NUMERO: 1403A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Massa

MATERIA: Scienze delle Costruzione. Prof.Lacidogna

ANALISI II

PROBLEMA è la MISURA → concetto di misura dell'estensione di figure piane.
METODI per calcolare AREE e VOLUMI ⇒ consideriamo un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $A \neq \emptyset$ (non vuoto)

• $m(A)$ MISURA di A

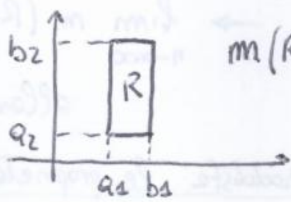
Proprietà: 1) $m(A) \geq 0$ POSITIVITÀ

2) $A \subseteq B$ (SOTTOINSIEME) $m(A) \leq m(B)$ MONOTONIA

3)  $\left[m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B) \right]$ FORMULA ADDITIVITÀ

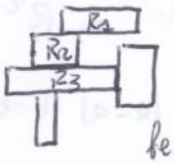
Prendiamo un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ e che sia LIMITATO:

Noi calcoleremo per rettangoli ⇒ quindi si fanno approssimazioni per eccesso e per difetto, se l'insieme è limitato può includere in un rettangolo



$m(R) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$

oppure unioni finite di rettangoli: PLURIRETTANGOLO è un unione finita di rettangoli che a due a due si intersecano al più per parti dei perimetri



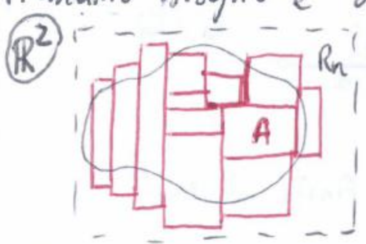
$m(R) = \sum_{i=1}^{N} m(R_i)$ $R = \bigcup_{i=1}^{N} R_i$

$m(R) \geq 0$ $R_1 \subseteq R_2$ $m(R_1) \leq m(R_2)$

$m(R_1 \cup R_2) = m(R_1) + m(R_2) - m(R_1 \cap R_2)$

le proprietà 1); 2); 3) della misura sono soddisfatte.

Abbiamo bisogno e dobbiamo cercare una APPROSSIMAZIONE A CON DEI PLURIRETTANGOLI



R tale che $A \subseteq R$

S plurirettangolo $S \subseteq R$

oppure costruiamo

2 successioni di PLURIRETTANGOLI (S_n, R_n)

avrò quindi:

$A \subset \ldots \subset R_n \subset \ldots \subset R_2 \subset R_1 \subset R_0$ → SUCCESSIONE DECRESCENTE, cioè UNIONE DECRESCENTE nel senso dell'INCLUSIONE

$0 \leq \ldots \leq m(R_n) \leq \ldots \leq m(R_2) \leq m(R_1) \leq m(R_0)$

(SUCCESSIONE DI NUMERI DECRESCENTE → INFERIORMENTE LIMITATA è CONVERGENTE)

abbiamo all'interno invece: $S_0 \subset S_1 \subset S_1 \subset \ldots \subset A$ → SUCCESSIONE CRESCENTE nel senso dei NUMERI

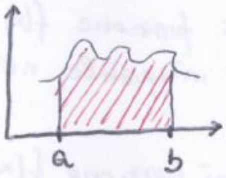
$m(S_0) \leq m(S_1) \leq m(S_2) \leq \ldots \leq m(S_n) \leq \ldots < m(R_0)$

$\underbrace{\{m(S_n)\}}_{\text{CONVERGE}} \leq \underbrace{\{m(R_n)\}}_{\text{CONVERGE}}$ → $\lim_1 \leq \lim_2$

INTEGRALE DEFINITO → Sia f una funzione ed $I=[a,b]$ un intervallo chiuso contenuto nel suo dominio. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ LIMITATA

CASO DI FUNZIONI NON-NEGATIVE Se $f(x)\geq 0$ $\forall x\in I=[a,b]$ si definisce trapezoide

$T_{f,I}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tali che } x\in[a,b] \text{ e } 0\leq y\leq f(x)\}$

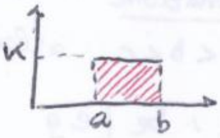


Def: f è INTEGRABILE nel senso di Riemann su I se $T_{f,I}$ è misurabile. Inoltre:

$$\left[\underset{\text{MISURA}}{m}(T_{f,I})=\int_{\underset{(I)}{[a,b]}} f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\right]$$

Esempi

$f(x)=K>0$ COSTANTE

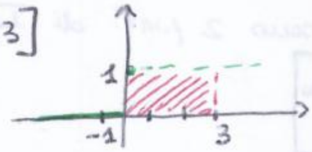


TRAPEZOIDE ALL'INTERVALLO $[a,b]$ È RIDOTTO AD UN RETTANGOLO DI BASE $b-a$ altezza K

quindi $\left[\int_{[a,b]} f(x)\,dx=(b-a)\cdot K\right]$

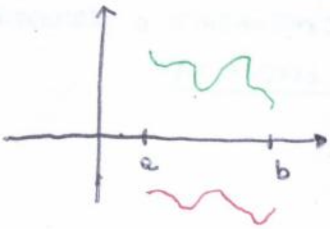
Es

$H(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$ $[-1,3]$



quindi $\int_{[-1,3]} H(x)\,dx=3.$

CASO DELLE FUNZIONI NON-POSITIVE → se $f(x)\leq 0$ $\forall x\in I$ allora $-f(x)\geq 0$.



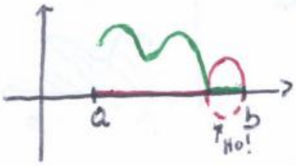
Def: f è integrabile nel senso di Riemann su I se $-f$ è integrabile nel senso di Riemann su I.

- Quindi: INTEGRALE DEFINITO DI f SU I il numero CAMBIATO di SEGNO che rappresenta l'area del trapezoide $T_{-f,I}$ cioè:

$$\left[\int_{[a,b]} f(x)\,dx=-m(T_{-f,I})\right]$$

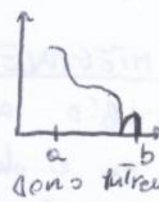
CASO GENERALE → FUNZIONI QUALSIASI.

Per trattare questo caso in cui f può cambiare di segno nell'intervallo $I=[a,b]$, dobbiamo considerare separatamente: tratti in cui la funzione è non negativa e quelli in cui è non-positiva. Ricorriamo alle funzioni f^+ e f^- definite:

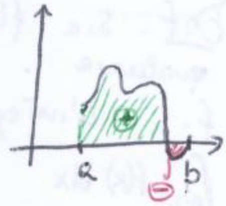


$f^+(x)=\begin{cases}f(x) & \text{se } f(x)\geq 0\\ 0 & \text{se } f(x)<0\end{cases}$ si noti che: $f^+-f^-=f$ e che

$f^-(x)=\begin{cases}-f(x) & \text{se } f(x)\leq 0\\ 0 & \text{se } f(x)>0\end{cases}$ $f^++f^-=|f|$



Def: Si dice f integrabile nel senso di Riemann su I, se f^+ e f^- sono entrambi integrabili nel senso di Riemann su I. Si chiama integrale definito della funzione f su $I=[a,b]$: $\int_{[a,b]} f(x)\,dx=m(T_{f^+,I})-m(T_{f^-,I})$ cioè



DENOMINAZIONI → SIMBOLO DI INTEGRALE $\int$; INTERVALLO DI INTEGRAZIONE $I=[a,b]$; FUNZIONE INTEGRANDA $f(x)$; VARIABILE DI INTEGRAZIONE x.

→ INTEGRALE → AREA TRAPEZOIDE
- FUNZ. NON-NEGATIVA → AREA È POSITIVA
- FUNZ. NON-POSITIVA → AREA NEGATIVA

→ INTEGRALE DEFINITO È UN NUMERO REALE

CALCOLO $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{x+1} x^{n+1} = \left| \frac{1}{2+1} x^{2+1} \right|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

f continua su $[a,b]$ e sia I intervallo aperto nel dominio di f. Siano x_0 un punto fissato una volta per tutte e x un punto variabile, entrambi appartengono ad I. Allora:

$$\left[F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \right] \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

è una primitiva di $f(x)$ su I $\forall x \in (a,b)$ aperto.

$x_0 \in [a,b]$

Da questo teorema e dalle proprietà delle primitive, se è nota una primitiva $G(x)$ di $f(x)$ su I e se a, b sono 2 punti qualunque su I allora:

$$\left[\int_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a) \right]$$

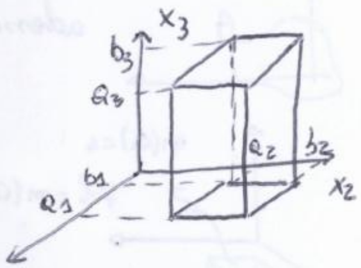
FORMULA DI TORRICELLI - BARROW

Integrali doppi

- Misura del volume → misura dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$, le proprietà positività, monotonia, additività devono essere soddisfatte dalla misura.

Nello spazio si comincia dai parallelepipedi: $\mathbb{R}^3$ con coordinate (x_1, x_2, x_3) con facce parallele ai piani coordinati:

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$



$$\left[Q = \{ (x_1, x_2, x_3 : a_1 \leq x_1 \leq b_1;\ a_2 \leq x_2 \leq b_2;\ a_3 \leq x_3 \leq b_3 \} \right]$$

Per la geometria elementare, come misura del volume di

$$Q \Rightarrow \quad \text{Vol } Q = m(Q) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$$

PLURIPARALLELEPIPEDO → unione di un numero finito di parallelepipedi sovrapposti al più sulle facce, per volume si intende la somma dei volumi dei parallelepipedi che lo compongono.

- Non si associa un'area ad una figura piana o un volume ad un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ limitato.

Dato $Q \subseteq \mathbb{R}^3$ contiene V (sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ e non vuoto), successione di pluriparallelepipedi sempre più piccoli: S_n, P_n : PARALLELEPIPEDO

$$S_0 \subseteq S_1 \subseteq \ldots \subseteq S_n \subseteq Q \subseteq P_n \subseteq \ldots \subseteq P_1 \subseteq P_0$$

$$m(S_n) \qquad m(P_n)$$

$$\lim_{n \to +\infty} m(S_n) \leq \lim_{n \to +\infty} m(P_n)$$

→ se $\lim m(S_n) = \lim m(P_n)$ allora Q è misurabile. $m(Q)$.

$f \geq 0 \quad \{(x_1,x_2,x_3) : (x_1,x_2) \in A \quad 0 \leq x_3 \leq f(x_1,x_2)\} = T_1$

$Vol\ T_1 = Vol\ T_2$

$\{(x_1,x_2,x_3) : (x_1,x_2) \in R \quad 0 \leq x_3 \leq \tilde{F}(x_1,x_2)\} = T_2$

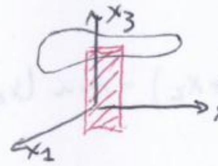
⇒ non sono la stessa cosa (stessi insiemi) perché T_2 ha più punti cioè quelli fuori che non danno volume.

Def Si dice che $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è integrabile nel senso di Riemann se A è integrabile su R e si definisce l'integrale doppio di f nel senso di Riemann esteso ad A come:

$$\boxed{\iint_A f(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 = \iint_R \tilde{F}(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2}$$

PROPOSIZIONE Se $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è un insieme limitato di misura nulla, cioè che $m(A) = 0$ allora qualunque funzione limitata $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è integrabile su A:

$$\boxed{\iint_A f(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 = 0}$$



CALCOLATO SU DI UNA RETTA O CURVA ⇒ ottengo una superficie che non è un volume.

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE

$f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ misurabili integrabili su A e B

ADDITIVITÀ rispetto alla funzione: $\boxed{\iint_A (f+g) = \iint_A f + \iint_A g}$

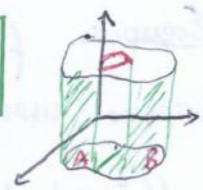
OMOGENEITÀ Se A è misurabile e f integrabile su A allora Kf è integrabile su A;
$K \in R$ $\quad \boxed{\iint_A Kf = K \iint_A f}$

MONOTONICITÀ A misurabile e se f, g sono integrabili su A, allora $f(x_1,x_2) \leq g(x_1,x_2)$ per ogni $(x_1,x_2) \in A$ allora:

$$\boxed{\iint_A f(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 \leq \iint_A g(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2}$$

ADDITIVITÀ RISPETTO AL DOMINIO DI INTEGRAZIONE A e B misurabili contenuti nel dominio della funz. f e se $m(A \cap B) = 0$ si ha:

$$\boxed{\iint_A f(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 + \iint_B f(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 = \iint_{A \cup B} f(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2}$$



INTEGRALI ITERATI ↔ CALCOLO DI INTEGRALI DOPPI

Siano J_1 e J_2 2 intervalli aperti di numeri reali. Consideriamo il rettangolo aperto $R = \{(x_1,x_2) : x_1 \in J_1, x_2 \in J_2\}$ e la funzione $f(x_1,x_2)$ definita per ogni $x = \{x_1,x_2\}$ appartenente ad R. Se f è continua la si può "integrare parzialmente" rispetto ad x_2 o x_1. L'integrale parziale definisce una funzione di x_1 o x_2.

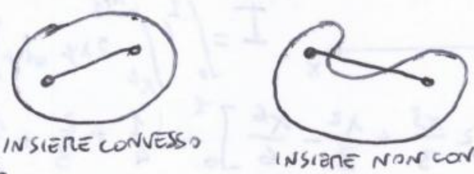
Rispetto a x_2 con $c, d \in J_2$ scrivo: $F(x_1) = \int_c^d f(x_1,x_2)\,dx_2$ $\qquad f(x_1,x_2) \longmapsto f(x_1,x_2)$

FISSO VARIA

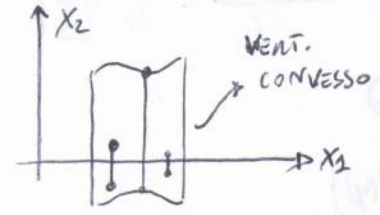
• Se $\alpha(x)$ continua in $[a,b]$, $\beta(y)$ continua su $[c,d]$ ⟹ allora

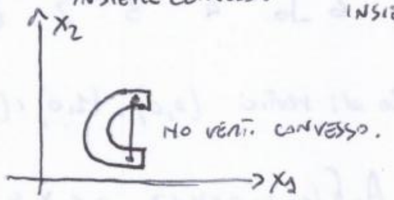
$$\iint_{[a,b][c,d]} \alpha(x)\beta(y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b \alpha(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_c^d \beta(y)\,dy\right)$$ FORMULE DI RIDUZIONE

INSIEME CONVESSO ⟹



INSIEME VERTICALMENTE CONVESSO





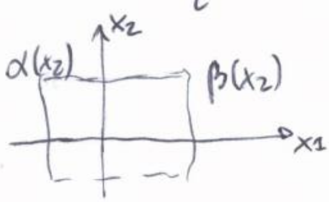
$A = \{(x_1, x_2) : x_1 \in [a,b] ; \gamma(x_1) \le x_2 \le \delta(x_1)\}$ dove $\gamma(x_1)$ e $\delta(x_1)$ sono 2 funz.:

quindi ⟹ • CONVESSO IMPLICA VERT. CONVESSO

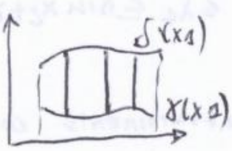
• VERT. CONVESSO NON IMPLICA CONVESSO

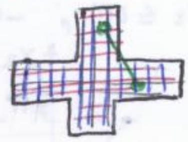
INSIEME ORIZZONTALMENTE CONVESSO

$B = \{(x_1, x_2) : x_2 \in [c,d] ; \alpha(x_2) \le x_1 \le \beta(x_2)\}$ con α e β funzioni.



⟹ VERT. CONVESSO + ORIZZ. CONVESSO IMPLICA CONVESSO (NO!)





