



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1395A -

ANNO: 2015

# A P P U N T I

STUDENTE: Bono

MATERIA: Fisica II + Eserc. Prof.Lavagno

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

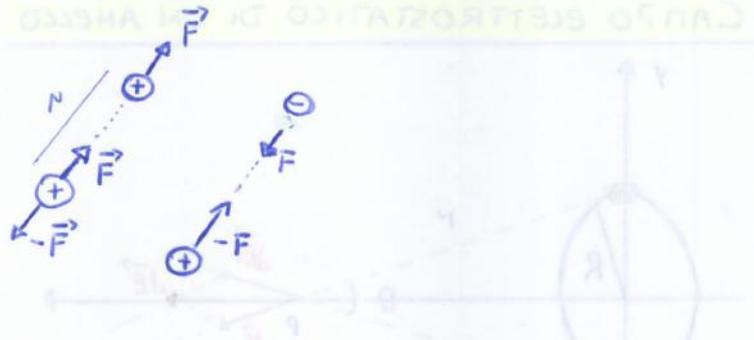
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

- $\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B}$  (F. LORENTZ SU CARICA PUNTFORTE)
- $\vec{F}_B = i \int d\vec{s}' \times \vec{B}$  (F. LORENTZ SU FILO PERCORSO DA CORRENTE)
  - $F_{B \text{ filo chiuso}} = i \oint d\vec{s}' \times \vec{B} = 0$
- $\vec{M} = \vec{N} \times \vec{F}_B$
- $\vec{\mu} = \lambda \sum \vec{U}_N$  (MOM. DIPOLO MAGNETICO) }  $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$
- $U(\theta) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$  (EN. POTENZIALE)
- $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int \frac{d\vec{s}' \times \vec{U}_R}{r^2}$  (CAMPO MAGNETICO GENERATO DA CORRENTE)
- $\vec{B}_{\text{BIOT SAVART}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}$  (LEGGE DI BIOT-SAVART)
- $\vec{B}_{\text{SPIRA AL CENTRO}} = \frac{\mu_0 i}{2R}$ 
  - $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \vec{U}_N d\Sigma = 0$  (FLOSSO CAMPO  $\vec{B}$ )
- $\vec{B}_{\text{SOLENOIDE}} = \mu_0 n i$ 
  - $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}' = \mu_0 i_{\text{TOT}}$  (T. DI AMPERE)
- $|\vec{B}_{12}| = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi a}$
- $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$  (FARADAY-LENZ) •  $i_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R}$  (CORRENTE INDOTTA)
- $\Phi_B = L i \Rightarrow \mathcal{E}_i = -L \frac{di(t)}{dt}$
- $i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} [1 - e^{-t/\tau_L}]$  (CARICA) •  $i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} [e^{-t/\tau_L}]$  (SCARICA)
- $W_{\text{indotti}} = \frac{1}{2} L i^2(t)$  (LAVORO INDOTTORE) •  $U_L = \frac{1}{2} L i^2(t)$
- $\mu_{\text{em}} = \frac{B^2}{2\mu_0}$  (DENSITA' ENERGIA CAMPO MAGNETICO)
- $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}' = \mu_0 i_c + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$  (LEGGE DI AMPERE-MAXWELL)
- |  |   |                     |
|--|---|---------------------|
| • $\oint \vec{E} \cdot \vec{U}_N d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0}$ | • $\oint \vec{B} \cdot \vec{U}_N d\Sigma = 0$                                       | } EQUAZIONI MAXWELL |
| • $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}' = -\frac{d\Phi_B}{dt}$          | • $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}' = \mu_0 i_c + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ |                     |
- $\vec{F}_{\text{em}} = q [\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]$  (F. ELETTROMAGNETICA) •  $\mu_{\text{em}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$  (DENSITA' CAMPO ELETTROMAGN)

## FORZA ELETTROSTATICA

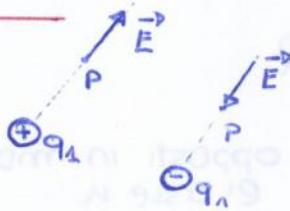
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}$$



- Se  $q$  e  $q_0$  hanno lo stesso segno  $qq_0 > 0$  e la forza ha lo stesso verso  $\Rightarrow$  **REPULSIVA**
- Se  $q$  e  $q_0$  hanno versi **OPPOSTI** la forza è **ATTRATTIVA**

## CAMPO ELETTRICO

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$



- il campo elettrostatico prodotto in un punto  $P$  è definito come la forza elettrostatica risultante  $\vec{F}$  che agisce su una carica di prova  $q_0$  divisa per la stessa carica.

### CAMPO ELETTRICO PRODOTTO DA UNA C. PUNTIFORME

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{u}$$

- Se ho **più cariche** vale la sovrapposizione degli effetti

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i$$

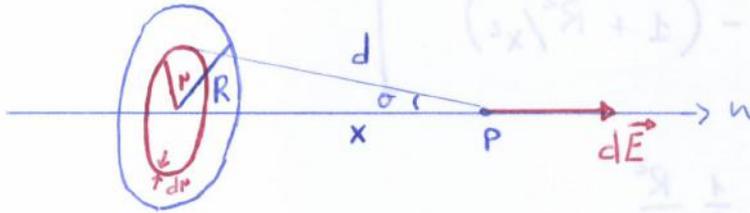
### CAMPO ELETTRICO PRODOTTO DA UNA DISTR. CONTINUA

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \vec{u}$$



## CAMPO ELETTRICO DISCO CARICO



• DENSITA' SUPERFICIALE DI CARICA

$$\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$$

$$d^2 = N^2 + x^2$$

• Ciascun elemento di  $d\Sigma$  ha una carica

$$dq = \sigma d\Sigma$$

• Isoliamo idealmente una conica circolare di carica compresa tra  $N$  ed  $(N+dN)$ , assimilabile ad un anello di superficie

$$d\Sigma = \pi(N+dN)^2 - \pi N^2 = 2\pi N dN$$

\* TRASCURO I TERMINI  $dN^2$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{dq}{d^2} \cos\theta \vec{U}_x$$

SOSTITUISCO

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{\sigma d\Sigma}{(N^2+x^2)} \cos\theta \vec{U}_x$$

Adesso sostituisco  $d\Sigma = 2\pi N dN$  e  $\cos\theta = \frac{x}{d}$  e  $d = \sqrt{N^2+x^2}$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{\sigma 2\pi N dN}{(N^2+x^2)} \frac{x}{(N^2+x^2)^{1/2}}$$

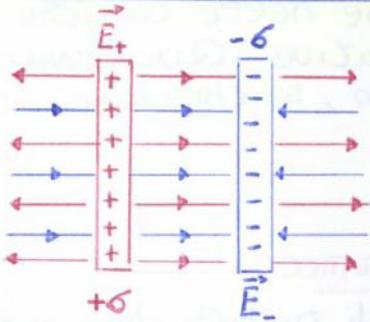
$$= \frac{\sigma 2\pi x}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{N dN}{(N^2+x^2)^{3/2}} \vec{U}_x = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left[ \frac{-1}{\sqrt{N^2+x^2}} \right]_0^R$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} \right] \vec{U}_x$$

quindi

$$\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left( 1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2+R^2}} \right)$$

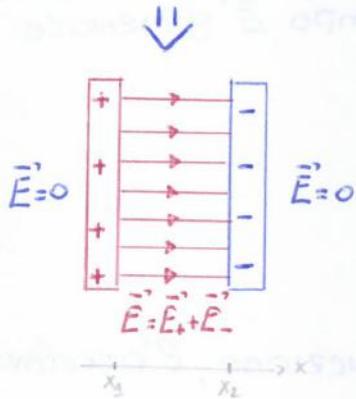
**CAMPO ELETTROST. DI 2 PIANI INDEF. CARICHI**



$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

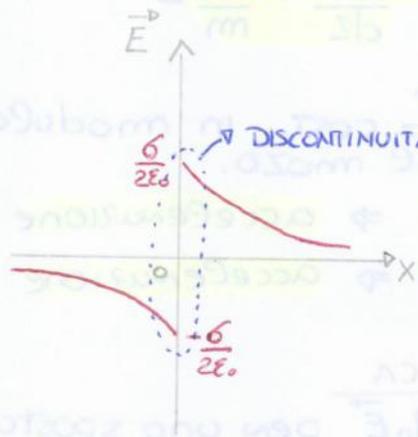
$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

I campi si sommano nella regione tra i 2 piani e si annullano all'esterno



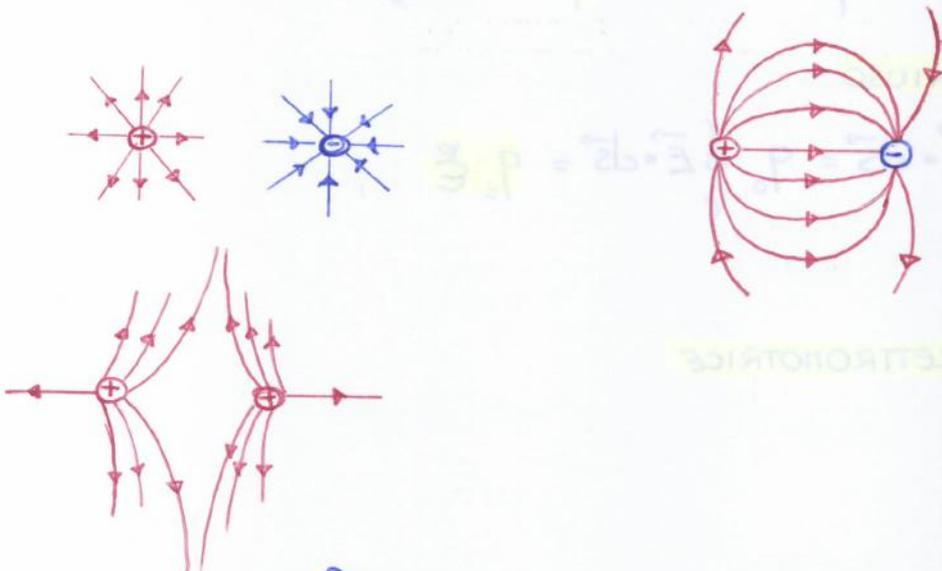
$$[x_1 < x < x_2]$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x = \vec{E}_p$$



**LINEE DI FORZA CAMPO ELETTROSTATICO**

La presenza di un insieme di cariche modifica lo spazio circostante. Per rappresentare questa modifica si ricorre al concetto di linee di forza



Una linea di <sup>forza</sup> campo in ogni suo punto è tangente al campo elettrico in quel punto

## POTENZIALE ELETTROSTATICO

Il campo elettrostatico è **CONSERVATIVO**

$$W(\ell_1) = W(\ell_2) = \dots = W(\ell_n)$$

Non dipendendo dal percorso seguito, l'integrale  $\int \vec{E} \cdot d\vec{s}$  può essere espresso come differenza di valore di una funzione delle coordinate chiamata **POTENZIALE ELETTROSTATICO**

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$W_{AB} = -q_0 (V_B - V_A) = -q_0 \Delta V$$

Cioè il lavoro svolto dalla forza elettrostatica per portare  $q_0$  da A a B è dato dall'opposto del prodotto di  $q_0$  per la diff. di potenziale  $(V_B - V_A)$  tra punto di arrivo e di partenza.

È noto che ad ogni forza conservativa è associata una determinata **ENERGIA POTENZIALE** e che il lavoro di questa forza è esprimibile come la variazione negativa di questa energia potenziale

$$W_{AB} = - (U_B - U_A)$$

Per cui

$$-\Delta U = -q_0 \Delta V$$

$$\Delta U = q_0 \Delta V$$

Tornando al **PERCORSO CHIUSO**

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

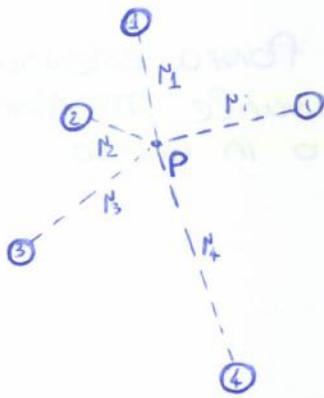
$$W_{AB} = -q_0 \Delta V$$

$$W_{AB} = q_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -q_0 \Delta V$$

se il percorso è chiuso  $A=B$

$$W_{AB} = 0 \Rightarrow V_A = V_B \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

## POTENZIALE PRODOTTO DA UN SIST. DISCRETO



$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

## POTENZIALE DI UNA DISTRIBUZIONE CONTINUA



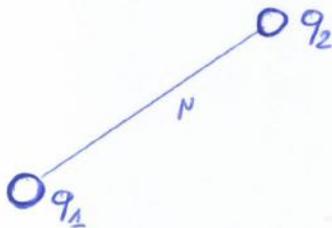
$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

•  $V$  è un campo scalare

$$\cdot [V = \frac{J}{C}] \quad [E = \frac{N}{C} = \frac{Nm}{Cm} = \frac{J}{Cm} = \frac{V}{m}]$$

• il segno del potenziale è uguale a quello delle cariche

## ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA



Se le cariche sono dello stesso segno, e quindi si respingono, l'energia potenziale elettrostatica  $V(r)$  è positiva e quindi anche  $W > 0$ . Infatti la forza repulsiva tende ad allontanare le cariche. In questo processo di allontanamento l'energia potenziale del sistema diminuisce e viene fornito lavoro all'esterno.

