NUMERO: 1377A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: D Angelo

MATERIA: Analisi Matematica I, Prof.Mazzi

PRIMITIVE

DEFINIZIONE

hp: • $f: I \to \mathbb{R}$
• I = intervallo aperto

$F: I \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f su I se F è derivabile su I e $F'(x) = f(x) \ \forall x \in I$

f non può avere discontinuità eliminabili o di tipo salto.
Tutte le f continue hanno primitiva.

PROPOSIZIONE

hp: • f ammette una primitiva $F(x)$ su I
$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{R}$, $F(x)+k$ è una primitiva di f su I

→ DIM: $F(x)$ è primitiva $\Rightarrow (F(x))' = f(x)$
però: $(F(x)+k)' = f(x) \to$ uguali

PROPOSIZIONE

hp: • f ammette primitive su I
• $F(x)$ e $G(x)$ sono due primitive di $f(x)$ su I
$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $G(x) = F(x) + k$

→ DIM: prendo una $H(x) = G(x) - F(x)$
per hp: $G'(x) = f(x)$, $F'(x) = f(x)$
calcolo: $H'(x) = (G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$
per corollario del T. Lagrange: se $H'(x) = 0$, $\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $H(x) = k \ \forall x \in I$
$\Rightarrow H(x) = k = G(x) - F(x) \Rightarrow G(x) = F(x) + k$

TEOREMA

hp: • $f(x)$ ammette primitive
• $F(x)$ primitiva di f su I
$\Rightarrow \{F(x)+k, k \in \mathbb{R}\}$ è l'insieme di tutte le primitive di f su I

Integrale indefinito di f su I: $\int f(x)\,dx = \{F(x)+k, k \in \mathbb{R}\} \to$ la famiglia delle primitive di f su I

PROPRIETÀ DELLE PRIMITIVE: LINEARITÀ

hp: • f, g integrabili in senso indefinito su I, cioè ammettono primitive su I
$\Rightarrow$ 1. $\alpha f(x)$ è integrabile su I, e: $\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$
Ovvero: se $F(x)$ è una primitiva di f su $I \Rightarrow \alpha F(x)$ è una primitiva di αf su I e:
$\int \alpha f(x)\,dx = \{\alpha F(x) + k, k \in \mathbb{R}\}$

→ DIM ① $(F(x))' = f(x)$ per hp
$\Rightarrow (\alpha F(x))' = \alpha F'(x) = \alpha f(x)$
per propr. delle derivate

2. $f+g$ è integrabile su I, e: $\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
Ovvero: se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ e $G(x)$ è una primitiva di $g(x)$ su $I \Rightarrow F(x)+G(x)$ è una primitiva di $f(x)+g(x)$ su I e:
$\int (f(x)+g(x))\,dx = \{F(x)+G(x)+k, k \in \mathbb{R}\}$

→ DIM ②: $(F(x)+G(x))' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x)$
per propr. delle derivate

REGOLA D'INTEGRAZIONE PER PARTI

→ DIM: Considero $H(x)$ primitiva di $f(x)\,g'(x)$, cioè: $H'(x) = f(x)\,g'(x)$, $\forall x \in I$
Considero: $[f(x)\cdot g(x) - H(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - H'(x) = f'(x)g(x) + \cancel{f(x)g'(x)} - \cancel{f(x)g'(x)}$
$\Rightarrow f'(x)g(x) = [f(x)g(x) - H(x)]' \to$ ecco la primitiva di $f'(x)g(x)$
cioè: $\int f'(x)g(x)\,dx = \{f(x)g(x) - H(x) + k\} = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

hp: • f, g derivabili su I
• suppongo che $f(x)\cdot g'(x)$ abbia primitiva
$\Rightarrow f'(x)\cdot g(x)$ ha primitive, e: $\int f'(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$

REGOLA D'INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

hp: • $f(y)$ integrabile su $J \subseteq \mathbb{R}$, intervallo
• $F(y)$ primitiva di f, cioè $\frac{d}{dy}F(y) = f(y)$, $\forall y \in J$
• suppongo: $\exists \varphi: I \to J$, derivabile

$\Rightarrow f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$ ammette primitive su I e $F(\varphi(x))$ è una di queste:
$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + k$

REGOLA: $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy$
con $y = \varphi(x)$, $y' = \varphi'(x) \Rightarrow dy = \varphi'(x)\cdot dx = \frac{d\varphi}{dx}\,dx = \frac{dy}{\cancel{dx}}\,\cancel{dx}$
$dy = y'dx$ con $y = \varphi(x)$

MAGGIORANTI E MINORANTI

hp: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, limitata: $\begin{cases} \exists \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = i_f \in \mathbb{R} \\ \exists \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = s_f \in \mathbb{R}\end{cases}$

$\Rightarrow$ Sono MAGGIORANTI A SCALA $=\{h$, funzione a scala su $[a,b]$ t.c. $h(x)\geq f(x)$, $\forall x\in[a,b]\} = S^+_f([a,b])$

$\Rightarrow$ Sono MINORANTI A SCALA $=\{g$, funzione a scala su $[a,b]$ t.c. $g(x)\leq f(x)$, $\forall x\in[a,b]\} = S^-_f([a,b])$

OSSERVAZIONE

1. $\exists h(x) = s_f$, $\forall x\in[a,b] \Rightarrow S^+_f([a,b])\neq\emptyset$ → almeno la h a scala che passa per il sup è parte dell'insieme
2. $\exists g(x) = i_f$, $\forall x\in[a,b] \Rightarrow S^-_f([a,b])\neq\emptyset$ → almeno la g a scala che passa per il inf è parte dell'insieme

DEFINIZIONE

1. $\inf\left\{\int_{[a,b]} h,\ h\in S^+_f([a,b])\right\} = \overline{\int}_{[a,b]} f$ → integrale superiore di f su $[a,b]$

2. $\sup\left\{\int_{[a,b]} g,\ g\in S^-_f([a,b])\right\} = \underline{\int}_{[a,b]} f$ → integrale inferiore di f su $[a,b]$

PROPRIETÀ

$\forall f$ limitata su $[a,b] \Rightarrow \underline{\int}_{[a,b]} f \leq \overline{\int}_{[a,b]} f$

DIM: $\forall g\in S^-_f([a,b])$; $\forall h\in S^+_f([a,b]) \Rightarrow g(x)\leq f(x)\leq h(x) \Rightarrow g(x)\leq h(x)$
per la propr. delle f a scala: $g(x)\leq h(x) \Rightarrow \int_{[a,b]} g(x) \leq \int_{[a,b]} h(x) \Rightarrow$
$\sup\left\{\int_{[a,b]} g,\ g\in S^-_f([a,b])\right\} = \underline{\int}_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} h$, $\forall h$
$\inf\left\{\int_{[a,b]} h,\ h\in S^+_f([a,b])\right\} = \overline{\int}_{[a,b]} f \geq \underline{\int}_{[a,b]} f$

DEFINIZIONE DI INTEGRALE DI RIEMANN

f è Riemann-integrabile su $[a,b]$ se $\underline{\int}_{[a,b]} f = \overline{\int}_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} f$, e tale valore numerico è l'integrale di Riemann di f su $[a,b]$

vai a vedere la pag iniziale degli integrali di Riemann con i segni

TEOREMA

Sono integrabili secondo Riemann:

a) f continue su $[a,b]$ → limitate, per Weierstrass
b) f continue su (a,b), limitate
c) f monotone su $[a,b]$ → per forza limitate
d) f monotone su (a,b), limitate
e) f continue a tratti su $[a,b]$ → limitate
f) f continue a tratti su (a,b), limitate

ESTREMI DI INTEGRAZIONE

- $\int_{[a,b]} f = \int_a^b f$, con $a<b$ SEMPRE
- Se $c>d \Rightarrow \int_c^d f = -\int_{[d,c]} f = -\int_d^c f$ → inverto gli estremi, cambio segno
- $\int_c^c f = 0$

I COROLLARIO DEL T. FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

hp: • f continua su I

$\Rightarrow$ f ammette primitive su I

DIM: segue dal T. fondamentale:
$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau$ è una primitiva di $f(x)$ su I; ed è la primitiva t.c. $F(x_0)=\int_{x_0}^{x_0} f(\tau)d\tau=0$

$F(x)$ è la funzione integrale (definita dall'integrale) e solo grazie a questo Teorema so che è anche una primitiva.

II COROLLARIO DEL T. FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

hp: • f continua su I
• $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau$
• $G(x)$ è una qualunque primitiva di f su I

$\Rightarrow F(x)=G(x)-G(x_0)$, $\forall x\in I$

DIM: $\exists k$ t.c. $F(x)-G(x)=k$ $\forall x\in I$ → due primitive differiscono x una costante
in particolare: $F(x_0)-G(x_0)=k=-G(x_0)$ → perché $F(x_0)=0$
Quindi $F(x)-G(x)=-G(x_0)$

III COROLLARIO - TEOREMA DI TORRICELLI-BARROWS

hp: • f continua su $[a,b]$
• $G(x)$ primitiva di f su I

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a)$

DIM: prendo $F(x)=\int_a^x f(\tau)d\tau$; per il T. FOND. $F(x)$ è 1 primitiva tale che $F(a)=0$
• per il 2° COROLL.: $F(x)=G(x)-G(a)$
Unendo le due cose: $F(b)=\int_a^b f(\tau)d\tau=G(b)-G(a)$

Spesso si usa questa notazione: $\int_a^b f(x)\,dx = G(x)\Big]_a^b = G(b)-G(a)$

IV COROLLARIO DEL T. FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

hp: • $f\in \mathcal{C}^1(I)$, cioè f derivabile e $f'(x)$ continua su I

$\Rightarrow \forall x_0\in I$, $f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x} f'(s)ds$

DIM: $\int_{x_0}^{x} f'(s)ds \overset{?}{=} f(x)-f(x_0)$
se $f'(x)$ continua, è integrabile (I COROLL.) e so che l'integrale è =
$=(\text{primitiva di } f')(x)-(\text{primitiva di } f')(x_0) = f(x)-f(x_0)$

ESTENSIONE DEL TEOREMA FONDAMENTALE

hp: • f continua a tratti su I $\Rightarrow$ $\forall x_0,x\in I$ posso definire: $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau$ → la funzione integrale

$\Rightarrow$ 1. $F(x)$ è continua su I
2. $F(x)$ è derivabile nei punti in cui f è continua e $F'(x)=f(x)$, cioè $F(x)$ è una primitiva generalizzata

REGOLA D'INTEGRAZIONE PER PARTI APPLICATA A RIEMANN

hp: • $f,g\in \mathcal{C}^1(I)$
• $a,b\in I$, $a\le b$

$\Rightarrow \int_a^b f g'\,dx = f\cdot g\Big]_a^b - \int_a^b f' g\,dx$, ricordando che: $\int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a)$

REGOLA D'INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE APPLICATA A RIEMANN

hp: • $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$
• φ di classe $\mathcal{C}^1$ (per poter applicare il T. fondam.)
• $f:[a,b]\to\mathbb{R}$
• composizione: $f(\varphi(x)):[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$
• f continua su $[a,b]$
• $F(y)$ è una primitiva di f su $[a,b]$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)\,dy$$

Se φ è biunivoca (monotona strettamente crescente/decrescente):

• $\int_{a=\varphi(\alpha)}^{b=\varphi(\beta)} f(y)\,dy = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$, se crescente

• $\int$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 100

DEFINIZIONE 2 - CASO Im f ILLIMITATA

hp: • f definita su $[a,b)$
• $\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty$
• $\forall c \in (a,b)$, f sia integrabile su $[a,c]$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b} \int_a^c f(x)\,dx = \begin{cases} \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{integrale convergente} \\ +\infty \vee -\infty \Rightarrow \text{integrale divergente} \\ \nexists \Rightarrow \text{integrale indeterminato} \end{cases}$

hp: • f definita su $(b,d]$
• f illimitata in $B(b)$
• f integrabile su $[k,d]$, con $k \in (b,d)$

$\Rightarrow \int_b^d f(x)\,dx = \lim_{k \to b} \int_k^d f(x)\,dx = \begin{cases} \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{int. convergente} \\ +\infty \vee -\infty \Rightarrow \text{int. divergente} \\ \nexists \Rightarrow \text{int. indeterminato} \end{cases}$

hp: • f definita su $[a,d] \setminus \{b\}$
• f localmente illimitata in b, p.to intermedio di $[a,d]$

$\Rightarrow \int_a^d f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^d f(x)\,dx$ → vanno calcolati separatamente

• Se almeno uno dei due limiti diverge, l'integrale diverge.
Se almeno uno dei due limiti non esiste, l'integrale non esiste.
Se entrambi convergono, l'integrale converge.

INTEGRALI DI FUNZIONI IRRAZIONALI

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ → f irrazionale, definita dove $Q(x) \neq 0$
in linea teorica, sempre integrabile per mezzo di f elementari, tranne quando è impossibile scomporre il $Q(x)$ in fattori di grado 1 e 2

m = grado di $P(x)$
n = grado di $Q(x)$ } se $m \geq n$ ⇒ DIVISIONE DEI POLINOMI: $P_m(x) = S_{m-n}(x) \cdot Q_n(x) + R_d(x)$, con $d<n$

Posso quindi scrivere: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{S_{m-n}(x) \cdot Q_n(x) + R_d(x)}{Q_n(x)} = S_{m-n}(x) + \frac{R_d(x)}{Q_n(x)}$ → ora devo lavorare su $\frac{R}{Q}$

• Se $n=1 \Rightarrow \int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a} \cdot \log|ax+b| + k$

• Se $n=2 \Rightarrow \int \frac{R_d(x)}{ax^2+bx+c}\,dx$ ⇒ 3 CASI: $\Delta<0$, $\Delta=0$, $\Delta>0$

1.) $\Delta>0$, R di grado 0: $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) \Rightarrow \int \frac{d}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{d}{a} \int \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}\,dx$

$\Delta>0$, R di grado 1: $\int \frac{px+q}{(x-x_1)(x-x_2)}\,dx = \int \left(\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} \right) dx$

2.) $\Delta=0$, R di grado 0: $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2 \Rightarrow \int \frac{p}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{p}{a} \int \frac{1}{(x-x_0)^2}\,dx$

$\Delta=0$, R di grado 1: $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \left(\frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2} \right) dx$

3.) $\Delta<0$ → devo riportarmi ad una forma conosciuta, soprattutto:
. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctg x + k$
. $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \log|\varphi(x)| + k$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 100

VETTORI LINEARMENTE DIPENDENTI

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \neq \vec{0}$ sono linearmente dipendenti se $\exists c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tale che:
$c_1\vec{v}_1 + \dots + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$ -> la combinazione lineare da luogo al vettore nullo

Due vettori sono linearmente dipendenti <=> sono paralleli

VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \neq \vec{0}$ sono linearmente indipendenti se non sono linearmente dipendenti, cioè:
se $c_1\vec{v}_1 + \dots + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$ => $c_1, \dots, c_k = 0$ -> sono tutti nulli.

NEL PIANO -> AL MASSIMO COPPIE DI VETTORI LINEARM. INDIPENDENTI (il terzo può essere scritto come combinazione lineare degli altri due): $\vec{v}, \vec{w}$ lin. indip. => $\forall \vec{u}, \exists c_1, c_2$ T.c. $\vec{u} = c_1\vec{v} + c_2\vec{w}$

NELLO SPAZIO -> AL MASSIMO TERNE DI VETTORI LINEARM. INDIPENDENTI (il quarto può essere scritto come combinazione lineare degli altri tre): $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$ lin. indip. => $\forall \vec{z}, \exists c_1, c_2, c_3$ T.c. $\vec{z} = c_1\vec{v} + c_2\vec{w} + c_3\vec{u}$

IN $\mathbb{R}^n$ -> AL MASSIMO n-UPLA VETTORI LIN. INDIPENDENTI

BASI ORTONORMALI

Sistemi di riferimento scelti con rette di riferimento ortogonali tra loro, in base alle Normali = vettori di lunghezza 1, linearmente indipendenti:

$$\left.\begin{aligned} \vec{i} &= (1,0,0) = \vec{e}_1 \\ \vec{j} &= (0,1,0) = \vec{e}_2 \\ \vec{k} &= (0,0,1) = \vec{e}_3 \end{aligned}\right\} \text{Normali} \rightarrow \forall \vec{v}, \quad \vec{v} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k} = (v_1, v_2, v_3)$$

VETTORI APPLICATI

Vettori applicati non nell'origine: $\overrightarrow{P-P_0} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}$ -> lo si riporta all'origine

RAPPRESENTARE RETTE NEL PIANO

1) Retta passante per P_0 e $\perp \vec{w} = (w_1, w_2)$ = EQUAZIONE CARTESIANA

Sono tutti i punti $P \perp \vec{w}$, posso scriverli con un vettore: $\overrightarrow{P-P_0} = (x-x_0, y-y_0)$

Se sono $\perp$: $\overrightarrow{P-P_0} \cdot \vec{w} = 0 \iff (x-x_0, y-y_0) \cdot (w_1, w_2) = 0 \iff w_1(x-x_0) + w_2(y-y_0) = 0 \iff$

$\iff w_1 x + w_2 y + (-w_1 x_0 - w_2 y_0) = 0$

$ax + by + c = 0$ -> equazione della retta -> in $\mathbb{R}^3$ però, quei punti individuano un piano

2) Retta passante per P_0 e $// \vec{v} = (v_1, v_2)$ = EQUAZIONE PARAMETRICA

L'insieme dei punti $P = (x,y)$ tale che $\overrightarrow{P-P_0} // \vec{v} \iff \exists t \in \mathbb{R}$ T.c. $\overrightarrow{P-P_0} = t \cdot \vec{v}$ -> SONO LINEAR. DIPENDENTI

=> $(x-x_0, y-y_0) = t \cdot (v_1, v_2) = (tv_1, tv_2)$ -> I COMPONENTI DEVONO ESSERE UGUALI A COPPIE

$$\begin{cases} x - x_0 = tv_1 \\ y - y_0 = tv_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases}$$

-> equazione della retta in forma parametrica

PASSARE DALLA PARAMETRICA ALLA CARTESIANA

$$\begin{cases} t = \dfrac{x-x_0}{v_1} \\ t = \dfrac{y-y_0}{v_2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2}$$

PASSARE DALLA CARTESIANA ALLA PARAMETRICA

pongo $x = s$ => $a \cdot s + by + c = 0$ => $\begin{cases} x = s \\ y = \dfrac{-c - a \cdot s}{b} \end{cases}$ -> sostituendo i valori, verifico che $\exists s$ T.c. la retta passa per P_0

FORMA PARAMETRICA NELLO SPAZIO

$$\begin{cases} x - x_0 = tv_1 \\ y - y_0 = tv_2 \\ z - z_0 = tv_3 \end{cases}$$

→ In $\mathbb{R}^3$: si definisce il piano passante per il punto (x_0, y_0) che approssima la f,
$f(x,y) = f(x_0, y_0) + (\ldots) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$ → e' $o(\ldots)$ e la distanza tra i punti (x,y) e (x_0,y_0)
e il piano Tg, proprietà: qualunque curva su questo piano passante per il punto dato, ha tutte le rette Tg contenute su quello stesso piano