TEOREMA $\gamma, \delta : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA sia un intervallo intervallo aperto $\forall x_1 \in [a,b]$ $\gamma(x_1) \le \delta(x_1)$ - Se $f(x_1, x_2)$ è funzione di 2 variabili definita e continua sulla regione $A : \{(x_1 x_2)\ x_1 \in [a,b] : \gamma(x_1) \le x_2 \le \delta(x_1)\}$
↳ VERT. CONVESSO. $f : A \to \mathbb{R}$ allora:

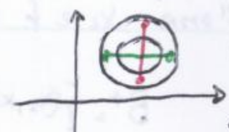
$$\boxed{F(x_1) = \int_{\gamma(x_1)}^{\delta(x_1)} f(x_1, x_2)\,dx_2 \text{ è continua su } [a,b].}$$

TEOREMA Siano a, b di J_1 $a<b$.
Se $f(x_1, x_2)$ è continua e A è la regione VERT. CONVESSA allora:

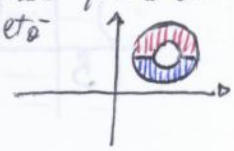
$$\iint_A f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_a^b \left(\int_{\gamma(x_1)}^{\delta(x_1)} f(x_1, x_2)\,dx_2\right) dx_1$$ CONTINUA

Analogamente $B = \{(x_1, x_2) : c \le x_2 \le d ; \alpha(x_2) \le x_1 \le \beta(x_2)\}$ $f : B \to \mathbb{R}$ CONTINUA

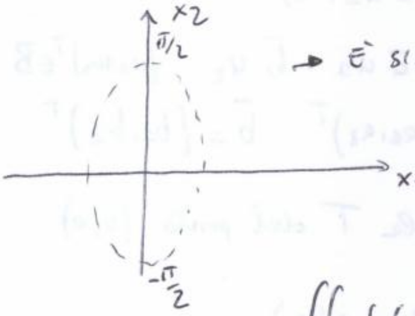
$$\iint_B f(x_1 x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_c^d \left(\int_{\alpha(x_1)}^{\beta(x_1)} f(x_1 x_2)\,dx_1\right) dx_2$$



CORONA CIRCOLARE
non è vert. convessa né orizz. convessa quindi la divido a metà



ESEMPIO $B = \left\{ (x_1, x_2) : -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad -\cos x_2 \leq x_1 \leq \cos x_2 \right\}$



→ È SIA VERT. CHE ORIZZ CONVESSO

$f(x_1, x_2) = 1 + x_2$

$f(-x_1, x_2) = 1 + x_2 \Rightarrow$ pari rispetto a x_1

$B^+ = \left\{ (x_1, x_2) : -\frac{\pi}{2} \leq x_2 \leq \frac{\pi}{2}, \ 0 \leq x_1 \leq \cos x_2 \right\}$

$$\iint_B f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = 2\iint_{B^+} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos x_2}(1+x_2)\,dx_1\right)dx_2 =$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\left[x_1 + x_1 x_2\right]_0^{\cos x_2} dx_2 = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \underbrace{\cos x_2}_{\text{pari}} + \underbrace{x_2 \cos x_2}_{0}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} (x_2 + \cos x_2)\,dx_2 = 0$$

$$= 2 \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \cos x_2\,dx_2 = 4 \sin x_2 \Big|_0^{\pi/2} = 4$$

CAMBIAMENTI di COORDINATE negli INTEGRALI DOPPI

Per ANALISI I ⇒ CAMBIO DI VARIABILE

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t) \qquad x = \varphi(t) \qquad \varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$$

$\varphi(\alpha) = a \quad \varphi(\beta) = b \quad \varphi$ corrispondenza biunivoca tra i 2 intervalli

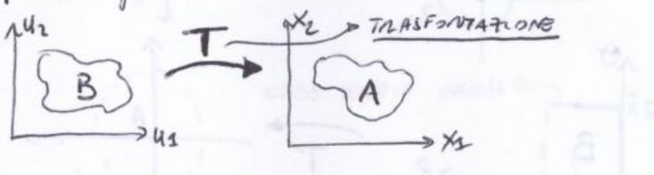
Per ANALISI II ⇒ difficoltà si trovano nel dominio di integrazione, fare ricorso a trasformazioni di tipo geometrico in cui il dominio è semplificato.
Sono dei cambiamenti di coordinate che modificano l'area del dominio d'integrazione quindi l'integrale stesso. Bisogna introdurre un termine opportuno.
Situazione analoga a quella per cui si calcolano gli integrali semplici.

$$\iint_A f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 = \iint$$

⇒ CORRISPONDENZA BIUNIVOCA TRA 2 SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}^2$
← SI TROVA UN DOMINIO DIVERSO e altre variabili CHE FACILITANO L'INTEGRALE.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x_1)\,dx_1 = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$ dove $\varphi'(t)$ funge da termine compensatore.

Ora si ha una trasformazione tra 2 piani:



$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$B \to A$

$(u_1, u_2) \mapsto (x_1 = \varphi_1(u_1,u_2);\ x_2 = \varphi_2(u_1,u_2))$

$\varphi_1, \varphi_2 : B \to \mathbb{R}$ differenziabili

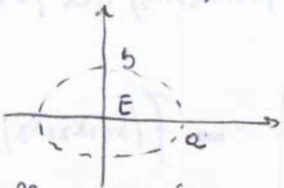
$$\left[J T(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} \right]$$ MATRICE JACOBIANA

Se T è una corrispondenza biunivoca avremo che: $\det JT(u_1, u_2) \neq 0 \quad \forall u_1, u_2 \in B$

$$\iint_A f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \iint_B f(\underbrace{\varphi_1(u_1,u_2)}_{x_1}, \underbrace{\varphi_2(u_1,u_2)}_{x_2})\ \underbrace{|\det JT(u_1,u_2)|}_{\text{TERMINE CORRETTIVO DEL CAMBIAMENTO DI COORDINATE}}\,du_1\,du_2$$

ESEMPIO Calcolare l'area della regione E delimitata dall'ellisse

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}\le 1$$



$$\iint_E dx_1\,dx_2$$

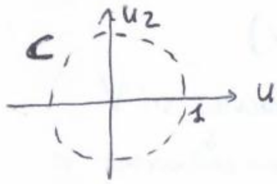
→ Posso trasformare l'ellisse e fare un cambiamento lineare in circonferenza:

$$\underbrace{\frac{x_1^2}{a}}_{u_1^2}+\underbrace{\frac{x_2^2}{b}}_{u_2^2}\le 1 \qquad \begin{cases} u_1=\frac{x_1}{a} \\ u_2=\frac{x_2}{a}\end{cases} \qquad \boxed{u_1^2+u_2^2\le 1} \qquad \left[\,|\det JT(u_1,u_2)| = |a\cdot b|\,\right]$$

$$u_1^2+u_2^2\le 1$$

→ la JT ci dice come le aree cambiano, qui da cerchio ad ellisse.

$$JT=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$$



$$\iint_E dx_1dx_2=\iint_C |\det JT|\,du_1du_2=\iint_C |a\cdot b|\,du_1du_2=|a\cdot b|\iint_C du_1du_2=\boxed{\pi\,|a\cdot b|}$$

COORDINATE ELLITTICHE ⇒ combinazione lineare più trasformazioni a coordinate polari ⇒ $\widetilde{T}$: $\begin{cases}\frac{x_1}{a}=\rho\cos\theta\\ \frac{x_2}{b}=\rho\sin\theta\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=a\rho\cos\theta\\ x_2=b\rho\sin\theta\end{cases}$

$$\left[\underbrace{\left(\frac{x_1}{a}\right)^2}_{\rho\cos\theta}+\underbrace{\left(\frac{x^2}{b}\right)^2}_{\rho\sin\theta}\le 1\right] \qquad \text{con } \left[\begin{matrix}0\le\rho\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{matrix}\right\} \text{CERCHIO UNITARIO}\Big]$$

$$\widetilde{E}=\{(\rho,\theta): 0\le\rho\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi\} \Rightarrow \iint_E dx_1dx_2=\iint_{\widetilde{E}}\det|J\widetilde{T}(\rho,\theta)|\,d\rho\,d\theta \quad \text{quindi}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x_1=a\rho\cos\theta\\ x_2=b\rho\sin\theta\end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta\\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta\end{pmatrix}=J\widetilde{T}(\rho,\theta) \qquad \left[|\det J\widetilde{T}(\rho,\theta)|=ab\rho\cos^2\theta+ab\rho\sin^2\theta=\boxed{ab\rho}\right.$$

allora

$$\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}|a\cdot b|\,\rho\,d\theta\right)d\rho=|ab|\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\int_0^1\rho\,d\rho=$$

$$|a\cdot b|\,2\pi\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1=|a\cdot b|\,2\pi\cdot\frac{1}{2}=|a\cdot b|\cdot\pi$$

INTEGRALI TRIPLI

⇒
- calcolo di massa totale distribuita su una certa regione di spazio
- calcolo del baricentro di un solido
- calcolo momenti di inerzia

$V\subseteq\mathbb{R}^3$ $\quad \iiint_V f(x_1,x_2,x_3)\,dx_1\,dx_2\,dx_3$ $\quad f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ $\quad$ grafico $f\subseteq\mathbb{R}^4$ sottoinsieme

⇒ introduzione di particolari sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$, introduciamo gli IPER-RETTANGOLI $\subseteq\mathbb{R}^4$ prodotto cartesiano di 4 intervalli.

- $P=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]\times[a_4,b_4]$
- $m(P)=(b_1-a_1)(b_2-a_2)(b_3-a_3)(b_4-a_4)$ $\quad S\subseteq\mathbb{R}^4$ cerchiamo di costruire una successione di iperrettangoli che approssima da dentro e da fuori, se la successione dentro e fuori coincide abbiamo risolto.

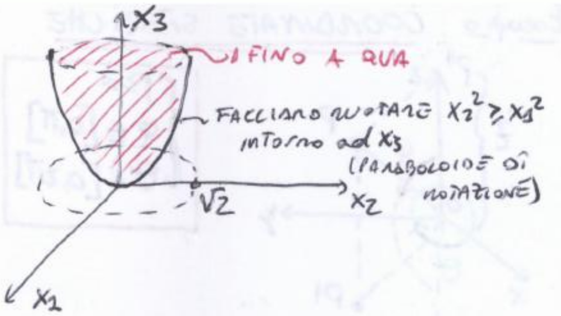
⇒ $S\subseteq\mathbb{R}^4$ misurabile con definizione del tutto analoga a quella data per sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$

$Q\subseteq\mathbb{R}^3$ parallelepipedo $\quad f:Q\to\mathbb{R}$ $\quad f\ge 0$ $\quad$ grafico $f\subseteq\mathbb{R}^4$ (FUNZIONI POSITIVE) ⇒

ESEMPIO $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 \geq x_1^2 + x_2^2,\ 0 \leq x_3 \leq 2\}$$

$$x_3 = x_1^2 + x_2^2$$



Fisso un punto in (x_1, x_2) e vedo come varia x_3.

Capire come varia $x_1 - x_2$ $\begin{cases} x_3 = x_1^2 + x_2^2 \quad x_1^2 + x_2^2 = 2 \\ x_3 = 2 \end{cases}$

$$\iint_C \left[\int_{x_1^2 + x_2^2}^{2} (x_1^2 + x_2^2)\, dx_3 \right] dx_1\, dx_2 \qquad C = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 2\}$$

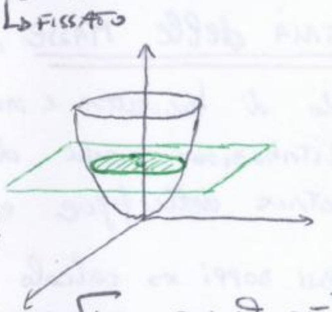
$$= \iint (x_1 + x_2)\left[2 - (x_1^2 + x_2^2)\right] dx_1\, dx_2 \Rightarrow \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 (2 - \rho^2)\, \underbrace{\rho}_{\det JT}\, d\rho \right) d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\, d\vartheta \int_0^{\sqrt{2}} (2\rho^3 - \rho^5)\, d\rho = 2\pi \left[2\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6} \right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi \left[2\frac{4}{4} - \frac{8}{6}\frac{4}{3} \right] = \boxed{\frac{4}{3}\pi}$$

INTEGRAZIONE PER STRATI $S \subseteq \mathbb{R}^3$ S tale che $a \leq x_3 \leq b$ $\forall \bar{x}_3 \in [a, b]$ (fissato)

$$S_{\bar{x}_3} = S \cap \{x_3 = \bar{x}_3\} \text{ misurabile nel piano } x_3 = \bar{x}_3$$

(fissato)



$$\iiint_S f\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \int_a^b \left(\iint_{S_{x_3}} (f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2 \right) dx_3$$

$$\int_0^2 \left(\iint_{S_{x_3}} (x_1^2 + x_2^2)\, dx_1\, dx_2 \right) dx_3 \Rightarrow S = \{x_3 \geq x_1^2 + x_2^2,\ 0 \leq x_3 \leq 2\}$$

$$S_{x_3} = \{(x_1^2 + x_2^2) \leq x_3\} \qquad \underline{\text{Fissato } x_3}: \quad \tilde{S}_{x_3} = \{(\rho, \vartheta) : 0 \leq \rho \leq \sqrt{x_3} \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{x_3}} \rho^2 \rho\, d\rho\, d\vartheta \right) dx_3 = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(\left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\sqrt{x_3}} d\vartheta \right) dx_3 = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{x_3^3}{4}\, d\vartheta\, dx_3 =$$

$$\left[2\pi \frac{x_3^3}{12} \right]_0^2 = 2\pi \left\{ \frac{8}{12} \right\} = \frac{4}{3}\pi$$

CAMBIAMENTI DI COORDINATE in $\mathbb{R}^3$ $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad T: \begin{cases} x = \psi_1(u_1, u_2, u_3) \\ y = \psi_2(u_1, u_2, u_3) \\ z = \psi_3(u_1, u_2, u_3) \end{cases}$

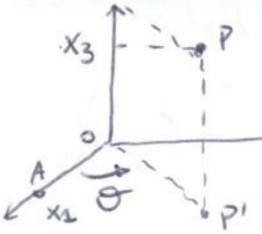
$$T: \underset{(u_1, u_2, u_3)}{U} \to \underset{(x, y, z)}{V} \quad C^1 \qquad JT(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial u_2} & \frac{\partial \psi_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial u_2} & \frac{\partial \psi_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial u_1} & \frac{\partial \psi_3}{\partial u_2} & \frac{\partial \psi_3}{\partial u_3} \end{pmatrix}$$

$$\det JT(u_1, u_2, u_3) \neq 0 \quad \forall (u_1, u_2, u_3) \in U$$

$\Rightarrow$ corrispondenza biunivoca tra U e V.

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_U f(\psi_1(u_1, u_2, u_3), \psi_2(u_1, u_2, u_3), \psi_3(u_1, u_2, u_3)) \left| \det JT(u_1, u_2, u_3) \right| du_1\, du_2\, du_3$$

COORDINATE CILINDRICHE (come dare le coordinate polari in x_1, x_2)

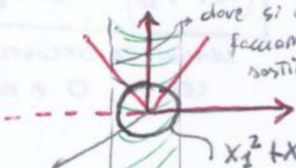


$\rho = \overline{OP'}$ $\quad \theta = P'OA$

$$\boxed{T: \begin{cases} x_1 = \rho\cos\theta \\ x_2 = \rho\sin\theta \\ x_3 = x_3 \end{cases} \quad \begin{matrix} \rho > 0 \\ \theta \in [0, 2\pi] \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{matrix}} \qquad \boxed{\det JT(\rho, \theta, x_3) = \rho}$$

ESEMPIO $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 x_3$ $\qquad A = \left\{(x_1,x_2,x_3) : x_1^2 + x_2^2 \le 1\right\}, \ 0 \le x_3 \le \underbrace{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}_{=\rho}$

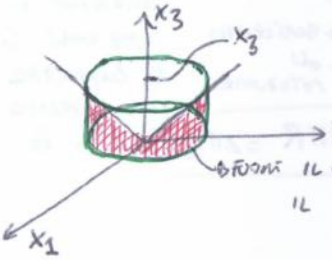
$I = \iiint_A f(x_1,x_2,x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3$



se $x_1 = 0$ $\quad x_3 = \sqrt{x_2^2}$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{cases}$

quindi



SOTTO IL CONO E DENTRO IL CILINDRO

$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

$A = \left\{(\rho, \theta, x_3) \quad 0 \le \rho \le 1, \ \underbrace{0 \le \theta \le 2\pi}_{\text{FIGURA DI ROTAZIONE (GIRO COMPLETO)}}, \ 0 \le x_3 \le \rho\right\}$

$I = \iiint_A f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, x_3)\, \rho\, d\rho\, d\theta\, dx_3$

$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^\rho \rho^2\cos^2\theta\, x_3\, \rho\, dx_3\right) d\theta\right) d\rho = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^3 \cos^2\theta \left[\frac{x_3^2}{2}\right]_{x_3=0}^{x_3=\rho} d\theta\, d\rho \Rightarrow$

$= \int_0^{2\pi} \cos^2 d\theta \int_0^1 \rho^3\, \frac{\rho^2}{2}\, d\rho = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 = \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{12} =$

$\frac{1}{2}\cdot 2\pi \cdot \frac{1}{12} = \boxed{\frac{\pi}{12}}$

Per SOLIDI DI ROTAZIONE si utilizzano gli integrali tripli. consideriamo una figura bidimensionale S, nel piano $x_1 = 0$ $x_2 \ge 0$ e ruotiamo x_3, la figura S genera un SOLIDO DI ROTAZIONE, si dice anche sezione meridiana perché la sezione ottenuta intersecando con un piano è sempre un solido S.

