NUMERO: 1378A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: D Angelo

MATERIA: Elettrotecnica, Prof.Canavero

VENERDÌ 18-03-11

Fenomeni elettrici
↳ basati sul fatto che materia ci sono delle cariche elettriche
che sono di 2 tipi:
convenzionalmente, sono dette: + (posit) e − (negat)

Si pensabile una sferetta con qst proprietà agganciata (???)

Altre propr delle cariche elettriche:
- in presenza di cariche dello stesso tipo, che tendono ad allontanarsi, si respingono
- cariche di segno opposto → si attraggono

Altre propr. fisica:
queste cariche elettriche creano 1 influenza nelle loro vicinanze
↳ tale influenza è detta CAMPO ELETTRICO
è l'influenza delle cariche nello spazio circostante
=> a causa del campo, c'è interaz tra più cariche

Cariche → ovunque in materia, xkè atomi sono fatti da partic cariche
Ma, in 1 tipo di materie speciale → conduttori → le cariche possono muoversi. Sono x di + i materiali metallici
In tutti gli altri materiali, le cariche sono vincolate, possono solo muoversi attorno alle loro posizione

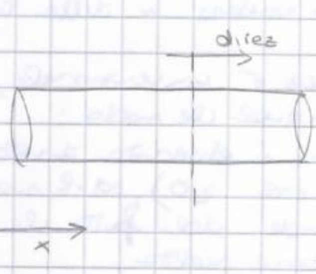
=> tutte le applicaz di elettricità sono basate sui materiali conduttori

Muovere cariche → 2 conseguenze possibili:
1) Trasferire energia (tipo motore elettrico)
2) se c'è poca energia, si trasporta cmq informazione (tipo in computer)

Serve capire come le cariche si muovono in conduttori.

CORRENTE ELETTRICA

Esperimento
Prendo 1 cilindro di materiale conduttore, in cui ci sono le cariche.
Suppongo di individuare 1 sezione nel cilindro, e ci metto per un Δt (tempo) a contare tutte le cariche che attraversano quella sez in 1 certa direz di moto, da noi definita (ad es, quella concorde con x). Conto tutte le cariche di 1 certo tipo, ad es di tipo positivo.



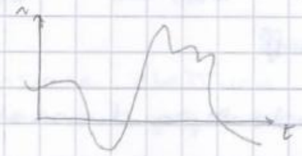
Esperimento → concettualmente facile
↳ praticamente difficile da effettuare

Risultato di qst conteggio di cariche:
Δq = quantità di carica che attraversa la sezione in Δt

(Posso farlo xkè le cariche elettr sono misurabili, ha anche unità di misura: C) Coulomb

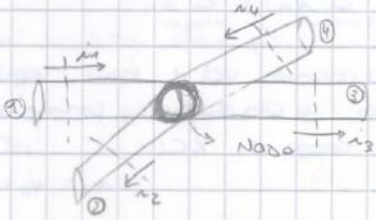
Corrente costante, detta impropriamente corrente "continua"

Corrente variabile nel tempo



LEGGE FONDAMENTALE DELLA CORRENTE:
LEGGE DI KIRCHHOFF (KCL)

Esperimento di principio:
suppongo di avere diversi conduttori, che convergono in 1 certo punto, il punto di connessione lo chiamo NODO.



Per la conservazione della materia, dovrà esserci 1 bilanciamento tra le cariche che arrivano al nodo e quelle che vanno via.
La quantità di carica entrante nel nodo deve essere bilanciata dalla quantità uscente.

Conduttore ① → faccio 1 sez e decido 1 direz delle cariche (verso dx), misuro la corrente → i_1
Conduttore ② → sez e direzione → trovo i_2
Stessa cosa per ③ e ④

Per la legge di conservaz:
la corrente che entra nel nodo deve essere controbilanciata da quella che esce.

Qui: i_1 e i_4 entrano, i_2 e i_3 escono $\Big\}$ $i_1 + i_4 = i_2 + i_3$

Legge fondamentale della corrente
dovuta al fisico tedesco Kirchhoff
↳ è detta legge di Kirchhoff → KCL

Esprimibile, in senso generale:

$$\sum_{\substack{\text{entranti}\\\text{nel nodo}}}^{n} i_n = \sum_{\substack{\text{uscenti}\\\text{dal nodo}}}^{m} i_m$$

Questa legge è base di molti esercizi

Se sposto ora la carica q da A a B
=> qual carica arriva in B, avrà associata una $E_p(B)$

Ora, definisco:

$$\frac{E_p(A) - E_p(B)}{q} = v \rightarrow \text{Tensione elettrica} \rightarrow \text{Volt}$$

unità di misura

$1V = \frac{1J}{1C}$

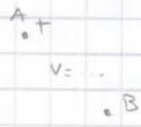
divido per q, così diventa tutto indip. da essa

↳ nuova grandezza

Nella def di tensione, è arbitraria la scelta dei pti A e B
=> la tensione va definita con 2 valori:
- il valore di v
- i punti a cui essa è riferita

} anche negli es!

=> la scriviamo così, in 3 modi possibili

1) 

+ = pto di partenza
− = pto di arrivo

2) 

Freccia indica il pto di partenza

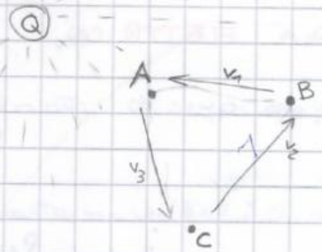
3) v_{AB}

1° indice = pto di partenza
2° indice = pto di arrivo

Corrente e tensione = 2 grandezze base x descrivere nel generale correttamente tutti i fenomeni elettrici

Esiste 1 legge fondamentale
La ricaviamo con 1 esperimento fatto

LEGGE FONDAMENTALE DELLE TENSIONI
LEGGE DI KIRCHHOFF (KVL)



Ho 1 carica, in 1 sua zona d'influenza.
Parto da A, arrivo a B dopo 1 certo percorso.
Da B vado a C
(Potrei fare altri, mille passaggi così)
Passaggio finale → Torno ad A

Per ognuno di questi segmenti, applico la def. di tensione:

$\overline{AB} \rightarrow v_1 = \frac{E_p(A) - E_p(B)}{q}$ → la indico sul disegno

$\overline{BC} \rightarrow v_2 = \frac{E_p(B) - E_p(C)}{q}$

$\overline{CA} \rightarrow v_3 = \frac{E_p(C) - E_p(A)}{q}$

Ad es: forno elettrico → estrae energia elettrica e la trasforma in calore
motore elettrico → in movimento

Se rifaccio tutto intorno cariche → Δq

$$v_{AB} = \frac{E_p(A) - E_p(B)}{\Delta q} = \frac{\Delta E_p}{\Delta q}$$

Se definisco 1 sez ed 1 verso sul conduttore
=> ho definito la corrente, data da:

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Faccio qst moltiplicazione:

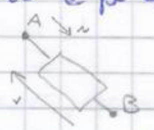
$$v \cdot i = \frac{\Delta E_p}{\Delta q} \cdot \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\Delta E_p}{\Delta t}$$ → ottengo la diff di energia nel tempo

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta E_p}{\Delta t} = \frac{dE_p}{dt} = p$$ → ho definito la potenza elettrica

=> $p = v \cdot i$

UTILIZZATORI

Faccio hp di prima $E_p(A) > E_p(B)$ => $\Delta E_p > 0$
=> sto estraendo energia dal campo elettrico
=> si parla di potenza assorbita
↓
Potenza utilizzata = è assorbita dal c.el, e poi convertita in altre forme di energia
↳ quindi, vale qnd $\Delta E_p > 0$ => $p > 0$, poiché $v > 0$
↙
Il tutto avendo preso $i > 0$, cioè il verso della corrente è nella direzione delle cariche
Utilizzatore = elemento che sta in mezzo e fa questa conversione di energia
↓
Normalmente, si rappresenta così:



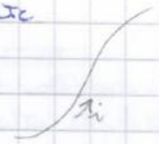
Corrente che entra nel pto a cui punta la tensione, la si chiama "convenzione coordinata di segno degli utilizzatori"
↓
Tutte le regole che useremo si basano su questa convenzione di segno

Se $E_p(A) < E_p(B)$ (analogia gravitazionale = lancio un corpo in alto)
=> $\Delta E_p < 0$
=> un esterno dà energia al sistema, al campo el.

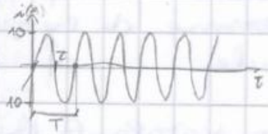
ES P 1,12

Ho una corrente su un conduttore, corrente non costante

$i(t) = 10 \cdot \sin(200\pi t)$ A



a) (DOMANDA IGNOTA) possiamo graficarla:



so che potrei scrivere:

$\sin(200\pi t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$ → eguagliando gli argomenti:

$200\pi \cancel{t} = \frac{2\pi}{T} \cancel{t} \Rightarrow T = \frac{1}{100} = 0{,}01\,s$

b) Det la carica che passa su quel filo in 1 certo intervallo di tempo che va da 0 a 5 millisec

Prendo la def di i, poi dovrò integrare con quegli estremi x trovare la carica

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \int_0^Q dq = \int_0^\tau i\,dt$$

$$\Rightarrow Q = \int_0^\tau 10 \sin(200\pi t)\,dt =$$ chiamo $\alpha = 200\pi$, è cost

$$= -10 \left[\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha t)\right]_0^\tau =$$

$$= -\frac{10}{200\pi}\left[\cos(200\pi\tau) - \cos(200\pi \cdot 0)\right] =$$

$$= -\frac{1}{20\pi}\left[\cos(200\pi \cdot 5 \cdot 10^{-3}) - \cos(0)\right] =$$

$$= \dots = \frac{1}{10\pi} \Rightarrow Q \approx \frac{1}{30}\,C$$

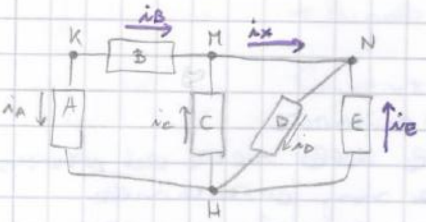
Se τ, al posto di essere esattam a metà del periodo, fosse stato $\tau = T$

ci sarebbe venuto:

$$Q = \frac{1}{20\pi}\left[\underbrace{\cos(200\pi \cdot 10 \cdot 10^{-3})}_{1} - \underbrace{\cos(0)}_{1}\right] = 0$$

cioè, passa una certa quantità in 1 direz, poi s'inverte la direz, effetto netto è zero

ES



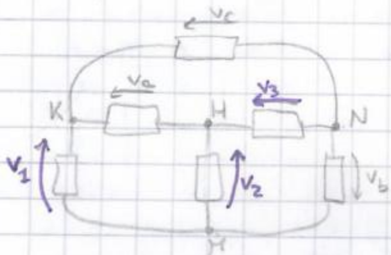
$i_B = 2A$
$i_E = 1A$
$i_x = 3A$ → è nel di collegamento, è misurata in quel tratto di filo dove non ci sono trasformaz.

Voglio det le altre i.

x 1° cosa, determino i nodi.
Ora, su ciascuno applico KCL

- nodo K → $\begin{cases} i_A = \text{esce} \\ i_B = \text{esce} \end{cases}$ ⇒ $i_A + i_B = 0$ ⇒ $i_A = -2A$
- nodo M → $\begin{cases} i_B, i_C \text{ entra} \\ i_x \text{ esce} \end{cases}$ ⇒ $i_B + i_C = i_x$ ⇒ $i_C = 1A$
- nodo N → $\begin{cases} i_x, i_E \text{ entrano} \\ i_D = \text{esce} \end{cases}$ ⇒ $i_x + i_E = i_D$ ⇒ $i_D = 4A$

ES P.1,42



$v_1 = 5V$
$v_2 = 10V$
$v_3 = 15V$

Vogliono trovare v_a, v_b, v_c

Ci servirà KVL
1° hp → serve 1 percorso chiuso, lo definisco con i nodi

- Percorso K→H→M→K
  Rispetto a qst percorso: $\begin{cases} v_a = \text{antiorario} \\ v_2 = \text{antiorario} \\ v_1 = \text{orario} \end{cases}$

  ⇒ utilizzo in 2° modo la KVL:
  $\sum_{\circlearrowright} v_i = \sum_{\circlearrowleft} v_i$

  ⇒ $\underset{\circlearrowright}{v_1} = \underset{\circlearrowleft}{v_2 + v_a}$ ⇒ $v_a = -5V$

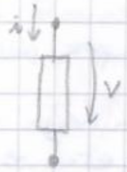
  ↳ negativo ⇒ in realtà, e l'ho definita male, devo scambiare pto di partenza e arrivo.
  Ma la lascio così, va bene (x ora...)