DEFINIZIONE DELLE DERIVATE PARZIALI

hp:
- $f: (x,y) \to \mathbb{R}$
- dom f: $y = y_0$ → dom f e' una retta // asse x
- $\Gamma(f) = (x, y, f(x,y))$

Po Posso variare x con y fissa: $\begin{cases} x = x \\ y = y_0 \\ z = f(x, y_0) \end{cases}$ → se pongo $x = T$ ⇒ $\begin{cases} x = T \\ y = y_0 \\ z = f(T, y_0) \end{cases}$ → curva in forma parametrica

⇒ f ha derivata parziale rispetto ad x, calcolata in (x_0,y_0) ⇔ ∃ finito $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$
Si indica: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \partial_x f(x_0,y_0) = D_x f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)$

Si può definire una nuova $g(x)$ in una sola variabile, perché $y = y_0$ e' fisso: $g(x) = f(x, y_0)$ ⇒
⇒ $g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$

La derivata parziale dà il coefficiente angolare della retta Tg alla curva del grafico in quel punto, il vettore Tg alla curva sarà: $\gamma'_x(T_0) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right) = (\gamma_x(T_0))'$ → con $\gamma_x = (T, y_0, f(T, y_0))$

Con lo stesso procedimento si può trovare $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, e il vettore $\gamma'_y(y_0) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$

Se ∃ piano Tg alla funzione ⇒ sarà dato da: $\begin{cases} \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right) \\ \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \end{cases}$ → 2 curve parametriche, 2 vettori linearmente indipendenti

Ma l'esistenza delle due derivate parziali non garantisce né continuità, né l'esistenza del piano Tg. Mostrano solo il comportamento di f lungo le due rette

GRADIENTE DI f IN (x_0, y_0)

hp: ∃ derivate parziali di f in (x_0, y_0)
⇒ si dice gradiente di f in (x_0,y_0): $\nabla f(x_0, y_0) = \text{grad} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$

OSSERVAZIONE

1. Se ∃ $\nabla f(x_0, y_0)$ ⇒ f e' derivabile in (x_0, y_0)
2. Se f e' derivabile in (x_0, y_0) $\not\Rightarrow$ f continua in (x_0, y_0)

EQUAZIONE DI UN PIANO, passante per un punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$, // a due vettori dati $\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)$ e $\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) =$$
$$= f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \circ (x - x_0, y - y_0)$$ → PRODOTTO SCALARE

Se ∃, questa e' l'equazione del piano Tg

DEFINIZIONE

$f(x,y)$ e' differenziabile in (x_0, y_0) ⇔ $f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$ se $(x,y) \to (x_0$

TEOREMA

Se f e' differenziabile in (x_0, y_0) ⇒ f e' continua → DIM: come per una sola variabile
Inoltre: il piano e' il piano Tg, cioè contiene tutte le rette Tg alle curve sul grafico che passano per il punto (x_0, y_0)

NUMERI COMPLESSI

INSIEME $\mathbb{C}$ → estensione di $\mathbb{R}$
→ campo, dove sono possibili operazioni di somma e divisione e in cui tutte le equazioni algebriche hanno soluzioni
→ si perde la struttura d'ordine, non c'è più coerenza con la struttura algebrica, impossibile fare disuguaglianze

Costruito introducendo un nuovo numero: i (n° "immaginario"), la cui proprietà è: $i^2=-1$.
Il nuovo insieme è generato da tutte le operazioni possibili tra $\mathbb{R}$ ed i: $\mathbb{C}=\{\mathbb{R}, i\}$.
i è un numero ⇒ $-i$ è un numero, e dall'algebra: $(-i)^2=i^2=-1$

RISOLVERE UN'EQUAZIONE DI 2° GRADO CON $\Delta<0$

$x^2+px+q=0 \rightarrow x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q \Rightarrow \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{2}-q=-\left|\frac{p^2}{2}-q\right|$

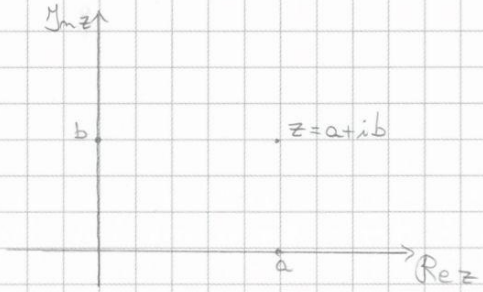
La formula risolutiva diventa: $x=\frac{-p\pm i\sqrt{|\Delta|}}{2}$, poiché $\sqrt{-1}=\sqrt{i^2}=i$

DEFINIZIONE

$\mathbb{C}$ è l'insieme di tutte le costruzioni del tipo $a+ib$, dove $a,b\in\mathbb{R}$ e i è l'unità immaginaria.

RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DI $\mathbb{C}$

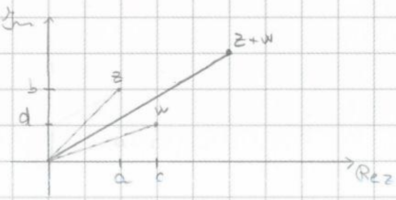
Per definizione, l'insieme $\mathbb{C}$ è fatto da $a+ib$, quindi dipende dalla scelta di 2 numeri reali, è una coppia ordinata, che quindi può identificare punti nel piano



Ascissa $= a = \mathrm{Re}\, z$
Ordinata $= b = \mathrm{Im}\, z$ } $z=a+ib$ → PUNTO RAPPRESENTATO
i = unità immaginaria, si rappresenta sulle ordinate, in corrispondenza di 1 (unità)
Piano di Argand-Gauss = piano arricchito di una struttura algebrica

SOMMA

$z+w=(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$
↳ simili ai punti rappresentativi di vettori
Valgono tutte le proprietà della somma
Elemento neutro $=0 \Rightarrow z+0=z$



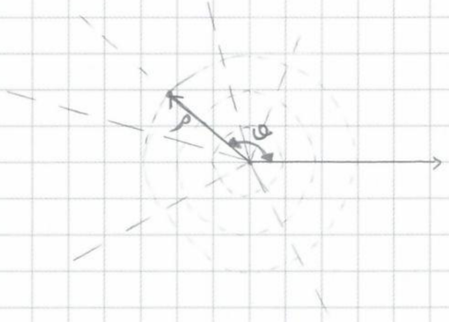
PRODOTTO

$z\cdot w=(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$
Elemento neutro $=1 \Rightarrow z\cdot 1=z$

COORDINATE POLARI

Griglia: { circonferenze centrate in un punto P
semirette che escono dal punto P

Ogni retta incontra una circonferenza in un punto solo, che può essere indicato da:
- distanza dall'origine: $\rho>0$
- angolo θ, dato da ampiezza tra 1 semiretta di riferimento e quella della direzione del punto



$P=(\rho,\theta)$

Sovrapponendo questo sistema col piano Argand-Gauss:
$\begin{cases} a=\rho\cos\theta \\ b=\rho\sin\theta \end{cases}$, con: $\rho=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, MODULO DI z
θ = ARGOMENTO DI z

RAPPRESENTAZIONE TRIGONOMETRICA

Dato un numero $z = a + ib$

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \rho \\ \vartheta = \text{ARGOMENTO} \rightarrow \begin{cases} a = \rho\cos\vartheta \\ b = \rho\sin\vartheta \end{cases} \end{cases} \Rightarrow z = \rho\cos\vartheta + i\rho\sin\vartheta = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

Avendo: $z_1 = \rho_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_2)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)$

- $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \cos\vartheta_1 = \cos\vartheta_2 \\ \sin\vartheta_1 = \sin\vartheta_2 \end{cases} \rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ t.c. $\vartheta_1 = \vartheta_2 + 2k\pi \Rightarrow$ l'angolo è individuato a meno di un $2k\pi$
- $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \left[\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)\right]$

ESPONENZIALE COMPLESSO

I numeri $z \in \mathbb{C}$ sulla circonferenza sono del tipo: $\cos\vartheta + i\sin\vartheta = e^{i\vartheta}$

$z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$ -> FORMA ESPONENZIALE

Esponenziale reale -> iniettivo

Esponenziale complesso -> non iniettivo: se $\vartheta_1 = \vartheta_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow e^{i\vartheta_1} = e^{i\vartheta_2}$

$$z = a + ib \Rightarrow e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a \cdot (\cos b + i \cdot \sin b) \rightarrow \begin{cases} |e^z| = e^a \\ \arg(e^z) = b, \text{ a meno di } 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

COMPLESSI ELEVATI A POTENZA

Se dobbiamo determinare gli z t.c. $z^n = w$

in $\mathbb{C}$, ci sono esattamente n soluzioni: $z_0, \dots, z_{n-1}$

So che:
- $z = \rho(\cos\vartheta + i \cdot \sin\vartheta)$ → $z^n = \rho^n(\cos(n\vartheta) + i \cdot \sin(n\vartheta))$
- $w = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

$z^n = w \Leftrightarrow \rho^n(\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)) = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

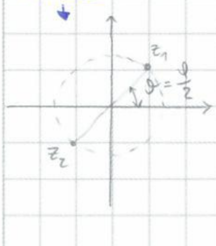
Tutte le radici sono del tipo: $z_k = |z_k| \cdot (\cos\vartheta_k + i\sin\vartheta_k)$

dove:
- $|z_k| = \sqrt[n]{r} \in \mathbb{R}$, $\forall k = 0, \dots, n-1$
- $\vartheta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$, $k = 0, \dots, n-1$

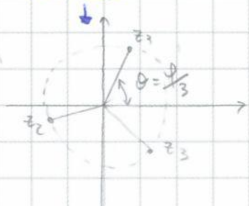
- $k = 0 \Rightarrow \vartheta_k = \frac{\varphi}{n}$
- $k = 1 \Rightarrow \vartheta_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}$
- $k = 2 \Rightarrow \vartheta_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{4\pi}{n}$
- ...
- $k = n-1 \Rightarrow \vartheta_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{(2n-2)\pi}{n}$
- $k = n \Rightarrow \vartheta_k = \frac{\varphi}{n} + 2\pi = \frac{\varphi}{n} \pmod{2\pi}$ -> è lo stesso angolo di partenza

Rappresentare le soluzioni:

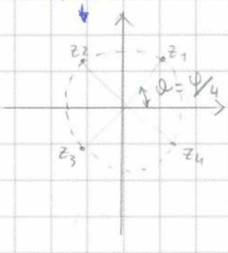
- $n = 2$



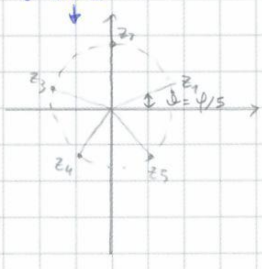
- $n = 3$



- $n = 4$



- $n = 5$



MODELLO PREDA-PREDATORE

Due popolazioni in un territorio. Una si nutre di vegetali, l'altra è la predatrice.
C'è interazione: la prima crescerebbe in modo Malthusiano senza predatori; la seconda dipende dalle prede.

PREDE → $x' = ax$
PREDATORI → $y' = -cy$

INCONTRANDOSI $\begin{cases} x' = ax - bxy & \to \text{diminuiscono} \\ y' = -cy + dxy & \to \text{aumentano} \end{cases}$ → ha un andamento CICLICO

Questi erano tutti modelli qualitativi.

EQUAZIONE DIFFERENZIALE ORDINARIA DI ORDINE n

Si indica così una qualunque $f(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$

Trovare una soluzione = trovare una funzione $\varphi(t): I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile n volte su I tale che, sostituendola, si ha: $f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) = 0 \quad \forall t \in I$

C'è un'unica variabile indipendente t; le derivate sono tutte rispetto a quell'unica variabile.

FORMA NORMALE: $x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$

PROBLEMA DI CAUCHY

Trovare una soluzione al problema di Cauchy vuol dire trovare una soluzione tale che soddisfa non solo l'equazione, ma anche le condizioni iniziali.

Avendo: $x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$, le condizioni iniziali sono: $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \\ \dots \quad \dots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$

hp: • $t_0 \in I$
• $\varphi: I \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
• φ derivabile n volte su I

φ è soluzione al problema di Cauchy ⟺ sostituendo $\varphi(t)$ al posto di x avrò:
$\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \quad \forall t \in I$
e anche ⟺ soddisfa le condizioni iniziali: $\begin{cases} \varphi(t_0) = x_0 \\ \varphi'(t_0) = x_1 \\ \dots \\ \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$

TEOREMA DI PEANO (ESISTENZA LOCALE DELLE SOLUZIONI)

Si deve cercare una soluzione al problema: $\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

hp: • f continua in $[t_0 - \beta, t_0 + \beta] \times (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$
⟹ $\exists$ un intervallo $I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subseteq (t_0 - \beta, t_0 + \beta)$, e
$\exists \varphi: I \to \mathbb{R}$ derivabile su I tale che:
$\begin{cases} \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) & \forall t \in I \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases}$ → esiste almeno una soluzione

TEOREMA DI CAUCHY (ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE DELLE SOLUZIONI)

hp: • f continua su $[t_0 - \beta, t_0 + \beta] \times (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$
• $\frac{\partial f}{\partial x}$ continua su $[t_0 - \beta, t_0 + \beta] \times (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$
⟹ $\exists I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, e $\exists! \varphi$ soluzione del problema di Cauchy su I

CONSEGUENZA: se trovo due diverse soluzioni su due intervalli, so che su $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ coincidono.
Se le condizioni valgono vicino ai confini di I ⟹ il T. di Cauchy è prolungabile, fino ad ottenere l'intervallo MASSIMALE (non sempre coincide col dom f). Quando si arriva al limite di questo intervallo, la soluzione va all'infinito oppure (se lì f non è definita) tende al punto di discontinuità.

GRAFICI

1) $g(x)=f(x)+q$
$q>0 \rightarrow$ Traslo in alto
$q<0 \rightarrow$ Traslo in basso

2) $g(x)=f(x+p)$
$p>0 \rightarrow$ Traslo a SX
$p<0 \rightarrow$ Traslo a DX

3) $g(x)=a\cdot f(x)$
$a>1 \rightarrow$ dilato verticalmente
$0<a<1 \rightarrow$ schiaccio verticalmente

4) $g(x)=f(b\cdot x)$
$b>1 \rightarrow$ schiaccio orizzontalmente
$0<b<1 \rightarrow$ dilato orizzontalmente

5) $g(x)=-f(x)$
simmetrico a $f(x)$ rispetto all'asse x

6) $g(x)=f(-x)$
simmetrico a $f(x)$ rispetto all'asse y

7) $g(x)=|f(x)|$
Ribalto tutte le parti negative (sotto asse x)

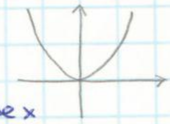
8) $g(x)=f(|x|)$
$x\geq 0 \rightarrow$ Tengo il grafico (parte DX)
$x<0 \rightarrow$ ribalto il grafico destro, rispetto all'asse y

9) $g(x)=\frac{1}{f(x)}$
- $\text{dom } g = \text{dom } f \setminus \{$i punti dove $f(x)=0\}$
- mantiene il segno: $g>0$ dove $f>0$; $g<0$ dove $f<0$
- inverte monotonia: g cresc. dove f decresc. ; g decresc. dove f cresc.

10) $g(x)=e^{f(x)}$
- $\text{dom } g = \text{dom } f$
- $e^{f(x)}>0, \quad \forall x \in \text{dom}$
- mantiene monotonia: g cresc. dove f cresc; g decresc. dove f decresc.
- $f(x)\rightarrow -\infty \Rightarrow e^{f(x)}\rightarrow 0$
  $f(x)\rightarrow 0 \Rightarrow e^{f(x)}\rightarrow 1$
  $f(x)\rightarrow +\infty \Rightarrow e^{f(x)}\rightarrow +\infty$

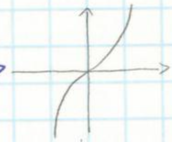
11) $g(x)=x^{\alpha}$

a) $\alpha\in\mathbb{N}, \alpha>0$
- α pari $\rightarrow$ simm. risp. asse x



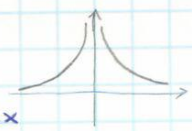
dom $=\mathbb{R}$
Im $=\mathbb{R}_{\geq 0}$

- α dispari $\rightarrow$



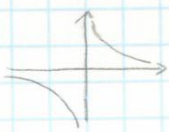
dom $=\mathbb{R}$
Im $=\mathbb{R}$

b) $\alpha\in\mathbb{Z}, \alpha<0$
- α pari $\rightarrow$ simm. risp. asse x



dom $=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
Im $=\mathbb{R}_{>0}$

- α dispari



dom $=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
Im $=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

c) $\alpha\in\mathbb{Q}, \alpha=\frac{m}{n}$ ($m,n\in\mathbb{N}$ e coprimi)

- m dispari, n pari

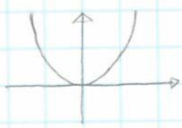
$\frac{m}{n}>1 \rightarrow$

$\frac{m}{n}<1$

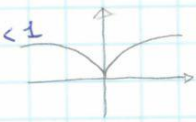
Dom $=\mathbb{R}_{\geq 0}$
Im $=\mathbb{R}_{\geq 0}$

- m pari, n dispari

$\frac{m}{n}>1$



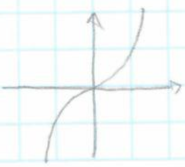
$\frac{m}{n}<1$



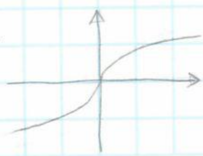
Dom $=\mathbb{R}$
Im $=\mathbb{R}_{\geq 0}$

- m dispari, n dispari

$\frac{m}{n}>1$



$\frac{m}{n}<1$



Dom $=\mathbb{R}$
Im $=\mathbb{R}$

CARIPLO S.p.A.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

EQUAZ. DIFF. A VARIABILI SEPARABILI

$x' = a(t) \cdot b(x)$

1. Se $\exists \bar{x}$ tale che $b(\bar{x}) = 0$ $\Rightarrow \varphi_1(t) = \bar{x}$
2. $\int \frac{1}{b(x)} dx = \int a(t)\, dt$ $\rightarrow x = \varphi_2(t)$ $\rightarrow$ ricavo x in funzione di T

EQUAZ. DIFF. LINEARI DEL 1° ORDINE

$y' + a(t) y = b(t)$

$\varphi(t) = e^{-A(t)} \cdot \left[\int e^{A(t)} \cdot b(t)\, dt \right]$

- **CASO OMOGENEO**

$y' + a(t) y = 0$

1. Se $\exists \bar{y}$ tale che $y = 0 \Rightarrow \varphi(t) = 0$
2. $\varphi(t) = k \cdot e^{-A(t)}$

EQUAZ. DIFF. OMOGENEE DEL 1° ORDINE

$x' = f(t, x)$ $\rightarrow$ f omogenea: $\forall \lambda \neq 0,\ f(\lambda t, \lambda x) = f(t, x) = f\left(1, \frac{x}{t}\right) = g\left(\frac{x}{t}\right)$

