



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1372A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Di Tullio

MATERIA: Meccanica dei Fluidi + Eserc, Prof.Boano

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Unità di misura

Pressione $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$, $1 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} = \frac{9,8}{10^{-4}} \text{ Pa} = 98000 \text{ Pa}$ $\rho_{\text{atm}} = 101330 \text{ Pa}$ $\rho_{\text{atm}} \uparrow$

□ Importante per orale

Valori costanti da ricordare: $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ $\rho_{\text{aria}} = 1,22 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ $\gamma = 9,806 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$E = 2 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ $R = 8312 \frac{\text{J}}{\text{kmol K}}$ $\sigma_{\text{H}_2\text{O}} = 0,073 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

$\nu_{\text{H}_2\text{O}} = 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ $\nu_{\text{aria}} = 1,5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 9806 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$ $\gamma_{\text{Hg}} = 133000 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$

$C_c = 0,61$ $C_v = 0,98 \Rightarrow \mu = 0,6$ $1 \text{ rad} = 57,29^\circ \left(\frac{360^\circ}{2\pi} \right)$

Pressioni utilizzate: pressioni relative: $P_{\text{rel}} = P^* - 101330 \text{ Pa}$

Moto laminare $Re = \frac{U \cdot D}{\nu} < 2000 / 2500$ $Re = \frac{D}{\lambda}$

Volume / Area utili

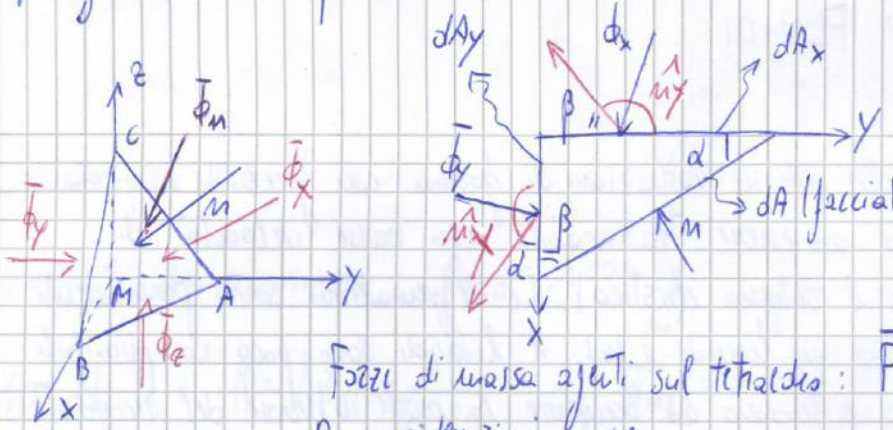
Cono $Vol = \frac{h}{3} \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2$
 $Suplat = \pi \cdot \frac{D}{2} \cdot h$

Sfera $A = 4\pi R^2$
 $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

$I = \frac{1}{12} b L^3$

\vec{F} : forza di massa per unità di massa (accelerazione)

$\sum \text{forze} = 0$
equilibrio del tetraedro



tre ordini di infinitesimo:
trascurabilità $\propto d^3$

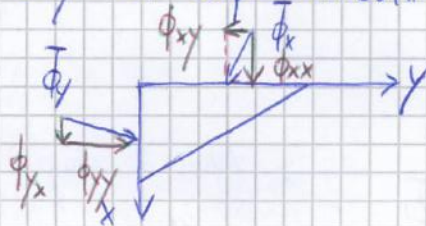
Forze di massa agenti sul tetraedro: $\vec{F} \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \rho \cdot dV \cdot \vec{f}$ (coefficiente per volume tetraedro)

Da considerazioni trigonometriche:

$dA_x = dA \cdot \cos \alpha = -dA \cos(\pi - \alpha) = -dA \cos \hat{u}_x$
 $dA_y = dA \cdot \cos \beta = -dA \cos(\pi - \beta) = -dA \cos \hat{u}_y$

Sforzi agenti:

$\vec{F}_n \cdot dA = \phi_x \cdot dA_x + \phi_y \cdot dA_y + \dots$
 $\phi_x \cdot dA_x = -\phi_x \cdot dA \cos \hat{u}_x$
 $\phi_y \cdot dA_y = -\phi_y \cdot dA \cos \hat{u}_y$
 $\phi_z \cdot dA_z = -\phi_z \cdot dA \cos \hat{u}_z$



Equazioni di equilibrio degli sforzi: $\vec{F}_n \cdot dA = \phi_x \cdot dA \cdot \cos \hat{u}_x + \phi_y \cdot dA \cdot \cos \hat{u}_y + \dots + \phi_z \cdot dA \cdot \cos \hat{u}_z$

$\phi_{ux} = \phi_{xx} \cos \hat{u}_x + \phi_{yx} \cos \hat{u}_y + \phi_{zx} \cos \hat{u}_z$
 $\phi_{uy} = \phi_{xy} \cos \hat{u}_x + \phi_{yy} \cos \hat{u}_y + \phi_{zy} \cos \hat{u}_z$
 $\phi_{uz} = \phi_{xz} \cos \hat{u}_x + \phi_{yz} \cos \hat{u}_y + \phi_{zz} \cos \hat{u}_z$

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ sforzi normali

τ_x, τ_y, τ_z sforzi tangenziali

Lo sforzo agente su un punto su un elemento di superficie piana è una funzione lineare e omogenea degli sforzi agenti.
Il sistema è isotropo: lo sforzo è sempre di tipo normale e la pressione p l'intensità dello sforzo è costante.

$\vec{F}_n = p \cdot \vec{n}$ $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ costanti

□ "Proprietà dei fluidi"

(funzione della pressione e delle temperature)

- Densità: massa contenuta nell'unità di volume $\rho = \rho(p, T)$

$\rho = \frac{M}{V} \left[\frac{kg}{m^3} \right]$

$\rho_{H_2O} = 1000 \frac{kg}{m^3}$

$\rho_{aria} = 1,22 \frac{kg}{m^3}$

- Peso specifico: $\gamma = \frac{\text{Peso}}{\text{Volume}}$

Peso = $M \cdot g \Rightarrow \gamma = \rho \cdot g \left[\frac{N}{m^3} \right]$

$g = 9,806 \frac{m}{s^2}$

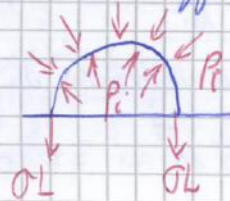
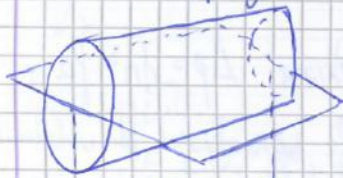


$F = \sigma \cdot L$ σ : Tensione superficiale

$\sigma_{H_2O} = 0,073 \frac{N}{m}$

La goccia di liquido tende a rendere minima l'area della superficie di contorno \rightarrow forma pseudo sferica (garantisce minimo contatto)

T tratto di superficie cilindrica di raggio R , $P_i, P_e \rightarrow$ pressioni agenti sulle due facce della superficie



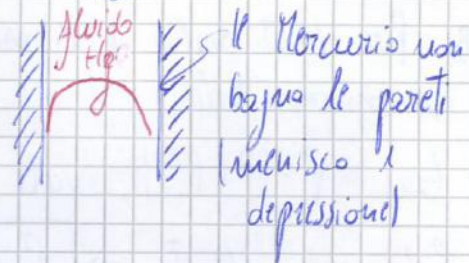
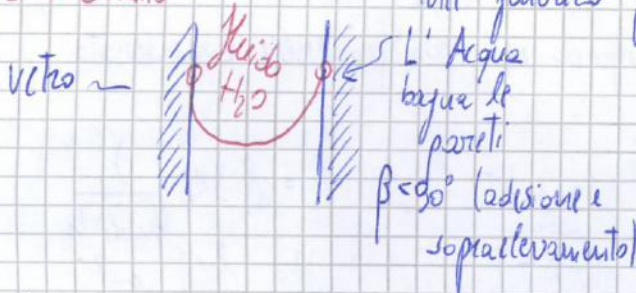
OL : forza agenti

$\Delta P = P_e - P_i = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ Formula di Laplace

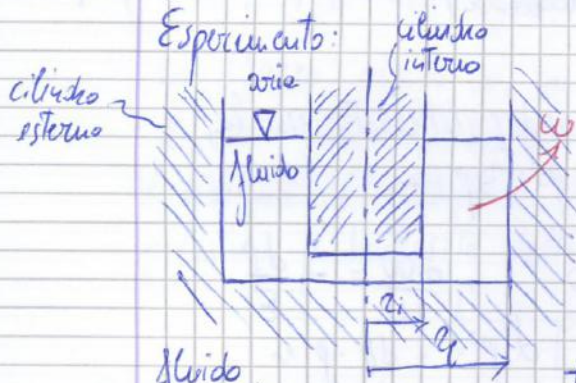


β : angolo di contatto

$|NS| R_1, R_2$: raggi principali di curvatura della superficie nel generico punto di essa



- Viscosità: parametro di trasporto che quantifica la resistenza dei fluidi allo scorrimento



ω : velocità angolari del cilindro esterno
 ∇ : indica la superficie libera del fluido
 Si mettono in rotazione prima gli strati esterni del fluido e successivamente quelli interni fino a che entra in rotazione anche il cilindro interno per gli sforzi tangenziali trasmessi dal fluido



T : coppia applicata per tenere fermo il cilindro intorno ($\omega_i = 0$)
 $T \text{ di } A \frac{dv}{du} = \text{gradienti di velocità}$
 $du \rightarrow \text{differenza dei raggi}$

$T = \mu \cdot A_{lat} \cdot \frac{dv}{du}$

$\tau = \frac{T}{A} = \mu \cdot \frac{dv}{du}$

μ : viscosità dinamica (attrito interno del fluido) $\left[\frac{kg}{m \cdot s} \right]$

viscosità cinematica: $\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{m^2}{s} \right]$

$\nu_{H_2O} = 10^{-6} \frac{m^2}{s}$

$\nu_{aria} = 1,5 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$

② Forze di superficie

$$\begin{aligned} \vec{j} &: P \cdot dx dz \vec{j} - (P + \frac{\partial P}{\partial y} dy) dx dz \vec{j} \\ \vec{k} &: P \cdot dx dy \vec{k} - (P + \frac{\partial P}{\partial z} dz) dx dy \vec{k} \\ \vec{i} &: P \cdot dy dz \vec{i} - (P + \frac{\partial P}{\partial x} dx) dy dz \vec{i} \end{aligned}$$

Resultante forze di sup:

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy dz \vec{j} - \frac{\partial P}{\partial z} dx dy dz \vec{k} - \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz \vec{i} = \\ & = - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k} \right) dx dy dz = \\ & = - \text{grad}(P) \cdot dx dy dz \end{aligned}$$

① + ② = 0 $\Rightarrow \rho \cdot \vec{F} \cdot dx dy dz - \text{grad}(P) \cdot dx dy dz = 0$

$$\boxed{\rho \cdot \vec{F} = \text{grad}(P)}$$

forma finale

isobare $P = \text{cost.}$
isocore $\rho = \rho(P, T)$

Le superficie equipotenziali sono a pressioni costanti (e anche a densità costanti)
Le forze di massa derivano da un potenziale $\vec{j} = \text{grad} U$ per fluidi incompressibili. Se $\vec{F} = \text{grad} U \Rightarrow \rho \text{grad} U = \text{grad}(P)$

□ Statica dei fluidi pesanti/incompressibili

Un fluido in quiete è soggetto unicamente all'azione del campo gravitazionale.
 z : quota geodetica del generico punto.

$$\vec{F} = -\gamma \cdot \vec{k} = -\gamma \cdot \text{grad} z = -\gamma \left(\frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial z} \vec{k} \right)$$

$\frac{\partial z}{\partial z} = 1$

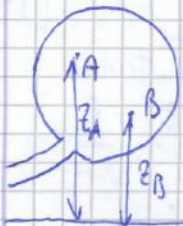
$$\rho \vec{F} = \text{grad}(P) \Rightarrow \rho (-\gamma \cdot \text{grad} z) = \text{grad}(P)$$

* Con fluido incompressibile e isoterma vale: $-\text{grad} z = \text{grad} \frac{P}{\gamma}$

$$-z = \frac{P}{\gamma} + \text{costanti} \Rightarrow \boxed{z + \frac{P}{\gamma} = \text{cost.}}$$

(legge di Stevin)

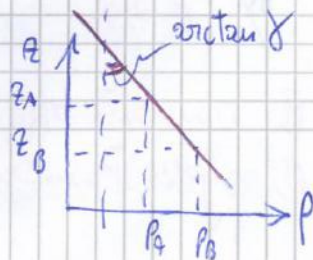
z : quota + $\frac{P}{\gamma}$: altezza piezometrica = C : quota piezometrica



Se P_B è nota: $\frac{P_A}{\gamma} + z_A = \frac{P_B}{\gamma} + z_B$

$$P_A = P_B + \gamma (z_B - z_A)$$

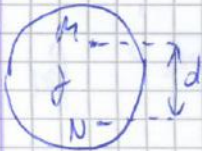
Diagramma delle pressioni:



* Campo di applicabilità delle legge di Stevin

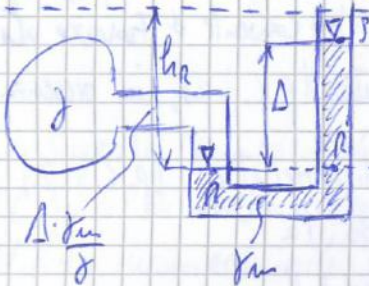
$N \in \gamma_2$ $P_U = P_M + \gamma_1 \cdot l$ (Applicazioni Stevin)
 $P_{U'} = P_M + \gamma_2 \cdot l$

N e N' sono allo stesso piano $\Rightarrow P_M + \gamma_1 \cdot l = P_M + \gamma_2 \cdot l$
 Poiché $\gamma_1 \neq \gamma_2$ (fluidi immiscibili) l'equazione è soddisfatta unicamente per $l=0$, quindi il piano di divisione dei fluidi è orizzontale.



Con P_M nota si procede al calcolo di $P_U = P_M + \frac{P_U}{\gamma} = z_M + \frac{P_U}{\gamma}$
 $\frac{P_U}{\gamma} = \frac{P_M}{\gamma} + (z_M - z_N) \Rightarrow P_U = P_M + \gamma(z_M - z_N) = P_M + \gamma \cdot d$

pciz \square Funzionamento di manometri semplici γ_m : fluido manometrico $\gamma_m > \gamma$

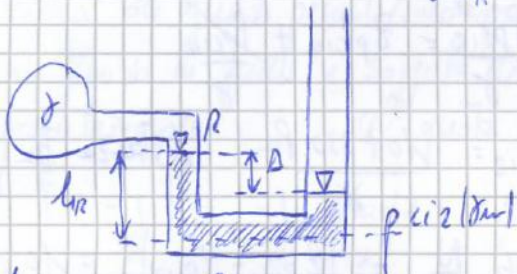


$P_R = P_{R'}$ con $R \in \gamma_m$ $P_{R'} = P_s + \gamma_m \cdot \Delta$

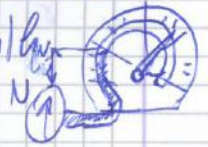
spesso $\gamma_m = \gamma_{Hg} = 133000 \text{ N/m}^3$

$h_R = \frac{P_R}{\gamma}$ con $R \in \gamma$

$\gamma h_R = \Delta \cdot \gamma_m \Rightarrow h_R = \Delta \cdot \frac{\gamma_m}{\gamma}$

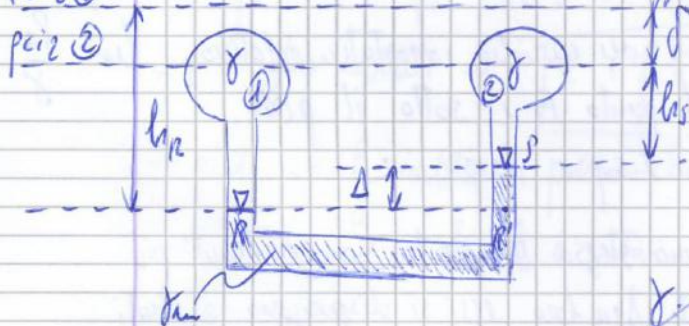


Se il valore delle pressioni è molto elevato si utilizza un manometro metallico detto di Bourdon $h_R = \frac{P_R}{\gamma}$



$h_R < 0$ se $P_R < 0$

pciz \square Funzionamento di un manometro differenziale per $\gamma_m > \gamma$ $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ serbatoi



$P_R = P_{R'}$, $P_R = \gamma h_R$, $P_{R'} = P_s + \Delta \gamma_m$
 $P_s = \gamma \cdot h_S = \gamma (h_R - \Delta - \delta)$

Per le relazioni scritte in precedenza vale:

$\gamma \cdot h_R = \gamma \cdot h_R - \gamma \Delta - \gamma \delta + \Delta \gamma_m$

$\delta = \frac{\Delta \cdot (\gamma_m - \gamma)}{\gamma} = \Delta \cdot \left| \frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right|$

Se $\gamma_m > 2\gamma \Rightarrow \delta = \Delta$

$\delta = \Delta \cdot \left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right)$

$C \left(\frac{I_G}{Ax_G}, \frac{Ix_G}{Ax_G} \right)$ centro di spinta.

2. $\int \cdot \eta = \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \int xy \, dA$

$\int = \gamma \cdot h_G \cdot A = \gamma \cdot X_G \cdot \sin \alpha \cdot A$

$\gamma \cdot X_G \cdot \sin \alpha \cdot A \cdot \eta = \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \int xy \, dA \Rightarrow \eta = \frac{\int xy \, dA}{A \cdot X_G} = \frac{I_{xy}}{M} \Rightarrow \boxed{\eta = \frac{I_{xy}}{Ax_G}}$

I_{xy} : momento d'inerzia centrifuga attorno E

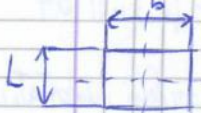
M: momento statico

- La posizione di C è indipendente da α
- $I_{xy} = 0 \Rightarrow \eta = 0$ se x e y sono assi di simmetria
- C è più distante di G dalla linea di spinta

sempre maggiore

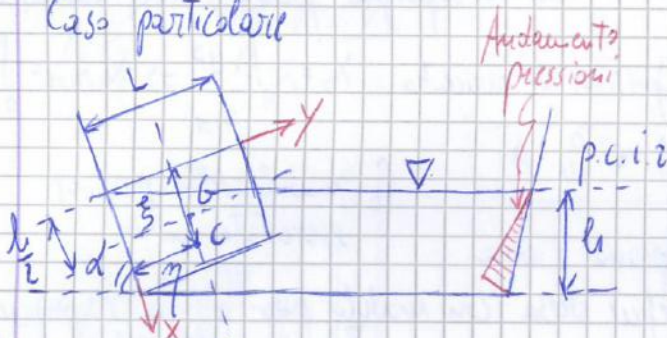
Applicando il teorema di trasposizione:

$\xi = \frac{I}{M} = \frac{I_G + Ax_G^2}{A \cdot X_G} = \frac{I_G}{A \cdot X_G} + X_G = \frac{I_G}{M} + X_G > X_G$



Da ricordare: momento d'inerzia di un rettangolo $I = \frac{1}{12} \cdot b \cdot L^3$

Caso particolare



$\int = \gamma \cdot h_G \cdot A = \gamma \cdot \frac{h}{2} \cdot L \cdot \frac{h}{\sin \alpha}$

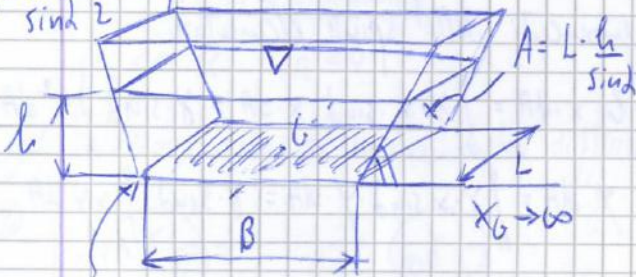
$\xi = X_G + \frac{I_G}{M} = X_G + \frac{\frac{1}{12} \cdot L \cdot \left(\frac{h}{\sin \alpha} \right)^3}{L \cdot \frac{h}{\sin \alpha} \cdot \frac{h}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{2}} =$

$= \frac{h}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{2}{3} \frac{h}{\sin \alpha}$

$X_G = \frac{h}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{2}$ rispetto a A

$\int = \gamma \cdot h_G \cdot A = \gamma \cdot h_G \cdot B \cdot L$

$C_G = \frac{I_G}{A \cdot X_G} = 0 \Rightarrow C \equiv G$ in caso di distribuzioni di pressioni uniformi su A.

