



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1384A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: D Angelo

MATERIA: Scienze delle Costruzioni, Prof.Surace

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

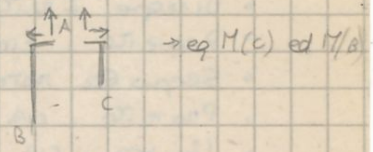
**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

SISTEMI DI TRAVI: STATICA

Equazioni cardinali:

$$\sum_{i=1}^n \{F_i\} = \{R\} = 0$$

$$M(O) = \sum_{j=1}^n M_j + (\{r_i\} \wedge \{F_i\}) \cdot \{k\}$$



• Struttura isostatica di n travi $\rightarrow g \cdot n = 3 \cdot n = v \cdot n$, $g = v$

MAGLIE APERTE, UN SOLO CORPO

- Metodo analitico \rightarrow 3 eq. cardinali di statica
- Metodo grafico

2 FORZE \rightarrow uguali, opposte, su stessa retta

3 FORZE \rightarrow { le 3 rette per 1 stesso punto
 { verso e modulo = tragetto, si intersecano



MAGLIE APERTE, DUE O PIU' CORPI

- Metodo analitico \rightarrow 3 eq. cardinali x ogni corpo
- Metodo grafico \rightarrow stesse regole, per un corpo alla volta
- Metodo delle equazioni ausiliarie:
 - \rightarrow Scrivo le 3 eq. di eq. globali
 - \rightarrow Trovo $s = n^{\circ}$ momenti messi dagli n vincoli interni ($s = n \cdot g - n \cdot v$?)
 - \rightarrow Scrivo s eq. di eq. di uno dei corpi, in modo da non comparire nei le reazioni (ad es, cerniera interna \rightarrow eq. di rotazione attorno ad essa; doppio pendolo mt \rightarrow tragetto in direzione x stessa)
- Ho $3+s$ eq., x trovare le $3+s$ reazioni esterne

TRAVI CHIUSE

- \hookrightarrow 3 volte iperstatiche internamente \Rightarrow introduce $s = 3$ connessioni interne:
 - 3 cerniere, in diagonale
 - cerniera + buca, una delle buche non parte per cerniera
- Separa tutti i corpi \rightarrow tutti devono essere eq. il, onde l'istenta ntera
- Oppure, cerco prima le ext considerando il corpo intero, poi separo
- Cerniera interna su cerniera - carrello - etc... esterno \rightarrow equilibrio di esso

METODO SEMIGRAFICO

Catena cinematica = sistema meccanico una volta labile ($gde = 1$)

- 1° Teorema delle catene cinematiche

\hookrightarrow Sistema fatto da almeno 2 corpi $i, j \Rightarrow$ e' 1 catena cinematica se:

\forall coppia di corpi $i, j \Rightarrow C_i, C_j, C_{ij}$ sono allineati

- 2° Teorema delle catene cinematiche

\hookrightarrow Sistema fatto da almeno 3 corpi $i, j, k \Rightarrow$ e' 1 catena cinematica se:

\forall terne di corpi $i, j, k \Rightarrow C_{ij}, C_{ik}, C_{jk}$ sono allineati

- 1° Corollario

$C_i \equiv C_j \neq C_j \Rightarrow$ corpo j e' fermo

- 2° Corollario

$C_i \equiv C_j \neq C_{ij} \Rightarrow$ corpi solidali, no spostamenti reciproci

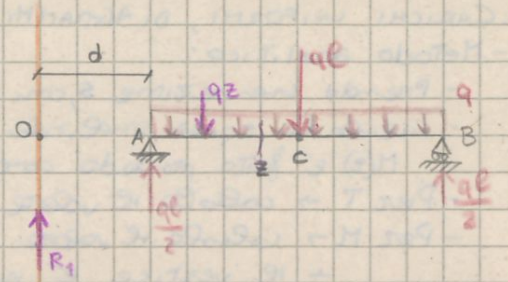
CIR ASSOLUTI \rightarrow legati ai vincoli esterni

