NUMERO: 1398A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: I.D.

MATERIA: Fisica I. Prof.Ghigo

5/3/13 FISICA 1

GHIGO GIANLUCA SQUADRA B. Mercoledì A1B 8:30 - 10 } ALENIA
A3B 10 - 11:30

1° e 2° lezione => SLIDE

TESTO: Mazzoldi, Nigro, Voci FISICA, volume 1 (2° edizione). EDISES editore.

Esercizi: FISICA SPERIMENTALE, Longhi, Nicolò, Orlando, Stagnaro

problemi di meccanica e termodinamica.

LABORATORI: DISAT venerdì 11.30 - 14.30 PRENOTA ENTRO 11 MARZO

ESAME: TEST (7/12) + SCRITTO (16/30) + ORALE

CONSULENZE: SU APPUNTAMENTO.

- TEORIA DELLA MISURA e ANALISI DELL'INCERTEZZA: 1° LEZIONE
  - Fisica: scienza fondamentale basata sul metodo sperimentale
  - Met. sperimentale: criterio di verità risultante dall'osservazione dell'esperienza.

Una teoria fisica è un universo coerente di leggi mediante le quali è possibile enunciare affermazioni empiriche verificabili

Domande tecniche: PERCHÈ accade? COME accade?

- GRANDEZZE FISICHE definite operativamente (misure ecc.):

sono termini definibili attraverso operazioni, MASSA, FORZA etc...

- il processo di misura è alla base di ogni scienza sperimentale, si definisce misurazione il ~~rapporto~~ numero che rappresenta il rapporto tra la grandezza considerata e l'unità di misura.

Ci sono 3 metodi per misurare: VEDI SLIDE

1) DIRETTA, uso uno strumento è ~~valore~~ valuto l'unità di misura. È un numero sempre positivo.

2) MISURAZIONE INDIRETTA, quando faccio ricorso ad una relazione tra le grandezze ignote (ottimo ecc) e altre unità direttamente misurabili.

3) MISURAZIONE CON STRUMENTI TARATI, stabilisce una corrispondenza biunivoca tra il valore numerico e il valore letto sullo strumento.

es:

$F = m \cdot acc$ — forza in generale — RELAZIONE

$[F] = \left[\frac{M \cdot L}{T^2}\right]$ — eq. DIMENSIONALE

Newton $\left(1N = \frac{1Kg \cdot 1m}{1sec^2}\right)$ — unità di misura

$E_K = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

$[E_K] = \left[\frac{M \cdot L^2}{T^2}\right]$

Joule $\left(1J = \frac{1Kg \cdot 1m^2}{1sec^2}\right)$

- PRINCIPIO DI OMOGENEITÀ: VEDI SLIDE

poichè la relazione fisica debba senso, serve che ciascun membro debba la medesima dimensione fisica (ad es: metto a rapporto m con m).

VEDI SLIDE, es. pendolo semplice.

- ANALISI DELLE INCERTEZZE:

Ogni metodo di misurazione ha un certo livello di errore, esternabile da stimare.

N.B. Esistono vari tipi di incertezza:

A = 1) errori casuali — valutabili con la statistica. (VEDI SLIDE.)

B = 2) errori sistematici — " con altri metodi. (VEDI SLIDE.)

Una misura con piccolo errore ~~xxx~~ casuale è detta PRECISA.

" " " " " sistematico è detta ACCURATA.

7/3/2013 2° LEZIONE

~~xxxxxxxxxx~~ CENNI DI STATISTICA:

- Probabilità: n° compreso tra 0 e 1 legato alla possibilità di un evento di effettuarsi.
- Variabili aleatorie: possono assumere un qualsiasi valore in un intervallo con una certa probabilità. DISCRETA = 1 solo valore isolato
  CONTINUA = infiniti valori può assumere.

La probabilità che una variabile aleatoria assuma un valore tra i possibili è 1.

- DENSITÀ di PROBABILITÀ (P): VEDI SLIDE.
- Normalizzazione della densità di probabilità: la somma delle probabilità relative ad ogni variabile aleatoria deve essere 1. (VEDI SLIDE)

• DEVIAZIONE STANDARD:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}}$$ deviazione standard della MEDIA

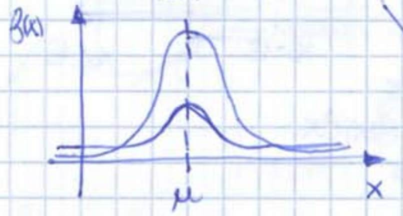
• CURVA DI DISTRIBUZIONE NORMALE O GAUSSIANA:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

p(x) = densità di probabilità

$-\infty \leq X \leq +\infty$

→ Se così esprimibile è detta GAUSSIANA



curva di Gauss.

Gli errori trascurabili misurati ~~ad oggetto~~ saranno distribuiti secondo una distribuzione normale o gaussiana, centrata sul "valore vero".

Si dimostra che $\mu = X_0$ cioè valore vero = valore atteso, se ho una distribuzione di probabilità gaussiana.

• Probabilità di ottenere una lettura in un certo intervallo:

$$\boxed{P[X \in x_i / x_i + dx_i] = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x_i - x_0)^2}{2\sigma^2}} \cdot dx_i}$$

→ varianza → larghezza intervallo

fattore di normalizzazione

Come rendo max la probabilità?

devo minimizzare l'esponente $t = \frac{(x_i - x_0)^2}{2\sigma^2}$ Trovo derivata prima $\frac{dt}{dx_0} = 0$

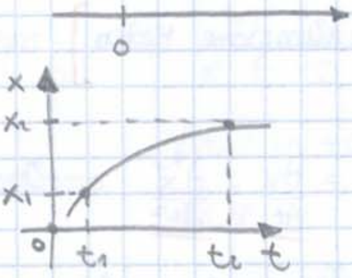
ottengo $x_0 = \frac{\sum_i x_i}{n}$ (miglior stima) = MEDIA ARITMETICA

Se ho un set di molte misure e valori medi calcolati ogni tot misure creano una gaussiana sempre + stretta attorno al valore medio ~~vero~~ vero, per sapere la sua larghezza calcolo la prop. dell'incertezza:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\left(\frac{d\bar{x}}{dx_1} \cdot S_x\right)^2 + \dots + \left(\frac{d\bar{x}}{dx_N} \cdot S_x\right)^2}$$

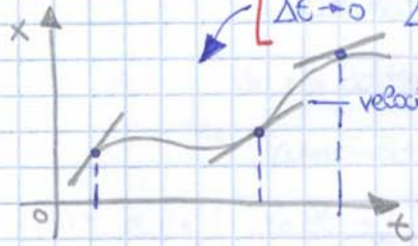
$x(t)$

- $\Delta x = x_2 - x_1$ spostamento
- $\Delta t = t_2 - t_1$ Tempo
- $\left[V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \right] = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ Velocità media



Se $x_1 = x_2$ il punto è fermo, oppure è tornato indietro $\Rightarrow V_m = 0$ m/s

Se $\Delta t \to 0$ $\left[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \right.$ (VELOCITÀ ISTANTANEA $\Delta t \to 0$)$\left. \right]$ $\left[V = \frac{dx}{dt} \right]$



velocità istantanea (Tg curva, derivata prima)

Il segno della V ci dice il verso del moto sulla base dell'orientamento del sistema di riferimento.

Quindi: $x = x(t)$ posso sapere la velocità istantanea, all'inverso sapendo la V posso sapere la posizione INTEGRANDO:

se $\left[V = \frac{dx}{dt} \right] \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} V dt$ $\quad x_0, t_0$ = istantaneo (INIZIALI)

x, t = generici.

$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} V dt \Rightarrow \left[x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} V dt \right]$ sapendo la V, voglio conoscere la posizione $x(t)$ in funz. del tempo sempre.

$\Downarrow$

se $\Delta x = x - x_0 \Rightarrow \left[\underbrace{V_m}_{\text{velocità media (in un dato intervallo)}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{1}{t - t_0} \cdot \int_{t_0}^{t} V dt \right]$ con V = velocità ISTANTANEA.

① MOTO RETTILINEO UNIFORME: $(V = \text{cost})$

$\underset{\text{POSIZIONE}}{x(t)} = x_0 + V \cdot \int_{t_0}^{t} dt = x_0 + V(t - t_0)$

$x - x_0 = V(t - t_0)$

$\left[\begin{array}{l} \text{se } t_0 = 0 \text{ (origine Tempo)} \\ x(t) = x_0 + V \cdot t \end{array} \right]$

unico caso

$V_m = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{V\cancel{(t - t_0)}}{\cancel{t - t_0}} = V$ velocità costante

1.a MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO : (a = cost)

$$V(t) = V_0 + \int_{t_0}^{t} a\,dt = V_0 + a(t-t_0) \qquad \left[\begin{array}{l} \text{se } t_0 = 0 \\ V(t) = V_0 + a \cdot t \end{array}\right] \text{ in funzione di } t$$

solo se a = cost

$$V^2(x) = V_0^2 + 2a(x-x_0) \Rightarrow \left[V(x) = \sqrt{V_0^2 + 2a(x-x_0)}\right] \text{ in funzione di } x \text{ (spazio)}$$

12/03/2013 3° Lezione

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} V_0 + a(t-t_0)\,dt$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} V_0\,dt + \int_{t_0}^{t} a(t-t_0)\,dt \Rightarrow x(t) = x_0 + V_0\int_{t_0}^{t} dt + a\int_{t_0}^{t}(t-t_0)\,dt$$

$$x(t) = x_0 + V_0(t-t_0) + a \cdot \int_{t_0}^{t}(t-t_0)\,dt$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{pongo} \Rightarrow y = t - t_0 \quad dy = dt \\ \displaystyle\int_0^{t-t_0} y\,dy = \left.\frac{y^2}{2}\right]_0^{t-t_0} = \frac{1}{2}(t-t_0)^2 \end{array}\right] \text{ sostituisco}$$

LEGGE ORARIA UNIF. ACC.

$$x(t) = x_0 + V_0(t-t_0) + \frac{a}{2}(t-t_0)^2 \Rightarrow \left[x(t) = x_0 + V_0 \cdot t + \frac{1}{2}a \cdot t^2\right]$$

se $t_0 = 0$

calcolo la posizione $x(t)$ di un oggetto conoscendo x_0, V_0, a

calcolo V in funz. di x, moto uniform. Accelerato

$$\frac{1}{2}V^2 - \frac{1}{2}V_0^2 = \int_{x_0}^{x} a\,dx \qquad \text{con } a = \text{cost}$$

VELOCITÀ MOTO UNIF. ACC.

$$\frac{1}{2}V^2 - \frac{1}{2}V_0^2 = a(x-x_0) \Longrightarrow \left[V^2 = V_0^2 + 2a\underbrace{(x-x_0)}_{\text{spazio percorso con acc} = a}\right]$$

es: LANCIO DI UN GRAVE: (in basso)

$$\begin{cases} v_0 = -V_1 \\ x_0 = h \end{cases}$$

V_1 = velocità di lancio

l'esempio è simile, basta modificare leggermente le formule

es: LANCIO IN ALTO DI UN GRAVE:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ v_0 = V_2 > 0 \end{cases} \qquad a = -g = -9{,}81\ m/s^2$$

il segno di V ci dice il verso del moto.

$$v(t) = V_2 - g \cdot t$$

$$x(t) = V_2 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

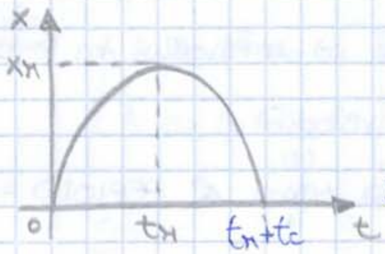


diagramma orario

x_{MAX} => avrò la $V = 0$ perchè dopo cade al contrario.

$$v(t_M) = 0 \Rightarrow 0 = V_2 - g \cdot t_M \Rightarrow \left[t_M = \frac{V_2}{g} \right]$$

istante in cui l'oggetto si trova ad h massima.

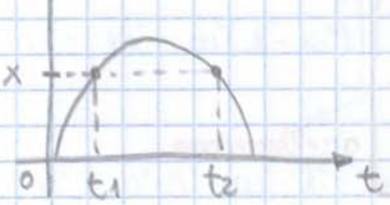
$$x_M = x(t_M) = V_2 \cdot t_M - \frac{1}{2} g t_M^2$$ ora sostituisco t_M.

$$\underbrace{x(t_M)} = V_2 \cdot \frac{V_2}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{V_2}{g}\right)^2 = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{V_2^2}{g}}$$

$t > t_M$ (istante successivo)

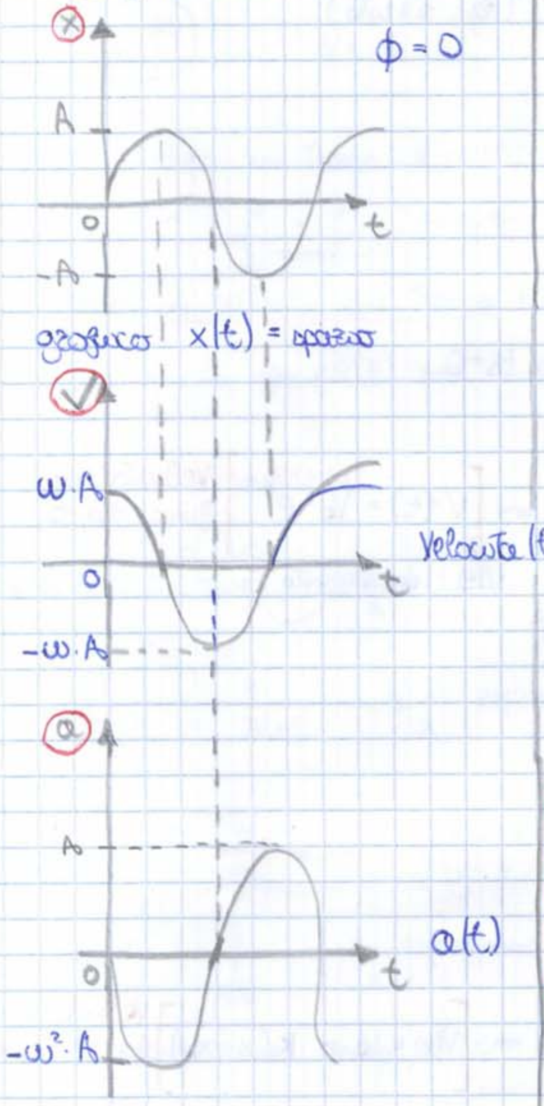
$$t_c = \sqrt{\frac{2 x_M}{g}} \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{g} \frac{V_2^2}{2g}} = \sqrt{\frac{V_2^2}{g^2}} = \frac{V_2}{g}$$ ho sostituito x_M in formula.

quindi: $t_c = \frac{V_2}{g} = t_M$ (i tempi sono uguali dato che acc è la stessa)



Volendo conoscere il tempo in una det. posizione avrò 2 soluzioni, una di andata e una di ritorno.
le V saranno di segno opposto.

Grafici:



RICAVO COSTANTI DA SITUAZIONE INIZIALE (ϕ, A)

$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$ $\quad t_0 = 0$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= x(t=0) = A\cdot \sin(\phi) \\ v_0 &= v(t=0) = \omega \cdot A \cdot \cos(\phi) \end{aligned}\right\}$$ SITUAZIONE INIZIALE, $t_0 = 0$

$$\left.\begin{aligned} \sin\phi &= \frac{x_0}{A} \\ \cos\phi &= \frac{v_0}{\omega A} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \tan\phi = \frac{x_0 \cdot \omega A}{A \cdot v_0} = \frac{x_0 \cdot \omega}{v_0}$$

$$\left[\phi = \arctan\left(\omega \cdot \frac{x_0}{v_0}\right)\right]$$ FASE INIZIALE

$$\begin{cases} A \cdot \sin\phi = x_0 \\ A \cdot \cos\phi = \dfrac{v_0}{\omega} \end{cases} \qquad \begin{cases} (A \cdot \sin\phi)^2 = x_0^2 & (1) \\ (A \cdot \cos\phi)^2 = \left(\dfrac{v_0}{\omega}\right)^2 & (2) \end{cases}$$

Sommo (1) + (2): ricavo ϕ e A

$$\left[\begin{cases} \phi = \arctan\left(\omega \cdot \dfrac{x_0}{v_0}\right) & \text{FASE INIZ.} \\ A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}} & \text{AMPIEZZA} \end{cases}\right]$$

$$[v_0 = \omega A \text{ se } \phi = 0]$$

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = \int_{x_0}^{x} a \, dx$$

$$\int_{x_0}^{x} a\,dx = \int_{x_0}^{x} -\omega^2 x \, dx = -\omega^2 \int_{x_0}^{x} x\,dx \Rightarrow -\frac{\omega^2}{2}(x^2 - x_0^2)$$

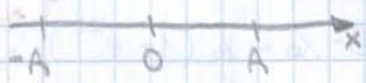
$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = -\frac{\omega^2}{2}(x^2 - x_0^2)$$

$$\left[v^2(x) = v_0^2 - \omega^2(x^2 - x_0^2)\right] \text{ se } \begin{cases} \cancel{v_0} \\ \phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ v_0 = \omega A \end{vmatrix}$$

N.B. $\phi = 0$ fase iniziale: l'oggetto si trova in origine

$$\underline{v^2} = \omega^2 \cdot A^2 - \omega^2 \cdot x^2 \Rightarrow \underline{\omega^2(A^2 - x^2)}$$ CASO PARTICOLARE $\left(v = \sqrt{\omega^2(A^2 - x^2)}\right)$

$\Downarrow$



negli estremi la v cambia segno

$v = \max$ se $x = 0 \rightarrow \left[v^2 = \omega^2 A^2\right]$ MAX $\vec{v}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 178

• Osservazione:

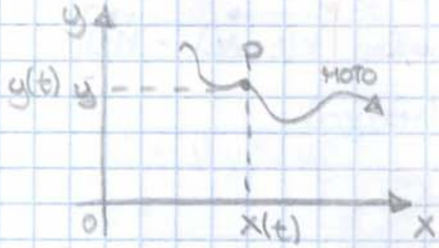
e^{-kt} $\quad V = V_0 \cdot e^{-kt}$ $\quad$ pongo $\tau = \frac{1}{k}$ $\Rightarrow V = V_0 \, e^{-\frac{t}{\tau}}$ $\quad \tau$ = cost. di Tempo

N.B. dopo un Tempo $t = 1\tau$ la V diminuisce di e^{-1}
" " " $t = 2\tau$ " " " " e^{-2} ecc....

dopo 4 costanti di Tempo (τ) considero $V = 0$.

