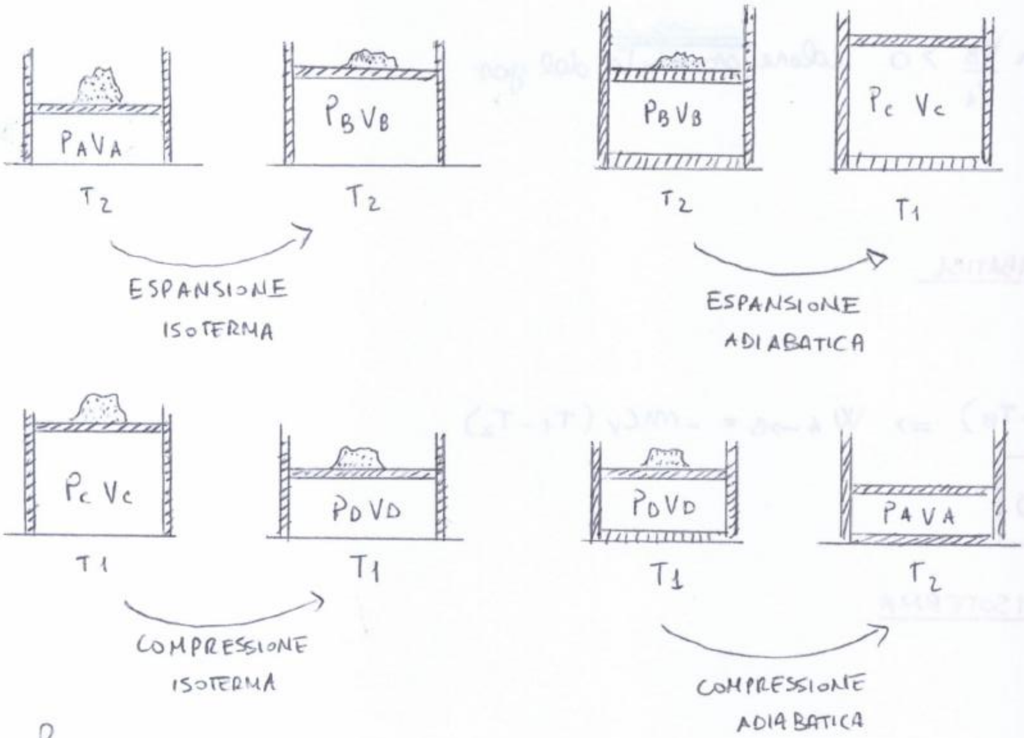
Ricordiamo che per una trasformazione ciclica

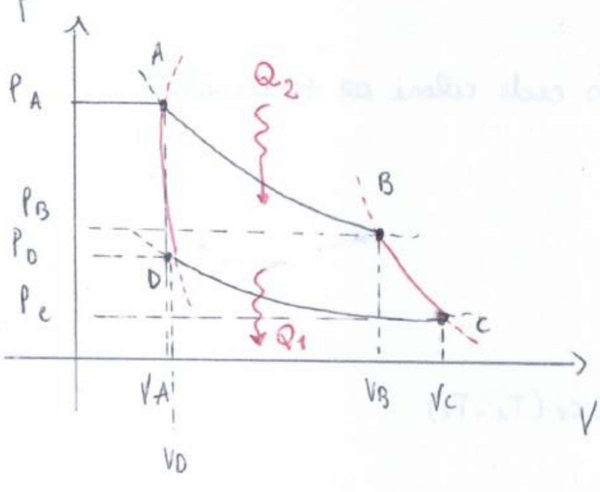
$Q = W$

In un ciclo il lavoro fatto è pari al calore complessivamente scambiato.

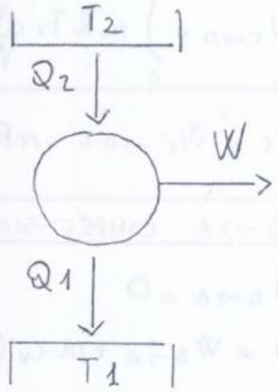
Il ciclo di Carnot è costituito da 4 trasformazioni reversibili:

1) $A \rightarrow B$ espansione isoterma reversibile alla temperatura T_2
2) $B \rightarrow C$ espansione adiabatica reversibile
3) $C \rightarrow D$ compressione isoterma reversibile alla temperatura T_1
4) $D \rightarrow A$ compressione adiabatica reversibile





La trasformazione si può indicare schematicamente in questo modo →



Quindi:

CALORE ASSORBITO DAL SISTEMA: $Q_{ASS} = Q_2 = nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$

CALORE CEDUTO DAL SISTEMA: $Q_{CED} = |Q_1| = nRT_1 \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)$

In una trasformazione ciclica

$W = Q$ cioè in un ciclo il lavoro fatto è pari al calore complessivamente scambiato.

Allora:

$$W = Q = Q_1 + Q_2 = nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) - nRT_1 \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)$$

Calcoliamo il RENDIMENTO η:

$$\boxed{\eta = \frac{W}{Q_{ASS}}}$$

Il rendimento rappresenta la percentuale di calore assorbito trasformato in lavoro ed è definito come il rapporto tra lavoro fornito e quantità di calore assorbito.