CIR RELATIVI \rightarrow legati ai vincoli interni

2

- Metodo per disegnare la cdp-fascio di rete

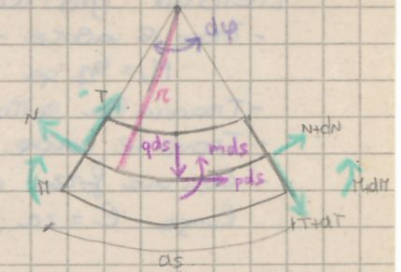
- Prendo sezione z;
 - $qz =$ risultante tra A e z;
 - prendo un pto O esterno alla trave, distante d; suppongo che sia la rete d'azione delle risultanti parziali
- $$R_1 = \frac{qL}{2} - qz$$
- calcolo \rightarrow $\omega M(0)$ di R_1 , zero nullo
 - Ricavo la $d(z)$, che individua le rette d'azione successive di tutti i $q(z)$.
 - Sostituendo $z=L$, $z=\frac{L}{2}$, $z=0$, ... determino il fascio di rette.
- $d > 0 \Rightarrow d$ e' a sx di A
 $d < 0 \Rightarrow d$ e' a dx di A



• CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE RELATIVE AD UN CONCILO DI TRAVE

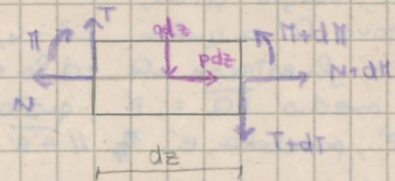
$$\begin{cases} \frac{dN}{ds} + \frac{T}{r} + p = 0 \\ \frac{dT}{ds} - \frac{N}{r} + q = 0 \\ \frac{dM}{ds} - T + m = 0 \end{cases}$$

\rightarrow equazioni indefinite di equilibrio
 \hookrightarrow legano le caratteristiche della sollecitazione ai carichi esterni



- Trave piana, senza momenti di distribuiti ($m=0$)

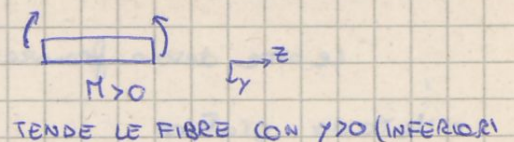
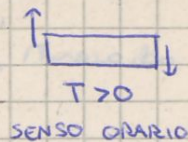
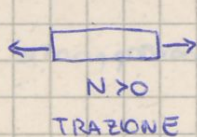
$$\begin{cases} \frac{dN}{dz} = -p(z) \\ \frac{dT}{dz} = -q(z) \\ \frac{dM}{dz} = T(z) \end{cases}, \quad \frac{d^2 M}{dz^2} = -q(z)$$



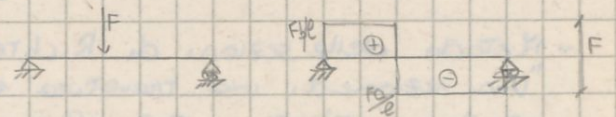
Vari casi:

- $p=0 \Rightarrow N = \text{cost}$
- $p = \text{cost} \Rightarrow N = \text{lineare}$
- $q=0 \Rightarrow \begin{cases} T = \text{cost} \\ M = \text{lineare} \end{cases}$
- $q = \text{cost} \Rightarrow \begin{cases} T = \text{lineare} \\ M = \text{parabola} \end{cases}$

- Convenzioni di segno:



- Nota: se ho una forza concentrata in un punto, di ogni di taglio ha c'è una discontinuità, di valore pari alla forza