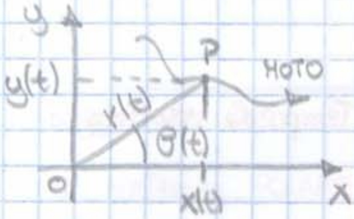
Vale anche per $x(t)$ nel moto smorzato esponenzialmente.

• MOTI NEL PIANO:



P = è la posizione dell'oggetto ad un certo Tempo, descritta da 2 coord. (leggi orarie) $x(t)$, $y(t)$.

espressione con coord. CARTESIANE.

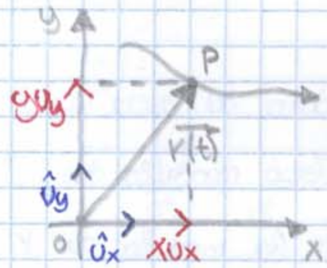


$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \end{cases}$ passaggio di coord. $\left[\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ tg\,\theta = y/x \end{array} \right.$

espressione con coord. POLARI $\qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Le coord. POLARI semplificano i calcoli.

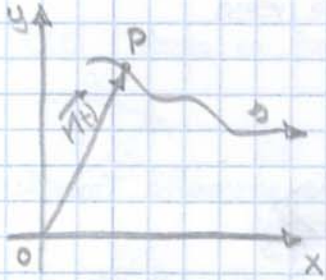
• GRANDEZZE VETTORIALI:



$\vec{r(t)}$ = RAGGIO VETTORE = $\vec{OP} = x(t) \cdot \hat{u}_x + y(t) \cdot \hat{u}_y$

u = versore, vett. con modulo 1 (degli assi x e y) indicano la direzione degli assi.

quindi: $\left[\vec{r(t)} = x(t) \cdot \hat{u}_x + y(t) \hat{u}_y \right]$ RAGGIO VETTORE



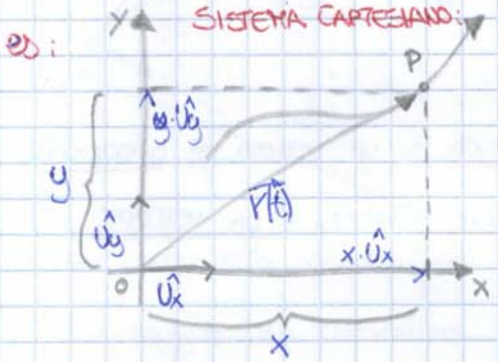
s = coord. CURVILINEA, segue la Traiettoria del moto (spazio)

$\left[V = \frac{ds}{dt} \quad \text{velocità istantanea (modulo)} \right]$

N.B. per definire un moto necessito della TRAIETTORIA e della VELOCITÀ.

N.B. → se cambio il sistema di riferimento l'unica cosa che viene modificata sono le componenti.

es: SISTEMA CARTESIANO:



sono e vettori, ne viene fatta la somma

$$\vec r = x\cdot\hat u_x + y\cdot\hat u_y$$

in questo caso i versori sono FISSI.

$$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\cdot\hat u_x + y\cdot\hat u_y\right) =$$

sono costanti

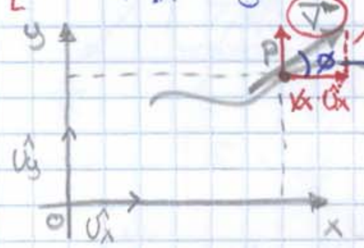
$$= \frac{dx}{dt}\cdot\hat u_x + \frac{dy}{dt}\cdot\hat u_y = v_x\cdot\hat u_x + v_y\cdot\hat u_y$$

componenti della $\vec v$

$$\boxed{\vec v = v_x\cdot\hat u_x + v_y\cdot\hat u_y}$$

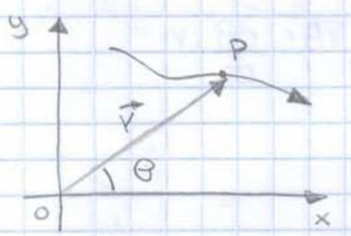
$$\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{MODULO DI } \vec v}$$

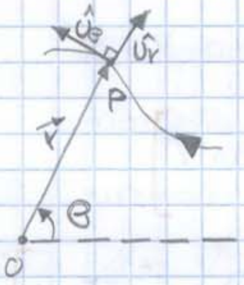
ø = angolo di inclinazione.



$$\boxed{\mathrm{tg}\,\phi = \frac{v_y}{v_x}}$$

es: SISTEMA POLARE:





In questo caso i versori sono $\hat u_r$ e $\hat u_\theta$, sono ortogonali ma NON FISSI, devono seguire il moto di P.

$$\boxed{\vec r = r\cdot\hat u_r}$$

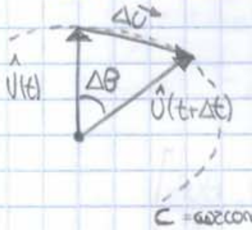
→ verso e direzione.
→ MODULO

$$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\cdot\hat u_r\right) = \frac{dr}{dt}\hat u_r + r\cdot\frac{d\hat u_r}{dt} \quad *$$

non è costante, devo derivare come prodotto

* DERIVATA DI UN VERSORE:

$\hat u(t)$ versore in funzione del tempo.



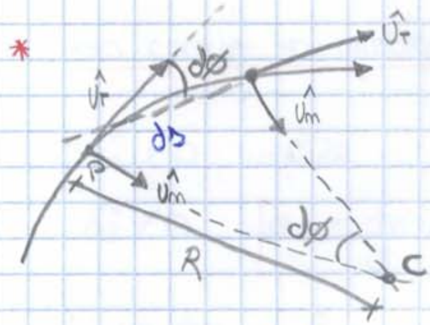
$$\Delta\vec u = \hat u(t+\Delta t) - \hat u(t)$$

pongo $\Delta t \to 0$, $\Delta\vec u$ diventa tangente alla circonferenza

⇓

$$\begin{cases} \Delta t \to dt \\ \Delta\vec u \to d\vec u \perp \hat u \end{cases}$$

*



$\hat{U}_n$ = versore normale (interno alla curva)

$\frac{V \cdot d\hat{\mu}_T}{dt}$ => con $\left[\frac{d\hat{\mu}_T}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \cdot \hat{\mu}_n\right]$ derivata versore tangente, è un VETTORE.

MODULO variazione angolo ϕ — direzione e VERSO.

C = centro della circonferenza osculatrice, centro di curvatura.

R = raggio di curvatura.

ds = è un arco di circonferenza, quando ϕ è molto piccolo, con raggio R

Quindi: $[ds = R \cdot d\phi]$ (angolo piano) => $\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{R}$

$\frac{d\phi}{dt} = \underbrace{\frac{d\phi}{ds}}_{\frac{1}{R}} \cdot \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{\text{MODULO di } \vec{V}}$ => $\left[\frac{1}{R} \cdot V = \frac{d\phi}{dt}\right]$ ora sostituisco nella formula di $\vec{a}$

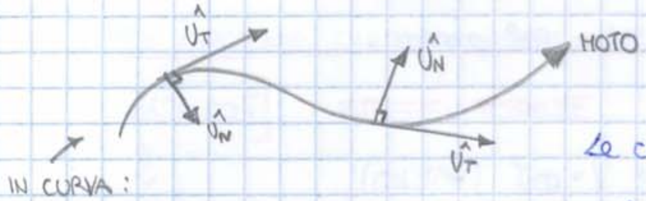
ACCELERAZIONE in COMPONENTI VETTORIALI

Quindi: $\left[\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \hat{\mu}_T + \frac{V^2}{R} \cdot \hat{\mu}_N\right]$

con R = raggio

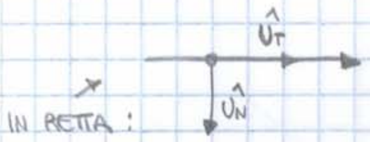
V = modulo di $\vec{V}$

$\hat{U}_T$ = versore Tg, $\hat{U}_N$ = versore normale



Le componenti di $\vec{a}$ sono:

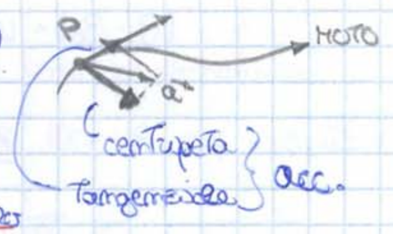
- Tangente $\vec{a}$
- normale $\vec{a}$ (centripeta)



La componente // a $\vec{V}$ ($\hat{\mu}_T$) ci dice come varia il MODULO di $\vec{V}$.

La componente $\perp$ a $\vec{V}$ ($\hat{\mu}_N$) ci dice come varia la DIREZIONE.

$\begin{cases} \hat{U}_T = \text{è la componente dell' acc. (tangenziale)} \\ \hat{U}_N = \text{è la componente dell' acc. CENTRIPETA (normale)} \end{cases}$



$\left[\vec{a} = \underbrace{\vec{a}_T}_{\text{tangenziale}} + \underbrace{\vec{a}_c}_{\text{centripeta}}\right]$

N.B. se $a_c = 0$ il moto è rettilineo

se a_T e $a_c = 0$ MOTO RET. UNIFORME

se $a_T = 0$ MOTO UNIFORME (v = cost)

- MOTO CIRCOLARE NON UNIFORME:

$\vec{a}_c \neq 0$ centripeta

$\vec{a}_T \neq 0$ $\quad \left[a_T = \frac{dv}{dt} \text{ (modulo)} \right]$ $\quad \begin{cases} V \text{ non costante} \\ \omega \text{ non costante} \end{cases}$

ACC. ANGOLARE $\left[\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{R} \cdot \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{a_T} = \frac{a_T}{R} \right]$ $\quad \alpha =$ acc. ANGOLARE $\quad \left. \alpha = \frac{a_T}{R} \right]$

$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \longrightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha\, dt \Rightarrow (\omega - \omega_0) = \int_0^t \alpha(t)dt$

$\left[\omega = \omega_0 + \int_0^t \alpha(t)dt \right]$ VELOCITÀ ANGOLARE

$\left[\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega(t)dt \right]$ angolo (POSIZIONE)

$\left[\frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2 = \int_{\theta_0}^{\theta} \alpha(\theta)d\theta \right]$ VELOCITÀ ANGOLARE in funz. della POSIZIONE

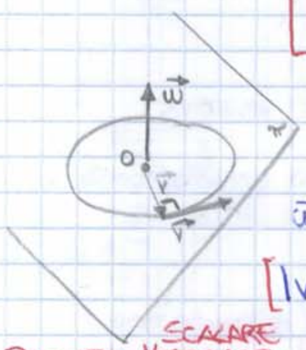
- MOTO CIRCOLARE UNIFORMEMENTE ACCELERATO:

$[\alpha = \text{cost}]$ STESSE FORMULE

$\Downarrow$

$a_T = \text{cost}$ $\quad [\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t]$ VELOCITÀ ANGOLARE funz. di t

$\left[\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \right]$ POSIZIONE funz. di t



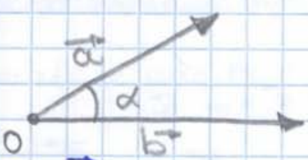
$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (prodotto vettoriale)

$\vec{\omega}$ = dice il piano del moto, velocità angolare e verso di percorrenza.

$[|v| = \omega \cdot r \cdot \sin\theta]$ N.B. θ = angolo tra ω e r

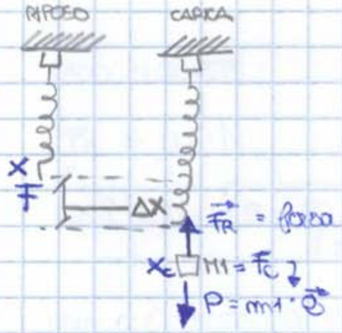
PRODOTTO ~~VETTORIALE~~ SCALARE: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (è uno SCALARE)

vettori: $\vec{a}, \vec{b}$ $\Rightarrow \left[\vec{a} \cdot \vec{b} = |a| \cdot |b| \cdot \cos\alpha \right]$



PRODOTTO VETTORIALE: $\vec{a} \times \vec{b}$ (è un VETTORE) oppure $\vec{a} \wedge \vec{b}$

$\left[|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |b| \cdot \sin\alpha \text{ MODULO} \right]$ con α = angolo presente tra i due vettori



Associamo alla deformazione un certo $\vec{F_R}$.

La deformazione è variabile. $\left[\frac{F}{F_c} = \frac{x}{x_c}\right]$

SINAMOMETRO

Ogni forza genera un effetto dinamico, riguardante l'accelerazione.

$$\left[\vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{F} = m \cdot \vec{a_T} + m \cdot \vec{a_c} = \underbrace{m \frac{dv}{dt} \cdot \hat{U_T} + m \frac{v^2}{R} \cdot \hat{U_c}}_{\text{MODULO}}\right) \text{- DIREZ. e VERSO}\right]$$

Azione dinamica = genera una variazione di velocità (accelerazione)

- l'a_c (centripeta) = genera la forza centripeta che rappresenta la componente dinamica della F inviabile, quindi non è un tipo di forza.

• Forza Peso: $\vec{P}$

Tutti i corpi cadono a Terra con la stessa accelerazione. $g = 9{,}81\ m/s^2$

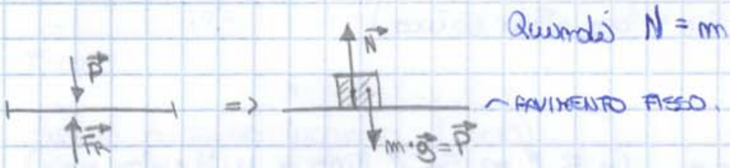
$$\left[\vec{P} = m \cdot \vec{g}\right] \qquad g = \text{cost.}$$

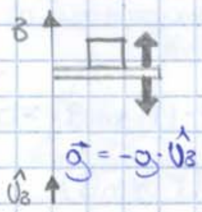
$\left[N = \frac{Kg \cdot m}{s^2}\right]$ Newton

La forza peso dipende dal sistema in cui ci troviamo (Terra e Luna).

- Sensazione di peso:

Quindi $N = m \cdot g$ N ci dà la sensazione di peso.





1) $\vec{a} = a \cdot \hat{U_z}$ (verso l'alto)

$\vec{N} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}$

$\vec{N} = m \cdot \vec{a} - \vec{P} = m \cdot a \cdot \hat{U_z} - (-mg\hat{U_z}) \Rightarrow \vec{N} = m(a+g)\hat{U_z}$

(modulo) $N = m(a+g) > m \cdot g$ la piattaforma salendo ci fa sentire più pesanti, poiché è più FORTE N di P.

$[N > P]$

2) $\vec{a} = -a\hat{U_z}$ (verso il basso)

$\vec{N} = m(\vec{a} - \vec{g}) = m(-a+g)\hat{U_z}$

(modulo) $N = m(g-a)$ la piattaforma scendendo ci fa ~~sentire~~ sentire più leggeri, $[N < P]$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 178

1) es: CASO IN QUIETE:

$$F_x \le \mu_s \cdot N$$

$$\left[F\cdot\cos\theta \le \mu_s\cdot(P - F\cdot \operatorname{sen}\theta) \right] \Rightarrow F(\cos\theta + \mu_s \cdot \operatorname{sen}\theta) \le \mu_s \cdot m \cdot g$$

[Non c'è moto (QUIETE) se $\Rightarrow F \le \dfrac{\mu_s \cdot m \cdot g}{\cos\theta + \mu_s \cdot \operatorname{sen}\theta}$]

se $\theta = 0$ orizzontale: (caso particolare)

$$F \le \mu_s \cdot m \cdot g \Rightarrow \boxed{F \le \mu_s \cdot P} \quad (N = P)$$

2) es: OGGETTO IN MOVIMENTO: (attrito dinamico)

$\boxed{F_{ad} = \mu_D \cdot N}$ ATTRITO DINAMICO (sempre opposto al verso del moto)

[N.B. $\mu_D \le \mu_S$]

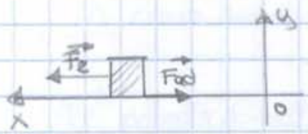
[$\vec{F}_{ad} = -\hat{U}_d \cdot N \cdot \hat{U}_v$] NOTAZIONE VETTORIALE

↳ versore velocità

Legge: $\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}$ (scompongo le forze sugli assi)

~~N = P - (F sen θ)~~

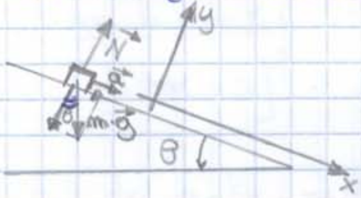
$$\begin{cases} x: & F\cdot\cos\theta - \mu_d \cdot N = m \cdot a \\ y: & N = P - (F\cdot \operatorname{sen}\theta) \end{cases}$$



$F_x = F \cdot \cos\theta$

3) es: OGGETTO SU PIANO INCLINATO: (LISCIO)

lo immaginiamo con attrito trascurabile (liscio).