Se le cariche sono di segno opposto, e quindi si attraggono la forza attrattiva nell'allontanamento compie  $W < 0$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{N} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 N} \int dl = \frac{\lambda 2\pi R}{4\pi\epsilon_0 N}$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2+x^2}}$$

il potenziale è massimo nel centro 0 e decresce simmetricamente rispetto al piano contenente l'anello all'aumentare della distanza di  $r$  dal centro

Se  $n \gg R$

$$V(n) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}$$

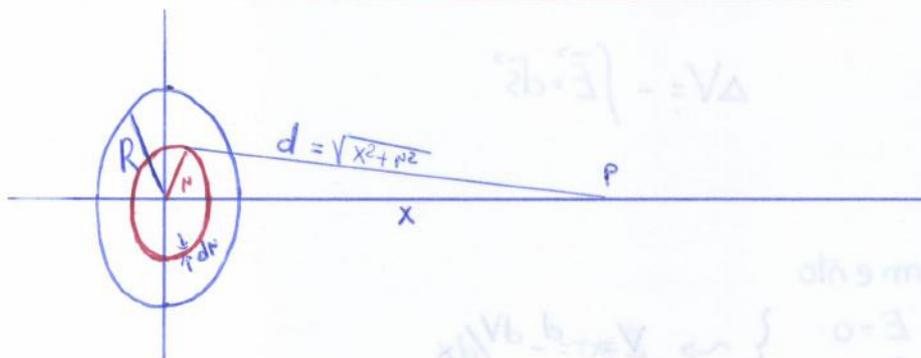
[NOTA: CAMPO E POTENZIALE]

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

$$\vec{E}(n) = -\frac{dV}{dn} = \frac{qn}{4\pi\epsilon_0 (R^2+x^2)^{3/2}}$$



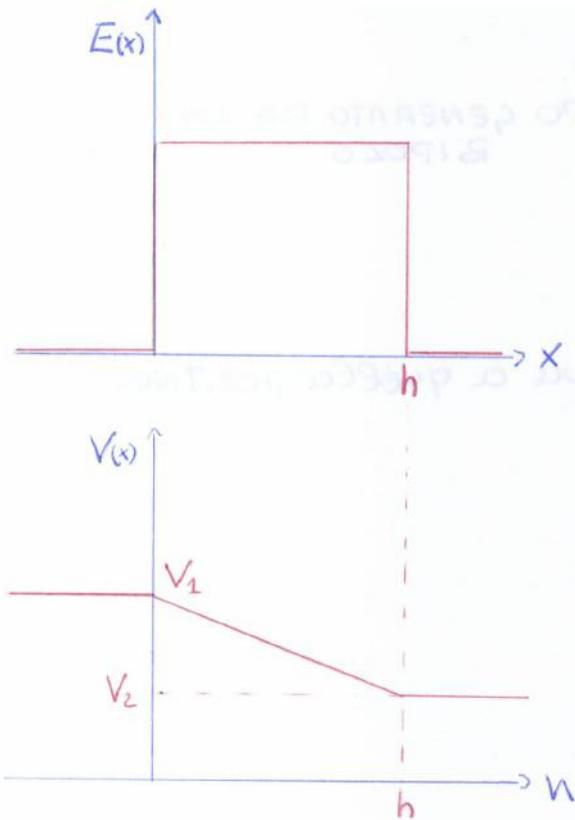
## POTENZIALE DISCO CARICO



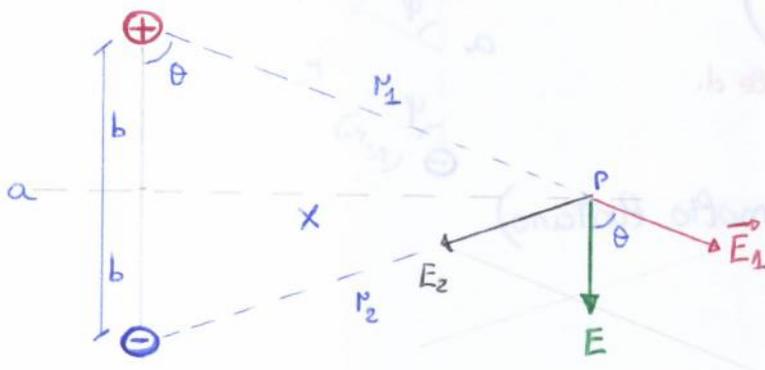
DENSITÀ SUPERFICIALE  $\sigma = q / \pi R^2$

$$dq = \sigma d\Sigma \quad d\Sigma = 2\pi r dr$$

$$dV(n) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{d} = \frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0 (x^2+r^2)^{3/2}}$$



## DIPOLO ELETTRICO



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

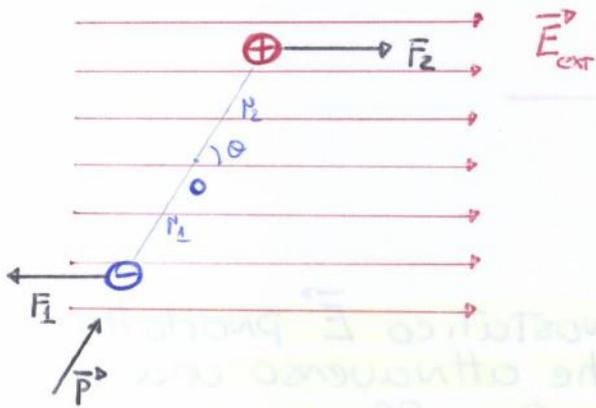
dove

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

$$r_1 = r_2 = r$$

$$\vec{E} = -2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cos\theta \vec{u}_y$$

$$\cos\theta = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{x^2 + b^2}}$$



$$\vec{F}_1 = -q\vec{E}$$

$$\vec{F}_2 = q\vec{E}$$

$\vec{F}_1$  ed  $\vec{F}_2$  costituiscono una coppia ed hanno risultante non nulla e **MOMENTO MECCANICO diverso da zero**

$$\vec{M} = \vec{N}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{N}_2 \times \vec{F}_2 = (N_2 - N_1) \times \vec{F}_2 = qa \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Tende a riportare  $\vec{p}$  // al campo  $\vec{E}$   
 Il lavoro del momento meccanico  $\vec{M} = -pE \sin\theta \vec{u}_z$   
 per ruotare il dipolo

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} M d\theta = -pE \int_{\theta_0}^{\theta} \sin\theta d\theta = pE \cos\theta - pE \cos\theta_0$$

Siccome  $W = -\Delta U = -[U(\theta) - U(\theta_0)]$

Avrà che

$$U(\theta) = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$



$$\Phi = \oint E(N) \underbrace{\vec{u}_N \cdot \vec{u}_N}_{\parallel \Rightarrow \Delta} d\Sigma = E(N) \oint d\Sigma = E(N) 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

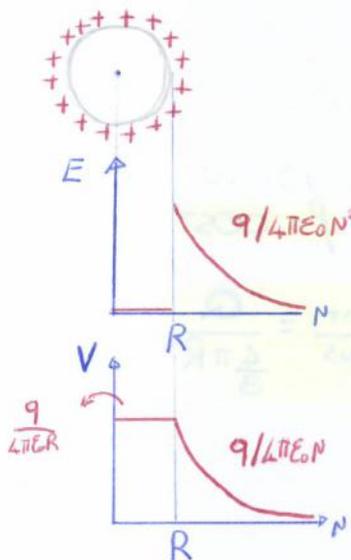
$$\Rightarrow E(N) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 N^2}$$

dove  $q = \sigma 4\pi R^2$

$$E(N) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 N^2}$$

[NOTA]

( $N < R$ ) non ho carica  $\Rightarrow E = 0 \Rightarrow$  Distribuzione superficiale



$$V = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 N} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 N}$$

$$V(R) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \Rightarrow \text{SUP. EQUIPOTENZIALE}$$

CAMPO ELETTROSTATICO PRODOTTO DA UNA SFERA UNIF. CARICA



Una carica  $q$  è distribuita con densità volumetrica  $\rho$  in una sfera di raggio  $R$ . Calcolare il campo nei punti interni ed esterni della sfera.

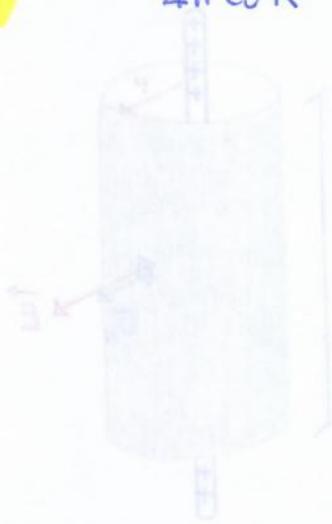
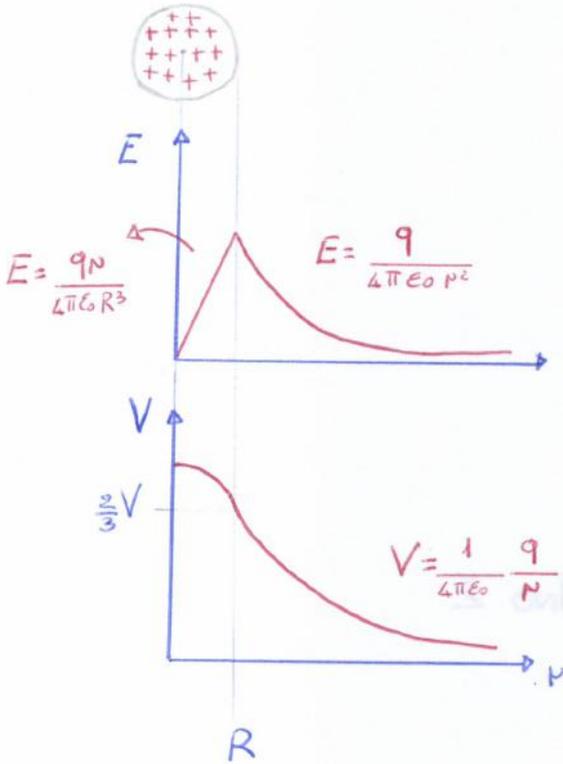
$$\underline{P > R} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_{TOT}}{N^2}$$

con  $q_{TOT} = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$

$r < R$

$$\Delta V = V(r) - V(R) = - \int_R^r E_N dN'$$

$$V(r) = V(R) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_R^r N' dN' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left( \frac{r^2 - R^2}{2} \right)$$



$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{\Sigma} = E \cdot \Sigma = E \cdot \pi r^2$$

La carica contenuta nel cilindro

$$q = \int \rho dV = \rho \pi r^2 h = \lambda h$$

$$\lambda = \frac{q}{h} = \rho \pi r^2$$

Quindi

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{\epsilon_0}$$

Per  $r > R$  una carica superiore cilindrica costante di massa  $R$  ed  $h$  con  $r > R$

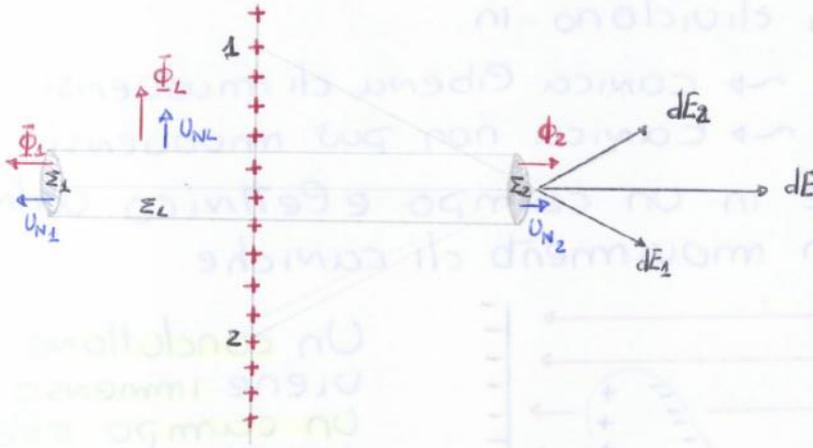
$$V(r) - V(R) = - \int_R^r E dr = - \int_R^r \frac{\lambda}{\epsilon_0} dr = - \frac{\lambda}{\epsilon_0} (r - R)$$

Rispetto al bordo  $R$

( $r > R$ )

$$V(r) - V(R) = - \frac{\lambda}{\epsilon_0} (r - R)$$

# CAMPO ELETTROSTATICO DI UN PIANO INDEFINITO UNIFORME CARICO



$$\Phi_{TOT} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

$$= \int_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot \vec{u}_N d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot \vec{u}_N d\Sigma + \int_{\Sigma_L} \vec{E} \cdot \vec{u}_N d\Sigma$$

NON HO FLOCCO USCENTE IN QUESTA SUP.

$$= E\Sigma_1 + E\Sigma_2 = 2E\Sigma$$

$$\Phi_{TOT} = 2E\Sigma = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0}$$

$$Q_{INT} = \sigma \Sigma$$

quindi

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



POTENZIALE

$$V(x_2) - V(x_1) = - \int_{x_1}^{x_2} E dx = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (x_2 - x_1)$$

il campo quindi

- $= 0$  all'INTERNO
- $= 0$  SULLA SUPERFICIE
- $\neq 0$  POCO DOPO LA SUPERFICIE

Per quanto riguarda il POTENZIALE, è COSTANTE SU tutta la sup. del conduttore  $\rightarrow$  SUP. EQUIPOTENZIALE

## DISTRIBUZIONE DI CARICA SUI CONDUTTORI

Si è detto che  $\sigma$  è una funzione di  $(x, y, z)$  cioè NON È COSTANTE DAPPERTUTTO.