- Vncoli: cerniere } non trasmettono M
 correlli }

VINCOLI ESTERNI

- Carrello o Biella → $v=1$



CIR → su una retta per il carrello, ortogonale al piano di scorrimento

Impedisce movimenti ortogonali al piano di scorrimento del carrello

$$\begin{aligned} V_A &\neq 0 \\ H_A &= 0 \\ M_A &= 0 \end{aligned}$$

- Cerniera → $v=2$



CIR → resistenza

Impedisce i due spostamenti di traslazione

$$\begin{aligned} V_p &\neq 0 \\ H_p &\neq 0 \\ M_p &= 0 \end{aligned}$$

- Doppia pendolo o Bipedalo → $v=2$



CIR → all'infinito, su una retta parallela agli assi del pendolo

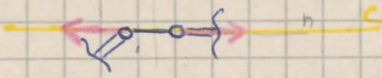
Impedisce la rotazione e lo spostamento in direzione ortogonale (R_p e traslata)

$$\begin{aligned} V_p &\neq 0 \\ H_p &= 0 \\ M_p &\neq 0 \end{aligned}$$

VINCOLI INTERNI

• Biella

$$\rightarrow v=1$$



Impedisce movimento relativo delle 2 Travi lungo l'asse n della biella

CIR \rightarrow nella retta della biella

$$\begin{aligned} N_p &\neq 0 \\ T_p &= 0 \\ M_p &= 0 \end{aligned}$$

• Cerniera interna

$$\rightarrow v=2 \quad (\text{per } n \text{ corpi: } v=2(n-1))$$



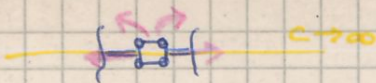
Impedisce spostamenti relativi verticali ed orizzontali

CIR \rightarrow cerniera stessa

$$\begin{aligned} V_p &\neq 0 \\ H_p &\neq 0 \\ M_p &= 0 \end{aligned}$$

• Doppio pendolo interno

$$\rightarrow v=2$$



Impedisce la rotazione relativa e lo spostamento relativo in direzione n .

CIR \rightarrow all'infinito, su una retta parallela agli assi del pendolo

$$\begin{aligned} N_p &\neq 0 \\ T_p &= 0 \\ M_p &\neq 0 \end{aligned}$$

GEOMETRIA DELLE AREE

5

- Legge di rototraslazione: $\{\bar{r}^*\} = [N] (\{r\} - \{r_0\})$
- Vettore dei momenti statici: $\{S\} = \begin{Bmatrix} S_y \\ S_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_A x dA \\ \int_A y dA \end{Bmatrix}$
- Legge di traslazione per i momenti statici: $\begin{cases} \bar{S}_y = S_y - x_0 A \\ \bar{S}_x = S_x - y_0 A \end{cases}$
- Legge di rototraslazione per i momenti statici: $\{\bar{S}^*\} = [N] (\{S\} - \{r_0\} A)$
- $\begin{cases} x_G = \frac{S_y}{A} \\ y_G = \frac{S_x}{A} \end{cases} \rightarrow$ coordinate del baricentro
- $I_y = \int_A x^2 dA > 0 \rightarrow$ momenti d'inerzia assiali
 $I_x = \int_A y^2 dA > 0$
- $I_{xy} = \int_A xy dA \rightarrow$ momento d'inerzia centrifugo
- $[I] = \int_A \{r\} \{r\}^T dA = \begin{bmatrix} I_y & I_{xy} \\ I_{xy} & I_x \end{bmatrix} \rightarrow$ tensore dei momenti d'inerzia
- $\begin{aligned} \bar{I}_y &= I_y - 2x_0 S_y + A x_0^2 \\ \bar{I}_x &= I_x - 2y_0 S_x + A y_0^2 \\ \bar{I}_{xy} &= I_{xy} - x_0 S_x - y_0 S_y + A x_0 y_0 \end{aligned} \rightarrow$ Legge di Huygens
(di trasposizione dei momenti d'inerzia)
- $[\bar{I}^*] = [N] [I] [N]^T \rightarrow$ legge di trasformazione del momento d'inerzia per rotazioni
- $[N] = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \rightarrow$ matrice di rotazione
- SIST di rif baricentrico $\Rightarrow S_x = S_y = 0$
 SIST di rif principale $\Rightarrow \bar{I}_{xy} = 0$ } centrale
- $\vartheta_0 = \frac{1}{2} \arctg \frac{2 \bar{I}_{xy}}{\bar{I}_y - \bar{I}_x} \rightarrow$ angolo di rotazione del sist di rif centrale
- $\begin{aligned} I_\xi &= \bar{I}_x^*(\vartheta = \vartheta_0) \\ I_\eta &= \bar{I}_y^*(\vartheta = \vartheta_0) \end{aligned} \left| \begin{aligned} &= \frac{\bar{I}_x + \bar{I}_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\bar{I}_x - \bar{I}_y)^2 + 4 \bar{I}_{xy}^2} \end{aligned} \right. \rightarrow$ momenti d'inerzia principali