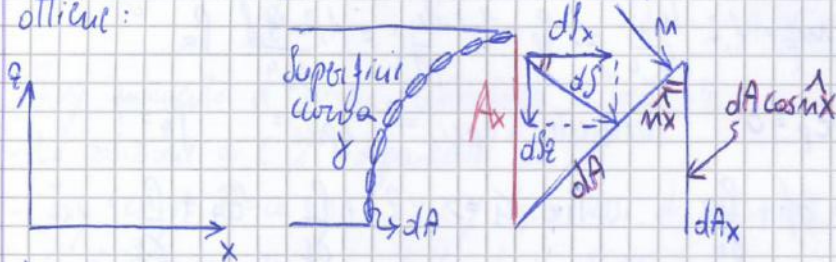


piano di giacitura (stessa α)

(metodo delle componenti) + (Eq. globale dell'equilibrio)

Calcolo delle spinte su superfici curve

Proiettando la spinta elementare $dS = \rho \cdot l \cdot dA$ nelle tre direzioni x, y, z si ottiene:



$$dS_x = dS \cdot \cos \hat{m}_x = \rho \cdot l \cdot dA \cdot \cos \hat{m}_x = \rho \cdot l \cdot dA_x$$

A_x : proiezione di A avente come normale l'asse x , può essere scritta la relazione:

$$dS_x = \rho \cdot l \cdot dA_x$$

$$dS_y = \rho \cdot l \cdot dA_y$$

$$dS_z = \rho \cdot l \cdot dA_z$$

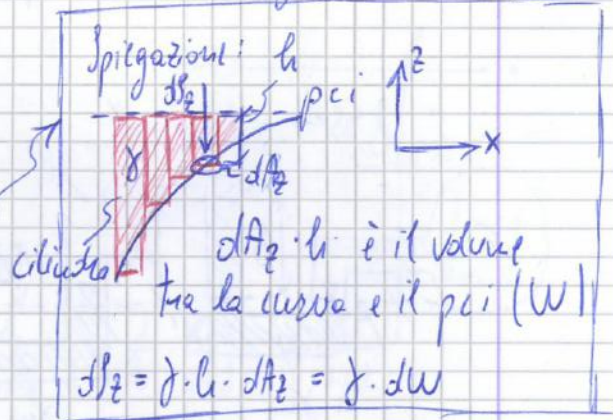
Le tre componenti elementari risultano pari alle spinte elementari che si esercitano sulle superfici piane proiezioni dell'elemento dA sui tre piani xy, yz, xz normali x, y, z .

Facendo la sommatoria di tutte le componenti elementari che agiscono sulla curva:

$$S_x = \int dS_x = \int_{A_x} \rho \cdot l \cdot dA_x = \rho \cdot l_{Gx} \cdot A_x$$

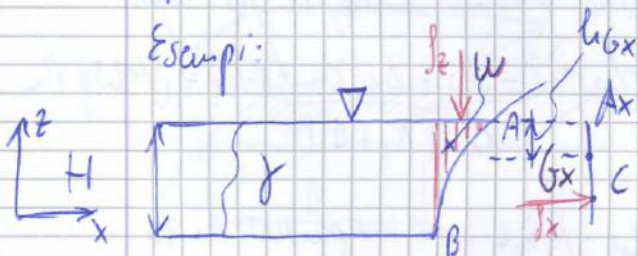
$$S_y = \int dS_y = \int_{A_y} \rho \cdot l \cdot dA_y = \rho \cdot l_{Gy} \cdot A_y$$

$$S_z = \int dS_z = \int_{A_z} \rho \cdot l \cdot dA_z = \rho \cdot W \text{ (peso)}$$



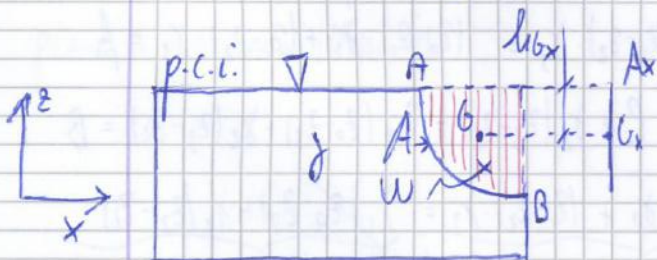
Componenti: $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$

Esempi:



$$S_x = \rho \cdot l_{Gx} \cdot A_x$$

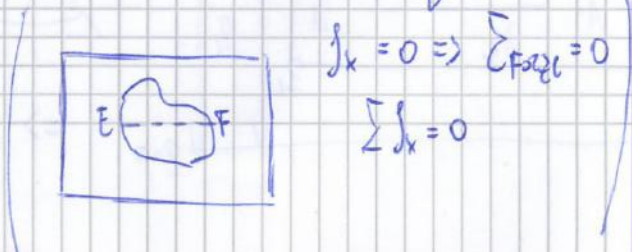
$$S_z = \rho \cdot W$$



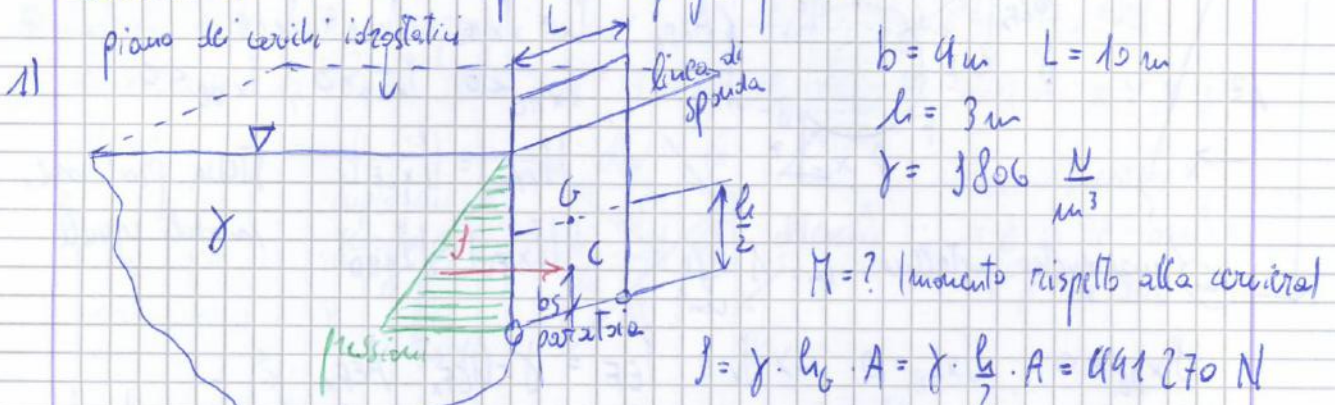
$$S_x = \rho \cdot l_{Gx} \cdot A_x$$

$$S_z = \rho \cdot W$$

Caso particolare



Esercitazione "Calcolo spinta su superfici piane"

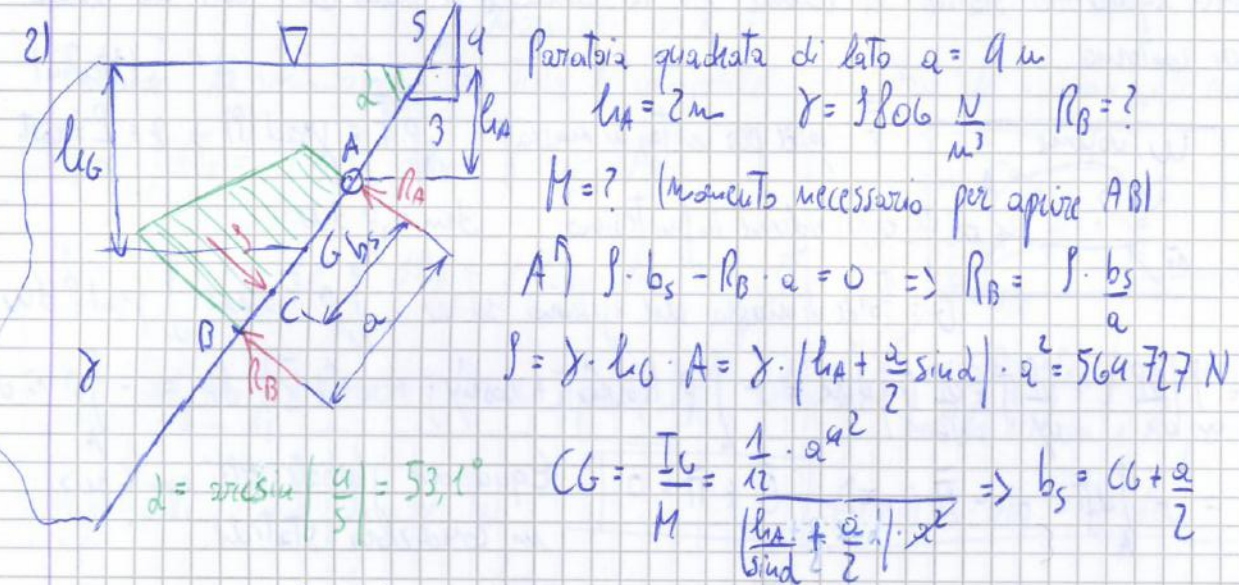


$M = F \cdot b_s$ (braccio)

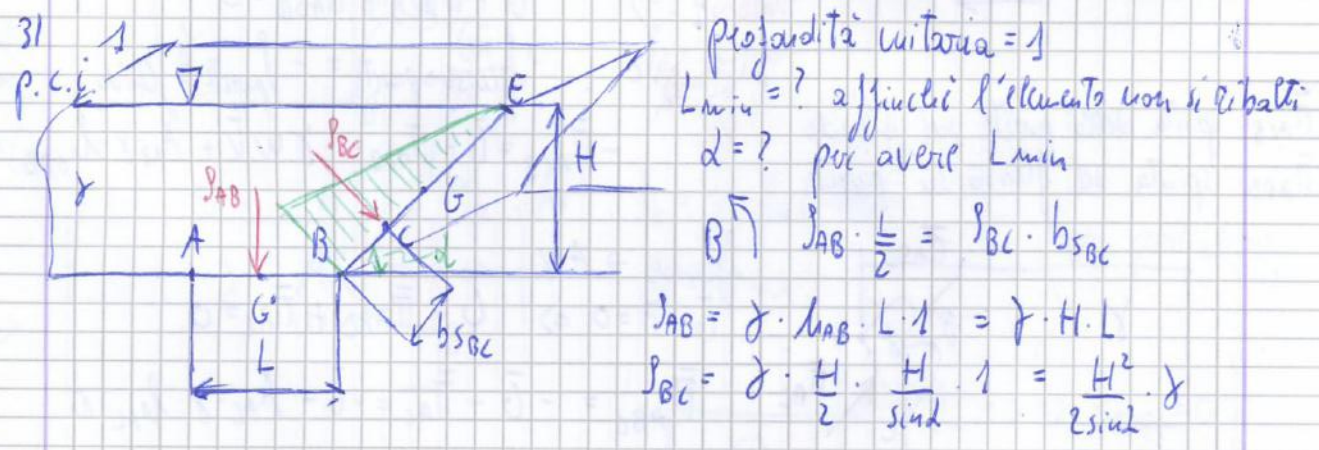
$b_s = -0,5 \text{ m} + \frac{h}{2} = 1 \text{ m}$

$M = F \cdot b_s = 441270 \text{ N}\cdot\text{m}$

$CG = \frac{I_G}{M} = \frac{\frac{1}{12} L h^3}{L \cdot h \cdot \frac{h}{2}} = \frac{1}{6} \cdot h = 0,5 \text{ m}$



$M = b_s \cdot F = 1286835 \text{ N}\cdot\text{m}$

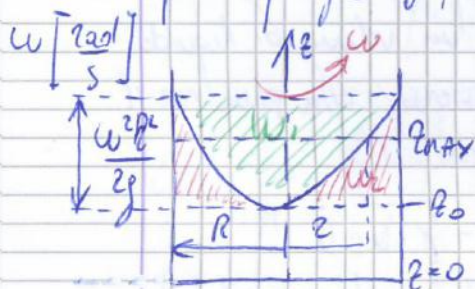


$$\gamma = \frac{mg}{V}$$

$$-\int \frac{1}{\gamma} \gamma \text{grad} z - \int \frac{1}{\gamma} \text{grad} U = \int \frac{1}{\gamma} \text{grad} P \Rightarrow \text{grad} \left(z + \frac{P}{\gamma} + \frac{U}{\gamma} \right) = 0$$

$$z + \frac{P}{\gamma} + \frac{U}{\gamma} = \text{costante} \quad (\text{Per superfici isobariche: } z + \frac{U}{\gamma} = \text{costante})$$

Si consideri un recipiente cilindrico ad asse verticale contenente liquido di peso specifico γ , che ruota attorno all'asse con velocità angolare ω costante.



Azione dell'accelerazione centripeta: $A = -\omega^2 r$

$$U = \int A dr = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \quad \text{potenziale corrispondente}$$

$$z + \frac{P}{\gamma} - \frac{1}{2} \frac{\omega^2 r^2}{g} = \text{costante}$$

$$(\text{Per superfici isobariche } z - \frac{1}{2} \frac{\omega^2 r^2}{g} = \text{cost.})$$

$$V_1 = \frac{1}{2} \pi R^2 \frac{\omega^2 R^2}{2g} \quad \text{volume vuoto} \quad V_2 = \text{volume del liquido in quiete}$$

Quota a cui si dispone la superficie libera orizzontale, una volta che il recipiente si ferma ed il liquido è in quiete:

$$z_{\text{max}} = z_0 + \frac{1}{2} \frac{\omega^2 R^2}{g}$$

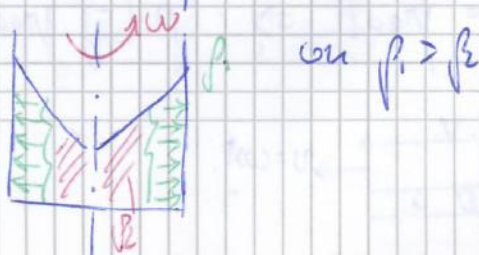
Modulo delle forze di massa agenti: $\sqrt{g^2 + r^2 \omega^4}$

Supponendo di avere nel recipiente un liquido che è una miscela di due liquidi di densità differenti ρ_1 e ρ_2 , le forze agenti sull'unità di volume sono:

$$F_1 = \rho_1 g \quad F_2 = \rho_2 g \quad F_1 - F_2 = (\rho_1 - \rho_2) g$$

$$F_1' - F_2' = (\rho_1 - \rho_2) \sqrt{g^2 + \omega^4 r^2} = (\rho_1 - \rho_2) g \sqrt{1 + \omega^4 \frac{r^2}{g^2}}$$

\Rightarrow Durante la rotazione del recipiente, la separazione dei due liquidi è avvantaggiata.

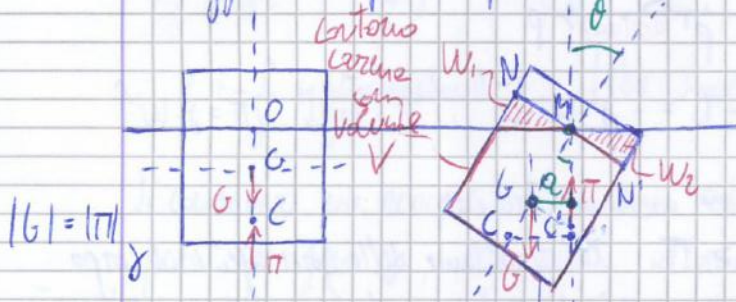


- Galleggiante sottoposto a piccole oscillazioni θ

C: centro di carena

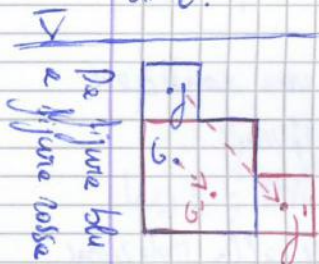
M: metacentro, punto per il quale ruota la retta d'azione della spinta idrostatica per tutte le piccole inclinazioni.

Per piccole oscillazioni: volume di emergenza W_1 = volume immerso $W_2 = W$



Nel secondo caso G e C determinano una coppia che tende a riportare il galleggiante nella situazione iniziale se la retta d'azione su cui agisce $\bar{\pi}$ incontra l'asse di simmetria su cui agisce \bar{G} in M, G deve essere al di sopra di C.

Momento generato: $M = \pi \cdot \overline{GC'} = \pi \cdot (MG \cdot \sin \theta)$



V è il volume totale della figura blu (che corrisponde al volume totale della figura rossa), v è il volume della figura più piccola. Si nota che cambiando la posizione della figura piccola (da j a j'), il baricentro della figura totale passa da G a G'.

$\overline{GG'} = \frac{j'j}{N}$ Nella figura precedente vale: $\frac{CC'}{W} = \frac{NN'}{\text{Volume di carena (in rosso)}}$

$CC' = MC \cdot \tan \theta \approx MC \cdot \sin \theta$ (piccole oscillazioni $\tan \theta \approx \sin \theta$)

$v \cdot NN' = \int_{S_1} dA \cdot x \tan \theta \cdot x = \int_{S_1} \tan \theta \cdot x^2 \cdot dA = \tan \theta \int_{S_1} x^2 \cdot dA = \tan \theta \cdot I$

$v_1 \cdot NN' = \tan \theta \cdot I_1$ ricavato con processo analogo al precedente

Per piccole oscillazioni: $v = v' \Rightarrow v (NN' + NN') = \tan \theta \cdot I + \tan \theta \cdot I_1 = \tan \theta \cdot (I + I_1)$

$v \cdot NN' = \tan \theta \cdot I_0$

I_0 : momento d'inerzia della superficie totale rispetto alla superficie di galleggiamento.

$\frac{CC'}{v} = \frac{NN'}{v} = \frac{\tan \theta \cdot I_0}{v \cdot v}$

$CC' = MC \cdot \sin \theta = \frac{\tan \theta \cdot I_0}{v} \Rightarrow MC = \frac{I_0}{v}$

$MC = MG + GC$

MC: distanza metacentrica (M deve essere sopra G)

\Rightarrow Più è grande a e più sarà rapido il ritorno nella condizione di equilibrio con una rotazione più veloce. (Se M è al di sopra di G, l'oggetto è in una posizione instabile).