In questo caso:

$$\eta = \frac{W}{Q_{ASS}} = \frac{Q_2 + Q_1}{Q_2} = 1 + \frac{Q_1}{Q_2} = 1 + \frac{-nRT_1 \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)}{nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}\frac{\ln(V_C/V_D)}{\ln(V_B/V_A)}$$

ma:

$A \to B$ ISOTERMA $\Rightarrow p_A V_A = p_B V_B$

$B \to C$ ADIABATICA $\Rightarrow p_B V_B^\gamma = p_C V_C^\gamma$

$C \to D$ ISOTERMA $\Rightarrow p_C V_C = p_D V_D$

$D \to A$ ADIABATICA $\Rightarrow p_D V_D^\gamma = p_A V_A^\gamma$

Moltiplichiamo primi e secondi membri:

$$\cancel{p_A} V_A \cancel{p_B} V_B^\gamma \cancel{p_C} V_C \cancel{p_D} V_D^\gamma = \cancel{p_B} V_B \cancel{p_C} V_C^\gamma \cancel{p_D} V_D \cancel{p_A} V_A^\gamma$$

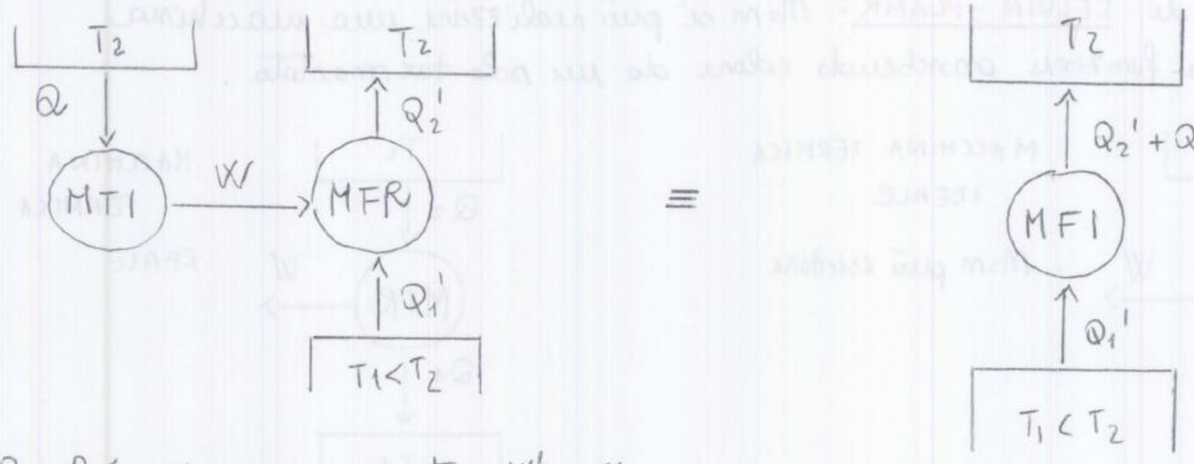
$$V_A V_B^\gamma V_C V_D^\gamma = V_B V_C^\gamma V_D V_A^\gamma$$

Dividiamo per il secondo membro:

$$\frac{V_A V_B^\gamma V_C V_D^\gamma}{V_B V_C^\gamma V_D V_A^\gamma} = \frac{V_B^{\gamma-1} V_D^{\gamma-1}}{V_C^{\gamma-1} V_A^{\gamma-1}} = 1 \Rightarrow \left(\frac{V_B V_D}{V_C V_A}\right)^{\gamma-1} = 1 \Rightarrow \frac{V_B V_D}{V_C V_A} = 1 \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

Quindi: $\boxed{\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}}$ rendimento di un gas perfetto che esegue un ciclo di Carnot.

Utilizziamo il lavoro fatto dalla MT1 per far funzionare la MFR, ottenendo un'unica macchina equivalente:



Poiché abbiamo supposto $W' = W$

$Q = -Q_1' - Q_2'$

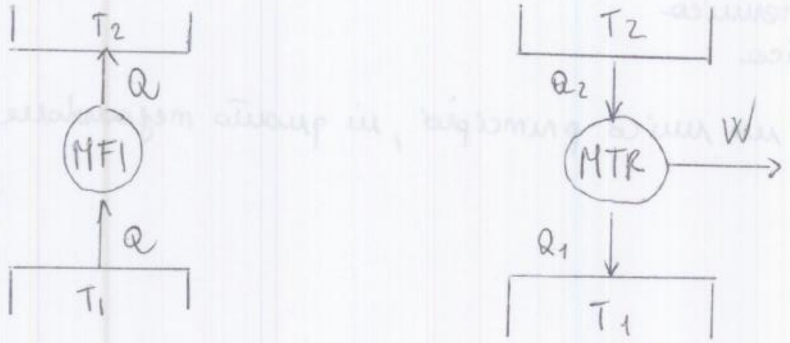
La macchina equivalente che si ottiene, assorbe Q_1' a temperatura T_1 e cede

$Q_2' + Q = -Q_1'$ al termostato a temperatura T_2.

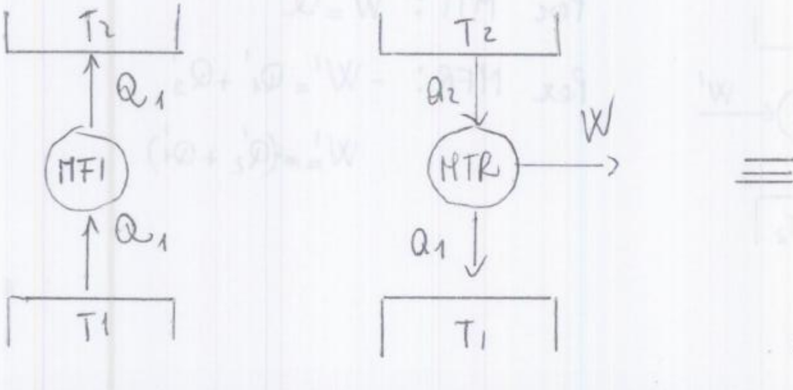
Abbiamo quindi ottenuto una MFI che viola l'enunciato di Clausius.

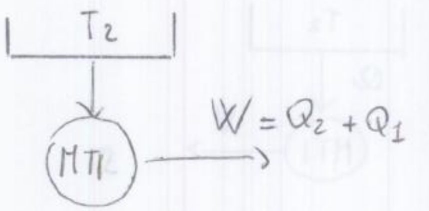
- Se $\nexists$ MFI $\Rightarrow \nexists$ MT1

Consideriamo una macchina frigorifera ideale e una macchina termica reale.