- Cerco un altro percorso chiuso:

  $K \xrightarrow{c} N \to H \to K$

  ⇒ $\underset{\circlearrowleft}{v_c} = \underset{\circlearrowright}{v_a + v_3} = -5 + 15 = 10V$

VENERDÌ 25-03-11



→ Bipolo

Convenzione di segno: la corrente entra dove esce la tensione

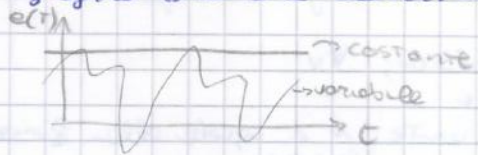
Qui, avvengono trasformaz di energia, di diversi tipi
⇒ c'è una varietà di dipoli diversi.
Sono circa 6 dipoli di tipi ≠, con ciascuno il suo simbolo particolare

1) Generatore ideale di tensione

Qst è il simbolo di qst tipo di dipolo, tt la info scritte in dati di potenza del dipolo, dati dal costruttore

Posizione del +
↳ indica il pto ad Ep maggiore all'interno del dipolo
Simbolo e → può ess 1 numero o 1 funzione
↳ "funzione impressa" o "imposta" → quantità di tensione prodotta

Esempio + semplice di generatore di tensione → batteria
è 1 cilindretto, i 2 estremi metallici sono i 2 poli con cui il dipolo è conness agli altri elementi del circuito
Sopra, avrà scritto: 15V → è il valore e, cioè la quantità di tensione che la batteria produce, che in questo caso è un valore costante
In altri tipi di generatore, la tensione prodotta è variabile, quindi servono una funzione, un grafico o altro x descriverla, sarà funzione del tempo
Ad es →



Questi in ordine detti i "dati di targa" del dipolo, sono dati dal costruttore
⇒ negli esercizi, sono i dati del problema

Vediamo cosa possiamo invece dire noi di tale dipolo.
Ci viene detto il +, cioè il pto a potenz maggiore
⇒ è meglio scrivere la tensione concorde a tale +
(quella fatta in rosso)
⇒ data questa v, metto + forza la corrente i verso il basso
(x la convenz di segno)

Dobbiamo ancora dare l'eq di funzionamento del dipolo (necessaria x i calcoli). Tale eq è:

$$v = e \quad , \forall i$$

3) Resistore ideale

R = costante, sempre (non può essere funzione ai valori di prima)
↓
Resistenza
↓ ↳ parametro fisico del resistore
misurato in Ω → Ohm

Possiamo scriverci sopra v ed i.
Il costruttore non ci dà elementi x scegliere i versi, quindi li posso scegliere così a caso, basta che siano coordinate tra loro

Equaz di funzionamento: comprende sia corrente che tensione:

$v = R i$ → legge di Ohm

I valori di R in onde variabili con la temperatura

Le eq di funzionamento si possono dare anche x via grafica.
Metodo comune: grafico (i, v)

Il resistore, dà un grafico 1 retta passante per l'origine, sempre nel 1° e 3° quadrante (essendo $R>0$)
Pendenza dipende da R

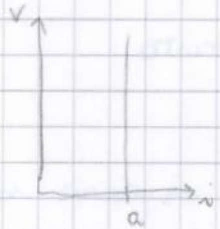
R è sempre positiva se scegliamo i segni di v ed i coordinati
=> l'eq di funz con $R>0$ vale solo se i segni in coordinati

Vediamo i grafici degli altri 2:

1) generatore di tensione

$v = e$, retta orizzontale
in genere, $e>0$

2) Generatore di corrente

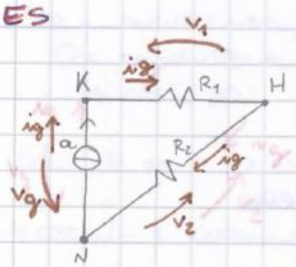


$i = a$, costante
retta verticale

Ma questo modo di procedere, non sempre è giusto, xké a volte porta a scrivere mega sistemoni → ottimi x i calcolatori, in cui esistono programmoni x risolverli

Ci sono tecniche manuali x semplificare i calcoli, modi di risolvere il circuito nz big sistemoni

ES



Circuito a 3 elementi, mi aspetto 6 incognite

Metto i_g e v_g, accordi al generatore

- Nodo K → collega 2 elementi, Ho i_g entrante
  => sfrutto subito KCL qui, che dice ke corrente entrante = corrente uscente
  => scrivo i_g come corrente del resistore R_1
- Nodo H → connette 2 soli dipoli
  stesso discorso => i_g esce dalla parte di R_2
- Nodo N → 2 collegamenti, corrente entrante = uscente, verificato.

(Possiamo sempre usare 1 nodo x verificare che, alla chiusura, la corrente sia giusta)

Poi, so che, x le gen di corrente: $i_g = a$

Guardo R_1 → completo scrivendo la tensione concorde
R_2 → idem

Sfrutto legge del resistore: $\begin{cases} v_1 = a \cdot R_1 \\ v_2 = a \cdot R_2 \end{cases}$

ora, manca solo + v_g
Applico KVL al circuito → v_1, v_2, v_g → antiorarie

$$\Rightarrow v_1 + v_2 + v_g = 0 \Rightarrow v_g = -a(R_1 + R_2)$$

Trovate tutte le variabili, senza fare sistemone, ma pensando

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 132

RESISTORE: CORTOCIRCUITO E CIRCUITO APERTO

R = dato dal costruttore, costante ≥ 0,
Non ci son regole x prendere tensione e corrente, le rettiamo a caso, ma ovvio con segni coordinati

Eq di funz → $v = Ri$
⇒ $i = \frac{1}{R} v$

chiamando $\frac{1}{R} = G$ → conduttanza

R = resistenza, dimensionato → [Ω], Ohm
G = conduttanza, dimensionato → [S], Siemens
↳ cost, ≥ 0

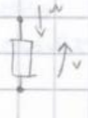
Se $R = 0$ ⇒ $v = 0$ (i non può ess ∞, è sempre 1 quantità finita)
⇒ corto circuito

⇒ ottengo 1 cortocircuito sia metendo un resistore con $R = 0$, sia avendo un generatore con $v = 0$

Se $G = 0$ ⇒ $i = 0$ (non ∃ diff di energia infinite)
⇒ circuito aperto

Se $G = 0$ ⇒ $R = \infty$
c'è opposiz infinita al passaggio delle corr, è 1 def coerente alla def data di circuito aperto

POTENZA ASSORBITA DAL RESISTORE



⇒ potenza utilizzata, consumata, assorbita
↳ $p = vi$
↳ estratta dal campo elettrico e poi usata, convertita in altre forme di energia

Suppongo: il bipolo è 1 resistore
⇒ sostituisco:

$p = Ri^2$

$i^2 > 0$
R > 0 per def } ⇒ $p > 0$ sempre
⇒ resistore assorbe sempre potenza dal campo elettrico (è detto "elemento passivo")

Altre espressione:

$p = \frac{v^2}{R} \geq 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 132

Applico KVL al circuito
v_1 → orario
v_1, v_2, v_3 → antiorario

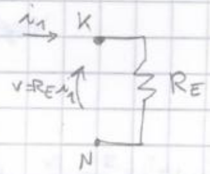
$\Rightarrow v = v_1 + v_2 + v_3$

$\Rightarrow e = R_1 i_1 + R_2 i_1 + R_3 i_1$

$\Rightarrow e = \underbrace{i_1}_{\text{unica incognita}}(R_1 + R_2 + R_3)$ $\Rightarrow i_1 = \dfrac{e}{R_1+R_2+R_3}$

Esaminiamo:
e = tensione tra KN
Possiamo quindi interpretare il circuito con 1 big resistore
Chiamiamo:

$R_1 + R_2 + R_3 = R_E$



Resistore equivalente, considera l'effetto di tutti.

Per applicarlo, ci va in hp:
devo avere dei resistori collegati in serie

$$R_E = \sum_{n=1}^{N} R_n$$

REGOLA DELLE TENSIONI PARZIALI O REGOLA DEL PARTITORE DI TENSIONE

Dallo stesso esercizio, ricaviamo un'altra regola
il risultato era:

$$e = i_1(R_1+R_2+R_3)$$

$$\Rightarrow i_1 = \frac{e}{R_1+R_2+R_3}$$

Guardo R_1:
su di esso vale la sua eq di funz. ora che è nota i_1, la sostituisco

$$v_1 = R_1 \cdot \frac{e}{R_1+R_2+R_3}$$ → così, v_1 è noto

$$\Rightarrow v_1 = e\,\frac{R_1}{R_1+R_2+R_3}$$

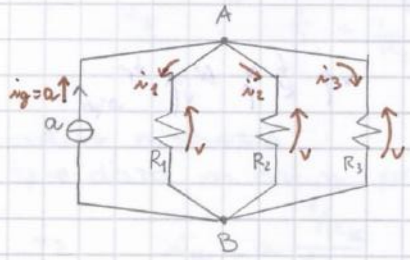
Idem su R_2

$$v_2 = e\,\frac{R_2}{R_1+R_2+R_3}$$

e su R_3

$$v_3 = e\,\frac{R_3}{R_1+R_2+R_3}$$

REGOLA DEL PARALLELO DI RESISTORI



Generatore di corrente:
⇒ pongo subito $i_g = a$, incognite
Poi metto la varie v sulla R_1 → $i_1 = \frac{1}{R_1} v$

Anche R_2 sta su A e B
⇒ anche su di essa c'è la tensione v
Idem per R_3

Def → PARALLELO (//)
↳ Dipoli che sono attaccati sempre tra gli stessi 2 nodi si dicono collegati in parallelo
⇒ Tutti i dipoli collegati in parallelo hanno la stessa tensione

Poi metto le correnti nelle resistenze

$$i_2 = \frac{1}{R_2} v \qquad i_3 = \frac{1}{R_3} v$$

Guardo il nodo A; ci applico la KCL:

$$i_g = i_1 + i_2 + i_3$$

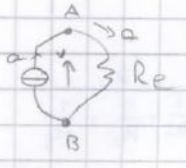
Sostituendo:

$$a = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \frac{v}{R_3}$$

$$\Rightarrow a = v \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \qquad \Rightarrow v = \frac{a}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

La riscrivo: $v = a \left(\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \right)$ → legge del resistore

La chiamo: $R_E = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$ →



→ la legge di qst resistenza è uguale a quella trovata

$$v_3 = \frac{v}{R_3} = a \frac{1/R_3}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Quindi → in generale
hp → dato un circuito parallelo con generatore di corrente

$$\Rightarrow \quad i_k = a \frac{1/R_k}{\sum_{n=1}^{N} 1/R_n}$$

Caso particolare
Suppongo $N=2$, cioè ho 2 resistori → R_1 ed R_2

- $$i_1 = a \frac{1/R_1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = a \frac{1/R_1}{\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2}} = a \frac{1}{R_1} \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$$

$$\Rightarrow i_1 = a \frac{R_2}{R_1+R_2}$$

→ qst formula è molto simile a quella del "partitore di tensione", ma la R sopra è "l'altra" rispetto a quella che sto guardando