Esempio. Si trovi l'accelerazione della particella transiente nel punto $P(1, 2, 1, 2)$

Componenti: $u = 3x$ $v = -3y + t$ $w = 3t$

$$A_x = \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} = 0 + 3x \cdot 3 + (-3y + t) \cdot 0 + 3t \cdot 0 = 9x$$

$$A_y = \frac{dv}{dt} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz} = 1 + 3x \cdot 0 + (-3y + t) \cdot (-3) + 0 \cdot 3t = 9y - 3t + 1$$

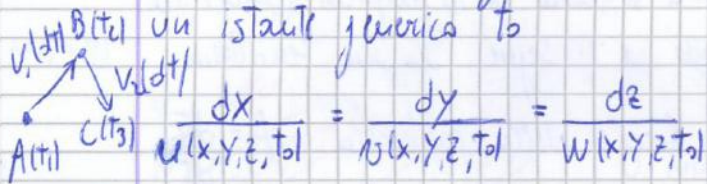
$A_z = 3$ In $P \Rightarrow A_x = 9$ $A_y = 13$ $A_z = 3$

$$A = \sqrt{9^2 + 13^2 + 3^2} = 16 \text{ m/s}^2$$

- Traiettorie: luogo dei punti successivamente occupati dalle singole particelle fluide in moto (nelle traiettorie non sono presenti informazioni sulle velocità)
Equazione delle traiettorie ricavate con lo spostamento elementare subito da una particella nel generico istante t : (passante per x, y, z, t)

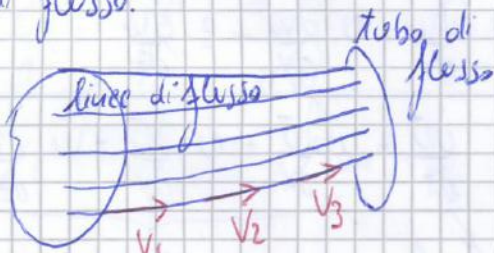
$$dx = \bar{u}(x, y, z, t) \cdot dt \quad dy = \bar{v}(x, y, z, t) \cdot dt \quad dz = \bar{w}(x, y, z, t) \cdot dt$$

- Linee di corrente o di flusso: sono le linee tangenti al vettore velocità in un istante generico t_0



Le linee di flusso non corrispondono alle traiettorie, tuttavia se il vettore velocità in ogni punto è indipendente dal tempo (linea di flusso = traiettoria)

Le traiettorie forniscono un quadro delle posizioni successivamente assunte nel tempo dalle singole particelle, mentre le linee di flusso individuano le velocità nei differenti punti del campo di moto in un determinato istante. L'insieme di tante linee di flusso parallele costituisce un tubo di flusso.



- Condizioni particolari di moto

- Moto permanente o stazionario: le grandezze cinematiche non dipendono dal tempo

$$\bar{v} = \bar{v}(x, y, z)$$

Si ottiene: $-\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) dx dy dz dt = \frac{d\rho}{dt} dx dy dz dt$ (forma locale)

$\frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\rho \cdot \vec{v}) = 0$ equazione indefinita delle continuità

Se il fluido è in moto è incomprimibile e pertanto $\rho = \text{costante} \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = 0$

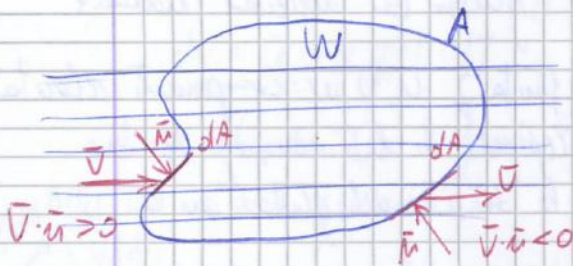
Si ottiene la forma globale dell'equazione indefinita: $\text{div}(\vec{v}) = 0$

Esempio: $u = 3x + 4y$ $v = -3y + 5t$ $w = z$

$\text{div} \vec{v} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 3 - 3 + 1 = 1 \Rightarrow$ il fluido non può essere incomprimibile

(Equazione globale). Isoliamo nel campo di moto un volume finito di fluido W racchiuso da superficie chiusa di contorno A , fissa rispetto alla teoria di riferimento, ρ e \vec{v} densità e velocità del fluido in dA con direzione normale \vec{n} . Durante l'intervallo dt attraverso la sezione dA passa la massa:

$\rho \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dA dt$ con $\vec{v} \cdot \vec{n} = v_n$



Attraverso la superficie di contorno A , passa nell'intervallo dt la massa:

$\int_A \rho \cdot v_n \cdot dA \cdot dt = \text{massa entrante} - \text{uscite}$

$v_n > 0$: massa entrante

$v_n < 0$: massa uscente

massa = $\int_W \rho dw$

Variazione di massa in W nel tempo dt :

$\frac{d}{dt} \int_W \rho dw = \int_W \frac{d\rho}{dt} dw dt$

indicano le stesse cose

Si ottiene: $\int_A \rho \cdot v_n \cdot dA \cdot dt = \int_W \frac{d\rho}{dt} dw dt$ (Equazione globale di continuità)

Se il fluido è incomprimibile $\rho = \text{costante} \Rightarrow \int_W \frac{d\rho}{dt} = 0$

$\int_A v_n \cdot dA = 0$

Applicazione dell'equazione globale in un fluido incomprimibile:

$A_{\text{TOTALE}} = A_{\text{flusso entrante}} (= A_e) + A_{\text{senza flusso netto}} (= A_0) + A_{\text{uscite}} (= A_u)$

$\int_{A_e} v_n dA + \int_{A_0} v_n dA + \int_{A_u} v_n dA = 0$ $\int_{A_u} v_n dA = - \int_{A_e} v_n dA$

$Q_e + 0 - Q_u = 0 \Rightarrow Q_e = Q_u$ La portata in ingresso è uguale a quella in uscita.

- Correnti contenute in tubazioni rigide: in un condotto rigido le sezioni trasversali non variano col tempo $\frac{dA}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = 0$, tuttavia il moto non è ipotizzato permanente, la portata Q risulta unicamente una funzione della variabile t , cambiando istantaneamente in tutte le sezioni trasversali, in modo che rimanga costante in tutta la tubazione

| Durante l'apertura o la chiusura di una valvola idraulica la portata non si porta istantaneamente ad un valore costante, nella realtà esistono dei transitori di portata che possono causare:

sovra pressioni \rightarrow eccessi di pressione dovuti a chiusure improvvise della valvola
 colpi d'ariete \rightarrow onde di pressione per l'inerzia di una colonna di fluido in movimento che impattano contro le pareti

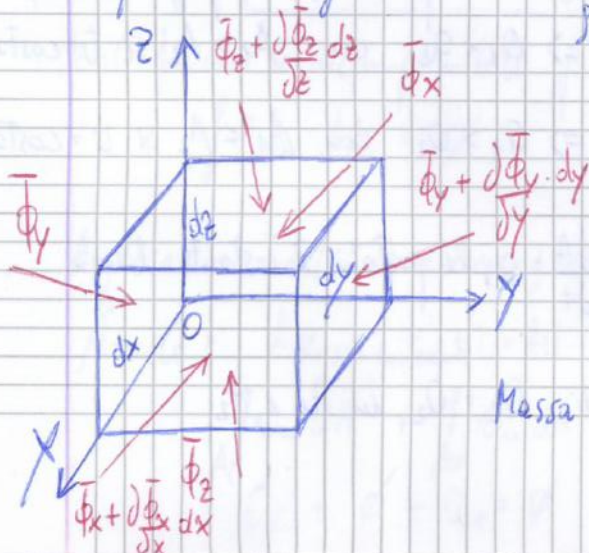
$$C_{H_2O} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 1415 \text{ m/s}$$

- "Dinamica dei fluidi"

L'idrostatica può essere considerata una condizione semplificata della dinamica in cui le componenti di sforzo tangenziali sono nulle $\tau = 0$ e le componenti di sforzo normali hanno valore $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$
 Nella dinamica vale sempre il II° principio:

$$\sum_i \vec{F}_i = m \vec{a} \quad (\vec{a}: \text{accelerazione totale} \text{ in cui } \vec{F}_i \text{ comprende forze di massa } \textcircled{1} \text{ e forze di superficie } \textcircled{2})$$

□ Equazione indefinita del momento. (\Rightarrow si arriva all'eq. globale della dinamica)



Sia $O(x, y, z)$ un generico punto in movimento in un istante t con una velocità \vec{v} e una accelerazione totale $\vec{A} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, una densità ρ .

Si consideri il solito parallelepipedo elementare con lati dx, dy, dz .

Massa contenuta: $\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = m$

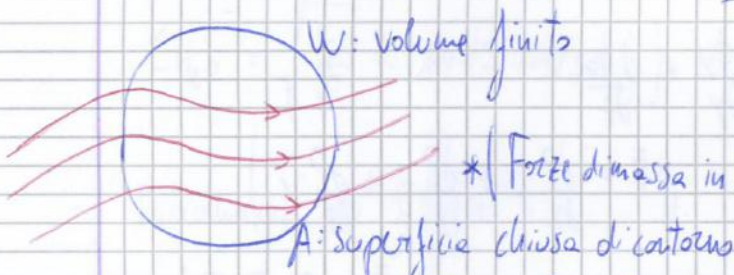
• Equazione indefinita di continuità: $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$

• Equazioni reologiche (mostrano gli equilibri raggiunti nella materia deformata per effetto di sollecitazioni) $\vec{\tau} = \mu \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow$ legame tensione tangenziale ed gradiente velocità

• Si assume il fluido come ideale (o perfetto)
Lo stato di sforzo in condizioni di moto è uguale a quello in condizioni di quiete
 $\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$ $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$

Per fluidi ideali: $\rho \left(F_x - \frac{Dv}{Dt} \right) = \frac{dp}{dx}$... Analogamente per y e z

Si ottiene l'equazione di Eulero: $\rho (\vec{F} - \vec{A}) = \operatorname{grad} p$



$$\rho \cdot \vec{F} - \rho \cdot \vec{A} = \frac{dp_x}{dx} + \frac{dp_y}{dy} + \frac{dp_z}{dz}$$

$$\int_W \rho \vec{F} dW - \int_W \rho \vec{A} dW = \int_W \operatorname{grad} p dW$$

Forze di massa: 1. $\vec{G} = \int_W \rho \vec{F} dW$ * integrale di volume

Applicando il teorema di Green: 3. $\int_W \left(\frac{dp_x}{dx} + \frac{dp_y}{dy} + \frac{dp_z}{dz} \right) dW = - \int_A (p_x \cos \alpha + p_y \cos \beta + \dots$

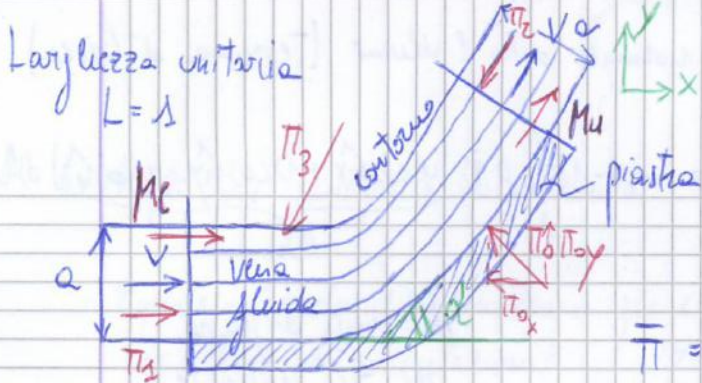
Approccio euleriano $\dots + p_z \cos \gamma) dA = - \int_A \bar{p}_n dA = - \bar{I}(0, \vec{n})$

$$2. - \int_W \rho \vec{A} dW = - \int_W \rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} + u \frac{d\vec{v}}{dx} + v \frac{d\vec{v}}{dy} + w \frac{d\vec{v}}{dz} \right) dW$$

| risultante degli sforzi attraverso A |

$$1. - \int_W \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dW = - \frac{d}{dt} \int_W \rho \vec{v} dW = \vec{I}$$

\vec{I} : risultante delle inerzie locali (variazione in dt della quantità di moto posseduta dal fluido in W) dipendono dal modo con cui velocità e densità variano nel tempo
moto stazionario $\Rightarrow \vec{I} = 0$



$\bar{G} = 0$ il peso non influenza la spinta sulla piastra

Eq. globale dell'equilibrio dinamico:

$$\bar{G} + \bar{\Pi} + \bar{I} + \bar{M}_e - \bar{M}_u = 0$$

$\bar{G} = 0 \quad \bar{I} = 0 \quad \rho \text{ è costante}$

$$\bar{\Pi} = \int_{L=0}^1 \Pi_1 + \int_{L=0}^1 \Pi_2 + \int_{L=0}^1 \Pi_3$$

$\Pi_3 = 0$ perché la sup. su cui è esercitata presenta pressione atmosferica (anche per Π_1 e Π_2)

$$M_e = \beta \rho v^2 a \cdot 1$$

$$M_u = \beta \rho v^2 \cdot a \cdot 1$$

X: $\Pi_{0x} + M_{ux} - M_{ux} = 0$

$$\Pi_{0x} + M_e - M_u \cos \alpha = 0$$

$$\Pi_{0x} = M_u \cos \alpha - M_e = -\beta \rho v^2 \cdot a (1 - \cos \alpha)$$

Y: $\Pi_{0y} + M_{uy} - M_{uy} = 0$

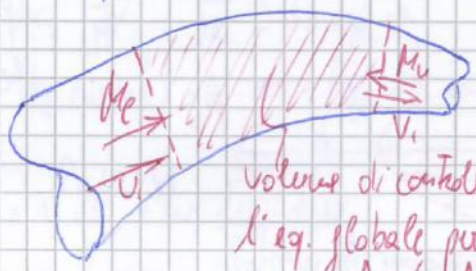
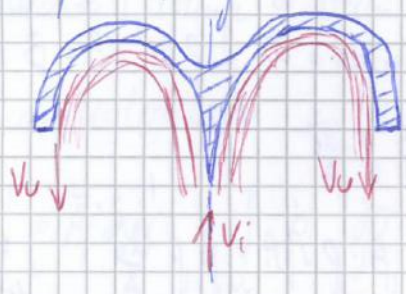
$$\Pi_{0y} = M_u \sin \alpha$$

$$\Pi_{0y} = \beta \rho v^2 \cdot a \sin \alpha$$

$$\Pi_0 = \sqrt{\Pi_{0x}^2 + \Pi_{0y}^2} = \sqrt{(\beta \rho v^2 \cdot a)^2 (1 - \cos \alpha)^2 + (\beta \rho v^2 \cdot a)^2 \sin^2 \alpha} = \beta \rho v^2 a \sqrt{1 + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha + \sin^2 \alpha} = \beta \rho v^2 a \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos \alpha}$$

Π_0 è massimo per $\cos \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 180^\circ \quad \Pi_{0max} = 2 \beta \rho v^2 a$

"Turbine Pelton": turbina ad azione con rendimento più elevato. È utilizzata per grandi salti. È non può essere trascurabile quindi viene impiegato un liquido, infatti viene utilizzata per bacini idroelettrici.



volume di controllo su cui applicare l'eq. globale per spinti con $A_e \neq A_u$

□ "Il teorema di Bernoulli" fornisce la relazione che deve sussistere fra le diverse forme di energie in gioco \Rightarrow forme in cui si converte l'energia meccanica in fluido.

Ipotesi da considerare per arrivare al teorema

1) Fluido ideale o perfetto.

Vale l'eq. di Eulero: $\rho (\bar{F} - \bar{A}) = \text{grad } P$

Si lungo una traiettoria con ascissa s , si integra rispetto a s

$$\boxed{z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{costante (H)}} \quad \text{Teorema di Bernoulli: Nel moto permanente di un fluido ideale, pesante ed incomprimibile il carico totale H si mantiene costante lungo ogni traiettoria}$$

H: esprime energia meccanica per unità di peso del fluido

Teorema di Bernoulli: Nel moto permanente di un fluido ideale, pesante ed incomprimibile il carico totale H si mantiene costante lungo ogni traiettoria

Analizziamo singolarmente ogni elemento che compone il carico totale

Carico Totale: $H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$

(carico piezometrico o quota piezometrica)

z: quota, deriva dal lavoro prodotto dall'energia potenziale (geodetica) per unità di peso
 Lavoro = Peso (z - z iniziale) $\Rightarrow z = \frac{\text{Lavoro}}{\text{Peso}}$
 \rightarrow = riferimento

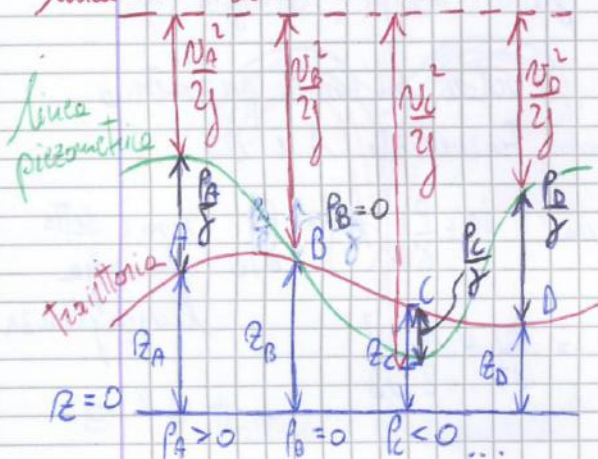
$\frac{p}{\gamma}$: altezza piezometrica, deriva dalla forza peso del volume di $\gamma \cdot dV$ per unità di volume che esercita sulla base d'appoggio la pressione p.

$\frac{v^2}{2g}$: altezza cinetica, deriva dall'energia cinetica per unità di peso

$$\frac{E_c}{\text{peso}} = \frac{\frac{1}{2} m v^2}{m g} = \frac{v^2}{2g}$$

■ Interpretazione geometrica ed energetica del teorema di Bernoulli

linea dei carichi Totali l.c.t. $H = \text{cost.}$



Per il Teorema di Bernoulli il carico totale H si deve conservare.

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g} = \dots = \text{costante}$$

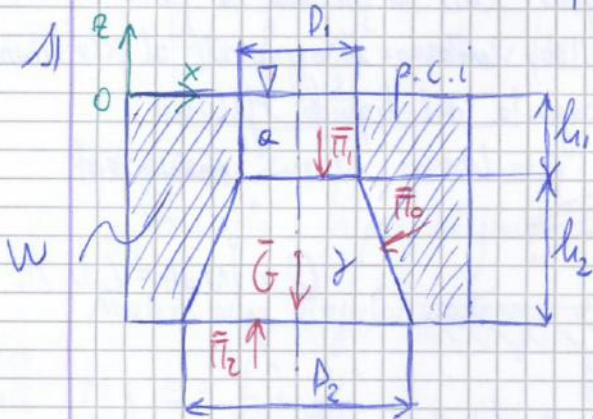
Nel caso in cui l.c.t. è parallela alla linea piezometrica, le velocità si mantengono costanti. Se in una traiettoria è presente un accumulo di velocità (accelerazioni) viene dissipata poca energia e il comportamento di un fluido reale si avvicina ad un fluido ideale. Al contrario in caso di rallentamento si dissipa una grande quantitativo di energia.