SCHEMA DI RISOLUZIONE DI WES DI GEOMETRIA DELLE AREE

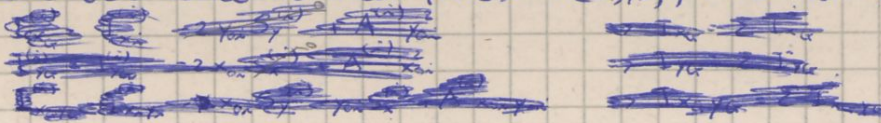
- 1) Scelgo 1 sist. di rif. arbitrario, magari assi coincidenti in certi
- 2) Scompongo la sezione in parti semplici
- 3) Boricentri delle varie parti,
- 4) Costruisco la tabella, così, ma cui eventuali →
buchi hanno tutti valori negativi
- 5) Aree
- 6) Momenti statici, usando per le varie parti del

	1	2	3	...	n	TOT
A						cm ²
S _x						cm ³
S _y						cm ³
I _{x₀}						cm ⁴
I _{y₀}						cm ⁴
I _{x₀y₀}						cm ⁴

Sist di rif. centrati nei boricentri:

$$\begin{cases} \bar{S}_y^{(i)} = S_y^{(i)} - x_{0i} A^{(i)} \Rightarrow S_y^{(i)} = x_{0i} A^{(i)} \Rightarrow S_y = \sum S_y^{(i)} \\ \bar{S}_x^{(i)} = S_x^{(i)} - y_{0i} A^{(i)} \Rightarrow S_x^{(i)} = y_{0i} A^{(i)} \Rightarrow S_x = \sum S_x^{(i)} \end{cases}$$

- 7) Ricavo le coordinate del boricentro della sezione: $x_G = S_y/A$; $y_G = S_x/A$
- 8) Passo a lavorare nel sistema boricentrico $\rightarrow (x_G, y_G)$
- 9) Calcolo i momenti d'inerzia con le formule di Huygens: uso come sist. di partenza quello del boricentro della parte $i \rightarrow (x_i, y_i)$; come sist. d'arrivo il sist. boricentrico:



$$\begin{aligned} I_{x_G}^{(i)} &= I_{x_i}^{(i)} + 2 y_{0i} S_y^{(i)} + A^{(i)} \cdot y_{0i}^2 = I_{x_i}^{(i)} + A^{(i)} \cdot (y_G - y_{0i})^2 & \Rightarrow I_{x_G} &= \sum I_{x_G}^{(i)} \\ I_{y_G}^{(i)} &= I_{y_i}^{(i)} - 2 x_{0i} S_x^{(i)} + A^{(i)} \cdot x_{0i}^2 = I_{y_i}^{(i)} + A^{(i)} \cdot (x_G - x_{0i})^2 & \Rightarrow I_{y_G} &= \sum I_{y_G}^{(i)} \\ I_{x_G y_G}^{(i)} &= I_{x_i y_i}^{(i)} + A^{(i)} (x_G - x_{0i})(y_G - y_{0i}) & \Rightarrow I_{x_G y_G} &= \sum I_{x_G y_G}^{(i)} \end{aligned}$$

- 10) Calcolo l'angolo di orientazione del sistema centrale e gli assi:

• $\theta_0 = \frac{1}{2} \arctg \frac{2 I_{x_G y_G}}{I_{x_G} - I_{y_G}}$ $\rightarrow \begin{cases} \theta_0 > 0, \text{ ruota in senso orario} \\ \theta_0 < 0, \text{ ruota in senso antiorario} \end{cases}$