Passaggi: 1. $z = \frac{x}{t}$

2. $x = t \cdot z \rightarrow x' = z + t z'$
3. $z + t z' = g(z)$
4. $z' = (g(z) - z) \cdot \frac{1}{t}$

EQUAZ. DIFF. LINEARI DEL 2° ORDINE, A COEFFICIENTI COSTANTI

- **CASO OMOGENEO**

$x'' + a x' + b x = 0$

equazione caratteristica: $z^2 + a z + b = 0$

CASO 1 $\rightarrow \Delta > 0$

$\varphi_1(t) = e^{z_1 t}$

$\varphi_2(t) = e^{z_2 t}$

CASO 2 $\rightarrow \Delta = 0$

$\varphi_1(t) = e^{z_1 t}$

$\varphi_2(t) = t \cdot e^{z_1 t}$

CASO 3 $\rightarrow \Delta < 0$

Soluzioni dell'eq. caratteristica: $\alpha \pm i\beta$

$\varphi_1(t) = e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t$

$\varphi_2(t) = e^{\alpha t} \cdot \sin \beta t$

L'integrale generale è:

$\{ c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$

- **CASO COMPLETO**

$x'' + a x' + b x = f(t)$

TEOREMA 1: $f(t) = p_n(t) \cdot e^{\alpha t}$

1. Se α non è radice dell'eq. carat.:
   $\psi(t) = q_n(t) \cdot e^{\alpha t}$
2. Se α è radice dell'eq. carat., di molteplicità μ (1 v 2):
   $\psi(t) = t^{\mu} \cdot q_n(t) \cdot e^{\alpha t}$

TEOREMA 2: $f(t) = p_n(t) \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t \ \vee\ f(t) = q_n(t) \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin \beta t \ \vee\ f(t) = p_n(t) \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t + q_n(t) \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin \beta t$

1. Se $\alpha + i\beta$ non è radice dell'eq. caratteristica:
   $\psi(t) = e^{\alpha t} \left(q_n^1(t) \cdot \cos \beta t + q_n^2(t) \cdot \sin \beta t \right)$
2. Se $\alpha + i\beta$ è radice dell'eq. caratteristica, di molteplicità $\mu = 1$:
   $\psi(t) = t \cdot e^{\alpha t} \left(q_n^1(t) \cdot \cos \beta t + q_n^2(t) \cdot \sin \beta t \right)$

L'integrale generale è:

$\{ c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + \psi(t),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$

DEFINIZIONI

PROPRIETÀ ARCHIMEDEA DEI NUMERI REALI
$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a>0 \quad b>0$
$\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $na > b$

INSIEME SUPERIORMENTE LIMITATO
$A \subseteq \mathbb{R}$ e' sup. lim $\Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in A$, $x \leq b$ (b MAGGIORANTE DI A)

INSIEME INFERIORMENTE LIMITATO
$A \subseteq \mathbb{R}$ e' inf. lim $\Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in A$, $b \leq x$ (b MINORANTE DI A)

INSIEME LIMITATO
$A \subseteq \mathbb{R}$ e' limitato $\Leftrightarrow \exists M \geq 0$ tale che $\forall x \in A$, $|x| \leq M$ (in $\mathbb{R}^n$: $d(x,0) \leq M$)

MASSIMO DELL'INSIEME
$\max A = M \in A$ tale che $\forall x \in A$, $x \leq M$

MINIMO DELL'INSIEME
$\min A = m \in A$ tale che $\forall x \in A$, $x \geq m$

ESTREMO INFERIORE DELL'INSIEME
$s = \inf A \Leftrightarrow$ 1. $\forall x \in A$, $s \leq x$ → e' minorante
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ tale che $s \leq x < s+\varepsilon$ → il più grande
$s = \max\{z \in \mathbb{R} : \forall x \in A, z \leq x\}$ → insieme dei minoranti

ESTREMO SUPERIORE DELL'INSIEME
$S = \sup A \Leftrightarrow$ 1. $\forall x \in A$, $x \leq S$
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ tale che $S-\varepsilon < x \leq S$
$S = \min\{z \in \mathbb{R} : \forall x \in A, x \leq z\}$

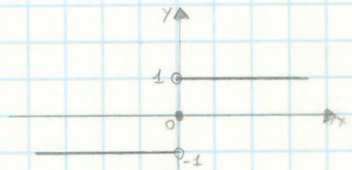
PRODOTTO CARTESIANO
$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n$

DISTANZA EUCLIDEA TRA DUE PUNTI IN $\mathbb{R}^n$
$P(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad Q(z_1, z_2, \ldots, z_n)$
$d(P,Q) = \sqrt{(x_1-z_1)^2 + (x_2-z_2)^2 + \ldots + (x_n-z_n)^2}$

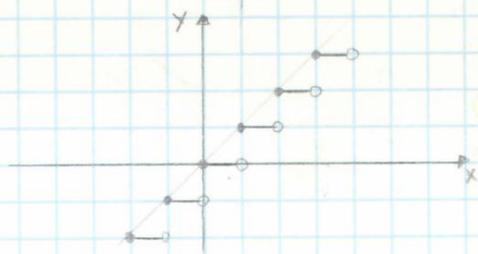
GRAFICO DELLA FUNZIONE f
$f : X \to Y$
$\Gamma(f) = \{(x,y) : x \in \operatorname{dom} f, y = f(x)\} = \{(x, f(x)) : x \in \operatorname{dom} f\} \subseteq X \times Y$
Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \Rightarrow \Gamma(f) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$

FUNZIONE SEGNO
$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



PARTE INTERA
$[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$
$x \mapsto [x] = n$ tale che $n \leq x < n+1$
$\Gamma(f) = \{(x, [x]) : x \in \mathbb{R}\}$



MANTISSA
$M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x - [x]$

SUCCESSIONE
f e' una successione se il suo dominio e' $\operatorname{dom} f = \{n \in \mathbb{N} : n \geq N_0\}$

IMMAGINE DI UN INSIEME
$A \subseteq \operatorname{dom} f$, $f(A) = \{y : y = f(x), x \in A\}$

CONTRO IMMAGINI
$f^{-1}(y) = \{x \in \operatorname{dom} f : f(x) = y\}$ → insieme delle controimmagini

FUNZIONE INVERSA
$f^{-1} : \operatorname{Im} f \to \operatorname{dom} f$
$y \mapsto x : f(x) = y$ → definibile solo se f e' iniettiva

INSIEME LIMITATO
INSIEME COMPATTO

$X \subset S$ è limitato se $\exists P \in S$ t.c. $\forall A \in X \Rightarrow A \in B(P, \rho)$
Un compatto è un insieme chiuso e limitato

NORMA

$\|A\| = d(A, O)$ -> distanza di A dall'origine

CONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE

hp. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A = \text{dom} f$, $\bar{x} \in A$
f è continua se: $\forall B(f(x))$, $\exists B(\bar{x})$ t.c. $x \in A \cap B(\bar{x}) \Rightarrow f(x) \in B(f(\bar{x}))$
Se $\bar{x}$ è p.to isolato => f è continua in $\bar{x}$
Se $\bar{x}$ è p.to di accumulazione => $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}) \Leftrightarrow f$ è continua in $\bar{x}$

INTORNI

- intorno destro di $\bar{x} \in \mathbb{R}$: $B^+_\varepsilon(\bar{x}) = [\bar{x}, \bar{x} + \varepsilon)$
- intorno sinistro di $\bar{x} \in \mathbb{R}$: $B^-_\varepsilon(\bar{x}) = (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x}]$

PUNTI DI ACCUMULAZIONE DX e SX

- $\bar{x}$ è p.to di acc. a dx per A se: $\forall B^+_\varepsilon(\bar{x})$, $A \cap B^+_\varepsilon(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$
- $\bar{x}$ è p.to di acc a sx per A se: $\forall B^-_\varepsilon(\bar{x})$, $A \cap B^-_\varepsilon(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$

CARIPLO S.p.A.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 100

.PROPOSIZIONE

hp: $\bar{x}$ p.to di acc. DX e SX di $A = \text{dom} f$
se $\exists \lim_{x\to\bar{x}^+} f(x) = \ell_1$ e se $\exists \lim_{x\to\bar{x}^-} f(x) = \ell_2 \Rightarrow \exists \lim_{x\to\bar{x}} f(x) \Leftrightarrow \ell = \ell_1 = \ell_2$

① se $\lim_{x\to\bar{x}^+} f(x) \neq \lim_{x\to\bar{x}^-} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to\bar{x}} f(x)$

② se $\exists \lim_{x\to\bar{x}} f(x) = \ell \Rightarrow \exists \lim_{x\to\bar{x}^+} f(x) = \lim_{x\to\bar{x}^-} f(x)$ DIM CASO $\ell \pm \infty$: def di limite per $g(x)$ e $f(x)$, poi per $[f(x)+g(x)]$, fisso $\varepsilon = 1$, pongo intorno $g(x) = a - \ell + 1$, viene un intorno di a

.TEOREMA DELLA SOMMA DEI LIMITI

hp: • date f, g definite su A → DIM CASO $\ell + m$: def. di limiti per $f(x)$ e $g(x)$, poi per $[f(x)+g(x)]$,
• c p.to di acc. di A — disuguaglianza triangolare, trovo 1 intorno di 2ε
TABELLA DEI CASI POSSIBILI → caso indeterminato: $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty$ $[+\infty - \infty]$

.TEOREMA DEL PRODOTTO TRA LIMITI

hp: • date $f, g: A \to \mathbb{R}$, $\text{dom} f = \text{dom} g = A$ → DIM. CASO $\ell \cdot m$: def dei limiti di f e g; def di $f \cdot g$; nel valore assoluto metto $(-\ell g(x) + \ell g(x))$; dis. triangolare; due pezzi $< \varepsilon$; $g(x)$ limitata, trovo 1 intorno
• c = p.to di acc per A
TABELLA DEI CASI POSSIBILI → caso indeterminato: $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ $[0 \cdot \pm\infty]$

.TEOREMA DEL RAPPORTO TRA LIMITI

hp: • $\exists B(c)$ t.c. $x \in B(c) \cap A \setminus \{c\}$, $g(x) \neq 0$
• c: p.to di acc di $A = \text{dom} \frac{1}{g(x)} = \text{dom} f(x) = \text{dom} g(x)$ → DIM che se $\lim_{x\to c} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to c} \frac{1}{g(x)} = \pm\infty$ → def. di limite $g(x) > a > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{g(x)} < \frac{1}{a}$
TABELLA DEI $\lim_{x\to c} \frac{1}{g(x)}$ (usando $y = \frac{1}{x}$) →
TABELLA DEI CASI POSSIBILI → casi indeterminati: $[0 \cdot \pm\infty]$, $[\frac{0}{\infty}]$

7b. COROLLARIO

hp: • f, g continue in $\bar{x}$, ovvero → $\bar{x}$ p.to isolato, oppure $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$ e $\lim_{x\to\bar{x}} g(x) = g(\bar{x})$
$$\Rightarrow \begin{cases} f+g \text{ è continua in } \bar{x} \\ f \cdot g \text{ è continua in } \bar{x} \\ \frac{f}{g} \text{ è continua in } \bar{x} \text{ se } g(\bar{x}) \neq 0 \end{cases}$$
① Tutti i polinomi sono funzioni continue
② I quozienti di polinomi sono continui dove il denom $\neq 0$
③ $\text{Tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$ è continua dove $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

. LIMITE DI POLINOMI

Per $\lim_{x\to\pm\infty} P(x)$ → metto in evidenza il grado più alto

b. LIMITE DI QUOZIENTI DI POLINOMI

Per $\lim_{x\to+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_k(x)} \to \begin{cases} n>k: \ell = \text{sgn}\left(\frac{a_n}{b_k}\right) \cdot \infty \\ n=k: \frac{a_n}{b_k} \\ n<k: 0 \end{cases}$, con $\lim_{x\to-\infty}$, con $n-k$ dispari cambia il segno

. 1° TEOREMA DEL CONFRONTO

hp: • f, g definite su $A \to \mathbb{R}$ → DIM: $f(x) - g(x) \leq 0$ → T. di somma dei limiti: $\lim (f-g) = \ell - m$;
• c p.to di acc. di A — T. permanenza del segno: $\ell - m \leq 0 \Rightarrow \ell \leq m$
• $\exists \lim_{x\to c} f(x) = \ell$, $\exists \lim_{x\to c} g(x) = m$

$\Rightarrow \exists B(c)$ t.c. $\forall x \in B(c) \cap A \setminus \{c\}$, se $f(x) < g(x) \Rightarrow \ell \leq m$ (e viceversa)

b. 1° TEOREMA DEL CONFRONTO (CASO INFINITO)

hp: • f, g definite su $A \to \mathbb{R}$
• c p.to di acc. di A → DIM: def di limite di $f(x)$: ... $f(x) > a \Rightarrow g(x) > f(x) > a$
• $\exists \lim_{x\to c} f(x) = +\infty$

se $\exists B(c)$ t.c. $\forall x \in B(c) \cap A \setminus \{c\}$ dove $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \exists \lim_{x\to c} g(x) = +\infty$

0. 2° TEOREMA DEL CONFRONTO (DEI DUE CARABINIERI

hp: • f, g, h definite in $A \to \mathbb{R}$
• c p.to di acc di A
• $\exists B(c)$ t.c. $\forall x \in B(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
• $\exists \lim_{x\to c} f(x) = \ell$ e $\exists \lim_{x\to c} h(x) = \ell$

$\Rightarrow \exists \lim_{x\to c} g(x) = \ell$ — DIM.: def di limite per f ed h; poi la applico a: $\ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon$ → intorno di ℓ

SIMBOLI DI LANDAU

$f = O(g)$ se $\exists B(c)$ ed $\exists M > 0$ t.c. se $x \in B(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow |f(x)| \le M \, |g(x)|$

quindi: $f = O(g)$ per $x \to c \iff \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < M$ (f è controllata da g)

$f \asymp g$ se $\exists B'(c)$ t.c. $\forall x \in B'(c) \cap A \setminus \{c\}$, se $g(x) \neq 0$

se $\exists \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow f \asymp g$ per $x \to c$ (f e g hanno lo stesso ordine di grandezza)

$f \sim g$ se $\exists \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow f \sim g$ per $x \to c$ (f e g sono equivalenti per $x \to c$)

$f = o(g)$ se $\exists \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow f = o(g)$ per $x \to c$ (f è trascurabile rispetto a g, f è "o piccolo" di g)

se $\lim_{x \to c} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to c} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \Rightarrow g = o(f)$ per $x \to c$

PROPRIETÀ

1) $f \sim g$ per $x \to c \Rightarrow f \asymp g$ per $x \to c$
2) $f \asymp g$ per $x \to c \Rightarrow \exists \ell \neq 0$ t.c. $f \sim \ell g$ per $x \to c$
3) $f \sim g$ per $x \to c \iff f(x) = g(x) + o(g)$ per $x \to c$
4) $f = o(g)$ per $x \to c \iff \forall a \neq 0$, $f = o(a \cdot g)$ e $a \cdot f = o(g)$ per $x \to c$
5) $\lim_{x \to c} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \iff f(x) = \ell + o(1)$ per $x \to c$
se f è continua in $x_0 \Rightarrow f(x) = f(x_0) + o(1)$ per $x \to x_0$
6) $f \sim g \wedge g \sim h \Rightarrow f \sim h$ per $x \to c$
7) $f \sim g \iff g \sim f$ per $x \to c$

PROPOSIZIONE · se $f \sim f_1$ per $x \to c$ e se $g \sim g_1$ per $x \to c$ –

$$\Rightarrow \begin{cases} f \cdot g \sim f_1 \cdot g_1 \\ \frac{f}{g} \sim \frac{f_1}{g_1} \end{cases}$$

PRINCIPIO DI ELIMINAZIONE DEI TERMINI TRASCURABILI

hp: • $f, g: A \to \mathbb{R}$
• c p.to di accumulazione per A
• $\exists B(c)$ t.c. $x \in B(c) \cap A \setminus \{c\} \Rightarrow g(x) \neq 0$

$$1^\circ \begin{cases} \bullet\ f \sim f_1 \text{ per } x \to c \\ \bullet\ g \sim g_1 \text{ per } x \to c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to c} f \cdot g = \lim_{x \to c} f_1 \cdot g_1 \\ \lim_{x \to c} \frac{f}{g} = \lim_{x \to c} \frac{f_1}{g_2} \end{cases}$$

$$2^\circ \begin{cases} \bullet\ f = f_1 + o(f_1) \\ \bullet\ g = g_1 + o(g_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to c} f \cdot g = \lim_{x \to c} (f_1 + o(f_1)) \cdot (g_1 + o(g_1)) = \lim_{x \to c} f_1 \cdot g_1 \\ \lim_{x \to c} \frac{f}{g} = \lim_{x \to c} \frac{f_1 + o(f_1)}{g_1 + o(g_1)} = \lim_{x \to c} \frac{f_1}{g_1} \end{cases}$$

PROPRIETÀ DEGLI o

1. $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$
2. $o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^p)$, con $p = \min(n, m)$
3. $o(\lambda x^n) = o(x^n)$
4. $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$
5. $x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$
6. $[o(x^n)]^k = o(x^{nk})$
7. Se f è limitata localmente in $x = 0 \Rightarrow f(x) \cdot o(x^m) = o(x^m)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 100

ASINTOTI

hp: • $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
• $\text{dom} f = A = (a, +\infty)$

$f(x)$ ha asintoto per $x \to +\infty$ se: $\exists\, g(x) = mx + q$ t.c. $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx+q)] = 0$

cioè: $f(x) = mx + q + o(1)$ per $x \to +\infty$

• Se $m = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = q \Rightarrow y = q$ è ASINTOTO ORIZZONTALE (per $x \to +\infty$, destro)

• Se $m \neq 0 \Rightarrow$ a. $f(x)$ è un infinito per $x \to +\infty$:
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (mx + q + o(1)) = (\text{sgn } m)\infty = \pm\infty$

b. $f(x)$ è un infinito di ordine 1 rispetto ad x, per $x \to +\infty$:
$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{mx + q + o(1)}{x} = m \iff f(x) = mx + o(1)$ per $x \to +\infty$

c. $f(x) - mx = q + o(1) \iff \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} (q + o(1)) = q$

$\Rightarrow y = mx + q$ è ASINTOTO OBLIQUO

FUNZIONI CONTINUE

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

f è continua in $x_0 \in A \iff \forall B(f(x_0))\ \exists B(x_0)$ t.c. $x \in B(x_0) \cap A \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0))$

2 casi: 1. x_0 è punto isolato di $A \Rightarrow f$ è continua in x_0
2. x_0 è punto di accumulazione di $A \Rightarrow f$ è continua in $x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

DISCONTINUITÀ

1. Discontinuità eliminabile: $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \neq f(x_0)$
Prolungando la $f(x)$, la rendiamo continua: $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \neq x_0 \\ \ell & \text{per } x = x_0 \end{cases}$

2. Discontinuità di 1ª specie o di tipo salto:
$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$; $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$, ma $\ell_1 \neq \ell_2$. Salto $= |\ell_1 - \ell_2|$

3. Discontinuità di 2ª specie: uno dei due limiti $\nexists$, oppure almeno uno dei due è $\pm\infty$

Discontinuità: in punti dove f è definita.