TEOREMA di GULDINO

$\Rightarrow$ FAR RUOTARE S intorno ad x_3

$\rho \Rightarrow$ distanza del punto dall'asse x_3 (guardiamo $x_2 x_3$) (consideriamo le x_2 positive)

$S \Rightarrow$ sottoinsieme misurabile contenuto nel semipiano $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$

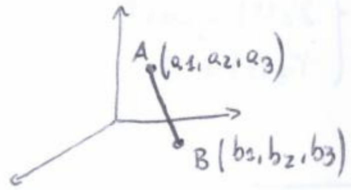
Sia V il solido ottenuto facendo ruotare S intorno all'asse x_3.

$$\boxed{\iiint_V dx_1\, dx_2\, dx_3 = 2\pi \iint_S x_2\, dx_2\, dx_3}$$

DIMOSTRAZIONE: descriviamo V in coordinate cilindriche (solido di rotazione quindi intervallo di $\theta \Rightarrow 0 \div 2\pi$) $\rightarrow$ quindi per prima ρ e x_3 devono appartenere ad S

$\tilde{V} = \left\{(\rho, \theta, x_3)\ \theta \in [0, 2\pi]\ \overbrace{(\rho, x_3) \in S}^{\rightarrow \text{ruotando sono sempre su } x_2 x_3 \text{ quindi ad } S}\right\}$ $\Rightarrow \iiint_V dx_1\, dx_2\, dx_3 = \iiint_{\tilde V} \overbrace{\rho}^{\det J T}\, d\rho\, d\theta\, dx_3 \Rightarrow$

ESEMPIO (Segmento ⇒ moto che va da un punto ad un altro seguendo una traiettoria).



$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t\left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right] \quad t \in [0,1]$$

$$\overline{X} = A + t(B-A)$$

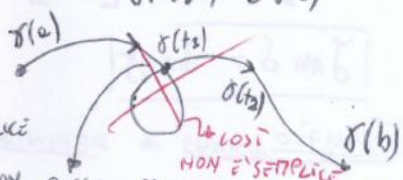
$$\begin{cases} x_1(t) = a_1 + t(b_1 - a_1) = \gamma_1(t) \\ x_2(t) = a_2 + t(b_2 - a_2) = \gamma_2(t) \\ x_3(t) = a_3 + t(b_3 - a_3) = \gamma_3(t) \end{cases}$$ ⇒ CURVA PARAMETRICA ⇒ FUNZIONE

- Sostegno della curva γ ⇒ l'immagine $Im(\gamma)$ cioè l'insieme delle posizioni assunte nel suo moto

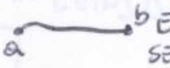
$Im(\gamma) = \{\gamma(t),\ t \in [a,b]\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ⇒ [γ si dice REGOLARE se $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$; γ si dice SEMPLICE se $\forall t_1, t_2 \in (a,b)$ ⇒ $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$

REGOLARE se:  cioè se il vettore tangente è diverso da zero.

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$$



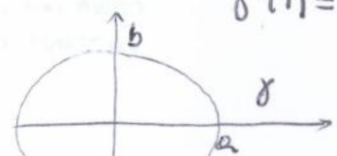
NON POSSO PASSARE 2 VOLTE IN UN PUNTO COSÌ



È SEMPLICE

ESEMPIO

$\mathbb{R}^2$ ELLISSE



$$\begin{cases} \gamma_1(t) = a\cos t \\ \gamma_2(t) = b\cos t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \text{ è semplice}$$

NON STO DICENDO IL PARAMETRO t, devo fare attenzione $t \in [0, 6\pi]$ NON È SEMPLICE

[γ si dice chiusa se $\boxed{\gamma(a) = \gamma(b)}$]

↓ curva parametrica che ci dà l'ellisse

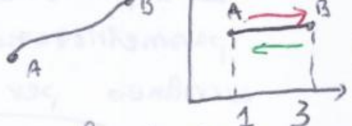
LUNGHEZZA DI UNA CURVA

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ SEMPLICE, REGOLARE

$$\boxed{\ell_\gamma = \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2}\, dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt}$$

Se pensiamo la lunghezza come il moto del punto, quindi il vettore γ' rappresenta la velocità, quindi facciamo l'integrale di γ' ed ottengo lo spazio.

$t \to (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$



$\mathbb{R}^2$ I MOTI SONO DEI MOTI DIVERSI, LA LUNGHEZZA DA a a b È DIVERSA IN MOTO.

Cambiando parametrizzazione la lunghezza non cambia perché dipende solo dal sostegno. La lunghezza di una curva semplice e regolare dipende dal sostegno, non dalla parametrizzazione ⇒ IN FORMULE ⇒ $\ell_\gamma = \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2}\, dt$

CAMBIAMENTO DI VARIABILE $t = \alpha(\tau) \quad \alpha : [c,d] \to [a,b]$

α derivabile e la sua derivata $\alpha'(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in [c,d]$, sono invertibili e si passa da una variabile all'altra senza perdita di informazioni.

$\delta : [c,d] \to \mathbb{R}^n \quad \delta = \gamma \circ \alpha$ ⇒ COMPOSTA $\quad \tau \longmapsto \gamma(\alpha(\tau)) \quad Im(\delta) = I(\gamma)$ ⇒ i sostegni di δ e γ coincidono

(NUOVA CURVA SEMPLICE E REGOLARE) $\quad \ell_\delta = \int_c^d \sqrt{(\delta_1'(\tau))^2 + \dots + (\delta_n'(\tau))^2}\, d\tau$ LUNGHEZZA di δ

$$\ell_\gamma = \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2}\, dt$$

$$t = \alpha(\tau) \Rightarrow \int_c^d \sqrt{\gamma'(\alpha(\tau))^2 + \dots + (\gamma_n'(\alpha(\tau)))^2}\, \alpha'(\tau)\, d\tau = \int_c^d \sqrt{\gamma'(\alpha(\tau))\alpha'(\tau))^2 + \dots + (\gamma_n'(\alpha(\tau))\alpha'(\tau))^2}\, d\tau = \ell_\delta$$

$\delta_i(\tau) = \gamma_i \circ \alpha(\tau) = \gamma_i(\alpha(\tau))$ perché $\delta = \gamma \circ \alpha$ ⇒ $\boxed{\delta_i'(\tau) = \gamma_i'(\alpha(\tau)) \cdot \alpha'(\tau)}$ ⇒ LUNGH NON CAMBIA CAMBIANDO LA PARAMETRIZZAZIONE

• Vogliamo calcolare la lunghezza di un arco di curva, dato da:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = \frac{2t^3}{3} \end{cases} \quad t \in [0,1] \quad f=1 \text{ si ha: } \int_a^b \sqrt{1+4t^2+4t^4} = 5/2$$

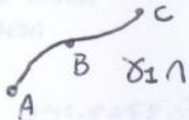
→ abbiamo visto quindi che è conveniente per calcolare un integrale curvilineo che la curva sia data in forma parametrica. Ma il valore dell'integrale, nel caso della lunghezza, non dipende dalla parametrizzazione.

PROPRIETÀ

ADDITIVITÀ $\int_\gamma (f+g)\,ds = \int_\gamma f\,ds + \int_\gamma g\,ds$

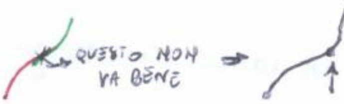
OMOGENEITÀ $\int_\gamma Kf\,ds = K\int_\gamma f\,ds \quad K\in\mathbb{R}$

ADDITIVITÀ RISPETTO IL DOMINIO $\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f\,ds = \int_{\gamma_1} f\,ds + \int_{\gamma_2} f\,ds$



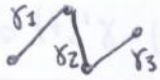
$\gamma_1 \cap \gamma_2 = B$.

GENERALIZZAZIONE (γ_1 e γ_2 non sono due curve distinte, perché se no potrei averle:

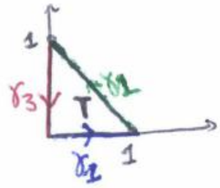


→ γ è una curva regolare a tratti, se è continua e con derivate prime continue tranne che in un numero finito di punti

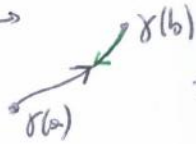
$$\int_{\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3} f\,ds = \int_{\gamma_1} f\,ds + \int_{\gamma_2} f\,ds + \int_{\gamma_3} f\,ds$$

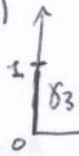


ESEMPIO Calcolare $I = \int_{\delta T} f\,ds$ dove $f(x_1,x_2)\, e^{x_1+2x_2}$ T è il triangolo, e δT è il sostegno



$$I = \int_{\gamma_1} f\,ds + \int_{\gamma_2} f\,ds + \int_{\gamma_3} f\,ds \quad \to X = A + t(B-A)$$





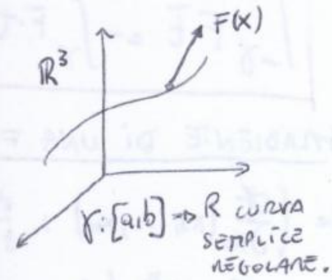
$$\gamma_1 \begin{cases} x_1(t) = 0 \\ x_2(t) = t \end{cases} \quad t\in[0,1] \qquad \gamma_2 \begin{cases} x_1(t) = 0 \\ x_2(t) = -t \end{cases} \quad t\in[-1,0]$$

$$\gamma_3 \begin{cases} x_1(t) = 0 \\ x_2(t) = 1-t \end{cases} \quad t\in[0,1]$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_3} f\,ds = \int_0^1 e^{0+2t}\sqrt{0^2+1^2}\,dt \Rightarrow \int_0^1 e^{2t} =$$

$$= \frac{e^{2t}}{2}\Big|_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \qquad \boxed{I = e - 1 + \sqrt{2}e^2 - \sqrt{2}e - \frac{1}{2} + \frac{e^2}{2}}$$

INTEGRALI CURVILINEI DI II° TIPO o INTEGRALI di LINEA



$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ CAMPO VETTORIALE CONTINUO

Def $\int_\gamma F\cdot \bar{t} = \int_a^b F(\gamma(t))\cdot \gamma^{-1}(t)\,dt \qquad \gamma(t) = (\gamma_1(t),\dots,\gamma_n(t))$

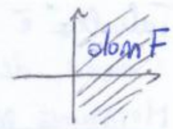
$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t),\dots,\gamma_n'(t))$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(\gamma'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2} \Rightarrow \int_\gamma F\cdot\bar{t} = \int_a^b F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\frac{\|\gamma'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|}\,dt$$

$$= \int_a^b \underbrace{F(\gamma(t))\,\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}}_{f(\gamma(t))}\,\|\gamma'(t)\|\,dt$$

possiamo reinterpretare un integrale di linea su un campo vettoriale

$f(\gamma(t))$ → INTEGRALE CURVILINEO DI I^a SPECIE.



ESEMPIO $F(x,y) = \left(\frac{y}{x}, \log x\right)$ dove $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

$g(x,y) = y \log x \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x} = f_1 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \log x \quad F = \nabla g \quad \forall x \in \mathrm{dom}\, F$

→ se aggiungo una costante al potenziale — g è un potenziale di F.

$\tilde{g}(x,y) = y \log x + K \quad K \in \mathbb{R}$ — g è un altro potenziale di F

PROPOSIZIONE: Se F è un campo conservativo su A e g è un potenziale di F su A, allora tutte le funzioni $g(x) + K$, $K \in \mathbb{R}$ sono ancora potenziali di F su A.

TEOREMA $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 (APERTO)

Se F è conservativo $F = (f_1 \dots f_n)$ allora $\frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ vale $\forall x \in A$.

Dim: F conservativo allora $\exists g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla g(x) = F(x) \ \forall x \in A$.

$\frac{\partial g}{\partial x_i} = f_{i(j)} \in C^1 \quad \forall i\,(j) \Rightarrow g \in C^2$ → derivata prime e seconda continue.

$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} f_j = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}$

$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}$

g di classe C^2 sono UGUALI per il TEOREMA di SWARTZ.

$\Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}$ cioè $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \text{ su } A\right]$

- CASO $\mathbb{R}^2$ → Se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad F = (f_1, f_2) \quad \boxed{\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}}$
- CASO $\mathbb{R}^3$ → Se $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad F = (f_1, f_2, f_3) \quad \boxed{\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2}}$

ROTORE IN $\mathbb{R}^3$

$F = (f_1, f_2, f_3)$ → lo posso scrivere come un DETERMINANTE FORMALE $= \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}$

TEOREMA → F conservativo su $A \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow \boxed{\mathrm{rot}\, F(x) = 0} \ \forall x \in A$

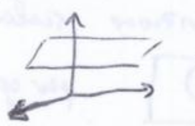
$$\boxed{\mathrm{rot}\, F = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3};\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1};\ \frac{\partial f_2}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right)}$$

Def F IRROTAZIONALE su A se $\mathrm{rot}\, F(x) = 0 \ \forall x \in A$

TEOREMA: Se F è conservativo su A allora F è irrotazionale su A.

ESEMPIO $F(x,y,z) = (xy, x, xz)$ è conservativo? $\frac{\partial f_1}{\partial y} = x \neq \frac{\partial f_2}{\partial x} = 1$ → in generale

$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \neq \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ se $x \neq 1$



→ $x = 1$ in $\mathbb{R}^3$ non è un aperto, perché bisogna vedere se c'è un intorno tutto contenuto intorno alla sfera, quindi non è un aperto.

⇓

la condizione NECESSARIA PER i CAMPI CONSERVATIVI NON È SODDISFATTA ⇒ F NON È CONSERVATIVO

Dalla MATRICE del ROTORE segue che se $F(x)$ è un campo conservativo su $\mathbb{R}^3$ di classe C^1, allora $\boxed{\operatorname{rot} F(x) = 0}$ in ogni punto del suo dominio ciò vuol dire che F è IRROTAZIONALE, vale il teorema:

TEOREMA Sia A un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $F(x) = (f_1(x) \dots, f_n(x))$ $A \to \mathbb{R}^n$ un campo conservativo di classe C^1. Allora $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ per ogni $x \in A$ e per ogni coppia di indici $i\, j \in \{1 \dots, n\}$ tali che $i \neq j$.

Se $n=2$ si riduce a $\boxed{\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x)}$; Se $n=1$ tutti i campi sono conservativi e la nozione di potenziale si riduce a quella di primitive.

TEOREMA
Se $F(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è conservativo su un sottoinsieme aperto A di $\mathbb{R}^n$, e $g(x)$ è un suo potenziale su A, allora anche la funzione $\varphi(x) = g(x) + K$ è un potenziale di $F(x)$ su A, per ogni scelta della costante reale K

INTEGRALI DI LINEA DEI CAMPI CONSERVATIVI

TEOREMA Sia F un campo vettoriale di $\mathbb{R}^n$, definito su un insieme aperto A e quindi continuo. Sia g un potenziale di F su A e sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una qualsiasi curva regolare, il cui sostegno sia incluso in A. Allora posto $\gamma(a) = P_0$ e $\gamma(b) = P_1$ si ha:

$$\boxed{\int_\gamma F \cdot t = g(P_1) - g(P_0)}$$

DIMOSTRAZIONE ($\mathbb{R}^2$ ANALOGA in $\mathbb{R}^n$ ⇒ RICONDIAMO la funz composta ⇒ $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$
$g(\gamma(t)) : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzione di una variabile per cui si può calcolare la derivata parziale $\left[\frac{d}{dt} g(\gamma(t)) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(\gamma(t))\, \gamma_1'(t) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(\gamma(t)) \cdot \gamma_2'(t)\right]$

LIMITIAMO al caso $\mathbb{R}^2$ allora
γ_1 e γ_2 componenti della curva ed f_1, f_2 componenti del campo, dalla def di int. di linea si ha:

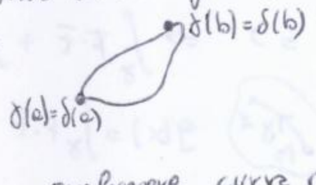
$$\int_\gamma F \cdot \bar{t} = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \qquad F = \nabla g \text{ su } A \quad \gamma(t) \subseteq A$$

$$= \int_a^b \nabla g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt} g(\gamma(t))\, dt = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) = \boxed{g(P_1) - g(P_0)}$$

⇒ CONSEGUENZA del TEOREMA del CALCOLO INTEGRALE.