Se abbiamo una sfera e  $\sigma$  sarà costante ovunque sulla superficie, ma se si ha una superficie qualunque?

Prendo 2 sfere conduttrici A e B collegate da un filo conduttore lungo abbastanza che non ci sia interferenza tra A e B. Questo filo pone  $V_A = V_B$  perché rende le due sfere un UNICO CONDUTTORE IN EQUILIBRIO



$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = V_A = V_B = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$q_1/R_1 = q_2/R_2 > 1$$

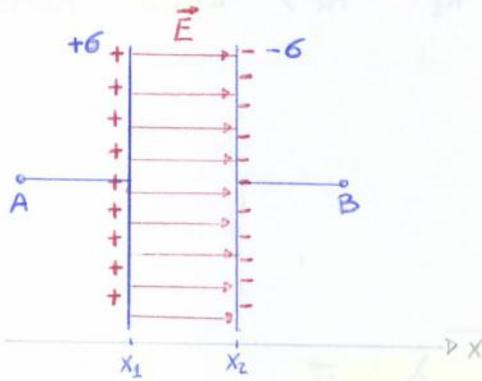
$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Sia  $Q = q_1 + q_2$  avremo

$$q_1 = (Q - q_1) \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow q_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) = Q \frac{R_1}{R_2}$$

$$\Rightarrow q_1 = Q \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

## CAPACITÀ CONDENSATORE PIANO



Questa situazione si genera se esiste una D.D.P. tra le due piastre  
 $V_A \neq V_B$

Si è già precedentemente visto  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_N = \text{cost}$

$$\Delta V = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} \Rightarrow V_2 - V_1 = - \frac{\sigma}{\epsilon_0} (x_2 - x_1) \Rightarrow \Delta V = - \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

### CAPACITÀ

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} \quad [F] = [C/V]$$

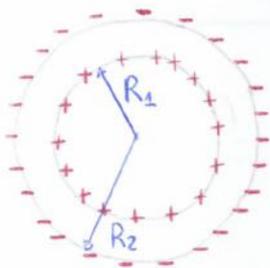
$$|\Delta V| = - \frac{\sigma}{\epsilon_0} d \frac{Q}{\Sigma} = \frac{Q}{\epsilon_0 \Sigma} d$$

Da cui

$$C_{\text{PIANO}} = \frac{Q}{\frac{Q}{\epsilon_0 \Sigma} d} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{d}$$

Dipende solo dalle caratteristiche geometriche del condensatore

## CAPACITÀ CONDENSATORE SFERICO



$$E(N < R_1) = E(N > R_2) = 0$$

Quanto vale  $E(R_1 < N < R_2)$ ?

da sfera ② non genera campo al suo interno  $\sim$  CONDUTTORE CAVO, quindi il campo è generato solo da ①

$$E_r(N) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{N^2}$$

$$V(N) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{N}$$

$$V_C - V_A = V_C - V_B + V_B - V_A = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

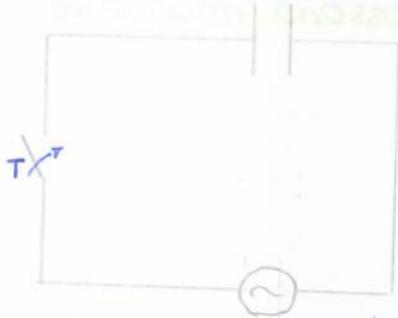
Da cui

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow$$

$$C_{serie} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

## ENERGIA CAMPO ELETTROSTATICO

Per caricare le armature di un condensatore si deve compiere un lavoro. Quanto vale in termini energetici questo lavoro?



Finché T è aperto il condensatore è scarico, quando T si chiude, circola corrente che va a caricare il condensatore fino ad accumulare una carica Q.

Ogni istante la carica sul condensatore passa da q a q + dq

Definiamo quindi

$$dW = \Delta V dq = \frac{q}{C} dq$$

↑ con il passare del tempo in quanto  $V(q) = q/C$

il lavoro complessivo

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$$

Ricordando  $Q = C \Delta V$  ottengo anche

$$W = \frac{1}{2} C \Delta V^2$$


---


$$W = \frac{1}{2} Q \Delta V$$

## LAVORO PER CARICARE UN COND. PIANO

$$W = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$$

$$C_{PIANO} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{d} \quad |\Delta V| = E d$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \Sigma}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 (\Sigma d) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \overset{\text{VOLUME}}{\Sigma}$$

IL CAMPO NEL DIELETTICO

$$E_k = \frac{\sigma_0}{K \epsilon_0}$$

Quantifichiamo la VARIAZIONE DEL CAMPO

$$E_0 - E_k = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_0}{K \epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \left( \frac{K-1}{K} \right)$$

SUSCETTIVITÀ DEL DIELETTICO  $\chi = K-1$

Quindi

$$E_0 - E_k = \frac{\sigma_0 \chi}{\epsilon_0 (1+\chi)}$$

Per quanto riguarda la CAPACITÀ

$$\Delta V_k = E_k h = \frac{\sigma_0}{K \epsilon_0} h = \frac{q_0}{\sum K \epsilon_0} h$$

$$C_k = \frac{q_0}{\Delta V_k} = \frac{\sum K \epsilon_0}{h} = K C_0$$

Visto che  $K > 1$   $C_k > C_0$  ecco perché si mette il dielettrico

COST. ASSOLUTA MEZZO  $\epsilon = K \epsilon_0$

Quindi

$$C_k = \frac{\sum \epsilon}{h}$$

l'energia per unità di volume  $u_0 = \frac{U_0}{\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$

$$u_k = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

Posso descrivere il teorema di Gauss nel mezzo

$$\text{Vuoto} \left\{ \begin{array}{l} \oint \vec{E} \cdot \vec{n} d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{array} \right. \quad (\text{I MAXWELL}) \text{ o } (\text{GAUSS DIFFERENZIALE})$$

$$\text{Mezzo} \left\{ \begin{array}{l} \oint \vec{D} \cdot \vec{n} d\Sigma = q \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \end{array} \right. \quad \text{CARICA CONTINUA NEL CONDUTTORE}$$

[NOTA] Nel passaggio dal vuoto al mezzo basta sostituire  $\epsilon_0$  con  $\epsilon$

### CONDUZIONE ELETTRICA

Nei metalli gli unici portatori di carica sono gli elettroni il numero di elettroni per unità di volume coincide con il numero di atomi per unità di volume

$$n = \frac{N_A \rho}{A} = 8.49 \cdot 10^{28} \left[ \frac{\text{elettroni}}{\text{m}^3} \right]$$

Il moto di questi elettroni è completamente disordinato per cui è lecito dire che in un volume piccolo  $\tau$  la velocità media di questi elettroni è nulla

$$\vec{V}_{\text{m}} = \frac{1}{N} \sum_i \vec{v}_i = 0$$

Ciò si traduce dicendo che non esiste una direzione di moto preferenziale per gli elettroni.

Se mettiamo a contatto due conduttori con due diversi potenziali  $V_1 < V_2$  si ha un movimento di elettroni da  $C_1$  a  $C_2$  finché all'equilibrio  $C_1$  e  $C_2$  sono allo stesso  $V = V_1 = V_2$ . Questo moto di elettroni è noto come CORRENTE ELETTRICA.



In questo caso però questa corrente dura molto poco, ecco perché è necessario un dispositivo che mantenga il  $\Delta V$  in modo che il flusso di elettroni duri nel tempo

In particolare se  $Z \perp a_s$

$$L = \rho \Sigma \quad \rho = \frac{L}{\Sigma} \quad \left[ \frac{A}{m^2} \right]$$

La densità di corrente è la corrente che attraversa l'unità di superficie  $\perp$  alla direzione del moto delle cariche

In CONDIZIONE DI STAZIONARIETÀ l'intensità di corrente è costante all'interno ogni sezione

### LEGGI DI OHM CONDIZIONE ELETTRICA

In un conduttore sottoposto ad una D.D.P. si stabilisce in regime stazionario

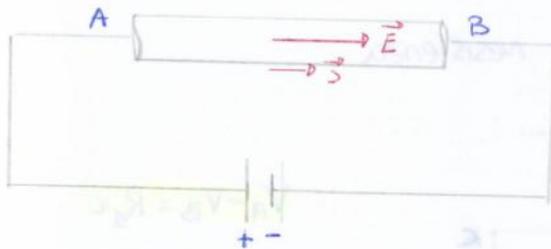
$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

CONDUTTIVITÀ ELETTRICA

che si può descrivere in questo modo

$$\vec{E} = \rho \vec{J} \quad \text{dove } \rho = \frac{1}{\sigma} \quad \text{RESISTIVITÀ}$$

Applichiamo ad un conduttore metallico di lunghezza  $h$  e sezione  $\Sigma$  al quale è applicata una D.D.P.



$$E = \rho J = \frac{\rho}{\Sigma} I \quad V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = Eh \Rightarrow V = \frac{\rho h}{\Sigma} I$$

RESISTENZA CONDUTTORE  $R = \frac{\rho h}{\Sigma}$

Riscriviamo LEGGE OHM COND. METALLICI  $V = Ri$

### Effetti termici

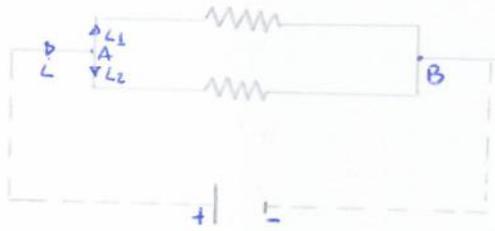
La resistività è una grandezza che dipende dalla temperatura

$$\rho = \rho_{20} (1 + \alpha \Delta T)$$

RESISTIVITÀ A 20°C

L'andamento lineare è abbastanza corretto per alcuni materiali è un'approssimazione per altri. Esistono materiali che hanno  $R=0$  per  $T \rightarrow 0 K \Rightarrow$  SUPERCONDUTTORI

## Parallelo



$$i = i_1 + i_2$$

$$V = V_A - V_B = R_1 i_1 = R_2 i_2$$

$$i = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

da cui

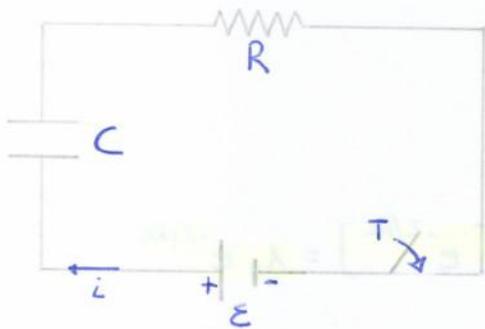
$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

La **Potenza**

$$P = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 = R_1 \frac{V^2}{R_1^2} + R_2 \frac{V^2}{R_2^2} = V^2 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{V^2}{R_{eq}}$$

## CARICA CONDENSATORE



A  $t=0$  si chiude  $T$ , inizia a fluire la corrente, e la carica andrà a depositarsi sulle armature

$$e.1) \begin{cases} L_0 = \frac{\epsilon}{R} \\ q = 0 \end{cases} \quad (\text{il condensatore non ha } q \text{ in eccesso})$$

$t > 0$

Man mano che  $C$  si carica aumenta le sue armature si crea una D.D.P.  $V = q/C$ . Istante per istante vale

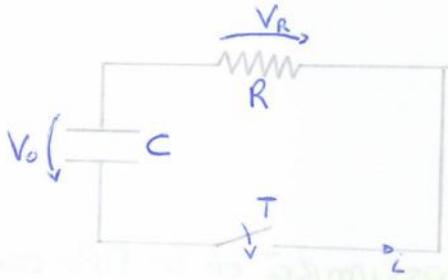
$$\epsilon = \frac{q(t)}{C} + R i(t)$$

$$\epsilon - \frac{q(t)}{C} - R \frac{dq(t)}{dt} = 0$$

Risoluiamo l'eq differenziale

$$\frac{dq}{dt} = \left( \epsilon - \frac{q}{C} \right) \frac{1}{R} = \frac{\epsilon C - q}{RC}$$

## SCARICA CONDENSATORE



$t=0$  (Condensatore carico)  
 chiudo T e inizia a circolare  $i$

$$\mathcal{E} = 0$$

$$V_0 = V_A - V_B$$

$$q_0 = C V_0$$

$t > 0$

$$-\frac{q(t)}{C} - R \frac{dq(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} q(t)$$

$$\frac{dq(t)}{q} = -\frac{1}{RC} dt$$

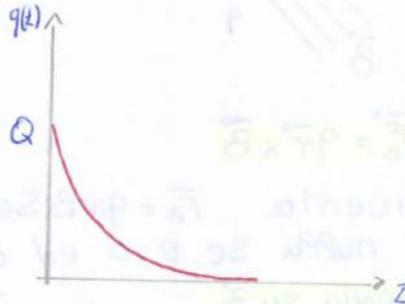
Integriamo ( $t=0, q=Q$ )

$$\int_a^q \frac{dq'}{q'} = \int_0^t -\frac{1}{RC} dt'$$

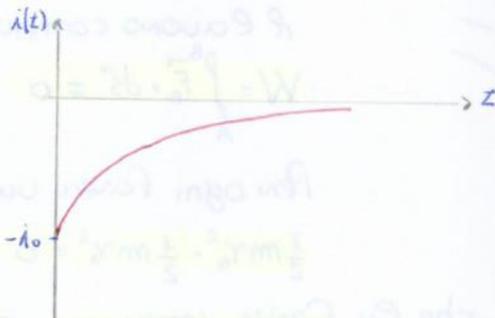
$$\ln\left(\frac{q(t)}{Q}\right) = -\frac{1}{RC} t$$

da cui

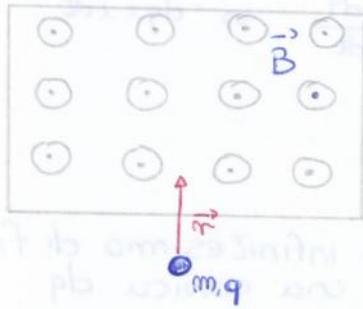
$$q(t) = Q e^{-t/RC}$$



$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\frac{Q}{RC} e^{-t/RC} = -i_0 e^{-t/RC}$$



Che moto compie una particella carica in un campo B!