Singolarità: in punti dove f non è definita $\to$ sempre eliminabile col prolungamento

f è continua in un insieme $A \subseteq \text{dom} f$ se è continua in $\forall x_0 \in A$.

LEMMA → INTERVALLI INCAPSULATI

hp: • Successione di intervalli: $[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n]$
Per costruzione: $a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_1 \leq b_0$
• $\lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$

DIM: • a_n crescente, $\lim = \sup = \ell$;
• b_n decr, $\lim = \inf = m$; poi
faccio il $\lim (b_n - a_n) = 0 \iff m = \ell = \bar{x}$

$\Rightarrow [a_0, b_0] \cap \ldots \cap [a_n, b_n] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\bar{x}\}$, l'intersezione degli intervalli è un singolo elemento

TEOREMA DEGLI ZERI

Data una $f: A \to \mathbb{R}$, si dice "zero di f" un punto $\bar{x} \in \text{dom} f$ tale che $f(\bar{x}) = 0$

hp: • $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$
• $f(a) \cdot f(b) < 0$

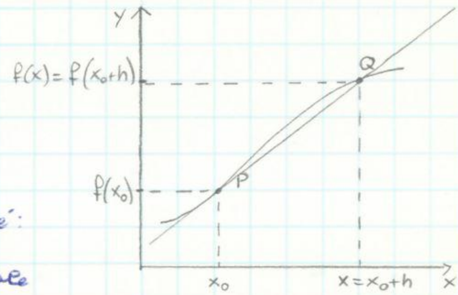
$\Rightarrow \exists\, \bar{x} \in (a, b)$ t.c. $f(\bar{x}) = 0$

DIM. diseco l'intervallo, cerco i pt. medi: $c = \frac{b+a}{2}$, valuto $f(c)$. Continuo, e si ha: $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \to 0$, se $n \to +\infty$.
per il lemma: $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = \bar{x}$. Per continuità: $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \lim_{a_n \to \bar{x}} f(a_n) = f(\bar{x}) \geq 0$ → stessa cosa per b_n
↳ T. x permanenza del segno.

$f(\bar{x}) \leq 0$, $f(\bar{x}) \geq 0 \Rightarrow f(\bar{x}) = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 100

DERIVATE



hp: • $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
• $x_0 \in dom f$, p.to interno al dom f, cioè $\exists B(x_0) \subseteq dom f$

Si parte dalla secante $\overline{PQ}$, il suo coefficiente angolare è:

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \to \text{rapporto incrementale}$$

Per trovare la Tg, si fa tendere Q a P, cioè $h \to 0$: se $\exists$ limite ed è finito, è la derivata:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \to = \frac{df}{dx}(x_0) = D_{x_0}f = d_x f(x_0)$$

Se cambio, pongo $x = x_0 + h \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

Se $f'(x_0)$ esiste, è il coeff. ang. della retta Tg al grafico di f in $P(x_0, f(x_0))$:

$$Tg: \; y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

DEFINIZIONE

Se $\exists f'(x_0) \Rightarrow f$ è derivabile in x_0

DIM. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ per hp

$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \sigma(1) \to$ PROPRIETÀ DEGLI σ PICCOLI

TEOREMA (1° formula dell'incremento finito)

hp: x_0 p.to interno al dom f

f è derivabile in $x_0 \Leftrightarrow \exists \ell \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = f(x_0) + \ell(x - x_0) + \sigma(x - x_0)$ per $x \to x_0$ $[\ell = f'(x)]$

cioè f è differenziabile in x_0.

Si può dire anche il contrario:

DIM: scrivo formula; divido TT per $x - x_0$; faccio il limite da entrambe le parti, resta la def. di derivata

se $f(x) = f(x_0) + \ell(x - x_0) + \sigma(x - x_0) \Rightarrow f$ è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = \ell$

TEOREMA

hp: • x_0 p.to interno al dom f $\Rightarrow x_0$ p.to di acc. di dom f

• f è derivabile in x_0

$\Rightarrow$ f è continua in x_0

DIM: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \to$ def. di continuità
per hp, derivabile $\Rightarrow$ scrivo 1ª formula dell'incremento finito, faccio $\lim_{x \to x_0}$, resta la def. di continuità.

DIMOSTRAZIONI

• $f(x) = x^\alpha$, $x_0 > 0 \Rightarrow \frac{d(x^\alpha)}{dx} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$ con $x > 0$

parto da $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$; sostituisco $\frac{h}{x_0} = T$;
devo arrivare a: $\lim_{T \to 0} \frac{(1+T)^\alpha - 1}{T} = \alpha$

• $f(x) = \sqrt[2n+1]{x} \to$ definita e continua in $\mathbb{R}$, non derivabile in $x_0 \to$ è simmetrica a x^3, che ha derivata $y=0$ in $x=0$, quindi, la deriv di $\sqrt[3]{x}$ è $\perp$ a $y=0$, ovvero $y = +\infty$, $\nexists$ lim fin.

• $f(x) = a^x \Rightarrow \frac{da^x}{dx} = a^x \cdot \ln a \to$ parto da $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, arrivo a: $a^{x_0} \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$, LIM NOTEVOLE $= \ln a$

ALGEBRA DELLE DERIVATE

hp: • $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

• f, g derivabili in x_0, p.to interno a dom f e dom g

$\Rightarrow$ 1. La derivazione è lineare:

• $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

• $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$

DIM. uso formula dell'incr finito; $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \ldots$
$\ldots + (f'(x_0) + g'(x_0))(x - x_0) \ldots$; $(f'(x_0) + g'(x_0)) = \ell = (f+g)'(x)$, FATTO

2. Regola di Leibniz:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

DIM: scrivo le 2 formule; moltiplico membro a membro; tolgo tutti gli $\sigma(x - x_0) \ldots$;
verifico che $f'(x_0) g'(x_0)(x - x_0)^2 = \sigma(x - x_0)$; viene $[f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)](x - x_0)$, è $= \ell = (f \cdot g)'(x)$

hp aggiuntiva: $g(x_0) \neq 0$

3. $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

DIM. $\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(x_0)}{x - x_0}$, viene $\lim_{x \to x_0} - \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\text{RAPP INCR}} \cdot \underbrace{\frac{1}{g(x) g(x_0)}}_{\to \text{ PER CONTINUITÀ: } g(x) \to g(x_0)}$

$= -g'(x_0) \cdot \frac{1}{(g(x_0))^2}$

4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

CARIPLO
CASSA DI RISPARMIO DELLE PROVINCIE LOMBARDE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 100

PUNTI DI MASSIMO E MINIMO

hp: f definita su A

- x_0 è punto di massimo locale per f su A $\Leftrightarrow$ $\exists B(x_0)$ t.c. $\forall x \in B(x_0) \cap A \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$
- x_0 è punto di minimo locale per f su A $\Leftrightarrow$ $\exists B(x_0)$ t.c. $\forall x \in B(x_0) \cap A \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$

  I punti di massimo e di minimo locale sono detti: PUNTI DI ESTREMO LOCALE
- x_0 è punto di massimo assoluto per f su A $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \text{dom} f \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$
- x_0 è punto di minimo assoluto per f su A $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \text{dom} f \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$

  I punti di massimo e di minimo assoluti sono detti: PUNTI DI ESTREMO GLOBALE

DEFINIZIONE

hp:
- f definita in $B(x_0)$
- f derivabile in x_0

$\Rightarrow$ se $f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ si dice punto critico di f

TEOREMA DI FERMAT

hp:
- f definita in A
- $x_0 \in A$, pto interno ad A
- f derivabile in x_0

Se x_0 è p.to di estremo locale $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

DIM: suppongo x_0 pto di MAX $\Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$, $f(x) - f(x_0) \leq 0$. Per hp, faccio il $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
① Prendo $x < x_0$; rapporto incr $\geq 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} \geq 0$ (th. cond. T. permanenza segno);
② Prendo $x \geq x_0$; rapporto incr $\leq 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} \leq 0$ (" " " " ");
derivata DX e SX devono essere uguali $\to$ possibile solo se $f'(x_0) = 0$

POSSIBILI PUNTI DI ESTREMO (MAX o MIN)

1. Punti critici: $f'(x_0) = 0$
2. Punti di discontinuità
3. Punti di non derivabilità
4. Punti di estremo del dominio

TEOREMA DI ROLLE

hp:
- f definita e continua su $[a,b]$
- f derivabile su (a,b)
- $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \exists \bar{x} \in (a,b)$ t.c. $f'(\bar{x}) = 0 \to$ pto critico

DIM: Per T. Weierstrass: $\exists \bar{x}, \exists \underline{x}$ t.c. $\overset{m}{f(\underline{x})} \leq f(x) \leq \overset{M}{f(\bar{x})}$.
① Se $\forall x$, $f(x) = f(a) = f(b) \to f$ costante $\Rightarrow f(\bar{x}) = f(\underline{x}) \Rightarrow f'(\bar{x}) = 0$ $\forall x \in (a,b)$
② Se $f(\bar{x}) \neq f(\underline{x})$, $M > m$
- Suppongo $f(a) = f(b) = M > m$, $m = f(\underline{x}) \Rightarrow \underline{x}$ p.to estremo loc, per Fermat: $f'(\underline{x}) = 0$
- Suppongo $f(a) = f(b) = m < M$, $M = f(\bar{x}) \Rightarrow \bar{x}$ pto estr loc, per Fermat: $f'(\bar{x}) = 0$

TEOREMA ~~DI LAGRANGE~~ DEL VALOR MEDIO

TEOREMA DI LAGRANGE

hp:
- f definita e continua in $[a,b]$
- f derivabile su (a,b)

$\Rightarrow \exists \bar{x} \in (a,b)$ t.c. $f'(\bar{x}) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

DIM: introduco $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a) \to$ cont $[a,b]$ e deriv. (a,b)
$g(a) = f(a)$; $g(b) = f(a) \Rightarrow g(a) = g(b) \to$ applico T. Rolle,
$\exists \bar{x}$, $g'(\bar{x}) = 0 \to g'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f'(\bar{x}) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

GEOMETRICAMENTE:
- $f'(\bar{x})$ è il coefficiente angolare della retta Tg al grafico di f in $(\bar{x}, f(\bar{x}))$
- $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è il coef. angolare della retta congiungente i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

I COROLLARIO AL T. DI LAGRANGE, 2° FORMULA DELL'INCREMENTO FINITO

hp:
- f derivabile su I = intervallo aperto ($\Rightarrow f$ continua su I)
- $x, x_0 \in I$

$\Rightarrow \exists c$ compreso tra x e x_0 t.c.: $f(x) = f(x_0) + f'(c) \cdot (x - x_0)$

DIM: prendo $x < x_0 \Rightarrow [x, x_0] \subseteq I$;
f cont e deriv su $[x, x_0]$;
applico Lagrange: $\exists c \in [x, x_0]$ t.c. $f'(c) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$
cambio segni etc...

II COROLLARIO AL T. DI LAGRANGE

hp:
- f derivabile su I ($\Rightarrow f$ definita e continua su I)
- $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in I$, $f(x) = k$
(se $f'(x)$ è sempre nulla $\Rightarrow f$ è una costante)

DIM: prendo $x, x_0 \in I$
applico 2° formula dell'incr finito:
$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)}_{=0}(x - x_0) = \underbrace{f(x_0)}_{k}$

TEOREMA DEL TAPPABUCHI

hp: • f continua in $B(x_0)$
• f derivabile in $B(x_0) \setminus \{x_0\}$
• $\exists \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \ell_1$
• $\exists \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \ell_2$

$\Rightarrow \exists f'_-(x_0) = \ell_1$ ed $\exists f'_+(x_0) = \ell_2$, e se $\ell_1 = \ell_2 \Rightarrow \exists f'(x_0) = \ell_1 = \ell_2$

DIM: per trovare la derivata, dovrei calcolare $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
vedo ke tutte le hp di De l'Hop sono verificate:
$f(x)-f(x_0)$ deriv. in $x \neq x_0$; $x-x_0$ deriv. in $x \neq x_0$; f cont in $x_0 \Rightarrow f(x)-f(x_0)=0$ e anke $x-x_0=0$, $\Rightarrow$ il loro rapp. è f.i.
Applico de l'Hop: $\lim_{x \to x_0^-} \frac{(f(x)-f(x_0))'}{(x-x_0)'} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x)}{1} = \ell_1$ per hp (va bene anke $\pm\infty$)
quindi anke $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_1$

TEOREMA 1 - FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI PEANO

hp: • f derivabile n volte in x_0
$\Rightarrow$ posso approssimare la funzione con un polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0 $[Tf_{n,x_0}(x)]$:
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \quad \text{per } x \to x_0$$
dove $o((x-x_0)^n)$ è il resto di Peano

DIM. se f è deriv. in $x_0 \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \to$ Taylor 1° ordine $[Tf_{1,x_0}(x)]$
proviamo un grado superiore: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + a(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$
quindi: $f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + a(x-x_0)^2] = o((x-x_0)^2)$
mi chiedo: $\exists a \in \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-a(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} \stackrel{?}{=} 0 \to$ applico de l'Hop, tutte le hp sono verificate $\Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)-2a(x-x_0)}{2(x-x_0)} = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} - a\right] = 0 \to$ quest limite esiste solo se $\exists f''(x_0)$ finito, e quest sarebbe uguale a: $\frac{1}{2} f''(x_0) - a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} f''(x_0)$
Se $f(x)$ è derivabile n volte, ripeto il procedimento n volte

TEOREMA 2 - FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI LAGRANGE

hp: • f derivabile n volte in $B(x_0)$
• f derivabile $n+1$ volte in $B(x_0) \setminus \{x_0\}$
$\Rightarrow \forall x \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$, $\exists c$ fra x e x_0 t.c. è possibile approssimare $f(x)$:
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1} \quad \text{per } x \to x_0$$
dove $\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}$ è il resto di Lagrange

TEOREMA

hp: • f derivabile n volte in x_0
• $\exists$ un polinomio di grado n tale che:
$$f(x) - [a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n] = o((x-x_0)^n) \quad \text{per } n \to +\infty$$
$\Rightarrow a_0 = f(x_0)$, $a_1 = f'(x_0)$, ..., $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$,
solo il polinomio di Taylor può approssimare bene una f in questo modo

FORMULA DI MACLAURIN (FORMULA DI TAYLOR CENTRATA IN $x_0 = 0$)

hp: • f derivabile n volte in $x_0 = 0$
$$\Rightarrow f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} f''(0) \cdot x^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \cdot x^n + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0$$

PROPOSIZIONE

hp: • f funzione pari: $f(-x) = f(x)$
• f derivabile n volte in x_0
$\Rightarrow f^{(2k+1)}(0) = 0$, tutte le derivate di ordine dispari calcolate in $x_0 = 0$ sono $= 0$

hp: • f funzione dispari: $f(-x) = -f(x)$
• f derivabile n volte in x_0
$\Rightarrow f^{(2k)}(0) = 0$, tutte le derivate di ordine pari calcolate in $x_0 = 0$ sono $= 0$

$\Rightarrow$ Nella formula di Maclaurin, se f è pari appaiono solo i termini pari, viceversa se f è dispari.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 100

LEMMA

hp: • $g(x) = a(x-x_0)^n + \sigma((x-x_0)^n)$

$\Rightarrow$ se n è pari $\Rightarrow \exists B(x_0)$ t.c. $\forall x \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$, $g(x)$ ha lo stesso segno di a

$\Rightarrow$ se n è dispari $\Rightarrow \exists B(x_0)$ t.c. $\forall x \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$, $g(x)$ ha lo stesso segno di $a(x-x_0)^n$

DIM: $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{a(x-x_0)^n + \sigma((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \left[a + \frac{\sigma((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n}\right] = a \neq 0$; Tx nonnulla segno: $\frac{g(x)}{(x-x_0)^n}$ ha stesso segno di a

• n PARI $\to (x-x_0)^n > 0$ per $x \neq 0 \to \operatorname{sgn}\left(\frac{g(x)}{(x-x_0)^n}\right) = \operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(g(x))$

• n DISPARI $\to$ se $x < x_0 \Rightarrow (x-x_0)^n < 0 \Rightarrow$ so che $\frac{g(x)}{(x-x_0)^n}$ ha stesso segno di a $\to$ se $a > 0$: $g(x) < 0 \to$ x.ké così $\frac{g(x) < 0}{(x-x_0)^n < 0} = a > 0$ viceversa

Quindi, il lemma dice che: se $f(x) = a(x-x_0)^n + \sigma((x-x_0)^n)$

- con n PARI $\to a > 0 \to f$ positiva vicino a $x_0 \to$
  $\to a < 0 \to f$ negativa vicino a $x_0 \to$
- con n DISPARI $\to a > 0 \to$
  $\to a < 0 \to$

TEOREMA 2 - SULLA CONVESSITÀ DI f

hp: • f è derivabile due volte su un intervallo I

$(\Rightarrow \exists c$ tra x_0 e x t.c. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(c)(x-x_0)^2)$

$\Rightarrow$ Se $f''(x_0) \geq 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ convessa su I

$\Rightarrow$ Se $f''(x_0) \leq 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ concava su I

DIM: per essere convessa, devo avere che: $\forall x_0 \in I$, $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

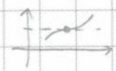
prendo la f. Taylor: $f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)] = \frac{1}{2} \underbrace{f''(c)}_{\geq 0} \underbrace{(x-x_0)^2}_{\geq 0} \geq 0$

Quindi $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

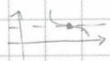
TEOREMA

hp: • f derivabile due volte su $(x_0-\delta, x_0+\delta) = B(x_0)$

1. Se: $f''(x_0) \geq 0 \quad \forall x \in B^-(x_0) = (x_0-\delta, x_0)$
   $f''(x_0) \leq 0 \quad \forall x \in B^+(x_0) = (x_0, x_0+\delta)$ $\Rightarrow x_0$ punto di flesso



2. Se: $f''(x_0) \leq 0 \quad \forall x \in B^-(x_0) = (x_0-\delta, x_0)$
   $f''(x_0) \geq 0 \quad \forall x \in B^+(x_0) = (x_0, x_0+\delta)$ $\Rightarrow x_0$ punto di flesso



TEOREMA

hp: • f derivabile n volte in x_0 — tutte le derivate fino a $k-1$ sono nulle

• $f'(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, $\exists k \leq n$ t.c. $f^{(k)}(x_0) \neq 0$

• $f(x) = f(x_0) + \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \cdot (x-x_0)^k + \sigma((x-x_0)^k)$ per $x \to x_0$

$\Rightarrow$ 1. Se k è PARI $\to$ se $f^{(k)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ p.to di MINIMO locale
  $\to$ se $f^{(k)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ p.to di MASSIMO locale

2. Se k è DISPARI $\to$ se $f^{(k)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ p.to di flesso ascendente
  $\to$ se $f^{(k)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ p.to di flesso discendente