COROLLARIO Se F è un campo conservativo di $\mathbb{R}^n$ e γ, δ sono curve regolari, aventi: P_0 come primo estremo e P_1 con secondo estremo.
$\gamma(a) = \delta(a) \Rightarrow \gamma(b) = \delta(b)$ allora

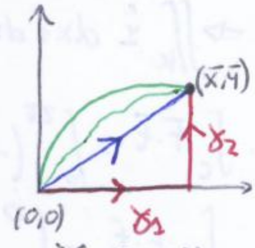
$$\int_\gamma F \cdot t = \int_\delta F \cdot t$$



COROLLARIO Sia F un campo conservativo di $\mathbb{R}^n$ e sia γ una qualunque curva regolare chiusa allora: $\boxed{\int_\gamma F \cdot \bar{t} = 0}$ ⇒ L'INTEGRALE di linea esteso ad una curva chiusa prende il nome di CIRCUITAZIONE e si indica con $\boxed{\oint_\gamma F \cdot \bar{t}}$ ⇒ CIRCUITAZIONE di F lungo γ

ESEMPIO DI RICOSTRUZIONE DEL POTENZIALE

$F(x,y) = (2xy^2 - y^3, 2x^2 y - 3xy^2)$ OSSERVIAMO CHE: $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$



$g(x) = \int_\gamma F\cdot t$ dobbiamo applicare la parametrizzazione di γ

$= \int_{\gamma_2} F\cdot t + \int_{\gamma_2} F\cdot t$

$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t\bar x \\ y(t) = 0 \end{cases} \quad t \in [0,1]$

$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = \bar x \\ y(t) = t\bar y \end{cases}$

$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

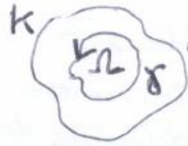
$\Rightarrow \int_{\gamma_1} F\cdot t = \int_0^1 (0,0)\ldots = 0 \quad \Rightarrow \int_{\gamma_2} F\cdot t = \int_0^1 (2\bar x(t\bar y)^2 - (t\bar y)^3, 2\bar x^2 t\bar y - 3\bar x(t\bar y)^2)\cdot(0,\bar y)\,dt =$

$= \int_0^1 [2\bar x t\bar y^2 - 3\bar x t^2 \bar y^3]\,dt = \left[2\bar x \bar y^2 \frac{t^2}{2} - 3\bar x \bar y^3 \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \bar x^2 \bar y^2 - \bar x \bar y^3$

$g(x,y) = x^2y^2 - xy^3 \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy^2 - y^3}_{f_1} \quad \underbrace{\frac{\partial g}{\partial y} = 2x^2y - 3xy^2}_{f_2}$

TEOREMA DI GREEN

Sia $\gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ CURVA REGOLARE semplice chiusa; sia Ω la regione aperta del piano delimitata da γ e sia Γ il suo contorno. Supponiamo γ sia parametrizzata in modo che il senso di percorrenza sia quello antiorario. Sia inoltre $F(x_1,x_2) = (f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2))$ un campo vettoriale di $\mathbb{R}^2$ di classe C^1, definito su un aperto A tale che $K = \Omega \cup \Gamma \subset A$.



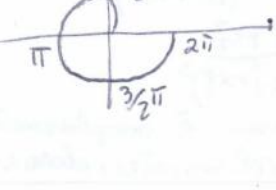
$\Omega \cup \mathrm{Im}\,\gamma \subseteq A \Rightarrow \gamma$ percorso in senso antiorario

Vale $\int_\gamma F\cdot t = \iint \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1,x_2) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right) dx_1\,dx_2$

1) Teorema di Green permette di risolvere un integrale di linea ad un integrale doppio
2) Se si cambia il senso di percorrenza allora l'integrale di linea cambia il segno
3) Teorema di Green vale per curve regolari a tratti
4) Vale se l'insieme Ω si può scrivere come unione di un numero finito di insiemi che soddisfino le ipotesi del teorema di Green e che si intersichino lungo i bordi. Verso di percorrenza che la regione K rimanga sulla sinistra.

ESERCIZIO

$K = \{(\rho,\theta) : 0 \le \rho \le \theta \quad 0 \le \theta \le 2\pi\}$ Calcolare l'area di K



$\int_\gamma F\cdot t = \underbrace{\int_\Omega \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1\,dx_2}$

$F = (f_1, f_2) \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1$

$F(x_1,x_2) = (0, x_1) \quad F(x_1,x_2) = (-x_2, 0)$

$F(x_1,x_2) = \left(-\frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2}x_1\right)$

$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

... $\exists \gamma \oint_\gamma F\cdot t \neq 0$

$\Rightarrow \gamma : \begin{cases} x_1 = \cos t \\ x_2 = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$

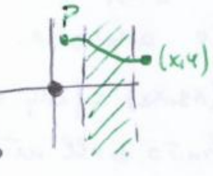
$$\oint_\gamma F\cdot \bar t = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{1}, \frac{\cos t}{1} \right) (-\sin t, \cos t)$$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{1}\, dt = 2\pi \neq 0$$

$\Rightarrow$ NON È CONSERVATIVO

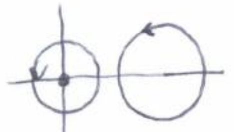
$\mathrm{dom}\, F = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

NON È SEMPL CONNESSO



F | insieme semplicemente connesso

$\boxed{\mathrm{rot}\, F = 0} \Rightarrow A$ semplicemente connesso in $\mathbb{R}^3$



F conservativo $\Rightarrow \forall \gamma \oint_\gamma F\cdot t = 0$ NON $\forall \gamma \oint_\gamma F\cdot t = 0 \Rightarrow$ non F CONSERVATIV

$\mathrm{rot}\, F = 0 + A$ semplicemente connesso in $\mathbb{R}^3$ (ore faremo il viceversa) $\Rightarrow \mathrm{rot} = 0$, semplicemente connesso quindi è conservativo

GENERALIZZAZIONI del TEOREMA di GREEN

Campo vettoriale F di classe C^1 definito su un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$. Curva $\gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ chiusa semplice, regolare a tratti. γ è CONTINUA, numero finito di punti $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ tali che la restrizione di γ ad ogni sottointervallo $[t_{i-1}, t_i]$ è regolare.

Supponiamo γ sia percorsa in senso antiorario. Γ sostegno di γ, con Ω la regione del piano delimitata da γ. Anche in questo caso $K = \Gamma \cup \Omega$ risulta limitato e chiuso

$$\left[\int_\gamma F\cdot t = \int_{\gamma_1} F\cdot t + \dots + \int_{\gamma_N} F\cdot t = \iint_K \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1\, dx_2 \right]$$

Con 2 curve γ_1 e γ_2 di $\mathbb{R}^2$, chiuse, semplici e regolari a tratti percorse in antiorario. Regioni Ω_1 e Ω_2 delimitate da tali curve disgiunte e i loro sostegni Γ_1 e Γ_2 abbiano in comune un tratto $\Rightarrow K = K_1 \cup K_2 \subset A \quad K_1 = \Gamma_1 \cup \Omega_1 \quad K_2 = \Gamma_2 \cup \Omega_2$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} F\cdot t = \iint_{K_1} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1\, dx_2 \qquad \int_{\gamma_2} F\cdot t = \iint_{K_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1\, dx_2$$

Sommando membro a membro, si ha: $\int_{\gamma_1} F\cdot t + \int_{\gamma_2} F\cdot t = \iint_K \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1\, dx_2$

La parte comune di Γ_1 e Γ_2 può essere parametrizzata come una curva $\delta(t)$. Però il senso di percorrenza per δ è diverso se si pensa δ come tratto di γ_1 oppure di γ_2

$$\int_\gamma F\cdot t = \iint_K \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1\, dx_2$$

$\Rightarrow$ percorrendo γ_1 e γ_2 esclusi δ_1 e δ_2 $\Rightarrow \int_\gamma F\cdot t + \int_\delta F\cdot t = \iint_K \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1\, dx_2$

ORIENTATA IN SENSO ANTIORARIO

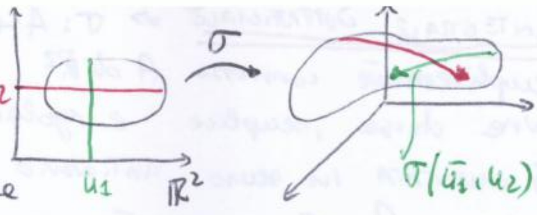
Ricostruzione del POTENZIALE

Verificato che F è conservativo, su un insieme A, si pone il problema di calcolarne un potenziale g. Interpretando P_0 come fissato e P_1 come variabile si ricava:

$\boxed{g(P_1) = \int_\gamma F\cdot t + g(P_0)}$ dove $g(P_0)$ gioca il ruolo della costante arbitraria. Il nostro problema si riduce al calcolo di un integrale di linea.

Consideriamo un campo vettoriale F di $\mathbb{R}^2$ ed A sia un rettangolo con i lati paralleli agli assi coordinati. Poniamo $\bar P = (\bar x_1, \bar x_2)$ e $P = (x_1, x_2)$. Conveniamo di scegliere la curva γ composta

$\Rightarrow \sigma(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = (\sigma_1(u_1, u_2), \sigma_2(u_1, u_2), \sigma_3(u_1, u_2))$



FISSO $u_1 \Rightarrow \sigma(u_1, \bar{u}_2)$ → vettore tangente alla prima curva sono le derivate applicate alla prima curva $\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u_1}(u_1, \bar{u}_2), \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_1}, \frac{\partial \sigma_3}{\partial u_1}\right)$

$\sigma(\bar{u}_1, u_2)$

l'altro vettore tangente è $\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u_2}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_2}, \frac{\partial \sigma_3}{\partial u_2}\right)$

- La superficie σ è regolare se $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono di classe C^1 ed inoltre $\forall (u_1, u_2) \in A$

$\frac{\partial \sigma}{\partial u_1} = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u_1}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_1}, \frac{\partial \sigma_3}{\partial u_1}\right)$, $\frac{\partial \sigma}{\partial u_2} = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u_2}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_2}, \frac{\partial \sigma_3}{\partial u_2}\right)$ sono linearmente INDIPENDENTI

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial u_1} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \sigma$ è REGOLARE SE LA MATRICE ha rango 2.

σ è REGOLARE NON HA SPIGOLI

NON È REGOLARE

PIANO TANGENTE a Σ in $\sigma(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ è il piano passante per il punto $\sigma(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ e parallelo ai vettori $\frac{\partial \sigma}{\partial u_1}(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, $\frac{\partial \sigma}{\partial u_2}(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$

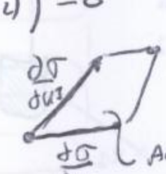
$\Rightarrow$ Per il PIANO TANGENTE:

mi trovo il campo del PIANO TANGENTE $N(\sigma(\bar{u}_1, \bar{u}_2)) = \frac{\partial \sigma}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial u_2}$

piano tangente nel punto $\sigma(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$

$$[x - \sigma(\bar{u}_1, \bar{u}_2)] \cdot N(\sigma(\bar{u}_1, \bar{u}_2)) = 0$$

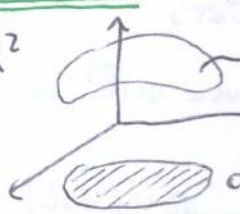
cioè $\Rightarrow \| N(\sigma(\bar{u}_1, \bar{u}_2)) \| = \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u_1}(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial u_2}(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \right\|$



AREA $= \| N(\sigma(\bar{u}_1, \bar{u}_2)) \|$

SUPERFICI CARTESIANE $\Rightarrow$ sostegni sono i grafici delle funzioni

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



$$x_3 = f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 = x_1 = \sigma_1(x_1, x_2) \\ x_2 = x_2 = \sigma_2(x_1, x_2) \\ x_3 = f(x_1, x_2) = \sigma_3(x_1, x_2) \end{cases}$$

se dominio è aperto $\Downarrow$ σ è SUPERFICIE

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

→ DETERMINANTE È UGUALE A ZERO $\Rightarrow$ RANGO 2

f derivabile $\Rightarrow \sigma$ è REGOLARE

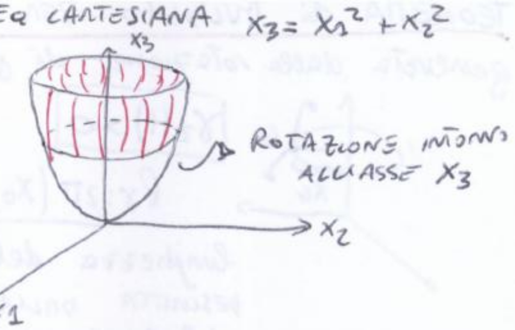
$$N(\sigma(x_1, x_2)) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \partial f/\partial x_1 \\ 0 & 1 & \partial f/\partial x_2 \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, -\frac{\partial f}{\partial x_2}, 1\right)$$

ORIENTAMENTO di UNA SUPERFICIE $\Rightarrow$

→ FINITO IL PERCORSO TI TROVI AL CONTRARIO

↳ le curve non sono tutte orientabili

ESEMPIO CALCOLIAMO L'AREA DI UN PARABOLOIDE DI EQ CARTESIANA $x_3 = x_1^2 + x_2^2$



$$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_3 \in [1,4]$$

$$\iint_\Sigma 1 \cdot dS \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_1^2 + x_2^2 \end{cases} \quad 1 \le x_3 \le 4$$

$$N(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2x_1 \\ 0 & 1 & 2x_2 \end{vmatrix} = (-2x_1, -2x_2, 1)$$

$$\| N(x_1, x_2, x_3) \| = \sqrt{4x_1^2 + 4x_2^2 + 1} \qquad \text{AREA } \Sigma = \iint \sqrt{4x_1^2 + 4x_2^2 + 1} \cdot dx_1\, dx_2$$

$$(x_1, x_2) \in C \qquad 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4$$

$$C = \{(\rho, \theta) \ 1 \le \rho \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{4\rho^2 + 1}\ \rho\, d\rho\, d\theta = 2\pi \frac{(4\rho^2+1)^{3/2}}{3/2} \cdot \frac{1}{8} \Big|_1^2 =$$

$$= \frac{\pi}{6} \left[17^{3/2} - 5^{3/2} \right]$$

PROPRIETÀ $\Rightarrow$ ADDITIVITÀ RISPETTO ALLA OMOGENEITÀ

ADDITIVITÀ RISPETTO AL DOMINIO $\Rightarrow$ l'integrale si può definire anche su unione di calotte regolari che si intersichino al più lungo dei bordi

CAMBIAMENTO DI PARAMETRO

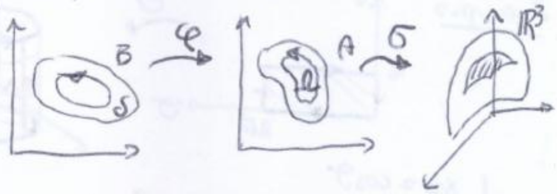
$$(u_1, u_2) \Rightarrow \quad u_1 = \varphi_1(v_1, v_2) \qquad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \qquad B \subseteq \mathbb{R}^2 \to A \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$u_2 = \varphi_2(v_1, v_2) \qquad\qquad (v_1, v_2) \to (u_1, u_2)$$

CAMBIAMENTO di PARAMETRO REGOLARE

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v_2} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v_1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v_2} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall (v_1, v_2) \in B$$

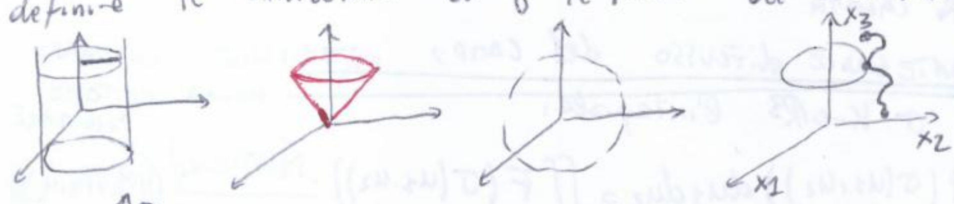
$\Rightarrow$ L'integrale di superficie di una funzione non dipende dalla parametrizzazione