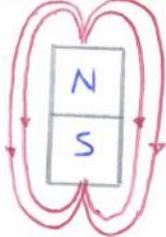
$r \perp B$

$F_c = qvrB = \frac{mv^2}{R}$

$R = \text{RAGGIO CURVATURA COST} = \frac{mv}{qB}$

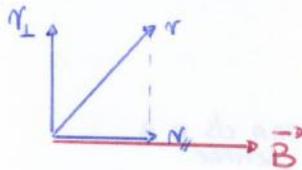
LA PARTICELLA COMPIE UN **MOTO CIRCOLARE UNIFORME!**

linee di campo



Le linee di campo vanno dal **POLO NORD** AL **SUD** o da cariche positive e negative

Si è visto che se  $r \perp B$  la traiettoria è **CIRCOLARE UNIFORME**, mettiamoci nel **caso più generale**



$\vec{v} = \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel}$

quindi la forza è descrivibile come

$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B} + q\vec{v}_{\parallel} \times \vec{B}$   
= 0

Da cui

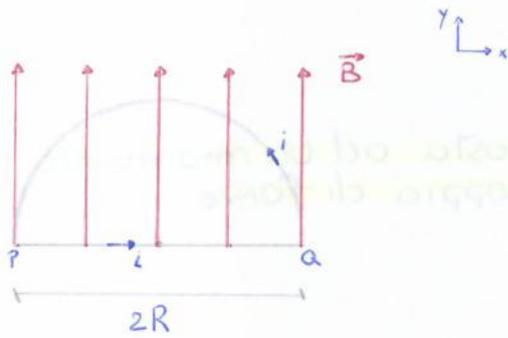
- In direzione  $\parallel \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = 0 \Rightarrow$  **MOTO RET. UNIFORME**
- In direzione  $\perp \vec{B} \Rightarrow$  **MOTO CIRC. UNIFORME**

La sovrapposizione dei 2 moti dà vita ad un **MOTO ELICOIDALE COST.**



$p = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin \theta}{qB}$

esempio



$$\vec{B} = B\vec{u}_y = \text{cost}$$

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_{RET} + \vec{F}_{SEMI}$$

$$\vec{F}_{RET} = i \int_P^a d\vec{s} \times \vec{B} = i 2R B (\vec{u}_x \times \vec{u}_y) = i 2R B \vec{u}_z$$

Punto  $\vec{z}$  verso  $\vec{B}$  secondo la rule dx  
 (USCENTE)  $\rightarrow$  POLICE  $\rightarrow$  CORRENTE  
 DITA  $\rightarrow$  CAMPO  $\vec{B}$

Pungo la semicirconferenza



$$\vec{F}_{SEMI} = i \int_P^a d\vec{s} \times \vec{B} = i \int ds B \sin\theta \quad |ds| = R d\theta$$

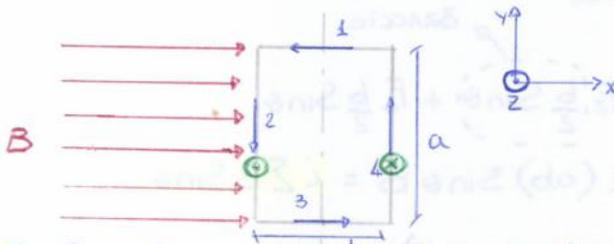
$$= -i BR \int_0^\pi \sin\theta d\theta \vec{u}_z$$

$$= -i BR [-\cos\theta]_0^\pi \vec{u}_z = -2i BR \text{ (entrante)}$$

$$\vec{F}_{TOT} = 2i BR - 2i BR = 0$$

MOMENTI MECCANICI

Inseriamo una spina in un campo magnetico



Calcoliamo la forza che agisce su di essa

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

In 1 e 3  $l \parallel B \Rightarrow F = i \int ds \times \vec{B} = 0$

In 2 è USCENTE e in 4 è ENTRANTE, ma le due forze sono uguali in modulo quindi  $\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_2 + \vec{F}_4 = 0$

$$\vec{F}_2 = i \int ds B \vec{u}_z = l a B \vec{u}_z$$

$$\vec{F}_4 = -l a B \vec{u}_z$$

I punti di applicazione però non sono uguali. Se la spina è rigida e libera di ruotare intorno ad un asse

Si è trovato un modo per convenire **EN ELETTRICA e MAGNETICA** in **MECCANICA**.

La spina infatti compie un lavoro

$$W = \int_0^\theta \tau d\theta' = \int_0^\theta \mu B \sin\theta' d\theta' = -\mu B (\cos\theta - 1)$$

Calcoliamo adesso il **lavoro esteso per ruotare la spina da  $\theta_0$  a  $\theta$**

$$W = -\int_{\theta_0}^\theta \mu B \sin\theta' d\theta' = \mu B (\cos\theta - \cos\theta_0)$$

Posso vedere ciò come una differenza di energia potenziale

$$W = -\Delta U$$

$$\mu B (\cos\theta_0 - \cos\theta) = -\Delta U$$

$$\Delta U = U(\theta) - U(\theta_0)$$

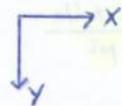
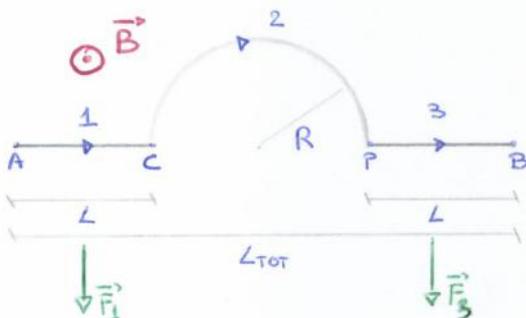
quindi ricavando che

$$U(\theta) = -\mu B \cos\theta = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

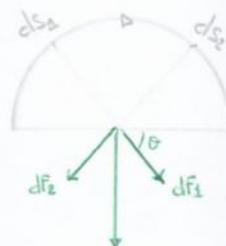
Se si hanno più avvolgimenti, quindi  $N$  spine

$$\vec{\mu} = N \cdot L \cdot \sum \vec{\mu}_N$$

ESERCIZIO



$$\vec{F}_1 = \vec{F}_3 = iLB \vec{u}_y$$



Per la forza sul tratto 2

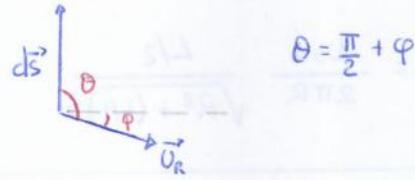
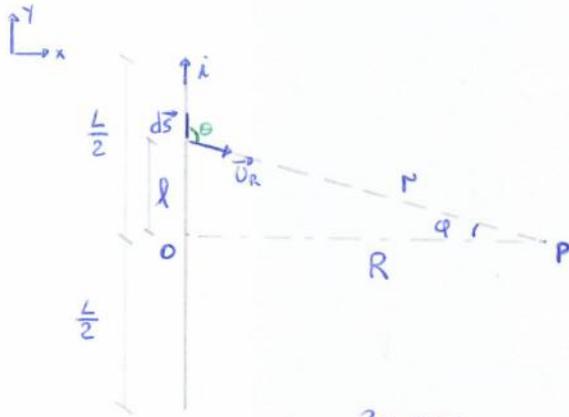
$$\vec{F}_2 = \int dF \sin\theta \vec{u}_y$$

↳ PROIETTO SU Y

$$= \int i ds B \sin\theta = \int_0^\pi i R B \sin\theta d\theta$$

↳ R dθ

## CAMPO MAGNETICO DI UN FILO PERCORSO DA $i$



PRODOTTO VETTORIALE

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int \frac{ds \sin\theta}{r^2} = \frac{2\mu_0}{4\pi} i \int_0^{L/2} \frac{ds \sin\theta}{r^2}$$

Sfruttiamo l'angolo  $\varphi$

$$\sin\theta = \cos\varphi$$

$$\left. \begin{aligned} r \cos\varphi &= R \\ r \sin\varphi &= l \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Tg } \varphi = \frac{l}{R} \rightarrow l = R \text{Tg } \varphi^*$$

$$ds = dl$$

quindi ottengo

$$B = \frac{2\mu_0}{4\pi} i \int_0^{L/2} \cos\varphi \cdot \left( \frac{\cos^2\varphi}{R^2} \right) dl$$

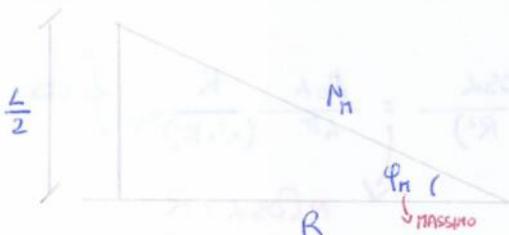
Cambio variabile

$$* dl = R \frac{d(\text{Tg } \varphi)}{d\varphi} d\varphi = R \frac{1}{\cos^2\varphi} d\varphi$$

Sostituisco

$$B = \frac{2\mu_0}{4\pi} i \int_0^{\varphi_{\text{max}}} \cos\varphi \frac{\cos^2\varphi}{R^2} \frac{R}{\cos^2\varphi} d\varphi$$

Troviamo e' estremo d'integrazione



$$\varphi_{\text{max}} = \frac{L/2}{R} = \frac{1}{\text{Sen } \varphi_{\text{max}}}$$

$$\text{Sin } \varphi_{\text{max}} = \frac{L/2}{\sqrt{R^2 + (L/2)^2}}$$

Quindi ottengo

$$B = \frac{\mu_0 i R}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

CASI PARTICOLARI

•  $x=0$  (centro spina)

$$B(x=0) = \frac{\mu_0 i}{2R}$$

•  $x \gg R$

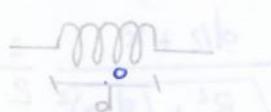
$$B(x \gg R) = \frac{\mu_0 i R^2}{2x^3}$$

CAMPO MAGNETICO SOLENOIDE DEFINITO

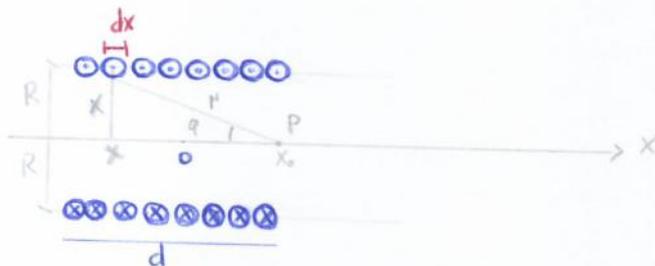
Un solenoide è composto da  $N$  spine, avvolte su un supporto rigido.