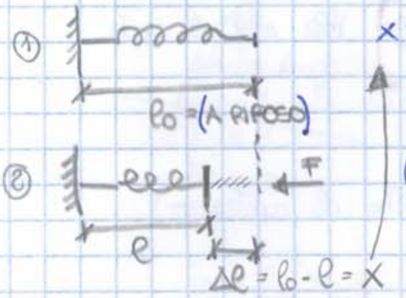
con questo riferimento x,y non c'è l'accelerazione su y.

Legge $\Rightarrow$ $+\vec{P} + \vec{N} = m \cdot \vec{a}$

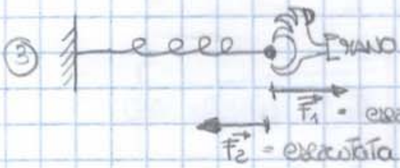
$$\begin{cases} x: & m \cdot g \cdot \operatorname{sen}\theta = m \cdot a \\ y: & N - (m \cdot g \cdot \cos\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x: & a = g \cdot \operatorname{sen}\theta \text{ (unif. ACCELERATO)} \\ y: & N = m \cdot g \cdot \cos\theta \end{cases}$$

26/3/2013 7ª LEZIONE



x = deformazione della molla



$[F_1 = -F_2] \Rightarrow F_1 + F_2 = 0$ AZIONE e REAZIONE

(Trazione)

• FORZA DI ATTRITO VISCOSO:

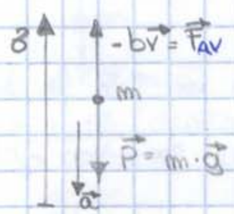
Il p.to materiale si muove in un mezzo (aria, H_2O, fluido ecc..)

(N.B. Fluido = NON SOLIDO)

$$\left[\vec{F} = -b\vec{v}\right] \qquad b = \text{cost} > 0$$

Proporzionale alla velocità $\vec{v}$, verso inverso, non ci sono situazioni di equilibrio statico, perciò questa forza si manifesta solo se c'è movimento.

es: ① CADUTA GRAVE: (in aria)



legge vettoriale

Pongo $\Rightarrow \left[\vec{P} + \vec{F_{AV}} = m\cdot\vec{a}\right]$ (proietto su asse z)

$$-m\cdot g + b\cdot v = -m\cdot a$$

(i segni derivano dall'orientamento dell'asse z.)

pongo $b = m\cdot k$, (k = cost) (elimino m)

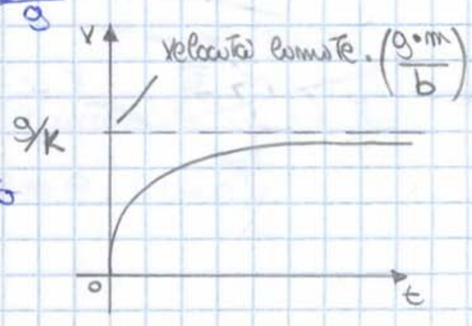
$$\left[g - kv = a\right]$$

(smorzato esponenzialmente)

$$a = \frac{dv}{dt} = g - kv \Rightarrow \int_0^v \frac{dv}{g-kv} = \int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{k}\int_g^{g-vk} \frac{d(g-kv)}{g-kv} = t$$

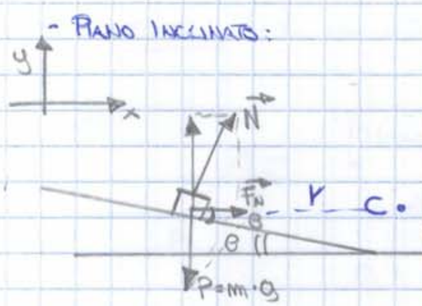
$$-\frac{1}{k}\left\{\ln\left(\frac{g-kv}{g}\right) = t \Rightarrow \ln\left(\frac{g-kv}{g}\right) = -kt \Rightarrow \frac{g-kv}{g} = e^{-kt}\right.$$

$$-kv = ge^{-kt} - g \Rightarrow \left[v = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)\right] \text{ velocità}$$



Dopo alcune cost di Tempo $\left(\frac{1}{k}\right)$ dovrebbe cessare il moto, dato che la $\vec{v}$ si comporta in modo asintotico essendo un exp.

- PIANO INCLINATO:



$$x\begin{cases} N\cdot \operatorname{sen}\theta = m\cdot \dfrac{v^2}{r} \\ N\cdot \cos\theta - m\cdot g = 0 \end{cases} y \qquad \vec N + \vec P = m\cdot \vec{a_c}$$

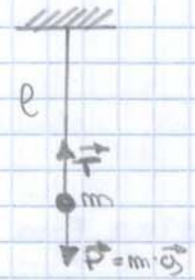
$$\left[\operatorname{tg}\theta = \frac{v^2}{r\cdot g}\right]$$ (vale per ottenere $\vec{F_N}$ da sola su quella curva) conoscendo V e r.

$$\left[V = \sqrt{\operatorname{tg}\theta\cdot g\cdot r}\right]$$ velocità piano inclinato.

Quindi posso effettuare una curva o per azione dell'attrito radente (ruota-terra) oppure per effetto della curva inclinata, dove l'attrito influisce di meno.

Se aumenta la $\vec v$ aumenterà automaticamente il raggio di curvatura r. (in assenza di attrito.)

• PENDOLO SEMPLICE: (PERIODICO, ma NON ARMONICO)

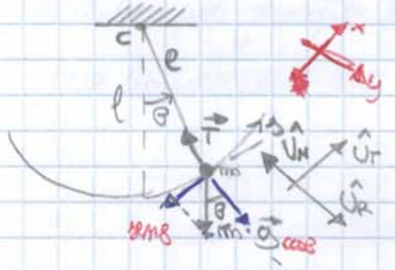


La massa del filo è trascurabile.

- in quiete: $\vec T + \vec P = 0$ $\quad [T = m\cdot g]$

- ~~in moto (oscillazione)~~

- in moto (oscillazione):



$m\cdot\vec g + \vec T = m\cdot\vec a$ ($\underbrace{\text{scompongo}}$)

$$\begin{aligned} x\ \hat{U_T} &\begin{cases} -m\cdot g\cdot \operatorname{sen}\theta = m\cdot a_T \\ T - m\cdot g\cos\theta = m\cdot a_c \end{cases} \\ y\ \hat{U_N} & \end{aligned}$$

con $\left[\begin{aligned} a_T &= l\cdot\alpha \quad (\alpha = \text{acc. angolare}) \\ &\ \ \| \\ &\ l\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2} \\ a_c &= \frac{v^2}{l} \end{aligned}\right.$ con $l = r$ raggio del filo

$$\begin{cases} \hat{U_T} & -\cancel{m}\cdot g\cdot \operatorname{sen}\theta = \cancel{m}\cdot\dfrac{d^2\theta}{dt^2}\cdot l \quad (l\cdot\alpha) \\ \hat{U_N} & T - \cancel{m}\cdot g\cdot\cos\theta = \cancel{m}\cdot\dfrac{v^2}{l} \end{cases}$$

$$\hat{U_T}) \Rightarrow \left.\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\cdot \operatorname{sen}\theta = 0\right]$$

se le oscillazioni sono piccole (θ piccolo) si approssima il moto armonico poiché $\operatorname{sen}\theta \cong \theta$. $(\theta\to 0)$

VALIDA SOLO PER OSCILLAZIONI PICCOLE

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

- MOMENTI: (di un vettore)

[Momento => $\vec{OP} \times \vec{A}$ (prod. vettoriale)]

anche il momento è un vettore

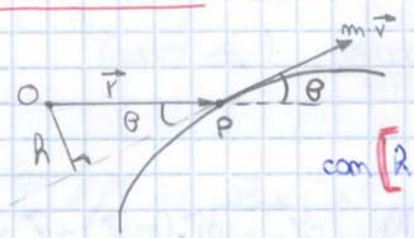
O = POLO

- MOMENTO ANGOLARE (della q.tà di moto $\vec{P}$): detto $\vec{L}$ è un vettore.

$\vec{P} = m \cdot \vec{v}$

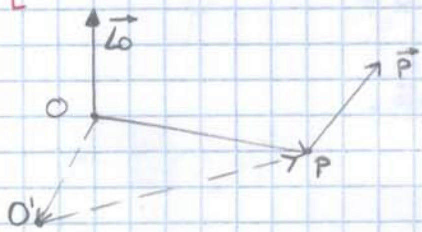
$$\left[\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}\right]$$

Momento angolare



con $[R = r \cdot \sin\theta]$ BRACCIO rispetto al polo O.

$$\left[|\vec{L}| = r \cdot m \cdot v \cdot \sin\theta = R \cdot (m \cdot v)\right]$$ MODULO del MOMENTO



CAMBIO POLO:

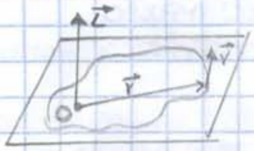
$\vec{L_0} = \vec{OP} \times (m \cdot \vec{v}) \rightarrow$ con $\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P}$

$$\left[\vec{L_0} = \vec{OO'} \times m\vec{v} + \underbrace{\vec{O'P} \times m\vec{v}}_{\vec{L_{0'}}}\right]$$

Quindi: $\left[\vec{L_{0'}} = \vec{L_0} + \vec{O'O} \times m \cdot \vec{v}\right]$ il momento angolare è dipendente dalla scelta del polo.

essendo $\vec{v} = \underbrace{\vec{v_R}}_{\text{radiale}} + \underbrace{\vec{v_\theta}}_{\text{trasversa}} \Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times m(\vec{v_R} + \vec{v_\theta}) = \underbrace{m \cdot \vec{r} \times \vec{v_R}}_{\text{nullo } \theta = 0} + m \cdot \vec{r} \times \vec{v_\theta}$

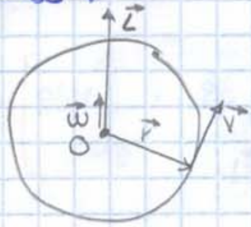
$\vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v_\theta}$



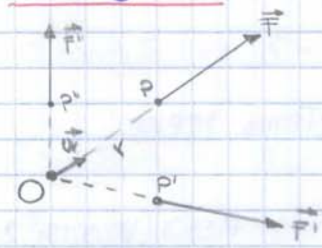
$$\left[v_\theta = r \cdot \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow L = m \cdot r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt}\right]$$ modulo

Se il moto è circolare $\rightarrow \vec{\omega}$:

$\vec{L} = m \cdot r^2 \cdot \vec{\omega}$



FORZE CENTRALI:



O = centro della forza

la direzione della forza passa sempre per O.

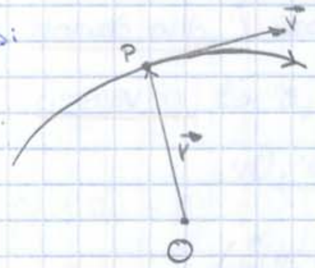
il modulo dipende dalla dist. da O.

$\boxed{\vec{F} = F(r)\cdot \hat{u}_r}$ con r = dist. $\overline{OP}$

F(r) > 0 REPULSIONE

F(r) < 0 ATTRAZIONE

es:



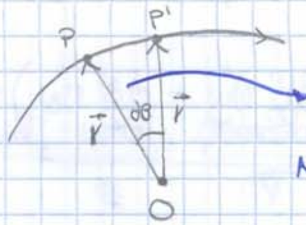
$\vec F \parallel \vec r \Rightarrow \vec M = \vec r \times \vec F = 0$ solo in un campo di forze

$\Leftarrow$ centrali.

$\vec L$ = costante

il p.to materiale in un campo di forze centrali conserva il momento angolare.

$\vec L \perp (r, \vec v)$



$dA \simeq \frac{1}{2} r^2 d\theta$

Area del triangolo

$|\vec L| = m \cdot r \cdot v_\theta = \underbrace{m \cdot r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt}}_{\text{costante}} \Rightarrow$ x $\vec M = 0$

VELOCITÀ AREALE $\left[\frac{dA}{dt} \simeq \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \frac{L}{m}\right]$

$\vec L$ = cost $\Rightarrow$ velocità areale costante

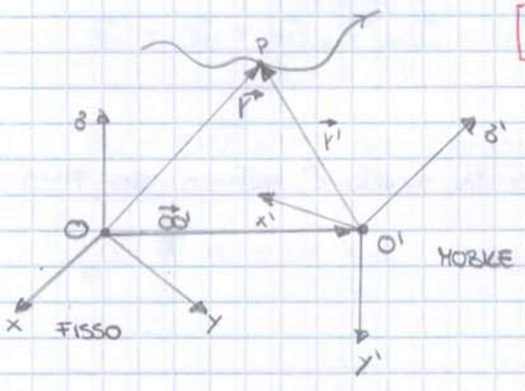
velocità con cui il raggio vettore spazza l'AREA di quel triangolo.

• MOTI RELATIVI:

Lo spazio è OMOGENEO e ISOTROPO, cioè ha le stesse caratteristiche in ogni punto (omogeneo) e ogni direzione (isotropo).

11/04/2013 10° Lezione

MOTI RELATIVI



$\left[\vec r = \vec{OO'} + \vec r'\right]$ raggio vettore risultante.

SU ASSI:

$\vec r = x \cdot \hat u_x + y \hat u_y + z \hat u_z$ FISSO

$\vec r' = x' \cdot \hat u_{x'} + y' \hat u_{y'} + z' \cdot \hat u_{z'}$ MOBILE

$\vec{OO'} = x_{O'} \cdot \hat u_x + y_{O'} \hat u_y + z_{O'} \hat u_z$ FISSO

• TEOREMA DELLE ACCELERAZIONI RELATIVE:

$\vec{a}$ assoluta $\Rightarrow \vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{U}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{U}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{U}_z$ nel sistema FISSO

$\vec{a}$ relativa $\Rightarrow \vec{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2}\hat{U}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\hat{U}_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\hat{U}_{z'}$ nel sistema MOBILE

$\vec{a}_{o'}$ (del origine O') $= d\vec{V}_{o'}/dt$

$$* \quad \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\vec{V}_{o'} + \vec{V}' + \vec{\omega}\times\vec{r}')}{dt} = \frac{d\vec{V}_{o'}}{dt} + \underbrace{\frac{d\vec{V}'}{dt}}_{1} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}' + \underbrace{\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}'}{dt}}_{2} = \quad *$$

$\vec{a}_{o'}$ = accelerazione di O' rispetto al polo fisso O.

$$1) \quad \frac{d\vec{V}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dx'}{dt}\hat{U}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\hat{U}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\hat{U}_{z'}\right] =$$

$$= \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\hat{U}_{x'} + \frac{dx'}{dt}\frac{d\hat{U}_{x'}}{dt}\right) + \left(\frac{d^2y'}{dt^2}\hat{U}_{y'} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\hat{U}_{y'}}{dt}\right) + \left(\frac{d^2z'}{dt^2}\hat{U}_{z'} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\hat{U}_{z'}}{dt}\right) =$$

$\vec{a}'$ $\quad \vec{a}'$ $\quad \vec{a}'$ $\quad$ uso poisson

$$= \vec{a}' + \frac{dx'}{dt}\,\omega\times\hat{U}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\,\omega\times\hat{U}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\,\omega\times\hat{U}_{z'} =$$

$$= \vec{a}' + \omega\times\underbrace{\left(\frac{dx'}{dt}\hat{U}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\hat{U}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\hat{U}_{z'}\right)}_{\vec{V}'} = \vec{a}' + \omega\times\vec{V}' \quad \text{Quindi} \quad \boxed{\frac{d\vec{V}'}{dt} = \vec{a}' + \omega\times\vec{V}'}$$

$$2) \quad \left[\vec{\omega}\times\underbrace{\frac{d\vec{r}'}{dt}}_{\text{già calcolato}} = \vec{\omega}\times(\vec{V}' + \vec{\omega}\times\vec{r}') = \vec{\omega}\times\vec{V}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')\right]$$

$$* \quad \vec{a} = \vec{a}_{o'} + \underbrace{(\vec{a}' + \omega\times\vec{V}')}_{1} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}' + (\vec{\omega}\times\vec{V}') + [\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')]$$

$$\left[\vec{a} = \vec{a}_{o'} + \vec{a}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}' + \omega\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') + 2\vec{\omega}\times\vec{V}'\right]$$ TEOREMA DELLE ACCELERAZIONE RELATIVA

→ TRASCINAMENTO CORIOLIS

• ACCELERAZIONE DI TRASCINAMENTO:

$P^* \Rightarrow \vec{a}' = \vec{V}' = 0 \quad P^* \in$ sistema MOBILE

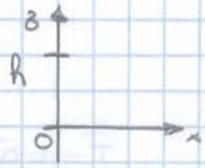
$$\left[\vec{a}_t = \vec{a}_{o'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')\right]$$ ACC. DI TRASCINAMENTO

$$\left[\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\times\vec{V}'\right]$$ acc. complementare CORIOLIS

$$\left[\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t + \vec{a}_c\right]$$ ACC. ASSOLUTA

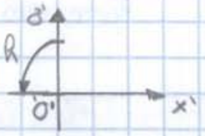
p.to materiale caduta libera:

O $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=h-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$



$\begin{cases} V_x=0 \\ V_y=0 \\ V_z=-gt \end{cases}$

O' $\begin{cases} x'=-V_{O'}t \\ y'=0=y \\ z'=h-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$



$\begin{cases} V_{x'}=-V_{O'} \\ V_{y'}=0=V_y \\ V_{z'}=-gt \end{cases}$

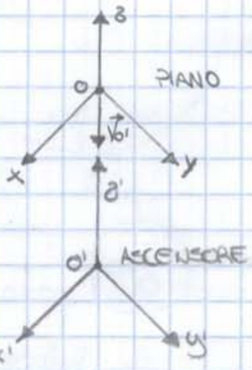
il moto in O' risulta parabolico, mentre in O risulta verticale, es: (la pallina nel pullman vista da dentro e da fuori).

② CADUTA GRAVI, con SR che accelera verso il basso con $a_t = g$.