Se $\varphi : B \to A$ è un cambiamento di parametri, possiamo definire una curva chiusa, semplice e regolare con sostegno $\Delta \subset B$ ponendo $\boxed{\delta(t) = \varphi^{-1}(\gamma(t))}$



CALCOLO AREA di SUPERFICI di ROTAZIONE

Sia $\gamma(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare. Se si immagina che sul sostegno della curva vi sia una distribuzione di massa uniforme (di densità unitaria), è naturale definire il BARICENTRO di γ il punto di coordinate;



γ CURVA NEL PIANO x_2, x_3

$$\gamma(t) = (0, \gamma_2(t), \gamma_3(t))$$

$$\sigma : \begin{cases} x_1(t) = \gamma_2(t) \cdot \cos\theta \\ x_2(t) = \gamma_2(t) \cdot \sin\theta \\ x_3(t) = \gamma_3(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

BARICENTRO di $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ COORDINATE:

$$(x_G)_i = \frac{1}{\ell_\gamma} \int_\gamma x_1\, ds\ ; \quad (y_G)_i = \frac{1}{\ell_\gamma} \int_\gamma x_2\, ds \quad (z_G)_i = \frac{1}{\ell_\gamma} \int_\gamma x_3\, ds$$

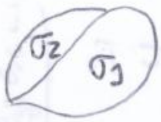
Cambiando la parametrizzazione può cambiare il segno dell'integrale:

$T \to$ CAMBIO DI PARAMETRO $\det(JT) > 0$ il segno dell'integrale non cambia,

$\det(JT) < 0$ il segno cambia $\iint_K F \cdot N = -\iint_K F \cdot N$

PROPRIETÀ: ADDITIVITÀ ALLA FUNZIONE, OMOGENEITÀ

ADDITIVITÀ VERSO IL DOMINIO (IMPORTANTE!!) $\to$

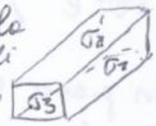


$\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$

$\sigma_1 \cap \sigma_2 = \{$pezzi di bordo$\}$

$$\iint_{\sigma_1 \cup \sigma_2} F \cdot \bar{n} = \iint_{\sigma_1} F \cdot \bar{n} + \int_{\sigma_2} F \cdot \bar{n}$$

$\to$ AMPLIO la categoria degli integrali di flusso



$$\Rightarrow \iint_\sigma \dots = \sum_{i=1}^{n} \iint \sigma_i$$

ESEMPIO $F(x,y,z) = (3z, x+1, y)$ $\quad \Sigma = \{(x,y,z) : x = y + z^2, y^2 + z^2 \le 1\}$ orientata nel verso delle $x > 0$

$\iint_\Sigma F \cdot \bar{n} \Rightarrow$ FORMA CARTESIANA (una coordinata in funzione delle altre due)

$$\begin{cases} x = y + z^2 & 1^a \\ y = y & 2^a \\ z = z & 3^a \end{cases} \quad (y,z) \in C = \{(y,z) : y^2 + z^2 \le 1\}$$

$$\Rightarrow N(x,y,z) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2z & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, -1, -2z)$$

$1^a/\partial y$, $2^a/\partial y$, $3^a/\partial y$; $1^a/\partial z$, $2^a/\partial z$, $3^a/\partial z$

$$\Rightarrow \iint_C (\underbrace{3z, y+z^2+1, y}_{F(x)})\,(1, -1, -2z)\, dy\, dz = \iint_C (3z - y - z^2 - 1 - 2zy)\, dy\, dz$$

$$\to \begin{cases} y = \rho \cos\theta & \rho \in [0,1] \\ z = \rho \sin\theta & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$ - - ecc... come integrale doppio

TEOREMA di STOKES $\Rightarrow$ sia V un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^3$ e sia $F: V \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1. Sia σ una CALOTTA di $\mathbb{R}^3$ con sostegno contenuto in V ($\text{Im}\, \sigma \subseteq V$), Allora:

$$\boxed{\int_{\partial\sigma} F \cdot t = \int_\sigma \text{rot}\, F \cdot n}$$

È IMPORTANTE osservare che σ calotta e la curva $\partial\sigma$ che costituisce il bordo sono automaticamente parametrizzato in modo che muovendosi lungo $\partial\sigma$ con la testa rivolta nella direzione del vettore normale, la sup rimane sulla sinistra.

Si può considerare il caso in cui il bordo parametrizzato in modo che muovendosi lungo $\partial\sigma$ con la testa rivolta nella direzione del vettore normale, la superficie rimane sulla destra $\Rightarrow$ i due membri rimangono uguali in valore assoluto

Se $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un CAMPO VETTORIALE CONTINUO, se $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale di classe C^1 tale che $G = \text{rot}\, F$, si dice che F è un POTENZIALE vettore di G.

Quindi STOKES AMMETTE UN POTENZIALE VETTORE, quindi gli integrali di flusso di G non dipendono dalla forma della calotta.

TEOREMA $F: V \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ V semplicemente rot $F=0 \Rightarrow F$ conservativo.

Dim Calcoliamo per ogni curva γ semplice regolare chiusa:

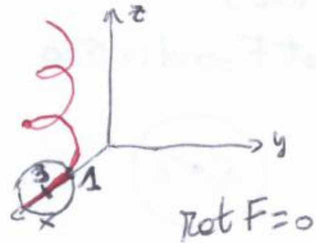
$$\oint_\gamma F\cdot t \overset{\downarrow}{\underset{\uparrow}{=}} \int_\sigma \text{rot}\, F \cdot n = 0 \Rightarrow F \text{ è conservativo su } V.$$

V semplicemente connesso $\exists\, \sigma$ tale che $\partial\sigma = \gamma$

$\Rightarrow \sigma$ calotte con bordo γ dobbiamo trovare una σ che sta tutta dentro V

ESERCIZIO $F(x,y,z) = \left(-\frac{1}{x^2}, e^z, ye^z\right)$ $\quad \gamma(t) = (3t\cos t, \sin t, 3t)$

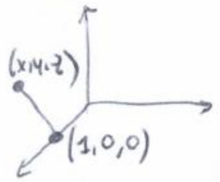
$t \in [0, 2\pi]$ $\quad$ dom $F = \mathbb{R}^3 \setminus \{x=0\}$



$$\text{rot}\, F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -\frac{1}{x^2} & e^z & ye^z \end{vmatrix} = (\underbrace{e^z - e^z}_{=0}, 0-0, 0-0) = (0,0,0)$$

rot $F = 0$ $\quad \{x>0\}$ semplicemente connesso $\Rightarrow F$ è conservativo sull'insieme $\{x>0\}$

Calcolo un POTENZIALE:



1° modo $\Rightarrow$ unire un punto ad un altro oppure

2° modo $\Rightarrow$ g è un potenziale

se $\nabla g = F$ $\quad g = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\{x>0\}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = -\dfrac{1}{x^2} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = e^z \\ \dfrac{\partial g}{\partial z} = ye^z \end{cases}$$

$g(x,y,t) = \frac{1}{x} + \varphi(y,t)$ $\quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = e^z$ $\quad \varphi(x,y,z) = ye^z + h(z)$

$g(x,y,z) = \frac{1}{x} + ye^z + h(z)$ $\quad \frac{\partial g}{\partial z} = ye^z = ye^z + h'(z)$

$h'(z) = 0$ $\quad h(z) = \text{cost}$ $\quad g(x,y,z) = \frac{1}{x} + ye^z$

$$\int_\gamma F\cdot t = g(\gamma(2\pi)) - g(\gamma(0)) = (4,0,6\pi) - (4,0,0) = \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{4} - 0 = 0$$

DIVERGENZA DI UN CAMPO VETTORIALE

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad F = (f_1, f_2, f_3)$

$$\boxed{\text{div}\, F(x_1,x_2,x_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3) + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)}$$

ESEMPIO $F(x_1,x_2,x_3) = (x_2, x_1x_2\cos x_3, x_3)$ $\quad$ div $F = 0 + x_1\cos x_3 + 1$ $\Rightarrow$ ad ogni punto dello spazio assume un punto $\quad$ div $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

TEOREMA di GAUSS (o della divergenza)

$V \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto e connesso delimitato da un numero finito di calotte regolari che si intersecano al più lungo pezzi di bordo

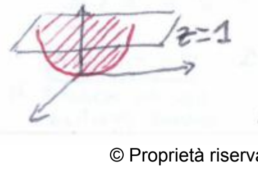
Le calotte siano parametrizzate in modo che i versori normali siano orientati verso l'esterno di V.

A aperto di $\mathbb{R}^3$ $\quad F: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ C^1 $\quad V \subseteq A$ allora $\partial V \cup \sigma_i$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\sigma_i} F\cdot n = \iiint_V \text{div}\, F \, dx_1 dx_2 dx_3$$

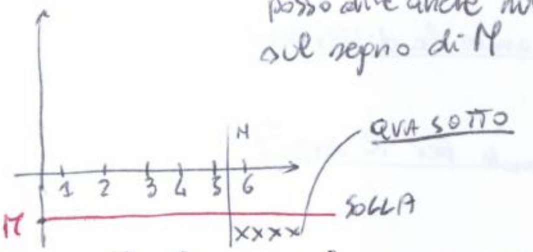
DEFINIZIONE div $F = 0 \Rightarrow$ CAMPO SOLENOIDALE

ES! $F(x,y,z) = (xy^2, yz^2, zx^2)$ $\quad V = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le z \le 1\}$ $\quad$ Calcolare il flusso di F uscente da V:



$$\int_{\partial V} F\cdot n \underset{\text{TEOREMA DIVERGENZA}}{=} \iiint_V \text{div}\, F \, dx\, dy\, dz \Rightarrow$$

3) $\lim_n a_n = -\infty \quad \forall M > 0 \quad \exists n_0$ tale che $\forall n > n_0 \quad a_n < -M$
⇓
posso dire anche nulla sul segno di M → si dice che la s. diverge negativamente



4) se $\nexists \lim_n a_n$ la successione si dice indeterminata

ESEMPIO $(-1)^n = 1, -1, 1, -1, 1 \ldots$ (NON ESISTE il risultato).

ESEMPIO IMPORTANTE

Successione GEOMETRICA di ragione q $\quad a_n = q^n$

$$\lim_n q^n = \begin{cases} +\infty & q > 1 \Rightarrow \text{DIVERGE POSITIVAMENTE} \\ 1 & q = 1 \rightarrow \text{CONVERGE ad } 1 \\ 0 & |q| < 1 \rightarrow \text{converge a } 0 \\ \nexists & q \leq -1 \rightarrow \text{NON ESISTE} \Rightarrow \text{i valori oscillano ed i valori tendono a } +\infty \text{ quindi non esiste.} \end{cases}$$

⇒ SUCCESSIONE DEFINITA ⇒ una certa proprietà vale DEFINITIVAMENTE se vale da un certo n in poi, cioè se $\exists n_0$ tale che la proprietà vale per $n > n_0$

ESEMPIO $\quad a_n = n^2 - 10 \Rightarrow a_n$ è definitivamente positiva

se $n = 1 \quad a_1 = -9 < 0 \qquad n > 4 \quad a_n > 16 - 10 > 0$ quindi la proprietà di a_n di essere definitivamente positiva vale da un certo punto in poi.

ELENCO delle PROPRIETÀ e dei TEOREMI SUI LIMITI delle SUCCESSIONI

(1) UNICITÀ del LIMITE ⇒ se per x che tende a x_0 ($\to x_0$) la funzione $f(x)$ ha limite il numero reale ℓ, allora tale limite è unico

IPOTESI 1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ $\quad$ TESI ⇒ ℓ è UNICO
2. $\ell \in \mathbb{R}$

(2) Se $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ $\{c_n\}$ sono tre successioni di numeri reali tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$ e si ha: $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} c_n = \ell$ allora anche $\lim_{n \to +\infty} b_n = \ell$ (TEOREMA del CONFRONTO)

Dim $\quad \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \quad \forall n > N \quad M = \max\{N, N'\}$ si ottiene $\ell - \varepsilon < a_n < b_n < c_n < \ell + \varepsilon$
$\ell - \varepsilon < c_n < \ell + \varepsilon \quad \forall n > N' \qquad \ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon \quad \forall n > M$

ESEMPI $\quad b_n = \frac{\sin n \cos n}{n^2} \qquad a_n = -\frac{1}{n^2} \quad c_n = \frac{1}{n^2}$ poiché $-1 \leq \sin n \cos n \leq 1$

$-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\sin n \cos n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

per ogni n entrambe a_n e c_n sono infinitesime

(3) TEOREMA di PERMANENZA del SEGNO ⇒ se il limite di una funzione per x che tende a x_0 è un numero ℓ diverso da zero, allora esiste un intorno I di x_0 (escluso al più x_0) in cui $f(x)$ ed ℓ sono entrambi positivi oppure entrambi negativi. Se $\ell < 0$ possiamo porre $\varepsilon = -\ell$, perché $-\ell > 0$.

IPOTESI: 1 $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ $\quad$ TESI: $f(x) > 0$ in un intorno di x_0.
2 $\ell > 0$

TEOREMA Se una funzione è positiva o nulla in un intorno di $I(x_0)$ di un punto x_0, escluso al più $x = x_0$ e ammette limite finito ℓ per x che tende ad x_0, allora $\ell \geq 0$

IPOTESI 1 $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in I(x_0)$ con $x \neq x_0$ $\quad$ TESI $\ell \geq 0$
2 $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

ES SERIE di MENGOLI $\Rightarrow \sum_{n=2} \frac{1}{n(n-1)}$ $S_2 = \frac{1}{2\cdot 1}$ $S_3 = \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 1}$ $S_4 = \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3}$

$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n-1)}{n(n-1)} = \boxed{\frac{1}{n(n-1)}}$

quindi riscrivo i termini con questo nuova notazione $S_2 = 1 - \frac{1}{2}$

$S_3 = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$ $S_4 = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \left|1-\frac{1}{4}\right|$ $S_5 = 1 - \frac{1}{5}$ ... $S_n = 1 - \frac{1}{n}$

$\Rightarrow$ Tende ad 1 $\to$ la serie converge e la somma è 1.

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$ $a_n \geq b_n \geq 0$

ES $\sum_{n=1}^{+\infty} n$ $S_1 = 1$ ... $S_n = 1+2+3+\dots+n \geq n \to +\infty \Rightarrow S_n$ diverge per il TEOREMA del confronto per le successioni

$S_2 = 1+2$

$S_3 = 1+2+3$

ES $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ $S_0 = (-1)^0 = 1$ $S_1 = 1 + (-1)^1 = 1-1 = 0$ $S_2 = 1 + (-1)^1 + (-1)^2 = 1-1+1 = 1$

$\boxed{S_{n+1} = S_n + a_{n+1}}$ in generale $S_n = 1, 0, 1, 0, 1$

$\nexists \lim_n S_n$ cioè la serie è INDETERMINATA

SERIE GEOMETRICA di ragione q

$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \underbrace{q^0}_{1} + q^1 + q^2 + q^3 + \dots$ $\Rightarrow$ ricordo $(a^{n+1} - b^{n+1}) = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2} + \dots + ab^{n-1} + b^n)$

$q \neq 1$

$S_n = 1 + q + \dots + q^n$ $a=1$ $b=q$ $\Rightarrow (1-q^{n+1}) = \cancel{(1-q)}(1+q+q^2+\dots+q^n)$ $\to$ RIDOTTA ENNESIMA della serie.

divido per $1-q$ $\frac{1-q}{1-q}$

$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \left| \lim_{n\to+\infty} (1-q^{n+1}) \right. =$

$= \frac{1}{1-q}\left(1 - \lim_{n\to\infty} q^{n+1}\right) = \frac{1}{1-q}\left(1 - \lim_{n\to\infty} q^{n+1}\right)$ $\lim$

$\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } q > 1 \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ 0 & \text{se } |q| < 1 \\ \nexists & \text{se } q = -1 \end{cases}$ $q = -1 \to (-1, 1, -1, 1, -1, 1)$

$S = \frac{1}{1-q}\left(\dots\right. \begin{cases} +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$ Per $q = 1$ la serie è divergente positivamente

CONDIZIONE NECESSARIA per la CONVERGENZA

$\to$ termine generale della serie

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \Rightarrow$ Se la serie converge allora $a_n \to 0$

DIM $S_n \to S$ $S_{n+1} = \overset{\to \text{dot as than}}{S_n} + a_{n+1}$ $\Rightarrow a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = S - S = 0$ Differenza delle successioni e la diff dei limiti è zero.