SPIRE PER UNITÀ DI LUNGHEZZA

$$n = \frac{N}{d}$$



Per il calcolo ci riferiamo all'asse



il campo di una singola spina sull'asse  $B(n) = \frac{\mu_0 i R^2}{2(n^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i R^2}{2N^3}$   
 Nella frazione  $dx$  avrò un certo num. di avvolgimenti

$(n dx) \rightarrow$  NUM DI SPIRE CONTENUTE IN  $dx$

il campo prodotto da  $dx$  sarà

$$dB = \frac{\mu_0 i R^2}{2N^3} n dx$$

$\swarrow$  CAMPO DI 1 SPIRA  
 $\searrow$  NUM. SPIRE

Definiamo la geometria

$$\left. \begin{aligned} (x_0 - x_1) &= R \cos \varphi \\ R &= N \sin \varphi \end{aligned} \right\} \rightarrow \tan \varphi = \frac{R}{(x_0 - x_1)} \rightarrow (x - x_0) = -R \cot \varphi$$

Cambiamo variabile

$$dx = -R \frac{d(\cot \varphi)}{d\varphi} d\varphi = \frac{R}{\sin^2 \varphi} d\varphi$$

**CASO PARTICOLARE**  $d \gg R \Rightarrow \frac{R}{d} \ll 1$  **SOLENOIDE INDEFINITO**

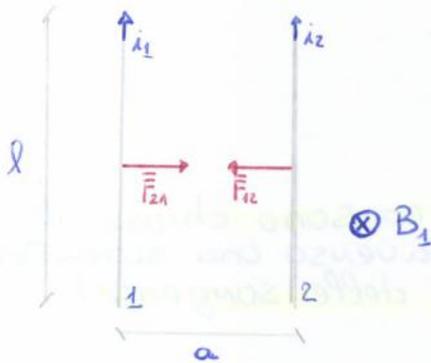
In questo caso il campo magnetico è costante

$$B = \mu_0 n I$$

**Proprietà**

- linee di campo come quelle generate da un magnete permanente
  - Campo interno = cost
  - Campo esterno = 0
- Analogo al condensatore

**FORZA TRA DUE FILI PERCORSI DA CORRENTE**



Si è scoperto empiricamente che i fili percorsi da corrente si deformano, in quanto su di essi agisce una forza. Tale forza è magnetica.

$$\vec{F} = I \int \vec{ds} \times \vec{B}$$

NON È UN CAMPO ESTERNO IN QUESTO CASO

Ogni filo infatti produce un campo

$$\vec{B}_{filo} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int d\vec{s} \times \vec{U}_0$$

Nelle ipotesi che i fili di cui ci occupiamo siano indefiniti ( $a \ll l$ ) si ha la **LEGGE DI BIOT-SAVART**

$$|B| = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

Calcoliamo la forza che 1 esercita su 2

$$dF_{12} = I ds_2 B_1 \quad (ds_2 \perp B_1)$$

$$F_{12} = I_2 l B_1$$

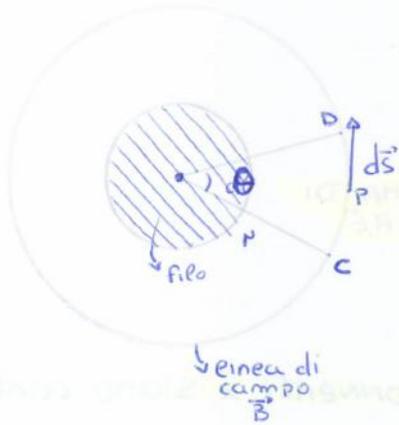
$$\frac{F_{12}}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

Analogamente per  $F_{21}$ .

Supponiamo invece adesso d'inventare una cella due correnti

## LEGGE (TEOREMA) DI AMPERE

Prendiamo un filo percorso da corrente



Nelle ipotesi che il filo sia indefinito con BIOT-SAVART

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

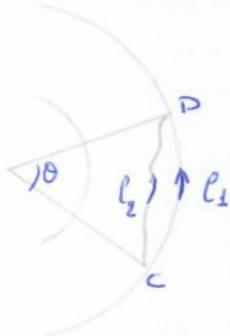
Concentriamoci sull'arco infinitesimo la cui tangente è  $d\vec{s}$  ( $\vec{B} \parallel d\vec{s}$ )

$$\vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\theta$$

Quello ottenuto è un risultato indipendente dalla posizione del punto P

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \theta$$

Anche qui quanto ottenuto non dipende né dalla posizione di P né dalla traiettoria seguita per arrivare da C a D



$$\int_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

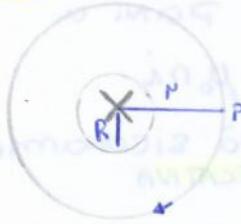
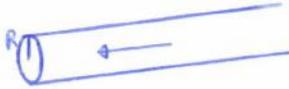
Quindi  $\int_C \vec{B} \cdot d\vec{s}$  NON DIPENDE DALLA TRAIETTORIA  $\gamma$ , MA SOLO DAI PUNTI DI ARRIVO E PARTENZA

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

Questo è vero a patto che la traiettoria non tocchi i fili percorsi da corrente. Nel caso abbiamo dei fili chiusi in  $\gamma$  si ottiene

## APPLICAZIONI TEOREMA DI AMPERE: FILO RETT. INDEFINITO

a) Calcoliamo il campo all'esterno del filo  $r > R$



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \vec{B} \oint ds = \mu_0 I_{TOT}$$

Da cui

$$B 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

BIOT-SAVART

b) Calcoliamo il campo all'interno del filo  $r < R$



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I'$$

commento nell'area racchiusa in  $\ell$

Da cui

$$B = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r}$$

Siamo in condizioni di stazionarietà quindi

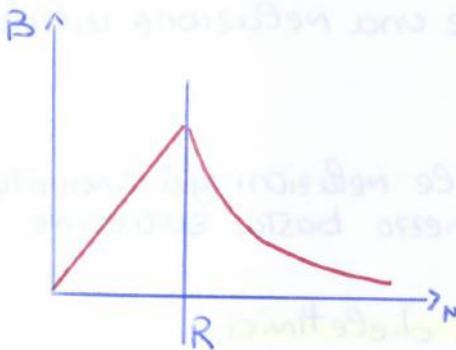
$$I_{TOT} \cdot \Sigma_{TOT} = I' \cdot \Sigma'$$

Da cui

$$\frac{I_{TOT}}{\pi R^2} = \frac{I'}{\pi r^2} \rightarrow I' = I_{TOT} \frac{r^2}{R^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I_{TOT} r^2}{2\pi r R^2} = \frac{\mu_0 I_{TOT} r}{2\pi R^2}$$

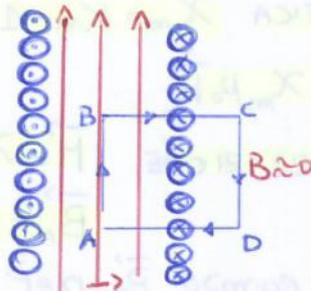
Riponto l'andamento



## SOLENOIDE RETTILINEO $\infty$

Proprietà

- $B_{INT} = \text{cost}$
- $B_{EXT} = 0$
- linee di campo interne  $\rightarrow$  RETTE



Calcoliamo il campo nel punto P scegliendo come linea per la circolazione un rettangolo contenente  $N_{AB}$  spine

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \int_A^B ds = B l_{AB}$$

$\int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$  (perpendicolare),  $\int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$  (perpendicolare),  $\int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$  (perpendicolare)

$$T. AMPERE \rightarrow B l_{AB} = \mu_0 I N_{AB} \rightarrow n = \frac{N}{l} \rightarrow B = \mu_0 n I$$

## E tornando ancora al solenoide

$$\vec{B} = \mu_0 n i + \mu_0 \chi_m n i$$

VALORE NEL VUOTO

CARAT. DEL MATERIALE

Si nota che  $\vec{B} \geq \vec{B}_0$  a seconda che  $\chi_m \geq 0$  da magnetizzazione nel mezzo e da attribuirsi a delle microcorrenti interne note come **CORRENTI AMPERIANE**.

I diversi materiali sono stati classificati a seconda del valore di  $\chi_m$

- MATERIALI DIAMAGNETICI**

$$\chi_m < -1 \rightarrow \chi_m < 0$$

- MATERIALI PARAMAGNETICI**

$$\chi_m > -1 \rightarrow \chi_m > 0$$

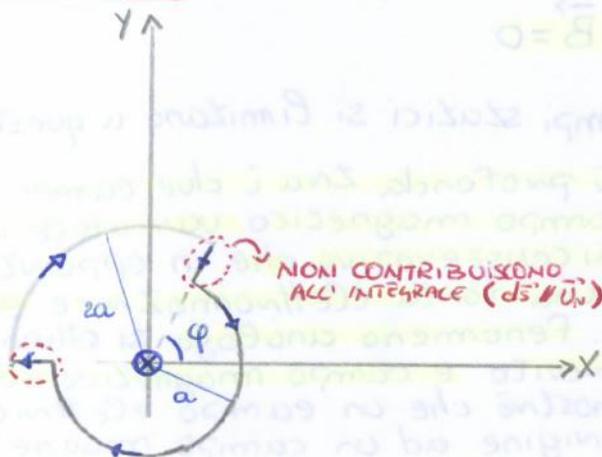
- MATERIALI FERROMAGNETICI**

$$\chi_m \gg -1 \rightarrow \chi_m \gg 0$$

$$\chi_m = \text{COST}$$

In particolare vale che  $\chi_m \neq \text{COST} \Rightarrow \chi_m \neq \text{COST}$

### Esercizio



$$\varphi = \pi/6$$

$i = \text{nota}$

$a = \text{nota}$

$B(0) ?$

CAMPO ENTRANTE  $\rightarrow$  MANO DX

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{d\vec{s} \times \vec{U}_2}{r^2}$$

Analizzo gli unici due zatti  $d\vec{s} \perp \vec{U}_2$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} i \left( \int_a^{2a} \frac{ds}{r^2} + \int_{2a}^a \frac{ds}{r^2} \right)$$

Nei due casi avrò

$$ds = a d\theta$$

$$ds = 2a d\theta$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \left[ \int_0^{\pi/6} \frac{d\theta}{a} + \int_{\pi/6}^{\pi} \frac{d\theta}{2a} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{d\theta}{a} \right] = \frac{\mu_0 i \pi}{4\pi a} \left( \frac{1}{6} + \frac{5}{12} + 1 \right)$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4a} \frac{19}{12} \Rightarrow \vec{B} = - \frac{\mu_0 i}{4a} \frac{19}{12} \vec{U}_z$$

(SS)

## LEGGI DI FARADAY DELL'INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

Considero una spina di filo conduttore alla quale se avvicino un magnete o lo allontanano nella spina si ha una corrente di versi opposti; mentre se il magnete sta fermo non si ha corrente.

Si può ottenere lo stesso effetto se sostituisco il magnete in movimento con un'altra spina in movimento sulla quale circola una corrente dovuta al generatore.

La corrente che compare sulla prima spina per effetto del movimento del magnete o dell'altra spina, si chiama

### CORRENTE INDOTTA

Diciamo meglio che dal moto relativo tra una spina e un campo magnetico ha origine una FORZA ELETTROMOTRICE  $\mathcal{E}_i$  INDOTTA.

In base alla legge di Ohm per un circuito chiuso, la presenza  $\mathcal{E}_i$  nel circuito dà origine alla corrente indotta.

Quindi Faraday arrivò alla conclusione che si può generare una forza elettromotrice in un circuito mediante un campo magnetico variabile nel tempo: esso si manifesta nei brevi intervalli di tempo in cui il campo magnetico prodotto dal solenoide nei punti della spina cambia, passando da zero al valore  $\vec{B}$  alla chiusura e viceversa, ma non compare quando  $\vec{B}$  è corrente costante.

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

### LEGGI DI FARADAY

Ogni qualvolta che il flusso del campo magnetico  $\Phi(\vec{B})$  concatenato con un circuito varia nel tempo si ha nel circuito una forza elettromotrice indotta data dall'opposto della derivata di  $\Phi(\vec{B})$  nel tempo.

Se  $R$  è la resistenza del circuito, in esso circola una corrente

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} \frac{1}{R}$$

Ri conducendo la definizione di f.e.m.

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

Questo campo elettrico indotto  $\vec{E}_i$  non è più conservativo



Un altro modo:

Detta  $x$  la distanza  $PN=QM$ , il flusso del campo magnetico attraversando il circuito

$$\Phi(\vec{B}) = \int \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = B(bx)$$

e sfruttando la legge di Faraday

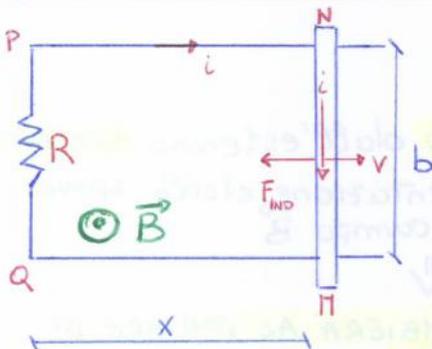
$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = - Bb \frac{dx}{dt} = - Bbv$$

Conclusione: Quando un elemento conduttore si muove in un campo magnetico fisso al suo interno avviene una separazione di cariche dovuta ad un campo elettromotore  $\mathcal{E}_i$  indotto che ha origine nella forza di Lorentz. Se i singoli elementi formano un circuito chiuso questo diventa sede di una f.e.m.  $\mathcal{E}_i$ , che segue la legge di Faraday, quindi il fenomeno dell'induzione elettromagnetica viene ricondotto alla forza di Lorentz.