- $$i_2 = a \frac{1/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} = a \frac{1/R_2}{\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2}} = a \frac{1}{R_2} \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$$

$$\Rightarrow i_2 = a \frac{R_1}{R_1+R_2}$$

Caso particolarissimo:
$N = 2$, $R_1 = R_2 = R$

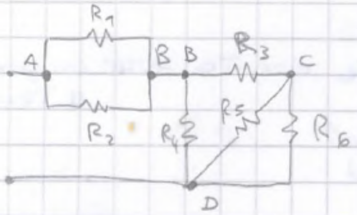
$$\Rightarrow i_1 = a \frac{R}{2R} \Rightarrow i_1 = \frac{a}{2}$$

$$i_2 = \frac{a}{2}$$

Se ci sono tante resistenze → N resist uguali R in parallelo

$$\Rightarrow \quad i_K = \frac{a}{N}$$

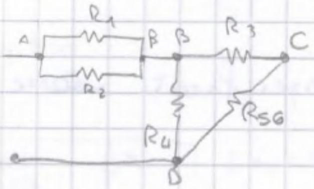
ES



Metto, nodi

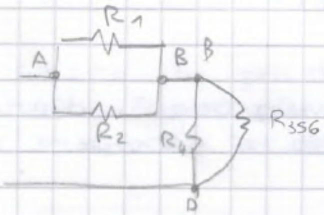
Tra B e B → non c'è nessun bipolo in mezzo, quel tratto serve solo x distanziare, ne è lo stesso polo (elettrico)

Circuito misto
Parto dal più + lontano → R_6
R_6 → collegato a C e D
Anche R_5 è così
=> in parallelo => $R_{56} = \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6}$

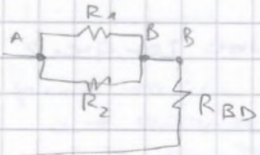


Ora, guardo R_{56} → al nodo C, è in serie con R_3

$R_{356} = R_3 + R_{56}$

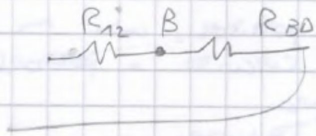


Guardo R_{356}, tra B e D, con R_4 => $R_{BD} = \frac{R_4 R_{356}}{R_4 + R_{356}}$



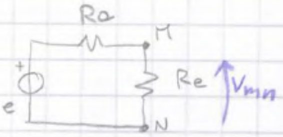
Guardo R_{BD} → collegato in B col R_1 e R_2
=> Per qst volta però devo guardare prima R_1 e R_2, in parallelo

$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$



=> $R_{eq} = R_{12} + R_{BD}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 132



Ok, ora qst circuito si può risolvere col paradigma del partitore di tensione

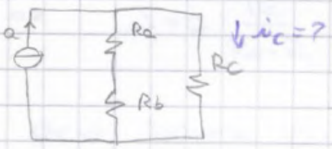
Da trovare → $V_{MN} = ?$
↳ già vero in imposto della formula del partitore
↳ se così non fosse, ne cambio verso e segno

Quindi, applico la formuletta:

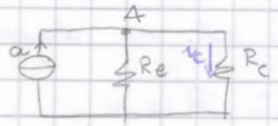
$$V_{MN} = e \frac{R_e}{R_a + R_e}$$

ESERCIZIO

Incognita → $i_c = ?$



Qst circuito ha gen di corrente ed è misto
⇒ provo a riportarlo al partit di corrente
Devo unire R_a ed R_b, che sono in serie



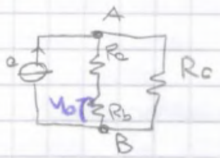
$R_e = R_a + R_b$

Ora, faccio verifica dei versi di correnti in A:
a → entrante
i_c → uscente
} ok

Applico formula semplificata (ho solo 2 correnti):

$$i_c = a \frac{R_e}{R_e + R_c}$$

ESERCIZIO



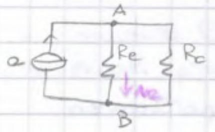
incognita: $v_B = ?$

Anche se cerco 1 tensione, posso se cercare di riduzioni ed 1 partitore di corrente

=> dovrò cercare prima la corrente e poi det. la tensione

R_a ed R_b → serie

$R_e = R_a + R_b$



→ se faccio così, mi mangio l'incognita. Ma qui devo a forza fare così.
Devo cercare la corrente di R_c, quella correlata al posto dove prima c'era l'incognita.

=> i_e = variabile parziale che introduco (la metto di verso concorde al segno del partitore)

=> $$i_e = a \frac{R_c}{R_e + R_c}$$

Ora, devo tornare al circuito di partenza, dove c'è la mia incognita

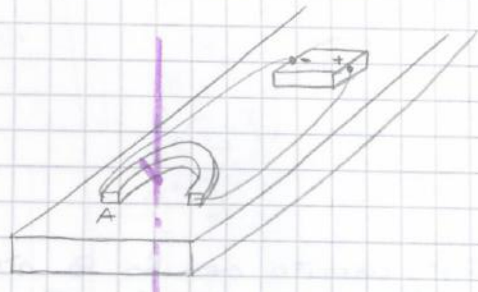
i_e = corrente che scorre tra i nodi A e B

↓ determino 1 tensione concorde al segno di v_B

passando in R_B, det. una tensione pari a:

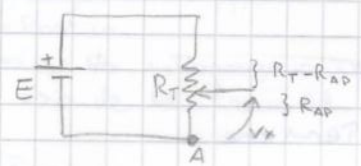
$$v_b = R_b i_e$$

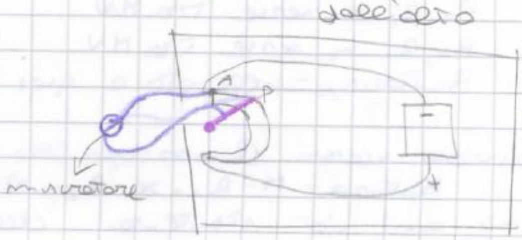
Ora, nel centro del semicerchio, monto 1 asse verticale che buca il supporto
A quest'asse attacco 1 pezzetto di metallo che striscia sul semicerchio.
↓
Congegno, solidale con asse, che striscia sul semicerchio.



Ora, misuro la tensione tra pto A al pto P → V_x

Il circuito è così:

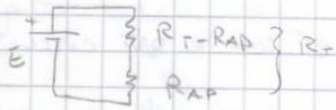




R_T = totale del semicerchio
R_{AP} = collegata prima, è quel pezzo di resistenza

Guardo se il circuito → come faccio a trovare V_x?
Posso applicare il partitore di tensione, xké i 2 pezzi di resist. sono 2 resistori in serie

Dunque:



$$V_x = E \frac{R_{AP}}{R_T} = E \frac{\rho_{cu} \frac{r_0 \vartheta}{bs}}{\rho_{cu} \frac{r_0 \pi}{bs}} =$$

$$\Rightarrow V_x = E \frac{\vartheta}{\pi}$$

Alla fine, ho prodotto un misuratore elettrico di angolo: posso misurare la tensione V_x con lo strumento, ed essa è direttamente proporzionale all'angolo
Questo può avere molte applicazioni, come misurare la banderuola del vento (direzione)

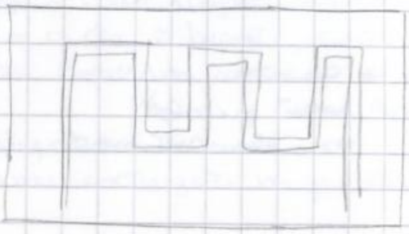
GIOVEDÌ 7-03-11

SENSORE DI DEFORMAZIONE: ESTENSIMETRO

Avevamo visto, per un conduttore a filo:

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

Suppongo di avere 1 supporto, su cui deposito 1 strato di materiale metallico, a serpentina

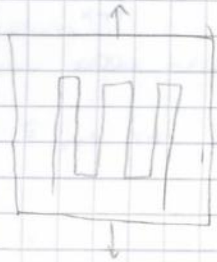


Lunghezza = complessiva della serpentina

Suppongo: il supporto è 1 materiale elastico

=> se lo sottopongo a trazione, esso si allunga

=> anche le tracce di serpentina si allungano



Chiaro:

$$R_0 = \rho \frac{l_0}{A}$$ → resistenza a riposo, non allungato

Se sottopongo a trazione:

$$R_a = \rho \frac{l + \Delta l}{A} = R_0 + \rho \frac{\Delta l}{A} = R_0 + \Delta R$$

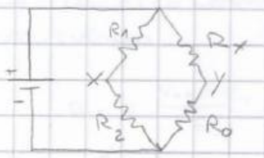
→ resistenza dopo trazione

→ suppongo che la sez di serpentina resti costante (sua diminuzione è trascurabile rispetto ad allungamento Δl)

ΔR → variaz di resistenza dovuta a trazione

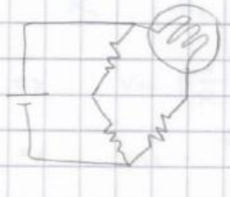
Ma voglio leggere elettricamente quest'effetto.

La scorsa volta, avevamo fatto



$$v_{xy} = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} - E \frac{R_0}{R_x + R_0}$$

Ipotizzo: al posto di R_x, metto la nostra piastrina



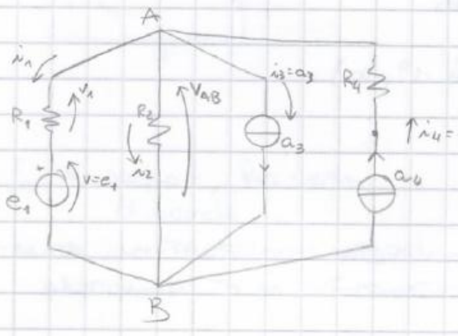
hp: $R_1 = R_2$, x semplificare

$$\Rightarrow v_{xy} = E \cdot \frac{1}{2} - E \frac{R_0}{R_x + R_0}$$

hp: $R_0 = R_0$ a riposo del sensore

$$\Rightarrow v_{xy} = E \frac{1}{2} - E \frac{R_0}{R_0 + \Delta R + R_0}$$

TEOREMA DI MILLMAN



Tante cose collegate in parallelo, ma i vari pezzi non sono tutti singoli bipoli: sono anche 2 bipoli, collegati tra loro in serie.

Gli elementi sono Rami collegati in parallelo

Metto le tensioni e le correnti.
Guardo tensore 1 → circuito $v = e_1$, x forza in quel senso.
Metto i_1 così in R_1
=> e: avrò $v_1 = i_1 R_1$

R_2 → è in // => avrò v_2 così → V_{AB}
=> i_2 sarà così, e sarà: $i_2 = V_{AB}/R_2$

Ramo 3 → di sicuro, ho $i_3 = a_3$
Ramo 4 → di sicuro ho $i_4 = a_4$
=> in R_4 passa quella corrente

Guardo Ramo 1 e ramo 2, essendo in parallelo:

$$V_{AB} = e_1 + v_1 = e_1 + R_1 i_1$$

Guardo: ho scritto ∀ le correnti
=> applico la KCL, ad es nel nodo A:

$$i_4 = i_1 + i_2 + i_3$$

Cerco di ricavarmi i_1: $V_{AB} = e_1 + R_1 i_1$ => $i_1 = \frac{V_{AB} - e_1}{R_1}$
Sostituendo:

$$a_4 = \frac{V_{AB} - e_1}{R_1} + \frac{V_{AB}}{R_2} + a_3$$

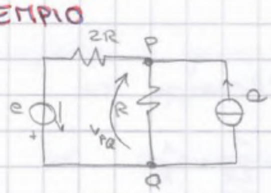
unica incognita rimasta: V_{AB}

$$\frac{V_{AB}}{R_1} + \frac{V_{AB}}{R_2} = a_4 + \frac{e_1}{R_1} - a_3$$

$$\Rightarrow V_{AB}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{e_1}{R_1} + a_4 - a_3$$

$$\Rightarrow V_{AB} = \frac{e_1/R_1 + a_4 - a_3}{1/R_1 + 1/R_2}$$ → potrei fare 1 controllo dimensionale

ESEMPIO



Struttura in parallelo

Dò il segno ed il verso di V_{PQ}

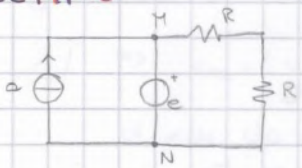
Applico Millman:

$$V_{PQ} = \frac{-\frac{e}{2R} + a}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R}}$$

$-\frac{e}{2R}$ → segno -, ha verso discorde

$+a$ → punta verso il pto di partenza di tensione (P)

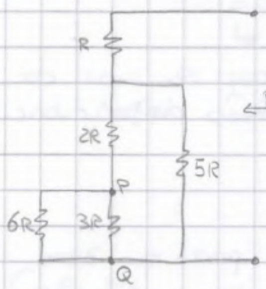
ESEMPIO



In questo circuito, manca la resistenza in serie del generatore => dal pto di vista teorico, ci son problemi x applicare la formula