DIM: $f(x) - f(x_0) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + \sigma((x-x_0)^k) \to$ in un piccolo intorno di x_0, $f(x) - f(x_0)$ ha lo stesso segno di $\frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$

• k PARI: $(x-x_0)^k > 0 \to$ se $f^{(k)}(x_0) > 0 \to \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \to$ MINIMO
  $\to$ se $f^{(k)}(x_0) < 0 \to \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \to$ MASSIMO

• k DISPARI: se $x < x_0$, $(x-x_0)^k < 0 \Rightarrow$ se $f^{(k)}(x_0) > 0 \Rightarrow \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \dots$

- Forma algebrica: $z = x + iy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$; $\quad \overline{z} := x - iy$, $\quad |z| := \sqrt{x^2+y^2}$, $\quad \forall z \in \mathbb{C}$;

1) $\overline{(z \pm w)} = \overline{z} \pm \overline{w}$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$;
2) $\overline{(zw)} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$;
3) $\overline{(z/w)} = \overline{z}/\overline{w}$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$;
4) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, $\forall z \in \mathbb{C}$;
4) $|z| \geq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$;
5) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
6) $|z| = |\overline{z}|$, $\forall z \in \mathbb{C}$;
4) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$;
7) $|z/w| = |z|/|w|$, $\forall z, w \in \mathbb{C}, w \neq 0$;
8) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $\quad |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$, $\quad |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$, $\forall z \in \mathbb{C}$;
9) $|z + w| \leq |z| + |w|$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$;
10) $||z| - |w|| \leq |z + w|$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$;

- Forma trigonometrica: $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\rho \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in [0, 2\pi)$,

dove $\rho := \sqrt{x^2+y^2}$, $\quad \cos\theta := \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\quad \sin\theta := \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Se $w = \eta(\cos\phi + i\sin\phi)$, $\eta \in \mathbb{R}^+$, $\phi \in [0, 2\pi)$ allora:

1) $zw = \rho\eta[\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)]$;
2) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{\rho}{\eta}\Big[\cos(\theta-\phi) + i\sin(\theta-\phi)\Big]$;
3) $z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$, "Formula di Moivre";
4) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\Big[\cos\Big(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\Big) + i\cdot\sin\Big(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\Big)\Big]$, $\quad k = 0, 1, 2, \cdots, (n-1)$;

- Forma esponenziale: $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in [0, 2\pi)$,
Se $w = \eta e^{i\phi}$, $\eta \in \mathbb{R}^+$, $\phi \in [0, 2\pi)$ allora:

1) $zw = \rho\eta\, e^{i(\theta+\phi)}$;
2) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{\rho}{\eta}\, e^{i(\theta-\phi)}$;
3) $z^n = \rho^n e^{i(n\theta)}$;
4) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}}$, $\quad k = 0, 1, 2, \cdots, (n-1)$;

- Limiti notevoli

1) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to e$ — per $x \to +\infty$;
2) $\left(1+\frac{\vartheta}{x}\right)^{ax} \to e^{a\vartheta}$ — per $x \to +\infty$, $\forall\vartheta \in \mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}$;
3) $(1+x)^{\frac{1}{x}} \to e$ — per $x \to 0$;
4) $\frac{\log(1+x)}{x} \to 1 \qquad \frac{\log_a(1+x)}{x} \to \frac{1}{\log a}$ — per $x \to 0$, $\forall a > 0$, $a \neq 1$;
5) $\frac{a^x - 1}{x} \to \log a$ — per $x \to 0$, $\forall a > 0$;
6) $\frac{(1+x)^\vartheta - 1}{x} \to \vartheta$ — per $x \to 0$, $\forall\vartheta \in \mathbb{R}$;
7) $\frac{x^\vartheta}{e^x} \to 0 \qquad \frac{x^\vartheta}{a^x} \to 0$ — per $x \to +\infty$, $\forall\vartheta \in \mathbb{R}$, $\forall a > 1$;
8) $\frac{(\log x)^\vartheta}{x} \to 0$ — per $x \to +\infty$, $\forall\vartheta \in \mathbb{R}$;
9) $x^{1/x} \to 1$ — per $x \to +\infty$;
10) $\frac{\sin x}{x} \to 1$ — per $x \to 0$;
11) $\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$ — per $x \to 0$;
12) $\frac{\tan x}{x} \to 1$ — per $x \to 0$;
13) $\frac{\arcsin x}{x} \to 1$ — per $x \to 0$;
14) $\frac{\arctan x}{x} \to 1$ — per $x \to 0$;
15) $\frac{\sinh x}{x} \to 1$ — per $x \to 0$;
16) $\frac{\tanh x}{x} \to 1$ — per $x \to 0$;

$f(x)$	Sviluppo	
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$	
$\mathrm{Sh}\,x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$	
$\mathrm{Ch}\,x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$	
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$	
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$	
$\log(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$	
$\mathrm{arctg}\,x$	$x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n-1} + \cdots$	
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \cdots$	$\alpha \in \mathbb{R}$

In particolare:

$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$	$(\alpha = -1)$
$\sqrt{1-x}$	$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!x^n}{(2n)!!}$	$(\alpha = \frac{1}{2})$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \cdots + \frac{(-1)^n(2n-1)!!x^n}{(2n)!!}$	$(\alpha = -\frac{1}{2})$

3. FUNZIONI IPERBOLICHE

$\mathrm{Sh}\,x \qquad \mathrm{Ch}\,x \qquad \mathrm{Th}\,x = \dfrac{\mathrm{Sh}\,x}{\mathrm{Ch}\,x}$

$(\mathrm{Ch}\,x)^2 - (\mathrm{Sh}\,x)^2 = 1$

$\mathrm{Sh}(-x) = -\mathrm{Sh}\,x \qquad \mathrm{Ch}(-x) = \mathrm{Ch}(x) \qquad \mathrm{Th}(-x) = -\mathrm{Th}\,x$

- *Formule di addizione*

$\mathrm{Sh}(x \pm y) = \mathrm{Sh}\,x\,\mathrm{Ch}\,y \pm \mathrm{Ch}\,x\,\mathrm{Sh}\,y$

$\mathrm{Ch}(x \pm y) = \mathrm{Ch}\,x\,\mathrm{Ch}\,y \pm \mathrm{Sh}\,x\,\mathrm{Sh}\,y$

$\mathrm{Th}(x \pm y) = \dfrac{\mathrm{Th}\,x \pm \mathrm{Th}\,y}{1 \pm \mathrm{Th}\,x\,\mathrm{Th}\,y}$

- *Formule di duplicazione*

$\mathrm{Sh}\,2x = 2\,\mathrm{Sh}\,x\,\mathrm{Ch}\,x$

$\mathrm{Ch}\,2x = (\mathrm{Ch}\,x)^2 + (\mathrm{Sh}\,x)^2 = 2(\mathrm{Ch}\,x)^2 - 1 = 1 + 2(\mathrm{Sh}\,x)^2$

$\mathrm{Th}\,2x = \dfrac{2\,\mathrm{Th}\,x}{1 + (\mathrm{Th}\,x)^2}$

- *Formule di bisezione* (scegliere il segno corretto)

$\mathrm{Sh}\,\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{\mathrm{Ch}\,x - 1}{2}}$

$\mathrm{Ch}\,\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{Ch}\,x + 1}{2}}$

$\mathrm{Th}\,\dfrac{x}{2} = \dfrac{\mathrm{Ch}\,x - 1}{\mathrm{Sh}\,x} = \dfrac{\mathrm{Sh}\,x}{\mathrm{Ch}\,x + 1}$

- *Formule di prostaferesi*

$\mathrm{Sh}\,u + \mathrm{Sh}\,v = 2\,\mathrm{Sh}\,\dfrac{u+v}{2}\,\mathrm{Ch}\,\dfrac{u-v}{2}$

$\mathrm{Sh}\,u - \mathrm{Sh}\,v = 2\,\mathrm{Ch}\,\dfrac{u+v}{2}\,\mathrm{Sh}\,\dfrac{u-v}{2}$

$\mathrm{Ch}\,u + \mathrm{Ch}\,v = 2\,\mathrm{Ch}\,\dfrac{u+v}{2}\,\mathrm{Ch}\,\dfrac{u-v}{2}$

$\mathrm{Ch}\,u - \mathrm{Ch}\,v = 2\,\mathrm{Sh}\,\dfrac{u+v}{2}\,\mathrm{Sh}\,\dfrac{u-v}{2}$

- *Formule parametriche*

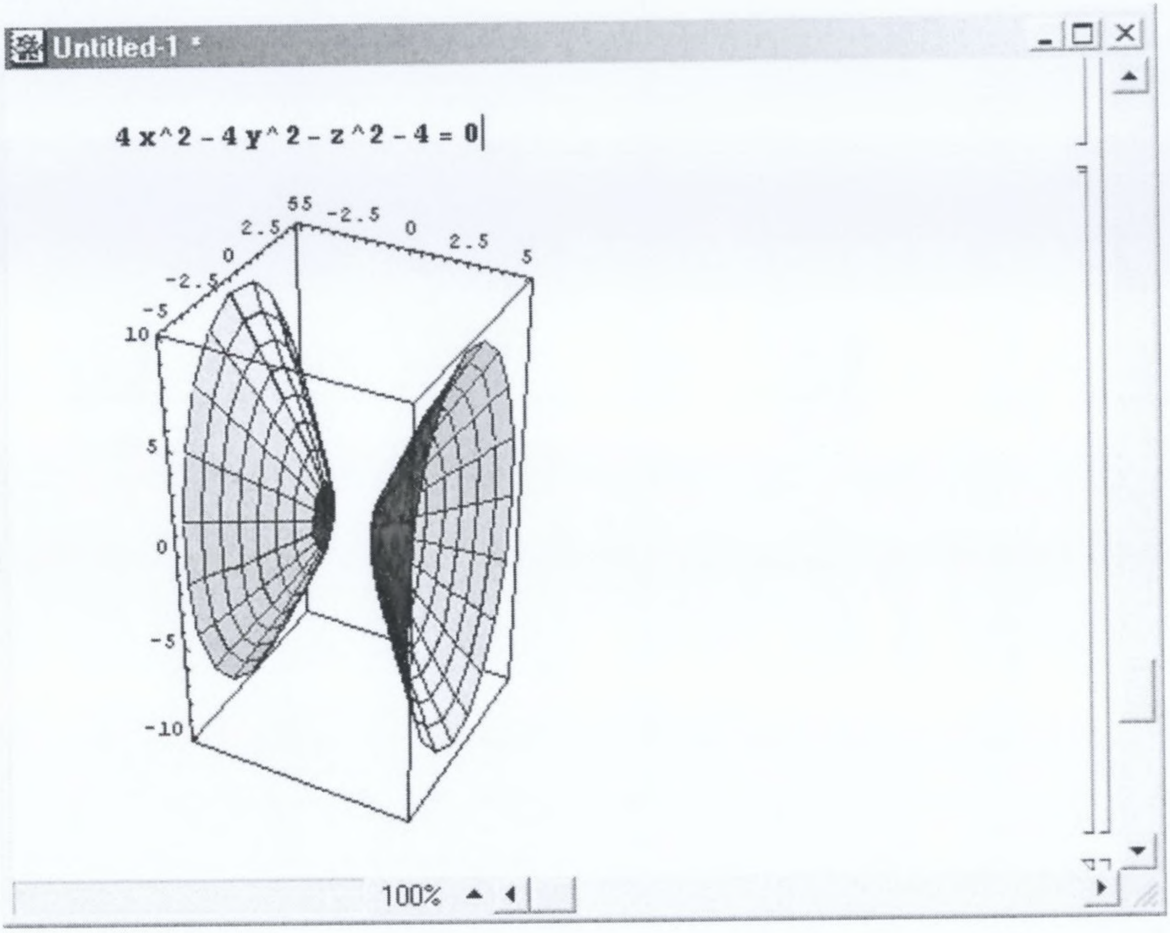
Posto $t = \mathrm{Th}(x/2)$:

$\mathrm{Sh}\,x = \dfrac{2t}{1-t^2} \qquad \mathrm{Ch}\,x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2} \qquad \mathrm{Th}\,x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

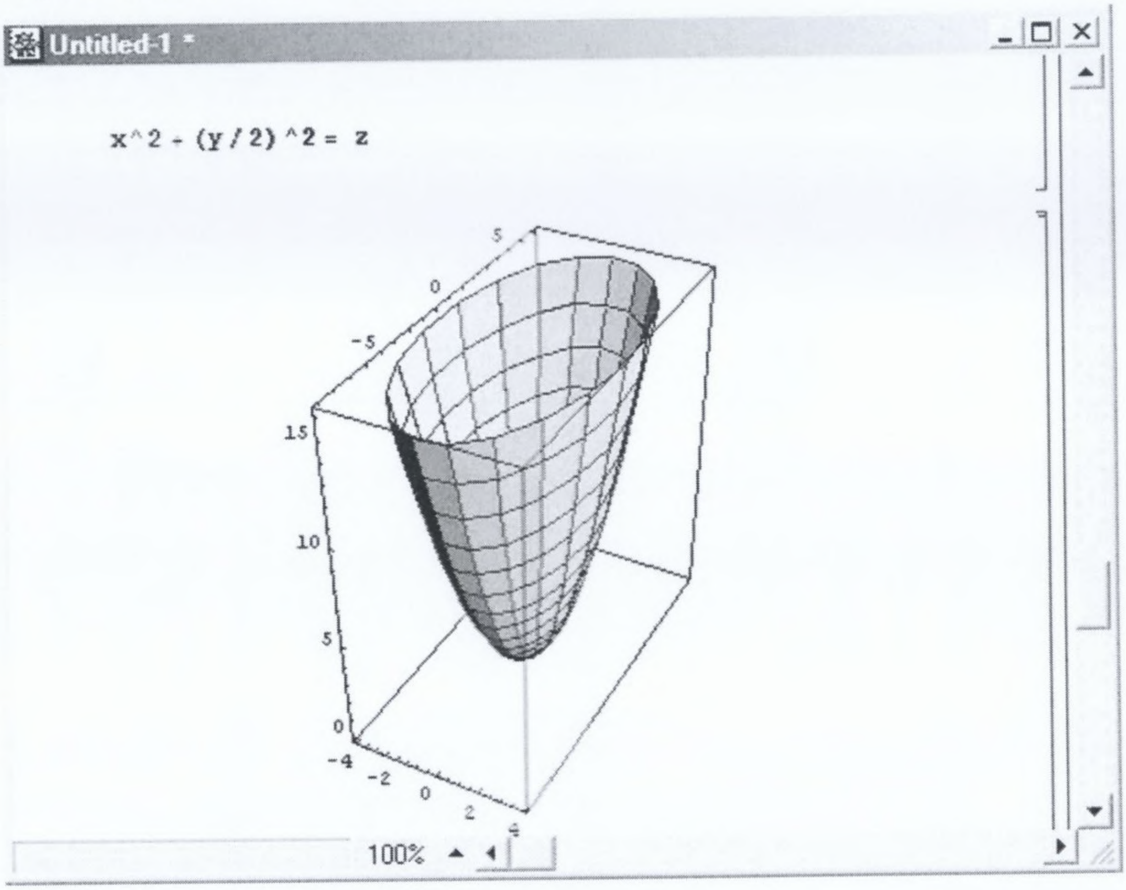
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)}$	se $\alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$	
e^x	e^x	
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$	$a > 0, \quad a \neq 1$
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\mathrm{tg}\,x$	$\log\lvert\cos x\rvert$	
$\mathrm{cotg}\,x$	$-\log\lvert\sin x\rvert$	
$\mathrm{Sh}\,x$	$\mathrm{Ch}\,x$	
$\mathrm{Ch}\,x$	$\mathrm{Sh}\,x$	
$\mathrm{Th}\,x$	$\log\mathrm{Ch}\,x$	
$\mathrm{Cth}\,x$	$\log\lvert\mathrm{Sh}\,x\rvert$	
$\frac{1}{(\cos x)^2}$	$\mathrm{tg}\,x$	
$\frac{1}{(\sin x)^2}$	$-\mathrm{cotg}\,x$	
$\frac{1}{(\mathrm{Ch}\,x)^2}$	$\mathrm{Th}\,x$	
$\frac{1}{(\mathrm{Sh}\,x)^2}$	$-\mathrm{Cth}\,x$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}\,x$	
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$	se $\lvert x\rvert < 1$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$	se $\lvert x\rvert > 1$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\log\lvert x + \sqrt{1+x^2}\rvert$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\log\lvert x + \sqrt{x^2-1}\rvert$	se $\lvert x\rvert > 1$

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\lvert x\rvert$	$\mathrm{sgn}\,x$
$\log\lvert x\rvert$	$1/x$
$\log_a\lvert x\rvert$	$1/(x\log a)$
e^x	e^x
a^x	$a^x\log a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\,x$	$1 + (\mathrm{tg}\,x)^2 = 1/(\cos x)^2$
$\mathrm{ctg}\,x$	$-1 - (\mathrm{ctg}\,x)^2 = -1/(\sin x)^2$
$\mathrm{Sh}\,x$	$\mathrm{Ch}\,x$
$\mathrm{Ch}\,x$	$\mathrm{Sh}\,x$
$\mathrm{Th}\,x$	$1 - (\mathrm{Th}\,x)^2 = 1/(\mathrm{Ch}\,x)^2$
$\mathrm{Cth}\,x$	$1 - (\mathrm{Cth}\,x)^2 = -1/(\mathrm{Sh}\,x)^2$
$\log\lvert\sin x\rvert$	$-\mathrm{ctg}\,x$
$\log\lvert\cos x\rvert$	$\mathrm{tg}\,x$
$\log\lvert\mathrm{Sh}\,x\rvert$	$\mathrm{Cth}\,x$
$\log\mathrm{Ch}\,x$	$\mathrm{Th}\,x$
$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\mathrm{arctg}\,x$	$1/(1+x^2)$

IPERBOLOIDE A DUE FALDE



PARABOLOIDE ELLITTICO



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 100

GEOMETRIA DIFFERENZIALE - CURVE

CURVE REGOLARI

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

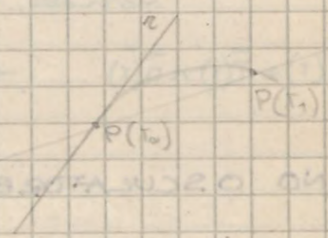
→ curva in forma parametrica

→ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\mathrm{Im}\, f$ = traiettoria del punto (la curva

1) Le tre funzioni devono essere derivabili un po di volte : $x, y, z \in C^\infty(\mathbb{R})$
2) La f deve essere iniettiva. Non ci sono due istanti t diversi in cui c'è la stessa $\mathrm{Im} f$ (curva si intreccerebbe, avremmo 2 Tg)
3) $P'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq \underline{0}$
   ↳ è la velocità del punto in ogni istante, che quindi non deve mai fermarsi
4) →[necessaria per calcolare $\vec{n}(t)$]
   ↳ CURVA BIREGOLARE: $P'(t) \wedge P''(t) \neq (000)$
   ovvero, $P''(t) \neq \underline{0}$, e inoltre $P'(t)$ non parallela a $P''(t)$