Per quanto riguarda la seconda causa, cioè la variazione di  $\vec{B}$  vista da un circuito fisso, essendo nella  $ca$  velocità dei pezzi di circuito, la forza non sarà  $\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$ , avrà invece una forza propria elettromotore  $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ , e la presenza del movimento di elettroni richiede un campo  $\vec{E}$ , la cui circuitazione segue la legge di Faraday.

Comunque va precisato che il campo elettrico indotto esiste anche senza un circuito conduttore interessato da una variazione del flusso magnetico concatenato.

### APPLICAZIONI LEGGE DI FARADAY (GEN. DI CORRENTE)



- $MM$  si può muovere lungo il circuito.
- Sia  $\Sigma = \text{AREA } NMQP$
- La barretta si muove all'interno del campo magnetico  $\Rightarrow$  Ai suoi capi si instaura una f.e.m. indotta.

$$|\mathcal{E}| = \left| \frac{d\Phi_B}{dt} \right| = \frac{d}{dt} \left[ \int \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma \right] = \frac{d}{dt} (B\Sigma(z))$$

$$= B \frac{d\Sigma(z)}{dt}$$

AVANZANDO LA BARRETTA L'AREA  $\Sigma$  CAMBIA

$$\Sigma(z) = \Sigma_0 + b(x(t) - x_0) \quad \text{dove } \Sigma_0 = bx_0 \quad \text{in cui } x_0 = x(0)$$

VARIA ALLO SPOSTARSI DI  $MM$

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = B\Sigma \cos\theta(z)$$

Visto che  $\theta(z) = \theta_0 + \omega z$   
 ipotizzando che per  $z=0$  avremo un  $\theta=0$  otteniamo che  $\theta(z) = \omega z$   
 quindi

$$\Phi_B = B\Sigma \cos(\omega z)$$

Applico la legge di Faraday-Lenz

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt} = \omega B\Sigma \sin(\omega z)$$

La f.e.m. indotta dal flusso causa una corrente sinusoidale e oscillante nel tempo, avente la forma seguente

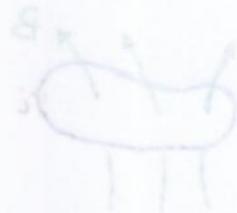
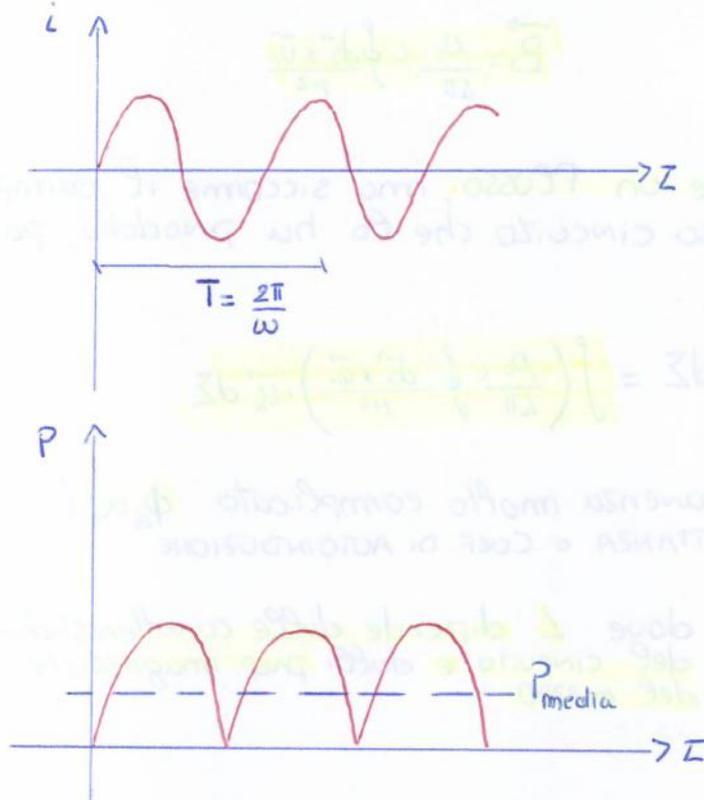
$$i(z) = \frac{\mathcal{E}(z)}{R} = \frac{\omega B\Sigma}{R} \sin(\omega z)$$

In questo caso la potenza vale

$$P = \mathcal{E}_{IND} i_{IND} = R i_{IND}^2 = \frac{\mathcal{E}_{IND}^2}{R}$$

$$P = \frac{(\omega B\Sigma)^2}{R} \sin^2(\omega z)$$

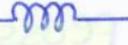
gli andamenti sono i seguenti

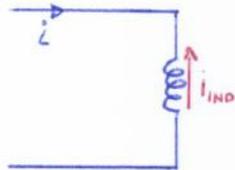


Se usiamo una **corrente variabile nel tempo** possiamo ottenere un **flusso variabile nel tempo** che genera una **f.e.m. autoindotta**.

$$\mathcal{E}_L = - \frac{d\Phi_B(z)}{dt} = -L \frac{d(i(z))}{dt}$$

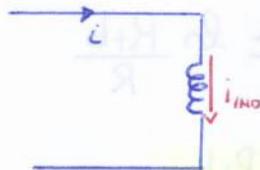
Questa **f.e.m. indotta** a sua volta genera una **corrente indotta** che è **contraria** alla **variazione della corrente iniziale**.

Otteniamo un elemento noto come **INDUTTORE**  Per cui:



$$\frac{di(t)}{dt} > 0$$

CONTRASTA L'AUMENTO E SI OPpone



$$\frac{di(t)}{dt} < 0$$

CONTRASTA LA DIMINUIZIONE E AIUTA LA RISALIRE

Se  $i \uparrow \Rightarrow \Phi_B \uparrow \Rightarrow i_{IND}$  CONTRARIA  
 //  $i \downarrow \Rightarrow \Phi_B \downarrow \Rightarrow i_{IND}$  CONCORDE

Dimensionalmente

$$[L] = [\Phi_B / i] = \frac{V \cdot s}{A} = \frac{\pi \cdot A \cdot s}{A} = \pi \cdot s = H$$

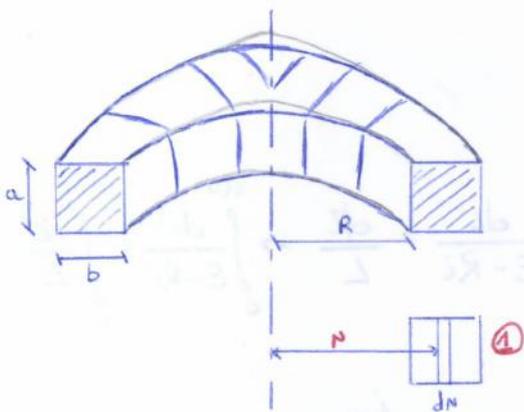
Henry

$$[\Phi_B] = V \cdot s = W_b = \text{Weber}$$

Possiamo anche definire

$$[\mu_0] = \frac{T \cdot m}{A} = \frac{T \cdot m^2}{A \cdot m} = \frac{W_b}{A \cdot m} = \frac{H \cdot A}{A \cdot m} = \frac{H}{m}$$

### INDUTTANZA (L) DI UN SOLENOIDE TOROIDALE



All'interno del **toroide** abbiamo un **campo magnetico costante**. Le linee di questo campo sono **linee circolari**.

Uso il **teorema di Ampere**  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$

Prendo come **linea chiusa** una **circonferenza di raggio R**

$$B \cdot 2\pi R = \mu_0 N i$$

CORRENTE RACCHIUSA DALLA SUP. CON RAGGIO R.

Quindi l'induttanza è una sorta di freno alla crescita della corrente → **PROTEGGE IL CIRCUITO**

Tornando alla corrente complessiva, essa è la somma di 2 termini

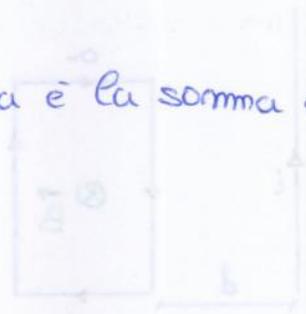
$$i = i_{\infty} + i_L$$

↓
STAZIONARIO
→
DOVUTO ALL'INDUTTANZA

$$i_{\infty} = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

$$i_L = -\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-Z/Z_L}$$

↓  
Dopo un po' si annulla in quanto il flusso diventa costante



Possiamo inoltre ricavare la **f.e.m. indotta**

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di(t)}{dt} = -L \left( \frac{\mathcal{E}}{R} \frac{1}{Z_L} e^{-Z/Z_L} \right) = -\mathcal{E} e^{-Z/Z_L}$$

Vediamo adesso l'altro caso

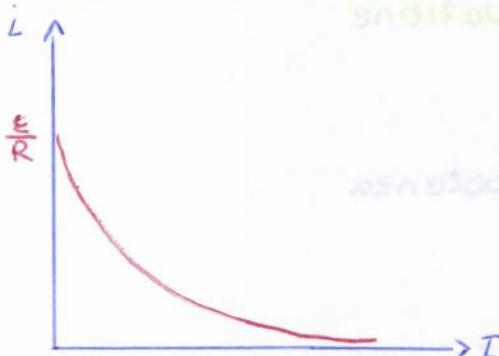
$T_1$  APERTO }  
 $T_2$  CHIUSO } **SCARICA INDUTTORE**

$$Z=0 \Rightarrow i = i_{\infty} = \mathcal{E}/R$$

$$Ri = -L \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow Ri + L \frac{di(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \int_{\frac{\mathcal{E}}{R}}^{i(t)} \frac{di'}{i'} = -\frac{R}{L} \int_0^Z dt' \Rightarrow \ln \frac{i}{i_{\infty}} = -\frac{R}{L} Z$$

quindi

$$i(Z) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-Z/Z_L}$$



Qui l'induttanza rallenta la decrescita della corrente. Ciò a conferma di quanto detto e cioè che l'autoinduzione si oppone alla variazione di corrente.

Se l'energia è conservata  $\frac{dW}{dt} = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV$  a  $t=0$  and  $I$  sarà

$$W = \int_0^I L i \frac{di}{dt} dt = \int_0^I L i' di' = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

Si può anche vedere come il lavoro compiuto dalle indotte per opporsi alla variazione di corrente

Questo lavoro dipende solo da caratteristiche iniziali e finali di  $i \Rightarrow$  possiamo associare un'energia potenziale associabile all'induzione

$$U_L = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

Questa energia dipende da  $L$  questo valore era stato ricavato per il solenoide toroidale, ora lo si ricava per quello rettilineo

All'interno del solenoide c'è un campo costante  $B = \mu_0 n i$   
 dove  $n = \frac{N}{l} \rightarrow$  NUM. DI SPIRE  
 $l \rightarrow$  LUNGHEZZA SOLENOIDE

Il flusso magnetico associato ad una spina vale

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \mu_0 n i \Sigma$$

moltiplico per  $N = nl$

Per tutte le spine otteniamo che confrontiamo con  $\Phi_B^{(N)} = Li$

$$\Phi_B^{(N)} = \mu_0 n^2 l \Sigma$$

$\nearrow$  INDUTTANZA SOLENOIDE RETTILINEO

$$L = \mu_0 n^2 l \Sigma = \mu_0 n^2 \tau$$

dove  $\tau =$  volume solenoide

Note e induttanze possiamo calcolare l'energia magnetica nei due casi

### 1) Solenoide rettilineo

$$U_L = \frac{1}{2} \frac{\mu_0^2 n^2 l \Sigma}{\mu_0} i^2(t) = \frac{B^2}{2\mu_0} \tau$$

$\mu_0 \rightarrow$  moltiplico e divido per  $\mu_0$

Si può definire una densità di energia  $u_m = \frac{U_L}{\tau} = \frac{B^2}{2\mu_0}$

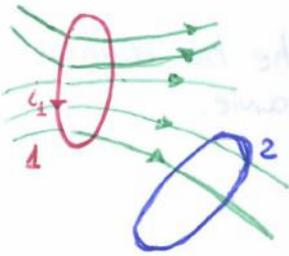
Questa formula è valida in generale e ci rappresenta l'energia per unità di volume trasportata dal campo magnetico.