Se fosse il circuito normale, dovrei calcolare V_{MN}
Ma: e è vero proprio tra i nodi!
=> $V_{MN} = e$
→ non c'è bisogno di applicare la formula

ESEMPIO

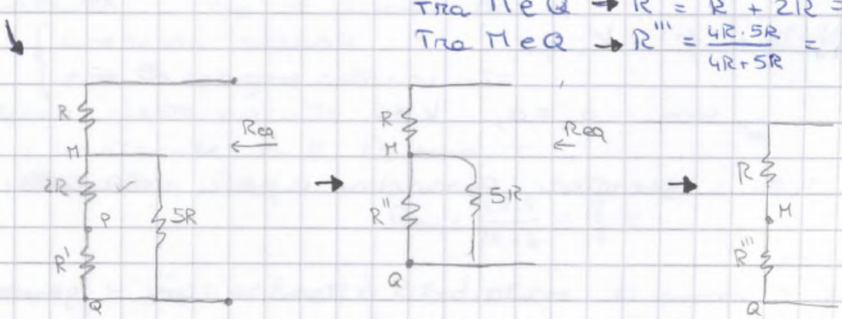


Voglio trovare la Req complessiva da quel pto => parto dal pto + lontano, cioè 6R

Tra P e Q → $R' = \frac{6R \cdot 3R}{6R+3R} = 2R$

Tra M e Q → $R'' = R' + 2R = 4R$

Tra M e Q → $R''' = \frac{4R \cdot 5R}{4R+5R} = \frac{20}{9} R$



Alla fine:

$$R_{eq} = R + R''' = \frac{29}{9} R$$

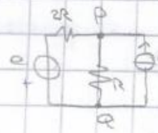
Spegnere 1 generatore → porlo = 0 -
=> $g_k = 0$

Se g_k = generatore di tensione
=> $g_k = 0$ => cortocircuito

Se g_k = generatore di corrente
=> $g_k = 0$ => circuito aperto

ESEMPIO

Usiamo l'altro metodo x l'es di prima
Suppongo di voler trovare V_{PQ}
Sono fatto di tanti termini quanti i generatori ci sono:

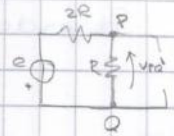


$$\Rightarrow V_{PQ} = \underbrace{V'_{PQ}}_{\text{dipende da } e} + \underbrace{V''_{PQ}}_{\text{dipende da } a}$$

=> Posso calcolare i 2 contributi separatamente.

Calcolo V'_{PQ} → dipende da e

{ e → resta acceso
{ a → spento => circuito aperto

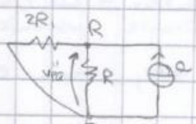


=> ottengo qst circuito, che ha struttura del partitore di tensione
↳ ricordo: tensione parziale va resa in modo da opporsi al generatore
↳ qui, invece, la insegue, non si oppone
=> con il partitore di tensione, ottengo 1 tensione di segno opposto:

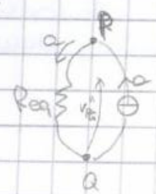
$$V'_{PQ} = -e \frac{R}{2R+R} = -\frac{e}{3}$$

Calcolo V''_{PQ} → dipende da a

{ a → resta acceso
{ e → lo spengo ⇒ cortocircuito



Ottengo questo circuito
Ho 2 resistenze in //, le sommo, e calcolo la Req



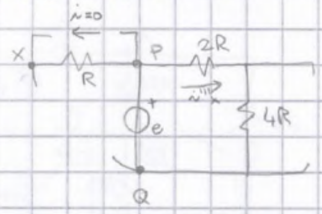
$$R_{eq} = \frac{2R \cdot R}{2R+R} = \frac{2}{3} R$$

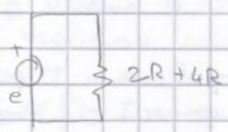
Adesso: $V''_{PQ} = a \cdot R_{eq} = \frac{2}{3} R \cdot a$
↳ è la tensione che c'è in Req, con legge di ohm

Risultato finale:

$$V_{PQ} = -\frac{e}{3} + \frac{2}{3} R a$$

- Calcolo i_x''':

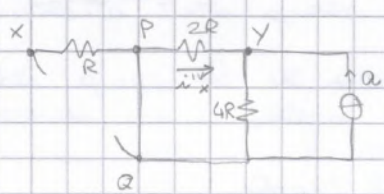




In x → circuito aperto e $i=0$

$$\Rightarrow i_x''' = \frac{e}{6R}$$

- Calcolo i_x^{iv}:

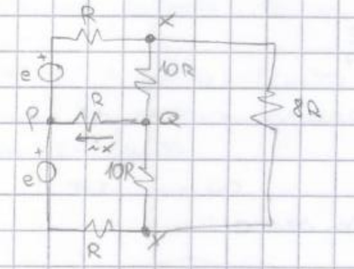


→ partitore di corrente

$$i_x^{iv} = -a\frac{4R}{2R+4R} = -\frac{2}{3}a$$

$$\Rightarrow i_x = \frac{e}{6R} - \frac{2}{3}a$$

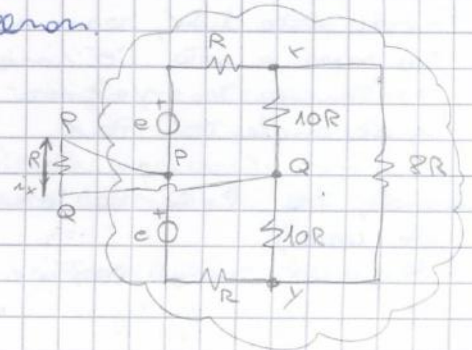
ESEMPIO DI APPLICAZIONE DI THEVENIN



Vogliamo calcolare quella i_x = ?

Non faccio sovrapp. di effetti, troppo lungo. Serve regola che potrei fare
- Millman → qst struttura non va bene, non ci sn tutti rami //
- Partitori → non c'è nè tutti paral nè tutti serie

Se non avessi la R dove voglio cercare i_x, ci verrebbe 1 strutt x Millman.
Prendo circuito, lo ridisegno così, tirando quella R fuori (tipo elastico)
Ora, nuvoletto tutta quella parte di circuito
Dico che quella è il sottocircuito di partenza, che si collega a quel che rimane solo con 2 nodi, P e Q



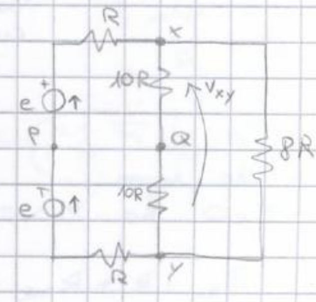
Ho partizionato il circuito in 2, pti di connessione sono P e Q

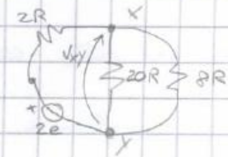
Ora, sfrutto il teo Thevenin:
tutta quella parte è sostituibile con questo →
Resta fuori solo il sottocircuito B, che è solo quel resistore disegnato, in cui scorre la i_x che cerco
Questo piccolo circuito si risolve facilmente.

Devo solo trovare i valori di v_0 ed R_e
Uso 2° parte di Thevenin

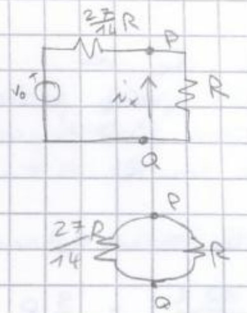
Calcolo v_0:
è 1 circuito tipo Millman
⇒ calcolo facilmente la v_{xy}
Dobbiamo solo accorpare le varie cose nei rami
Ramo con 2 resistenze → 20R
Ramo di sx:
- sono i 2 generatori, che sn in serie equiversi
- 2 resist → 2R

(in un ramo in serie, non importa l'ordine in cui sono)





© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 132



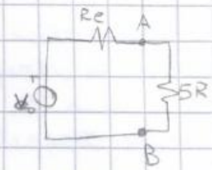
Quindi, il circuito è:
Possiamo cercare la i_x
$V_0 = 0$
=> è 1 cortocircuito
Ma non ho nessun generatore nel circuito
=> $i_x = 0$

ESERCIZIO

Vogliamo cercare V_x

Regole precedenti: non ce ne sono di mediate da calcolare

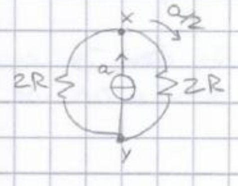
Faccio questa partizione, creo questo sottocircuito, che si collega col resto solo tramite A e B
=> hp di Thevenin verificate



Tutto il sottocircuito diventerà così:

Calcolo V_0

Circuito con 1 generat di corrente, e 2 rami di resist in parallelo uguali.
Lo ridisegno



Noto che posso applicare il partitore di corrente, in condiz. pari. Valore
Correnti parziali, che sono uguali, escono da x e sono pari ad $\frac{a}{2}$

Ora torno al circuito di prima,
Da x esce corrente $a/2$, che passa anche in R dopo
=> calcolo subito la tensione tra A e B:

$$V_0 = \frac{Ra}{2}$$

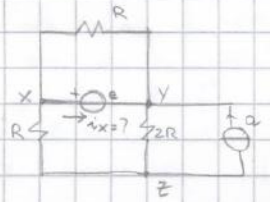
GIOVEDÌ 14-04-2011

Riprendiamo:
Th. Tevenin
↳ hp → un circuito qualsiasi, lo posso separare in 2 parti, collegate tra di loro solo attraverso 2 nodi → A e B
↙
Presa una qualsiasi delle 2 parti, essa può essere sostituita da questo schema
(grande semplificazione)

Tali quantità sono:

- V_o = Tensione a vuoto, quella che mi ritrovo sull'oggetto di partenza quando A e B sono lasciati aperti.
- R_e = resistenza equivalente, quella che ho con i generatori spenti (gen di tensione = cortocircuito; gen di corrente = circuito aperto)

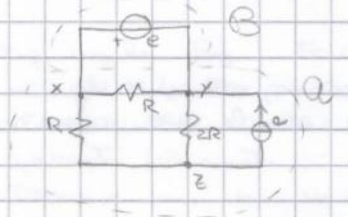
ESEMPIO



voglio trovare quella i_x

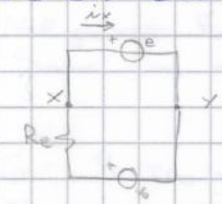
Un modo di risolvere in modo semplice è: cerco di separarlo in 2 parti, in modo che l'elemento su cui cerco la mia incognita sia tenuto da parte rispetto al resto

Lo disegno così, scambio e ed R (parallelo)

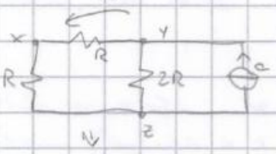


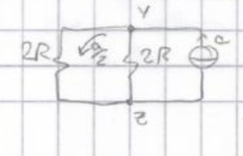
Ora, noto: posso isolare una parte di circuito, in modo che l'elemento rimasto fuori è solo il generatore e
Ho riprodotto così la situazione del Teorema

Posso così creare l'equivalente di a, per sostituirlo
Quindi, ci basta determinare v_o ed R_e per trovare l'incognita i_x

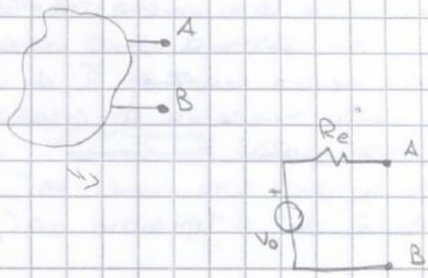


Calcolo v_o → e ho scelta (a caso) col + verso la x, quindi la prendo nel calcolo rivolta verso x
Ho 2 resist in serie, le unisco.
Ora, ho struttura da partitore di corrente, mi calcolo la corrente dalla parte a sx, con 1 regola da caso particolare (le resist sono uguali), cioè la corrente si divide a metà tra i 2 rami