Supponiamo di collegare le due macchine e di regolare la macchina frigorifera ideale in modo che $Q = Q_1$





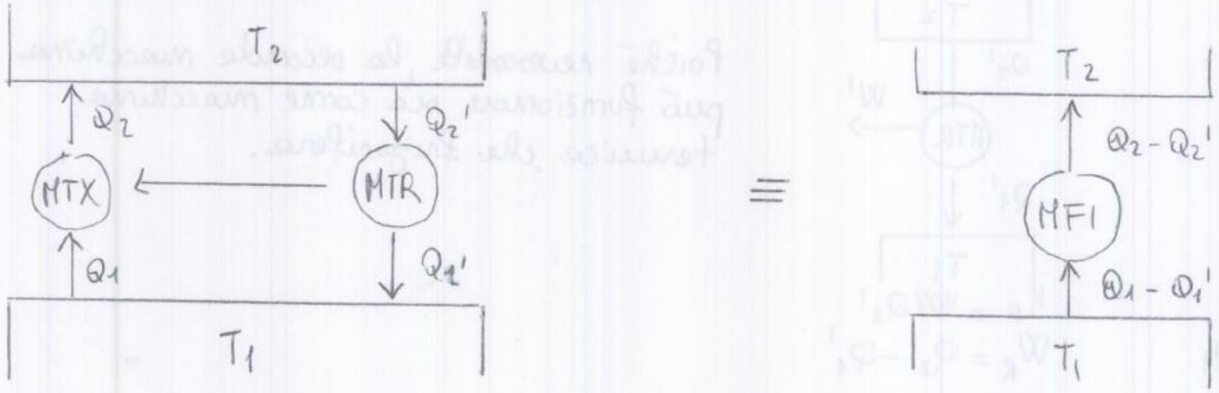
Complessivamente, la macchina equivalente non scambia calore con il termostato T1.

Supponiamo ora che MTX sia reversibile.
Abbiamo appena dimostrato che $\eta_x \le \eta_R$

Cosa succede ipotizzando $\eta_R > \eta_x$?
È possibile cioè che tra due macchine reversibili, ce ne sia una con un rendimento superiore alle altre?

• Supponiamo $\eta_R > \eta_x$:

Costruiamo una macchina termica in cui MTX sia una macchina frigorifera, mentre MTR sia una macchina termica.



Poiché $\eta_R > \eta_x$

$$\frac{W}{Q_2'} > \frac{W}{Q_2} \Rightarrow Q_2 > Q_2'$$

Quindi

$$Q_2' - Q_2 = Q_1' - Q_1 < 0 \quad e \quad Q_1 - Q_1' = Q_2 - Q_2' > 0$$

Anche in questo caso abbiamo ottenuto una macchina frigorifera ideale ϟ

Per cui: $\eta_R \le \eta_x$

Ma poiché abbiamo prima dimostrato che $\eta_x \le \eta_R$
Queste due disuguaglianze sono compatibili solo se

$$\boxed{\eta_R = \eta_x}$$

Ciò succede solo se $f(t_\alpha, t_\beta) = \frac{G(t_\alpha)}{G(t_\beta)}$:

infatti

$$f(t_1,t_0)\, f(t_0,t_2) = \frac{G(t_1)}{G(t_0)} \cdot \frac{G(t_0)}{G(t_2)} = \frac{G(t_1)}{G(t_2)}$$

Siamo arrivati dunque a tale relazione:

$$f(t_1,t_2) = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{G(t_1)}{G(t_2)}$$

Il rapporto tra il calore ceduto e il calore assorbito deve essere il rapporto tra una funzione relativa al termostato più freddo e una relativa al termostato più caldo.

Nel caso di un gas perfetto sappiamo che

$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$ dove T_1, T_2 è le temperature misurate con il termometro a gas ideale

Pertanto

$\frac{G(t_1)}{G(t_2)} = \frac{T_1}{T_2}$ le scale delle temperature termodinamica assoluta e quelle del termometro a gas ideale sono proporzionali:

$$G(t) = KT$$

Inoltre, poiché al punto triplo dell'acqua esse coincidono:

$g(T_{tr}) = 273{,}16 = T_{tr}$

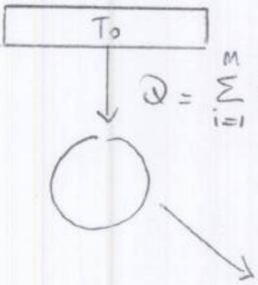
$K = \frac{G(t_r)}{T_{tr}} = 1 \implies G(T) = T$

Allora la temperatura misurata con il termometro a gas ideale è la temperatura assoluta.

Possiamo osservare che:

$$\frac{Q_i}{Q_{i0}} = \frac{T_i}{T_0} \Rightarrow Q_{i0} = T_0 \frac{Q_i}{T_i}$$

Consideriamo il sistema complessivo:



$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_{i0} = T_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i}$$

altrimenti avremmo una macchina termica ideale

$$W_T = \sum_{i=1}^{n} W_i + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{W}} = \underline{\underline{Q \leq 0}}$$

0 perché ogni sorgente a T_i scambia una quantità nulla di calore pari a zero.

Allora:

+ se assorbiti dalla macchina
- se ceduti dalla macchina

$$T_0 \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$ <u>DISUGUAGLIANZA DI CLAUSIUS</u>

Se la macchina fosse reversibile, potremmo farla funzionare al contrario per cui:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{T_i} \geq 0$$

Allora le due disequazioni sono compatibili se e solo se vale l'uguaglianza.
Per una MACCHINA REVERSIBILE allora:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{T_i} = 0$$

Mentre per una macchina IRREVERSIBILE:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{T_i} < 0$$

Se supponiamo di avere un numero infinito di termostati $\Rightarrow N \rightarrow \infty$

$$\sum_{i=1}^{N} \rightarrow \oint$$ ALLORA

$$\oint \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_R = 0$$

$$\oint \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_I < 0$$

Da ciò deduciamo che se il sistema è isolato, durante una trasformazione l'entropia non può diminuire.
Da ciò discende un ulteriore enunciato del secondo principio:
L'ENTROPIA DELL'UNIVERSO CRESCE SEMPRE

ENTROPIA DI UN SOLIDO

Prendiamo un corpo che passa dalla temperatura T_0 alla temperatura T_1. Di quanto cambia la sua entropia?