Queste sono proprietà meccaniche, legate a come la curva è percorsa

DEFINIZIONE DI RETTA TANGENTE



Retta Tg = posizione limite della secante,
quando $P(T_1) \to P(T_0)$.
Formeremmo un angolo molto piccolo
$\overline{P(T_0)P(T_1)} \wedge r < \varepsilon$

Equazione della secante:

$$\begin{cases} x = x_0 + s(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + s(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + s(z_1 - z_0) \end{cases}$$

→ passante per $P(T_0)$, parallela a $\overrightarrow{P(T_0)P(T_1)}$

Da essa, tramite la definizione di derivata come rapporto incrementale, si passa all'equazione della retta tangente

$$\begin{cases} x = x_0 + s\,x'(T_0) \\ y = y_0 + s\,y'(T_0) \\ z = z_0 + s\,z'(T_0) \end{cases}$$

1

ELICA CIRCOLARE

$$\mathcal{L}\begin{cases} x = R\cos T \\ y = R\sin T \\ z = hT \end{cases}$$

Sul piano (x,y), c'è una circonferenza di raggio R, al variare di T tra 0 e 2π

Per ogni T, se elevo alla 2° viene:
$x^2+y^2=R^2$ → equazione di un cilindro di raggio R, soddisfatta da ogni punto della curva

hT → passo dell'elica.
↳ agli istanti T e $T+2\pi$, le coordinate xy sono le stesse, ma la z è cresciuta di $h\cdot 2\pi$

SIGNIFICATO DI $\vec{n}(T)$ E DEL PIANO OSCULATORE

$\vec{n}(T)$ dà la direzione della retta normale, va verso l'interno della curva (nell'elica, incrocia va l'asse del cilindro)

$\vec{n}(T)$ è $\perp$ al piano tangente alla superficie in quel punto

Se volessi approssimare una curva non piana con una curva piana, sceglierei una curva piana che in quel punto ha la stessa retta tangente.
Quindi, la curva piana giace su uno dei piani del fascio proprio che ha come asse la retta tg. Devo scegliere quale di questi piani.
Devo prendere un generico piano del fascio, che contiene anche un altro punto della curva (oltre che la retta tg).
Facendo scorrere tale punto lungo la curva, il piano cambia inclinazione
Se faccio tendere $P(T_1) \to P(T_0)$, il vettore $\overrightarrow{P(T_0)P(T_1)}$ è infinitesimo (scomponibile con Taylor)
il piano che sto cercando contiene sia la retta tg (cioè il vettore $P'(T)$) che questo vettore $\overrightarrow{P(T_0)P(T_1)}$
Se $T_1 \to T_0$, i termini infinitesimi di $P(T_0)P(T_1)$ spariscono, e la posizione limite del piano è il piano osculatore

Quindi, significato locale del piano osculatore:
indica in ogni punto il piano che contiene la curva piana che meglio può approssimare la nostra curva

2

DISTANZE CURVILINEE

CASO DELLA RETTA

retta: $\begin{cases} x = a + \ell T \\ y = b + mT \\ z = c + nT \end{cases}$ → passante per (abc) → parallela a $(m\,n\,\ell)$

Se voglio distanza tra $P(T_0)$ e $P(T_1)$, scrivo il vettore che li congiunge:

$$P(T_1) - P(T_0) = (a + \ell T_1 - a - \ell T_0,\ b + mT_1 - b - mT_0,\ c + nT_1 - c - nT_0) =$$
$$= (\ell(T_1 - T_0),\ m(T_1 - T_0),\ n(T_1 - T_0)) =$$
$$= (T_1 - T_0)(\ell, m, n) =$$
$$= (T_1 - T_0)\, P'(T_0) =$$
$$= (T_1 - T_0)\, P'(T)$$ → la derivata è uguale in ogni punto

Quindi il modulo del vettore che congiunge due punti è:

$$(T_1 - T_0)\,|P'(T_0)|$$

→ se la curva è 1 retta, ecco la distanza percorsa

CASO GENERALE

Se avessi una curva fatta da tantissimi segmenti, la distanza sarebbe scomponibile così:

$$\sum (T_{i+1} - T_i) \cdot |P'(T_i)|$$

È una funzione a scala → definizione di integrale

Data una curva, faccio le spezzate circoscritte e quelle inscritte, e la lunghezza della curva dev'essere l'elemento di separazione tra le due:

$$\int_0^{T_0} |P'(T)|\, dT$$

METODO PER CALCOLARE LE DISTANZE

- Calcolo $P'(T)$
- Calcolo $|P'(T)|$
- Calcolo, tra il T_0 ed il T_1 dati, $\int_{T_0}^{T_1} |P'(T)|\, dT$

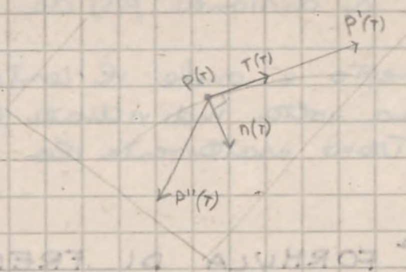
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 100

METODO PER CAMBIARE LA PARAMETRIZZAZIONE

- Data una curva in forma parametrica
- Cerco: $P'(T) = (x'(T), y'(T), z'(T))$
- Calcolo: $|P'(T)|$
- Ne faccio l'integrale: $s(T) = \int_0^T |P'(T)|\, dT$ ed ottengo una funzione $s = s(T)$
- Calcolo l'inversa $T = T(s)$
- Al posto di T, nelle equazioni parametriche della curva, sostituisco $T = T(s)$

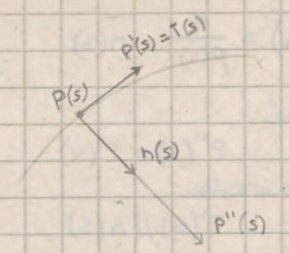
COME CAMBIANO I VETTORI ED I VERSORI NELLA PARAM. INTRINSECA

In $P(T)$:



- $\vec{P}'(T) \,//\, \vec{T}(T)$

In $P(s)$:



- $P'(s) = \vec{T}(s)$, è già versore
- $n = \dfrac{P''(s)}{|P''(s)|}$, ovvero $n(s) \,//\, P''(s)$
  ↳ perché $T = P' \Rightarrow T' = P''$, e so che $n = \dfrac{T'(T)}{|T'(T)|}$

CURVATURA

Ora che ho la rappresentazione intrinseca, la curva è descritta in modo indipendente da com'è percorsa

$|T'(T)| \rightarrow$ ci serviva

Ora guardo: $|T'(s)| = |P''(s)| = \underbrace{\varphi(s)}_{\downarrow}$

curvatura, al variare di s la calcolo nei punti corrispondenti

Se trovassi un valore di $\varphi(s)$ costante, indipendente da s, vuol dire che la curvatura è costante lungo tutta la curva

3° FORMULA DI FRENET E TORSIONE

$$b'(s) = -\frac{1}{\tau(s)} \cdot n(s)$$

Perché:

$b'(s) = \frac{db}{ds} = \frac{d}{ds}(T \wedge n) =$ vale la regola di derivazione del prodotto

$= \frac{dT}{ds} \wedge n + T \wedge \frac{dn}{ds} =$ prima si è visto che: $\frac{dT}{ds} \parallel n \Rightarrow \frac{dT}{ds} \wedge n = 0$

$= T \wedge \frac{dn}{ds}$

Per la regola di derivaz di 1 vettore di modulo fisso e direzione variabile: $\frac{dn}{ds} \perp n$

So che: $T \perp n$

Allora:

$b'(s) = T \wedge \frac{dn}{ds} \parallel n$, xké n è 1 vettore $\perp$ ad entrambi

Ora guardo variazioni di $\vec{b}(s)$, ovvero guardo $|b'(s)|$

Se la curva è piana, b è fisso, essendo $\perp$ al piano osculatore

Quindi, è come osservare le variazioni del piano osculatore, vedere quanto la curva si allontani dall'essere piana

$b'(s) = \pm|b'(s)| \cdot n(s)$ → essendo paralleli

→ bisogna vedere che segno mettere, a seconda che siano concordi o discordi

Si definisce la TORSIONE: $\frac{1}{\tau(s)} = |b'(s)|$

Per convenzione:

- se $b'(s)$ e $n(s)$ sono concordi $\Rightarrow$ $b'(s) = |b'(s)| \cdot n(s)$

  $\frac{1}{\tau(s)} = -|b'(s)|$ → Torsione negativa

- se $b'(s)$ e $n(s)$ sono discordi $\Rightarrow$ $b'(s) = -|b'(s)| \cdot n(s)$

  $\frac{1}{\tau(s)} = |b'(s)|$ → Torsione positiva

ELICA CIRCOLARE

Si trova che la Torsione è: $\frac{1}{\tau(s)} = \frac{h}{h^2 + R^2}$

La torsione è tanto più piccola quanto minore è h.

Se $h = 0$ → curva piana, Torsione nulla

Se $h < 0$ → la curva scende ruotando

Quindi, il segno della torsione può far capire se si attorciglia in senso orario o antiorario

GEOMETRIA DIFFERENZIALE - SUPERFICI

MATRICE JACOBIANA

Studiamo il caso generale $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

In forma parametrica è:

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = y_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = y_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, variabili

$y \in \mathbb{R}^m$, funzioni di n variabili

In questa funzione, ci sono m·n derivate parziali prime (derivo ogni funzione y rispetto ad ogni variabile x)

Mettendo tutte le derivate parziali a matrice:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \to \text{MATRICE JACOBIANA} = Jf$$

$\det(Jf)$ = "Jacobiano"

Se calcolo Jf in un punto $(x_1, \dots, x_n)$, diventa una matrice a valori numerici

APPROSSIMARE FUNZIONI: $\mathbb{R}^2$ (CURVE)

In $\mathbb{R}^2$, l'incremento della funzione tra $f(T_0)$ e $f(T_1)$ è dato da:

$$f(T_1) - f(T_0) = \underbrace{f'(T_0)(T_1 - T_0)}_{df} + \underbrace{w}_{\text{termine infinitesimo}}$$

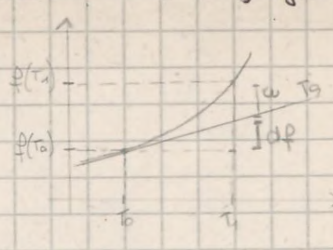
df = differenziale di f, è la parte principale dell'infinitesimo di 1° ordine.

Rappresenta l'incremento della tangente

Trascurando w:

$f^*(T_1) = f(T_0) + df$ → è un'altra funzione che ha come grafico la retta tangente

differisce di poco da f, la approssima bene



f = ha derivata diversa in ogni punto

f^* = ha derivata uguale ovunque (è il grafico di una retta), è costante

Allora, per approssimare la curva f in qualche punto, devo scegliere la retta che in quel punto abbia derivata prima uguale a quella di f.

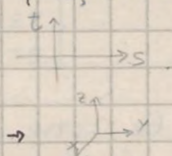
SUPERFICI REGOLARI

Passiamo alle superfici, sono un caso particolare dei precedenti.
In forma parametrica sono date:

$$\begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \\ z = z(s,t) \end{cases} \quad , \; f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

→ $\mathbb{R}^2$: piano (s,t) →

→ $\mathbb{R}^3$: spazio(x,y,z) →

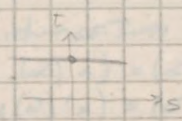


Definiamo le superfici regolari:
le superfici in cui è sempre definibile, in ogni punto, il piano tangente.
Ci sono 3 richieste:
1) $x(s,t)$, $y(s,t)$, $z(s,t)$ → continue e derivabili infinite volte
2) f iniettiva
3) $\rho(J_P f) = 2$, in ogni punto

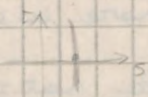
In questo caso di $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, la Jf è: $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}$

CURVE COORDINATE DELLA SUPERFICIE

Considero il piano (s,t).



Linee orizzontali → rette con t fisso, s variabile →
↳ sono una famiglia di curve una volta trasportate nella superficie in $\mathbb{R}^3$.
Queste curve hanno t fissa ⇒ sono f ad 1 variabile ⇒ sono curve di $\mathbb{R}^3$



Linee verticali → rette con s fisso, t variabile →
↳ diventano un'altra famiglia di curve in $\mathbb{R}^3$, che appartengono alla superficie

Se la funzione è iniettiva:
ogni pto della superficie deriva da un solo punto del piano (s,t).
Su tale piano, il punto è dato dall'intersezione di una retta verticale ed una orizzontale
⇒ il punto sulla superficie è dato dall'incrocio delle due curve relative alle due rette

Queste curve sono le curve coordinate

METODO PER CERCARE LE CURVE COORDINATE IN UN PUNTO

Ho una coppia: (s_0, t_0)
Calcolo: $f(s_0,t_0) = (x_0, y_0, z_0)$
Le due curve coordinate passanti per (x_0,y_0,z_0) sono:

- Im delle coppie (s_0,t) → $\begin{cases} x = x(s_0,t) \\ y = y(s_0,t) \\ z = z(s_0,t) \end{cases}$ → Tengo s_0 fisso, solo t è la variabile
- Im delle coppie (s,t_0) → $\begin{cases} x = x(t_0,s) \\ y = y(s,t_0) \\ z = z(s,t_0) \end{cases}$ → Tengo t_0 fisso, solo s è la variabile

2° METODO PER TROVARE IL PIANO Tg AD UNA SUPERFICIE

- Data la $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, e la coppia (s_0, t_0) dove si vuole calcolare
- Approssimo la f così:

$$f^*(s,t) = f(s_0,t_0) + (d_{s_0 t_0} f)(sT - s_0 T_0)$$

, con
  - Q = punto (s,t) generico
  - P = punto (s_0, t_0)
  - $d_{s_0 t_0} f = J_P f$

- Svolgo il prodotto di matrici, sommo i vettori
- Ottengo un vettore che è $\operatorname{Im} f^*(s_0, t_0)$ → approssima $\operatorname{Im} f$ in quel punto
- Metto questo vettore in un sistema, eguaglio le componenti ad x, y, z, ed ho trovato l'eq del piano Tg in (s_0, t_0), e questo piano è $\operatorname{Im} f^*$

↓

f^* è molto vicina ad un'applicazione lineare (se volessi il piano Tg nell'origine, in $(0\,0\,0)$, f^* sarebbe esattamente un'applicazione lineare)

↓

$\rho = 2$ → questa condizione ci dice che $\operatorname{Im} f^*$ è un piano, più precisamente il piano Tg che approssima la S in quel punto

3° METODO PER TROVARE IL PIANO Tg AD UNA SUPERFICIE

- Superficie data in forma cartesiana:

$$F(x,y,z) = 0 \quad , \; f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

- Calcolo $\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$
- Calcolo $\operatorname{grad}_P F$, ottengo valori numerici: (a, b, c)
- il piano Tg è $\perp$ a questo vettore, sarà: $ax + by + cz + d = 0$
- Per determinare d, impongo il passaggio per $P(x_0, y_0, z_0)$ e lo ricavo

SCRIVI IL POLINOMIO DI TAYLOR DI 2° GRADO CHE MEGLIO APPROSSIMA f IN $P(s_0, t_0)$, data una $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$P(s,t) = f(s_0,t_0) + \frac{\partial f}{\partial s}(s_0,t_0)\cdot(s-s_0) + \frac{\partial f}{\partial t}(s_0,t_0)\cdot(t-t_0) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(s_0,t_0)(s-s_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(s_0,t_0)(s-s_0)(t-t_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(s_0,t_0)\cdot(t-t_0)^2\right]$$

SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI - INTRODUZIONE

$$\begin{cases} 2x+y-3z+3T=1 \\ x-4z+T=-6 \\ 3x+2y-2z+5T=8 \end{cases} \rightarrow \text{Matrice } A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & T \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1^\circ eq \\ 2^\circ eq \\ 3^\circ eq \end{matrix} \rightarrow \text{Tabella dei coefficienti}$$

$$\text{Matrice } B = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Terne dei Termini noti}$$

$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ → spazio dei Termini noti

↓ spazio delle soluzioni

$f^{-1}(B)$ = fibra di f sopra B, cioè è insieme delle soluzioni che come imagine hanno B, cioè insieme delle controimmagini dell'elemento $b \in B$

Se $B \in Imf$, la fibra contiene qualche elemento, ci sono soluzioni

Se $B \notin Imf$, la fibra è vuota, nessuna soluzione

Se f è suriettiva, $Imf = \mathbb{R}^3$ → ci sono sempre soluzioni

Se f è iniettiva, ogni fibra contiene 1 solo elemento

SOTTOSPAZI: SISTEMI OMOGENEI

$$\begin{cases} 2x+y-3z+3T=0 \\ x-4z+T=0 \\ 3x+2y-2z+5T=0 \end{cases}$$ → sistema omogeneo associato a quello di partenza

Se facciamo confronto con sist. lineare associato, si notano 3 proprietà che fanno nascere nozione di SOTTOSPAZIO

- Somma delle soluzioni è ancora soluzione? → 1° SIST → NO
  → 2° SIST → SI
- Multiplo di una soluzione è ancora soluzione? → 1° SIST → NO
  → 2° SIST → SI
- La quaterna nulla è soluzione? → 1° SIST → NO
  → 2° SIST → SI

Quindi, dato un qualunque sottoinsieme $H \in \mathbb{R}^4$, come ad esempio l'insieme delle soluzioni, se risponde a queste 3 proprietà è 1 sottospazio

Se il sistema è omogeneo, l'insieme delle soluzioni è 1 sottospazio.

~~Se la una catena di~~

POLINOMI

Polinomio generale: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, con a_0 = Termine noto

$\mathbb{R}_n[x] \subset \mathbb{R}[x]$ → insieme di tutti i polinomi di coefficienti reali con variabili in x

↓ polinomi con grado che sia al massimo n (è 1 sottoinsieme)

→ $\mathbb{R}_n[x] = \{ P \in \mathbb{R}[x] \,/\, \text{grado } P \leq n \}$

$\mathbb{R}_n[x]$ è sottospazio di $\mathbb{R}[x]$? → Sì, 3 proprietà → grado non cresce sommando polinomi
→ " " " con prodotto per 1 scalare
→ " va a zero, va bene

ESEMPI → $H = \{ P \in \mathbb{R}[x] \,/\, P(2) = 0 \}$ → è sottospazio di $\mathbb{R}[x]$

→ $H = \{ P \in \mathbb{R}[x] \,/\, P(2) = 4 \}$ → non è sottospazio di $\mathbb{R}[x]$

CONCETTO DI SOTTOSPAZIO

$V \to$ un qualunque spazio vettoriale
$H \to$ un suo sotto insieme: $H \subset V$
Tutte le operazioni valide in V valgono anche in H. Richiedo due cose:
- $H \times H \to H$ → sommando due elementi di H, risultato deve restare in H
- $H \times K \to H$ → prodotto deve restare in H

Per le 8 propr.: sono vere in V, lo saranno di sicuro anche in H
→ unico dubbio: vettore nullo → c'è ne 1 solo in V, deve stare anche in H
→ altro controllo: per ogni vettore, l'opposto deve stare in H e non fuori
Queste ultime due sono eliminabili: se $Kv \in H$, lo sarà anche per 0 e nell'altro caso.