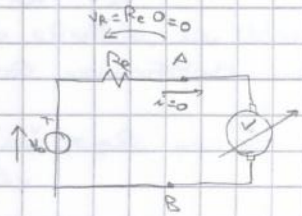




APPLICAZIONE



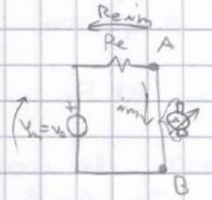
Suppongo di avere 1 circuito, dentro ad 1 scatola, non lo vediamo, ne ci è accessibile con 2 soli Terminali (2 nodi).
Riusciamo a dire, col T. Thevenin, che tale scatola è equivalente ad 1 cosa fatta così.
Ci serve 1 strategia x trovare i valori di vo ed Re, senza conoscere ciò che c'è dentro
Ci son vari modi



Attacco ad A e B un misuratore di Tensione, che è 1 strumento ideale che sente la Tensione ma non fa passare nessuna corrente → v_m, con $i=0$

Se $i=0$ nel misuratore
=> $i=0$ anche in Re
=> su Re c'è Tensione pari: $R_e \cdot i = 0$
Nel generat: ho Tensione vo.
=> il misuratore misura solo quella v_o
=> $v_m = v_o$ (la $v_R = 0$, quindi non è misurata)

Quindi, con qst misuratore e con Thevenin, so che dall'esterno, la scatola è rappresentabile con v_o



Serve anche Re. Faccio questa cosa:
collego in corto circuito A e B
Se misuro nel cortocircuito qnt vale la corrente (la metto in mezzo di A e B),
Trovo i_m, con $v_o = 0$ (cortocircuito)
Tale i_m, passa in Re
=> in Re ho 1 Tensione: $R_e i_m$
Nel generat ho sempre $v_o = v_m$
Sono in sensi opposti

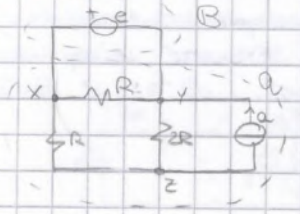
$$\Rightarrow v_m = R_e i_m \Rightarrow R_e = \frac{v_m}{i_m}$$

Così, ho trovato e' equivalente di Thevenin x questa scatola
=> posso usare e' equivalente

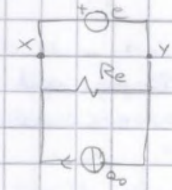
Spesso, si dice che: $R_e = \frac{\text{Tensione a vuoto}}{\text{Corrente di cortocircuito}}$

Inconveniente: se fai cortocircuito fai BUM
Spesso (ad es x 1 batteria), Re è molto piccola, → 0.
Ma allora: $v_m = R_e i_m$
Se $R_e \to 0$ => i_m è enorme, $i_m \to \infty$

ESEMPIO

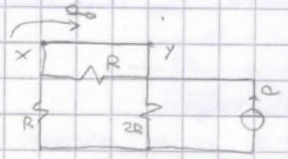


Vogliamo applicare Norton
Separo in 2 parti
Tutta la parte A la sostituisco così:



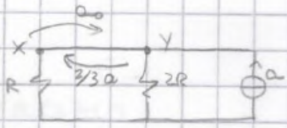
la a_o la metto con verso a caso.

Ci calcoliamo a_o cortocircuito:



Occhio ai segni: abbiamo messo a_o arbitrariamente verso sx
=> ora che la devo calcolare, la devo calcolare in modo coerente, cioè deve inseguire a_o:
a_o va da ~~y~~ a x => qui, la prendo che la insegue, da x a y

Tra x e y, c'è un 1 cortocircuito ed 1 resistore in parallelo
=> corrente passa tutta in cortocircuito
=> quel resistore non ha nessun effetto, lo tolgo



È di nuovo la struttura del partitore di corrente. Per regola di partitore la corrente parziale insegue a, è in quel verso (verso sx) e vale:

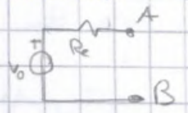
$$a\frac{2R}{R+2R} = \frac{2}{3}a$$

Ma io cerco 1 corrente da x a y, quindi cambio di segno

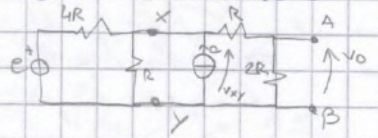
$$\Rightarrow a_o = -\frac{2}{3}a$$

Re → è quella trovata con Thevenin, è uguale
=> trovato Norton

Ora, proviamo a risolvere con Thevenin lo stesso circuito
Dobbiamo ricavare V_0 ed R_e:



Calcolo V_0: è la tensione tra A e B aperti.

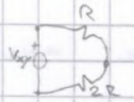


Metto V_0 in questo verso arbitrario
Noto: dati x e y, posso usare Millman, sommando le resist. in serie $R+2R = 3R$

$$\Rightarrow \quad V_{xy} = \frac{\frac{e}{4R}+a}{\frac{1}{4R}+\frac{1}{R}+\frac{1}{3R}} = \frac{\frac{e+4Ra}{4R}}{\frac{19}{12R}} \Rightarrow \quad V_{xy} = \frac{3}{19}(e+4Ra)$$

→ ci verrà // della V_{xy} di prima

Ora: guardo verso DX:
è 1 partitore di tensione

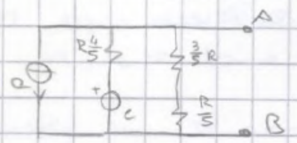


$$\Rightarrow \quad V_0 = V_{xy}\frac{2R}{2R+R} = \frac{2}{3}V_{xy} =$$

$$\Rightarrow \quad V_0 = \frac{2}{19}(e+4Ra)$$

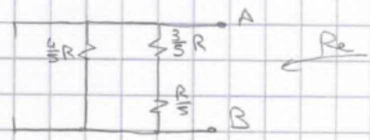
Calcolo di R_e → identico a quello prima

ESERCIZIO



Calcoliamo R_e (il resto fallo tu!)
Spengo i generatori
in serie:

$$\frac{3}{5}R+\frac{1}{5}R = \frac{4}{5}R$$



in parallelo:

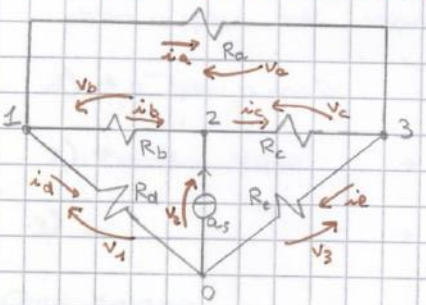
$$\frac{\frac{4}{5}R\cdot\frac{4}{5}R}{\frac{8}{5}R} = \frac{16}{25}\cdot\frac{5}{8}R = \frac{2}{5}R = R_e$$

meglio ancora:

$$R_e = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}R = \frac{2}{5}R$$

VENERDÌ 15-4-11

METODO DEI NODI O DELLE TENSIONI NODALI



Proviamo a risolverlo con un approccio diverso
Individuo i nodi,
Li numero partendo dal n° zero, a caso.
Definiamo delle tensioni prese così:
un nodo alto, rispetto ad 1 nodo di riferimento

Convenzione: il nodo ≠ 0 ha energia potenz + alta, freccia va verso di lui
Tra 1 e 0 → 1 ha pot + alto ⇒ freccia v_1 verso 1
Idem per v_2 e v_3
Queste 3 sono tensioni nodali
Per come abbiamo costruito:
se parto da 1 circuito con n nodi
⇒ potrò costruire n-1 tensioni nodali, definite rispetto ad un unico riferimento (nodo 0)

Ora, su ogni dipolo metto 1 corrente (presa a caso)
Su R_a → metto quella i_a, a caso
Su R_b → metto i_b
E così x le altre parti → i_d, i_e, e su a_s la corrente è la stessa a_s
Ogni corrente, passando nel resistore, dà 1 certa tensione
⇒ segno le tensioni v_a, v_b, v_c, ed i loro versi in obbligati
i_d, i_e → danno delle v_d, v_e concordi e coincidenti con v_1 e v_3

Guardo v_a = tensione tra i nodi 1 e 3, presi in quest'ordine

Prendo 1 percorso chiuso: 0130, il triangolo in alto
Cerco il KVL:

$$v_1 = v_a + v_3$$

Prendo 1 altro percorso chiuso → 0120
Cerco il KVL:

$$v_1 = v_b + v_2$$

Altro percorso chiuso 0230
KVL →

$$v_2 = v_c + v_3$$

Ho 3 equaz.
La 1ª ci permette di esprimere la tensione di R_a in funzione delle tensioni nodali v_1 e v_3:

$$v_a = v_1 - v_3$$

Ora, scrivo tutte le equaz in modo che la v relativa al nodo che ho preso appaia col segno positivo nell'equazione

1) → è già a posto

2) → cambio segno → $-\frac{v_1}{R_b} + \frac{v_2}{R_b} + \frac{v_2}{R_c} - \frac{v_3}{R_c} = +a_s$

3) → → $-\frac{v_1}{R_a} - \frac{v_2}{R_c} + \frac{v_3}{R_a} + \frac{v_3}{R_c} + \frac{v_3}{R_e} = 0$

Ora, riscrivo

$$v_1\left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_d}\right) + v_2\left(-\frac{1}{R_b}\right) + v_3\left(-\frac{1}{R_a}\right) = 0$$

$$v_1\left(-\frac{1}{R_b}\right) + v_2\left(\frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c}\right) + v_3\left(-\frac{1}{R_c}\right) = a_s$$

$$v_1\left(-\frac{1}{R_a}\right) + v_2\left(-\frac{1}{R_c}\right) + v_3\left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_e}\right) = 0$$

↓

Ecco il sist in 3 equaz in 3 incognite: v_1, v_2, v_3

È 1 sistema lineare

=> lo posso scrivere in matrici

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_b}+\frac{1}{R_d} & -\frac{1}{R_b} & -\frac{1}{R_a} \\ -\frac{1}{R_b} & \frac{1}{R_b}+\frac{1}{R_c} & -\frac{1}{R_c} \\ -\frac{1}{R_a} & -\frac{1}{R_c} & \frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_c}+\frac{1}{R_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

Guardo i termini nella diagonale della matrice dei coef.

$\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c}$ → sono i 3 resistori attaccati al nodo 1

$\frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c}$ → sono i 2 resistori attaccati al nodo 2

$\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_e}$ → sono i 3 resistori attaccati al nodo 3

=> Regola per la matrice dei coefficienti

I termini lungo la diagonale (k_{ii}) sono uguali alla somma dei reciproci dei resistori attaccati al nodo i

$$\Rightarrow \quad k_{ii} = \sum_{\substack{\text{DEL} \\ \text{NODO } i}} \frac{1}{R_n}$$

Ora, guardo termini delle celle non diagonali

1a riga → riferita al nodo 1

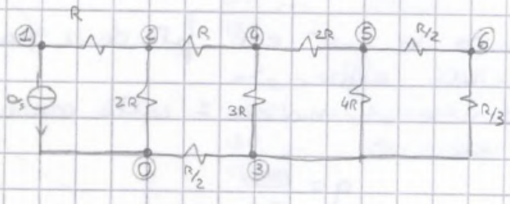
↳ 2a colonna → $-\frac{1}{R_b}$ → riferito a v_2, tra nodo 1 e 2

↳ 3a colonna → $-\frac{1}{R_a}$ → riferito a v_3, tra nodo 1 e 3

↓

Sono tutti negativi

ESEMPIO



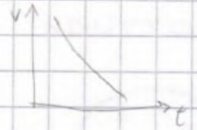
Prima cosa: individuo i nodi e li numero
Ci aspettiamo di avere 1 matrice 6×6

$$
\begin{array}{c|cccccc|}
 & ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \\
N\ ① & \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
② & -\frac{1}{R} & \frac{1}{R}+\frac{1}{2R}+\frac{1}{R} & 0 & -\frac{1}{R} & 0 & 0 \\
③ & 0 & 0 & \frac{1}{R/2}+\frac{1}{3R}+\frac{1}{4R}+\frac{1}{R/3} & -\frac{1}{3R} & -\frac{1}{4R} & -1/\frac{R}{3} \\
④ & 0 & -\frac{1}{R} & -\frac{1}{3R} & \frac{1}{R}+\frac{1}{2R}+\frac{1}{3R} & -1/2R & 0 \\
⑤ & 0 & 0 & -\frac{1}{4R} & -1/2R & \frac{1}{2R}+\frac{1}{4R}+\frac{1}{R/2} & -1/\frac{R}{2} \\
⑥ & 0 & 0 & -1/\frac{R}{3} & 0 & -1/\frac{R}{2} & \frac{1}{R/2}+1/\frac{R}{3}
\end{array}
$$