$\boxed{T_0}$ $\quad$ $\boxed{T_1}$

$T_0 + dT ; T_0 + 2dT ; T_1 - dT$

Per il calcolo della variazione di entropia immaginiamo un processo reversibile con scambio di calore tra il corpo e infinite sorgenti a temperature crescente

$\Delta Q_i = c\, m\, \Delta T$

Quando $N \to \infty$ $\quad \Delta t \to dT$

$\delta Q = c\, m\, dT$

$$\int_{T_0}^{T_1} dS = \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_0}^{T_1} c\, m \frac{dT}{T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_1 - S_0 = c\, m \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)}$$

ENTROPIA GAS PERFETTO

$\delta Q = p\, dV + n\, c_V\, dT$

$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{p}{T} dV + n\, c_V \frac{dT}{T} \qquad pV = nRT \to p = \frac{nRT}{V}$

$$dS = nR\,dV + n\, c_V \frac{dT}{T} \quad \Rightarrow \quad dS = n\left\{ R\frac{dV}{V} + c_V \frac{dT}{T}\right\} = \frac{n}{c_V}\left\{\frac{R}{c_V}\frac{dV}{V} + \frac{dT}{T}\right\}$$

Ricordiamo che:

$c_p = c_V + R \quad \to \quad R = c_p - c_V$

$\gamma = \frac{c_p}{c_V} > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{c_V} = \gamma - 1$

Quindi:

$$dS = n\, c_V \left\{(\gamma - 1)\frac{dV}{V} + \frac{dT}{T}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S - S_0 = n\, c_V \left\{(\gamma-1)\ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)\right\}}$$

- ENTROPIA DI UN CORPO CHE FONDE

m giaccio $\rightarrow$ liquido

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{\lambda m}{T}$$

- ENTROPIA DI UN CORPO DI MASSA m E CALORE SPECIFICO c, CHE PASSA DA T_i A T_f.

$$Q = mc\,(T_f - T_i)$$

$\boxed{T_i}$ $\boxed{T_{K-1}}$ $\boxed{T_K}$ $\boxed{T_{K+1}}$ $\boxed{T_f}$

$$\Delta T = T_K - T_{K-1} \qquad \Delta T = T_{K+1} - T_K$$

$$\Delta Q_{K-1 \rightarrow K} = mc\,\Delta T$$

Se $N = n°$ termostati $\rightarrow \infty$

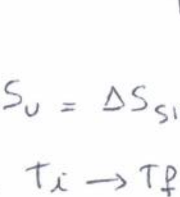
$$\delta Q = mc\,dT$$

$$dS_{SIST} = \frac{\delta Q}{T} = mc\frac{dT}{T}$$

$$S_{SIST}(T_f) - S_{SIST}(T_i) = mc \log\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$$

$$\Delta S_{SIST} = mc \log\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$$

Quanto vale la variazione di entropia dell'ambiente?



$T_i < T_f$

$$\Delta S_{AMB} = -\frac{Q}{T_f} = -mc\frac{(T_f - T_i)}{T_f}$$

$$\Delta S_U = \Delta S_{SIST} + \Delta S_{AMB} = mc \log\frac{T_f}{T_i} - mc\frac{T_f - T_i}{T_f}$$

per $T_i \rightarrow T_f \Rightarrow dS_U = dS_{SIST} + dS_{AMB}$

$$dS_{SIST} = mc\frac{dT}{T}$$

$$dS_{AMB} = -mc\frac{dT}{T_f}$$

$$\rightarrow dS_U = mc\,dT\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_f}\right) > 0$$

Allora:

$$\eta = 1 - \frac{(T - dT)}{T} = \frac{\cancel{T} - \cancel{T} + dT}{T} = \frac{dT}{T}$$

$$W = dp\,(V_V - V_L) = dp\,(m v_V - m v_L) = m\,dp\,(v_V - v_L) \quad \text{(area del ciclo)}$$

$$Q_{ASS} = \lambda_V m$$

Allora:

$$\begin{cases} \eta = \dfrac{dT}{T} \\ \eta = \dfrac{\cancel{m}\,dP\,(v_V - v_L)}{\lambda_V \cancel{m}} \end{cases} \Rightarrow \frac{dP\,(v_V - v_L)}{\lambda_V} = \frac{dT}{T}$$

Quindi

$$\boxed{\frac{dP}{dT} = \frac{1}{T}\,\frac{\lambda_V}{v_V - v_L}}$$

Poiché ci troviamo in un passaggio di stato:

$\delta Q = \lambda_v \, dm$

Allora:

$$\lambda_v \cancel{dm} = p \cancel{dm} (v_V - v_L) + \cancel{dm} (u_V - u_L)$$

$$\frac{u_V - u_L}{v_V - v_L} = -p + \frac{\lambda_V}{v_V - v_L}$$

Ricordiamo che:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial V}\right)_T = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta V} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\Delta m (u_V - u_L)}{\Delta m (v_V - v_L)} = \frac{u_V - u_L}{v_V - v_L}$$

Per cui, sotto la campana, vale questa relazione:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial V} = -p + \frac{\lambda_V}{v_V - v_L}}$$

Ricordiamo l'equazione dell'energia:

$$\frac{\partial u}{\partial V} = -p + T \frac{\partial P}{\partial T}$$

Allora:

$$\cancel{-p} + \frac{\lambda_V}{v_V - v_L} = \cancel{-p} + T \frac{\partial P}{\partial T}$$

Quindi:

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{1}{T} \frac{\lambda_V}{v_V - v_L}}$$