Luci a battente: se il livello del pelo libero del liquido a monte della luce è più alto di ogni punto di contorno della luce

Ripasso

Esercitazione "Calcolo delle spinte idrostatiche"

metodo delle componenti
eq. globale dell'equilibrio



$D_1 = 1 \text{ m}$ $D_2 = 4 \text{ m}$ $h_1 = 2 \text{ m}$ $h_2 = 6 \text{ m}$
 $\gamma = 9806 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$ $\rho_E = ?$

metodo delle componenti: $\sum F_x = 0$

$$\rho_E = \gamma \cdot W = \gamma \cdot \left[\frac{\pi D_2^2}{4} (h_1 + h_2) - \frac{\pi D_1^2}{4} h_1 - \frac{1}{3} \pi h_2 \left(\frac{D_1^2}{4} + \frac{D_2^2}{4} + \frac{D_1 \cdot D_2}{2} \right) \right] = 646936 \text{ N}$$

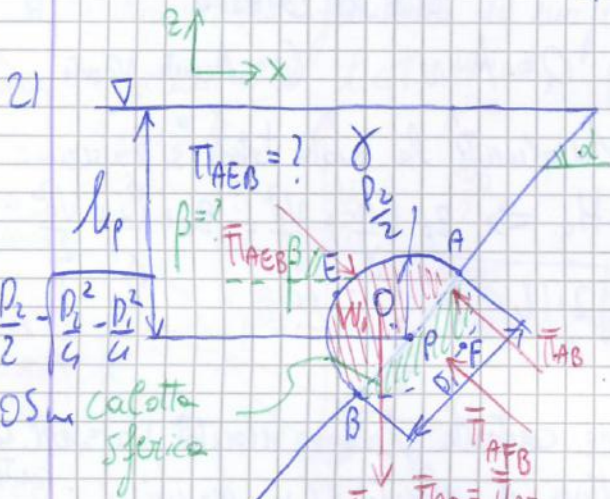
Eq. globale: $\bar{G} + \bar{\Pi} = 0 \Rightarrow \bar{G} + \bar{\Pi}_1 + \bar{\Pi}_2 + \bar{\Pi}_0 = 0$

↑ Spinta verso parete: $\rho_E = -\Pi_0 = -G - \Pi_1 + \Pi_2$

$G = \gamma \cdot W_{\text{tronco}} = 323468 \text{ N}$ $\Pi_1 = \pi \cdot \frac{D_1^2}{4} \cdot h_1 \cdot \gamma = V_{d1} \cdot \gamma = 15403 \text{ N}$

$\Pi_2 = \pi \frac{D_2^2}{4} (h_1 + h_2) \gamma = \dots = 646512 \text{ N}$

$$\rho_E = -\gamma \cdot W_{\text{tronco}} - \pi \cdot \frac{D_1^2}{4} \cdot h_1 \cdot \gamma + \pi \cdot \frac{D_2^2}{4} (h_1 + h_2) \gamma = \gamma \left[-W_{\text{tronco}} - \frac{\pi D_1^2}{4} h_1 + \frac{\pi D_2^2}{4} (h_1 + h_2) \right]$$



$h_c = \frac{D_2}{2} - \sqrt{\frac{D_1^2}{4} - \frac{D_2^2}{4}}$
 $= 0,05 \text{ m}$ calotta sferica

$D_2 = 0,5 \text{ m}$ $D_1 = 0,3 \text{ m}$ $h_p = 4 \text{ m}$
 $\alpha = 45^\circ$ $V_{\text{calotta}} = \frac{1}{3} \pi h_c^2 \left(3 \cdot \frac{D_1}{2} - h_c \right)$

$\gamma = 9806 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$

$\bar{G} + \bar{\Pi} = 0$
 $\bar{G} + \bar{\Pi}_{AEB} + \bar{\Pi}_{AFB} = 0$
 $\bar{\Pi}_{AEB} = -\bar{G} - \bar{\Pi}_{AFB}$

$W_{\text{cal}} = 0,00101 \text{ m}^3$

$\Pi_{AFB} = A_{AB} \cdot \gamma \cdot h_p = \pi \frac{D_1^2}{4} \cdot \gamma \cdot h_p = 2773 \text{ N}$

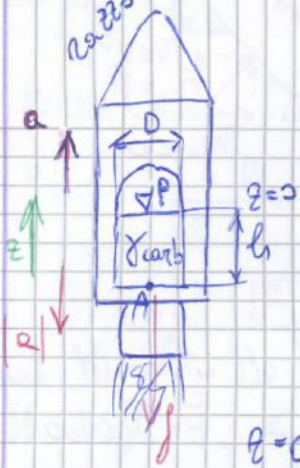
$G = \gamma \cdot W = \gamma \left(\frac{4}{3} \pi \left(\frac{D_2}{2} \right)^3 - W_{\text{cal}} \right) = 0,0632 \text{ N}$

$\bar{\Pi}_{AEB_x} = -\bar{G}_x - \bar{\Pi}_{AFB_x} = -(-\Pi_{AFB}) \cdot \sin 45^\circ = 1961 \text{ N}$

$\bar{\Pi}_{AEB_z} = -\bar{G}_z - \bar{\Pi}_{AFB_z} = -(-G) - \Pi_{AFB} \cdot \cos 45^\circ = -1328 \text{ N}$

Spinta = ?
cassa

5) a



$$\rho_{H_2O} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$p' = 3 \text{ bar assoluta}$$

$$D = 3 \text{ m}$$

$$h_{iniz} = 3 \text{ m}$$

$$\gamma_{carb} = 0,8 \cdot \gamma_{H_2O} = 7845 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$$

$$a_{acc} = 10 \text{ m/s}^2$$

$$p_{atm} = 1 \text{ bar}$$

moto relativo: $\rho(\vec{F}) = \rho \text{ grad } P$

$$\vec{F} = -\gamma \text{ grad } z - a \vec{u}$$

$$\uparrow z \quad \rho(-\gamma - a) = \frac{dP}{dz} \Rightarrow P = -z \rho(\gamma + a) + C_1$$

$$z=0 \Rightarrow P^* = P' - \rho(\gamma + a)z \quad z = -h$$

$$P_A^* = P' + \rho(\gamma + a) \cdot h = P' + 0,8 \rho_{H_2O}(\gamma + a) \cdot h = 347520 \text{ Pa}$$

$$F = -P_A^* \cdot \pi \frac{D^2}{4} + 10^5 \cdot \pi \frac{D^2}{4} = -1,75 \cdot 10^6 \text{ N} = -1750 \text{ kN}$$

contributo dovuto alla presenza di pressione assoluta

6)



$$\rho_{H_2O} > \rho_{ghiaccio}$$

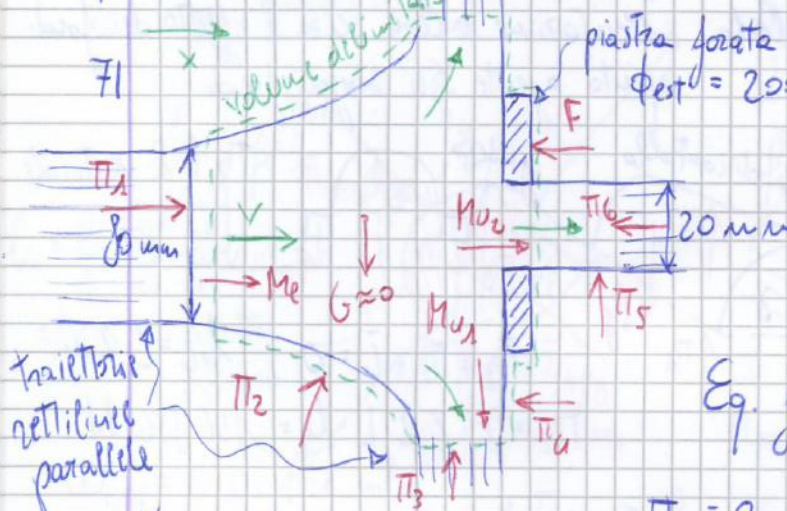
Qual' è la frazione del volume dell'iceberg

$$W_g = d \cdot W \quad d: \text{frazione da individuare}$$

$$\rho_g \cdot W = \rho(W - dW) = W(1-d)\rho$$

$$\rho_g = (1-d)\rho \Rightarrow d = \frac{\rho - \rho_g}{\rho} = 1 - \frac{\rho_g}{\rho_{H_2O}}$$

("Spinte dinamiche")



pietra forata ad anello con
 $\phi_{est} = 200 \text{ mm}$ F : forza per vincere l'anello
 $v = 40 \text{ m/s}$

fluido: aria, $\rho = \text{costante}$

Richieste: $S_x = ?$

$$\text{Eq. globale} \quad \bar{G} + \bar{\Pi} + \bar{I} + \bar{M}_e - \bar{M}_u = 0$$

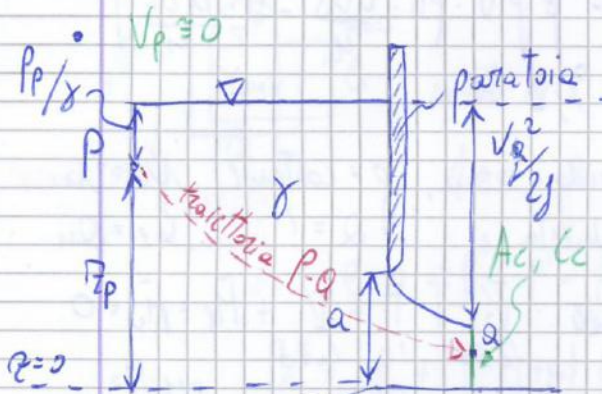
$$\Pi_2 = 0, \Pi_u = 0, \Pi_5 = 0 \Rightarrow \text{sono a contatto}$$

con la pressione atmosferica

con traiettorie rettilinee parallele la pressione è $p = p_{atm} \Rightarrow \Pi_1 = \Pi_3 = \Pi_6$

$$\Rightarrow \bar{F} + \bar{M}_e - \bar{M}_u = 0 \Rightarrow \bar{F} + \bar{M}_e - \bar{M}_{u1} - \bar{M}_{u2} = 0$$

Applicazioni del teorema di Bernoulli: (caso ideale)



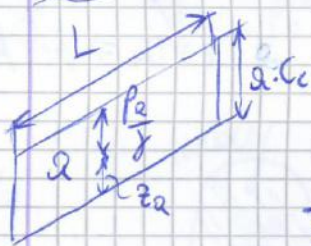
Larghezza della paratoia: L

$$A_c = a \cdot L \cdot C_c$$

$$H_p = H_e \Rightarrow z_p + \frac{P_p}{\gamma} + \frac{V_p^2}{2g} = z_e + \frac{P_e}{\gamma} + \frac{V_e^2}{2g}$$

$$Q = A \cdot V_{media} = A_c \cdot V_c$$

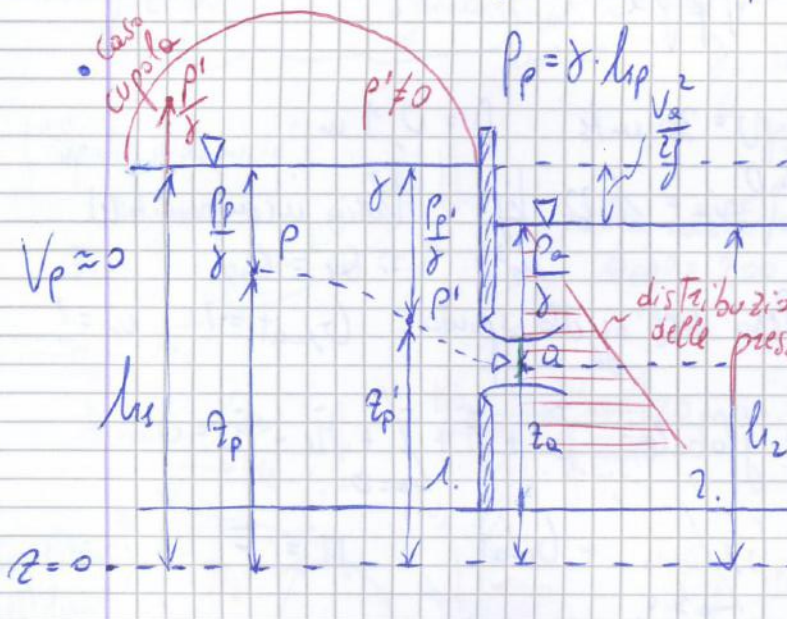
$$H = a \cdot C_c + \frac{V_c^2}{2g} \Rightarrow V_c = \sqrt{(H - a \cdot C_c) \cdot 2g}$$



All'uscita dell' A_c le traiettorie sono rettilinee e parallele. V_c non dipende da z_a nella sezione trasversale, si tratta di una V_{media} in A_c .

$$Q = C_c \cdot A \cdot C_c \cdot \sqrt{2g (H - a \cdot C_c)} = \mu \cdot A \cdot \sqrt{2g (H - a \cdot C_c)}$$

portata risultante



La vena contratta ha sezione

$$A_c = C_c A$$

$$H_p = H_e$$

$$z_p + \frac{P_p}{\gamma} + \frac{V_p^2}{2g} = z_e + \frac{P_e}{\gamma} + \frac{V_e^2}{2g}$$

$$\frac{V_c^2}{2g} = h_s - h_e$$

$$V_c = \sqrt{2g (h_s - h_e)}$$

V_c è una velocità media.

$$Q = C_c C_c \cdot A \cdot \sqrt{2g (h_s - h_e)}$$

$$Q = \mu A \sqrt{2g (h_s - h_e)} \quad \text{portata risultante}$$

Cambiando la posizione di P lungo la traiettoria si raggiunge P'. Se al livello superficiale si ha $P = P'$ e $P' \neq P_{atm}$, allora alla quota atmosferica si aggiunge P'. In A_c la distribuzione delle pressioni è di tipo idrostatico.

(NB Nel moto permanente di una corrente di un fluido perfetto e incomprimibile la potenza si mantiene costante)

Vali potenza nella sezione 1 = potenza nella sezione 2, per le ipotesi di Bernoulli

$$P_1 = \int_{A_1} dP_1 \quad P_2 = \int_{A_2} dP_2 \Rightarrow P_1 = P_2$$

Potenza della corrente nella sezione: $P = \int dP = \int \gamma \cdot H \cdot dQ =$

$$= \int_A \gamma \cdot \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) \cdot v \cdot dA = \int_A \gamma \cdot h \cdot v \cdot dA + \int_A \gamma \cdot \frac{v^3}{2g} \cdot dA$$

$$P = \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \cdot \gamma \cdot \int_A v \cdot dA + P_c$$

$$P_c = \int_A \gamma \cdot \frac{v^3}{2g} \cdot dA = d \cdot \gamma \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot Q$$

$$P = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \cdot Q + d \cdot \gamma \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot Q$$

P_c : potenza cinetica

$$P = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} + d \frac{v^2}{2g} \right) Q$$

$P = \text{costante} \Rightarrow \gamma$ è costante, Q è costante in ogni sezione, $z + \frac{p}{\gamma} + d \frac{v^2}{2g} = \text{costante}$

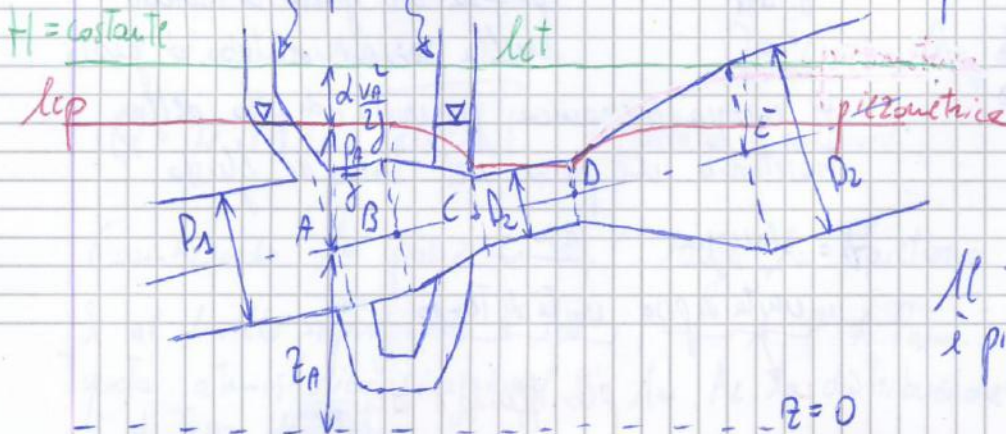
d : coefficiente di ragguglio per la potenza cinetica
(o coefficiente di Coriolis)

$$d = \frac{\int_A \gamma \cdot \frac{v^3}{2g} \cdot dA}{\gamma \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot Q} \rightarrow \text{potenza cinetica effettiva della corrente}$$

$$\rightarrow \text{potenza cinetica fittizia di una corrente di pari portata, con dist. uniforme delle velocità nella sez. trasversale.}$$

Approssimazione $d=1$, l'errore risulta trascurabile per moto turbolento
 $d=2$ per moto laminare

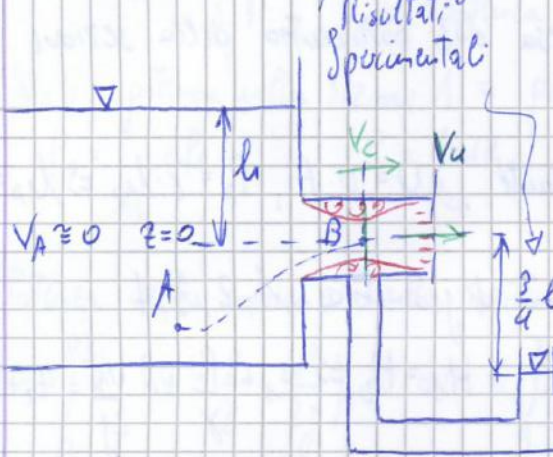
■ Studio di un venturimetro: tubo con tratto convergente e tratto divergente, canalizzatori piezometrici serve a misurare la portata in una condotta



In genere $D_1 = D_2$ nei venturimetri convenzionali.
Al tratto convergente è più corto di quello divergente.

Formula: $Q = \mu \cdot A \cdot \sqrt{2\gamma h}$

$\mu = C_c \cdot C_v = 0,6$ con luce circolare



- Aggiunta di un tubo addizionale esterno
 $V_c > V_u$ (velocità in uscita dal tubo)
 $P_c < P_u, P_u = 0$

$H_A = H_B \Rightarrow z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g}$
 $z_A = 0, z_B = \frac{3}{4}h$

Portata risultante:

$Q = C_c C_v \cdot A \cdot \sqrt{2\gamma \frac{7}{4}h} \Rightarrow Q = 0,6 \cdot A \sqrt{2\gamma \frac{7}{4}h} = 0,5 \cdot A \sqrt{2\gamma h}$

Limite di abbassamento aumentando h: $P \geq -\frac{101330}{\gamma}$

nel baricentro $P_B = -\frac{3}{4}\gamma h \geq -\frac{101330}{\gamma} \Rightarrow h \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{101330}{\gamma}$

Se $h \geq \frac{4}{3} \cdot \frac{101330}{\gamma} \Rightarrow P_B^* < 0$ non è possibile, quindi nella sezione

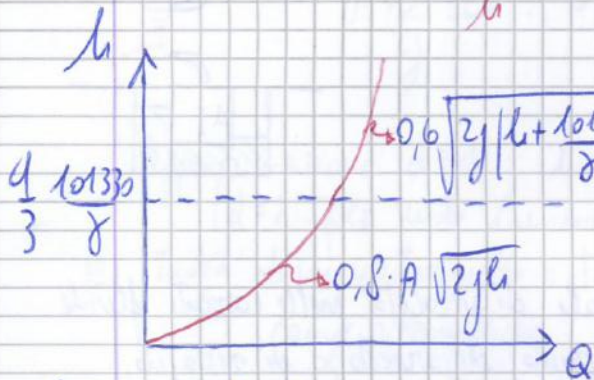
sez. di controllo \equiv sez. contratta

contratta si forma una sezione di controllo in cui il valore controllato minimo di pressione è $-101330 Pa$.