Se $a_n \not\to 0 \to$ la serie NON CONVERGE

DEF $K \in \mathbb{R}$ $\sum (K a_n) = K S^a$ $\sum a_n = S^a$

3) $\sum_{n=0}^{+\infty} [n + (-n)] = 0$ SOMMA INFINITA di ZERI

4) $\sum_{n=0}^{+\infty} [n^2 + (-n)] =$ raccolgo $n^2 \left[1 - \frac{1}{n}\right]$ $\quad n^2 + (-n) \to +\infty$ non è vero che $n^2 + (-n) \to 0$ dunque non è soddisfatta

5) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n + (-1)^{n+1}\right] = 0$ la condizione necessaria per la convergenza quindi la serie NON CONVERGE

(somma di serie indeterminate può essere zero)

$S_0 = a_0 = 1 - 1 = 0$

$S_1 = a_0 + a_1 = S_0 + a_1 = (-1)^1 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0$ $\quad \forall n \; a_n = 0$

6) $\sum_{n=0}^{+\infty} [n + (-1)^n]$ DIVERGE POSITIVAMENTE $\quad a_n \geq n - 1 \to$ termine generale è più grande di $n-1$

quindi $a_n \geq n - 1 \to +\infty$ $\quad S_n \geq a_n \to +\infty$ diverge positivamente

SERIE A TERMINI POSITIVI

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ con $a_n \geq 0$ $\forall n \Rightarrow$ PROPOSIZIONE Se $a_n \geq 0$ $\forall n$ allora o la serie converge o la serie diverge positivamente.

DIM $S_0 = a_0$ $\quad S_1 = a_1 + a_0 = S_0 + a_1$

$S_{n+1} = S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0}$ $\quad S_{n+1} \geq S_n$ la successione S_n è CRESCENTE

$\Rightarrow$ TEOREMA limite delle successioni MONOTONE o $S_n \to S \in \mathbb{R}$ o $S_n \to +\infty$

La proposizione vale anche per le serie a termini positivi definitivamente

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots$ $\quad \geq 0 \quad \geq 0$ $\Rightarrow$ ES $\underbrace{1 - 5 + 17 - 20 - 27}_{\text{SOMMA INFINITA}} + \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\text{PARTE POSITIVA}}$

POS O NEG

CRITERIO del CONFRONTO per le SERIE a TERMINI POSITIVI (definitivamente)

$\sum_n a_n, \sum_n b_n$ $\quad a_n \geq 0 \quad b_n \geq 0 \quad \forall n \quad a_n \leq b_n \quad \forall n$ (VALE DEFINITIVAMENTE)

1) Se $\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge

2) Se $\sum_n a_n$ diverge positivamente $\Rightarrow \sum_n b_n$ diverge POSITIVAMENTE.

DIM $0 \leq S_0^a = a_0 \leq b_0 \leq S_0^b$ $\quad 0 \leq S_n^a = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n \leq S_n^b$

Se $\sum b_n = S^b$ $\forall n$ $0 \leq S_n^a \leq S^b$

S_n^a è MONOTONA CRESCENTE, LIMITATA $\Rightarrow$ CONVERGENTE a $S^a \leq S^b$

$0 \leq \underset{+\infty}{S_n^a} \leq \underset{+\infty}{S_n^b}$ $\to$ se $S_n^a \to +\infty$ (cioè $\sum a_n$ diverge) per il TEOREMA del CONFRONTO nei limiti delle successioni $S_n^b \to +\infty$

ESEMPIO ① $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge positivamente perché $\boxed{\frac{1}{n} \geq \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$ e abbiamo visto che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge positivamente $\Rightarrow \boxed{\frac{1}{n} \geq \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$ $\underset{(1,+\infty)}{\forall x}$ $\log(1 + x) \leq x$ $\quad g(x) = \log(1+x) - x$ $\Rightarrow$

DISUGUAGLIANZA SUI NATURALI DA A NOI SERVE SUI NUM. REALI

ESEMPI 1) $\sum^{\infty} \frac{1}{n!}$ $a_n = \frac{1}{n!}$ $\boxed{0! = 1}$ (per definizione)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n!}} \cdot \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = \frac{1}{(n+1)(n-1)3\cdot 2\cdot 1\cdot n} n(n-1)3\cdot 2\cdot 1 = \frac{1}{n+1} \to 0 < 1 \Rightarrow$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ CONVERGE.

$\Rightarrow$ 2) $\sum \frac{1}{n}$ DIVERGE $a_n = \frac{1}{n}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1/n} = \frac{n}{n+1} = 1$

Se il limite de ℓ rapporto viene 1 non si sa più dire nulla.

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ CONVERGE $a_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$

CRITERIO della RADICE per le SERIE A TERMINI POSITIVI

$\sum a_n$ $a_n \geq 0$ $\forall n$

1) se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell < 1 \Rightarrow \sum a_n$ CONVERGE 3) se $\ell = 1$ NON SI SA NULLA

2) se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell > 1 \Rightarrow \sum a_n$ DIVERGE

Dim $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ tale che per $n > n_0$

$$\ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$$

1) $\ell < 1$ $\exists$ per $\ell + \varepsilon < 1$ $\sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon < 1$ $a_n \leq (\ell+\varepsilon)^n$

$\Rightarrow \sum_n \underbrace{(\ell+\varepsilon)}_{q}^n$ serie geometrica di ragione $(\ell+\varepsilon)$

se $\ell + \varepsilon < 1$ $\sum_n (\ell+\varepsilon)^n$ CONVERGE $\Rightarrow$ per il criterio del confronto $\boxed{\sum a_n \text{ CONVERGE}}$
(la confrontiamo da un certo punto in poi per un certo n_0)
($\exists n_0$ tale che $n > n_0$)

2) $\ell > 1$ $\exists \varepsilon > 0$ se $\ell - \varepsilon \geq 1$ $\ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} \Rightarrow (\ell-\varepsilon)^n < a_n \Rightarrow \sum (\ell-\varepsilon)^n$ è divergente

$\Rightarrow \sum a_n$ DIVERGENTE

ESEMPIO
$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n+1}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n+1}}{2} = \frac{1}{2} < 1$ la serie converge

LIMITE NOTEVOLE
$\lim_n n^{1/n} = \lim_n e^{\log n^{1/n}} = \lim_n e^{\frac{1}{n}\log n} = 1$ (e^0)

$\Rightarrow$ la serie è LIMITATA su un INTERVALLO LIMITATO

$\int_a^b f(x)\,dx$ f limitata $[a,b]$ LIMITATO

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^n f(x)\,dx = f(x) \geq 0$ aggiungere pezzi di aree sempre positive, se successione è MONOTONA ammette limite $\Rightarrow$ questa è MONOTONA quindi converge o diverge NON PUÒ ESSERE INDETERMINATA.

$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ $n \in \mathbb{N}$

• Se $l>0$ possiamo scegliere ($l+\varepsilon$ = COSTANTE POSITIVA >0) quindi per il criterio del CONFRONTO $\sum b_n$ CONV $\Rightarrow \sum a_n$ CONVERGE $b_n>0$ se $a_n<b_n$ allora a_n converge anch'essa

• $l>0$ preso ε sufficientemente piccolo $l-\varepsilon>0$ $\Rightarrow$ definiamo che per $n>n_0$

$$0<b_n(l-\varepsilon)<a_n$$

se $\sum a_n$ converge per il criterio del confronto la serie $b_n(l-\varepsilon)$ CONVERGE allora molt o divido non cambia il carattere della serie

$$\boxed{\sum b_n \text{ CONVERGE}}$$

$\Rightarrow -\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<\varepsilon$ $\quad b_n>0 \Rightarrow -\varepsilon b_n<a_n<\varepsilon b_n$

$\Rightarrow$ CONFRONTO SOLO SU TERMINI POSITIVI $\quad$ se $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge

se $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum \varepsilon b_n$ diverge $\Downarrow$ $\boxed{\sum b_n \text{ diverge}}$

SECONDO CRITERIO del CONFRONTO ASINTOTICO per serie a termini positivi

$\sum_n a_n \quad a_n\geq 0$

1) Se a_n è INFINITESIMA di ordine minore o uguale a $\frac{1}{n}$ allora $\sum a_n$ diverge.

2) Se esiste $\alpha>1$ tale che a_n è infinitesimo di ordine maggiore o uguale a $\frac{1}{n^\alpha}$ allora la serie $\sum a_n$ converge.

ESEMPIO

• $\frac{1}{n^2\log n}$ INFINITESIMA di ordine maggiore $>\frac{1}{n^2}$ $\Rightarrow \frac{\frac{1}{n^2\log n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2\log n} \to 0$

$\sum \frac{1}{n^2\log n}$ è CONVERGENTE.

• $\sum \frac{1}{n\log n}$ $\Rightarrow$ è VERO che è UN INFINITESIMO di ordine maggiore di $\frac{1}{n}$ ma non mi dice nulla se DIVERGE o CONVERGE

$\frac{1}{n\log n} \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha>1$ per capire il carattere devo usare il criterio di MCLAURIN quindi $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\log x}dx$

SERIE CON TERMINI A SEGNI ALTERNI

$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n b_n \quad b_n>0 \ \forall n \quad b_0-b_1+b_2-b_3$

CRITERIO di LEIBNIZ

1) $b_n\to 0 \quad n\to+\infty$

2) $b_n\geq b_{n+1}$ cioè successione di n è decrescente (b_n DECRESCENTE)

$\Rightarrow \sum_n(-1)^n b_n$ è CONVERGENTE

TEOREMA $\sum_n a_n x^n$ ci sono 3 casi:

1) la serie converge solo per $x=0$; OSSERVAZIONE $\sum_n a_n 0^n = 0+0+0=\emptyset \Rightarrow$ l'insieme ha sempre un valore che è zero.

2) Esiste $\rho>0$ tale che la serie converge assolutamente per $|x|<\rho$ e NON CONVERGE per $|x|>\rho$ $\quad x\in\mathbb{R}$

3) la serie converge per ogni $x\in\mathbb{R}$

Dim Sia $\bar{x}$ fissato supponiamo di sapere che $\sum_n a_n \bar{x}^n$ converge.

1) Dimostriamo che se $|x|<|\bar{x}| \Rightarrow \sum a_n x^n$

$|a_n x^n| = \left|a_n \frac{x^n}{\bar{x}^n}\bar{x}^n\right| = |a_n \bar{x}^n| \cdot \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n$

$|a_n x^n| \le |a_n \bar{x}^n| \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n \le k\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n$ per ipotesi $\sum a_n \bar{x}^n$ converge

converge in ogni punto di x

Condizione necessaria per la convergenza $a_n \bar{x}^n \to 0$ $\; n\to+\infty$

$\exists k$ tale che per n grande $|a_n \bar{x}_n| < k$

$\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n \to$ di questa serie sappiamo se converge o diverge, dato che prendo il valore $\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|<1$ allora la serie converge.

$\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|<1 \quad |x|<|\bar{x}|$

termine generale di una serie convergente e sappiamo che tende a zero ed è una funzione limitata.

per il criterio del confronto per serie a termini positivi

$\sum_n |a_n x^n|$ è convergente cioè $\sum a_n x^n$ converge assolutamente

$\Rightarrow \sum a_n x^n$ CONVERGE.

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CONVERGE ma non converge assolutamente $\sum\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum\frac{1}{n}$ NON CONVERGE.

$|x|<|\bar{x}|$ $\quad$ IPOTESI $\Rightarrow$ se in x la serie non converge allora per ogni x tale che $|x|>|\bar{x}|$ la serie non converge

SATURO

dobbiamo dimostrare che NON CONVERGE

Determiniamo l'insieme di convergenza della serie:

CONVERGE $\quad$ NON CONVERGE

allora $\rho = \sup\{|\bar{x}| : \sum a_n \bar{x}^n \text{ converge}\}$

RAGGIO DI CONVERGENZA della serie di POTENZE

allora l'insieme di convergenza fino a che i due tratti si incontrano!!

[In ρ e $-\rho$ non si sa cosa capita]

$\Rightarrow \rho$ per la serie GEOMETRICA è 1

CRITERIO DEL RAPPORTO per le serie di POTENZE $\Rightarrow a_n\neq 0 \quad \exists \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell\in\mathbb{R}$

Allora si ha che: 1) se $\ell=+\infty \Rightarrow \rho=0$

2) Se $\ell\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow \rho=\frac{1}{\ell}$

3) Se $\ell=0$ la serie converge per ogni $x\in\mathbb{R} \Rightarrow \rho=+\infty$

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$ ⇒ cerco il raggio di convergenza ρ $\quad a_n = \frac{1}{n}$ ⇒

⇒ $\frac{|a_{n+1}|}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = 1 = \ell \qquad \rho = \frac{1}{\ell} = 1$

$\bullet\ x=1: \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge

$\bullet\ x=-1 \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(-1)^n$ CONVERGE

Insieme di convergenza $C = [-1, 1)$

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} x^n \quad a_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}}_{0^0} = \underbrace{\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2}}_{\text{LIMITE NOTEVOLE}} \longrightarrow 1 \quad \rho = \frac{1}{\ell} = 1 \quad (-1, 1)$

$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log n} \to 1$

$\bullet\ x=1 \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ CONVERGE

4) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$

$\bullet\ x=-1 \ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \quad \left|(-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$

CRITERIO RAPPORTO $\frac{|a_{n+1}|}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1} = \frac{1}{n+1} \to 0 = \ell$

$\sum \frac{1}{n^2}$ conv ⇒ $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ conv ASSOLUTAMENTE

$\rho = +\infty$

5) $\sum_{n=0} (-1)^n n^n x^n \quad a_n = (-1)^n n^n$ CRITERIO RADICE $\sqrt[n]{|(-1)^n n^n|} = \sqrt[n]{n^n} = n \longrightarrow +\infty$

$\rho = 0$ la serie converge solo per $x=0$

SOMMA di SERIE di POTENZE

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ insieme di convergenza C_a ; $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ insieme di convergenza C_b ed S_b è la somma della serie.

TEOREMA $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n+b_n) x^n$ CONVERGE nell'INSIEME $C_a \cap C_b$ e in questo insieme la sua somma è la somma delle 2 serie $S_a(x) + S_b(x)$ SINTETIZZANDO:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n+b_n) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

N.B. In generale la serie somma potrebbe convergere in un insieme più grande di $C_a \cap C_b$

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n!}\right) x^n$ ⇒ per convergenza ⇒ prendo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$ invece

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} \frac{n!}{1} = \frac{1}{n+1} \to 0 \qquad \rho = +\infty$ cioè $\sum$ converge $\forall x$

però l'insieme di convergenza può essere

la serie somma converge in $[-1, 1)$ più grande.

⇒ $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n!}\right) x^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)! - 1}{n!} x^n$ per esercizio.

ES $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{n} x^n$ PONTO DAVANTI ⇒ $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n+b_n) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 \cdot x^n$ CONVERGE $\forall x \in \mathbb{R} \ \rho = +\infty$

$[-1, 1) \qquad [-1, 1)$

$\sum a_n x^n \qquad \sum b_n x^n$

PRODOTTO di SERIE di POTENZE

⇒ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$

$S_0^a = a_0 \qquad S_0^b = b_0$

$S_1^a = a_0 + a_1 x \qquad S_1^b = b_0 + b_1 x$

$S_2^a = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \qquad S_2^b = b_0 + b_1 + b_2 x^2$

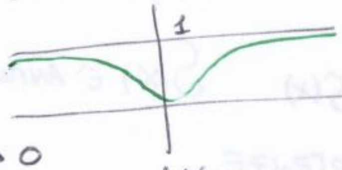
$S_2^a \cdot S_2^b = a_0 b_0 + a_1 b_0 x + a_2 b_0 x^2 + a_0 b_1 x + a_1 b_1 x^2 + a_2 b_1 x^3 + a_0 b_2 x^2 + a_1 b_2 x^3 + a_2 b_2 x^4 =$

SERIE di TAYLOR di f in x_0

FORMULA di TAYLOR con resto di PEANO $\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f}{n!}(x-x_0)^n + o(x-x_0)^n$

$f(x) \,?\, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \to I$ intervallo tale che $x_0 \in I$

ESEMPIO $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$



$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ (TEOREMA dei TAPPABUCHI se è quello la derivata quello è la funz).