O: $\vec{a} = \vec{g}$

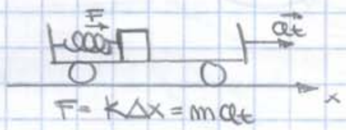
O': (con $\omega = 0$ moto non di rotazione) $\vec{a}' = \vec{a} - \underbrace{\vec{a_t}}_{\text{acc. di trascinamento}} = \vec{a} - \vec{g} = 0$

(le acc. relative sono nulle)



③ MOTO ACC. IN ORIZZONTALE:

(SRI), O:



$K\Delta x = m a_t$

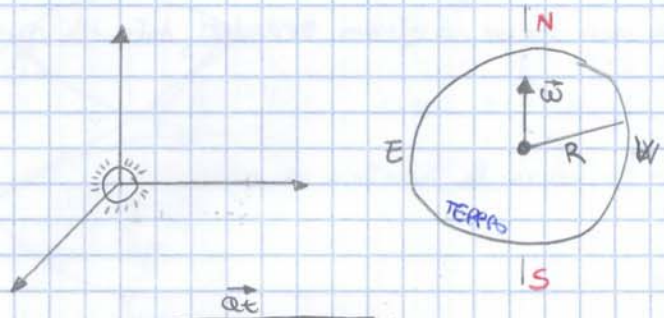
O': $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a_t}$

$K\Delta x = m \cdot a_t$ e inoltre $\vec{F_{app}} = -m \cdot \vec{a_t}$

FORZE VERE + FORZE APPARENTE

Quindi: $K\Delta x - m \cdot a_t = 0$

6 La Terra non è un S.R.I. in generale.



$R \cong 6\ 10^6\ m$

$\omega = cost$

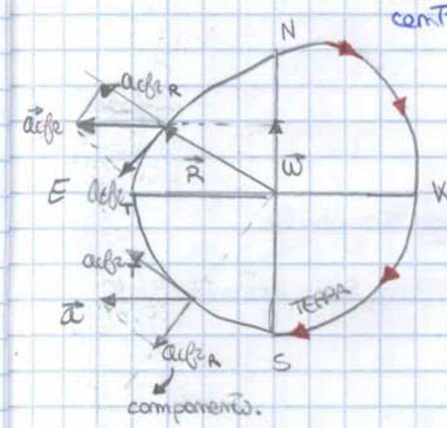
$$\vec{g_0} = \vec{g} + \overbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})}^{\vec{a_t}} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v'}}_{\vec{a_c}}$$

sulla Terra

nel sistema con le stelle fisse.

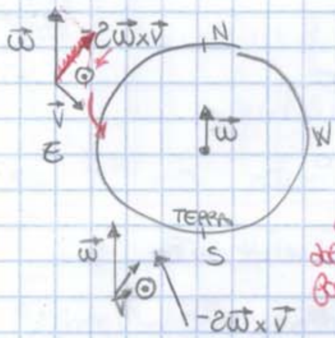
N.B. $\vec{a_t}$ crea una forza centrifuga.

$$\vec{g} = \vec{g_0} \underbrace{- \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})}_{\text{correzione centrifuga}} \underbrace{- 2\vec{\omega} \times \vec{v}}_{F_{coriolis}} \quad \text{sulla Terra}$$

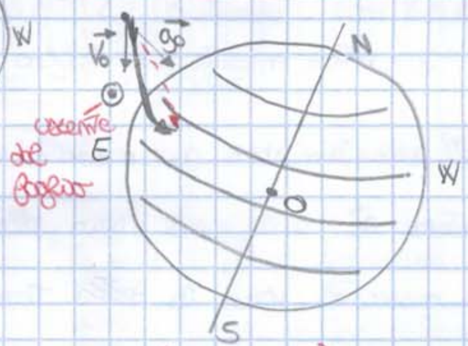


$\vec{a_{cfz}}$ = acc. centrifuga

A causa della forza di coriolis sulla Terra i gravi tendono a cadere verso EST.



L'acc. di Coriolis risulta rivolta verso EST.

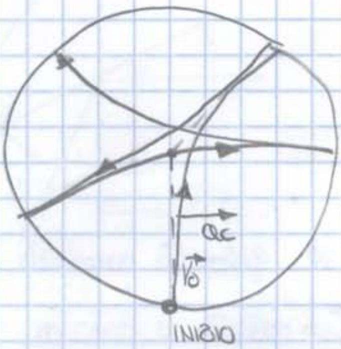


Visto dall'esterno la pallina lasciata cadere percorre una traiettoria parabolica.

-- = Traiettoria reale $a_c = 0$

16/04/2013 11° LEZIONE (RECUPERARE)

• PENDOLO DI FOUCAULT:



Essendo $\vec{V_0}$ diretta verso il centro della circonferenza (Terra) inizia a manifestarsi l'$\vec{a_c}$ PERPENDICOLARMENTE a $\vec{V_0}$

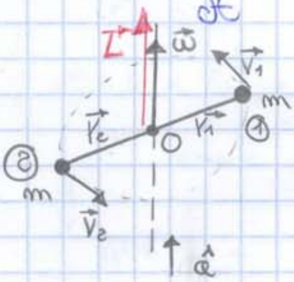
• DINAMICA DEI SISTEMI DI P.TI:

RECUPERA CENTRO DI MASSA

MOMENTO ANGOLARE (TEOREMA)

es: momento angolare (momento della quantità di moto)

$$\vec{M}^{(E)} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \left[\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)} - \vec{V_0} \times M \vec{V_{cm}}\right]$$ Forma completa $\left(\vec{M}^{(E)} = \text{momento forze esterne}\right)$



$\vec{\omega} = \omega \cdot \hat{a}$

$$\vec{L} = \vec{L_1} + \vec{L_2} = \overbrace{\vec{r_1} \times m\vec{V_1}}^{\text{stessa direzione di } \hat{a}} + \overbrace{\vec{r_2} \times m\vec{V_2}} = *$$

in questo caso: $r_1 = r_2 = r$
$V_1 = V_2 = V$

$$\vec{L} = * = m \cdot \vec{r_1} \vec{V_1} \hat{a} + m \vec{r_2} \cdot \vec{V_2} \cdot \hat{a} = 2mrV\hat{a} \rightarrow \text{con } V = r \cdot \omega \text{ sostituisco}$$

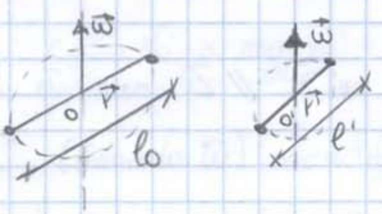
$$= 2m \cdot r^2 \cdot \omega \cdot \hat{a} = 2mr^2 \vec{\omega}$$

quindi $\left[\vec{L} = K \cdot \vec{\omega} \quad \text{con } K = 2mr^2\right]$ ha la stessa direzione di $\vec{\omega}$.

Se $\vec{M}^{(E)} = 0$ allora $\vec{L}$ = costante

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)}$$

Se la barra che unisce le masse si potesse accorciare:



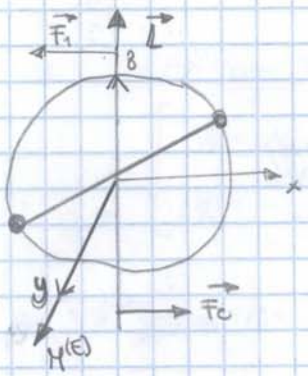
per sistema costante $\Rightarrow \vec{L} = \vec{L'}$

$\vec{L} = 2mr^2\vec{\omega} \qquad \vec{L'} = \omega' 2mr'^2$

$\cancel{2m}r^2 \vec{\omega} = \omega' \cancel{2m}r'^2$

$\left[\vec{\omega'} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \vec{\omega}\right]$ la V angolare ~~varia~~ varia con l'estensione di r.

Ossia lo spostamento della massa rispetto all'asse di rotazione influenza $\vec{\omega}$. *



Se $\vec{M}^{(E)} \perp \vec{L} \Rightarrow \vec{L}$ cambia DIREZIONE } CASI ORTOGONALI

- In CASO DI SISTEMI DI P.TI:

$\vec{r_i} = \vec{r_i}' + \vec{r_{CM}}$ CM = centro di massa i = particella i-esima

$\vec{v_i} = \vec{v_i}' + \vec{v_{CM}}$ $\vec{v_i}'$ = in riferimento al sistema del CM.

$$\begin{cases} \vec{r_{CM}}' = 0 \Rightarrow \sum_i m_i \cdot \vec{r_i}' = 0 \\ \vec{v_{CM}}' = 0 \Rightarrow \sum_i m_i \cdot \vec{v_i}' = 0 \\ \vec{a_{CM}}' = 0 \end{cases}$$

$$\Big[\underbrace{\sum_i \vec{r_i}' \times \vec{F_i}^{(E)}}_{\text{ESTERNE}} + \cancel{\underbrace{\sum_i \vec{r_i}' \times \vec{F_i}^{(I)}}_{\text{INTERNE}}} - \underbrace{\sum_i \vec{r_i}' \times m_i \cdot \vec{a_{CM}}}_{\text{APPARENTI}} \Big]$$

$\vec{a_{CM}} = \vec{a_t}$

MOMENTO TOT DELLE FORZE nel S.R. del CM.

$$\Downarrow$$

$$\vec{M}^{(E)'} + 0 - \big(\underbrace{\sum_i \vec{r_i}' \cdot m_i}_{=0}\big) \times \vec{a_{CM}} =$$

$$= \vec{M}^{(E)'} - \big(\cancel{\sum_i \vec{r_i}' \cdot m_i}\big) \times a_{CM} = \underbrace{\vec{M}^{(E)'}}_{\text{MOMENTO FORZE VERE}}$$

- in S.R.I., polo = C.M. (il polo non coincide con l'origine)

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)}$ ↳ quindi il raggio vettore parte da C.M. $= \vec{r}'$

① $\vec{M}^{(E)} = \sum_i \vec{r_i}' \cdot \vec{F_i}^{(E)} = \vec{M}^{(E)'}$

② $\vec{L} = \sum_i \cdot \vec{r_i}' \times m_i \vec{v_i} = \sum_i \vec{r_i}' \times m_i (\vec{v_i}' + \vec{v_{CM}}) =$

$$= \underbrace{\sum_i \vec{r_i}' \times m_i \cdot \vec{v_i}'}_{} + [\text{illegible}] + \underbrace{\sum_i \vec{r_i}' \times m_i \cdot \vec{v_{CM}}}_{} =$$

$$= \vec{L}' + \big(\underbrace{\sum_i m_i \cdot \vec{r_i}'}_{0}\big) \times \vec{v_{CM}} = \vec{L}'$$

$\left[\Rightarrow \frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{M}^{(E)'} \right]$ vale il Teorema del momento angolare PURCHÈ si scelga come POLO il centro di massa (CM).

FORZE VERE ESTERNE

- se "I e E" sono tutte conservative:

$$\left[\begin{array}{l} W = \Delta E_K \\ W = -\Delta E_p \end{array}\right\} E_m = cost \Bigg]$$ si conserva.

- se "I" e/o "E" non sono conservative:

$$\left[\Delta E_m = E_{mB} - E_{mA} = W\right]$$ non si conserva (ci sono dissipazioni)

- **URTI:**

il fenomeno per cui 2 p.ti materiali vengono a "contatto", interagiscono per un intervallo di tempo molto piccolo. La distanza deve essere molto piccola, si può pensare a $\vec{F}$ IMPULSIVE. $\left(J = \int_{t_0}^{t} F\,d(t) \text{ impulso.}\right) \Rightarrow$ porta ad una variazione di P q.tà di moto.

- 1° CASO: $\vec{F}^{(E)} = 0$

$$\vec{P}_{in} = m_1 \vec{V}_{1in} + m_2 \vec{V}_{2in} = m_1 \cdot \vec{V}_{1Fi} + m_2 \vec{V}_{2Fi} = \vec{P}_{Fi}$$

$$\left[\vec{P}_{in} = \vec{P}_F = \vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{V}_{CM} = \text{costante}\right]$$ La q.tà di moto si conserva perché $\vec{F}^{(E)} = 0$, $\vec{F}^{(I)} \neq 0$

$$\left[\Delta \vec{P}_1 = \vec{J}_{21} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{21}\, dt\right]$$ da particella 2 → particella 1

Δ q.tà moto particella 1.

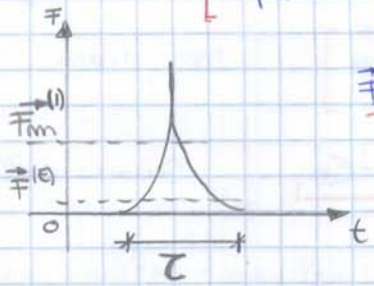
$$\left[\Delta \vec{P}_2 = \vec{J}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{12}\, dt\right]$$

$\left[\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}\right]$ e $\left[\vec{J}_{12} = -\vec{J}_{21}\right]$

$\left[\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2\right]$ solo se $\vec{F}^{(E)} = 0$

- 2° CASO: $\left[\vec{J} = \int \vec{F} \cdot dt = \vec{F}_m \cdot \tau\right]$

$\vec{F}_{media}$; durata $\vec{J}$



$\vec{F}^{(E)} \neq 0$ ma NON IMPULSIVE

$\left[\Delta \vec{p} = \text{SI CONSERVA}\right]$

E_K = NON SI CONSERVA

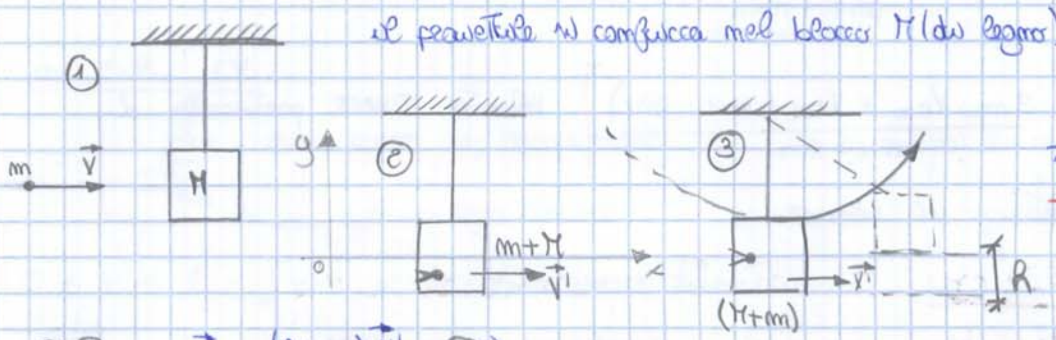
$$\vec{F}_m^{(E)} \cdot \tau = \Delta \vec{p}^{(E)} \cong 0$$ TRASCURABILE, perché τ è molto piccolo (infinitesimo), solo se $\vec{F}^{(E)}$ = NON IMPULSIVE

$\vec{F}_m$: F MEDIE (ESTERNE); τ: durata (Δt)

Quando le $F^{(I)}$ agiscono solo al momento dell'urto.

② Pendolo Balistico:

il proiettile si conficca nel blocco M (di legno)



$\vec{P}$ = si conserva

①,② $m\vec{V} = (M+m)\vec{V}'$ ②

$\vec{V} = \frac{(M+m)\vec{V}'}{m}$

$\begin{cases} \frac{1}{2}\cancel{(m+M)}\vec{V}'^2 = \cancel{(m+M)}\vec{g}\cdot R \\ \vec{V}'^2 = 2\vec{g}R \Rightarrow \vec{V}' = \sqrt{2\vec{g}R} \end{cases}$

$\boxed{\vec{V} = \frac{(M+m)}{m}\sqrt{2g\cdot R}}$ velocità proiettile

③ URTO ELASTICO: conservazione P e E_K

$\begin{cases} \vec{P}_{IN} = \vec{P}_F \\ E_{K\,IN} = E_{KF} \end{cases}$

- CASO 1-dimensionale (1D): S.R.I.

$\begin{cases} ① \; m_1 V_{1IN} + m_2 V_{2IN} = m_1 V_{1F} + m_2 V_{2F} \\ ② \; \frac{1}{2} m_1 V_{1IN}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2IN}^2 = \frac{1}{2} m_1 V_{1F}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2F}^2 \end{cases}$ conservazione P / conservazione E_K

raccolgo m_1, m_2 e moltiplico per 2

ottengo $V_{1F} = V_{1F}(V_{1IN}, V_{2IN})$

$V_{2F} = V_{2F}(V_{1IN}, V_{2IN})$

$V_{1IN} + V_{1F} = V_{2F} + V_{2IN}$

$V_{1F} = -V_{1IN} + V_{2F} + V_{2IN}$

① $m_1 V_{1IN} + m_2 V_{2IN} = m_1(-V_{1IN} + V_{2IN} + V_{2F}) + m_2 V_{2F}$

$V_{2F}(m_1 + m_2) = m_1 V_{1IN} + m_2 V_{2IN} + m_1 V_{1IN} - m_1 V_{2IN}$

$\boxed{V_{2F} = \frac{2m_1 V_{1IN} + V_{2IN}(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}}$ velocità FINALE particella 2

$V_{1F} = \frac{2m_1 V_{1IN} + V_{2IN}(m_2 - m_1) - V_{1IN}(m_1 + m_2) + V_{2IN}(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} = *$

URTO ANAELASTICO (caso intermedio):

- in S.R. CM:

$$\left[-\frac{P'_{1F}}{P'_{1IN}} = e\right]$$ COEFF. DI RESTITUZIONE → ranno segno DISCORDE

la quantità di moto FINALE è minore di quella INIZIALE

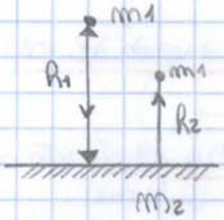
$[0 \le e \le 1]$; $e = 0$ se URTO COMPLETAMENTE ANAELASTICO; $e = 1$ se URTO ELASTICO

$$e = -\frac{P'_{1F}}{P'_{1IN}} = -\frac{V'_{1F}}{V'_{1IN}} = -\frac{P'_{2F}}{P'_{2IN}} = -\frac{V'_{2F}}{V'_{2IN}}$$ vale per tutte le particelle

$$E'_{KF} = \frac{1}{2} m_1 V'^2_{1F} + \frac{1}{2} m_2 V'^2_{2F} = \frac{1}{2} m_1 (-e V'_{1IN})^2 + \frac{1}{2} m_2 (-e V'_{2IN})^2 =$$

$$= e^2 \underbrace{\left[\frac{1}{2} m_1 V'^2_{1IN} + \frac{1}{2} m_2 V'^2_{2IN}\right]}_{E'_{KIN}} = e^2 E'_{KIN} \qquad \left[E'_{KF} = e^2 E'_{KIN}\right]$$ en. cinetica FINALE nel S.R. CM.