$\Rightarrow P_B^* = 0$

$z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g}$
 $z_A = 0, z_B = 0$

$P_B = -\frac{101330}{\gamma} Pa$



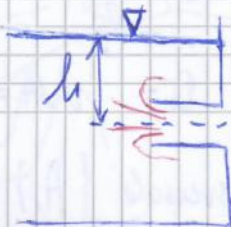
$N_B = \sqrt{2\gamma \left(h + \frac{101330}{\gamma} \right)}$

$Q = 0,6 \cdot A \cdot \sqrt{2\gamma \left(h + \frac{101330}{\gamma} \right)}$

In B si impone un valore limite

(Cambia la legge d'efflusso)

- Aggiunta di un tubo addizionale interno



$Q = 0,5 \cdot A \sqrt{2\gamma h}$

La portata che passa è minore.

$$A_c = A \cdot C_c = 70,68 \text{ cm}^2 \quad P_c = 9,48 \text{ cm}$$

Lcp della sezione con baricentro M, dove è misurato il manometro si colloca sopra $\frac{P_{ng}}{\gamma}$ rispetto al manometro.

$$G = \gamma \cdot W$$

$$M_u = \beta \rho \frac{Q^2}{A_2}$$

$$T_{11} = P_1 \cdot \frac{A_1^2}{4}$$

$$M_c = \beta \rho V_{11}^2 \cdot A_1 = \beta \rho \frac{Q^2}{A_1}$$

$$z_n + \frac{P_n}{\gamma} + d \frac{V_n^2}{2\gamma} = z_c + \frac{P_c}{\gamma} + d \frac{V_c^2}{2\gamma} \quad \text{con } d=1$$

$$a + \frac{P_{ng}}{\gamma} + \frac{Q^2}{A_1^2 \cdot 2\gamma} = \frac{P_c}{\gamma} \sin d + \frac{Q^2}{A_1^2 \cdot 2\gamma}$$

$$z_c = \frac{P_c}{\gamma} \cdot \sin d = 0,0237 \text{ m}$$

$$\Rightarrow Q = 0,0506 \text{ m}^3/\text{s}$$

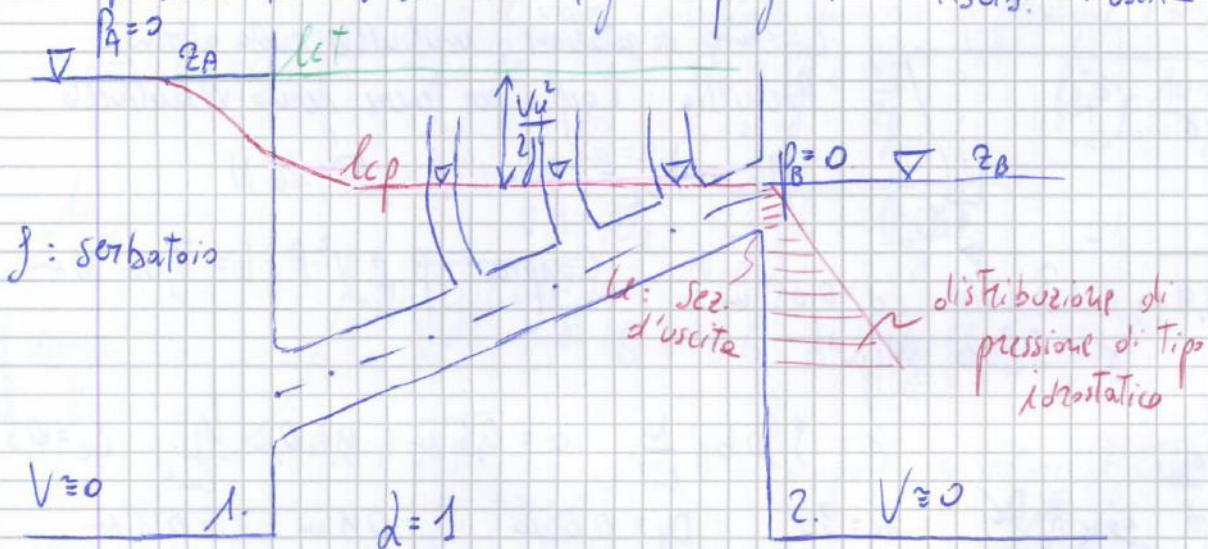
$$P_1 = \gamma \cdot \left(a + \frac{P_{ng}}{\gamma} + L \cdot \sin d \right)$$

$$W = 0,008 \text{ m}^3$$

$$\Rightarrow -T_0 = \gamma \cdot W + P_1 \cdot A_1 + \beta \rho Q^2 \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) = 517 \text{ N}$$

$\beta = 22,4^\circ$ rispetto all'orizzontale per T_0

- Portata tra due serbatoi (fluido perfetto) $H_{serb.} = H_{uscita}$



$$z_s + \frac{P_s}{\gamma} + d \frac{V_s^2}{2\gamma} = z_n + \frac{P_n}{\gamma} + d \frac{V_n^2}{2\gamma} \Rightarrow z_A = z_B + \frac{V_u^2}{2\gamma}$$

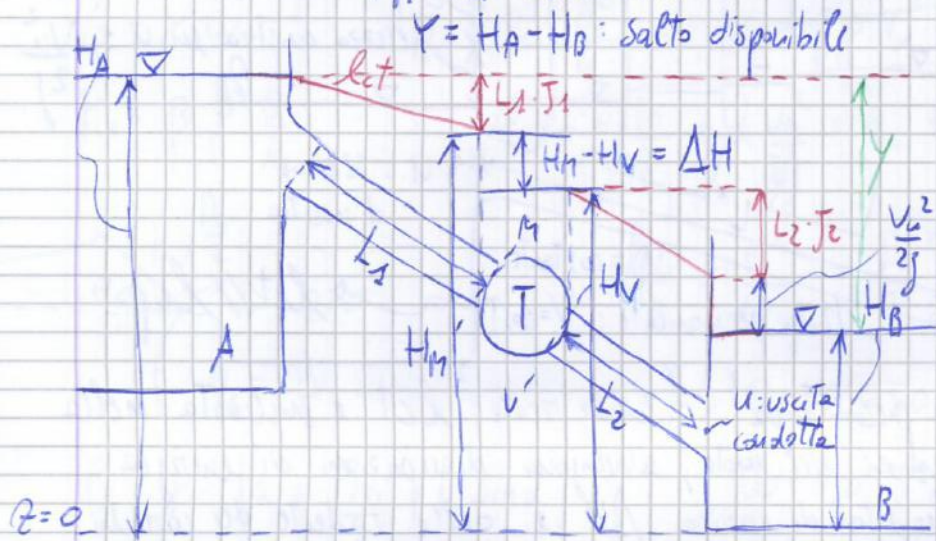
$$V_u = \sqrt{2\gamma(z_A - z_B)}$$

$$Q = V_u \cdot A_u$$

Macchine idrauliche: si dividono in

- macchine motrici (turbine)
 - Eidraulica → Emecc. → Eelettrica
- macchine operatrici (pompe)
 - Eel → Emecc. → Eidr.

T: turbina $H_M - H_U$: salto utile
 $Y = H_A - H_B$: salto disponibile



Potenze (M: entrata turbina
 V: uscite turbina)

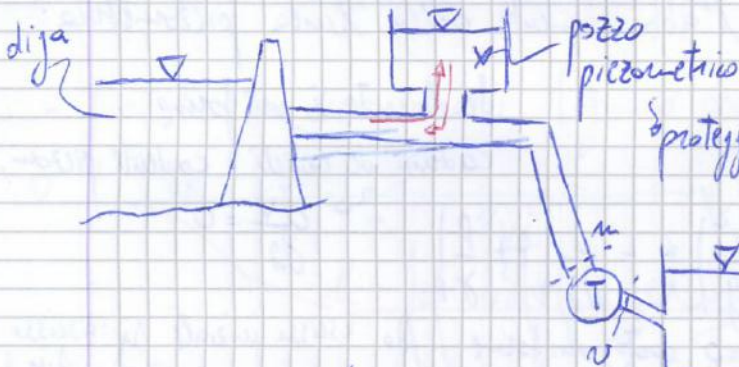
$$P_M = \gamma \cdot Q \cdot H_M$$

$$P_U = \gamma \cdot Q \cdot H_U$$

Potenza ceduta dalla corrente alle macchine

$$P_{ceduta} = \gamma \cdot Q \cdot (H_M - H_U)$$

Per aumentare il valore del salto utile si monta un diffusore (ugello) all'imbocco nel serbatoio B.



Impianto idroelettrico

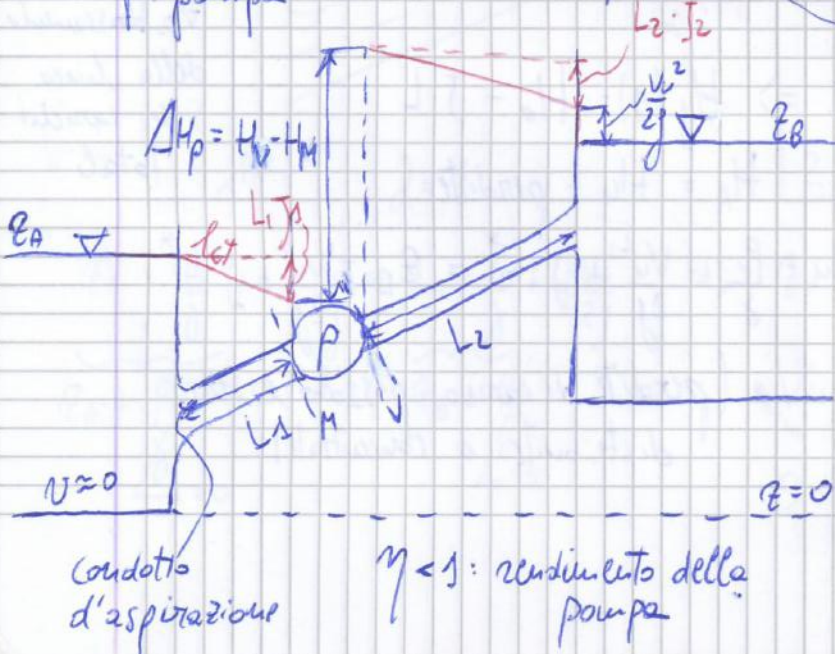
protegge dai colpi d'ariete le turbine poste a valle

$$P_{T} = \gamma \cdot Q \cdot (H_M - H_U)$$

$$E_{prodotta} = \int \gamma \cdot Q \cdot (H_M - H_U) dt$$

$$E_{persa} = \int \gamma \cdot Q \cdot (\Delta H - Y) dt$$

P: pompa (S: riceve ΔH_p ...)



$$H_A - L_1 J_1 + \Delta H_p - L_2 J_2 - \frac{v^2}{2g} = H_B$$

ΔH_p : prevalenza della pompa. L'energia fornita in più tiene conto delle perdite di carico

$H_V - H_M$: prevalenza manometrica

Potenza ricevuta dalla pompa:

$$P_{el} = \gamma \cdot Q \cdot \frac{(H_V - H_M)}{\eta}$$

$\eta < 1$: rendimento della pompa

Si possono distinguere tre tipi di moto: a. moto laminare, filetti che scorrono gli uni sugli altri senza mescolamento sviluppato
 b. moto di Transizione, nasce un moto di agitazione con fluttuazioni disordinate e casuale → turbolenza
 c. moto turbolento, disordinato e casuale → turbolenza



Il tipo di moto è valutabile dal numero di Reynolds: $N_{Re} = \frac{\text{Forze d'inerzia}}{\text{Forze viscosi}}$

Per condotte circolari

$$N_{Re} = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{v D}{\nu}$$

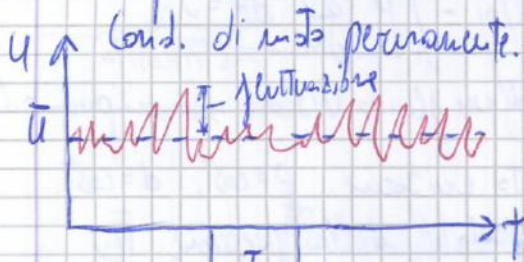
a. Moto laminare $N_{Re} < 2000/2500$ conviene utilizzare l'eq. di Navier

$$\bar{G} + \bar{I} + \bar{\Pi} + \bar{M} - \bar{N} - \int_A \mu \frac{d\bar{u}}{dx} dA = 0$$

(valori di velocità misurabili istantanei)

b. Moto turbolento: $Q, A \Rightarrow v = \frac{Q}{A}$, la velocità non è più istantanea quindi non è più possibile utilizzare l'eq. di Navier.

Componenti di $\bar{u}(u, v, w)$



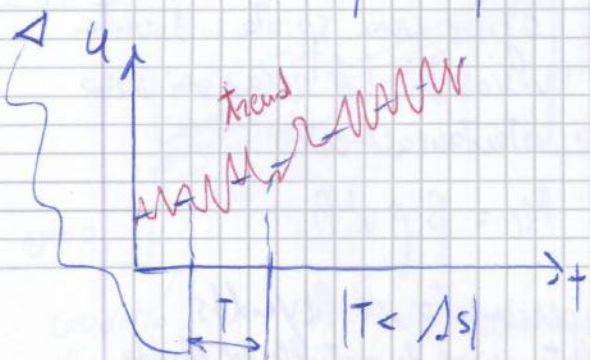
$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt$$

vel. istantanea

$u = \bar{u} + u'$ scostamento dato dalla fluttuazione
 vel. media

Si individua una velocità media \bar{u} , e ad essa si sommano delle fluttuazioni
 T: tempo caratteristico, è sufficiente per individuare \bar{u} .

(NB T deve essere piccolo per non perdere la descrizione della fluttuazione)



Cond. di moto non permanente. La velocità media ha un trend con fluttuazioni locali che si sommano per ricavare i valori istantanei.

$$u = \bar{u} + u'$$

$$u' = u_A - u_B \Rightarrow m(u_j - u_{in}) = \rho V' dA dt \cdot (-u') = -\rho u' v' dA dt$$

$$\bar{F} \cdot dt = m d\bar{u} \quad \bar{F} = -\frac{\rho u' v' dA dt}{dt} = -\rho u' v' dA$$

Sfuerzo di tipo turbolento $\frac{\bar{F}}{A} = -\rho u' v'$

Nel moto turbolento: $\frac{1}{T} \int_0^T \textcircled{1} dt = 0$ oppure $\frac{1}{T} \int_0^T \textcircled{2} dt = 0$

①: $\bar{G} + \bar{\Pi} + \bar{I} + \bar{M}_e - \bar{M}_u = 0$ fluido perfetto

②: $\bar{G} + \bar{\Pi}_p + \bar{I} + \bar{M}_e - \bar{M}_u - \mu \int \frac{d\bar{u}}{dn} dA = 0$ fluido viscoso

Concentratici sulla ② si analizza l'integrale di ogni termine:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left[\bar{G} + \bar{\Pi}_p + \bar{I} + \bar{M}_e - \bar{M}_u - \mu \int \frac{d\bar{u}}{dn} dA \right] dt = 0$$

$$\bar{\Pi}_p \rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T \bar{\Pi}_p dt = \frac{1}{T} \int_0^T \int_A p \cdot \bar{n} \cdot dA \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T \int_A (\bar{p} + p') \cdot \bar{n} \cdot dA \cdot dt =$$

$$= \int_A \left[\frac{1}{T} \int_0^T (\bar{p} + p') dt \right] \cdot \bar{n} \cdot dA = \int_A \left[\frac{1}{T} \int_0^T \bar{p} dt + \frac{1}{T} \int_0^T p' dt \right] \cdot \bar{n} \cdot dA =$$

$$= \int_A p \cdot \bar{n} \cdot dA = \bar{\Pi}_p$$

\bar{M} Termine dei flussi di quantità di moto $\rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T \bar{M} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \int_A \rho \bar{u} u_n dA dt$
 (M_e, M_u analogo)

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \int_A \rho \cdot (\bar{u} + u') \cdot (\bar{u}_n + u'_n) dA dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \int_A \rho (\bar{u} \cdot \bar{u}_n + \bar{u} \cdot u'_n + \bar{u}' \cdot \bar{u}_n + \bar{u}' \cdot u'_n) dA dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \int_A \rho (\bar{u} \cdot \bar{u}_n + \bar{u}' \cdot u'_n) dA dt = \int_A \left(\frac{1}{T} \int_0^T \rho \bar{u} \bar{u}_n dt + \frac{1}{T} \int_0^T \rho \bar{u}' u'_n dt \right) dA$$

$$= \int_A (\rho \bar{u} \cdot \bar{u}_n + \rho \bar{u}' u'_n) dA = \int_A \rho \bar{u} \cdot \bar{u}_n dA + \int_A \rho \bar{u}' u'_n dA = \bar{M}_{\bar{u}} - \bar{M}_{u'} + \int_A \rho \bar{u}' u'_n dA$$

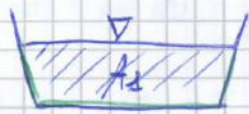
$$\Rightarrow \bar{G} + \bar{\Pi}_p + \bar{I}_{\bar{u}} + \bar{M}_{\bar{u}} - \bar{M}_{\bar{u}} + \int_A \rho \bar{u}' u'_n dA - \mu \int_A \frac{d\bar{u}}{dn} dA = 0$$

resistenze al moto



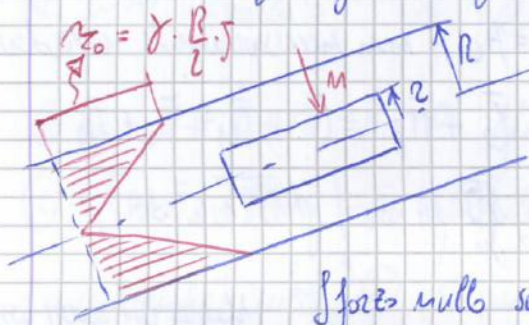
$$\tau = \gamma \cdot \frac{\pi R^2}{\pi D} \cdot J = \gamma \cdot \frac{D}{4} \cdot J$$

Per un condotto cilindrico il raggio idraulico è $R = \frac{D}{4}$



Vasca, raggio idraulico $R = \frac{A_1}{\text{Perimetro}}$ (È il perimetro bagnato dal fluido)
 lati a contatto col fluido

Andamento degli sforzi lungo la condotta circolare (moto uniforme)



$\tau = \tau(r)$: dipende dal valore del raggio

$$\tau = \gamma \cdot \frac{A_{base}}{Per} \cdot J = \gamma \cdot \frac{r}{2} \cdot J$$

$$\tau = 0 \text{ se } r = 0, \tau_{max} = \gamma \cdot \frac{R}{2} \cdot J \text{ se } r = R$$