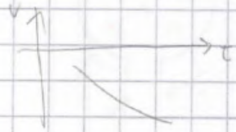
Ora, vettore termini noti, che mi generatori attaccati ad ogni nodo

$$
\begin{bmatrix} -a_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 132



$v>0$, semipiano superiore
$\frac{dv}{dt}<0$, decresce } $\Rightarrow p<0$



$v<0$, semipiano inferiore
$\frac{dv}{dt}<0$, decresce } $\Rightarrow p>0$

Quindi non possiamo dire nulla sul segno della potenza per il condensatore

Se $\begin{cases} p>0 \Rightarrow \text{preleva energia dal campo elettrico} \\ p<0 \Rightarrow \text{eroga energia (la fornisce) al campo elettrico} \end{cases}$

Esaminiamo la cosa in termini di energia:
Per la def di potenza:

$$p=\frac{dE}{dt} \Rightarrow Cv\frac{dv}{dt}=\frac{dE}{dt}$$

$$\Rightarrow \int_{E_0}^{E} dE=\int_{v_0}^{v} Cv\,dv$$

$$\Rightarrow E-E_0=\frac{1}{2}C(v^2-v_0^2)$$

$$\Rightarrow E=\underbrace{\cancel{E_0}-\cancel{\frac{Cv_0^2}{2}}}_{\text{perché sono energia alla tensione di riferimento}}+\frac{Cv^2}{2}$$

$$\Rightarrow E=\frac{Cv^2}{2} > 0, \text{ di sicuro è positiva, sempre}$$

e è energia intrinseca, immagazzinata

$\Rightarrow$ L'energetica del condensatore va espressa lavorando sull'energia, non sulla potenza

Quindi è conveniente che la potenza sia $p \gtrless 0$, ma l'energia deve restare sempre positiva (cioè deve restarne dentro sempre almeno un minimo)

INDUTTORE

Corrente in senso orario
=> si produce 1 campo entrante nella spira
che è detto campo d'induzione → b
Si trascura la resistenza della spira
Flusso d'induzione:

$$\phi = b \cdot A$$

con A = area della spira

Tale flusso:

$$\phi = L i$$

con L = induttanza, costante
↳ si misura in H → henry

in qst eq di funzionamento, manca la tensione
Cerchiamo di ricondurla ad avere sia tensione che corrente

Ricordo: legge di Faraday (Lenz)
su qst spira si produce 1 variazione di tensione pari alla variaz di ϕ:

$$v = \frac{d\phi}{dt}$$

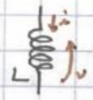
→ in teoria, c'era il −, ma grazie alla convenzione di prendere la v così, non ce n'è bisogno

Sostituendo, otteniamo la legge di funzionamento dell'induttore:

$$v = L\frac{di}{dt}$$

→ vale solo prendendo i segni coordinati; altrimenti c'è il segno − (che, invece, così è già interno alla v)

Viene indicato così:



Per definire la corrente:

$$i = i_0 + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dT$$

La potenza viene:

$$p = vi = L\frac{di}{dt}\, i$$

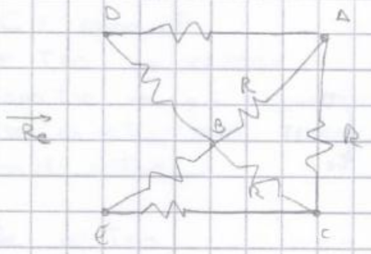
→ anche qui, non ponendo altro nella del segno di p, potrebbe essere sia positiva che negativa

L'energia:

$$E = \frac{L}{2} i^2 \quad \geq 0, \text{ sempre}$$

=> induttore immagazzina energia, e se la fornisce all'esterno, ne fornisce cmq al max la quantità che aveva immagazzinato

ESERCIZIO - COLLEGAMENTI A STELLA ED A TRIANGOLO



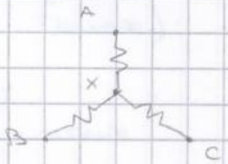
X risolverlo, servono altri modi di collegare:

- a triangolo (Δ)

→ 3 resistori tra 3 vertici, ed ogni vertice e' poi collegato ad altro

Per questi 2 casi, vediamo il caso particolare, in cui le 3 resistenze sono uguali: ← • a stella (λ)

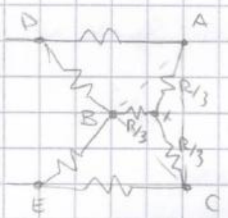
$$\Rightarrow R_\Delta = 3 R_\lambda$$



→ ognuno dei 3 vertici e' collegato al baricentro x

- 1° modo x trasformare

Proviamo a considerare i 3 nodi A, B, C come se fossero 1 triangolo, e lo trasformo in stella: introduco un vertice nel baricentro, ed ogni vertice lo collego al baricentro



le resistenze R_Δ valevano R

$\Rightarrow$ le R_λ sono $\frac{1}{3} R_\Delta \Rightarrow \frac{1}{3} R$

- 2° modo x trasformare

Considero le resist tra ADB, e lo ridisegno con lo stesso ragionamento →

Poi, considero triangolo BCE, e lo cambio

Così, ottengo le resist x-A-C-y tutte in serie, come anche le resist x-B-y, e posso risolverlo con paralleli vari →

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 132

ESERCIZIO

$C = 2000\,\mu F$

$\begin{cases} \text{al } T=0 \rightarrow v = 100\,V \\ \text{dopo } T=0 \rightarrow i = 100\,\mu A = \text{cost} \end{cases}$ ↗ si instaura 1 corrente costante

Quanto ci mette tale corrente a scaricare completamente il condensatore?

Se al $T=0$ $\quad v = 100\,V$

$\Rightarrow q = CV = 2000 \cdot 10^{-6}\,F \cdot 100\,V = 0{,}2\,C$

↳ carica presente all'inizio

Al generico t (quello che vogliamo trovare):

$$v(T=?) = v(T=0) + \frac{1}{C}\int_0^{t?} \underbrace{100\,\mu A}_{i = \text{nota e costante}}\,dt =$$

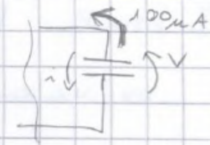
$$\underbrace{v(T=?)}_{} = 100\,V + \frac{100 \cdot 10^{-6}\,A}{2000 \cdot 10^{-6}\,F}\,(t-0)$$

è la tensione quando non c'è + carica nel condensatore: $q=0 \Rightarrow v=0$

$\Rightarrow$ semplifico e trovo:

$$\frac{t}{20} = \underbrace{-100}_{}$$

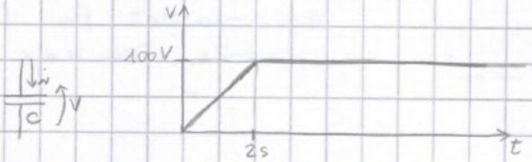
↳ c'è il $-$, questo perché: la corrente in esame scarica il condensatore, quindi ne esce, quindi è opposta rispetto ai segni concordati $\Rightarrow$ è negativa, devo cambiare questo $-$



$\Rightarrow \quad t = +100 \cdot 20 = 2000\,s$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 132

ES

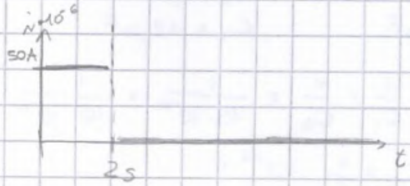


→ grafico della tensione sul condensatore

$C = 1\mu F$

Calcola corrente, energia, etc...

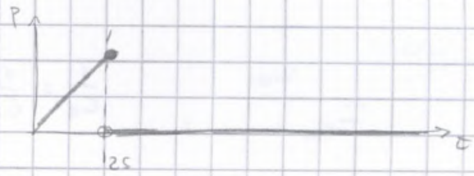
- Corrente: $i = C\frac{dv}{dt}$ → disegno



Tra 0 e 2s, la $\frac{dv}{dt} = cost$, pari alla pendenza di qst retta:
$\frac{dv}{dt} = \frac{100V}{2s} = 50A \Rightarrow i = 10^{-6} \cdot 50\ A$

Dopo 2s, $v = cost \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$

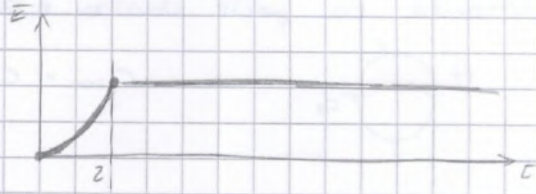
- Potenza:
è: $p = v \cdot i$



Tra 0 e 2s, $\begin{cases} i = cost \\ v = cresce \end{cases}$
A 2 secondi, ha valore:
$p = 100V \cdot 50 \cdot 10^{-6}A = 5 \cdot 10^{-2}\ W$
Dopo 2s, è una retta nulla, xké $i = 0 = cost$

- Energia

$E = \frac{C}{2}v^2$

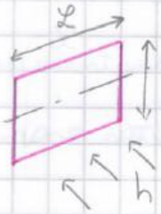


In 0 ⇒ $v(t=0) = 0$
Tra 0 e 2, v cresce linearmente
⇒ E è 1 parabola
In 2 ⇒ $E = \frac{10^{-6}}{2} \cdot (100)^2$

Dopo 2s → E resta costante, e vale: $E = \frac{10^{-6}}{2}(100)^2$, ma discontinuità

GIOVEDÌ 5-5-11

ALTERNATORI



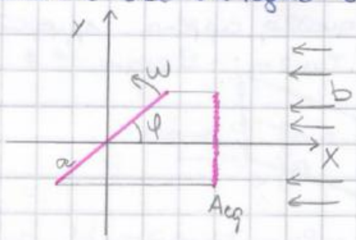
h = campo magnetico esterno

Siamo nel vuoto, per cui posso parlare indifferentemente di campo magnetico o di induzione magnetica.

$$b = \mu_0 h$$

Il flusso è: $\phi = b \cdot A_{eq}$ → area equivalente

Facciamo ora un taglio della struttura e disegnamo in 2D



→ il lato a, quello di dimensione $\mathcal{L}$, va dentro la lavagna

A_{eq} = è quella effettivamente attraversata da b

↓

$A_{eq} = \mathcal{L} a \sin\varphi$

Possiamo scrivere il flusso:

$$\phi = b \mathcal{L} a \sin\varphi$$

Supponiamo di far ruotare la spira attorno all'asse con una velocità di rotazione ω.
Ad un istante t qualunque l'angolo è $\varphi + \omega t$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ → T = periodo della rotazione. È il tempo impiegato per fare un giro completo.
È l'inverso della frequenza:

$f = \frac{1}{T}$ => $\omega = 2\pi f$

Tutto è sincrono in modo da dare $f = 50Hz$ (nell'UE) => $T = \frac{1}{50} = 20ms$ (millisecondi)
→ cioè, in 20ms la spira fa 1 giro completo

Il flusso ad un istante t è:

$$\phi(t) = b \mathcal{L} a \sin(\varphi + \omega t)$$

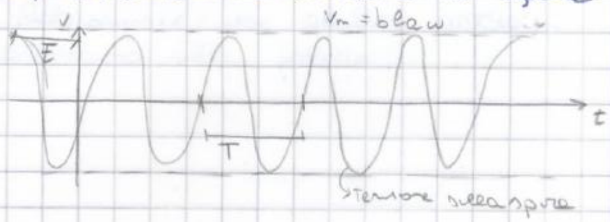
LEGGE DI FARADAY - LENTS

In una spira. Se il flusso è variabile, si induce una tensione v uguale alla variazione del flusso:

$$v = \frac{d\phi}{dt}$$

Il segno - che dovrebbe esserci è assorbito da v

Per calcolare v derivo $\phi(t)$:



$$v = b\mathcal{L}a\omega \cdot \cos(\varphi + \omega t)$$

→ φ = fase costante, in 0 non c'è un max di v

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 132

NUMERI COMPLESSI - RIPASSO

Useremo d'ora in poi numeri complessi.