Considerando $\mathbb{R}^n$ → sist. lineare omogeneo a n incognite è sottospazio
→ sist. lineare non omogeneo a n incognite non è sottospazio
Se ho: $H \subset \mathbb{R}^n$, se H è sottospazio di $\mathbb{R}^n$, è di sicuro l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in $\mathbb{R}^n$
Se ho una catena di sottospazi, sempre più piccoli, uno dentro l'altro, è ancora sottospazio.

SOTTOSPAZI DI $\mathbb{R}^3$

- $H = \{\underline{0}\}$ → sottospazio banale, contiene solo il vettore nullo
- $H = r = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ → retta passante per l'origine (vettore più tutti i suoi multipli)
- $H = \pi$: → piano passante per l'origine (ho aggiunto un vettore alla retta)
- $H = \mathbb{R}^3$ → sottospazio banale (ho aggiunto 1 vettore al piano)

Spazio $\mathbb{R}^3$ → 3 dimensioni, cioè il n° di vettori che ho aggiunto per trovare tutti i sottospazi; ho fatto 3 passaggi

COMBINAZIONE LINEARE DI VETTORE
Prendo V = spazio vettoriale
Prendo un po' di vettori: $(v_1, v_2, \dots, v_n)$
Ne faccio la combinazione lineare: → $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$, con $a_i \in \mathbb{R}$
La combinazione sono tutti i vettori che arrivano in uno spazio aggiungendo 1 singolo vettore
→ $\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ → è l'insieme di tutte le comb. lineari dei vettori
→ è un sottospazio, il più piccolo sottospazio che contenga tutti gli n vettori

VETTORI GENERATORI
Certi vettori si dicono generatori di uno spazio se questo spazio è generato dalla loro comb. lineare: $H = \mathcal{L}(v_0, v_1, \dots, v_n)$

VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI
Per generare un nuovo spazio, devo aggiungere un vettore che non appartenga alla combinazione lineare dei precedenti:
$\forall i, \quad v_i \notin \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_{i-1})$
Questo nuovo vettore è linearmente indipendente

POSSIBILE DEFINIZIONE DEL CONCETTO DI SPAZIO
La dimensione potrebbe essere il max numero di vettori linearmente indipendenti che possiamo trovare
→ convincente ma non calcolabile

P3

DIMENSIONE DI UNO SPAZIO

Tre letture possibili:
- numero di vettori di cui è fatta una base
- max numero di vettori linearmente indipendenti
- min numero di vettori che generano lo spazio

COMPONENTI DI UN VETTORE RISPETTO AD UNA BASE

Fissati:
- V = spazio vettoriale
- $\dim V = n$
- $B = \{v_1, \dots, v_n\}$

Ogni vettore $v \in V$ può essere scritto in modo unico: $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$

Si crea una corrispondenza biunivoca: ad ogni vettore corrisponde una n-upla di numeri $v_B \in \mathbb{R}^n = a_1, \dots, a_n$ → componenti di v rispetto alla base B scelta

Dati: $v, w \in V$ → $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$
$w = b_1 w_1 + \dots + b_n w_n$

La somma è:
$(v+w) = (a_1+b_1) v_1 + \dots + (a_n+b_n) v_n$ → ovvero $(v+w)_B = v_B + w_B$

Analogamente, il prodotto sarà:
$(\lambda v)_B = \lambda \cdot v_B$

Grazie a questa corrispondenza, $\mathbb{R}^n$ diventa un buon modello di V

Rispetto a basi diverse, vi sono diverse componenti.

BASE CANONICA

Base tale che la n-upla che compone il vettore corrisponda alle componenti del vettore rispetto ad essa.
↳ vale se ho uno spazio $\mathbb{R}^n$, in cui la C avrà n vettori

DIMENSIONI DI SPAZI DI MATRICI

Anche qui esiste la base canonica, fatta da $n \cdot m$ vettori
⇒ $\dim \mathbb{R}^{m,n} = m \cdot n$
E sarà anche: $\dim \mathbb{C}^{n,m} = n \cdot m$

SPAZI NON FINITAMENTE GENERATI

Spazio dei polinomi $\mathbb{R}[x]$ → non esiste un numero max di vettori indipendenti che lo generano, arriverò sempre solo ai vettori al grado n, e non sono tutti.

SPAZIO DEI POLINOMI

$\mathbb{R}[x]$ → non finitamente generato

$\mathbb{R}_n[x]$ ⇒ $P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ → $\mathbb{R}_n[x] = \mathcal{L}(x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1)$
↳ è dato dalla combinaz lineare di $n+1$ vettori: $\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$
↓
Vale anche per $\dim \mathbb{C}_n[x] = n+1$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 100

TERMINOLOGIA SULLE MATRICI

- TRASPOSTA DI M = ${}^tM$ → matrice dove righe e colonne si invertono

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \to {}^tM = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,3}$, ${}^tM \hookrightarrow \mathbb{R}^{3,2}$ → Cambia lo spazio di partenza (resta uguale solo con matrici quadrate)

- MATRICE SIMMETRICA: $S = \{ M \in \mathbb{R}^{n,n} / M = {}^tM \}$ → Tutte le matrici che coincidono con la Trasposta

↳ è un sotto spazio di $\mathbb{R}^{n,n}$

↓
Devono essere quadrate;
Devono avere elementi simmetrici rispetto alla diagonale: $a_{ij} = a_{ji}$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$ → qui: $\dim M = 6$, non è più $n \cdot m = 9$

- MATRICE ANTISIMMETRICA: $A = \{ M \in \mathbb{R}^{n,n} / {}^tM = -M \}$ → sotto spazio di $\mathbb{R}^{n,n}$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$ → anche qui: $\dim M \neq n \cdot m = 9$, ma $\dim M = 3$

SOMMA DI MATRICI SIMMETRICHE E ANTISIMMETRICHE

$S + A = \mathbb{R}^{nn}$ → ogni matrice di $\mathbb{R}^{n,n}$ può essere ricavata dalla somma $S+A$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & a_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{S} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -m_{12} & -m_{13} \\ m_{12} & 0 & -m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & 0 \end{pmatrix}}_{A}$$

→ m_{12} = media tra i termini a_{12} e a_{21}

$\underbrace{a_{12} \quad a_{21}}_{m_{12}}$

↓

$S \oplus A$ → somma diretta
↳ $S \cap A = \{0\}$ → solo matrice nulla è contemporaneamente S ed A
↳ ⇒ $\dim(S \oplus A) = \dim S + \dim A$ → nel caso $\mathbb{R}^{3,3}$: $3+6=9$

(METODO DI RIDUZIONE DELLE MATRICI) - RANGO

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to R_1 \\ \to R_2 \\ \vdots \\ \to R_m \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{array}$$

Ogni Riga è una n-upla di numeri, è un vettore di $\mathbb{R}^n$: $R_1, \dots, _m \in \mathbb{R}^n$
↳ $\mathcal{L}(R_1, \dots, R_m) \subset \mathbb{R}^n$ → spazio delle righe (generato dalle loro combinaz. lineare), è R

Allo stesso modo, ogni colonna è m-upla di numeri, vettore di $\mathbb{R}^m$.
↳ $\mathcal{L}(C_1, \dots, C_n) \subseteq \mathbb{R}^m$ → spazio delle colonne, è C

Con tecnica degli scarti sui vettori riga e vettori colonna, trovo che Base di R = Base di C, quindi: $\dim R = \dim C$

Quindi, per ogni $M \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\dim R = \dim C = \rho(M) = rk(M)$ → RANGO DI M

7

APPLICAZIONI LINEARI

Data una $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, o in generale $f: V \to W$,
Dati $v_1, v_2 \in V$
f è un'applicazione lineare $\iff$ 1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v)$

DIMENSIONI DELL' Imf DI UN'APPLICAZIONE LINEARE

Generica $f: V \to W$
$\mathrm{Im}f \subseteq W$, è sottospazio $\to$ $w_1 + w_2 \in \mathrm{Im}f$
$\to$ $\lambda w \in \mathrm{Im}f$
$\to$ $0_W \in \mathrm{Im}f$ $\to$ infatti, in ogni appl. lin: $f(0_V) = 0_W$

Conosco: $\dim V = n$ $\to$ ho anche una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$
$\dim W = m$

Se $w \in \mathrm{Im}f$, $w = f(v)$, applico definizioni di appl. lineari e trovo che:
$\mathrm{Im}f = \mathcal{L}(f(v_1), \dots, f(v_n))$ $\to$ ho trovato dei generatori

Quindi $\dim \mathrm{Im}f \leq n$ $\to$ i generatori potrebbero non essere tutti lin. indipendenti
Se $\dim \mathrm{Im}f = \dim W = m$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}f = W$ $\Rightarrow$ f è suriettiva

Se ho $f: V \to W$, con $\dim V < \dim W$, la f non può essere applicaz. lineare

Se parto da $v_1, \dots, v_n$ dipendenti $\Rightarrow$ $w_1, \dots, w_n = f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono dipendenti
Se parto da $v_1, \dots, v_n$ indipendenti $\Rightarrow$ $w_1, \dots, w_n = f(v_1), \dots, f(w_n)$ possono essere sia dipendenti che indipendenti

FIBRE E NUCLEO (INIETTIVITÀ)

Non tutte le fibre sono sottospazi: per esserlo devono contenere il vettore nullo, solo una lo contiene $\to$ NUCLEO o Ker
So che: $f(0_V) = 0_W$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}f = f^{-1}(0_W) = \{v \in V \mid f(v) = 0_W\}$

Il nucleo è utile per capire se f è iniettiva
Se f è iniettiva $\Rightarrow$ tutte le fibre sono fatte da un solo vettore, tutti gli elementi di V hanno una sola immagine
Quindi, Kerf ha un solo elemento $\mathrm{Ker}f = \{0_V\}$ $\to$ $\dim(\mathrm{Ker}f) = 0$
Viceversa: se $\dim \mathrm{Ker}f = 0$ $\Rightarrow$ f è iniettiva, ogni fibra ha un solo elemento

BASI DI Imf

So che: $\mathrm{Im}f = \mathcal{L}(f(v_1), \dots, f(v_n))$
$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ $\to$ base di V, spazio di partenza
Se f è iniettiva, so che i vettori generatori di Imf sono una sua base, non ce ne sono di scartati. $\to$ $B' = \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ $\to$ base di Imf

Quindi, se f è iniettiva: $\begin{cases} \dim \mathrm{Im}f = n & \to \text{base fatta da n generatori} \\ \dim \mathrm{Ker}f = 0 & \to \text{1 solo elemento per ogni fibra} \end{cases}$

So che: $0 \leq \dim \mathrm{Ker}f \leq n = \dim V$, perché $\mathrm{Ker}f \subseteq V$

Se $\mathrm{Ker}f = V$ $\Rightarrow \dim \mathrm{Ker}f = n$ $\to$ tutti i vettori di V finiscono in 0_W: $f(v) = 0_W$,
$\mathrm{Im}f = \{0_W\}$ $\Rightarrow \dim \mathrm{Im}f = 0$

Tra $\dim(\mathrm{Im}f)$ e $\dim(\mathrm{Ker}f)$ c'è proporzionalità inversa

FIBRE DIVERSE DAL NUCLEO

Data una $f: V \to W$, con $v \in V$, $w \in W$, $h \in Ker f$

$f^{-1}(w) = v + Ker f$ → sono tutti i vettori del tipo: $\{v+h \mid h \in Ker f\}$

Per ottenere tutti i vettori di una fibra, prendo il nucleo e a tutti i suoi vettori sommo un singolo v di quella fibra

Due vettori stanno nella stessa fibra <=> la loro differenza dà il vettore nullo

$f^{-1}(w)$ = laterale di Kerf → non è un sottospazio, si ottiene sommando al sottospazio Kerf un particolare vettore fissato

PRODOTTO DI MATRICI

Tre spazi vettoriali, due funzioni tra essi:

$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$

Ci occupiamo della composta: $g \circ f: V \to Z$, $(g \circ f)(v) = g[f(v)]$

Se f e g sono applicazioni lineari => $g \circ f$ è un'appl. lineare

Conosco dim e basi dei 3 spazi, posso costruire le 3 matrici delle funzioni

$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$ → $M_f^{BC} = (a_{ij})$, $M_g^{CD} = (b_{ij})$, $M_{g \circ f}^{BD} = (c_{ij})$

n m p

B C D

Note le prime due, posso calcolare la terza: ogni componente c è dato da: $c_{ij} = R_i^b \cdot C_j^a$

Posso definire il prodotto di matrici:

Date due matrici $B \in \mathbb{R}^{p,m}$, $A \in \mathbb{R}^{m,n}$

Avrò: $BA = (c_{ij})$ con $c_{ij} = R_i^B \cdot C_j^A$

Se siamo partiti da matrici di due appl. lineari, => BA è la matrice dell'appl lineare $(g \circ f)(v)$: $M_{g \circ f}^{BD} = M_g^{CD} \cdot M_f^{BC}$

$BA \in \mathbb{R}^{p,n}$ → il prodotto si può fare solo se righe di B sono lunghe come colonne di A

AB → posso farlo solo se righe di A sono lunghe come colonne di B

→ spesso, se $\exists\, BA \Rightarrow \nexists\, AB$

Se ho: $B \in \mathbb{R}^{p,m}$, $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ | => $BA \in \mathbb{R}^{p,n}$ → lo spazio vettoriale cambia

Il prodotto può essere fatto all'interno di uno stesso spazio vettoriale solo quando le matrici sono quadrate: $\mathbb{R}^{n,n}$

ARITMETICA DELLE MATRICI

1. $AB \neq BA$
   Notazione a potenza non ha senso, bisogna tener conto dell'ordine in cui faccio i prodotti
2. $\exists K$ tale che $A = KA = AK$
   K = matrice identica → $I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ & 1 & \vdots \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ → Tutti 1 sulla diagonale, tutto 0 il resto
3. $\nexists$ per ogni matrice una A^{-1} tale che $A^{-1}A = I = AA^{-1}$ → A^{-1} = inversa moltiplicativa
   Perché esista, parlando di applic. lineari, devo avere f iniettiva e suriettiva

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 100

4. Confronto: $\begin{cases} AX=B \to \text{soluzioni sono fibra } f^{-1}(B) \\ AX=0 \to \text{soluzioni sono } f^{-1}(0)=\operatorname{Ker} f \end{cases}$

→ sistema omogeneo associato

Preso un particolare v elemento di B, dico che:

$f^{-1}(B) = v + \operatorname{Ker} f$, con $\begin{cases} \operatorname{Ker} f = \text{soluzione del sist. omogeneo associato} \\ v = \text{soluzione particolare del sistema} \\ f^{-1}(B) = \text{soluzione generale del sistema} \end{cases}$

TECNICA DI RISOLUZIONE

Parto da $(A|B)$ → riduco la matrice per righe → ottengo una matrice ridotta che corrisponde ad un sistema equivalente → ho tolto le equazioni finte, ma le soluzioni sono le stesse

SISTEMI AD INCOGNITE VETTORIALI

Esempio: $\begin{cases} v_1 + 2v_2 = (1\,1\,1) \\ v_1 + v_2 = (1\,1\,1) \\ -v_1 + v_2 = (1\,1\,1) \end{cases}$ → in questo caso, incognite sono vettori di $\mathbb{R}^3$

B = matrice dei termini noti, ha 3 colonne

Condizione di risolubilità è la stessa: $\rho(A) = \rho(A|B)$

Posso scriverla: $AX = B$ → $\begin{cases} A = \text{matrice dei coefficienti} \\ B = \text{termini noti} \\ X = \text{matrice delle incognite, ci sono i vettori} = \begin{pmatrix} -- v_1 -- \\ -- v_2 -- \end{pmatrix} \end{cases}$

in questo caso diventa:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{X}{\begin{pmatrix} -- v_1 -- \\ -- v_2 -- \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

→ Scrivo matrice completa $A|B$, la riduco, tolgo le equaz. finte, e trovo i vettori incogniti

CONDIZIONE DI ESISTENZA DELLA MATRICE INVERSA (2° METODO)

Dato un sistema: $AX = I$, cerco $X \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che $X = A^{-1}$, inversa di $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

Seguardo $(A|I)$ → è già automaticamente ridotta → $\rho(A|I) = n$

La condizione necessaria è: $\rho(A) = n$

Data una matrice A, per cercarne l'inversa:

- scrivo un sistema che abbia i coef a_{ij} come coefficienti; le incognite vettoriali; le righe di I come termini noti;
- scrivo la matrice $(A|I)$, riduco la parte A, guardo che $\rho(A) = n$;
- scrivo il sistema equivalente ridotto
- Trovo i vettori incogniti: essi sono le righe della matrice inversa

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2v_1 - v_2 + v_3 = (1,0,0) \\ 2v_1 + v_3 = (0,1,0) \\ 4v_1 + 2v_2 + v_3 = (0,0,1) \end{cases} \Rightarrow (A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow (A|I)^* = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2v_1 - v_2 + v_3 = (1,0,0) \\ 2v_1 + v_3 = (0,1,0) \\ 2v_1 = (2,-3,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = (1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \\ v_3 = (-2, 4, -1) \\ v_2 = (-1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow X = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

COMPLEMENTO ALGEBRICO

Prendo una matrice M, ne scelgo un elemento a_{ij}:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

→ cancello riga e colonna di a_{ij}, resta una matrice con $(n-1)\cdot(m-1)$ elementi. Ne calcolo il determinante

A_{ij} = complemento algebrico di a_{ij}
↳ è il $\det M^*$, moltiplicato per $(-1)^T$, dove $T = i+j$ (dipende dalla posizione di a_{ij})

1° TEOREMA DI LAPLACE

Data una matrice quadrata M; so che:

$\det M = \sum (-1)^T a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$

Se scelgo una riga R_i (o una colonna C_i): $\det M = (a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in})(-1)^T$

ESEMPIO

$1 \to R_2, C_3 \to T=5 \to (-1)^5 = -1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \dots + (-)1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} (+)3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \dots =$$

$$= -1 \cdot \left[-2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \dots \right] + 3 \left[0 \dots + 0 \dots - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right] = -2$$

2° TEOREMA DI LAPLACE

Data una matrice M, scelgo due Righe R_i e R_j $\quad M = \begin{pmatrix} \cdots \\ R_i \cdots \\ R_j \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$

So che: se cambio la matrice così, cioè mettendo al posto di R_j di nuovo R_i → $M = \begin{pmatrix} \cdots \\ R_i \cdots \\ R_i \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$ → $A_{j1} = A_{i1}$ → i complementi algebrici sono uguali
→ $\det M = 0$

Da ciò ricavo che: $a_{i1} A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \dots + a_{in} \cdot A_{jn} = 0$

TROVARE L'INVERSA DI UNA MATRICE: (3° METODO)

Una matrice A, se $\det A \neq 0$, è invertibile
L'inversa è:

$$A^{-1} = \left(b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A} \right)$$

Se faccio il prodotto vedo che è vero:

$A \cdot A^{-1} = (a_{ij}) \cdot (b_{ij}) = I$ → se ho in b con n° colonna ≠ da n° di riga di a, viene 0, dove sono uguali viene 1 (sulla diagonale
↓
con il 2° Teorema di Laplace

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 100

MATRICI DI UN'APPLICAZIONE LINEARE RISPETTO A BASI DIVERSE

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ → endomorfismo (da uno spazio a se stesso) → matrice quadrata

Prese due basi B = qualunque e C = canonica, definisco: M_f^{CC} e M_f^{BB}

Preso un vettore v, definisco: $v_B = (x_1, \dots, x_n)$ e $v_C = (y_1, \dots, y_n)$.