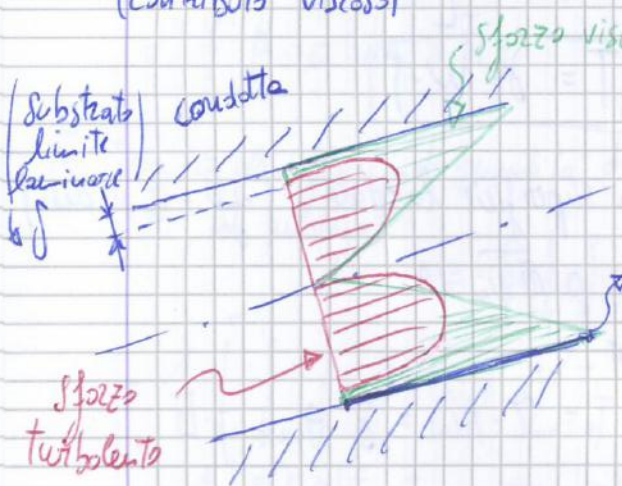
Sforzo nullo sull'asse e sforzo massimo su parete.

$$T = \tau \cdot A_{lat} = \int_{A_{lat}} \mu \cdot \frac{d\bar{u}}{dz} dA - \int_{A_{lat}} \rho \bar{u}'v' dA = \mu \cdot \frac{d\bar{u}}{dz} \cdot A_{lat} - \rho \cdot \overline{u'v'} \cdot A_{lat}$$

$$\Rightarrow \tau = \mu \cdot \frac{d\bar{u}}{dz} + \rho \overline{u'v'}$$

$$\rho \cdot \overline{u'v'} = 0 \Rightarrow \text{moto laminare}$$

verso opposto alla normale (-) contributo turbolento (-)
 (contributo viscoso)



Sulla parete lo sforzo è completamente di tipo viscoso, ciò significa che la turbolenza sulla parete è in ogni caso nulla.

strato o substrato limite laminare in cui $\mu' = 0$

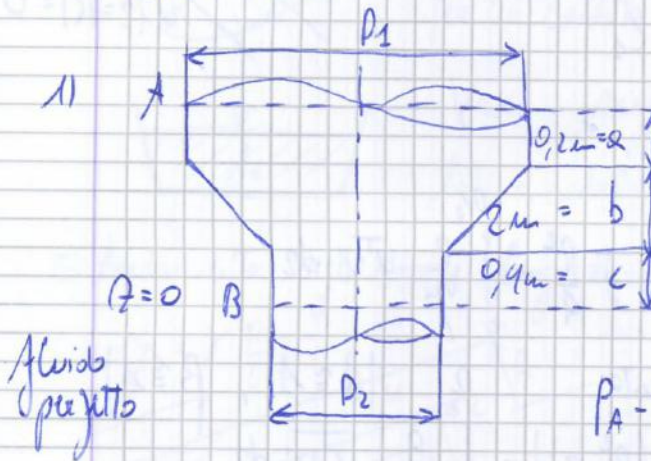
sezione di un tubo
 NB Tale lato non conta nel perimetro bagnato.

Andamento del profilo di velocità per moto uniforme in una condotta circolare.

$$\tau = \gamma \cdot \frac{r}{2} \cdot J = -\mu \cdot \frac{d\bar{u}}{dz} + \rho \overline{u'v'}$$

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = -\frac{\gamma}{\mu} \cdot \frac{r}{2} \cdot J + \frac{\rho}{\mu} \overline{u'v'} \Rightarrow \bar{u} = -\frac{\gamma}{\mu} \cdot \frac{r^2}{4} \cdot J + \int_0^r \frac{\rho}{\mu} \overline{u'v'} \cdot dz + C_1$$

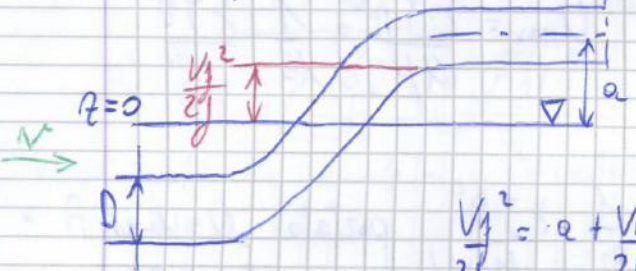
Esercitazione "Teorema di Bernoulli - fluidi perfetti"



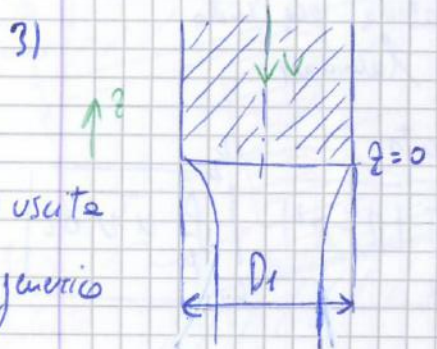
$D_1 = 0,4 \text{ m}$ $D_2 = 0,2 \text{ m}$
 $Q = 0,2 \text{ m}^3/\text{s}$ $\gamma = 9806 \text{ N/m}^3$
 $P_A - P_B = ?$ $\rightarrow d = 1$
 $H_A = H_B$ $z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g}$

$P_A - P_B = \left[-z_A - \frac{V_A^2}{2g} - \frac{V_B^2}{2g} \right] \cdot \gamma =$
 $= \gamma \cdot \left[-2,6 \text{ m} - \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{\pi D_1^4} - \frac{1}{\pi D_2^4} \right) \right] = -5284,7 \text{ Pa} \quad (P_A < P_B)$

2) Fluido perfetto $H_{\text{inven}} = H_{\text{uscita}}$ $V = 10 \text{ m/s}$ $D = 0,08 \text{ m}$ $a = 1 \text{ m}$
 $Q = ?$ efficienza del tubo



$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_u + \frac{P_u}{\gamma} + \frac{V_u^2}{2g}$
 $\frac{V_1^2}{2g} = a + \frac{V_u^2}{2g} \Rightarrow V_u = \sqrt{V^2 - 2ga} = 8,86 \text{ m/s}$
 $Q = A \cdot V_u = \frac{D^2}{4} \cdot \pi \cdot V_u = 0,0448 \text{ m}^3/\text{s}$



Forma della vena fluida all'uscita del rubinetto?
 $H = \text{cost.}$ fluido ideale $D = D(z)$
 $Q = Q_1 \Rightarrow N_1 \cdot \pi \frac{D_1^2}{4} = N \cdot \pi \frac{D^2}{4}$
 $\frac{D^2}{D_1^2} = \frac{N_1}{N} \Rightarrow D = D_1 \cdot \sqrt{\frac{N_1}{N}}$ $v^2 = v_1^2 + 2gz$

$H = H_1 \Rightarrow z + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} \Rightarrow N_1^2 = 2gz + v^2 = -2gz + v^2$

$\frac{N_1^2}{N^2} = 1 - \frac{2gz}{N^2} = \frac{N^2 - 2gz}{N^2} = \frac{N_1^2 + 2gz - 2gz}{N_1^2 + 2gz}$

$D = D_1 \cdot \left(\frac{N_1^2}{N_1^2 + 2gz} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow D = D_1 \cdot f\left(\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}}\right) \rightarrow$ il getto si contrae indefinitamente idealmente.

Si è legato al numero di Reynolds: $Re \uparrow \Rightarrow \downarrow$

- Velocità d'attrito (shear velocity): velocità fittizia dello sforzo tangenziale τ

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad \left[\frac{m}{s} \right]$$

parete $\begin{cases} \text{liscia: } Re_* = \frac{u_* \cdot \varepsilon}{\nu} < 5 \\ \text{scabra: } Re_* > 70 \end{cases}$

Per $5 < Re_* < 70$ si ha il passaggio graduale da una zona all'altra

- Teorema Π (di Buckingham): organizza nel modo migliore possibile le prove in laboratorio per i risultati sperimentali con un'analisi di tipo dimensionale, con delle variabili adimensionali.

Analisi dimensionale (massa, lunghezza, tempo... delle grandezze)

N : grandezze in gioco dimensionali

$$Q_1 = f(Q_2, Q_3, \dots, Q_N) \quad (Q_i \rightarrow \text{grandezza } i\text{-esima})$$

M : grandezze dimensionalmente indipendenti (Esempio per forze l, m, s tra loro $M=3$)

Si trova una relazione tra $N-M$ grandezze adimensionali

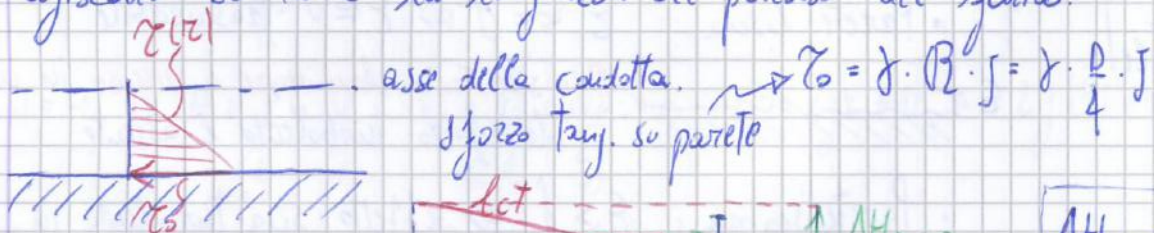
$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{N-M})$$

($\Pi_i \rightarrow$ grandezza adimensionale i -esima, la f si trova in laboratorio).

1+1 Vantaggi che offre $\Pi \Rightarrow$ si semplifica riducendo il numero di M grandezze

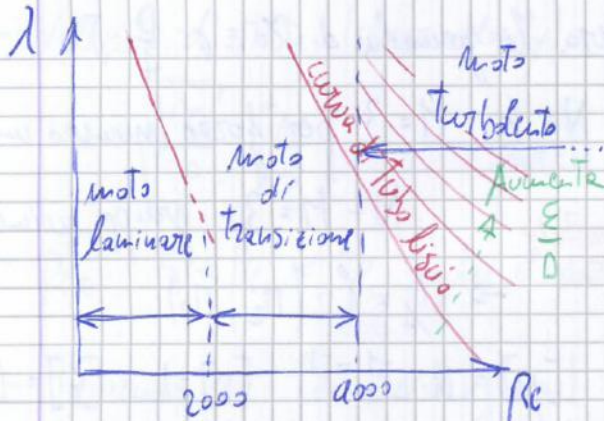
\Rightarrow si individuano i gruppi adimensionali significativi.

• Dissipazioni di energia di tipo distribuito \rightarrow sono distribuite lungo la parete del condotto a contatto con il fluido e agiscono su tutta la lunghezza del percorso del fluido.



J : pendenza dei carichi Totali (cadute pizzeometriche)

▢ Struttura del diagramma di Moody



Moto laminare: la scabrezza relativa non entra in gioco,

$$\lambda = \frac{D \cdot J}{\frac{U^2}{2g}} = \frac{64}{Re} = 64 \cdot \frac{\mu}{\rho U D}$$

$$J = \lambda \cdot \frac{U^2}{2gD} = \frac{64 \cdot \mu}{\rho U D} \cdot \frac{U^2}{2gD} = 32 \cdot \frac{\mu U}{g D^2}$$

⇒ velocità $U = J \cdot \frac{g D^2}{32 \mu}$

↳ indipendente da scabrezza

(a) Tubo liscio $\lambda = \lambda(Re, \frac{\epsilon}{D})$

$$\lambda = 0,316 \cdot Re^{-0,25}$$

(b) Tubo scabro (moto di transizione)

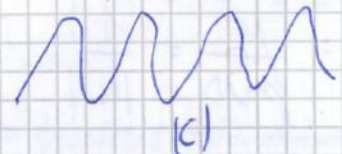
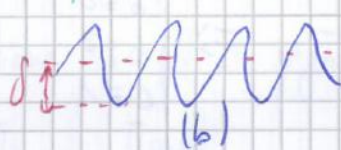
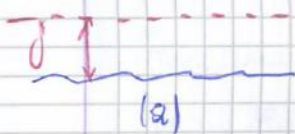
$$\lambda = \lambda(Re, \frac{\epsilon}{D})$$

(c) Tubo scabro (moto assolutamente turb.)

$$\lambda = \lambda(Re, \frac{\epsilon}{D})$$

--- -- -- -- --> Aumento Re

↳ indipendente da Reynolds



Cosa succede alle perdite di carico aumentando il numero di Reynolds:

Le caratteristiche del fluido μ, ρ e del condotto D, ϵ sono fisse, quindi un aumento

di velocità U del fluido implica l'aumento di Re $\left\{ \begin{array}{l} \lambda \text{ diminuisce} \\ \frac{U^2}{2g} \text{ aumenta} \end{array} \right.$

Ciò porta ad un evidente aumento delle perdite di carico (aumenta J).

• Legge di Colebrook-White (per tubo scabro) → moto di transizione

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2,5}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{\epsilon/D}{3,71} \right)$$

(Noti $Re, \frac{\epsilon}{D}$ si calcola λ e successivamente $J = \lambda \cdot \frac{U^2}{2g} \cdot \frac{1}{D}$)

(processo per iterazione nel calcolo di $D \rightarrow \lambda^{(1)} \rightarrow D^{(2)} \rightarrow \lambda^{(2)} \rightarrow D^{(3)} \rightarrow \dots D_{finale}$)

$$h_{s1} - h_{s2}$$

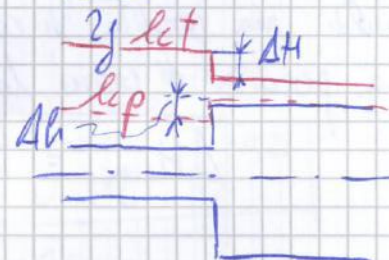
$$\left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma} \right) = \frac{U_2}{g} (U_2 - U_1)$$

Se $U_2 < U_1$ il fluido rallenta a causa dell'allargamento
 $\Rightarrow h_2 > h_1$, aumenta il carico piezometrico

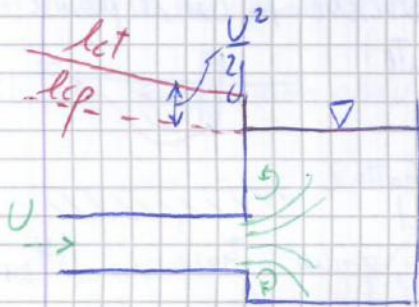
La perdita di carico concentrata risulta: $\Delta H_{conc.} = H_1 - H_2 = h_{s1} + \frac{U_1^2}{2g} - \dots - \left(h_{s2} + \frac{U_2^2}{2g} \right) = (h_{s1} - h_{s2}) + \frac{U_1^2 - U_2^2}{2g} = \frac{U_2}{g} (U_2 - U_1) + \frac{U_1^2 - U_2^2}{2g} = \dots$

$$= \frac{U_1^2}{g} - \frac{U_1 \cdot U_2}{g} + \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} = \frac{2U_1^2 - 2U_1 \cdot U_2 + U_1^2 - U_2^2}{2g} = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g}$$

$\Rightarrow \Delta H_{conc.} = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g}$ per brusco allargamento

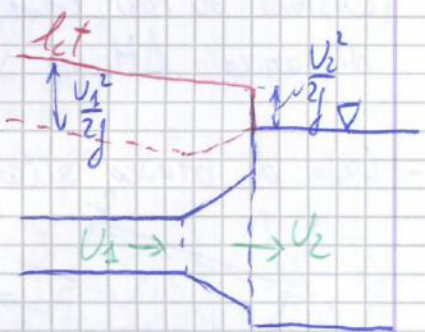


Stacco in una condotta $U = U_1, U_2 \rightarrow 0$



$$\Delta H = \frac{U^2}{2g}$$

Tutta l'energia cinetica del fluido viene interamente dissipata

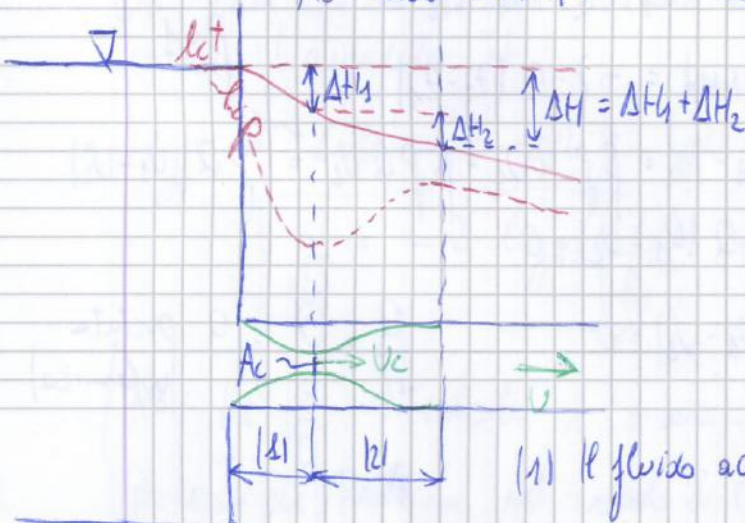


Se si vuole diminuire ΔH si riduce la velocità del fluido all'imbarco, introducendo una variazione di diametro.

$U_2 < U_1 \Rightarrow \Delta H = \frac{U_2^2}{2g}$ la perdita di carico è minore rispetto al caso precedente.

- Caso di brusco restringimento (perdite di imbocco)

A_c : area contratta $C_c = \frac{A_c}{A} \approx 0,61$



(1): analogia con i processi di efflusso \rightarrow (in assenza di perdite di carico:

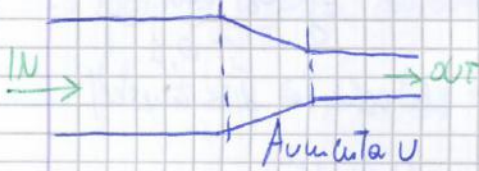
$$U_{TORR} = \sqrt{2g \cdot \Delta h}$$

(1) il fluido accelera

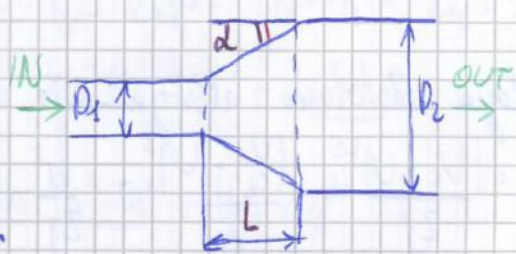
(2) il fluido decelera

- Condotti convergenti / divergenti (ugelli)

Condotta convergente $\Delta H \approx 0$



Condotta divergente $\Delta H > 0$



Per il condotto divergente $\Delta H > 0$ con $\Delta H < \Delta H_{con}$ con brusco allargamento

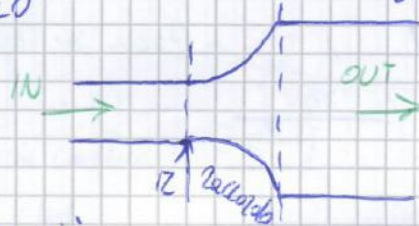
α : angolo di apertura, L : lunghezza

La forma che minimizza le perdite di carico è quella raccordata $\Delta H \approx 0$

$$\Delta H = k \cdot \frac{v^2}{2g}$$

$$k = k \left(\frac{D_2}{D_1}, \alpha \right)$$

- Formule empiriche (per perdite distribuite)



Obiettivo: calcolo ΔH_{dist} in modo più semplice, sono formule che sono valide solo per il moto assolutamente turbolento (fase di transizione esclusa).