• $\begin{cases} I_{\xi} \\ I_{\eta} \end{cases} = \frac{I_{x_G} + I_{y_G}}{2} \pm \sqrt{\frac{(I_{x_G} - I_{y_G})^2}{4} + I_{x_G y_G}^2}$ $\rightarrow I_{\xi} > I_{\eta} (\Rightarrow I_{x_G} > I_{y_G})$

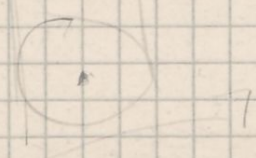
NB: Se hai un cerchio o una parte di esso, al posto di G cerca il suo O, che tutte le formule debbano essere riferite al centro O_i :

Per S_{xy} : - Cerca S_{x_i} rispetto al centro O_i , con le varie formule della tabella

- Con formula di traslazione del momento statico trova S_{x_0} :

$$S_x = S_{x_i} - A^{(i)} \cdot y_{0i} = S_{x_i} - A^{(i)} \cdot (y_0 - y_{0i})$$

→ dove: $\begin{cases} O_i = \text{centro del cerchio/rettore} \\ O = \text{centro del sist xy d'arrivo} \end{cases}$

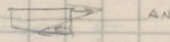


• FLESSIONE RETTA $\rightarrow M_x$

- Asse di rotazione \rightarrow asse y , intersezione Tre sezioni e piano di rotazione
- Piano di rotazione $\rightarrow (y, z)$, contiene M_x , \equiv piano di flessione

Campo Tensionale (formula di Navier): $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$
 $\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$

Asse neutro $\rightarrow \sigma_z = 0 \rightarrow$



$M_x > 0 \Rightarrow \begin{cases} y > 0, \text{ trazione} \\ y < 0, \text{ compressione} \end{cases}$

Moduli di resistenza flessionali della trave:

$W_1 = \frac{I_x}{h_1} ; W_2 = \frac{I_x}{h_2}$

Campo deformativo: $\epsilon_x = \epsilon_y = -\frac{\nu M_x}{E I_x} y$
 $\epsilon_z = \frac{M_x}{E I_x} y$

Sforzamenti angolari $\rightarrow \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

- Principio di conservazione delle sezioni piane

Curvatura flessionale = caratteristica deformativa di $M_x \rightarrow \chi_x = \frac{1}{R_x} = \frac{M_x}{E I_x}$

Lavoro di deformazione $\rightarrow \frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{E I_x}$

• FLESSIONE RETTA $\rightarrow M_y$

- A.S. $\equiv x$
- A.N. $\equiv y$
- Campo Tensionale $\rightarrow \sigma_z = -\frac{M_y}{I_y} x$



$\begin{cases} x > 0, \sigma_z < 0, \text{ compressione} \\ x < 0, \sigma_z > 0, \text{ trazione} \end{cases}$



• FLESSIONE DEVIATA

$M = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M \cos \alpha \\ M \sin \alpha \end{Bmatrix}$

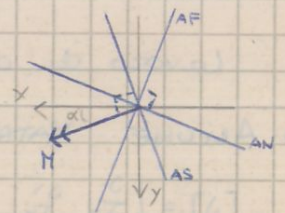
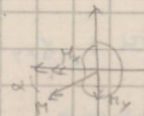
Campo Tensionale $\rightarrow \sigma_z = M \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} y - \frac{\sin \alpha}{I_y} x \right)$

- AN $\rightarrow y = \text{Tg} \alpha \frac{I_x}{I_y} x$

- AN \perp AF

- AS $\rightarrow y = -\frac{x}{\text{Tg} \alpha}$
 AS \perp H

- AS \perp AN $\Leftrightarrow I_x = I_y \Leftrightarrow$ aree giroscopiche



• MOMENTO TORCENTE $\rightarrow M_z$ \rightarrow PER UN SOLIDO CILINDRICO

- Angolo unitario di torsione: $\Theta = \frac{d\varphi_z}{dz} = \text{cost}$

- $\varphi_z =$ rotazione attorno all'asse z;