Presi i vettori di B, so che posso definire x tutti loro le componenti rispetto a C,

fare $B = \{w_1, \dots, v_n\} \to w_{1C}, \dots, w_{nC}$

Così, posso definire:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{v_C} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ w_{1C} & \cdots & w_{nC} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{v_B}$$

← P = matrice che ha per colonne le componenti rispetto a C dei vettori della base B

P è invertibile, colonne sono indipendenti (essendo vettori di una base) ⇒ $P \cdot v_B = v_C$, e anche $P^{-1} v_C = v_B$

So che: $f(v)_C = M_f^{CC} \cdot v_C$ → M_f^{CC} trasforma v_C nelle componenti di $f(v)$ rispetto a C

↓

Ricavo che: $M_f^{BB} = P^{-1} \cdot M_f^{CC} \cdot P$ → ecco il collegamento tra le due matrici

MATRICI SIMILI

Due matrici $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ sono simili se esiste una terza matrice P tale che:

$A = P^{-1} B P$, con $A \neq B$

Due matrici dello stesso endomorfismo rispetto a basi diverse sono simili

SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Sono del tipo:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + \dots + a_{1n} x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) + \dots + a_{2n} x_n(t) \\ \dots \\ x_n'(t) = a_{n1} x_1(t) + a_{n2} x_2(t) + \dots + a_{nn} x_n(t) \end{cases}$$

→ le soluzioni sono n-uple di funzioni reali a variabili reali del tipo $x_1(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

↓

le soluzioni $\subset [C^\infty(\mathbb{R})]^n$ → spazio delle funzioni di grado fino ad n

↳ $\dim(SOL) = n$ → è un sottospazio

↓

$$X' = AX \to \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Se la matrice A è diagonale, la soluzione è immediata

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_1'(t) = a_{11} x_1(t) \\ x_2'(t) = a_{22} x_2(t) \\ \dots \\ x_n'(t) = a_{nn} x_n(t) \end{cases} \to \begin{array}{l} x_1 = e^{a_{11}t} \cdot c_1 \\ x_2 = e^{a_{22}t} \cdot c_2 \\ \dots \\ x_n = e^{a_{nn}t} \cdot c_n \end{array}$$

↗ se qualche elemento della diagonale è: $a_{ii} = 0$

↳ $x_i = c_i \cdot e^{0t} = c_i$

METODO PER TROVARE AUTOVALORI E AUTOSPAZI

INIZIO DEL 2° QUADERNO

Dato un autovalore λ, voglio costruire l'autospazio $V_\lambda = \{v \,/\, f(v) = \lambda v\}$
Se $f(v) = \lambda v \Rightarrow f(v) - \lambda v = \underline{0}$

Posso immaginare un endomorfismo: $f_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, che associa: $f_\lambda(v) = f(v) - \lambda v$
In quest'applicazione lineare, l'autospazio V_λ è il nucleo $\operatorname{Ker} f_\lambda$ (perché ad ogni vettore associa il ~~vetto~~ vettore nullo: $f(v) - \lambda v = \underline{0}$

Costruisco la matrice di quest'applicazione lineare, data dalla differenza delle due matrici $M_{f(v)} = A$ (→ conosciuta) e $M_{\lambda v}$ (→ con tutti λ sulla diagonale)
V_λ = nucleo dell'applicazione lineare f_λ di matrice $(A - M_{\lambda v})$

Autovalori = valori λ per cui $\operatorname{Ker} f_\lambda$ è più grande del solo vettore nullo $\underline{0}$

Preso un T generico, ricavo la matrice $A - T_v$ (sottraggo T alla diagonale)
Se $\det(A - T_v) \neq 0 \Rightarrow \rho(M) = n \Rightarrow \operatorname{Ker} = \{\underline{0}\}$ → quei T non sono autovalori
↳ allora, io cerco dei T tali che $\det(A - T_v) = 0$
Calcolando il determinante, troverò:
$P(T) = 0$ → POLINOMIO CARATTERISTICO → le sue radici sono gli autovalori

Per ricavare i relativi autospazi, sostituisco $T = \lambda$ nella matrice $A - T_v$.
Ottengo una matrice con $\det = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f \neq \{\underline{0}\}$, perfetto.
Per verificare che esso sia realmente un autospazio:
- scrivo il sistema omogeneo associato
- ricavo un generico vettore di V_λ
- applico la f iniziale a tale vettore, ed ottengo $f(v) = \lambda v$

~~Dove vettori generici degli~~
Se prendo un generico vettore per ogni autospazio, ottengo una base di autovettori $\mathcal{B}$
Allora, posso comporre $M_f^{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ che ha sulla diagonale gli autovalori relativi.
E posso ricavare la matrice P, che per colonne ha i vettori di $\mathcal{B}$

MOLTEPLICITÀ DEGLI AUTOVALORI & DIMENSIONE DEGLI AUTOSPAZI

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
Suppongo di aver trovato autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ e autovettori con relativi autospazi $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \ldots, V_{\lambda_p}$
Quanti autospazi ci possono essere?
C'è un autospazio per ogni autovalore, cioè per ogni radice del polinomio caratteristico
↳ in $\mathbb{C}$ → p.c. $\in \mathbb{C}_n[T] \Rightarrow$ ha esattamente n, con molteplicità. $\sum m_i = n$
↳ in $\mathbb{R}$ → p.c. $\in \mathbb{R}_n[T] \Rightarrow$ è molto probabile che $\sum m_i < n$, perché il polinomio potrebbe restare senza soluzioni reali
Quanto possono essere grandi gli autospazi?
C'è una limitazione alla dimensione degli autospazi: $\dim V_\lambda \leq m_\lambda$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 100

- PRODOTTO DI MATRICI E FUNZIONI COMPOSTE

Se ho $f: V \to W$, con M_f^{BC}, appl. lineare
Se ho $g: W \to Z$, con M_g^{CD}, appl. lineare

$\Rightarrow g \circ f(v) = g(f(v))$ è un'appl. lineare, con $M_{g\circ f}^{BD} = M_g^{CD} \cdot M_f^{BC}$

- MATRICI INVERSE

Matrice A è invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ → condizione necessaria e sufficiente
$\Leftrightarrow$ la sua appl. lineare è biettiva (isomorfismo)

$A^{-1}A = I = AA^{-1}$

1) METODO - SISTEMI AD INCOGNITE VETTORIALI

Dato il sistema $AX = I$, cerco $X \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che $X = A^{-1}$ (sistema ad incognite vettoriali)

- ho la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ → scrivo il sistema $AX = I$ in modo scalare → $\begin{cases} 2v_1 - v_2 + v_3 = (1\,0\,0) \\ 2v_1 + v_3 = (0\,1\,0) \\ 4v_1 + 2v_2 + v_3 = (0\,0\,1) \end{cases}$
- Scrivo la matrice $(A|I)$, riduco la parte A, controllo che $\rho(A) = n$.
- Scrivo il sistema equivalente ridotto; determino i vettori incogniti: essi saranno le righe della matrice inversa → $\begin{cases} 2v_1 - v_2 + v_3 = (1\,0\,0) \\ 2v_1 + v_3 = (0\,1\,0) \\ 2v_1 = (2, -3, 1) \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

2) METODO - COMPLEMENTI ALGEBRICI

- Costruisco la matrice dei cofattori (al posto di a_{ij}, metto il numero che è il risultato del complemento algebrico)
- Ne faccio la trasposta
- Divido ogni componente per il determinante della matrice originaria

3) METODO

- Scrivo prodotto tra A ed una matrice di elementi generici, faccio il sistema o qualcosa di simile, uguagliato alla I, e determino gli elementi di A^{-1}

- TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI

Dato un sistema, in eq. matriciale: $AX = B$
→ B = matrice colonna, termini noti
→ X = matrice colonna, incognite
→ A = matrice dell'appl. lineare sottesa

Sottende una $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
dove n = numero di incognite, m = numero di eq.

- Se $\rho(A) = \rho(A|B) \Rightarrow$ il sistema è risolvibile
Le soluzioni saranno $\infty^{n-\rho(A)}$, cioè ci sono $n - \rho(A)$ incognite libere
- Se $\rho(A) = \rho(A|B) = n$, cioè se $\det A \neq 0 \Rightarrow$ c'è 1 unica soluzione

Se ho un sistema omogeneo $AX = 0 \Rightarrow$ c'è sempre la soluzione nulla, eventualmente ce ne sono anche altre

- TECNICA DI RISOLUZIONE
  - Riduco $(A|B)$ per righe, ottengo un sistema equivalente
  - Scegliere le variabili libere: esse devono essere indipendenti tra loro; le scegli una volta costruito il sistema equivalente

- ORTOGONALE

  Dato E sottospazio di $\mathbb{R}^n$

  $\Rightarrow \quad E^{\perp} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, \underline{x} \cdot \underline{y} = 0, \ \underline{y} \in E \}$ $\quad ; \dim E^{\perp} = n - \dim E$

  Basta imporre che il generico $\underline{x}$ sia $\perp$ ai vettori di una base di E

- CAMBIAMENTI DI BASI ORTONORMALI

  Data una f, data una B ed una B' ortonormale:

  $M'_{B'}(f) = {}^tP \, M_B(f) \, P$ $\quad$, perché con basi ortogonali: $P^{-1} = {}^tP$

- ORTONORMALIZZAZIONE GRAMM-SCHMIDT

  Data una $\mathcal{B} = \{ v_1, \dots, v_n \}$ di $\mathbb{R}^n$

  Ottengo una base ortonormale: $\quad u_{i+1} = \dfrac{v_{i+1} - (v_{i+1} \cdot u_1) \cdot u_1 - (v_{i+1} \cdot u_2) u_2 - \dots - (v_{i+1} \cdot u_i) u_i}{\| \; - \quad - \quad - \quad - \quad - \; \|}$

PUNTI STAZIONARI

Punti stazionari → per il T. di Fermat; sono i punti dove $\nabla f = (\underline{0})$
- Allora, calcolo i punti dove: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$ → Trovo dei $P_0, P_1, \dots$ stazionari
- Calcolo la matrice Hessiana H_f nei vari punti. (ne esamino 1 alla volta):

$$H_f(P_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(P_0) & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots \\ \vdots & \dots \quad \vdots & \dots \end{pmatrix}$$

→ Matrice numerica, può essere vista come la matrice di una forma quadratica.
Si fa l'analisi del segno di tale f quadratica per vedere che tipo di punto è.

- Primo controllo:
  → $\det(H_f(P_0)) < 0 \Rightarrow$ q è NON DEFINITA $\Rightarrow$ P_0 = punto di SELLA
  → $\det(H_f(P_0)) = 0 \Rightarrow$ q è SEMI DEFINITA $\Rightarrow$ Per ora non si sa nulla di P
- Analisi completa:
  → $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0 \Rightarrow$ q è DEFINITA POSITIVA $\Rightarrow$ P_0 = punto di MINIMO
  → $\lambda_1, \dots, \lambda_n < 0 \Rightarrow$ q è DEFINITA NEGATIVA $\Rightarrow$ P_0 = punto di MASSIMO
  → $\lambda_i > 0,\ \lambda_j < 0 \Rightarrow$ 2 autovalori discordi $\Rightarrow$ q è NON DEFINITA $\Rightarrow$ P_0 = punto di SELLA
  → $\exists\, \lambda_i = 0 \Rightarrow$ q è SEMIDEFINITA

Se trovo una q SEMIDEFINITA, guardo come varia la f tenendo fisso un valore alla volta, cioè guardo $f(x_0, y)$ e $f(x, y_0)$

7• Elementi notevoli:

ELLISSE

- Assi di simmetria ⇒ rette // ai due autospazi, passanti per O'
- Fuochi → algebricamente: so che in (O'XY) i fuochi sono $F_{1,2} = (0, \pm\sqrt{a^2-b^2})$, uso il cambio di riferimento e li trovo in (Oxy)
  → geometricamente: interseco una circonferenza di raggio $\sqrt{a^2-b^2}$ con i due assi di simmetria.

PARABOLA

- Vertice = ~~Trovo l'asse di simmetria (// al V_0, passante per O') e lo interseco con la parabola.~~ Vertice è l'O' della parabola. ~~lo trovo di quello...~~
  ↓
  Oppure: prendo il fascio di rette ⊥ al V_0, di questo fascio trovo la retta che interseca P in un punto solo (sistema, poi $\Delta=0$), la interseco con la parabola.
  Una volta trovato il vertice: Assi // autospazi, per il vertice.

IPERBOLE

- Assi di simmetria e fuochi → come ellisse
- Asintoti ⇒ pongo la parte di 2° grado = 0 $(ax^2+bxy+cy^2=0)$; divido tutto per y^2; risolvo rispetto a x/y o comunque rispetto ad una sola variabile; trovo due rette; le traslo in modo che si incontrino in O', cioè impongo che entrambe passino per O'

SFERE

Luogo dei punti dello spazio con distanza dal centro pari al raggio

$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2$ → r = raggio
→ $C(\alpha, \beta, \gamma)$

Sviluppando

$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ → $r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 + \left(-\frac{c}{2}\right)^2 - d}$
→ $C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$

Se $r = 0$ ⇒ sfera degenere, 1 punto

PIANO TG ALLA SFERA
Posso imporre che la distanza centro-piano sia uguale al raggio

CONI

Un cono proiettante una curva γ da $V=(a,b,c)$ è il luogo delle rette per V ed incidenti γ.

Equazione vettoriale:
preso un $Q(x_0,y_0,z_0) \in \gamma$ generico;
preso un $P(x,y,z)$ generico $\in$ alla retta proiettante
il Q sta sulla retta proiettante $\Leftrightarrow$ il vettore $\overrightarrow{QV}$ che lo congiunge al vertice è parallelo alla retta generatrice,
ovvero: $\boxed{\overrightarrow{VP} = \lambda \overrightarrow{VQ}}$

In componenti ho il sistema che dà il cono:
Se γ è data: $\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ il cono è, in forma cartesiana: $\begin{cases} x-a = \lambda(x_0-a) \\ y-b = \lambda(y_0-b) \\ z-c = \lambda(z_0-c) \\ f(x_0,y_0,z_0)=0 \\ g(x_0,y_0,z_0)=0 \end{cases}$

Se γ è data: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ $\Rightarrow$ il cono è, in forma parametrica: $\begin{cases} x = a+s(x(t)-a) \\ y = b+s(y(t)-b) \\ z = c+s(z(t)-c) \end{cases}$

Proprietà: se un piano taglia un cono in una circonferenza $\Rightarrow$ tutto il fascio improprio di piani parallelo ad esso taglia lo stesso cono in circonferenze

CONI DI ROTAZIONE
Se un fascio improprio di piani taglia un cono secondo circonferenze, allora il cono è rotondo $\Leftrightarrow$ la retta dei centri è perpendicolare ai piani del fascio. (Condizione necessaria e sufficiente)

CONI RICONOSCIBILI
- Polinomio omogeneo: vedo che se $Q(a,b,c) \in$ alla superficie descritta dal polinomio $\Rightarrow P(\lambda a, \lambda b, \lambda c) \in$ a quella superficie
$\to$ Vale col vertice nell'origine.
Se ho un polinomio non omogeneo, devo prima traslare gli assi per ottenere un polinomio omogeneo.
Ma non solo per polinomi; una qualsiasi funzione omogenea è un cono, perché vale la proprietà:
se $P(a,b,c) \in \gamma \Rightarrow Q(\lambda a, \lambda b, \lambda c) \in \gamma$ $\to$ se è verificato, è un cono

CONO ROTONDO $\to$ se viene dato l'asse, e poi è data l'apertura oppure una r generatrice:
- ricavo l'apertura (se non ce l'ho), angolo $r \wedge a$
- vettore di a, vettore di r (se serve, ricavolo come $\overrightarrow{PV} = V+P$, con $P=(x,y,z)$ generico)
- impongo: $\vec{v}_a \cdot \vec{v}_r = \|v_a\| \|v_r\| (\pm \cos\alpha)$, svolgo ed esce l'eq del cono

- UNIONE DI DUE PIANI DISTINTI PARALLELI

$$(ax+by+cz+d)(a'x+b'y+c'z+d')=0$$

- DUE PIANI DISTINTI SECANTI → si incontrano in una retta

- UNIONE DI DUE PIANI COMPLESSI CONIUGATI

$x^2+y^2=0$ → in $\mathbb{R}$ → punti dell'asse z
→ $(x+iy)(x-iy)=0$ → in $\mathbb{C}$

- PIANO DOPPIO COINCIDENTE

$(ax+by+cz+d)^2=0$ → caso particolare dell'unione di due piani

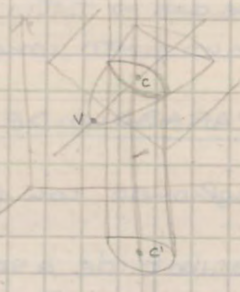
Quadrica : $H+K+t=0$, con $\begin{cases} H = \text{componenti di } 2^\circ \text{ grado} \\ K = \text{componenti di } 1^\circ \text{ grado} \\ t = \text{termine noto} \end{cases}$

↓

Piano tg alla quadrica nell'origine:
$K=0$, cioè $grad_{(000)} f = (a,b,c)$ → $ax+by+cz=0$

Tagliando la quadrica con piani tg alla quadrica stessa si ottengono coniche degeneri
I punti di tangenza sono ellittici, iperbolici, parabolici a seconda della conica degenere che risulta. Tutti i punti di una quadrica sono dello stesso tipo

TROVARE VERTICE ED ASSE DI UN PARABOLOIDE ELLITTICO S



- Trovo il V_∞: l'asse sarà ad esso parallelo
- Determino un generico piano $\perp V_\infty$, con termine noto numerico qualsiasi
- Interseco α ed S, si ottiene un'ellisse (non si sa se reale, degenere, immag)
- Costruisco un cilindro ⊥ ad 1 piano coordinato
- Proietto l'ellisse su quel piano coordinato
- Ora è 1 conica normale: ne trovo il centro C'
- Costruisco una retta ⊥ a quel piano coordinato, passante per C'
- Interseco tale retta con α e trovo C, centro dell'ellisse fatta su S
- Determino l'asse: per C, $\parallel V_\infty$
- Interseco l'asse con S, e determino il vertice V