EQUAZIONE DI CLAPEYRON

Poiché inoltre sotto la campana $p = p(T)$

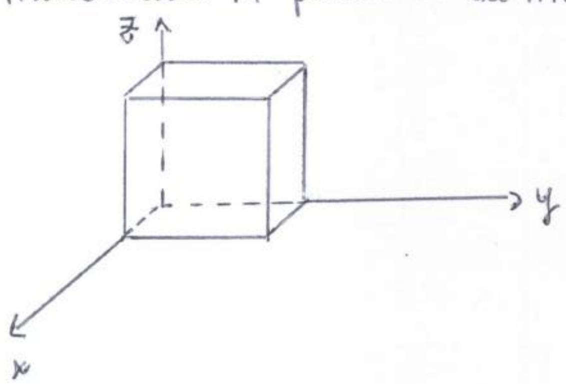
$$\boxed{\frac{dP}{dT} = \frac{1}{T} \frac{\lambda_V}{v_V - v_L}}$$

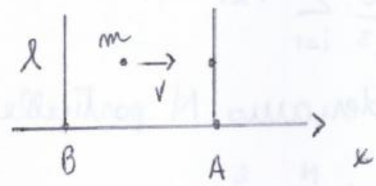
TEORIA CINETICA DEI GAS

Le ipotesi di partenza di tale teoria sono:

- il gas è formato da particelle puntiformi che non occupano volume
- non esistono interazioni tra le particelle (esse interagiscono solo se a contatto)
- tutte le direzioni sono ugualmente probabili
- la forza di gravità può essere trascurata
- gli urti tra le particelle o tra le particelle e le pareti sono elastici

Prendiamo N particelle di massa m in un contenitore cubico:





$p_{in} = m v_{in}$

$p_f = -m v_f$

$\Delta p = (p_f - p_{in}) = -m(v_f + v_{in})$

Quindi:

$\Delta p_{PARETE} = m(v_f + v_{in})$

Poiché abbiamo supposto l'urto elastico:

$$\left.\begin{aligned} E_{k\,in} &= \frac{1}{2} m v_{in}^2 \\ E_{k\,f} &= \frac{1}{2} m v_f^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_{k\,in} = E_{kf} \rightarrow v_{in}^2 = v_f^2 \text{ uguali in modulo}$$

Per cui: $v = v_{in} = v_f$

La quantità di moto ceduta in un urto risulta:

$\Delta p_{PARETE} = 2mv$

$F = \Delta p_{PARETE} \cdot \underbrace{(\text{n° particelle che urtano})}_{n}$

n° di urti di una molecola per unità di tempo

Sappiamo che:

$$t_{A\to B} = \frac{l}{v} = t_{B\to A} \Rightarrow t_{A\to B\to A} = \frac{2l}{v} \Rightarrow n = \frac{1}{t_{A\to B\to A}} = \frac{v}{2l}$$

Allora:

$$\boxed{p = \frac{1}{3} \frac{m N}{l^3} \langle v^2 \rangle}$$

poiché $l^3 = \tau$ = volume occupato dalle molecole

$$p\tau = \frac{1}{3} m N \langle v^2 \rangle$$

che si scrive anche come:

$$p\tau = \frac{2}{3} N \cdot \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$$

$$\boxed{p\tau = \frac{2}{3} N \langle E_K \rangle}$$ poiché $p\tau = nRT$

$\frac{2}{3} N \langle E_K \rangle = nRT$ ma $n = \frac{N}{N_A}$

$$\frac{2}{3} \cancel{N} \langle E_K \rangle = \frac{\cancel{N}}{N_A} RT$$

$$\langle E_K \rangle = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} K_b T$$

Quindi:

$$\boxed{\langle E_K \rangle = \frac{3}{2} K_b T} \longrightarrow \begin{cases} \bullet \text{ MONOATOMICO } \langle E_K \rangle = \frac{3}{2} K_b T \text{ (3 gradi di libertà)} \\ \bullet \text{ BIATOMICO } \langle E_K \rangle = \frac{5}{2} K_b T \text{ (3+2 gradi di libertà)} \\ \bullet \text{ SOLIDO } \langle E_K \rangle = 3 K_b T \text{ (6 gradi di libertà)} \end{cases}$$

Per ogni modo in cui la particella si può muovere spetta $\frac{1}{2} K_b T$.

Poiché l'energia cinetica media è l'unica forma di energia interna:

$U = N \langle E_K \rangle = \frac{3}{2} K_b T N$ dove $N = n N_A$

Quindi:

- $U = \frac{3}{2} RT \cdot n$ MONOATOMICO
- $U = \frac{5}{2} RT n$ BIATOMICO
- $U = 3 RT n$ SOLIDO (cristallo)

$\xrightarrow{U = n c_V T}$

- $c_V = \frac{3}{2} R$ MONOATOMICO
- $c_V = \frac{5}{2} R$ BIATOMICO
- $c_V = 3 R$ CRISTALLO

EQUAZIONE DI VAN DER WAALS

- Se le particelle hanno delle cariche elettriche, ci sono delle forze attrattive che non possono essere trascurate
- Le molecole di un gas occupano un volume, non possono essere considerate puntiformi.

L'equazione dei gas perfetti va modificata:

$$\boxed{\left(p + \frac{a}{V^2}\right)\left(V - b\right) = RT}$$

- $\frac{a}{V^2}$ viene detto PRESSIONE INTERNA e a tiene conto delle forze attrattive tra le particelle
- b viene detto COVOLUME

Supponendo valida tale formula, determiniamo:

- L'ENERGIA INTERNA DI UN GAS DI VAN DER VAALS
- L'ENTROPIA
- L'EQUAZIONE DELLE ADIABATICHE REVERSIBILI

(1) ENERGIA INTERNA

$$\frac{\partial U}{\partial V} = -p + T\frac{\partial p}{\partial T}$$

$$p + \frac{a}{V^2} = \frac{RT}{V-b} \implies p = -\frac{a}{V^2} + \frac{RT}{V-b}$$

Allora:

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{V-b} \implies \frac{\partial U}{\partial V} = \frac{a}{V^2} - \cancel{\frac{RT}{V-b}} + \cancel{\frac{RT}{V-b}}$$

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial V} = \frac{a}{V^2}} \quad \text{integrando} \quad U = \int \frac{a}{V^2}\, dV + f(T)$$

Quindi:

$$U(T,V) = -\frac{a}{V} + f(T)$$

③ ADIABATICA REVERSIBILE

$dS = \frac{\delta Q}{T}$ ma $\delta Q = 0 \Rightarrow dS = 0$ una adiabatica reversibile è ISOENTROPICA.