$x \neq 0 \quad f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\left(-(-2)\frac{1}{x^3}\right) \to 0$

per $x \to 0 \Rightarrow \exists f'(0) = 0 \qquad f''(0) = f^n(0) = 0$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(0)}{n!}x^n = 0$ intervallo intorno allo zero non converge la serie ad $f(x)$ a noi interessano le serie che convergono in quel punto.

Definizione f di classe C^∞ in un intorno di punto x_0 si dice ANALITICA in x_0 se esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ la somma della serie di Taylor calcolata in x coincide con $f(x)$

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ x_0 punto intorno ad I.

TEOREMA f di classe C^∞ su un intervallo I.
Se $\exists \delta > 0, \exists M > 0$ tale che $\forall n = 0, 1 \dots \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$|f^n(x)| < M \to$ DERIVATE DELIMITATE DA UNA COSTANTE, allora f è analitica $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

DIM

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ SOMMA PARZIALE $\to \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = S_N(x)$

$S_N(x) \to f(x)$

$|f(x) - S_N(x)| \to 0 \Rightarrow$ FORMULA di TAYLOR con RESTO di LAGRANGE $\Rightarrow$

$$\boxed{f(x) = S_N(x) + \frac{f^{n+1}(x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

$|f(x) - S_N(x)| = \left|\frac{f^{n+1}(x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \le \frac{M}{(x+1)!}$ t compreso tra x e x_0

$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to |x - x_0| < \delta$.

con un passaggio in più $\le \frac{|f^{n+1}(x)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \le \frac{M}{(n+1)!}\delta^{n+1} \to 0$

$\Rightarrow \boxed{\frac{a^n}{n!} \to 0} \Rightarrow$ IMPORTANTE da RICORDARE!!

SVILUPPO di MCLAURIN

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots +$

per dire che è vero devo.

$f(x) = e^x \quad f^n(x) = e^x$ INSIEME GRANDE $(-R, R) \quad \forall x \in (-R, R) \quad R \in \mathbb{R}$

$|f^{(n)}(x)| \le e^R$ questo mi fa dire che e^x è ANALITICA.

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e \qquad e^x = \sum \frac{x^n}{n!} \quad x = 1 \quad e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \qquad e = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE $\Rightarrow \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ è una funzione analitica

$f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

$|f^n(x)| \le 1 \Rightarrow \sin x$ analitica su $\mathbb{R}$ (SVILUPPI di $\Rightarrow \cos, \sinh x, \cosh x$)

$\forall n \ \forall x \in \mathbb{R} \to f, g$ analitiche sullo stesso insieme, $f+g$ analitica

$\Rightarrow \log(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2}$ prendo la serie e calcolo il raggio di convergenza $\frac{\frac{(-1)^n}{n+1}}{\frac{(-1)^{n-1}}{n}} \to 1 \Rightarrow (1+x)^\alpha$ calcolare $\rho = \sum \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \quad \rho = 1$

Sommando polinomi trigonometrici ottengo polinomio trigonometrico

Proposizione: Prodotto di polinomi trigonometrici è ancora polinomio trigonometrico

$\Rightarrow P_m(x) \times Q_M(x) = (a_0 + a_1 \cos^1 \omega x + b_1 \sin^1 \omega x + \dots + b_m \sin m \cos x)(c_0 + c_1 \cos \omega x + d_1 \sin \omega x + c_2 \cos 2\omega x + \dots + d_M \sin M\omega x)$

$= a_0 c_0 + c_0 a_1 \cos \omega x$

$a_0 c_1 \cos \omega x + c_1 a_1 (\cos \omega x)^2 + c_1 b_1 \cos \omega x \sin \omega x + c_1 a_2 \cos^2 \omega x \cos \omega x$

$= a_0 + \alpha_1 \cos \omega x + \alpha_2 \sin \omega x + \alpha_k \cos m\omega x \cos n\omega x$

Partiamo dalle leggi di ADDIZIONE

$\left.\begin{array}{l}\sin m\omega x \cos n\omega x \\ \sin m\omega x \sin n\omega x\end{array}\right\} \begin{array}{l}\cos k\omega x \\ \sin k\omega x\end{array} \Rightarrow$ con k da determinare.

Ricordando le FORMULE di WERNER:

$\cos[(n+m)\omega x] + \cos[(n-m)\omega x] = \cos[n\omega x + m\omega x] + \cos[n\omega x - m\omega x] =$

$= \cos n\omega x \cdot \cos m\omega x - \cancel{\sin n\omega x \sin m\omega x} + \cos n\omega x \cos m\omega x + \cancel{\sin n\omega x \sin m\omega x}$

$= 2\cos n\omega x \cos m\omega x$

$\cos n\omega x \cos m\omega x = \frac{1}{2}[\cos(n+m)\omega x + \cos(n-m)\omega x]$ quando abbiamo prodotti di coseni possiamo riscrivere i prodotti in un'altra forma.

Da un prodotto si passa ad una somma dello stesso tipo $\Rightarrow$ spazio dei polinomi non è finito ma è INFINITO.

PROBLEMA: APPROSSIMARE funzioni periodiche mediante polinomi trigonometrici

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodico di periodo $\frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow a_0 + \sum_{n=1}^{m} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x$

approssimo con una $f(x)$ con una somma finita e mi chiedo quando

$$\boxed{f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x}$$

SERIE TRIGONOMETRICA $\Rightarrow$ somma di serie di polinomi trigonometrici.

Useremo la stessa cosa per le somme di serie di POTENZE

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \to a_n = \frac{S^n(0)}{n!}$$ $\Rightarrow$ Ma se vale $f(x) = a_0 + \sum$ quest'uguaglianza

LEMMA: FORMULE di ORTOGONALITÀ

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\pi/\omega} \cos n\omega x \cos m\omega x \, dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{\pi}{\omega} & n = m \end{cases} \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \cos n\omega x \sin m\omega x \, dx = 0 \quad \forall n, m$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\pi/\omega} \sin n\omega x \cdot \sin m\omega x \, dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{\pi}{\omega} & n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \cos m\omega x \cos n\omega x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \frac{1}{2}[\cos((n+m)\omega x) + \cos((n-m)\omega x)] dx$$

$\circ\ n \neq m \quad \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)\omega x}{(n+m)\omega} + \frac{\sin(n-m)\omega x}{(n-m)\omega}\right]_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)\cancel{\omega}\frac{\pi}{\cancel{\omega}}}{(n+m)\omega} \dots\right] = 0$ anche se fosse stato coseno.

$\circ\ n = m \quad \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} [\cos 2n\omega x + 1] dx = \frac{1}{2}\left[\frac{-\sin 2n\omega x}{2n\omega} + x\right]_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{\omega} - \left(-\frac{\pi}{\omega}\right)\right] = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega} = \boxed{\frac{\pi}{\omega}}$

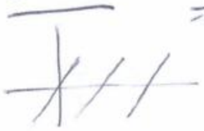
Supponiamo che nel punto x valga: $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$ INTEGRIAMO AMBO I MEMBRI

calcoliamo a_0, a_n, b_n come funzioni di f $\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x) dx = \int_{-\pi/\omega}^{\frac{\pi}{\omega}} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x\right) dx$ SU $\left[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}\right]$

→ f pari $b_m = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \underbrace{f(x)\sin m\omega x}_{\text{DISPARI}}\, dx = 0$ $\quad f(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \cos m\omega x$

TORNANDO al DENTE di SEGA

$\Rightarrow f(x)\big|_{[-1,1]} = x \quad a_0 = 0 \quad a_m = 0$



$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$2 = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{\omega = \pi}$

$b_m = \frac{\pi}{\pi}\int_{-1}^{1} x\sin m\pi x\, dx = \frac{x - \cos m\pi x}{m\pi}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} -\frac{\cos m\pi x}{m\pi}dx =$

$= \frac{-\cos m\pi - \cos(-m\pi)}{m\pi} + \left[\frac{\sin m\pi x}{(m\pi)^2}\right]_{-1}^{1} = \frac{-(-1)^m - (-1)^m}{m\pi} = \frac{2(-1)^{m+1}}{m\pi}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{m+1}}{m\pi}\sin n\pi x \qquad \frac{2}{\pi}\sin\pi x \; ; \; \frac{2}{\pi}\sin\pi x - \frac{2}{2\pi}\sin 2\pi x \; ; \; \frac{2}{\pi}\sin\pi x - \frac{2}{2\pi}\sin 2\pi x + \frac{2}{3\pi}\sin 3\pi x$

$a_0 = \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x)\,dx$

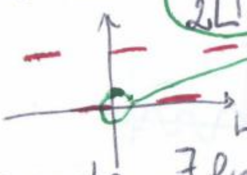
CONVERGENZA PUNTUALE della SERIE di FOURIER

la serie $a_0 + \sum(\dots)$ converge a $f(x)$?

TEOREMA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica $T = \frac{2\pi}{\omega}$ f ha al più un numero finito di punti di discontinuità in $\left[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}\right]$ $\quad -\frac{\pi}{\omega} \le x_1 < x_2 < \dots < x_N \le \frac{\pi}{\omega}$

x_i sono discontinuità tipo "SALTO", f derivabile (x_i, x_{i+1}) ed esistono finiti $\lim_{x\to x_i^+} f'(x)$, $\lim_{x \to x_i^-} f'(x)$

Sotto queste ipotesi per ogni $x \in \mathbb{R}$ la serie di Fourier di f converge al valore $\frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right]$ dove $f(x^+) = \lim_{z\to x^+} f(z)$ $\; f(x^-) = \lim_{z \to x^-} f(z)$



$f(0^+) = 1$

$f(0^-) = 0$

→ HA DISCONTINUITÀ NO e alla fine dell'intervallo

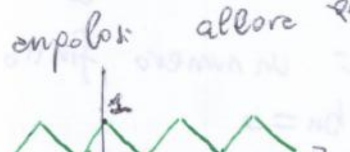
e so che $\exists \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 \quad \exists \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$ (LIMITE DESTRO E LIMITE SINISTRO)

se x_0 è tale che f è continua in x_0 $\quad \frac{1}{2}\left[f(x_0^+) + f(x_0^-)\right] = f(x_0)$

COROLLARIO $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo $\frac{2\pi}{\omega}$ f continua; f derivabile tranne che in un numero finito di punti in $\left[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}\right]$ che siano punti angolosi allora per $x \in \mathbb{R}$ la serie di Fourier di f converge ad $f(x)$.

$f(x)\big|_{[-1,1]} = 1 - |x| \quad$ f pari $b_m = 0$

ONDA TRIANGOLARE



$\boxed{\omega = \pi} \quad a_0 = \frac{\pi}{2\pi}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$a_m = \frac{\pi}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[-|x| - 1\right]\cos m x\, dx = 2\int_0^1 (-x+1)\cos m\pi x\, dx =$

$= 2\left\{(-x+1)\frac{\sin m\pi x}{m\pi}\Big|_0^1 - \int_0^1 -\frac{\sin m\pi x}{m\pi}dx\right\} = 2\left[-\frac{\cos m\pi x}{(m\pi)^2}\right]_0^1 =$

Dim 1) $\forall P_m(x)$

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} |f(x) - Q_m(x)|^2 dx \geq \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} |f(x) - P_m(x)|^2 dx \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \left|[f(x) - P_m(x)] + [P_m(x) - Q_m(x)]\right|^2 dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \left[(f(x) - P_m(x)) + (P_m(x) - Q_m(x)) \right]^2 dx = \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} (f(x) - P_m(x))^2 dx + \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} (P_m(x) - Q_m(x))^2 dx$$

$$+ 2 \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} [f(x) - P_m(x)] [P_m(x) - Q_m(x)] dx}_{} \rightarrow \text{FACCIAMO vedere } dx = 0$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x) P_m(x) dx - \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} P_m^2(x) - \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x) Q_m(x) + \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} P_m(x) Q_m(x)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x) \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) \right) dx = a_0 \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x) \cos n\omega x dx +$$

$$+ b_n \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x) \sin n\omega x = a_0 \frac{2\pi}{\omega} a_0 + \sum_{n=1}^{m} \left(a_n \frac{\pi}{\omega} a_n + b_n \frac{\pi}{\omega} b_n \right) = \frac{2\pi}{\omega} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \frac{\pi}{\omega}$$

Formula di Ortogonalità $\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \cos n\omega x \cos m\omega x \, dx \qquad a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x) \cos n\omega x \, dx$

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x) P_m(x) dx = \frac{2\pi}{\omega} a_0^2 + \sum_{n=1}^{m} (a_n^2 + b_n^2) \frac{\pi}{\omega} \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} P_m(x) P_m(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{m} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x\right)$$

$$\cdot \left(a_0 + \sum_{n=1}^{m} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x\right) dx = \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} a_0^2 dx + \sum_{n=1}^{m} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} a_0 a_n \cos n\omega x \, dx +$$

$$\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} a_0 a_1 \cos \omega x \, dx}_{0} + \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} a_1 \cos \omega x \; a_1 \cos \omega x \, dx + \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} a_2 \cos 2\omega x \; a_1 \cos \omega x \, dx}_{0} + \dots$$

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \cos^2 \omega x \, dx = \frac{\pi}{\omega}$$

$n \neq m$

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \cos n\omega x \, dx = 0$$

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} P_m(x) P_m(x) dx = a_0^2 \frac{2\pi}{\omega} + \sum_{n=1}^{m} (a_n^2 + b_n^2) \frac{\pi}{\omega};$$

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} |f(x) - Q_m(x)|^2 dx = \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} |f(x) - P_m(x)|^2 dx + \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} (P_m(x) - Q_m(x))^2 dx \Rightarrow \int g(x)^2 dx$$

è minimo cioè uguale 0 per $Q_m(x) = P_m(x)$

$$\boxed{\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x)^2 dx = a_0^2 \frac{2\pi}{\omega} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)}$$

IDENTITÀ di PARSEVAL

FORMA ESPONENZIALE

$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad x \in \mathbb{R} \qquad e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i \sin x$

$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x \rightarrow \cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x \rightarrow \sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$

$\cos n\omega x = \dfrac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2}; \quad \sin n\omega x = \dfrac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i} = \dfrac{ie^{in\omega x} - ie^{-in\omega x}}{-2} =$

$= \dfrac{-ie^{in\omega x} + ie^{-in\omega x}}{2}$

$a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x = a_n \dfrac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} + b_n \dfrac{-ie^{in\omega x} + ie^{-in\omega x}}{2} =$

$= e^{in\omega x}\underbrace{\left[\dfrac{a_n - ib_n}{2}\right]}_{C_n} + e^{-in\omega x}\underbrace{\left[\dfrac{a_n + ib_n}{2}\right]}_{\overline{C_n} = \overline{C_n}}$

$\sum_{n=-2}^{\infty} C_n e^{in\omega x} \qquad C_0 = a_0$

$\rightarrow \begin{cases} y'' + xy' + y = 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases} \qquad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$x \cdot y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \cdot x = \sum n a_n x^n$

$y''(x) = \sum_{n=2} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+2) a_n x \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+2) a_{n+1} x^n$

$n-2 = k \quad n = k+2 \qquad n = 2 \rightarrow k = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} (k+2)(k+2-1) a_{k+2} x^k \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n = y''(x)$

sostituisco in $y'' - xy' + y = 0$

$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$2a_2 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - n a_n + a_n\right] x^n = 0$

$\begin{cases} 2a_2 + a_0 = 0 \\ (n+2)(n+1) a_{n+2} - a_n(n-1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 = \dfrac{a_0}{2} \\ a_{n+2} = \dfrac{n-1}{(n+2)(n+1)} a_n \end{cases}$

$n \geq 1 \qquad a_0 \rightarrow a_2 \rightarrow a_4 \rightarrow a_6 - - - -$

$a_1 \rightarrow a_3 \rightarrow a_5 \rightarrow a_7 - - -$

$y(x) = \underset{\substack{\downarrow \\ y(0)}}{a_0} + \underset{\substack{\downarrow \\ y'(0)}}{a_1} x + a_2 x^2 + \dots$

DIMOSTRAZIONE $\dot\varphi(t) = c_1 \dot\varphi_1(t) + c_2 \dot\varphi_2(t) = c_1 A\varphi_1(t) + c_2 A\varphi_2(t) = A[c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)] = A\varphi(t)$ → l'insieme delle soluzioni del sistema $\dot x = Ax$ è uno spazio vettoriale, basta che conosco n punti dello spazio per conoscerlo tutto, è di dimensione n.