Rappresentazione cartesiana del n° complesso:

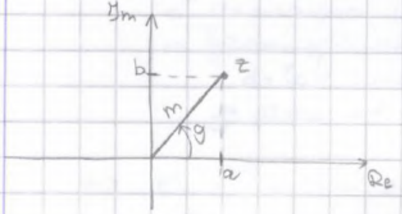
$z = a + bj$, dove j = unità immaginaria (la chiamiamo i)
$j^2 = -1$

Rappresentazione polare del n° complesso

$z = m\cos\vartheta + j\, m\sin\vartheta = m(\cos\vartheta + j\sin\vartheta)$

dove: $\begin{cases} m = \text{modulo} \\ \vartheta = \text{fase} \end{cases}$

PIANO DI GAUSS



Ogni punto del piano di Gauss è un numero complesso.

Asse x = parte reale
Asse y = parte immaginaria

Supponendo di conoscere m e ϑ:
$\begin{cases} a = m\cos\vartheta \\ b = m\sin\vartheta \end{cases}$

Identità di Eulero

$e^{j\vartheta} = \cos\vartheta + j\sin\vartheta$

Sostituendo nella rappresentazione polare:

$z = m \cdot e^{j\vartheta}$

Passaggio dalla rappresentazione polare alla cartesiana:

$$\begin{cases} a = m\cos\vartheta \\ b = m\sin\vartheta \end{cases}$$

Passaggio dalla rappresentazione cartesiana alla polare:

$$\begin{cases} m = \sqrt{a^2+b^2} \\ \vartheta = \arctan\frac{b}{a} \end{cases}$$

Voglio risolvere tale equazione → $\frac{e - v_c}{R} = C\frac{dv_c}{dt}$

sostituendo e con ê, e creando la funzione aumentata di v_c:

$$\hat{v}_c = \underbrace{V_m \cdot e^{j\alpha}}_{\text{FASORE}}\, e^{j\omega t} \quad \Rightarrow \quad e \to \hat{e} \quad e \quad v \to \hat{v}_c$$

$$\Rightarrow E_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} - V_m e^{j\alpha} e^{j\omega t} =$$

era al den, lo porto di qui

$$= RC \frac{d}{dt}\left(V_m e^{j\alpha} e^{j\omega t}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(V_m e^{j\alpha} e^{j\omega t}\right) = V_m e^{j\alpha} j\omega e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow E_m e^{j\varphi} \cancel{e^{j\omega t}} - V_m e^{j\alpha} \cancel{e^{j\omega t}} = RC\, V_m e^{j\alpha} j\omega \cancel{e^{j\omega t}}$$

$$\Rightarrow E_m e^{j\varphi} = V_m e^{j\alpha} \left(1 + j\omega RC\right)$$

è un numero complesso in forma cartesiana, lo trasformiamo in forma polare:

$$1 + j\omega RC \to M e^{j\beta} \quad \text{dove:} \begin{cases} M = \sqrt{1+(\omega RC)^2} \\ \beta = \operatorname{arctg} \frac{\omega RC}{1} \end{cases}$$

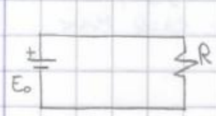
$$\Rightarrow E_m e^{j\varphi} = M V_m e^{j(\alpha+\beta)}$$

Sono due numeri complessi, per essere uguali devono avere i moduli uguali e le fasi uguali.

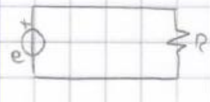
$$\Rightarrow \begin{cases} M V_m = E_m \\ \alpha + \beta = \varphi \end{cases}$$

⇒ La soluzione del problema è: $\begin{cases} V_m = E_m / M \\ \alpha = \varphi - \beta \end{cases}$

⇒ Se ho dei generatori sinusoidali, posso sperare dunque di risolvere tutto con le equaz algebriche dei numeri complessi attraverso l'introduzione della funzione aumentata



$$P_R = E_0 \frac{E_0}{R} = \frac{E_0^2}{R}$$



$$\check{p}_R = e \cdot \frac{e}{R} = \frac{e^2}{R} = \frac{[E_m \cos(\omega t + \varphi)]^2}{R} =$$

$$\Rightarrow \check{p}_R = \frac{E_m^2}{R} \cos^2(\omega t + \varphi)$$

ESERCIZI

• $z_1 = 5 + j12$

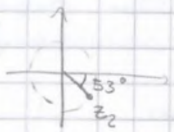
↘ passo al polare: $\begin{cases} m = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \\ \vartheta = \text{arctg}\, 12/5 = \text{arctg}\, 2,4 = 67,4^\circ \end{cases}$

$\Rightarrow z_1 = 13 \cdot e^{j\, 67,4^\circ}$

↓ dovremmo portare ai rad, ma li lascio in °

Occhio: potremmo usare anche i simboli equivalenti → $\begin{cases} m = |z_1| \\ \vartheta = \angle z_1 \end{cases}$

• $z_2 = 3 - j4 \Rightarrow \begin{cases} m = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \\ \vartheta = \text{arctg}\, \frac{-4}{3} = -53^\circ \end{cases}$ ⇒ ruoto in senso orario, e non antiorario



• $z_1 = -3 + j7$
$z_2 = 8 + j$

$(z_1 - z_2^*)(z_1 + z_2^*)$

$z_2^* = 8 - j$

$\Rightarrow (z_1 - z_2^*) = (-3 + j7 - 8 + j)$
$(z_1 + z_2^*) = (-3 + j7 + 8 - j)$

$\Rightarrow (-3 + j7 - 8 + j)(-3 + j7 + 8 - j) = (-11 + 8j)(5 + 6j) =$

Per moltiplicare, passo in forma polare

$= \left[\sqrt{11^2 + 8^2} \cdot e^{j \cdot \text{arctg} \frac{8}{-11}}\right] \left[\sqrt{5^2 + 6^2} \cdot e^{j\, \text{arctg} \frac{6}{5}}\right] =$

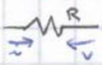
$= (13,6 \cdot e^{-j36^\circ})(7,8 \cdot e^{j50^\circ}) =$

$= 106,2 \cdot e^{j \cdot 14^\circ}$

in forma cartesiana → $106,2 \cos 14^\circ + j \cdot 106,2 \sin 14^\circ$

$$\Rightarrow \quad \hat{E} = \frac{k}{\sqrt{2}} e^{j\varphi}(\omega)$$

RESISTORE



Regola di funzionamento: $v = Ri$

Caso particolare, per grandezze sinusoidali:
al posto della v e della i, uso le loro funzioni aumentate:

$$\hat{v} = V_m \cdot e^{j(\omega t+\theta)}$$
$$\hat{i} = I_m \cdot e^{j(\omega t+\beta)}$$

→ hanno la stessa ω, perché è una cosa imposta dalla velocità di rotazione dell'alternatore

Inserendole nell'equazione di funzionamento:

$$V_m \cdot e^{j(\omega t+\theta)} = R \cdot I_m e^{j(\omega t+\beta)}$$

se moltiplico e divido da entrambe le parti per $\sqrt{2}$, ottengo i fasori

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} V_m e^{j\theta} \cdot \cancel{e^{j\omega t}} = R I_m e^{j\beta} \cancel{e^{j\omega t}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\,\hat{V} = \sqrt{2}\,R\hat{I}$$

$$\Rightarrow \hat{V} = R\hat{I}$$

→ è ancora la legge di Ohm, ma è espressa con i fasori

=> quando uso delle grandezze sinusoidali, continua a valere la legge di Ohm, ma con i fasori.

INDUTTORE

Legge di funzionamento: $v = L\frac{di}{dt}$

Per grandezze sinusoidali: devo passare anche in questo caso alle funzioni aumentate:

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} = L\frac{d}{dt}\left(I_m \cdot e^{j(\omega t+\beta)}\right)$$

$$\Rightarrow V_m e^{j\theta} e^{j\omega t} = L I_m e^{j(\omega t+\beta)} \cdot j\omega$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot V_m \cdot e^{j\theta} \cdot \cancel{e^{j\omega t}} = j\omega L I_m e^{j\beta} \cancel{e^{j\omega t}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\,\hat{V} = j\omega L \sqrt{2}\,\hat{I}$$

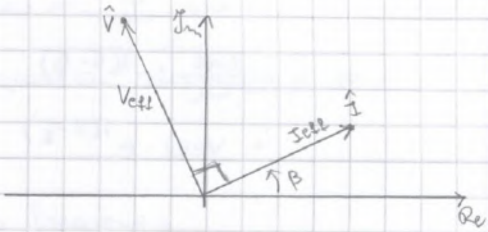
$$\Rightarrow \hat{V} = j\omega L\hat{I}$$

Ecco la legge di funzionamento.
Assomiglia poco alla legge iniziale, non ha le derivate

Sostituiamo dunque questa forma polare:

$$\hat{V} = jwL \cdot I_{eff} \cdot e^{j\beta} =$$
$$= wL e^{j\frac{\pi}{2}} I_{eff} e^{j\beta} =$$
$$= wL I_{eff} e^{j(\beta+\frac{\pi}{2})}$$
$$= V_{eff} \cdot e^{j(\beta+\frac{\pi}{2})} \rightarrow \text{fase} = \beta + \frac{\pi}{2}$$

Possiamo ora disegnare $\hat{V}$ sul piano di Gauss.



$\hat{V} \perp \hat{I}$

=> si dice che sono in quadratura di fase.

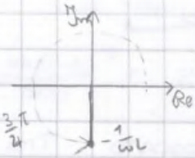
Se lo guardo in senso antiorario: la $\hat{V}$ ha fase maggiore

=> si dice che $\hat{V}$ è in anticipo rispetto alla corrente.

Altro modo per scriverlo:

$$\hat{I} = \frac{1}{jwL} \cdot \hat{V} \cdot \frac{j}{j} = -\frac{j}{wL} \hat{V}$$

in forma polare: $\frac{1}{wL} e^{-j\frac{\pi}{2}}$,

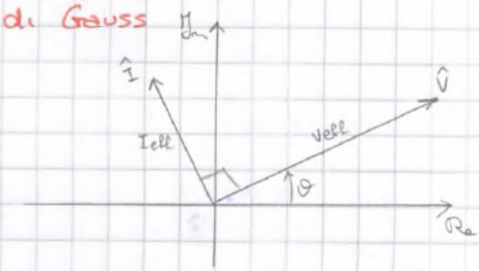


→ lo calcolo in senso antiorario, viene negativo x questo

Allo stesso modo, la corrente viene:

$$\hat{I} = \frac{V_{eff}}{wL} \cdot e^{j(\vartheta - \frac{\pi}{2})}$$

Condensatore: rappresentazione sul piano di Gauss



La legge è: $\hat{I} = jwC\hat{V}$

in cui:

- $\hat{V} = V_{eff} \cdot e^{j\vartheta}$
- $\hat{I} = jwC \hat{V}$

Scriviamo il termine jwC in coordinate polari.

È un numero puramente immaginario, avrà fase pari a $\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \hat{I} = wC \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot V_{eff} \cdot e^{j\vartheta}$$

$$\Rightarrow \hat{I} = wC\, V_{eff}\, e^{j(\vartheta+\frac{\pi}{2})} =$$
$$= I_{eff} \cdot e^{j(\vartheta+\frac{\pi}{2})}$$

GIOVEDì 19-5-11

ESERCIZIO

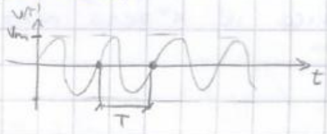
$v(t) = 10 \cos(1000\pi t + 30°)$ V

Ricorda: avevamo detto, per le quantità sinusoidali:

$v(t) = V_m \cdot \cos(\omega t + \vartheta)$

Spesso, usiamo la quantità efficace:

$V_{eff} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$



Applichiamolo a questo caso:

$V_m = 10V$

$\omega = 1000\pi \ \frac{rad}{s}$ → pulsazione, è la quantità che moltiplica il tempo

$\vartheta = 30°$ ↳ fase

Inoltre, sappiamo unire la pulsazione e la frequenza:

$\omega = 2\pi f$, con $f = \frac{1}{T}$, dove T = durata di un'onda completa della sinusoide

Quindi, in questo caso:

$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1000\pi}{2\pi} = 500$ Hz

$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{500} = \frac{1000 \cdot 10^{-3}}{500} = 2$ ms

ESERCIZIO

Ora, suppongo di avere dei dati e voglio costruire la funzione:

Ampiezza = 5V

periodo = 1/10 s ⇒ v(t) = ?

fase = 45°

$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T}$

$v(t) = 5 \cos(2\pi \cdot 10 t + 45°)$ V

ESERCIZIO

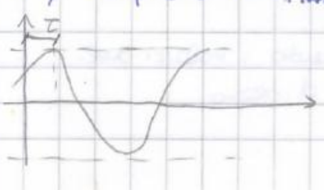
$V_{eff} = 20$ V

periodo = 100 μs ⇒ v(t) = ?