Definisco quindi

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

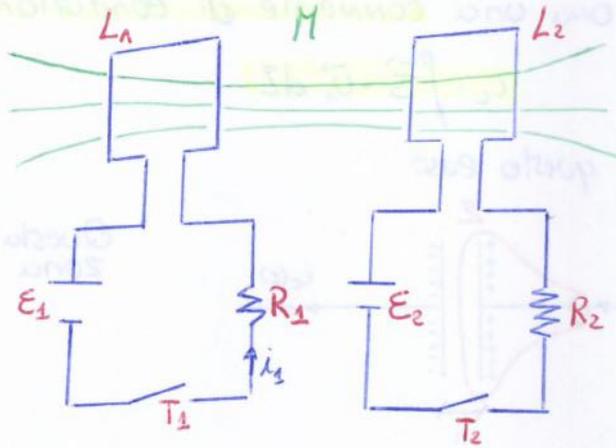
Per trovare il suo valore in tutto il volume

$$U_m = \int \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$



$$\Phi_{12} = M i_2$$

Come si può vedere questo fenomeno si presenta quando le correnti NON sono costanti nel tempo



$$L = 0 \rightarrow L_1 = L_2 = 0$$

Quando chiudo  $T_1$ ,  $i_1 \uparrow$ , e dopo un po' va a regime  $L_1 = L_{100}$ .

d'energia spesa dal circuito per portarsi fino a  $i_{100}$  vale  $U_1 = \frac{1}{2} L_1 i_{100}^2$

Quando chiudo  $T_2$  e si può chiedere: Quanta energia serve per portare  $i_2$  al valore stationario e mantenere  $L_1$  costante?

$$U_2 = \frac{1}{2} L_2 i_{200}^2 \rightarrow \text{en. da compiere su 2 per portare } i_2 \text{ al valore } i_{200}$$

$$U_{2,1} = \int E_1' i_1 dt \rightarrow \text{en. da compiere su 1 per mantenere } L_1 = \text{cost}$$

$$U_{2,1} = \int M_{21} \frac{di_2}{dt} i_1 dt = M_{21} i_{100} \int_0^{i_{200}} di_2 = M_{21} i_{100} i_{200}$$

Quindi e' energia complessivamente spesa per vincere i soli fenomeni magnetici

$$U_L = \frac{1}{2} L_1 i_{100}^2 + \frac{1}{2} L_2 i_{200}^2 + M_{21} i_{100} i_{200}$$

Analogamente vale il contrario, e poichè nei due casi lo stato iniziale e finale coincide, questo ci porta a dire che la variazione di en. magnetica è uguale e quindi

$$M_{21} = M_{12} = M$$

racchiusa dalle cariche

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (i_c + i_s) = \mu_0 i_c + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

da legge che prende il nome di **LEGGI AMPERE-MAXWELL**

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_c + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

la conseguenza importante è la seguente: il campo magnetico può essere generato da variazioni di flusso di campo elettrico nel tempo. Posto  $i_c = 0$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

I CAMPI MAGNETICI SONO PRODOTTI SIA DA **CORRENTI** DI CONDUZIONE CHE DA **VARIAZIONI TEMPORALI** DI CAMPO ELETTRICO

Ricordando infatti la legge di Faraday, noto ancora una volta un comportamento simile tra i due campi

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d\phi_B}{dt}$$

### Conclusione

CAMPI ELETTRICI VARIABILI NEL TEMPO → CAMPI MAGNETICI  
 CAMPI MAGNETICI VARIABILI NEL TEMPO → CAMPI ELETTRICI

### EQUAZIONI DI MAXWELL

#### CAMPO ELETTRICO

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q_0}{\epsilon_0}$$

REGIME STATICO

MB

R. STATICO → Cariche ferme

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d\phi_B(t)}{dt}$$

REGIME DINAMICO

R. DINAMICO → Cariche in moto → corrente

#### CAMPO MAGNETICO

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = 0$$

REGIME STATICO

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_c + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

REGIME DINAMICO

- ① Regime tra cariche elettriche e campo elettrico
- ② Un campo magnetico variabile nel tempo è sorgente di un campo elettrico
- ③ il campo magnetico è solenooidale (no monopoli magnetici)
- ④ Le sorgenti del campo magnetico sono correnti di conduzione e variazioni temporali del campo elettrico

## ONDE ELETTROMAGNETICHE

Le onde elettromagnetiche a differenza di altri tipi di onde non hanno bisogno di un mezzo per muoversi, e sono le onde tipiche dei campi elettromagnetici. Sono prodotte da un sistema di cariche opportunamente accelerati, i cui effetti si vedono in tempi successivi e a distanze sempre maggiori dalla sorgente.

Noi ci concentreremo sulle onde piane, la cui variazione del campo avviene solo lungo l'asse  $u$ .

Definiamo quindi i due vettori

$$\vec{B} = B(u, t) \quad \text{e} \quad \vec{E} = E(u, t)$$

Questo implica che

$$\frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Questo non significa che } E_y \text{ ed } E_z \text{ sono nulli, ma sono costanti}$$

A questo punto partiamo dalle eq. di Maxwell in forma locale

$$1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$2) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$3) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Applichiamo la 1)

$$\frac{\partial E_u}{\partial x} = 0$$

→ COMPONENTE NULLA RISP. ASSE  $u$

RICORDA

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

Applichiamo la 2)

$$\frac{\partial B_u}{\partial u} = 0$$

→ COMP. NULLA RISPETTO ASSE  $u$

$$= \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) u_x - \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) u_y + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) u_z$$

Quindi ho già capito che le onde piane SONO TRASVERSALI RISPETTO LA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE

Applico la 3)

$$a) \quad 0 = \frac{\partial B_u}{\partial t}$$

$$b) \quad + \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$c) \quad - \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial B_z}{\partial t}$$

I due campi evolvono allo stesso modo!

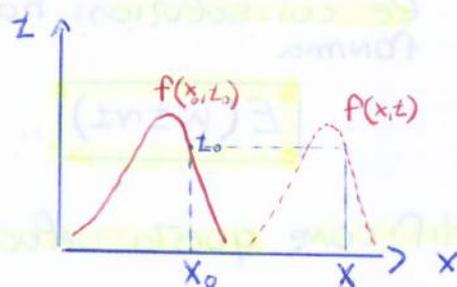
## Velocità di propagazione

d'equazione delle onde piane, di cui fino ad ora ne abbiamo studiato le componenti ha come soluzioni delle funzioni del tipo

$$f(u \pm Nz)$$

Cioè il significato fisico di queste funzioni è quello che per via elettrica sono funzioni che descrivono un fenomeno di propagazione lungo l'asse  $u$  con  $N = \text{cost}$ .

Sia infatti  $f_0$  il valore di  $f(u, z)$  al tempo  $t_0$  nella posizione  $u_0$  e sia  $f$  il valore ad un istante  $t > t_0$  in un punto  $u$



Si come l'ampiezza è costante lo stesso valore si ripeterà nell'istante successivo

$$f(x_0, t_0) = f(x, t)$$

$$x_0 - Nz_0 = x - Nz$$

⇓

$$x(t) = x_0 + N(z - z_0) \quad \text{MOTO RETT. LUNGO } u$$

L'ONDA SI PROPAGA CON VELOCITÀ COSTANTE SENZA MAI CAMBIARE FORMA

Chiamiamo  $u = u - Nz$  dimostreremo che una funzione con questo argomento soddisfa l'eq delle onde piane

$$\frac{\partial f(u)}{\partial x} = \frac{\partial f(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 f(u)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

Deriva ancora rispetto al tempo

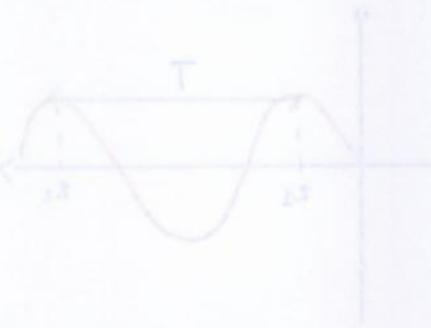
Ovviamente, un'equazione di questo tipo, soddisfa l'eq. delle onde in 1D.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = kA \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -k^2 A \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t)$$

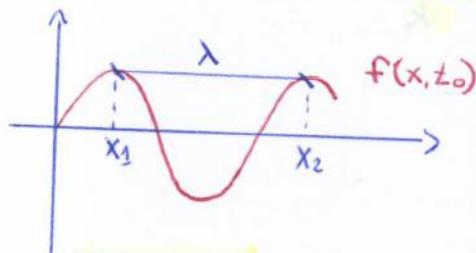


Sostituisco

$$-k^2 A \sin(kx - \omega t) = \frac{1}{v^2} [-\omega^2 A \sin(kx - \omega t)]$$

che è verificata, e vedo anche che  $v = \frac{\omega}{k} = \text{cost}$

Se fisso un istante  $t_0 = t$ , ottengo  $f(x, t_0)$  cioè tutti i punti della sinusoide all'istante  $t_0$ .



Ho in poche parole una sinusoide nella variabile  $x$  che si ripete identica per ogni coppia di punti consecutivi con coordinate coordinate  $x_1$  e  $x_2$ .

$$k(x_2 - x_1) = 2\pi$$

La distanza  $\lambda = (x_2 - x_1)$  data da

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

è detta LUNGHERA D'ONDA e da la periodicità spaziale dell'armonica.

## ONDE ELETTROMAGNETICHE PIANE ARMONICHE

Trattiamo le onde elettromagnetiche attraverso campi che individuiamo tramite funzioni armoniche (ovviamente non è l'unica alternativa)

Si è precedentemente ricavata la seguente relazione

$$\lambda v = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$\frac{E}{c} = B$$

Si suppone che i campi elettrico e magnetico si propaghino lungo l'asse  $x$  con una forma analitica di questo tipo

$$\vec{E} = E_y \vec{u}_y + E_z \vec{u}_z = E_{0y} \cos(kx - \omega t) \vec{u}_y + E_{0z} \cos(kx - \omega t) \vec{u}_z$$

$$\vec{B} = B_y \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z = B_{0y} \cos(kx - \omega t) \vec{u}_y + B_{0z} \cos(kx - \omega t) \vec{u}_z$$

Applichiamo la seguente relazione

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \quad 2b$$

$$-k E_{0z} \sin(kx - \omega t) = \omega B_{0y} \sin(kx - \omega t)$$

Otteniamo quindi che

$$B_{0y} = -\frac{k}{\omega} E_{0z} = -\frac{1}{c} E_{0z}$$

Dunque: LE COMPONENTI DEI CAMPI NON SONO INDIPENDENTI

Applichiamo l'altra relazione

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad 3c$$

$$-k E_{0y} \sin(kx - \omega t) = -\omega B_{0z} \sin(kx - \omega t)$$

Ottenendo analogamente

$$B_{0z} = \frac{k}{\omega} E_{0y} = \frac{1}{c} E_{0y}$$

Potendo così descrivere tutto il campo magnetico  $\vec{B}$  come

$$\vec{B} = -\frac{E_{0z}}{c} \cos(kx - \omega t) \vec{u}_y + \frac{E_{0y}}{c} \cos(kx - \omega t) \vec{u}_z$$

## ONDE IN MEZZI TRASPARENTI

In un mezzo materiale otteniamo una velocità data da

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

Visto che  $\epsilon > \epsilon_0$ ,  $\mu > \mu_0$  la velocità  $v$  SARÀ MINORE DI  $c$ .  
Si parla in questo caso di INDICE DI RIFRAZIONE definito come

$$n = \frac{c}{v}$$

## ENERGIA DI UN'ONDA ELETTROMAGNETICA

La presenza di un campo elettrico  $\vec{E}$  e di uno magnetico  $\vec{B}$  in una regione comporta la presenza di una certa quantità di energia distribuita nello spazio con una densità  $u_e$  e  $u_m$

$$u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Complessivamente si ottiene

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Se prendo un'onda piana per cui vale  $B = E/c$  posso scrivere  $u_m$

$$u_m = \frac{E^2}{2\mu_0} \frac{1}{c^2} = \frac{E^2}{2\mu_0} \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = u_e$$

I quantitativi di energia trasportati dai due campi sono uguali quindi

$$u = 2u_m = 2u_e = \epsilon_0 E^2$$

d'energia totale risulta per metà dovuta al campo elettrico e metà per il campo magnetico.