$\varphi_z = \Theta z + C_1$, $C_1 = \text{si determina vincolando la trave}$

- Campo degli spostamenti:

$$\begin{cases} u = -\Theta z y \\ v = \Theta z x \\ w = 0 \end{cases}$$

- Campo delle deformazioni:

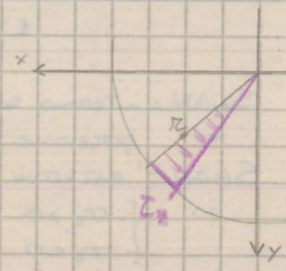
$$\begin{cases} \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{xz} = -\Theta y \\ \gamma_{yz} = \Theta x \end{cases}$$

- Campo tensoriale: nascono solo tensioni tangenziali \rightarrow

$$\{\tau_z\} = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -G \Theta y \\ G \Theta x \end{Bmatrix}$$

Modulo: $\tau_z = G \Theta r$
Verso: $\{\tau_z\} \perp \{r\}$

$\rightarrow r = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} =$ raggio di posizione di P



- $I_p = I_x + I_y = \int_A r^2 dA$

$\Rightarrow \Theta = \frac{M_z}{G \cdot I_p}$

$\Rightarrow \tau_z = \frac{M_z}{I_p} \cdot r$

- Sezione circolare piena

- $I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$

- $I_p = \frac{\pi R^4}{2}$

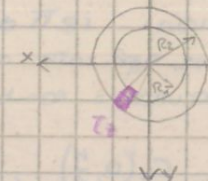
$\Rightarrow \tau_{z \max} = \tau_z(r=R) = 2 \frac{M_z}{\pi R^3} \rightarrow$ triangolare

- Sezione circolare ad anello

- $I_p = I_p(R_2) - I_p(R_1) = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4)$

- $\tau_z = \frac{M_z}{I_p} \cdot r$, $R_1 \leq r \leq R_2$

$\Rightarrow \tau_{z \max} = \tau_z(r=R_2) = \frac{M_z}{\frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4)} \cdot R_2$



- Lavoro elementare di deformazione, per una sezione circolare

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{G I_p}$$

- Sezione di forma generica

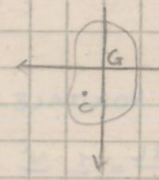
- $C \neq G \Rightarrow w \neq 0 \Rightarrow$ sezione non piana

- $\Theta = \frac{M_z}{G I_t}$

- $I_t =$ fattore di rigidità torsionale $[m^4]$
 $I_t < I_p$

- $I_t = I_p \Leftrightarrow$ sezione circolare \Rightarrow e' la + efficiente

- $\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{G I_t} \rightarrow$ lavoro elementare di deformazione per una sezione generica



• CRITERI DI RESISTENZA - CASO DELLA TORSIONE

Servono a confrontare le T_{max} (provocate da M_z) con σ_{am} , formulando una tensione equivalente σ_{eq} in funzione di T_z

- TRESCA:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4T_z^2}$$

↳
Per la Torsione $\rightarrow \sigma_z = 0 \Rightarrow \sigma_{eq} = 2T_z$

- VON MISES:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3T_z^2}$$

↳
Per la Torsione $\rightarrow \sigma_z = 0 \Rightarrow \sigma_{eq} = \sqrt{3} T_z$

• Per il calcolo di $\vartheta \rightarrow$ angolo unitario di torsione:

$$\vartheta = \frac{M_z}{I_t \cdot G}$$

$\rightarrow G =$ modulo di elasticità tangenziale

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\rightarrow \begin{cases} E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \\ \nu = 0,3 \quad (\text{per l'acciaio}) \end{cases}$$

• ESERCIZIO: Data la σ_{am} , determina $M_{x,MAX}$ (Flessione retta)