• esempio:



$m_2 \gg m_1$ $V_{2IN} = 0$ l'E_p dell'm1 diventa E_k poco prima dell'urto.

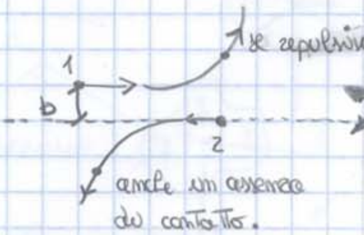
$$m_1 \cdot h_1 \cdot g = \frac{1}{2} m_1 V_{1IN}^2$$ prima dell'urto

$$e^2 \frac{1}{2} m_1 V_{1IN}^2 = m_1 \cdot h_2 \cdot g$$ durante e dopo l'urto

Quindi:

$$e^2 \cancel{m_1} h_1 \cancel{g} = \cancel{m_1} h_2 \cancel{g} \Rightarrow e = \sqrt{h_2/h_1}$$

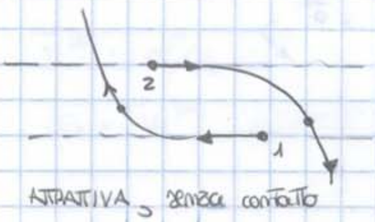
• URTI NON CENTRALI e CENTRALI:



b = parametro d'urto

$b \neq 0$ non centrale

$b = 0$ centrale



∗ $\sum_i (F_i \vec{r}_i) \times \hat{\mu} = \vec{r}_c \times \left(\sum_i F_i\right)\hat{\mu}$

$$\left(\sum_i \vec{r}_i \cdot F_i\right) \times \hat{\mu} = \left(\sum_i F_i\right)\vec{r}_c \times \hat{\mu} \Rightarrow \left[\vec{r}_c = \frac{\sum_i F_i \vec{r}_i}{\sum_i F_i}\right]$$

C = centro $\vec{F}$ parallele, dove è applicato $\vec{R}$.

r_c = raggio, dist da C

- Esempio FORZA PESO:

$$\vec{F}_i = m_i \cdot \vec{g} \Rightarrow \left[\vec{R} = \left(\sum_i F_i\right)\hat{\mu} = \left(\sum_i m_i\right) g \cdot \hat{\mu} = m_{TOT} \cdot \vec{g}\right] \quad \begin{cases} \text{con } \vec{g} = g\hat{\mu} \\ \hat{\mu} \downarrow \end{cases}$$

$$\left[\vec{r}_c = \vec{r}_g = \frac{\sum_i m_i \cdot g \cdot \vec{r}_i}{\sum_i m_i \cdot g} = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_i m_i}\right]$$ CENTRO DI GRAVITA' O BARICENTRO 'C'

$\Downarrow$

$\vec{r}_c = \vec{r}_g = \vec{r}_{CM}$ IL BARICENTRO COINCIDE CON C.M. (in questo caso dato $g = cost$).

Quando in un sistema di $\vec{F}$ parallele posso ridurre tutto ad una RISULTANTE e un MOMENTO, la RISULTANTE è applicata nel BARICENTRO.

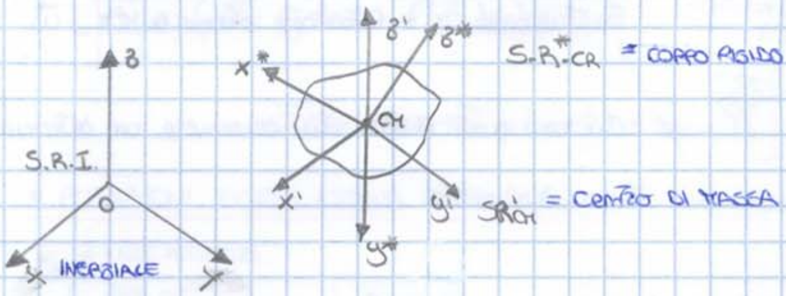
• DINAMICA DEL CORPO RIGIDO: (C.R.)

La dist. tra i p.ti materiali sono FISSE, non possono modificarsi. (solidi)

{In generale le traiettorie dei p.ti appartenenti al corpo sono diverse da quella del C.M.

GRADI DI LIBERTÀ = parametri necessari per spiegare il moto e la posizione di un C. RIGIDO.
INDIPENDENTI

Solitamente in un CORPO RIGIDO sono 6.



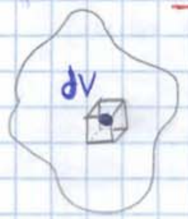
CR = può traslare e ruotare*

$W^{(I)} \longleftrightarrow d\vec{r}_{ij} = 0$ è NULLO nel CORPO RIGIDO.

$$\begin{cases} \vec{R}^{\cancel{E}} = m \cdot \vec{a}_{CM} \\ \vec{M}^{\cancel{E}} = d\vec{L}/dt \\ \Delta E_K = W^{\cancel{E}} \end{cases}$$

Tolgo APICE 'E' dato che le forze INTERNE = 0 non c'è ambiguità.

• CORPO CONTINUO :



Per un C.R. considero porzioni di volume considerate come p.ti MATERIALI

$dV \sim$ punto MATERIALE (uso gli integrali al posto delle somme)

CARATTERISTICHE :

① DENSITÀ DI MASSA $\left[\rho = \frac{dm}{dV}\right]$

$m = \int dm$ (somma delle masse che costituiscono dV)

GENERICO → $\left[m = \int_V \rho \, dV\right]$ $\rho = \rho(x, y, z)$ la densità è funz. del punto.

Se ρ = costante (OMOGENEO) $\Rightarrow \rho = \frac{m}{V} \longrightarrow m = \int \rho \, dV = \rho \int_V dV = \frac{m}{V} \int_V dV$ OMOGENEO

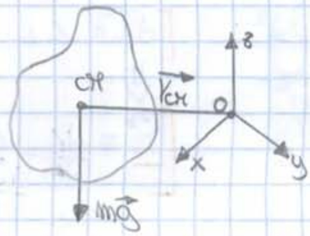
CM : $\Rightarrow$ POSIZIONE $\left[\vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r} \, dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} \rho \, dV}{m_{TOT}}\right]$ GENERICO

se ρ = cost (OMOGENEO) $\Rightarrow \left[\vec{r}_{cm} = \frac{\rho}{m} \int \vec{r} \, dV = \frac{1}{V} \int \vec{r} \, dV\right]$ SOLO SE OMOGENEO

Quindi se un corpo è omogeneo la posizione del cm e la massa sono funzione solo della forma geometrica.

- esempio $\vec{F}$ peso :

$\left[\vec{R} = \int \vec{g} \, dm = \vec{g} \int dm = \vec{g} \cdot m_{TOT}\right]$

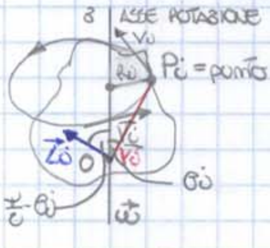


$\left[\vec{M} = \int \vec{r} \times \vec{g} \, dm = \int (\vec{r} \cdot dm) \times \vec{g} = \right.$

$\left. = m \, \vec{r}_{cm} \times \vec{g} = \vec{r}_{cm} \times (m\vec{g}) = \vec{r}_{cm} \times \vec{R}\right]$

• ROTAZIONI RIGIDE ATTORNO ASSE FISSO in S.R.I. :

(Per una questione di praticità uso le sommatorie al posto degli INTEGRALI)



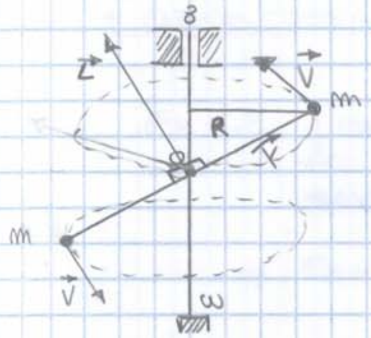
$\left[\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right]$ m. angolare

$\left[|\vec{L}_i| = m_i r_i v_i\right]$ modulo $v_i = R_i \cdot \omega$

quindi : $|\vec{L}_i| = m_i r_i R_i \cdot \omega$ ora cerco la componente lungo asse z :

$\left[L_{iz} = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = L_i \, \text{sen} \, \theta_i = m_i r_i R_i \omega \cdot \text{sen} \, \theta_i = *\right.$

$R_i = r_i \cdot \text{sen} \, \theta_i$



CASO NON PARALLELO

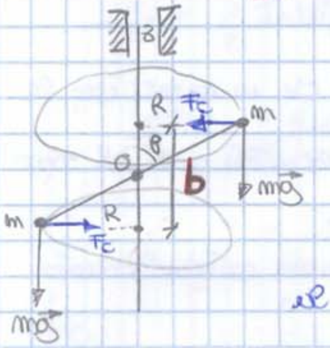
$\vec{L} \not\parallel \vec{\omega}$

$\left[\,|\vec{L}| = |2\vec{r} \times m\vec{v}| = 2rmv = 2rmR\omega\,\right]$ modulo

$\left[\,L_z = L\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = L\cdot\sin\theta = 2rmR\omega\cdot\sin\theta = 2R^2 m\omega = \text{costante}\,\right]$

$\left[\,L_\perp = 2rmR\omega\cos\theta\,\right]$

$\left[\,M = L_\perp\omega = 2rmR\omega^2\cos\theta\,\right]$



$\vec{F_c}$ = forze centripete, formano una coppia con braccio $\neq 0$.

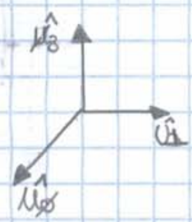
$$\left.\begin{array}{l} b = 2r\cos\theta \\ F_c = m\omega^2 R \end{array}\right\} \boxed{M = F_c\cdot b = 2r\cos\theta\cdot m\omega^2 R}$$

il sistema tenderebbe a ruotare l'asse di rotazione, la guida lo tiene fermo (ASSE DI NON SIMMETRIA)

~~15/5~~ 8/05/2013 15° LEZIONE

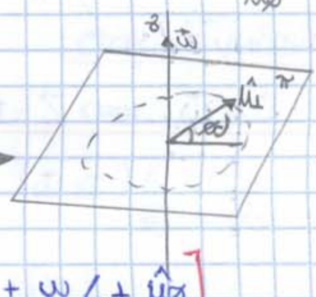
- RIPETIZIONE:

$$\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{L}_z+\vec{L}_\perp) = \frac{d\vec{L}_z}{dt}+\frac{d\vec{L}_\perp}{dt} = \quad \text{con} \begin{cases} \vec{L}_z = L_z\cdot\hat{u}_z \\ \vec{L}_\perp = L_\perp\cdot\hat{u}_\perp \end{cases}$$



$$= \left(\frac{dL_z}{dt}\hat{u}_z + \underbrace{\frac{d\hat{u}_z}{dt}}_{=0}\cdot L_z\right)+\left(\frac{dL_\perp}{dt}\hat{u}_\perp+\frac{d\hat{u}_\perp}{dt}\cdot L_\perp\right) = *$$

$$\left[\,\frac{d\hat{u}_\perp}{dt} = \underbrace{\frac{d\phi}{dt}}_{=\omega}\hat{u}_\phi\,\right]$$



$$* = \vec{M} = \frac{dL_z}{dt}\hat{u}_z + \cancel{\frac{dL_\perp}{dt}}\,\omega L_\perp\hat{u}_\phi \Rightarrow \boxed{\vec{M} = \frac{dL_z}{dt}\hat{u}_z + \omega L_\perp\hat{u}_\phi}$$

N.B.

$$\left[\begin{array}{l} M_z = \frac{dL_z}{dt} \\ \hline M_\perp = \frac{dL_\perp}{dt} \\ \hline M_\phi = \omega L_\perp \end{array}\right]$$

CASO GENERALE

- ENERGIA CINETICA e LAVORO (CORPO RIGIDO):

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i V_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \underbrace{\left(\sum_i m_i R_i^2\right)}_{I_z = \text{momento di inerzia}} =$$

$$\Rightarrow \left[E_K = \frac{1}{2} I_z \omega^2\right]$$ ENERGIA CINETICA CORPO RIGIDO

Faccio vettore ω perché è uguale per tutti i punti.

$[\Delta E_K = W]$ = Teorema en. cinetica

$$\Delta E_K = \frac{1}{2} I_z \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_{in}^2 = W$$

$$dW = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} I_z \cancel{2}\omega d\omega = I_z \omega d\omega = I_z \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \alpha dt =$$

$$\left\{\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \alpha \cdot dt\right.$$

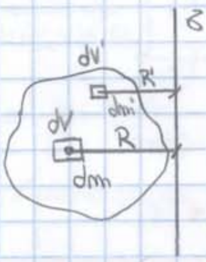
$$= \alpha I_z d\theta \Rightarrow \left[dW = \underbrace{I_z \alpha}_{M_z} d\theta = M_z \cdot d\theta\right]$$

LAVORO $\rightarrow$ $\left[W = \int dW = \int_{\theta_{in}}^{\theta_{fin}} M_z d\theta\right] \longrightarrow$ se $\vec{\tau} \parallel \vec{\omega}$ $\left(W = \int \tau d\theta\right)$

- MOMENTO D'INERZIA:

$$\left[I = \int R^2 dm = \int_V R^2 \rho dV\right]$$ MOM. INERZIA

Dipende dalla forma e dalla dist. dall'asse.

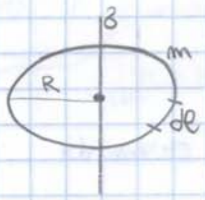


$$\left[\underbrace{\rho}_{\text{DENSITÀ}} = \frac{dm}{dV}\right] \Rightarrow dm = \rho dV$$ se OMOGENEO $\rho = \text{cost}$

$\Downarrow$

$$\left[\rho = \frac{m}{V} ; I_z = \rho \int_V R^2 dV\right]$$

= esempio: ANELLO (sezione $\varnothing$ trascurabile) $\Rightarrow$ la massa è distribuita su una linea



$$\left[\rho_\ell = \frac{dm}{d\ell}\right] \leftarrow \text{densità lineare} \quad \left[\frac{kg}{m}\right]$$

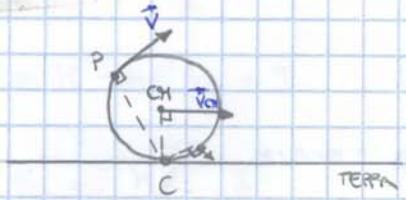
essendo OMOGENEO ρ = costante $\Rightarrow \frac{m}{\ell} = \frac{m}{2\pi R}$

$$I_z = \int R^2 dm = \int R^2 \rho_\ell \cdot d\ell = \text{(essendo } R = \text{cost lo porto fuori)}$$

$$= \rho_\ell R^2 \int d\ell = R^2 \frac{m}{\cancel{2\pi R}} \cdot \cancel{2\pi R} = R^2 m \Rightarrow \left[I_z = R^2 m\right]$$ CASO PARTICOLARE.

MOMENTO DI INERZIA, ASSE SIMMETRICO

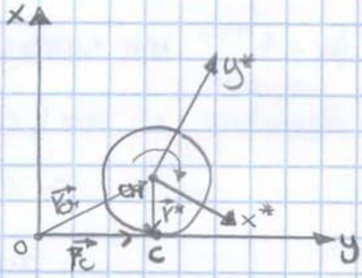
• MOTO DI PURO ROTOLAMENTO: (senza slittare)



L'asse è ORTOGONALE al foglio passante per C.
Per ogni p.to la $\vec{V}$ è $\perp$ alla congiungente con C.
$|\vec{V}_P| = \omega |\vec{CP}|$, ω = per tutti i punti.

Al momento di contatto il punto C è fermo, la V aumenta con la distanza da C.
$[\vec{V}_C = 0$ rispetto al terreno (dovuto all'attrito statico)$]$ La ruota avanza perché C cambia.
CONDIZIONE DI PURO ROTOLAMENTO

S.R.I., $\vec{V}_C$ $\quad$ SR_{CM} (SR^*), $\vec{V}^*$



TRASCINAMENTO

$$\left[\vec{V}_C^* = \vec{V}_C - \vec{V}_t\right] \qquad \left[\vec{V}_t = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}^*\right]$$

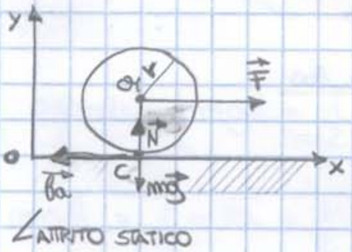
TRASCINAMENTO $\quad$ ROTAZIONE

se $\vec{V}_C = 0 \Rightarrow \vec{V}_C^* = -\vec{V}_t = \underbrace{-\vec{V}_{CM} - \vec{\omega} \times \vec{r}^*}_{0} = 0$

$\vec{V}_C^* = 0 \Rightarrow \vec{V}_{CM} = -\vec{\omega} \times \vec{r}^*$

$$\left[V_{CM} = \omega \cdot r\right] \text{ con } r = \text{raggio ruota} = \vec{r}^*$$

= esempio:



FORZE

$$\boxed{\vec{R} = m\vec{a}_{CM}} \qquad \vec{F} + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{f_a} = m\vec{a}_{CM}$$

$$\begin{cases} x: F - f_a = m a_{CM} \\ y: N - mg = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} F - f_a = m a_{CM} \; * \\ N = mg \end{cases}$$

MOMENTI

$$\boxed{\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}} \text{ POLO CM} \qquad \underbrace{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{f_a}}_{} = I\vec{\alpha}$$

$\{$ solo $\vec{f_a}$ ha un braccio $\neq 0$, quindi crea il momento.

$$\left[M = r f_a \Rightarrow r f_a = I\alpha\right] *$$

$$\alpha = \frac{a_{CM}}{r} \qquad \omega = \frac{V_{CM}}{r}$$

N.B. $\begin{cases} V_{CM} = \omega r \\ a_{CM} = \alpha r \end{cases}$

$$* \begin{cases} F - f_a = m a_{CM} \\ r f_a = I \dfrac{a_{CM}}{r} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_a = \dfrac{F}{1 + \frac{mr^2}{I}} \\ a_{CM} = \dfrac{F}{m\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} \end{cases} \Rightarrow$$

(La forza di attrito statico sono incognite, si può ottenere solo il suo valore max.)