• Formula di Darcy:

$$J = \beta \cdot \frac{Q^2}{D^5}$$

J : cadute o pendenza di carichi totali

coeff. β $\left\{ \begin{array}{l} m=5 \Rightarrow \beta = f(\text{scabrezza, diametro}) \\ m=5,333 \Rightarrow \beta = f(\text{scabrezza}) \end{array} \right.$

• Formule di Chezy:

$$J = \frac{v^2}{C^2 R}$$

$R = \frac{D}{4}$ per sezioni circolari
legato alle scabrezza

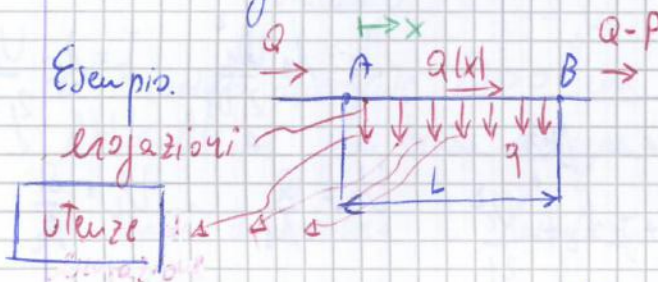
Per ricavare il coefficiente C : legge di Strickler $C = k_s \cdot R^{\frac{1}{6}}$, $\left[k_s = \frac{1}{m} \right]$

formula di Manning $C = \frac{1}{m} \cdot R^{\frac{2}{3}}$

Se $k_s \uparrow$ o $m \downarrow \Rightarrow$ scabrezza aumenta \uparrow (Legge di Darcy \equiv Legge di Chezy)

$$J = \beta \frac{Q^2}{P^n}$$

- Per il calcolo di J vengono utilizzate formule empiriche semplificative
- Le reti servono più utenze, quindi l'erogazione del fluido avviene in più punti in maniera distribuita. La portata Q da un punto della rete ad un altro è variabile, per cui si semplifica erogazioni distribuite \equiv erogazioni puntuali

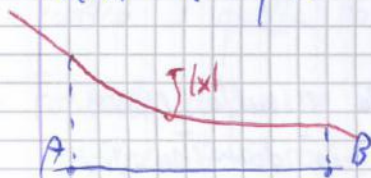


A, B: nodi
 AB condotta che si allaccia ad una serie di utenze.

P : prelievo del fluido che avviene su AB in modo distribuito
 $q = \frac{L}{L} \left[\frac{L}{L} \cdot \dots \right]$
 la caduta non è lineare

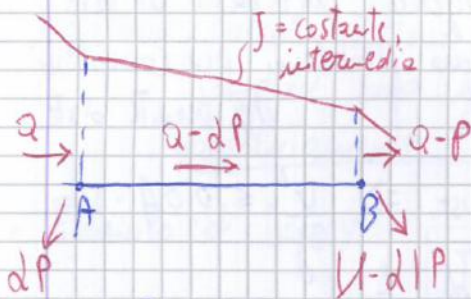
$$Q(x) = Q - q \cdot x$$

$$J(x) = \beta \cdot \frac{Q(x)^2}{D^5}$$



$$H_A - H_B = \int_0^L J(x) dx \dots \text{situazione elaborosa (A)}$$

\Rightarrow si passa ad una situazione equivalente. Si immagina di concentrare l'erogazione di portata in parte in A, in parte in B. (B)



Ripartizione d : valore di ripartizione della portata, la J è intermedia.

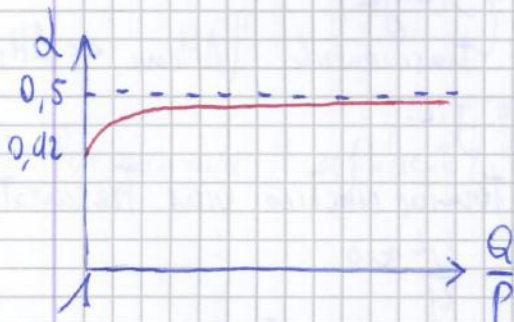
L'importante è che J dia lo stesso valore delle perdite di carico nel caso precedente.

$$H_A - H_B = \int_0^L J(x) dx$$

$$H_A - H_B = J \cdot L = \beta \cdot \frac{(Q - dP)^2}{D^5} \cdot L$$

con $(A) = (B)$ si ricava il valore fittizio di $d \Rightarrow d = d \left(\frac{Q}{P} \right)$

$d = 0,42 \rightarrow 0$ si eroga tutta la portata
 (in genere $d \approx 0,5$)



È viene ripartita la portata metà in A e metà in B
 erogazione uniforme del fluido

INB La verifica e la progettazione delle condotte è riferita a condizioni di moto assolutamente turbolento \rightarrow le perdite $J = \beta \cdot \frac{Q^2}{D^5}$

Eq. utili ① $Q_1 = Q_2 + Q_3$

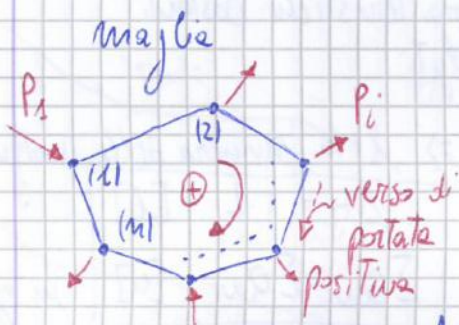
② $H_1 - H_U = \beta_1 \frac{Q_1^2}{D_1^5} \cdot L_1 = k_1 \cdot Q_1^2$

③ $H_U - H_2 = k_2 \cdot Q_2^2$

④ $H_U - H_3 = k_3 \cdot Q_3^2$

Il sistema è determinato. Nel caso la risoluzione risulta impossibile bisogna modificare il verso di Q_2 (cambiano la ② e la ③)
 Sistema impossibile $Q_2 \uparrow \Rightarrow Q_2 \downarrow$

☐ Metodo di Hardy-Cross : metodo semplificato di tipo iterativo per reti a maglie (per problemi di verifica)



Si sceglie il verso di percorrenza α (+)
 $Q > 0$ se concorde, $Q < 0$ se discorde

Perdite di carico $\Delta H = \beta \cdot \frac{Q^2}{D^5} \cdot L = k \cdot Q^2$
 espresse come

$H_i - H_{i+1} = k_i \cdot Q_i \cdot |Q_i|$

$\Delta H = 0$ se partito da un nodo e ritorno allo stesso nodo.

$$\begin{cases} H_1 - H_2 = k_1 Q_1 |Q_1| \\ H_2 - H_3 = k_2 Q_2 |Q_2| \\ \vdots \\ H_n - H_1 = k_n Q_n |Q_n| \end{cases}$$

Somma delle perdite $\sum k_i Q_i |Q_i| = 0 \Rightarrow f(Q_i) = 0$

Si ipotizzano i valori di portata all'interno della rete (\tilde{Q}_i : valori scelti)

\tilde{Q}_i devono essere coerenti con l'equazione di continuità... $P_1 = P_2 + P_n$

Q_i (vera) = \tilde{Q}_i (scelta) + ΔQ (correzione) \rightarrow è la stessa per tutte le condotte

$\sum k_i (\tilde{Q}_i + \Delta Q) \cdot |\tilde{Q}_i + \Delta Q| = 0$

Δ sola correzione per ogni maglia. (ΔQ incognita)

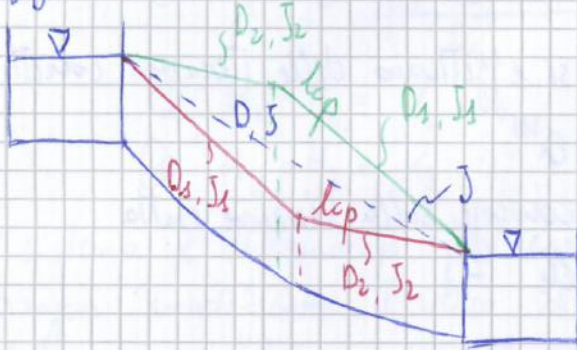
Linearizzazione dell'equazione

$f(\tilde{Q}_i + \Delta Q) = 0 \rightarrow f(\tilde{Q}_i) + f'(\tilde{Q}_i) \cdot \Delta Q \approx 0$

(Analogia $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x$, valida se Δx piccola)

$$\begin{cases} \Delta H = J_1 \cdot L_1 + J_2 \cdot L_2 \\ L = L_1 + L_2 \end{cases} \Rightarrow L_1, L_2 \text{ noti: si può realizzare la condotta.}$$

- Effetto dell'ordine di D_1 e D_2 ($J_1 > J_2$) (preferibile)

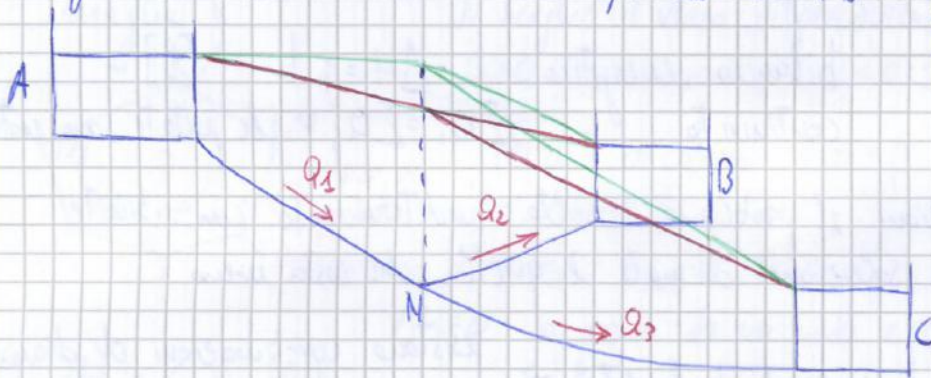


$D_1 \rightarrow D_2$ piezometrica al di sotto più bassa (pressioni più basse)
 $D_2 \rightarrow D_1$ piezometrica al di sopra (per pressioni più alte)

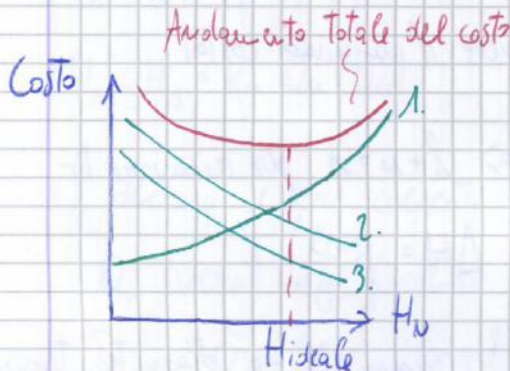
Nel caso di pressioni minime per evitare tratti in depressione che assorbano materiale da esterno nelle perdite è preferibile.

- Esempio 3 serbatoi
 $l=3, m=1 \Rightarrow l+m=4$
 Incognite: D_1, D_2, D_3, H_U

Aumentando $H_U \Rightarrow J_1 \downarrow, J_2 \uparrow, J_3 \uparrow$
 $D_1 \uparrow, D_2 \downarrow, D_3 \downarrow$



- Costo delle condotte al variare del carico



Passività della rete: spesa annuale per mantenere un impianto funzionante

Passività complessiva (€/anno) P_{TOT}

$$P_{TOT} = P_{IMPIANTO} + P_{ENERGIA}$$

$L_0 = 0$ senza sistemi di pompaggio

$$P_{IMPIANTO} = \pi \cdot C_{IMP}$$

π : tasso annuale $[\frac{1}{anno}]$ dipende da manutenzione, spese di ammortamento dell'impianto, interessi

C_{IMP} : costo dell'impianto [€]

P_{IMP} : passività dell'impianto

P_{EN} : passività dell'energia

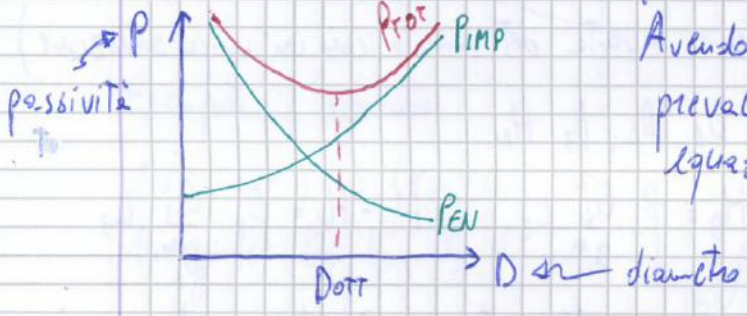
Obiettivo: rendere minima $P = \pi \cdot C_{IMP}$

costo dell'energia $\left[\frac{\text{€}}{\text{kwh}} \right]$ $\frac{\gamma \cdot Q \cdot H_p}{\eta} \left[\frac{\text{kwh}}{\text{anno}} \right]$ $T \left[\frac{\text{h}}{\text{anno}} \right]$

$PEN = |CEN| \cdot |POTENZA\ EFFETTIVA| \cdot |ORE\ DI\ FUNZIONAMENTO\ ANNUO|$

$PEN = CEN \cdot \frac{\gamma \cdot Q \cdot H_p}{\eta} \cdot T \Rightarrow PEN = \frac{CEN \cdot \gamma \cdot Q \cdot T}{\eta} \left(\Delta H_g + \beta \cdot \frac{Q^2}{D^5} \cdot L \right)$

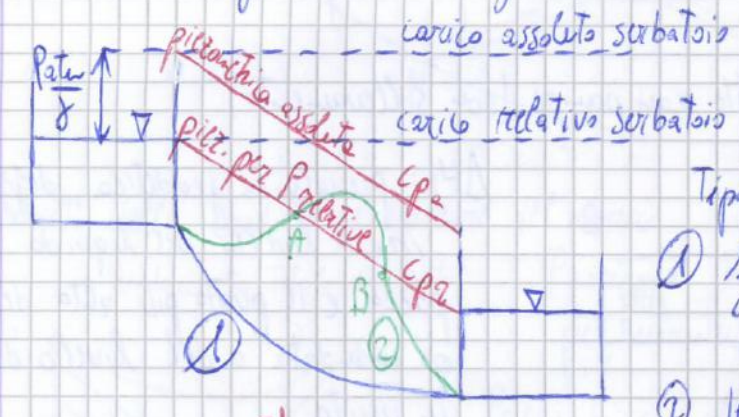
Aumentando il diametro $D \Rightarrow P_{imp} \uparrow, PEN \downarrow$. Per ricavare il diametro ottimale per l'impianto, dal grafico inserendo P_{imp} e PEN per D si ricava P_{TOT} e quindi $D_{OTTIMALE}$



Avendo calcolato D_{OTT} , si trova la prevalenza della pompa dalla prima equazione $\Rightarrow H_p$

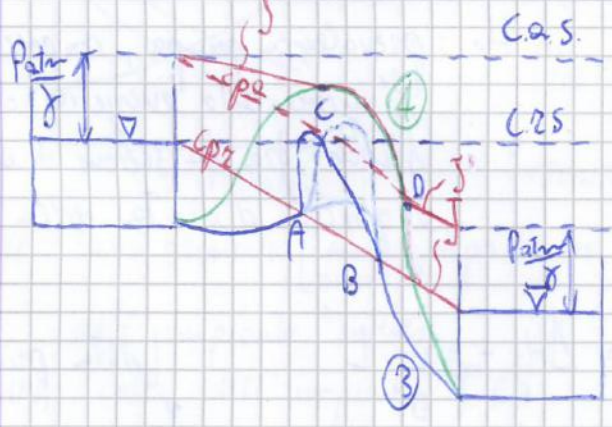
Potenza della pompa: $\frac{\gamma \cdot Q \cdot H_p}{\eta}$

▣ Problemi altimetrici: la quota della condotta, oltre un livello critico, influisce sul deflusso esterno



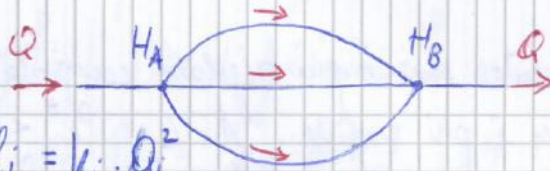
$P_{rel} = P_{ass} - P_{atm} = P^* - 101325 Pa$

- Tipologie di condotta ①, ②, ③, ④
- ① funzionamento normale $Q \leftrightarrow \Delta H = \beta \cdot \frac{Q^2}{D^5} \cdot L$
 - ② Il tratto AB è in depressione, per il resto il funzionamento è normale. Si preferisce evitare AB
 - ③ Funzione come il caso precedente con l'unica differenza che serve un inverso per la condotta. Il liquido si ferma sulla linea dei carichi relativi e una volta che c'è contatto tra i serbatoi il fluido si muove da solo per gravità.



Analogia con elettrotecnica

- Condotte in parallelo

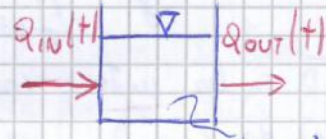


$$H_A - H_B = J_i \cdot l_i = \beta_i \frac{Q_i^2}{D_i^5} l_i = k_i \cdot Q_i^2$$

$$Q_i = \sqrt{\frac{H_A - H_B}{k_i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k_i}} \Rightarrow Q = \sum_i Q_i = \sum_i \sqrt{\frac{H_A - H_B}{k_i}} = \sqrt{H_A - H_B} \cdot \sum_i \frac{1}{\sqrt{k_i}}$$

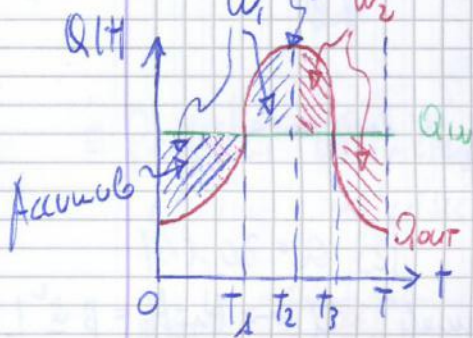
$$\Rightarrow Q = \sqrt{H_A - H_B} \cdot \left(\sum_i \frac{1}{k_i} \right)$$

▣ Serbatoi, regolazione di portata



Capacità di compenso: volume necessario minimo per effettuare una regolazione di portata.