ciò significa che $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ sono n soluzioni linearmente indipendenti di $\dot x = Ax$ allora tutte le soluzioni sono della forma $\boxed{c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t)}$ $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

L'integrale GENERALE di $\dot x = Ax$ è l'insieme di tutte le soluzioni del sistema

SISTEMA COMPLETO $\dot x = Ax + b(t)$ dove $b(t)$ ha $b: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

PROPOSIZIONE ⇒ l'integrale del sistema $\dot x = Ax + b(t)$ è $c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) + \psi_0(t)$ dove

$c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n$ è l'integrale generale di $\dot x = Ax$ cioè del sistema omogeneo e $\psi(t)$ è una SOLUZIONE particolare di $\dot x = Ax + b(t)$

DIMOSTRAZIONE $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$ sono soluzioni del sistema completo allora la differenza $\varphi(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t)$ è soluzione del sistema omogeneo

$\dot\varphi(t) = \dot\psi_1(t) - \dot\psi_2(t) = [A\psi_1(t) + b(t)] - [A\psi_2(t) + b(t)] = A[\psi_1(t) - \psi_2(t)] = A\varphi(t)$

$\Rightarrow \boxed{\psi_1(t) = \varphi(t) + \psi_2(t)}$

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE → $\dot x = Ax + b_1(t) + b_2(t)$ ψ_1 è soluzione del punto $\dot x = Ax + b_1(t)$

ψ_2 è soluzione del punto $\dot x = Ax + b_2(t)$ ⇒ $\boxed{\psi_1(t) + \psi_2(t)}$ è soluzione del sistema $\dot x = Ax + b_1(t) + b_2(t)$

DIMOSTRAZIONE

$\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)$ $\dot\psi(t) = \dot\psi_1(t) + \dot\psi_2(t) = A\psi_1(t) + b_1(t) + A\psi_2(t) + b_2(t) =$

$= A[\psi_1(t) + \psi_2(t)] + b_1(t) + b_2(t) = \boxed{A\psi(t) + b_1(t) + b_2(t)}$

CASO $n=2$ $\begin{cases} \dot x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$ $\dot x = Ax$ $x(t) \in \mathbb{R}^2$ $A \in M(2,2)$

PROBLEMA: trovare 2 soluzioni linearmente indipendenti di $\dot x = Ax$ in dimensione due cioè con analogia al caso scalare. Troviamo soluzioni

$x(t) = e^{\lambda t} \cdot u$ dove u è UN VETTORE COSTANTE di $\mathbb{R}^2$ e λ UNA COSTANTE da DETERMINARE

⇒ SOSTITUIAMO NEL SISTEMA: ci mettiamo in dimensione 1 per capire cosa succede, le soluzioni che troviamo le prime sono esponenziali.

⇒ SOLUZIONI DEL 2° ORDINE SOSTITUISCO $\ddot x + a\dot x + bx = 0/g(t)$

⇒ sostituisco in $\dot x = Ax$

trovo che $\frac{d}{dt}\varphi(t) = \lambda e^{\lambda t}u = A\varphi(t) = Ae^{\lambda t}u = e^{\lambda t}Au$

$\lambda e^{\lambda t}u = e^{\lambda t}A \cdot u$ $e^{\lambda t} \neq 0$ (NUMERO diverso da zero ⇒ DIVIDO)

$\boxed{Au = \lambda u}$ λ = AUTOVALORE u = AUTOVETTORE CORRISPONDENTE A λ

A = MATRICE SISTEMA

Problema di Cauchy, soluzione particolare:

$\begin{cases} x_1(0)=0 \\ x_2(0)=1 \end{cases}$ $\quad x(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad (0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\quad c_1 e^0\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+c_2 e^0\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ 3c_1-2c_2=1\end{cases}$

$\boxed{c_1=\frac{1}{5} \quad c_2=\frac{1}{5}}$ soluzione unica quindi l'unica soluzione del

problema di Cauchy è $\frac{1}{5}e^{2t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}-\frac{1}{5}e^{-8t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ = componenti: $\begin{pmatrix}\frac{1}{5}e^{2t}-\frac{1}{5}e^{-8t}\\ \frac{3}{5}e^{2t}+\frac{2}{5}e^{-8t}\end{pmatrix}$

CASO 2 $P_A(\lambda)$ ha 2 radici REALI COINCIDENTI $\Rightarrow$ A ha un UNICO AUTOVALORE REALE λ con molteplicità algebrica 2.

2A) a λ corrispondono 2 autovettori u_1 e u_2 linearmente indipendenti. Soluzioni $\varphi_1(t)=e^{\lambda t}u_1 \quad \varphi_2(t)=e^{\lambda t}u_2$ se u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti anche φ_1 e φ_2 sono lin. indipendenti.

Integrale generale è $c_1e^{\lambda t}u_1+c_2e^{\lambda t}u_2$

2B) a λ corrisponde un unico autovettore $u\neq 0$ (a meno di costanti molt.plicative) si ha un unica soluzione della forma $\varphi(t)=e^{\lambda t}u$. Esiste tuttavia un vettore $v\in\mathbb{R}^2$ linearmente indipendente da u della forma:

$\varphi(t)=e^{\lambda t}(vt+w)$ dove w, v sono vettori costanti $v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ $w=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}$

$\dot\varphi(t)=\lambda e^{\lambda t}(vt+w)+e^{\lambda t}v=A\varphi(t) \Rightarrow \lambda e^{\lambda t}vt+\lambda e^{\lambda t}w+e^{\lambda t}v=A(e^{\lambda t}(vt+w))$

$\lambda vt+\lambda w+v=tAv+Aw$ (lo vedo come un uguaglianza di 1° grado)

uso il principio di identità dei polinomi

$\begin{cases}Av=\lambda v\\ Aw=\lambda w+v\end{cases}$ $\begin{cases}Av=\lambda v\\ (A-\lambda I)w=v\end{cases}$ $\Rightarrow v$ autovettore di A relativo a λ.

$\boxed{\begin{cases}(A-\lambda I)v=0\\ (A-\lambda I)w=v\end{cases}}$ $\Rightarrow$ dopo aver trovato u e v trovo $\varphi(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)$ e poi soluzioni particolari.

ESEMPIO $\begin{cases}\dot x_1=x_2\\ \dot x_2=-x_1-2x_2\end{cases}$ $\quad A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-2\end{pmatrix}$ $\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}-\lambda&1\\-1&-2-\lambda\end{pmatrix}$ $\lambda=-1$ molteplicità 2.

$(A+I)u=0 \quad \begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad u_1+u_2=0 \quad u_2=-u_1 \quad u=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$\varphi(t)=e^{\lambda t}(vt+w)$ $\quad \begin{cases}(A-\lambda I)v=0\\ (A-\lambda I)w=v\end{cases}$ $\begin{cases}v_1+v_2=0\\ w_1+w_2=v_1\\ -w_1-w_2=v_2\end{cases}$ $\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$

scegliamo arbitrariamente

$v_1 \Rightarrow v_1=1$, $v_2=-1$ $\quad v=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow w_1+w_2=1 \quad w_2=1-w_1 \quad w=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$w_1+w_2=1$
$-w_1-w_2=-1$

scelgo $w_1=0$

$\varphi_2(t)=e^{-t}\left[t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]$

$\varphi(t)=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+c_2e^{-t}\left[t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]$ $\Rightarrow$ INTEGRALE GENERALE

ESEMPI $\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 \\ \dot{x}_2 = x_2 + 1 \end{cases}$ $\dot{X} = Ax + f(t)$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\dot{x} = Ax$ $\lambda = 0$ $\lambda = 1$

$(A - 0I)u = 0$ $Au = 0$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} 0 = 0 \\ u_2 = 0 \end{cases}$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(A - I)v = 0$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} -v_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Integrale generale del sistema OMOGENEO

$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ cerco la soluzione particolare della forma:

$$f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ 0 è RADICE dell'eq. caratteristica

$\psi(t) = kt + h \rightarrow k = A\varphi(t) + f(t)$ $k = A[kt + h] + f(t)$ $k = tAk + Ah + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

con $k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

$\psi'(t) = k$

$\begin{cases} Ak = 0 \\ k = Ah + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ $\begin{cases} Ak = 0 \\ Ah = k - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ $\begin{cases} k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

$\begin{cases} k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 = 0 \\ h_2 = -1 \quad h = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$ $\psi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

L'INTEGRALE GENERALE:

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + t \\ c_2 e^t - 1 \end{pmatrix}$$

SISTEMI DIFFERENZIALI DI TRE EQUAZIONI IN 3 INCOGNITE

Metodo illustrato per risolvere $\dot{x} = Ax$ di 2 eq in 2 incognite può in linea di principio essere generalizzato ad un sistema di n equazioni in n incognite, per un qualunque numero naturale n. A - MATRICE $n \times n$ $\varphi_1 \dots \varphi_n \Rightarrow$ n soluzioni lineari indipendenti di $\dot{x} = Ax$ è l'integrale generale $\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t)$

Se $n = 3$ il polinomio caratteristico $P_A(\lambda)$ di A ha GRADO 3.

L'obiettivo è quello di determinare tre soluzioni $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ tali che i vettori $\varphi_1(0)$, $\varphi_2(0)$, $\varphi_3(0)$ siano linearmente indipendenti.

L'integrale generale si presenterà nella forma $x = \varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + c_3\varphi_3(t)$

Se vengono dati $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix}$ sarà possibile estrarre la soluzione particolare corrispondente risolvendo rispetto alle incognite c_1, c_2, c_3 il sistema algebrico $c_1\varphi_1(0) + c_2\varphi_2(0) + c_3\varphi_3(0) = \bar{x}$

$\boxed{\text{CASO 1}}$ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 3 autovalori DISTINTI $\Rightarrow$ si possono trovare tre autovettori reali linearmente indipendenti u_1, u_2, u_3 corrispondenti a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e scriviamo

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}u_1 \; ; \; \varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}u_2 \; ; \; \varphi_3(t) = e^{\lambda_3 t}u_3$$

INTEGRALE GENERALE: $\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}u_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}u_2 + c_3 e^{\lambda_3 t}u_3$

$\left.\begin{array}{l} x_1(t_0) = x_{10} \\ x_2(t_0) = x_{20} \\ x_3(t_0) = x_{30} \end{array}\right\}$ PROBLEMA di CAUCHY

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\varphi_3(t) = \lambda e^{\lambda t}\left[w + (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)t\right] + e^{\lambda t}\left[\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2\right] = A\varphi_3(t) = e^{\lambda t}\left[Aw + (\alpha_1 A u_1 + \alpha_2 A u_2)t\right]$

Semplificando e usando la definizione di autovettore si riduce

$$\boxed{(A - \lambda I)w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2} \qquad v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$$

Integrale generale $\varphi(t) = c_1 e^{\lambda t} u_1 + c_2 e^{\lambda t} u_2 + c_3 e^{\lambda t}(tv + w)$

4c) λ ha un unico autovettore u (a meno di fattori moltiplicativi).
Alla soluzione $\varphi_1(t) = e^{\lambda t}u$ se ne aggiungono altre due, della forma:

$$\varphi_2(t) = e^{\lambda t}(tu + v) \qquad \varphi_3(t) = e^{\lambda t}\left(\frac{t^2}{2}u + tv + w\right)$$

$\Rightarrow (A - \lambda I)w = v$ $\Rightarrow$ imponendo che $\varphi_3(t)$ sia soluzione si ha:

$$\frac{d}{dt}\varphi_3(t) = \lambda e^{\lambda t}\left(\frac{t^2}{2}u + tv + w\right) + e^{\lambda t}(tu + v) = A\varphi_3(t) = e^{\lambda t}\left(\frac{t^2}{2}Au + tAv + Aw\right)$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = 0 \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$= \left[(2-\lambda)(-\lambda) + 1\right](1-\lambda) = 0$ RANGO STRETTAMENTE MINORE di 3 (<3)

$(1-\lambda)\left[-2\lambda + \lambda^2 + 1\right] = 0 \qquad -(\lambda-1)^3 = 0 \qquad \lambda = 1$ UNICO AUTOVALORE REALE CON MOLTEPLICITÀ 3.

$$(A - I)u = 0 \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se ho rango 2 $\Rightarrow \infty^1$ soluzioni
Qui rango è 1 $\Rightarrow$ 1 LINEA LINEARM. INDIPENDENTE, quindi ∞^2 soluzioni dipendono le soluzioni da 1 parametro.

$u_2 + u_3 = 0 \qquad u_3 = -u_2 \qquad u_2 = 1 \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

RANGO MATRICE del SISTEMA è 1 $\longrightarrow$ Sono linearmente indipendenti.
Autospazio corrisponde a $\lambda = 1$ ha dimensione 2 ma sono infinite le basi quindi scegliamo quelle che vogliamo

$\varphi_1(t) = e^t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \varphi_2(t) = e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ MANCA LA TERZA $\varphi_3 = e^t(t\tilde{u} + \tilde{v})$

$$\begin{cases} (A - I)\tilde{u} = 0 \\ (A - I)\tilde{v} = \tilde{u} \end{cases} \qquad \tilde{u} = \alpha_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} -\tilde{v}_2 - \tilde{v}_3 = \alpha_2 \\ \tilde{v}_2 + \tilde{v}_3 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ -\tilde{v}_2 - \tilde{v}_3 = -\alpha_1 - \alpha_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{v}_2 + \tilde{v}_3 = -\alpha_2 \\ \tilde{v}_2 + \tilde{v}_3 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ -\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \end{cases}$$

$\alpha_1 = -2\alpha_2 \qquad \alpha_2 = 1 \qquad \alpha_1 = -2 \qquad \Rightarrow \tilde{u} \qquad \tilde{u} = -2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

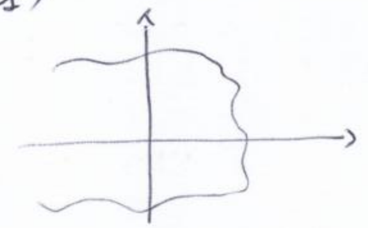
$\Rightarrow \tilde{v}_2 + \tilde{v}_3 = -1 \qquad \tilde{v}_3 = -1 - \tilde{v}_2 \qquad \tilde{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\tilde{v}_2 = 0 \qquad \varphi_3(t) = e^t\left(t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$v_1 + 2 v_2 = 0 \qquad v_1 = -2v_2 \qquad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma: \begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} \\ x_2(t) = c_2 e^{-2t} \end{cases}$$

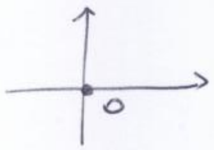


$\frac{x_2}{c_2} = e^{-2t} \qquad e^{-t} = \left(\frac{x_2}{c_2}\right)^{\frac{1}{2}}$

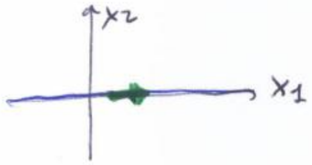
Sostituisco nella 1ª eq:

$$x_1 = c_1 \left(\frac{x_2}{c_2}\right)^{\frac{1}{2}} - 2x_2 = \frac{c_1}{\sqrt{c_2}}\sqrt{x_2} - 2x_2 = k\sqrt{x_2} - 2x_2$$

$2x_2 + x_1 = k\sqrt{x_2} \qquad 4x_2^2 + x_1^2 + 4x_1x_2 = k^2 x_2$



$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



$\left\{ s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}$ = asse x_1

Lo hanno come direzione l'asse stesso

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s + 2\cdot 0 \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \Rightarrow s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ se continuo a stare nel mio autospazio ho le soluzioni di quel sistema

$\bar{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} -2s \\ s \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}\Bigg|_{\begin{pmatrix} -2s \\ s \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overbrace{2s}^{-x_1} + \overbrace{2s}^{2x_2} \\ \underbrace{-2s}_{-2x_2} \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \not\parallel \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

⇒ **STABILITÀ** ⇒ ogni sistema di eq differenziale ammette la soluzione costante $x = 0$. Si dice che tale soluzione è ASINTOTICAMENTE STABILE per ogni soluzione $x = \varphi(t)$ si ha:

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0}$$

TEOREMA La soluzione nulla del sistema è asintoticamente stabile se e solo se gli autovalori della matrice A sono tutti strettamente negativi (nel caso siano reali) oppure se hanno parte reale strettamente negativa (nel caso siano complessi coniugati)