$f_{a\,max} = \mu_S \cdot N = \mu_S mg$ $\quad$ VALORE MAX $\vec{f_a}$

$F_{max} = f_{aS}\left(1 + \frac{mr^2}{I}\right) = \mu_S mg\left(1 + \frac{mr^2}{I}\right)$ $\quad$ se $F > F^{max}$ SLITTA $\Rightarrow \vec{V}_C \neq 0$.

$$\begin{cases} \mathcal{M} - rF_{as} = \dfrac{I}{R}\cdot\dfrac{F+F_{as}}{m} \\ Rm\mathcal{M} - mR^2F_{as} = I(F+F_{as}) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ devo ricavare F_{as} da solito.

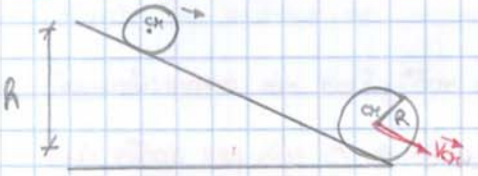
$$\begin{cases} F_{as} = \dfrac{\dfrac{\mathcal{M}}{R} - \dfrac{I}{mR^2}\cdot F}{1+\dfrac{I}{mR^2}} \\ a_{cr} = \dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{F+\dfrac{\mathcal{M}}{R}}{1+\dfrac{I}{mR^2}} \end{cases}$$

quindi se $\frac{\mathcal{M}}{R} = F\frac{I}{mR^2} \Rightarrow F_{as} = 0$

Sostituendo poi F_{as} nel sistema iniziale ottengo anche a_{cr}.

N.B. La forza di attrito che agisce durante il ~~moto~~ moto di puro rotolamento è di tipo statico, non c'è spostamento tra ruota e terra, non c'è lavoro, E_M si conserva se tutte le altre F sono conservative.

= esempio:



$$\begin{cases} E_p\,(\text{INIZIALE}) = m\cdot g\cdot h \\ E_K\,(\text{FINE}) = \dfrac{1}{2}mV_{cr}^2 + \dfrac{1}{2}\underbrace{I_{cr}}_{\text{RISPETTO A CR}}\omega^2 \end{cases}$$

quindi: $\left[mgh = \frac{1}{2}mV_{cr}^2 + \frac{1}{2}I_{cr}\omega^2 \right]$ $\quad [V_{cr} = R\omega]$ ROTOLAMENTO

$mgh = \frac{1}{2}mV_{cr}^2 + \frac{1}{2}I_{cr}\frac{V_{cr}^2}{R^2}$ posso ricavare $\vec{V}_{cr}$ alla fine.

$$V_{cr}^2 = \frac{2mgh}{m+\frac{I_{cr}}{R^2}} \Rightarrow \left[V_{cr} = \underbrace{\sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I_{cr}}{mR^2}}}}_{\text{ROTAZIONE}} \right] < \underbrace{\sqrt{2gh}}_{\text{pura traslazione}}$$

Le V sono diverse, perché ruotando si consuma + energia.

= Esempio: CALCOLO I (M media)

(1) $I_{ANELLO} = mR^2$

(2) $I_{DISCO} \Rightarrow$

$$I = \int R^2\,dm = \int R^2 \rho_s\,dS$$

se omogeneo $\left(\rho_s = \frac{m}{\pi R^2}\right)$

r = dist superficie da infinitesima

$$\left[I = \iint r^2\frac{m}{\pi R^2}\,r\,d\theta\,dr = \frac{m}{\pi R^2}\int_0^R r^3\,dr\underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} = \frac{m}{\cancel{\pi}\cancel{R^2}}\cancel{2\pi}\frac{R^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{4}\,2} = \frac{1}{2}mR^2 \right]$$

MOMENTO DISCO SOTTILE

- IMPULSO ANGOLARE: (VARIAZIONE MOMENTO ANGOLARE O DI Q.TA' DI MOTO)

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \left[\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\,dt\right] \text{ IMPULSO ANGOLARE } = \left[\int d\vec{L} = \vec{L}(t_2) - \vec{L}(t_1)\right]$$

$$\vec{M}dt = d\vec{L}$$

- Se $\vec{F}$ IMPULSIVA:

$$\int \vec{M}dt = \int \vec{r} \times \vec{F}\,dt = \vec{r} \times \int \vec{F}dt = \boxed{\vec{r} \times \vec{J}}$$ MOMENTO DELL'IMPULSO.

- LEGAME $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$:

POLO $\equiv O \Rightarrow \vec{L} = \sum_i \vec{r_i} \times m_i \vec{v_i}$ con: $[\vec{v_i} = \omega \times \vec{r_i}]$

$\vec{L} = \sum_i \vec{r_i} \times m_i(\omega \times \vec{r_i})$ $\qquad \vec{\omega}$ // asse di rotazione

$\vec{\omega} = \omega_x \hat{u}_x + \omega_y \hat{u}_y + \omega_z \hat{u}_z$

Ogni componente di $\vec{L}$ dipende da TUTTE le componenti di $\vec{\omega}$.

Usando la matrice di inerzia I_{ij} ottengo le relazioni.

Quindi: $L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$

$$J = \begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x & I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ y & I_{yx} & \dots & \\ z & I_{zx} & \dots & \end{array}$$

- TEOREMA DI POINSOT: (calcolo I rispetto ad un asse qualsiasi)

Dato un corpo e un punto è sempre possibile costruire un ELLISSE DI INERZIA.

Gli assi questo ellissoide sono // a $\vec{\omega}$ (uno solo degli assi principali di inerzia).

Se prendo come punto il CM gli assi vengono detti CENTRALI DI INERZIA.

- MOTO GIROSCOPICO:

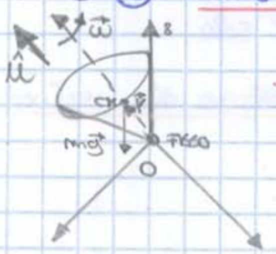
Moto di un corpo rigido con un punto mantenuto FISSO (da vincolo)

= es: (1) PUNTO FISSO $\equiv$ C.M.

$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L}$ = costante

scelgo asse di simmetria (centrale di inerzia) $\Rightarrow \vec{L} \parallel \vec{\omega}$ $\Big\}$ $\vec{\omega}$ = costante

= es: (2) PUNTO FISSO $\neq$ C.M. (TROTTOLA)



scelgo asse CENTRALE DI INERZIA $\Rightarrow \vec{L} \parallel \vec{\omega} \Rightarrow \vec{L} = I\vec{\omega}$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times m\vec{g}$$

suppongo $\vec{\omega}$ = costante $\Rightarrow \vec{L}$ = cost $\longrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$

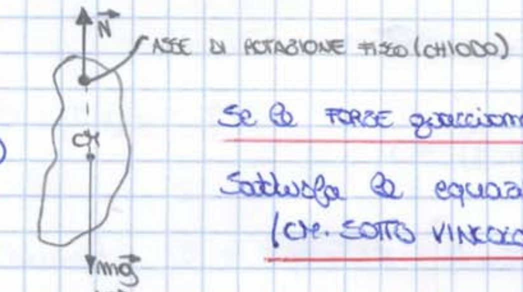
$T_{NUTAZIONE} = 19$ ANNI (PERIODO OSCILLAZIONE dell'asse di ROTAZIONE).

• STATICA:

$$\begin{cases} \vec{R} = 0 \xrightarrow{a_{cm}=0} \vec{V}_{cm} = 0 & \text{MOTO DEL C.M} \\ \vec{M} = 0 \longrightarrow \vec{\omega} = 0 & \text{MOTO RISPETTO A C.M.} \end{cases}$$

RISPETTO A QUALSIASI POLO

= es: PENDOLO COMPOSTO (se g = cost BARICENTRO = C.M.)

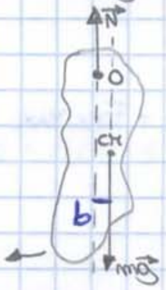


(1)

Se le forze giacciono sulla stessa retta, quando $\vec{R}=0$ e $\vec{M}=0$.

Soddisfa le equazioni della statica. (EQUILIBRIO STABILE)

(CM. SOTTO VINCOLO)



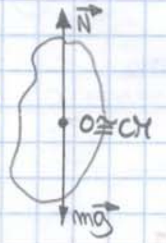
Non essendo sulla stessa retta le forze creano un MOMENTO DI RICHIAMO che fa tornare l'equilibrio STABILE.

(2)

RIBALTANDO TROVO EQUILIBRIO INSTABILE, piccole perturbazioni lo sconvolgono

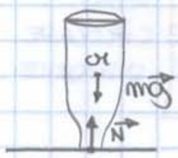
(CM SOPRA VINCOLO)

(3)

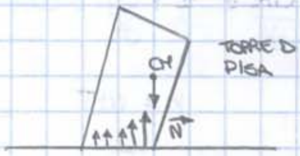


EQUILIBRIO INDIFFERENTE (sta sempre in quiete)

(4)



equilibrio INSTABILE



Se CM. SI TROVA SOPRA IL PUNTO DI CONTATTO c'è equilibrio.

Vale naturalmente il principio di azione e reazione; anche la Terra esercita una forza sul Sole.

• FORZE ESERCITATE DA MASSE

$$\begin{cases} F_{S,T} = \dfrac{4\pi^2}{K_T}\cdot\dfrac{m_T}{r^2} & \text{(esercitata da SOLE su TERRA)} \\ F_{T,S} = \dfrac{4\pi^2}{K_S}\cdot\dfrac{m_S}{r^2} & \text{(esercitata da TERRA su SOLE)} \end{cases}$$

$$\left[F_{S,T} = F_{T,S}\right] \Rightarrow \frac{4\pi^2}{K_T}\cdot\frac{m_T}{r^2} = \frac{4\pi^2}{r^2}\cdot\frac{m_S}{K_S} \Rightarrow \left[\frac{m_T}{K_T} = \frac{m_S}{K_S}\right]$$

$$\Rightarrow m_T K_S = m_S K_T \longrightarrow F = \frac{4\pi^2}{r^2}\cdot\frac{m_S}{K_S}\frac{m_T}{m_T} \Rightarrow F = \gamma\frac{m_T m_S}{r^2}$$

è una costante $= \gamma$

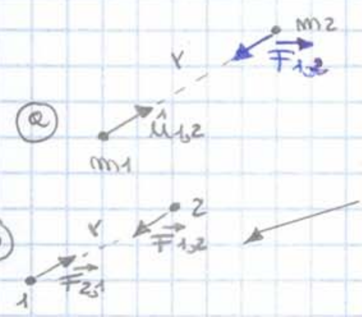
Quindi: $\left[F = \gamma\dfrac{m_T m_S}{r^2}\right]$ con $\left[\gamma = \dfrac{4\pi^2}{K_S m_T} = \dfrac{4\pi^2}{K_T m_S}\right]$ COSTANTE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

$F_{S,T} = F_{T,S}$ IN MODULO

r^2 = dist T,S al quadrato.

N.B. $\left[\gamma = 6.67\cdot 10^{-11}\dfrac{m^3}{kg\, s^2}\right]$ cost gravitazione universale.

= es:



$$\vec F_{1,2} = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\hat\mu_{1,2} \quad \text{(DI ATTRAZIONE)}$$

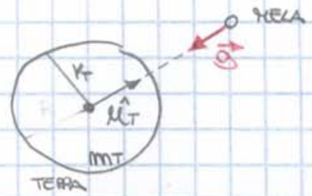
SR = versore $\hat\mu$

Forza esercitata da 1 su 2

di attrazione $\left(\vec F_{2,1} = -\gamma\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\hat\mu_{2,1}\right)$ SEMPRE.

• COLLEGAMENTO F GRAVITAZIONALE – F. PESO:

$$\vec F_{T,mela} = -\gamma\frac{m_T m_M}{r^2_{T,M}}\cdot\hat\mu_T \qquad r_{T,M} \cong r_T$$



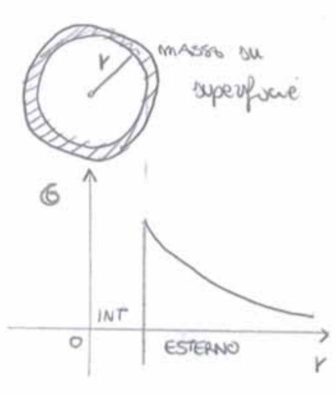
La variazione della dist T-M ($r_{T,M}$) $\cong r_T$ perché la mela viene lanciata da quota trascurabile.

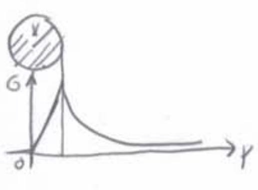
$$\left[F_{T,MELA} = \underbrace{\left(-\gamma\frac{m_T\hat\mu_T}{r_T}\right)}_{\vec g\,=\,\text{VETTORE}} m_M \Rightarrow F_{T,MELA} = m_M\cdot\vec g = \text{FORZA PESO}\right]$$

È UN CASO PARTICOLARE DELLA $\vec F$ DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE.

m = SI INTENDE MASSA GRAVITAZIONALE, fa sì che ci siano INTERAZIONI.

GRAVITAZIONE		ELETTROSTATICA
$\mathbf{F}_{1,2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}\mathbf{u}_1$	FORZA (masse/cariche puntiformi)	$\mathbf{F}_{1,2} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\mathbf{u}_1$
$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}\ m^3kg^{-1}s^{-2}$	COSTANTE UNIVERSALE	$k = 8.9875 \cdot 10^9\ Nm^2C^{-2}$ $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ $\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12}\ C^2N^{-1}m^{-2}$
$\mathbf{G} = -\gamma\frac{m}{r^2}\mathbf{u}$	CAMPO (masse/cariche puntiformi)	$\mathbf{E} = k\frac{q}{r^2}\mathbf{u}$
$\mathbf{G} = -\gamma\int\frac{dm}{r^2}\mathbf{u} = -\gamma\int\frac{\rho d\tau}{r^2}\mathbf{u}$ $\rho = \frac{dm}{d\tau}$ densità ; τ volume	CAMPO (masse/cariche estese)	$\mathbf{E} = k\int\frac{dq}{r^2}\mathbf{u} = k\int\frac{\rho d\tau}{r^2}\mathbf{u}$ $\rho = \frac{dq}{d\tau}$ densità ; τ volume
$\mathbf{F}_{1,2} = m_2\mathbf{G}_1$	FORZA (su m_2/q_2 puntiformi)	$\mathbf{F}_{1,2} = q_2\mathbf{E}_1$
$\mathbf{F}_{1,2} = \int \mathbf{G}_1 dm_2 = \int_{C_2} \mathbf{G}_1 \rho d\tau$	FORZA (su masse/cariche estese)	$\mathbf{F}_{1,2} = \int \mathbf{E}_1 dq_2 = \int_{C_2} \mathbf{E}_1 \rho d\tau$
$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -\Delta E_p$	LAVORO	$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -\Delta U_e$
$E_p = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r}$	ENERGIA POTENZIALE (masse/cariche puntiformi)	$U_e = k\frac{q_1 q_2}{r}$
$V = -\gamma\frac{m}{r}$	POTENZIALE (masse/cariche puntiformi)	$V = k\frac{q}{r}$
$V = -\gamma\int_\tau \frac{\rho d\tau}{r}$	POTENZIALE (masse/cariche estese)	$V = k\int_\tau \frac{\rho d\tau}{r}$
$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{G}\cdot d\mathbf{s}$	DIFFERENZA DI POTENZIALE	$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ $\left(\text{forza elettromotrice } \mathcal{E} = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}\right)$
$\mathbf{G} = -\nabla V$	relazione CAMPO-POTENZIALE	$\mathbf{E} = -\nabla V$
$\Phi = \int_S \mathbf{G}\cdot\mathbf{u}_n dS$	FLUSSO del CAMPO	$\Phi = \int_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_n dS$
$\oint_S \mathbf{G}\cdot\mathbf{u}_n dS = 4\pi\gamma\left(\sum_i m_i\right)_{int}$ $\oint_S \mathbf{G}\cdot\mathbf{u}_n dS = 4\pi\gamma\int_{\tau_S}\rho d\tau$ $\mathbf{u}_n$ verso l'interno (flusso entrante)	TEOREMA di GAUSS	$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_n dS = 4\pi k\left(\sum_i q_i\right)_{int}$ $\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_n dS = 4\pi k\int_{\tau_S}\rho d\tau$ $\mathbf{u}_n$ verso l'esterno (flusso uscente)
	EQUAZIONI di MAXWELL per l'ELETTROSTATICA forma integrale	$\begin{cases}\oint \mathbf{E}_{es}\cdot d\mathbf{s} = 0 \\ \oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_n dS = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}\end{cases}$
	forma differenziale	$\begin{cases}\nabla\times\mathbf{E}_{es} = 0 \\ \nabla\cdot\mathbf{E} = \rho/\epsilon_0\end{cases}$





• LEGGE DI COULOMB:

q_1, q_2 = quantità di carica delle sferette

$$\left[\vec{F} = \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot K\right] \cdot \hat{u}_r \qquad \left[\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r\right] \qquad (\hat{u}_r = \text{vettore RADIALE})$$

forza elettrostatica — forza gravitazionale

Sono entrambe forze centrali.