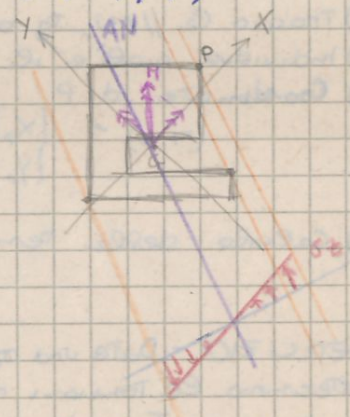
- 1) Determina gli assi centrali d'inerzia: η ed $\xi \rightarrow$ Geometria delle aree
- 2) Mi metto in quel sistema, guardo dove ci sono le σ_z maggiori
- 3) Trovo h_{max}
- 4) Calcolo I_x , dividendo la sezione in pezzi \rightarrow geometria delle aree
- 5) Trovo: $W_{min} = I_x / h_{max}$
- 6) calcolo: $\sigma_z = \frac{M_x}{W_i} \Rightarrow M_{x,MAX} = \sigma_{am} \cdot W_{min}$

• ESERCIZIO: Data la σ_{am} , determina M_{MAX} (Flessione deviata)

- 1) Con la geometria delle aree, determino il momento centrale d'inerzia $\rightarrow I_x, I_y, I_{xy}$
- 2) Mi metto nel sist. di rif. centrale XY , ruotato di θ_0 (ho posto $\xi \equiv X, \eta \equiv Y$)
- 3) Scompongo M nelle direzioni XY :

$$\begin{cases} M_x = M \cos(\frac{\pi}{2} - \theta_0) \\ M_y = M \sin(\frac{\pi}{2} - \theta_0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_x = I_x \\ I_y = I_y \end{cases}$$

- 4) Individuo l'asse neutro: $AN: y = \text{Tg}(\frac{\pi}{2} - \theta_0) \cdot \frac{I_x}{I_y} \cdot x$



- 5) Prendo le T_g alla sezione nei pt. più distanti da AN, traccio le $\parallel AN$
- 6) Traccio una $\perp AN$, disegno le tensioni σ_z , che si annullano in corrispondenza di AN
- 7) Determino qual'è il pt. + lontano, per il quale avrà le tensioni maggiori $\rightarrow \sigma_{z,MAX}$ in P
- 8) Ricavo le coord. di P in XY :

$$P(x_p, y_p) \rightarrow \begin{matrix} m(x_p - x_a) \text{ Ro} \\ m(XY) \text{ Ro} \end{matrix} \begin{matrix} P(x_p - x_a, y_p - y_a) \\ \begin{cases} x_p \\ y_p \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix} \begin{cases} x_p - x_a \\ y_p - y_a \end{cases} \end{matrix}$$

- 9) Determino $\sigma_{z,MAX}$ in P:

$$\sigma_{zP} = M \left(\frac{\cos \theta_0}{I_x} \cdot y_p - \frac{\sin \theta_0}{I_y} \cdot x_p \right) = \sigma_{z,MAX}$$

- 10) Pongo: $\sigma_{zP} = \sigma_{am}$ e Trovo $|M_{MAX}|$

• ESERCIZIO: Determinare il noccolo centrale d'inerzia di una sezione

- 1) Geometria delle aree, determino il sist. di rif. centrale: $\theta_0, \eta \equiv Y, \xi \equiv X$
- 2) Raggi d'inerzia p_x, p_y ~~calcolo~~
- 3) Asse neutro, me scrivo l'equazione
- 4) Traccio le rette T_g alla sezione; fatto questo procedo per ciascuna:
- 5) Scrivo l'equazione della retta in XY :

$$y = mx + q$$

- 6) Riservo l'equazione normalizzando il termine noto: $\frac{mx}{q} - \frac{y}{q} + 1 = 0$

- 7) Egualo questi coef ai coef d. AN:

$$\begin{cases} \frac{m}{q} = \frac{e_x}{p_y^2} \\ -\frac{1}{q} = \frac{e_y}{p_x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_x = \dots \\ e_y = \dots \end{cases}$$

- 8) $P_i(e_x, e_y)$ è un punto sul bordo del noccolo; moltipli tutti ottengo il noccolo

• ESERCIZIO - Determinare con distribuzione delle tensioni Tangenziali; determina C
 1) Guardo lo spessore: se è così tutta la sezione $\Rightarrow S_x^{(1)}$ a T_{xy} , i due diagrammi hanno lo stesso andamento, quindi mi basta disegnare prima $S_x^{(1)}$