Quindi:

$$\boxed{T^{c_V}(V-b)^R = cost}$$

• Se l'aria subisce un'espansione adiabatica salendo verso l'alto, di quanto si raffredda?

$Q = W + \Delta U$

$Q = 0$ ADIABATICA

$W + \Delta U = 0$

$W + m c_V (T_f - T_i) = 0$ GAS PERFETTO

$m c_V (T_f - T_i) = -W$

$T_f - T_i = -\frac{W}{m c_V}$ Tutte le volte che il gas si espande, $W > 0$, la temperatura diminuisce.

Per la legge di Stevino:

$$\boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho g}$$

$pV = mRT \rightarrow pV = m\frac{RT}{M} \Rightarrow p = \rho\frac{RT}{M}$

$\rho = p\frac{M}{RT}$

$\frac{dp}{dz} = -p\frac{M}{RT}g \Rightarrow \boxed{\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT}dz}$ Devo trovare una relazione che mi permetta di collegare temperatura e altitudine

Sappiamo che:

$Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = c$ pressione e temperatura sono legate da un'adiabatica reversibile

$d\left(Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right) = 0$

Per cui:

EQUAZIONE DELL' ENERGIA

Ricordiamo il teorema di Schwartz:

$f = f(x,y)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Consideriamo ora un sistema di tipo fluido, in cui P, T, V sono le coordinate naturali per descrivere il sistema.
Date queste tre grandezze, me bastano due per descrivere completamente il sistema, poiché P, V, T sono legate dall' equazione di stato dei gas perfetti.
Prendiamo T, V come variabili indipendenti $\Rightarrow p = p(T,V)$

Per il primo principio della termodinamica:

$$\delta Q = \delta W + dU$$

$$\delta Q = p dV + dU$$

Poiché $U = U(T,V) \Rightarrow dU = \frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{\partial U}{\partial V} dV$

Quindi:

$$\delta Q = p dV + \frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{\partial U}{\partial V} dV$$

$$\delta Q = \left(p + \frac{\partial U}{\partial V}\right) dV + \frac{\partial U}{\partial T} dT$$

Ricordiamo che

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

Allora:

$$dS = \frac{1}{T}\left(p + \frac{\partial U}{\partial V}\right) dV + \frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial T} dT$$

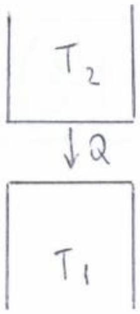
Poiché inoltre in questo caso $S = S(T,V)$

$$dS = \frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial V} dV$$

Perciò:

$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial T}$ Deriviamo la 1ª rispetto a V

$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{1}{T}\left(p + \frac{\partial U}{\partial V}\right)$ Deriviamo la 2ª rispetto a T es.



Di quanto varia l'entropia del sistema 2?

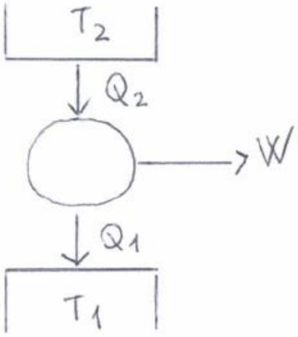
$$\Delta S_2 = -\frac{Q}{T_2}$$

$$\Delta S_1 = \frac{Q}{T_1}$$

$$\Rightarrow \Delta S_U = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -\frac{Q}{T_2} + \frac{Q}{T_1} = Q\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) > 0$$

es.

Supponiamo di avere una macchina che lavora tra due termostati



Quando la macchina esegue un ciclo, quanto vale la variazione di entropia dell'universo?

$$\Delta S_U = \Delta S_{AMB}$$

$$\Delta S_{AMB} = -\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} \geq 0$$

perché:

$$\eta_M = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}$$

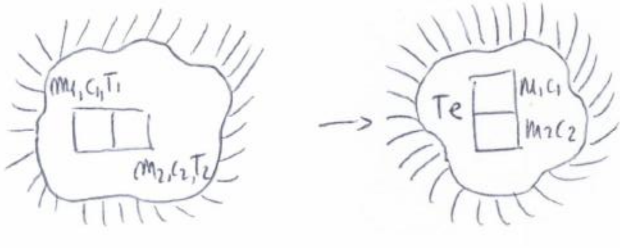
Poiché:

$$\eta \leq \eta_M \Rightarrow 1 - \frac{Q_1}{Q_2} \leq 1 - \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} \geq \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} \geq \frac{Q_2}{T_2}$$

es.

Prendiamo due corpi solidi m_1, c_1, T_1 a contatto in un ambiente adiabatico
m_2, c_2, T_2

calcoliamo la variazione di entropia complessiva:



$T_1 < T_2$

1) $T_1 \rightarrow T_e \quad Q_1 = m_1 c_1 (T_e - T_1)$

2) $T_2 \rightarrow T_e \quad Q_2 = m_2 c_2 (T_e - T_2)$

Poiché $Q_1 + Q_2 = 0$

$$m_1 c_1 (T_e - T_1) + m_2 c_2 (T_e - T_2) = 0$$

$$\boxed{T_e = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}}$$

DOMANDE TEORIA

BARBERO

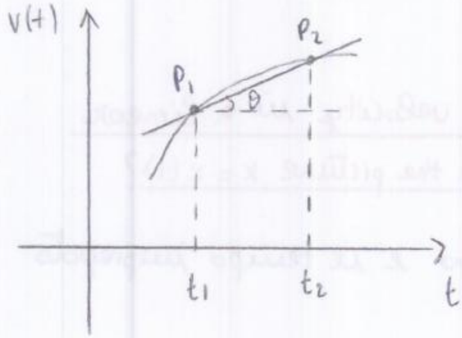
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 205 di 246

4. How is defined the average and the istantaneous acceleration in a linear motion?

5. What is the geometrical meaning of the acceleration on the picture $v = v(t)$?

- l'accelerazione media è definita come la rapidità con cui un corpo cambia la propria velocità in un determinato intervallo di tempo.