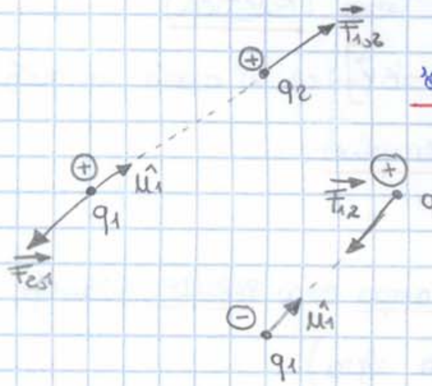
La quantità di carica è misurata in C coulomb.

$$\left[K = 8{,}9 \cdot 10^{9} \frac{Nm^2}{C^2}\right] \text{ oppure } \left[K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]$$

cost elettrostatica.

con ε_0 = cost DIELETTRICA del VUOTO

$$\left[\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}\right]$$



se $q_1 \cdot q_2 > 0 \Rightarrow \vec{F}_{1,2} > 0$ REPULSIVA stesso segno.

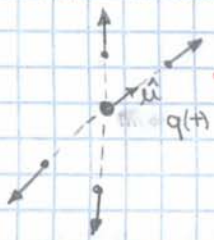
se $q_1 \cdot q_2 < 0 \Rightarrow \vec{F}_{1,2} < 0$ ATTRATTIVA segno opposto.

• CAMPO ELETTROSTATICO: con MASSE o CARICHE PUNTIFORMI

$$\left[\vec{E} = K \frac{q}{r^2} \hat{u}\right] \left[\frac{V}{m}\right] \qquad \left[\vec{G} = -\gamma \frac{m}{r^2} \cdot \hat{u}\right]$$

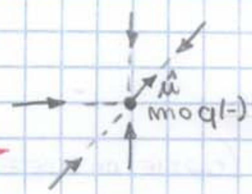
CAMPO ELETTROSTATICO — CAMPO GRAVITAZIONALE

Sono entrambi RADIALI.



se $q > 0$ REPULSIVO

se $q < 0$ ATTRATTIVO



• se le masse o le cariche sono ESTESE: uso gli integrali (sommatorie)

$$\left[\vec{E} = K \int \frac{dq}{r^2} \hat{u} = K \int \frac{\rho \, d\tau}{r^2} \hat{u}\right] \qquad \left[\vec{G} = -\gamma \int \frac{\rho \, d\tau}{r^2} \hat{u}\right]$$

CAMPO ELETTROSTATICO — CAMPO GRAVITAZIONALE

$d\tau$ = volume

ρ = densità volumica di massa

ρ = densità volumica di carica

• FLUSSO ELETTROSTATICO:

$$\boxed{\phi = \int \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, d\vec{S}}$$

$\hat{u}_n$ = versore normale alla sup. $d\vec{S}$

INTEGRALE DI VOLUME

• TR. DI GAUSS CASO ELETTROSTATICO:

somma cariche interne

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \, \hat{u}_n \, d\vec{S} = 4\pi K \left(\sum_i q_i\right)_{INTERNE}}$$

oppure

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \, \hat{u}_n \, d\vec{S} = 4\pi K \int_\tau \rho \, d\tau}$$

con $\rho \, d\tau = dq$ — DENSITÀ DI CARICA

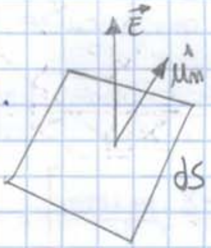
$\hat{u}_n$ verso l'esterno

INTEGRALE DI SUPERFICIE

• TH. DI GAUSS CASO CAMPO ELETTRICO (approfondimento):

$$\boxed{d\phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, dS}$$

FLUSSO attraverso una sup. S. ELEMENTARE



$$\boxed{\phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \, \hat{u}_n \, dS}$$ su cariche esterne.

$$\boxed{\phi(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \, \hat{u}_n \, dS}$$ FLUSSO in una sup. CHIUSA

$\oint$ = sup. CHIUSA CIRCUITAZIONE

N.B. $\hat{u}_n$ ha verso rivolto all'esterno della superficie.

TH GAUSS => $\boxed{\underbrace{\phi(\vec{E})} = 4\pi K \underbrace{\left(\sum_i q_i\right)_{INTERNE}}}$

$$\boxed{\oint \vec{E} \, \hat{u}_n \, dS = 4\pi K \int_{\tau_S} \rho \, d\tau}$$

con $\rho = \frac{dq}{d\tau}$ $[C/m^3]$

INTEGRALE DI SUPERFICIE

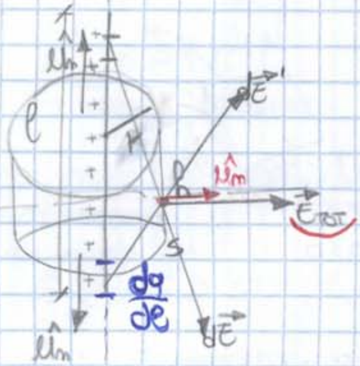
INTEGRALE DI VOLUME

τ_S = volume superficie S

N.B. le cariche esterne non contribuiscono perché si annullano a coppie se $d\Omega$ incontra S, e oppure se $d\Omega$ non incontra la S $\phi = 0$ comunque.

= es: TR GAUSS elettrico con S = CILINDRICA

Filo indefinito uniformemente CARICO.



ρ_ℓ = densità lineare di carica = λ

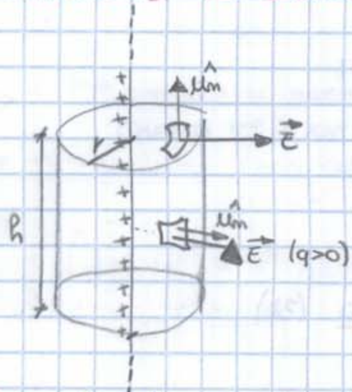
$$\lambda = \frac{dq}{d\ell}$$

La risultante e' ortogonale al FILO (il campo è RADIALE)

[Sulle basi $\hat{u}_n \perp \vec{E}$; $\phi = 0$
Sui lati $\hat{u}_n \parallel \vec{E}$; $\phi \neq 0$]

R = molla a piacere, cost arbitraria

21/5/2013 20° LEZIONE



$$\left[\phi(\vec{E}) = \oint_S \vec{E}\,\hat{u}_n\,dS = \underbrace{\int_{basi} \vec{E}\,\hat{u}_n\,dS}_{0} + \int_{LATI} \vec{E}\,\hat{u}_n\,dS = \int_{LATI} \vec{E}\,\hat{u}_n\,dS = \right.$$

$$\left. = \int_{LATI} E\,dS = E\int_{LATI} dS = E\,\underbrace{2\pi r h}\right]$$ FLUSSO

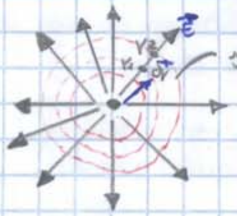
sup. laterale del cilindro.

[pongo $\lambda = \frac{dq}{d\ell}$ densità di carica su h] [$q_{INTERNA} = \int dq = \int \lambda\, d\ell = \lambda \int d\ell = \lambda \cdot h$]

$E 2\pi r \cancel{h} = 4\pi K \lambda \cancel{h} \Rightarrow E 2\pi r = \frac{1}{\varepsilon_0}$ $[\varepsilon_0 = 4\pi K]$

quindi: $\left[E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\right]$ ← CAMPO ELETTRICO

$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_1^2 \vec{E}\,d\vec{s}$ ← DIFF. DI POTENZIALE $[E = -\nabla V]$ gradiente V



sup. equipotenziali (E = cost)

FILO VISTO DALL'ALTO.

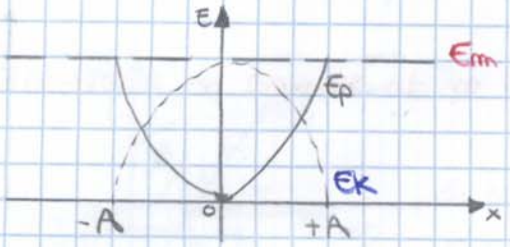
$$\left[-\Delta V = V(r_1) - V(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}\,d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} E\,dr = \right.$$

$$\left. = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda}{\varepsilon_0 2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\frac{r_2}{r_1}\right]$$ DIFF. DI POTENZIALE

moltiplicando $-\Delta V$ per q_0 (carica) ottengo E_p.

$$E_p = -\Delta V q_0$$

$$E_m = \frac{1}{2} m V^2(x) + \frac{1}{2} K x^2 = \text{cost}$$



Per l'oscillatore armonico, la buca di potenziale energia è PARABOLICA. (viceversa)

• OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO (con attrito viscoso):

$$\begin{cases} F_{av} = -\lambda V & \text{ATTRITO VISCOSO} \\ F = -Kx & \text{elastica} \end{cases}$$

consideriamo $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$:

$$m \cdot \vec{a} = -Kx - \lambda x$$

Derivo e divido per m

$$\left[\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{V} + \underbrace{\frac{K}{m}}_{\omega_0^2} x = 0 \right]$$

pongo $\frac{K}{m} = \omega_0^2$ PULSAZIONE PROPRIA (ω che avrebbe se $F_{av} = 0$)

$\frac{\lambda}{2m} = \gamma$ COEFF DI SMORZAMENTO

quindi:

$$\left[\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \right]$$

$x = e^{\alpha t}$ può essere soluzione = ? (faccio derivata seconda $x = e^{\alpha t}$)

$$\underbrace{\alpha^2 \cancel{e^{\alpha t}}}_{\text{DERIVATA SECONDA}} + \underbrace{2\gamma\alpha \cancel{e^{\alpha t}}}_{\text{DERIVATA PRIMA}} + \underbrace{\omega_0^2 \cancel{e^{\alpha t}}}_{x = e^{\alpha t}} = 0 \Rightarrow \left[\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0 \right]$$ eq. caratteristica.

$e^{\alpha t}$ è soluz. se α soddisfa eq. caratteristica.

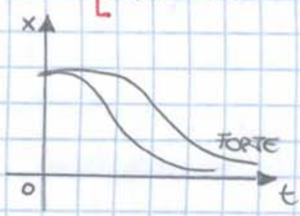
$$\left[\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \right]$$

3 CASI PARTICOLARI

1° CASO) SMORZAMENTO FORTE $\gamma^2 > \omega_0^2$

2 soluz. REALI (exp. decrescente) $\Rightarrow \alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < 0$ SOLUZ. REALI

$$\left[x(t) = A e^{\alpha_1 t} + B e^{\alpha_2 t} \right]$$ il moto non sarà oscillatorio, ma smorzato.



$\left[x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi)\right]$ solus. eq. non omogenea

Tra F_0 e $x(t)$ c'è uno sfasamento ϕ (ϕ = fase iniziale)

A e ϕ dipendono da ω, ω_0 e γ.

ω = pulsaz. forzante (F_0)
ω_0 = " propria del sistema
γ = coeff. smorzamento (F_{AV})

$$\left[A = \frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}\right] ; \quad \left[\tan\phi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right]$$

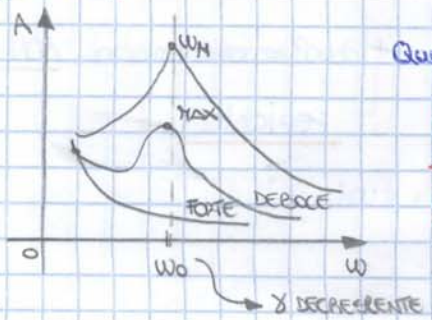
il sistema oscilla con ω (pulsaz. della forzante) con uno sfasamento ϕ.

= Oss:

- •) $\omega \ll \omega_0$ $\quad \tan\phi \to 0^+ \Rightarrow \phi \cong 0$ (x in fase con F_0)
- •) $\omega \gg \omega_0$ $\quad \tan\phi \to 0^- \Rightarrow \phi \cong \pi$ (x in opposizione di fase con F_0)
- •) $\omega = \omega_0$ $\quad \tan\phi \to \infty \Rightarrow \phi \cong \pi/2$ (x in quadratura di fase con F_0)

essendo A dipendente da ω (cerco A_{max}):

$$\left[\frac{dA}{d\omega} = 0\right] \Rightarrow \left[A = MAX \text{ se } \omega = \omega_M = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} < \omega_0\right]$$ (solo con SMORZ. DEBOLE)



Quando c'è il MAX ottengo una curva di risonanza.

{ Se ω è lontano da ω_0 il sistema risponde POCO A = piccola
{ Se ω vicino ω_0 ottengo RISONANZA (A = grande)

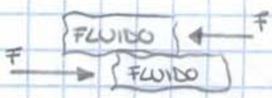
Fenomeno crollo ponti per risonanza.

• PROPRIETÀ MECCANICHE DEI FLUIDI:

Fluidi = sostanze senza forma propria (liquidi e gas), hanno volume e densità propri.

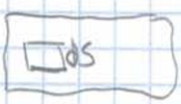
non resistono a scorrimento (un pezzo su altro), non c'è attrito statico.

All'equilibrio le $F^{(e)}$ sono ortogonali alla sup. di separazione.



Il fluido va considerato come un sistema continuo, si parla di F di volume (mg) e F di superficie (P)

$[dF = g\,dm = g\rho\,dV]$ (F di volume)



$[dF = p\,dS]$ con $p = \frac{dF}{dS}$ PRESSIONE $\left[Pa = \frac{1N}{m^2}\right]$

(F di superficie)

1 Torr = 1 mmHg = $\frac{1}{760}$ atm
1 bar = 10^5 Pa
P_{atm} = 1,013 bar

Se le forze sono conservative:

$$\vec{F} = -\nabla E_p \qquad \vec{f} = -\nabla E_{p_m}$$

N.B. E_p DIPENDE SOLO DA z, $\nabla E_p = \left(0, 0, \frac{dE_p}{dz}\right)$

$$\boxed{\nabla P = -\rho \nabla E_{p_m}}$$ CASO PARTICOLARE

Una sup. equipotenziale ($E_p = cost$) in questo caso è anche ISOBARICHE ($P = cost$).

= es: FORZA PESO

$$\vec{F} = m\vec{g} \qquad f_z = -g \quad \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

$$\nabla P_z = -\rho (\nabla E_{p_m})_z$$

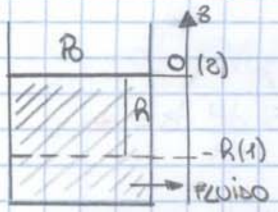
$$\frac{dP}{dz} = -\rho \frac{d}{dz}\left(\frac{\cancel{m} g z}{\cancel{m}}\right) = -\rho g$$

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \Rightarrow dP = -\rho dz g$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\int dp = -\int \rho g \, dz}$$ VALIDA PER GAS e LIQUIDI

• LEGGE DI STEVINO (liquido):



$$\int_1^2 dp = -\int_1^2 \rho g dz$$

per un liquido: ρ e $g = cost$

VALE SOLO PER I LIQUIDI.

$$P_2 - P_1 = -\rho g (z_2 - z_1)$$

essendo la forza peso diretta verso il basso, la P aumenta verso il basso.

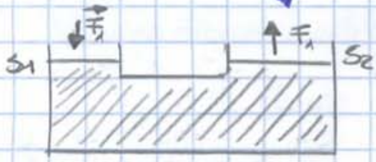
$$P_0 - p(h) = -\rho g(+h) \longrightarrow \boxed{p(h) = P_0 + \rho g h}$$ LEGGE DI STEVINO SOLO LIQUIDI

Perché il sistema resta in equilibrio la pressione aumenta con la profondità, ogni 10 m aumenta 1 bar. Se varia P_0 (atm) o varierà anche la P in profondità.

La P esercitata su un pto del fluido, essa sarà subita da ogni altro qualsiasi pto.

(Principio di Pascal)

= es:



$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow \boxed{F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1} \gg F_1}$$ se $S_2 \gg S_1$

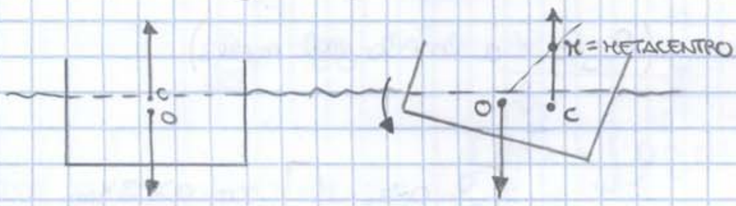
$\vec{R} = (\rho_c - \rho_{fe}) V \vec{g}$

se $\rho_c > \rho_{fe}$ $\quad \vec{R} > 0$ il corpo affonda (verso basso)

se $\rho_c < \rho_{fe}$ $\quad \vec{R} < 0$ il corpo galleggia (verso alto)

N.B. $\vec{F}_P = \rho_{fe} V \vec{g}$ esercitata da fluido, SPINTA DI ARCHIMEDE; è applicata nel baricentro del fluido spostato (centro di spinta). SPINTA IDROSTATICA.

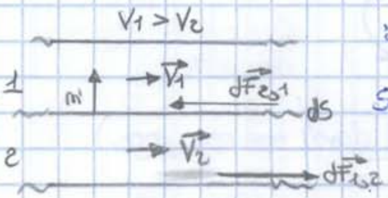
Se il fluido o il corpo non è omogeneo ottengo anche il momento risultante.