$\tau_{1° \text{ MASSIMO}} = 20$ μs

- trovo il valore massimo: → $V_m = V_{eff} \cdot \sqrt{2} = 20\sqrt{2} \sim 28V$
- $\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{100 \cdot 10^{-6}} = \frac{\pi}{50} \cdot 10^6$ rad/s $\sim 0{,}063 \ \frac{M\,rad}{s}$

• Ora, interpreto il $\tau_{1°max}$:



il cos raggiunge il max quando ho un argomento = 0

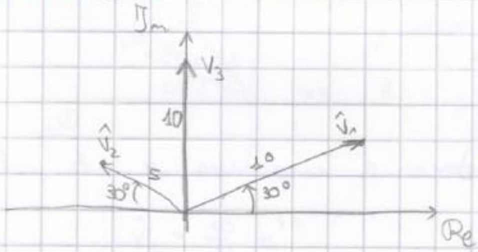
⇒ $\omega\tau + \varphi = 0$ ⇒ $\varphi = -\omega\tau = -0{,}063 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-6} = -1{,}26$ rad

$$\Rightarrow \frac{100}{\sqrt{2}}(1+j) = \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j45°} = 100 e^{j45°}$$

Ora, da $\hat{V}_s$ torno a v_s:

$$v_s(t) = \sqrt{2} \cdot 100 \cos(\omega t + 45°)$$

ESERCIZIO



Ho questi 3 fasori,
Suppongo che tutti e 3 corrispondano a delle oscillazioni con frequenza

$f = 200 Hz$

$\Rightarrow v_1(t) = ?$, $v_2(t) = ?$, $v_3(t) = ?$

Per prima cosa, scrivo in forma polare i 3 fasori:

$$\hat{V}_1 = 10 e^{j30°} \, V$$
$$\hat{V}_2 = 5 e^{j150°} \, V$$
$$\hat{V}_3 = 10 \cdot e^{j90°} \, V$$

$$\Rightarrow \quad v_1(t) = \sqrt{2}\, 10 \cdot \cos(2\pi \cdot 200\, t + 30°) \, V$$
$$v_2(t) = 5\sqrt{2} \cos(400\pi t + 150°) \, V$$
$$v_3(t) = 10\sqrt{2} \cos(400\pi t + 90°) \, V$$

Ora, suppongo di voler calcolare:

$$v_s = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t)$$

Sfrutto prima i fasori:

$$V_s = \hat{V}_1 + \hat{V}_2 + \hat{V}_3 =$$

Passo alla cartesiana:

$$\hat{V}_1 = 10(\cos 30° + j \sin 30°) = (5\sqrt{3} + j5) \, V$$
$$\hat{V}_2 = 5(\cos 150° + j \sin 150°) = \left(-\frac{5}{2}\sqrt{3} + j \cdot \frac{5}{2}\right) V$$
$$\hat{V}_3 = 10j \, V$$

Quindi:

$$\hat{V}_s = 5\sqrt{3} + 5j - \frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2}j + 10j =$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{3} + j \cdot \frac{35}{2}$$, devo passare alla forma polare

$$\Rightarrow \hat{V}_s = \sqrt{\frac{75}{4} + \frac{35^2}{4}} \cdot e^{j \arctg \frac{35/2}{\frac{5}{2}\sqrt{3}}} = 18 \cdot e^{j76°}$$

$$\Rightarrow v_s(t) = \sqrt{2} \cdot 18 \cos(\omega t + 76°)$$

ESERCIZIO

$v_L(t) = 10\cos(2000\pi t)$ → applicata su un induttore
$L = 100\ mH$

$Z_L = ?$ (impedenza di induttore)

Per induttore, Z è:

$Z_L = j\omega L$ → puramente immaginario.

$= j \cdot 2000\pi \cdot 100 \cdot 10^{-3}$

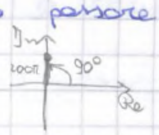
$\Rightarrow Z_L = j200\pi\ \Omega$

Poi, da v_L possiamo ricavare il fasore:

$$\hat{V}_L = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j0}$$

Ora, se voglio trovare il fasore $\hat{I}_L$, devo usare l'equaz dell'induttore:

$\hat{I}_L = \frac{\hat{V}_L}{Z_L}$ → divisione, devo passare alla rappr polare di Z_L



$\Rightarrow Z_L = 200\pi e^{j90°}$

Ora posso dividere

$$\hat{I}_L = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j0} / 200\pi e^{j90} =$$

$$= \frac{10}{200\sqrt{2}\pi} e^{j(0-90)} =$$

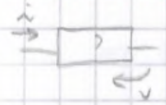
$$= \frac{1}{20\sqrt{2}\pi} e^{-j90°}\ A$$

Ora, per passare alla corrente $i_L(t)$:

$$i_L(t) = \frac{1}{20\pi}\cos(2000\omega t - 90°)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 132

ESERCIZIO



$v(t) = 100 \cos(400t + 30°)$ V

$i(t) = 2 \cos(400t + 120°)$ A

Che bipolo è?

$\Rightarrow \quad \hat{V} = \frac{100}{\sqrt{2}} e^{30° j}$

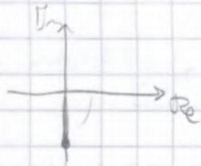
$I = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{120° j}$

$\Rightarrow \quad \hat{V} = Z I$

$\Rightarrow \quad \frac{100}{\sqrt{2}} e^{30° j} = Z \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} e^{120° t}$

$\Rightarrow \quad Z = \frac{100}{2} e^{(30° - 120°) j} = 50 \cdot e^{-90 j} =$

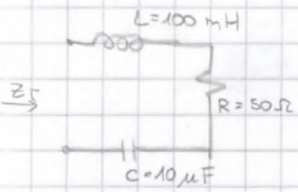
$= -50 j \ \Omega$



È un'impedenza immaginaria, sull'asse negativo
$\Rightarrow$ deve essere del condensatore → ricordo: $\frac{1}{j} = \frac{1}{j} \cdot \frac{j}{j} = -j$

$\Rightarrow \quad Z = \frac{1}{\omega C} = 50 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\omega 50} = \frac{1}{400 \cdot 50} = \frac{1}{20}$ mF

ESERCIZIO



Ho questo circuito, funziona con una pulsazione:

$\omega = 500$ rad/s

Voglio calcolare l'impedenza complessiva Z_T del circuito

Sono 3 elementi in serie (stessa corrente)
$\Rightarrow$ applico la regola delle serie, la Z_T è data dalla somma delle altre:

$Z_T = Z_L + Z_C + Z_R =$

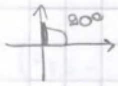
$= j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R =$

$= j \cdot 500 \cdot 100 \cdot 10^{-3} + \frac{1}{j \cdot 500 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} + 50 =$

$= j50 + 50 - j\frac{1000}{5} = 50 - j150$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 132

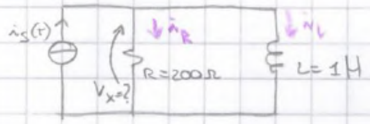
Passo alla rappres polare →



$\Rightarrow Z_L = 100 \cdot e^{j90°}$

$\Rightarrow v_L(t) = \sqrt{2} \cdot 5 \cos(500t + 45°)\, V$

ESERCIZIO



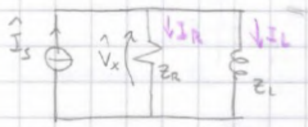
$i_s(t) = \frac{1}{2}\cos(100t)\, A$ → (NOTA)

$\omega = 100 \frac{rad}{s}$

1° caso → devo lavorare sul circuito complesso

- $\hat{I}_s = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{j0°}\, A$
- $R \rightarrow Z_R$
- $L \rightarrow Z_L = j\omega L$

$\Rightarrow Z_L = j\omega L = j100\,\Omega = 100 e^{j90°}\,\Omega$



→ è un partitore di corrente

- $\hat{I}_R = \hat{I}_s \frac{Z_L}{Z_R + Z_L} =$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{100 e^{j90°}}{200 + j100} =$

Per la divisione trasformo il den in polari:

$200 + j100 = \sqrt{200^2 + 100^2} \cdot e^{j \arctan \frac{100}{200}} = 100\sqrt{5}\, e^{j27°}$

$\Rightarrow \hat{I}_R = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{100 e^{j90°}}{100\sqrt{50}\, e^{j27°}} =$

$= \frac{1}{2\sqrt{10}} e^{j63°}\, A$

$\Rightarrow i_R(t) = \sqrt{2} \frac{1}{2\sqrt{10}} \cos(100t + 63°)\, A$

- $\hat{I}_L = \hat{I}_s \frac{Z_R}{Z_R + Z_L} =$

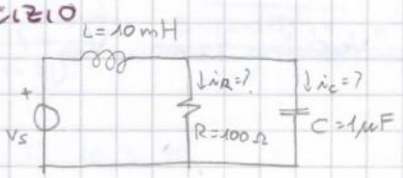
$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{200}{100\sqrt{2}\, e^{j27°}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{10}} e^{-j27°}\, A$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 132

VENERDÌ 20-5-11

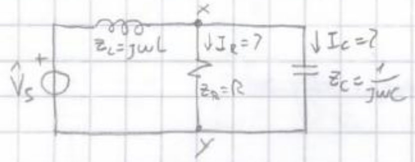
ESERCIZIO



$v_S(t) = 100\cos(10^4 t)$ V

Calcola le correnti i_R e i_C

1ª cosa: ridisegno il circuito in 1 con gli elementi complessi (fasori)



Cambio:

- $\hat{V}_S = \frac{100}{\sqrt{2}} e^{j0°}$, $\omega = 10^4 \frac{rad}{s}$
- $Z_L = j \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = j100\ \Omega$
  ↳ sostituisce l'induttore
- $Z_R = R$
- $Z_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{10^4 \cdot 10^{-6}} = -j100\ \Omega$
  ↳ sostituisce il condensatore

incognite = diventano i fasori delle mie incognite

Ora, devo applicare le solite vecchie regole x risolvere questo circuito
Un modo utile → scelgo i nodi x e y
⇒ applico Millmann:

$$\hat{V}_{xy} = \frac{\frac{\hat{V}_S}{Z_L}}{\frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C}}$$

→ esattamente uguale, solo che ho le quantità complesse

Mi servono le impedenze in rappres. polare, le cambio

$Z_L = 100\ e^{j90°}\ \Omega$
$Z_C = 100 \cdot e^{-j90°}\ \Omega$
$Z_R = 100\ \Omega$

$$\Rightarrow \hat{V}_{xy} = \frac{\frac{100}{\sqrt{2}} / 100 e^{j90°}}{\frac{1}{j100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{j100}} =$$

$$= \frac{1/\sqrt{2} \cdot e^{-j90°}}{\cancel{\frac{-j}{100}} + \frac{1}{100} + \cancel{\frac{j}{100}}} = \frac{100}{\sqrt{2}} e^{-j90°}\ V$$

Ora, avendo la tensione, tramite l'impedenza mi ricavo $\hat{I}$:

- $\hat{I}_R = \frac{\hat{V}_{xy}}{Z_R} = \frac{\frac{100}{\sqrt{2}} e^{-j90°}}{100} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j90°}\ A$
- $\hat{I}_C = \frac{\hat{V}_{xy}}{Z_C} = \frac{\frac{100}{\sqrt{2}} e^{-j90°}}{100 \cdot e^{-j90°}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ A$

Ora, passo dai fasori alle funzioni:

- $i_R(t) = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(10^4 t - 90°)\ A = \cos(10^4 t - 90°)\ A$
- $i_C(t) = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(10^4 t)\ A = \cos(10^4 t)\ A$