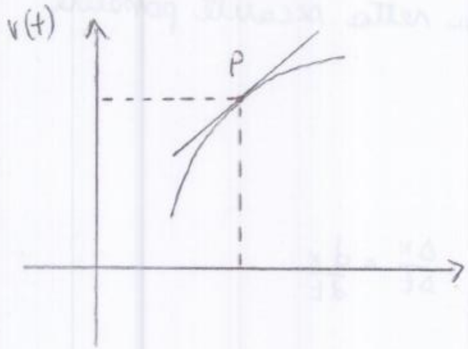
$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad , [a] = m/s^2$$



geometricamente, l'accelerazione media rappresenta il coeff angolare della retta secante passante per i punti P_1 e P_2.

$$a_m = tg\,\theta$$

- come per la velocità istantanea, l'accelerazione istantanea è definita come $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$



geometricamente l'accelerazione istantanea rappresenta il coeff. angolare della retta tg al grafico $v = v(t)$.

6-7 What is a uniform rectilinear motion? What are his equations?

Il moto rettilineo uniforme è un moto in cui la velocità è indipendente dal tempo. In tempi uguali sono percorsi spazi uguali.

$$v = \text{costante} \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = 0$$

Le equazioni del moto sono:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx = v \int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow x(t) = x_0 + v(t - t_0)$$

dove

$$\begin{cases} x = x_0 \\ t = t_0 \end{cases}$$ sono le condizioni iniziali

Quindi:

$x(t) = x_0 + v(t - t_0)$

$v(t) = \text{costante}$

L'equazione di tale moto è:

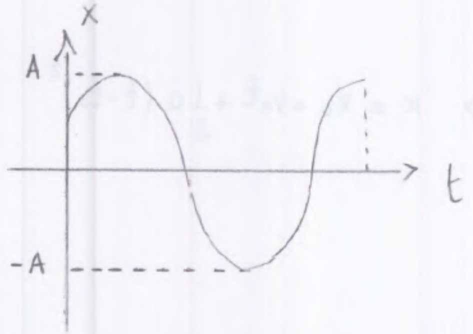
$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$

Dove A è detta AMPIEZZA

ω è detta PULSAZIONE

$\omega t + \varphi$ è detta FASE

φ è detta FASE INIZIALE



Tale tipo di moto è limitato nello spazio

$-A \leq x \leq A.$

Le equazioni del moto sono:

$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$

$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \varphi)$

$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$

Determiniamo le equazioni del periodo T:

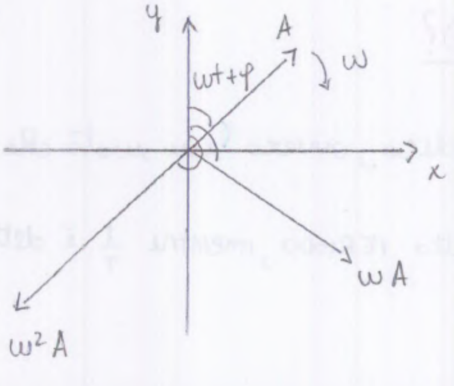
$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$

$x(t+T) = A\sin(\omega[t+T] + \varphi] = A\sin(\omega t + \varphi + \omega T)$

$x(t) = x(t+T) \Rightarrow A\sin(\omega t + \varphi) = A\sin(\omega t + \varphi + \omega T)$

Il seno è periodico di periodo $2\pi \Rightarrow \omega T = 2\pi$ e $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Per studiare i moti armonici si può anche utilizzare il metodo dei FASORI DI FRESNEL, ovvero si può considerare il moto di un vettore rotante che ruota in senso orario con velocità angolare ω, la cui proiezione sull'asse x si muove di moto armonico.



$x = A\sin(\omega t + \varphi)$

$v = \omega A\cos(\omega t + \varphi) = \omega A\sin(\omega t + \varphi + \pi/2)$

$a = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi) = \omega^2 A\sin(\omega t + \varphi + \pi)$

Determinazione di $V = V(x)$:

$$a = -kv$$

$$a = \frac{d}{dt}(v(x)) = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

Quindi:

$$v\frac{dv}{dx} = -kv \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = -k\int_{x_0}^{x} dx \Rightarrow \boxed{v = v_0 - k(x - x_0)}$$

14.15. if $a = -kv^2$, determine $v = v(t)$, $x = x(t)$ and $v = v(x)$

$$a = -kv^2$$

$$\frac{dv}{dt} = -kv^2 \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = -\int_0^t k\,dt \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + kt$$

Quindi:

$$\boxed{v = \frac{v_0}{1 + kv_0 t}}$$

VELOCITÁ DI UN CORPO SOTTOPOSTO A RESISTENZA IDRAULICA

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{1 + kv_0 t} \Rightarrow dx = \frac{v_0}{1 + kv_0 t}dt$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \frac{v_0}{1 + kv_0 t}dt \Rightarrow x - x_0 = \frac{v_0}{kv_0}\int_0 \frac{kv_0}{1 + kv_0 t}dt$$

Quindi:

$$\boxed{x(t) = x_0 + \frac{1}{k}\ln(1 + kv_0 t)}$$

LEGGE ORARIA CORPO SFORZATO DA UNA FORZA IDRAULICA

Determinazione di $v = v(x)$:

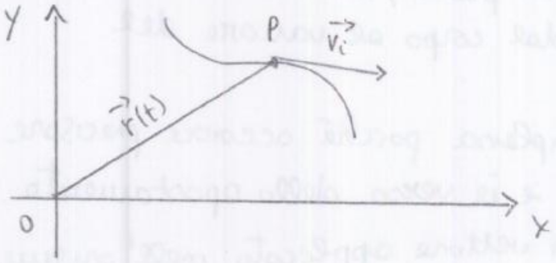
$$v\frac{dv}{dx} = -kv^2 \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -k\int_{x_0}^{x} dx \Rightarrow \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -k(x - x_0)$$

Quindi:

$$\boxed{v(x) = v_0 e^{-k(x - x_0)}}$$

$\vec{V}_m = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ è chiamata VELOCITÀ VETTORIALE MEDIA

La VELOCITÀ VETTORIALE ISTANTANEA è definita come $\vec{V}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$



Calcoliamo le componenti cartesiane del vettore velocità:

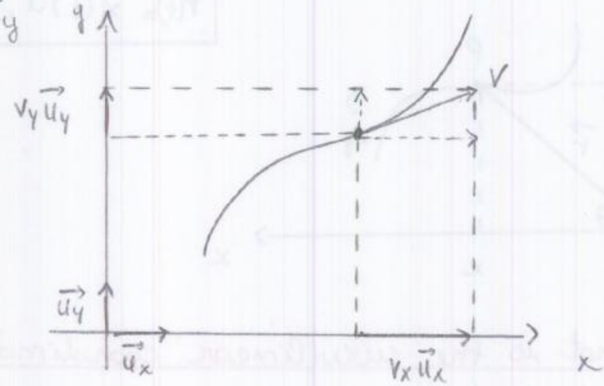
$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y \implies \vec{r}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y$

$d\vec{r} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y = V_x\vec{u}_x + V_y\vec{u}_y$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{V_y}{V_x}$$



4. Express the vector velocity in intrinsic form.

In una descrizione intrinseca del movimento, definiamo VELOCITÀ SCALARE v, la rapidità con cui un corpo cambia la propria ascissa curvilinea.

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Se il corpo si muove si ha $\vec{r} = \vec{r}(t)$ e $s = s(t)$

Quindi possiamo pensare che sia $\vec{r} = \vec{r}[s(t)]$

Allora:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}$$

Poniamo $\dfrac{d\vec{r}}{ds} = \vec{u}$, poiché esso è un versore; infatti $|\vec{u}| = \dfrac{|d\vec{r}|}{ds} = \dfrac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{ds} = 1$

Per cui:

$\boxed{\vec{V} = v\,\vec{u}_T}$ dove $\vec{u}_T$ è il versore tangente, cost. della curva

Questa è una descrizione intrinseca della velocità poiché se si sposta l'origine, cambierà certamente $\vec{r}$, ma non $\Delta\vec{r}$ e quindi neanche $d\vec{r}$.

$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$ è definita accelerazione vettoriale media

$\vec{a}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ è definita accelerazione vettoriale istantanea

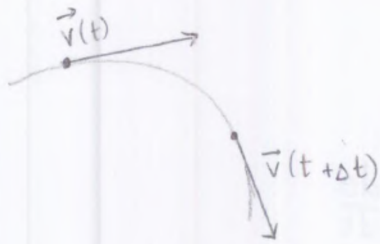
Calcoliamo le componenti cartesiane dell'accelerazione:

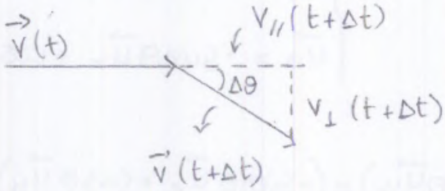
Analogamente a v:

$$v = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y$$

$$a = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\vec{u}_x + \frac{dV_y}{dt}\vec{u}_y = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{u}_y$$

7. Express the vector acceleration in intrinsic form.





$$\Delta\vec{V}_{//} = \vec{V}_{//}(t+\Delta t) - \vec{v}(t) = v(t+\Delta t)\cos(\Delta\theta) - v(t)$$

$$\Delta\vec{V}_{\perp} = v(t+\Delta t)\sin\Delta\theta$$

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta V_{//}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{v(t+\Delta t)\overset{\cos(\Delta\theta)\to 1}{\cos(\Delta\theta)} - v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta V_{\perp}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{v(t+\Delta t)\sin\Delta\theta}{\Delta\theta} = v(t)\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{v^2}{R}$$

Quindi:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N}$$

$a_T = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T$ = accelerazione tangenziale, dipende dalla variazione della velocità scalare

$a_N = \frac{v^2}{R}\vec{u}_N$ = accelerazione normale o centripeta, diretta verso la concavità, direttamente proporzionale al quadrato di v e inversamente proporzionale al raggio del cerchio osculatore passante per quel punto.

$$= \frac{\sqrt{\cancel{a_x^2 v_x^2} + a_x^2 v_y^2 + a_y^2 v_x^2 + \cancel{a_y^2 v_y^2} - \cancel{a_x^2 v_x^2} - \cancel{a_y^2 v_y^2} - 2a_x a_y v_x v_y}}{V} = \frac{\sqrt{(a_x v_y - a_y v_x)^2}}{V}$$

Quindi:

$$a_N = \frac{|a_x v_y - a_y v_x|}{V}$$

A questo punto è possibile calcolare il raggio di curvatura:

$$a_N = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{a_N} = \frac{V^2}{\frac{|a_x v_y - a_y v_x|}{V}}$$

$$\boxed{R = \frac{V^3}{|a_x v_y - a_y v_x|}}$$

(10) Express the vector acceleration in polar coordinates.

Ricordiamo che:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_r \end{cases}$$

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta\right\} =$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} =$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}_r$$

$$\vec{a} = \left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\vec{u}_r + \left\{2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right\}\vec{u}_\theta$$

Notiamo che: $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$

Quindi:

$$\boxed{\vec{a} = \left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{u}_\theta}$$

FORMULA DI BINET