Se O (baricentro) sta sotto il C (centro di spinta) l'eq. è STABILE.

• FLUIDO IDEALE:

densità costante, non ha attrito interno (viscosità).

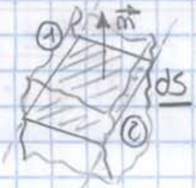


senza attrito interno le particelle di fluido non si scambiano forze.

Se ci sono attriti interni V_1 tende a trascinare V_2 (2), accelera.

$$\left[dF = \eta \, dS \cdot \frac{dV}{dn} \right]$$

ATTRITO INTERNO



con η = coeff. di viscosità $\neq 0$ ci sono attriti interni.

dS = sup. di contatto

$\frac{dV}{dn}$ = variazione di velocità

Quindi:

$$\left[\text{FL IDEALE} \Rightarrow \eta = 0 \text{ e } \rho = \text{cost} \right]$$

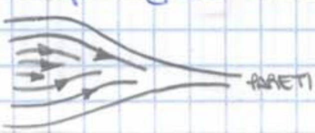
• DESCRIZIONE EULERIANA:

$\vec{V}(x, y, z, t)$ velocità volumetto di fluido in un determinato p.to dello spazio.

$\vec{V}(x, y, z) \Rightarrow$ REGIME STAZIONARIO (indip. dal tempo), nel flusso su un p.to e tutti i volumetti di fluido che passano da lì hanno stessa $\vec{V}$.

• LINEE DI CORRENTE:

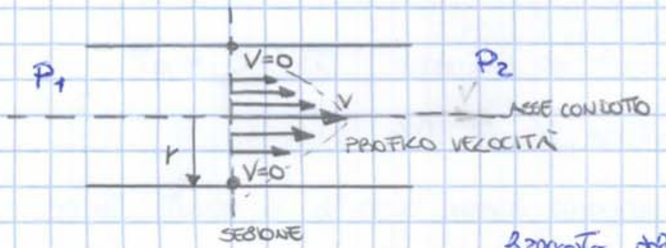
La V è sempre Tg alla linea di corrente, in regime statico come fluire.



• DISTINZIONE COMPORTAMENTO DINAMICO FLUIDO REALE: $\eta \neq 0$

= BASSE VELOCITÀ → MOTO LAMINARE (REG. STAZIONARIO)

Le linee di corrente sono costanti, non si intersecano.



C'è uno strato di fluido sottile che si attacca alle pareti del condotto con V = 0. Lo strato successivo scivola su di esso, venendo frenato dalla F di attrito, e venendo acc. dallo strato più interno del fluido e così via fino al centro, entrando verso il centro la V aumenta. Quindi in sezione la $V \neq cost$.

Se abbiamo un condotto cilindrico di raggio R, lung. l, $\Delta P = P_1 - P_2$

$$\left[V(r) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l}\underbrace{(R^2 - r^2)}_{\text{andamento quadratico}} \right]$$

$$\left[q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{P_1 - P_2}{l} \right]$$ Hagen - Poiseuille

gradiente di pressione

Per avere una q = cost occorre mantenere una diff. di pressione ovvero costante, per vincere la res. a moto di attrito interno.

Si chiama REG. LAMINARE perché ci sono lamine di fluido con attrito.

È sempre presente nei tubi capillari $R \leq 0{,}5$ mm.

= ALTE VELOCITÀ → MOTO VORTICOSO o TURBOLENTO.

Per determinare se V ALTA o BASSO uso il n° di Reynolds:

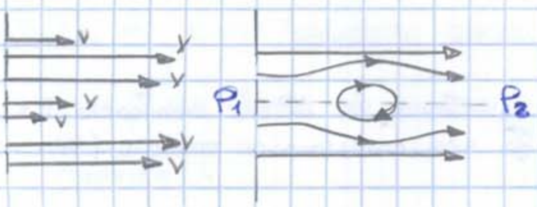
$$\left[R = \frac{\rho V R}{\eta} \right] \quad R \text{ RAGGIO}$$

$$\begin{cases} \text{se } R > 1200 & \text{MOTO VORTICOSO} \\ \text{se } R < 1200 & \text{MOTO LAMINARE} \end{cases}$$

inoltre $\left[V_{CRITICA} = 1200 \frac{\eta}{\rho R} \right]$ R = raggio

In un moto vorticoso l'attrito è forte, deforma le linee di corrente, creando vortici.

Tanto più sono diverse le V tra strati, più forte sono le F attrito, si formano vortici chiusi.



$$\left[V_m^2 \propto \frac{P_1 - P_2}{l} \right]$$ Velocità media.

In questo caso la diff. di pressione è maggiore del moto laminare, perché è al quadrato, c'è più dissipazione di energia.

30/5/2013 23° LEZIONE

- TERMODINAMICA:

include scambi di en. non meccanica, introduce T° e Q (calore).

- Sistema Termodinamico (continuo)

formato a N elementi (N = n° avogadro $6{,}22 \cdot 10^{23}$), macroscopico.

- Ambiente:

insieme di elementi ESTERNI con cui il sistema può interagire

- Universo: (Termodinamico)

insieme di AMBIENTE e SISTEMA.

Il sistema può essere:

- APERTO => scambia energia e materia
- CHIUSO => scambia solo energia (da studiare)
- ISOLATO => non scambia nulla

N.B. AMBIENTE + SISTEMA = SEMPRE ISOLATO

- Variabili Termodinamiche: si usano per def. lo stato Termodinamico

ci sono 2 gruppi:
1. esprimono proprietà globali, dipendono da grandezza sist. ESTENSIVE
2. esprimono prop. locali, p.to per p.to INTENSIVE (es. P, $T°$)

- Stato Termodinamico di un sistema:

e' def. da variabili Termodinamiche, ad uno stesso STATO TERMO... corrispondono molti stati meccanici.

- Stato Termodinamico di equilibrio:

quando le Variabili Termodinamiche sono costanti nel Tempo, dette VAR. DI STATO

gli stati di equilibrio possono essere:

1. eq. MECCANICO
2. eq. CHIMICO
3. eq. TERMICO (T = cost in tutto il sistema) scambi di en. non meccanica in equilibrio.

Se un sistema e' in eq. LE VAR. DI STATO sono correlate da una Eq. DI STATO

es. con $P, V, T°$ $\quad f(P, V, T) = 0$ IMPLICITA $\quad P = p(V, T)$ ESPLICITA ecc

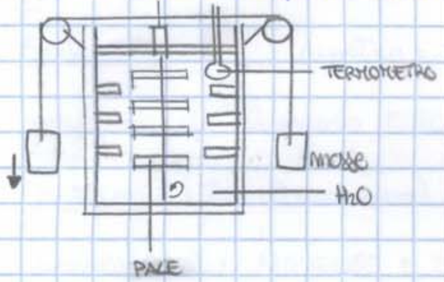
Farhenheit $\left[T(°F) = \frac{9}{5}T(K) - 459{,}67\right]$

$0°C = 32°F$ il riferimento era la T° del sangue di cavallo.

$100°C = 212°F$

= es: scambio di calore (esperimento di Joule)

contenitore con pareti adiabatiche:



calcoliamo il lavoro meccanico dovuto alle masse che fanno ruotare l'albero e le pale, questo lavoro W_1 provoca un riscaldamento dovuto ad attrito interno, energia dissipata.

. A parità di massa di H_2O il lavoro speso è sempre proporzionale all'aumento di temperatura.

Quindi $\left[W_{ad} = -\Delta U = U_{IN} - U_{FIN}\right]$ U = en. ~~potenziale~~ INTERNA definita da variabili (in caso di lavoro)

vale solo per sistemi ADIABATICI.

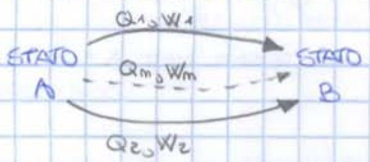
Lo stesso risultato può essere ottenuto tramite SCAMBIO DI CALORE. (aumento T).

$[Q = \Delta U]$ stesso effetto. $\Longrightarrow$ $[Q = -W_{ab}]$ SOLO IN SISTEMI ADIABATICI.

sono scambi di energia

Il segno negativo deriva dal fatto che il calore viene ceduto all'esterno, è negativo anche il lavoro subito.

= es. contenitore NON ADIABATICO:



Le frecce intendono uno scambio con l'ambiente.

PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

$Q - W = Q_1 - W_1 = Q_m - W_m \Longrightarrow [Q - W = \Delta U]$ indipendente dal tipo di trasformazione ma solo dallo stato iniziale e finale.

U = en. interna, le cui variazioni sono indicative degli scambi, è una funz. DI STATO.

U dipende da caratteristiche interne, T, P, V. Questo principio mi da un resoconto completo degli scambi del sistema, l'en. interna viene immagazzinata per poi essere usata come lavoro senza limite (IDEALMENTE).

$\left[Q = m \cdot c\,(T_{FIN} - T_{IN})\right]$ CALORE SCAMBIATO

m = massa
c = CALORE SPECIFICO = cost.

$m_1 c_1 (T_{eq} - T_1) = m_2 c_2 (T_{eq} - T_2)$ da qui ricavo T_{eq}.

$$\left[T_{eq} = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}\right]$$

N.B. → $m \cdot c$ = CAPACITÀ TERMICA J/K

- in termini infinitesimi:

$[dQ = mc\,dT] \longrightarrow \left[c = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT}\right]$ CALORE SPECIFICO $\Rightarrow \left[c = \frac{1}{m}\frac{dU}{dT}\right]$ solo se $dW = 0$

→ è un diff. esatto perché $\delta W = 0$ e $\delta Q = dU \Rightarrow dQ$

$dQ = mc\,dT \Rightarrow \left[Q = \int dQ = m\int_{T_1}^{T_2} c(T)\,dT\right]$ PIÙ GENERALE, c può variare in base a ΔT.

$c = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT}$ → quantità di calore dQ necessaria per far aumentare l'unità di massa di una unità di temperatura (1K).

c si misura in $\left[\frac{J}{Kg\,K}\right]$ UNITÀ MISURA CALORE SPECIFICO

• CALORIA:

calore necessario per far aumentare 1 kg H_2O da 14,5°C a 15,5°C (1°C).

$\left[1\,cal = 4186{,}6\ J\right]$ equivalente meccanico della caloria

quindi $c_{H_2O} = \frac{1\,cal}{Kg\,K} = 4186{,}6\ \frac{J}{Kg\,K}$

c può essere espresso anche in quantità di moli: $\left[c = \frac{1}{n}\frac{dQ}{dT}\right]$ MOLARE

4/06/2013 24° Lezione.

• ESERCIZI SU CALORIMETRIA:

(9) $T^{\circ}_{FIN}\ H_2O = ?$

$$W_{ad} = E_{mf} - E_{mi} = \Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}mv^2}_{E_{K\,FIN}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}I_t\omega^2}_{\text{MOMENTO INERZIA}} + \underbrace{12 \cdot \tfrac{1}{2}I_p\omega^2}_{\text{MOMENTO INERZIA PALETTE}}\Big) - \overbrace{Mgh}^{E_{p\,INIZIO}} = -273{,}71\ J$$

Questo lavoro è dovuto all'attrito.

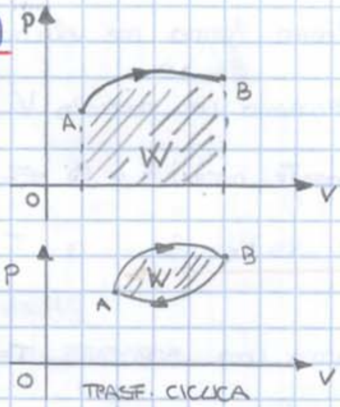
$$\left[|W_{ad}| = Q = mc\,(t_2 - t_1)\right] \Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{Q}{mc} = 0{,}07\,°C$$

- TRASFORMAZIONE NEI GAS:

$$\left[W = \int_A^B P\,dV \right]$$ LAVORO TRASF. GAS

- Possiamo calcolare lavoro per trasf. REVERSIBILI $P_{gas} = P_{ambiente}$, uso solo stati di equilibrio.
- es: $P_{ambiente} = cost$ $W = P_{amb}(V_B - V_A)$ (isobara)
- se $V = cost$ (ISOCORA) $W = 0$ perché $dV = 0$.

$$W = \int_A^B P\,dV$$ TRASF. APERTA



- Q nei GAS:

può essere determinato se è noto il processo di Trasf.

Possiamo definire il calore specifico solo se posso legarlo ad un eq. di STATO

$$\left[\begin{array}{l} dQ = m\,c_V\,dT \quad (\text{TRASF. ISOCORA } V = cost) \\ dQ = m\,c_P\,dT \quad (\text{TRASF. ISOBARA } P = cost) \end{array} \right] \qquad \left[\begin{array}{l} c_V = \frac{1}{m}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_V \\ c_P = \frac{1}{m}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_P \end{array} \right] \quad c_P > c_V$$

$\hookrightarrow W = 0$

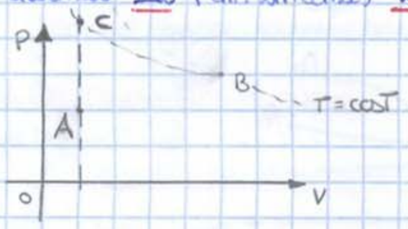
- Esperimento di Joule (espansione libera di un gas)

$W = 0$ (pareti rigide) percorso IRREVERSIBILE

Il gas si espande e la $T° = cost$.

$$[W = 0,\ Q = 0 \Longrightarrow \Delta U = 0]$$ V e P sono state modificate.

Quindi ΔU (en. interna) varia solo con $T°$ (vale solo per gas IDEALI). $U = U(T)$.



$$\Delta U = U_B - U_A = \underbrace{(U_B - U_C)}_{\substack{=0\ T=cost \\ U_B = U_C}} + \underbrace{(U_C - U_A)}_{\substack{\text{ISOCORA } W=0 \\ V = cost}} = U_C - U_A$$

quindi $[\Delta U = Q]$

$$dQ = m\,c_V\,dT \rightarrow dQ = m\int_{T_A}^{T_C} c_V\,dT \Longrightarrow \left[\Delta U = m\int_{T_A}^{T_B} c_V\,dT \right]$$ SOLO SE ISOCORA

da cui: $\left[c_V = \frac{1}{m}\frac{\Delta U}{dT} \right]$ $V = cost$

- 1° Princ. Termodinamica (gas IDEALI) $\left[dQ = \overbrace{m\,c_V\,dT}^{dU} + dW \right]$ essendo $(Q - W = \Delta U)$

se la Trasf. REVERSIBILE $\left[dQ = m\,c_V\,dT + p\,dV \right]$ perché negli stati di equilibrio

$P = P_{gas} = P_{ambiente}$.

2) Trasf. ISOTERMICE $\Delta U = 0 \rightarrow Q = W$ $(T = cost)$

$pV = cost$ processo REVERSIBILE

volume FINALE

$$\left[W_{AB} = (Q) = \int_A^B p\,dV = \int_A^B mRT \frac{dV}{V} = mRT \int_A^B \frac{dV}{V} = mRT \log\left(\frac{V_B}{V_A}\right)\right]$$

$$PV = mRT \rightarrow P = \frac{mRT}{V}$$

•) Quindi per una Trasf GENERICA usiamo $Q - W = \Delta U$

•) Se inoltre è REVERSIBILE posso usare l'eq. di stato inoltre $W = p\,dV$

•) Per Trasf. CICLICHE $W = Q$:

$$\begin{cases} \text{se } W > 0 & \text{ciclo termico (il sistema assorbe } Q \text{ e produce } W) \quad Q > 0 \\ \text{se } W < 0 & \text{ciclo frigorifero (il sistema cede } Q \text{ e subisce } W) \quad Q < 0 \end{cases}$$

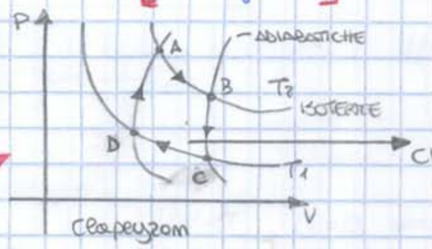
• RENDIMENTO DI UN CICLO TERMICO $(W > 0)$:

è negativo per convenzione.

$$\left[\eta = \frac{W_{TOT}}{Q_{ASSORB.}} = \frac{Q_{ASS} + Q_{CEDUTO}}{Q_{ASS}} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}\right]$$

Lavoro prodotto con Q ASSORBITO.

Inoltre $[0 \leq \eta < 1]$ quindi $Q_C \neq 0$ sempre



TRASF. CICLICA

$T_2 > T_1$

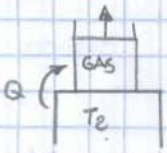
6/06/2013 25° lezione

• CICLO DI CARNOT :

$$\begin{cases} Q_A = \text{assorbito} \\ Q_B = \text{ceduto} \end{cases}$$

- TRATTO (AB)

ISOTERMA



$$\left[Q_A = W_{AB} = mRT_2 \cdot \log\left(\frac{V_B}{V_A}\right)\right]$$ viene assorbito dal gas che si espande

- TRATTO (BC)

$Q = 0$

$$\begin{cases} T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1} & \text{ADIABATICA} \\ [W_{BC} = -\Delta U_{BC} = -mC_V(T_1 - T_2) = mC_V(T_2 - T_1) > 0] \end{cases}$$

$W > 0$

GAS

V aumenta ancora.

~~TRATTO~~ - TRATTO (CD) ISOTERMO

$$\left[Q_C = W_{CD} = mRT_1 \log\left(\frac{V_D}{V_C}\right) < 0\right]$$ ceduto, il V diminuisce

- TRATTO (DA) ADIABATICA

$$[T_1 V_D^{\gamma-1} = T_2 V_A^{\gamma-1}] \qquad [W_{DA} = -\Delta U_{DA} = -mC_V(T_2 - T_1) < 0 = -W_{BC}]$$ V diminuisce ancora.