$W_s = ?$ volume necessario



Si supponga che $Q_{in} = \text{costante}$ e $Q_{out} = Q_{out}(t)$ periodica

$t_1 < t < t_2$ volume evaporato W_1

$t_2 < t < t_3$ volume evaporato W_2

$t_3 < t < T$ accumulo di W_2

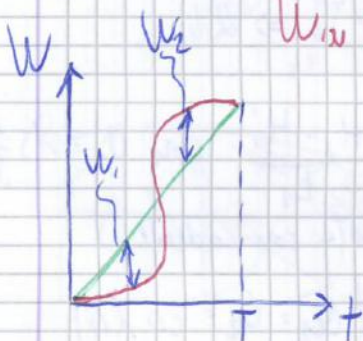
Capacità minima di compenso: $W_s = W_1 + W_2$

Eq. di continuità del serbatoio: $\frac{dW}{dt} = Q_{in}(t) - Q_{out}(t)$

$$\Rightarrow W(t) - W_0 = \int_0^t Q_{in}(t) dt - \int_0^t Q_{out}(t) dt$$

$W_{in}(t)$: volume entrato nel serbatoio da 0 a t

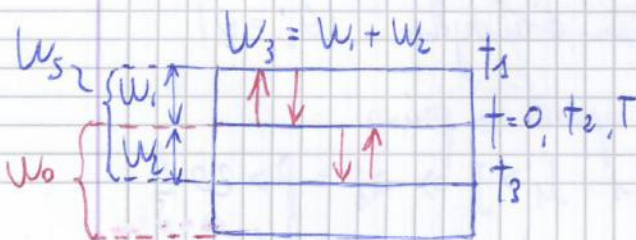
$W_{out}(t)$: volume uscito dal serbatoio da 0 a t.



$$W_1 = \max (W_{in} - W_{out})$$

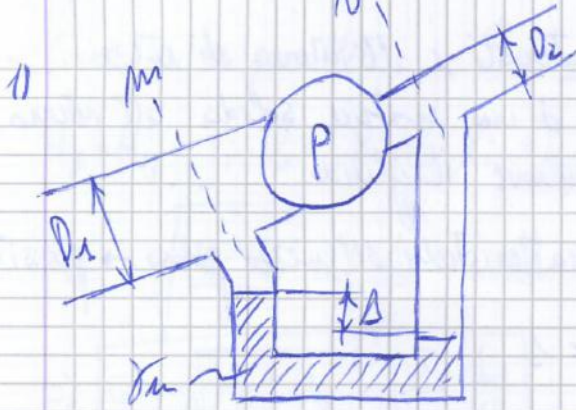
$$W_2 = |\min (W_{in} - W_{out})|$$

$t=0 : W_0 \geq W_2$, è presente una capacità minima già nel serbatoio.



Al ciclo è periodica: il serbatoio rimane stabile.

Esercitazione "Macchine idrauliche e fluidi reali"



$\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 133362 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$ $Q = 0,05 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$

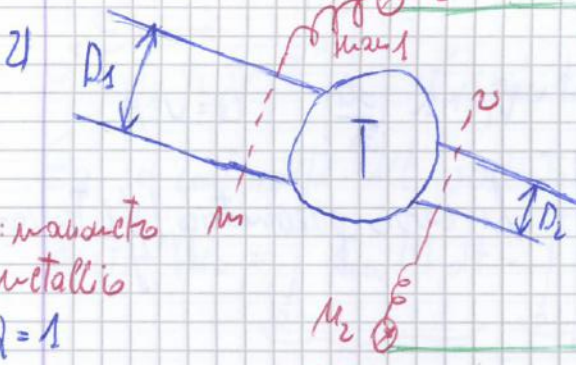
$D_2 = 0,2 \text{ m}$ $D_1 = 0,25 \text{ m}$
 $\Delta = 0,3 \text{ m}$ $\eta = 0,75$

Richiesta: potenza da fornire alla pompa
 $W = \frac{P_{\text{ceduta}}}{\eta} = ?$ $P_{\text{ced}} = \gamma \cdot Q \cdot (H_0 - H_m)$

Con $d=1$: $H_0 - H_m = z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} - z_m - \frac{p_m}{\gamma} - \frac{v_m^2}{2g} = \dots$ $Q = v \cdot A$
 $\dots = h_{00} - h_{m0} + \frac{Q^2}{2gA_0^2} - \frac{Q^2}{2gA_m^2}$ $h_{00} - h_{m0} = \Delta \cdot \left(\frac{\gamma_{\text{H}_2\text{O}} - \gamma}{\gamma} \right)$
 $\Rightarrow H_0 - H_m = \Delta \cdot \left(\frac{\gamma_{\text{H}_2\text{O}} - \gamma}{\gamma} \right) + \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{A_0^2} - \frac{1}{A_m^2} \right)$

$3,7800 \text{ m} + 0,00145 \text{ m} = 3,78 \text{ m}$ $A_0 = \pi \frac{D_2^2}{4} = 0,0314 \text{ m}^2$
 $A_m = \pi \frac{D_1^2}{4} = 0,0491 \text{ m}^2$

$P_{\text{ced}} = \gamma \cdot Q \cdot (H_0 - H_m) = 1853,3 \text{ W} \Rightarrow W = \frac{P_{\text{ced}}}{\eta} = 2,47 \text{ kW}$



$D_1 = 1 \text{ m}$ $D_2 = 0,1 \text{ m}$ $Q = 3 \text{ m}^3/\text{s}$
 $M_1 = 38 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 3,72 \text{ MPa}$ $Q = 3 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$
 $M_2 = 0,5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 48 \text{ kPa}$ $W = 5000 \text{ kW}$
 $\eta_{\text{turbine}} = ?$ $W = \gamma \cdot \frac{(H_m - H_0)}{\gamma} \cdot Q$

man: manometro
 metallico
 $d=1$

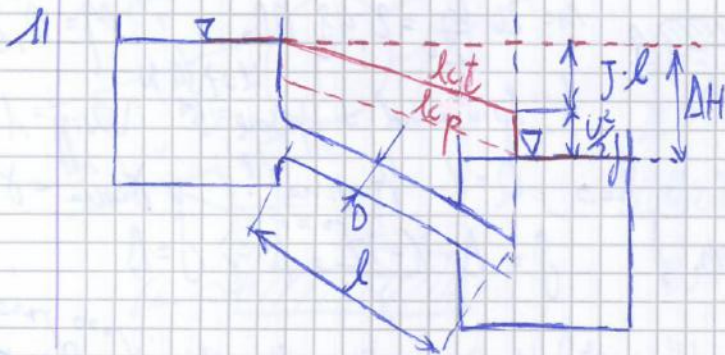
$\eta = \frac{\gamma \cdot (H_m - H_0) \cdot Q}{W}$ $H_m - H_0 = z_m + \frac{p_m}{\gamma} + \frac{v_m^2}{2g} - \left(z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} \right) = \dots$

$\dots = h_m - h_0 + \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{A_m^2} - \frac{1}{A_0^2} \right) = \dots$ $A_m = \pi \frac{D_1^2}{4} = 0,785 \text{ m}^2$
 $= 377,36 \text{ m} - 58,28 \text{ m} = 319,08 \text{ m}$ $A_0 = \pi \frac{D_2^2}{4} = 0,00785 \text{ m}^2$

$\eta = \frac{\gamma \cdot (H_m - H_0) \cdot Q}{W} = 0,8116$ $h_m = z_{m1} + \frac{M_1}{\gamma} = 382,35 \text{ m}$
 $h_0 = z_{02} + \frac{M_2}{\gamma} = 4,93 \text{ m}$
 $\Delta = 0$

(In realtà $\eta = 1,23 \Rightarrow$ impossibile, qualche dato è errato!)

Esercitazione "Perdite di carico distribuito"



$D = 0,1 \text{ m}$ $l = 10 \text{ m}$ $\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
 $\mu = 10^{-3} \text{ N} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$
 $\nu_{H_2O} = 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ $\epsilon = 0 \Rightarrow \text{tubo liscio}$
 $Q = 28 \text{ l/s}$ $\Delta H = ?$

$U = \frac{Q}{A} = 3,56 \text{ m/s}$

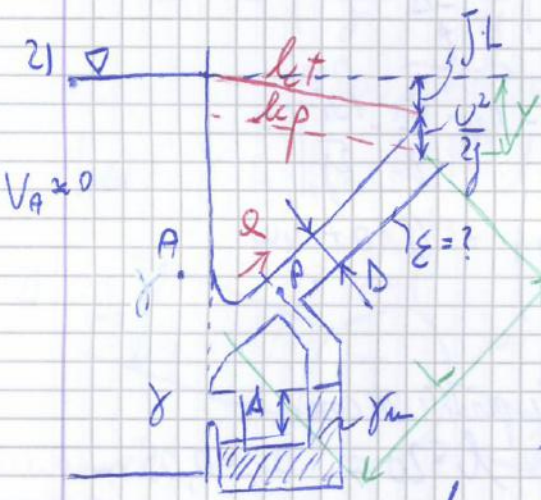
$Re = \frac{U \cdot D}{\nu} = 3,56 \cdot 10^5$ turbolento

Per tubo liscio: $\lambda = 0,316 \cdot Re^{-0,25} = 0,013$

$Q = 0$

$\Delta H = j \cdot l + \frac{U^2}{2g} = \lambda \cdot \frac{U^2}{2gD} \cdot l + \frac{U^2}{2g}$

$\Rightarrow \Delta H = 0,75 \text{ m}$



$D = 0,025 \text{ m}$ $L = 5 \text{ m}$ $\Delta = 0,01 \text{ m}$
 $\gamma = 1 \text{ m}$ $\nu = 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ $\gamma = 3806 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$
 $\gamma_m = 123300 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$ $Q = ?$ $\epsilon = ?$

$H_A \approx H_P$ su brevi distanze le perdite di carico sono nulle.

$h_A - h_P = \Delta \cdot \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} = 0,12 \text{ m}$

$h_A + \frac{V_A^2}{2g} = h_P + \frac{V_P^2}{2g} \Rightarrow V_P^2 = \sqrt{(h_A - h_P) \cdot 2g} = 1,53 \text{ m/s}$

$Q = V_P \cdot \pi \frac{D^2}{4} = 0,75 \frac{\text{l}}{\text{s}}$

$y = j \cdot L + \frac{U^2}{2g}$

$j = \frac{y - \frac{U^2}{2g}}{L} = 0,176$

$j = \lambda \cdot \frac{U^2}{2gD} \Rightarrow \lambda = \frac{j \cdot 2gD}{U^2}$

più è alta ϵ e più basso sarà il valore di λ cinematico

$\lambda = 0,036$

$Re = \frac{U \cdot D}{\nu} = 3,8 \cdot 10^4$

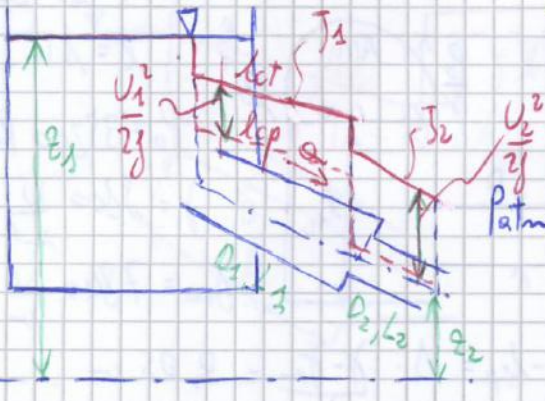
Da Moody: $\frac{\epsilon}{D} \approx 0,008$

$\epsilon = 0,008 \cdot D = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$
 $= 0,2 \text{ mm}$

Per scabrezza ϵ : incidono il materiale della condotta, la sua usura e i fenomeni d'instabilità

Esercitazione "Perdite di carico concentrate"

1)



$\epsilon_1 = 10 \mu m$ $\epsilon_2 = 5 \mu m$ $L_1 = 45 m$
 $L_2 = 25 m$ $D_1 = 470 mm$ $D_2 = 300 mm$
 $Q = ?$ (Tubi nuovi in acciaio)
 $n = 5$ $J = \beta \cdot \frac{Q^2}{D^5}$

$\Delta H_{\text{borsa restringimento}} = k \cdot \frac{U^2}{2g}$

D_2/D_1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
k	0,48	0,45	0,42	0,386	0,36	0,32	0,24	0,17	0,08	0

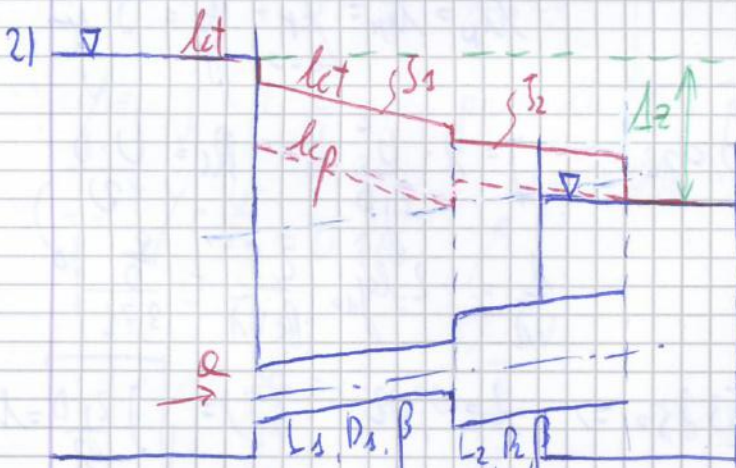
$\Rightarrow \frac{D_2}{D_1} = 0,63$ $k = 0,20$

$\beta = \frac{a+b}{D}$ con $a = 1,64 \cdot 10^{-3}$ \Rightarrow scabrezza $\beta_1 = \frac{a+b}{D_1} = 1,73 \cdot 10^{-3} \frac{s^2}{m}$
 $b = 4,62 \cdot 10^{-5}$ $\beta_2 = \frac{a+b}{D_2} = 1,78 \cdot 10^{-3} \frac{s^2}{m}$

Perdite di carico compressive: $H_{in} - H_{out} = \sum (\Delta H_{conc.} + \Delta H_{dist.})$

$\epsilon_1 - \left(\epsilon_2 + \frac{U_2^2}{2g} \right) = \beta_1 \cdot \frac{Q^2}{D_1^5} \cdot L_1 + \beta_2 \cdot \frac{Q^2}{D_2^5} \cdot L_2 + \frac{U_1^2}{2g} + k \cdot \frac{U_2^2}{2g}$

$\epsilon_1 - \epsilon_2 = \beta_1 \frac{Q^2}{D_1^5} L_1 + \beta_2 \frac{Q^2}{D_2^5} L_2 + \frac{Q^2}{2gA_1^2} + \frac{Q^2}{2gA_2^2} + k \frac{Q^2}{2gA_2^2}$ perdite all'imbocco
 $\Rightarrow Q^2 (\beta_1 \dots) = \epsilon_1 - \epsilon_2 \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{(\beta_1 \dots)}} = 0,033 \frac{m^3}{s}$



$\Delta z = 1,2 m$ $L_1 = 5 m$ $L_2 = 10 m$
 $D_1 = 0,125 m$ $D_2 = 0,2 m$
 $\beta = 0,0013 \frac{s^2}{m^4}$ $Q = ?$

$J = \beta \cdot \frac{Q^2}{D^{5,33}}$ $A_1 = \pi \frac{D_1^2}{4}$
 $A_2 = \pi \frac{D_2^2}{4}$

$H_{in} - H_{out} = \sum H_{perdite}$

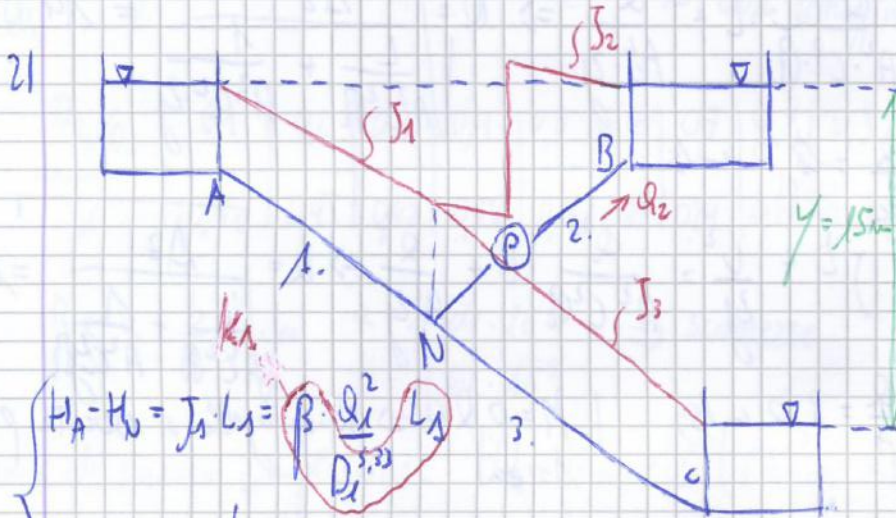
$\Rightarrow \Delta z = 0,5 \frac{Q^2}{2gA_1^2} + \beta \frac{Q^2}{D_1^{5,33}} L_1 + \beta \frac{Q^2}{D_2^{5,33}} L_2 + \left(\frac{Q^2}{A_1^2} - \frac{Q^2}{A_2^2} \right) \frac{1}{2g} + \frac{Q^2}{A_2^2 \cdot 2g} \Rightarrow Q = 0,033 \frac{m^3}{s}$

$$\begin{cases} H_1 - H_2 = J_1 L_1 + J_2 L_2 \Rightarrow L_1 = 576 \text{ m} \\ L = L_1 + L_2 \Rightarrow L_2 = 624 \text{ m} \end{cases}$$

Per tubi nuovi si aggiunge una valvola di dissipazione

$$J_1' = \beta_m \frac{Q^2}{D_1^{5,33}} = 0,1 \quad J_2' = \beta_m \frac{Q^2}{D_2^{5,33}} = 0,05$$

$$H_1 - H_2 = J_1' \cdot L_1 + J_2' \cdot L_2 + \Delta H_v \Rightarrow \Delta H_v = 57 \text{ m}$$



$$J = \beta \frac{Q^2}{D^{5,33}} \quad \eta_p = 0,67$$

$$Q_2 = 35 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \quad \eta_p = ?$$

$$\beta = 0,0025 \text{ m}^{-2/3}$$

$$D_1 = 0,4 \text{ m} \quad D_2 = 0,3 \text{ m}$$

$$D_3 = 0,3 \text{ m}$$

$$L_1 = 800 \text{ m} \quad L_2 = 600 \text{ m}$$

$$L_3 = 800 \text{ m} \quad Q_3 = ?$$

$$H_A - H_N = J_1 \cdot L_1 = \beta \frac{Q_1^2}{D_1^{5,33}} L_1$$

$$H_N - H_C = k_3 \cdot Q_3^2$$

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

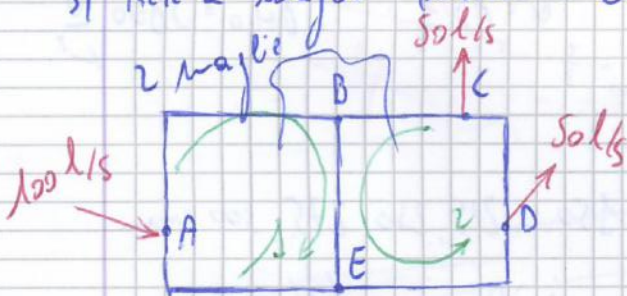
Soluzioni del sistema: $H_N = 11 \text{ m}$, $Q_1 = 135 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$

$$Q_3 = 100 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$H_B - H_N = H_p - J_2 L_2 \Rightarrow H_p = H_B - H_N + J_2 L_2 = 9,8 \text{ m} \quad H_B = 7$$

$$P = \frac{Q \cdot \gamma \cdot H_p}{\eta} = 2,5 \text{ kW}$$

3) Rete a maglie (metodo di Cross), stesso diametro stessa scabrezza nelle maglie.



$$L_{AB} = 400 \text{ m} \quad L_{BC} = 200 \text{ m} \quad L_{CD} = 500 \text{ m}$$

$$L_{DE} = 400 \text{ m} \quad L_{AE} = 300 \text{ m} \quad L_{BE} = 500 \text{ m}$$

$$\Delta H = k \cdot Q \cdot |Q| \quad k = \beta D^{-4} L$$

$$\Delta Q = - \frac{\sum k_i Q_i |Q_i|}{2 \sum k_i |Q_i|} = \frac{\sum l_i Q_i |Q_i|}{2 \sum l_i |Q_i|}$$

simplificazioni $k \propto \frac{L}{D^4}$ e la stessa