2) Considero 1 area alla volta, e cerco un'ascissa fittizia ξ_i

3) Calcolo $S_x^{(1)}(\xi_i) = A' \cdot \rho(G, G') = b \cdot \xi_i \cdot (\text{dist})$

4) Se è lineare: Trovo i 2 pt. estremi e ci vinco
 Se è parabolica: cerco i 2 estremi ed il max, e traccio

5) Se ho 1 tratto simmetrico rispetto all'asse di simmetria

\Rightarrow le S_x sono simmetriche, come KH e $K'H'$

Se ho 1 tratto simmetrico rispetto all'asse x

\Rightarrow le S_x cambiano di segno, il modulo resta uguale

6) Calcolo I_x dell'intera sezione

7) Applico Jourawsky su ogni tratto dipinto:

$$T_{xy} = \frac{T_y \cdot S_x^{(1)}}{I_x \cdot b} \quad \rightarrow \text{trovo il modulo}$$

8) Andamento delle T a S_x , per ogni tratto

9) verso: $S_x^{(1)} > 0 \Rightarrow T_{xy}$ entranti in A' $\rightarrow T_{xy} = 0$ nei pt. estremi delle A'

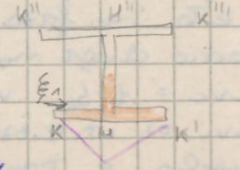
10) $C \rightarrow$ non sugli estremi assi di simmetria; se c'è 1 solo asse:

11) Metto c su tale asse, a distanza d dalla sezione

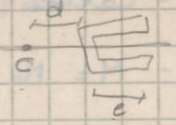
12) Calcolo le risultanti delle forze di tensione note magnitudine:

$$|\vec{F}| = \int_0^e T_{xy}(\xi_i) dA = \int_0^e T_{xy}(\xi_i) \cdot b d\xi_i$$

13) Impongo le equazioni di equilibrio e determino d (qui serve eq. di momento)



$A' \rightarrow S_x = \text{rettangolo}$
 $A'' \rightarrow S_x \text{ orizz} + S_x \text{ vertic}$



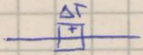
SIST + VOLTE IPERSTATICI CON SPOSTAMENTI IMPOSTI

- Faccio notevolmente M_0, M_1, M_2 , come se non avessi il S_B^*
- Calcolo $\eta_{11}, \eta_{12}, \eta_{21}, \eta_{10}, \eta_{20}$ nodine
- Guadolo \rightarrow SIST 1 $\rightarrow \eta_1^* = S_B^* \cdot F \rightarrow F$ in le eventuali, forzature e poze e_i , da rem // S_B^*
 \rightarrow SIST 2 $\rightarrow \eta_2^* = S_B^* \cdot F \rightarrow$ danno quel lavoro, altrimenti no

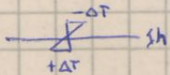
\rightarrow Trovo x_1, x_2 , in cui compare anche S_B^*

$$\begin{cases} \eta_{11} x_1 + \eta_{12} x_2 = -\eta_{10} + \eta_1^* \\ \eta_{21} x_1 + \eta_{22} x_2 = -\eta_{20} + \eta_2^* \end{cases}$$

EFFETTI TERMICI



$\Leftrightarrow \bar{\epsilon} = \frac{N}{EA}$



$\Leftrightarrow \bar{\chi} = \frac{2\alpha \Delta T}{h} = \frac{M}{EI}$

- Faccio i diagrammi N ed M come prima (T non è Tmp modificato)

$$\begin{cases} x_1 \eta_{11} + x_2 \eta_{12} = -\eta_{10} + \eta_1^* - \bar{\eta}_1 \\ x_1 \eta_{21} + x_2 \eta_{22} = -\eta_{20} + \eta_2^* - \bar{\eta}_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{\eta}_1 = \int \bar{\chi} N_1 dz + \int \bar{\epsilon} N_1 dz \\ \bar{\eta}_2 = \int \bar{\chi} N_2 dz + \int \bar{\epsilon} N_2 dz \end{cases}$$

Applico solo 