La quantità trasportata in un volume infinitesimo vale

$$d\omega = u \sum \frac{cdt}{dx} = \epsilon_0 E^2 \sum dt \quad \leftarrow \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{alla direzione di prop.} \end{array}$$

Si può definire un **valore medio**

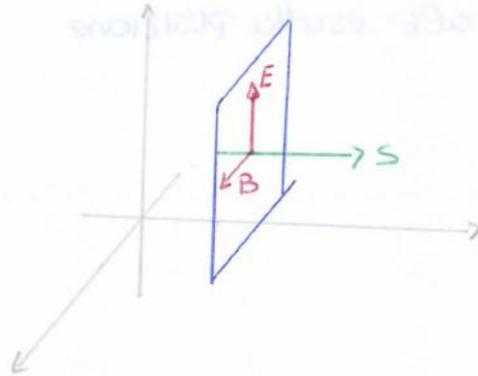
$$S_{\text{m}} = \epsilon_0 c E_{\text{m}}^2 = \frac{\epsilon_0 c}{\Delta t} E_0^2 \int_0^{\Delta t} \cos^2(kx - \omega t) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$$

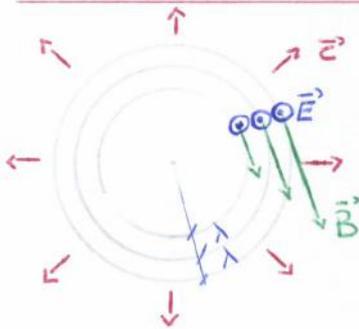
Questo è il valore dell'energia per unità di tempo e di superficie di un'onda elettromagnetica piana e armonica

### FRONTE D'ONDA

Nel caso di onde piane sarà per l'appunto un PIANO



### ONDE SPERICHE



$$E(r, t) = E_0(r) \cos(kr - \omega t)$$

La fase è costante

$$\phi = kr - \omega t = \text{cost}$$

La potenza trasportata

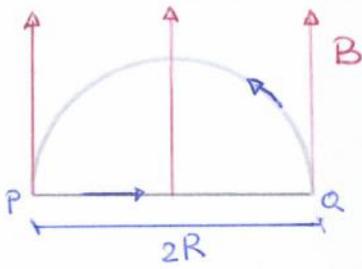
$$P_{\text{m}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2(r) \cdot 4\pi r^2 = \text{cost}$$

dove  $S_{\text{m}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(r) c$

quindi ottengo che  $E_0(r) \propto 1/r$ , in questo modo posso scrivere

$$E(r, t) = \frac{E_0}{r} \cos(kr - \omega t)$$

### ESERCIZIO 1



$\vec{F}_{TOT} ?$

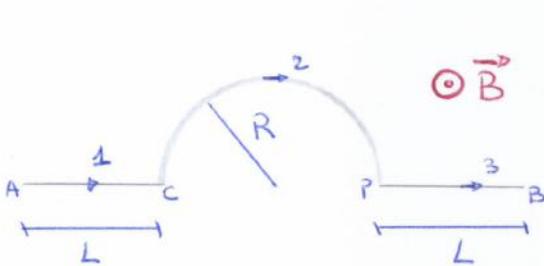
$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_{RET} + \vec{F}_{CIRC}$$

$$\vec{F}_{RET} = i \int_P^Q d\vec{s}' \times \vec{B} = iB2R \vec{U}_z$$

$$\vec{F}_{CIRC} = i \int_P^Q d\vec{s}' \times \vec{B} = i \int ds B \sin\theta = i \int_0^\pi R B \sin\theta d\theta = -2iBR \vec{U}_z$$

$$\vec{F}_{TOT} = 0$$

### ESERCIZIO 2



$\vec{F}_{TOT} ?$

$$\vec{F}_1 = i \int_A^C d\vec{s}' \times \vec{B} = iLB \vec{U}_y$$

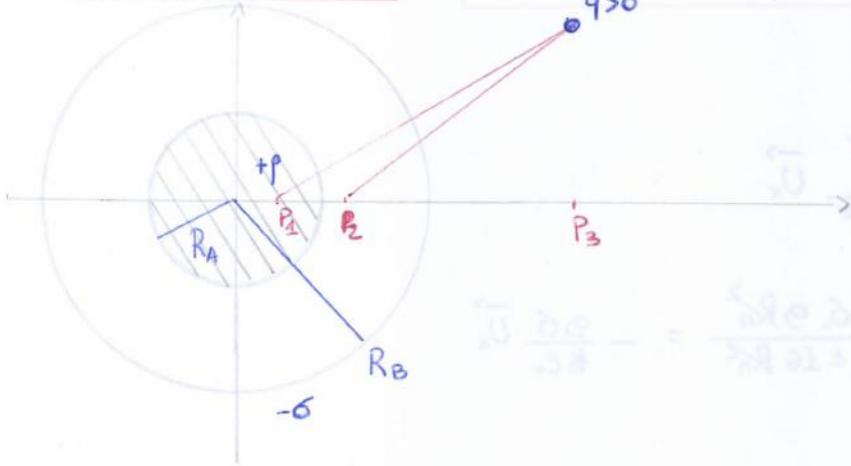
$$\vec{F}_3 = i \int_P^B d\vec{s}' \times \vec{B} = iLB \vec{U}_y$$

$$\vec{F}_2 = i \int_C^P d\vec{s}' \times \vec{B} = i \int ds B \sin\theta = i \int_0^\pi R B \sin\theta d\theta = 2iRB \vec{U}_y$$

$$\vec{F}_{TOT} = (iLB + iLB + 2iRB) \vec{U}_y$$

16-06-2014

ESERCIZIO 1



$$P_1 \left( \frac{R_A}{2}, 0 \right)$$

$$P_2 \left( \frac{3R_A}{2}, 0 \right)$$

$$P_3 \left( 4R_A, 0 \right)$$

$$P_q \left( 4R_A, R_A \right)$$

$$R_B = 3R_A$$

PUNTO P1

$$E_{P1} = E_p + E_q$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_p &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_{TOT}}{(R_A/2)^2} \vec{U}_x \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \pi R_A^3}{6} \cdot \frac{4}{R_A^2} \vec{U}_x \\ &= \frac{\rho R_A}{6\epsilon_0} \vec{U}_x \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \frac{q'}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R_A}{2}\right)^3} &= \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R_A^3} \Rightarrow q' = \frac{q}{R_A^3} \cdot \frac{R_A^3}{8} \\ &= \frac{\rho \pi R_A^3}{8} \\ &= \frac{\rho}{6} \pi R_A^3 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_{q,y} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_A^2} \vec{U}_y \\ \vec{E}_{q,x} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(\frac{7}{2}R_A\right)^2} \vec{U}_x \end{aligned} \right\}$$

quindi

$$\vec{E}(P_1) = \left( \frac{\rho R_A}{6\epsilon_0} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(\frac{7}{2}R_A\right)^2} \right) \vec{U}_x + \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(\frac{7}{2}R_A\right)^2} \right) \vec{U}_y$$

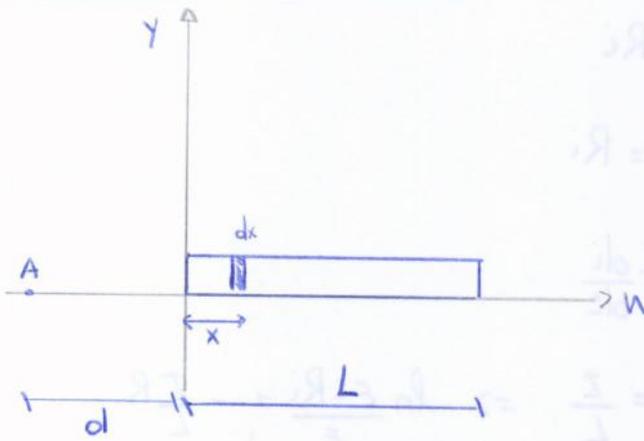
PUNTO P2 (3/2 RA, 0)

$$E_{P_+} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{\rho}{3}\pi R_A^3}{\left(\frac{3}{2}R_A\right)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R_A^3}{9 R_A^2} = \frac{4\rho R_A}{27\epsilon_0} \vec{U}_x$$

$$\begin{aligned} E_{q,y} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_A^2} \vec{U}_y \\ E_{q,x} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(\frac{3}{2}R_A\right)^2} \vec{U}_x \end{aligned}$$

11-02-2014 LATO A

①



$\lambda = dq$   
 $E(A)$  e  $V(A)$ ?

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dq}{(d+x)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{\lambda dx}{(d+x)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{1}{(d+x)^2} dx$$

$$z = (d+x) \quad dz = dx$$

$$x=0 \rightarrow z=d$$

$$x=L \rightarrow z=L+d$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_d^{d+L} \frac{z-d}{z^2} dz$$

Risolvo l'integrale

$$\int \frac{z-d}{z^2} dz = \int \frac{z}{z^2} dz - \int \frac{d}{z^2} dz = \left[ \ln z \right]_d^{d+L} + \left[ \frac{d}{z} \right]_d^{d+L}$$

$$= \ln \frac{d+L}{d} + \frac{d}{d+L} - \frac{d}{d} = \ln \frac{d+L}{d} + \frac{d-d-L}{d+L} = \ln \frac{d+L}{d} - \frac{L}{L+d}$$

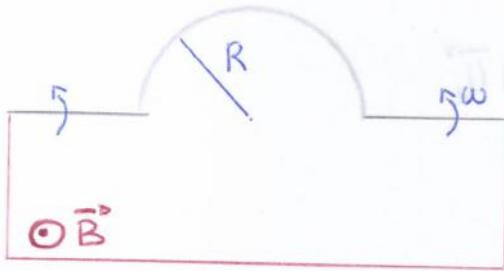
$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \ln \frac{d+L}{d} - \frac{L}{L+d} \right) \vec{u}_x$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_d^{d+L} \frac{z-d}{z} dz = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int dz - \int \frac{d}{z} dz \right] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ z - \ln z \right]_d^{d+L}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( L - \ln \frac{d+L}{d} \right)$$

27-01-2014 LATO A1

①



$\mathcal{E}_{i, \max} ?$   
 $\mathcal{E}_i$  (giro completo)

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{d\Phi_B}{dt} \quad \Phi_B = \int \vec{B} \cdot \vec{u}_N d\Sigma$$

$$\Phi_B = B \Sigma \cos(\theta(z)) \quad \theta(z) = \theta_0 + \omega z$$

$$= B \Sigma \cos(\theta_0 + \omega z)$$

$\mathcal{E}_{i, \max} \Rightarrow$  quando ho l'area massima  
 dentro il campo

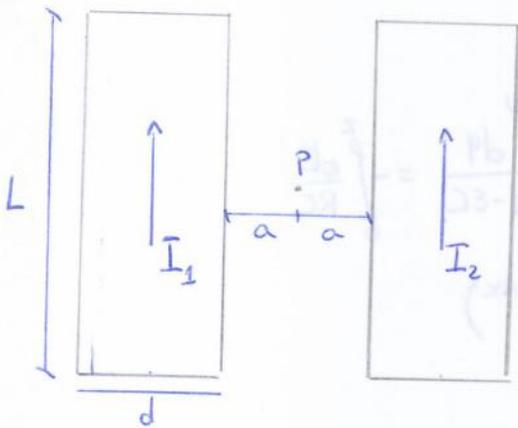
$$\Sigma_{\max} = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$\Phi_B^{(\max)} = B \frac{\pi R^2}{2} \cos(\theta_0 + \omega z)$$

$$|\mathcal{E}_i^{(\max)}| = + \frac{B \pi R^2 \omega}{2} \sin(\theta_0 + \omega z)$$

$$|\mathcal{E}_i^{(\text{giro})}| = 0$$

②



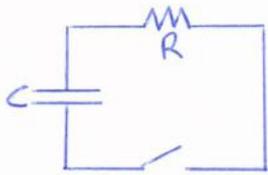
$$I_2 = 2I_1$$

$B(P) ?$

$$dB = \frac{\mu_0 di}{2\pi x} \quad di = \vec{j} d\Sigma = \vec{j} L du$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 j L}{2\pi} \int_{a+d}^a \frac{1}{u} du = -\frac{\mu_0 j L}{2\pi} \ln \frac{a}{a+d} \quad \vec{u}_2 = -\frac{\mu_0 j L d}{2\pi d} \ln \frac{a}{a+d}$$

$$I_1 = j_1 L d \Rightarrow B_1 = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \ln \frac{a}{a+d} \vec{u}_2$$



$$\frac{q(t)}{C} + R \frac{dq}{dt} = 0$$

$$R \frac{dq}{dt} = -\frac{q(t)}{C} \Rightarrow \int_Q^{q(t)} \frac{dq}{q} = -\int_0^t \frac{1}{RC} dt \Rightarrow \ln \frac{q}{Q} = -\frac{t}{RC}$$

$$q(t) = Q e^{-t/RC}$$

$$i(t) = -\frac{Q}{RC} e^{-t/RC}$$

$$V_c(t) = \frac{Q}{C} e^{-t/RC}$$

③ CALCOLA  $L$  DI UN SOLENOIDE RETTILINEO

$$B = \mu_0 n i$$

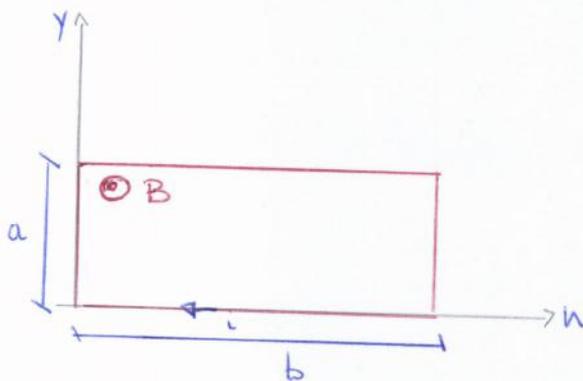
$$\Phi_B = \int B \cdot \vec{u}_n d\Sigma = B \Sigma$$

$$\Phi_B^{(N)} = N B \Sigma$$

$$\Phi_B = L i \Rightarrow L = \frac{B \Sigma N}{i} = \frac{\mu_0 i \Sigma N^2}{i} = \mu_0 N^2 \Sigma$$

27-01-2014 LATO BA

①



$N$  spine  
 $R$   
 $\vec{B} = \frac{\mu_0 i N}{n+d} \vec{u}_z$

$\epsilon_i ?$   
 $i_i ?$

$$\Phi^{(N)} = \int B \cdot \vec{u}_n d\Sigma = N \mu_0 i N \int_0^b \frac{1}{n+d} a dx = N a \mu_0 i N \int_0^b \frac{1}{n+d} dx = a \mu_0 i N^2 \ln \frac{b+d}{d}$$

$$|\epsilon_i| = \frac{d\Phi}{dt} = 2 a \mu_0 i N \ln \frac{b+d}{d}$$

$$|i_i| = 2 a \mu_0 i N \ln \frac{b+d}{d} \frac{N}{R}$$