



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1371A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Di Tullio

MATERIA: Impostazione Progettuale dell'Autoveicolo,
Prof. Vigliani

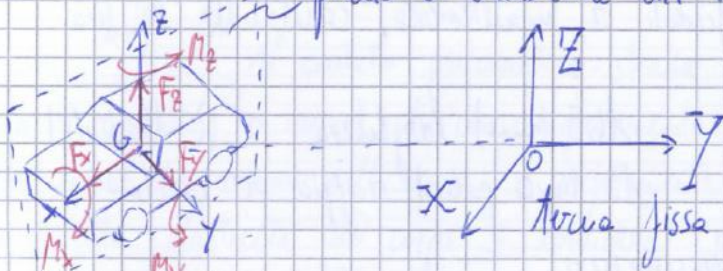
Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

IMPOSTAZIONE PROGETTUALE DELL'AUTOVEICOLO

Nello studio dinamico di un veicolo si definisce una terna di riferimento fissa:
 piano di simmetria del veicolo



Gradi di libertà per un corpo rigido nello spazio: 6 GDL

Terna corpo (in genere il suo punto di origine coincide con il baricentro del veicolo)
 Non trascurando l'effetto delle sospensioni elastiche sul comportamento del veicolo i gradi di libertà aumentano secondo la seguente logica:

- Rotazione delle ruote 1 GDL aggiunto
- Rotazione ruote + sterzo 2 GDL aggiunti
- Rotazione ruote + sterzo + smorzamento delle sospensioni 3 GDL aggiunti

In un caso reale i GDL totali possono arrivare fino a 14 GDL, per cui diventa quasi impossibile utilizzare un approccio fisico tradizionale per il calcolo dei vincoli del sistema.

Asse Z: asse d'imbardata, attorno a cui si ha il momento d'imbardata M_z

Asse Y: asse di beccheggio, attorno a cui si ha il momento M_y che genera il beccheggio del veicolo

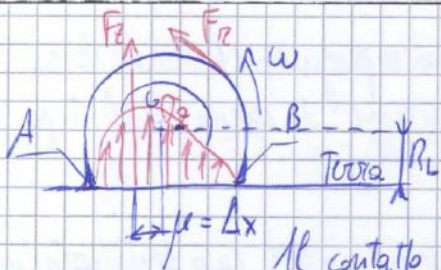
Asse X: asse di rollio, attorno a cui si ha il momento M_x che genera il rollio del veicolo

Nel moto rettilineo del veicolo si trascurano gli assi Z e Y, ma non il trasferimento di carico: durante una frenata il carico sull'asse anteriore cresce diminuendo il carico sull'asse posteriore. Durante una curva sarà considerato anche il trasferimento di carico laterale per la forza d'inerzia applicata ad un braccio.

Le grandezze fondamentali da considerare sono: - massa del veicolo. Può essere divisa in massa sospesa (spring mass) m_s che è formata da tutto ciò che è sopra le sospensioni (cassa, assi carrozzeria insieme al motore e a tutto il contenuto inclusi i passeggeri) e la massa non sospesa $m_{ns} = m_{tot} - m_s$ che comprende la coppia di ruote collegate da un assale rigido e ogni ruota comprende una sospensione indipendente.

Vale la relazione $m_s \approx 10 \cdot m_{ns}$, per cui l'influenza della massa non sospesa sull'inerzia del veicolo è proporzionalmente meno rilevante.

- Ruota del veicolo: comprende un elemento deformabile (lo pneumatico) con struttura composita con fibre intrecciate che costituiscono la carcassa e



Og distribuzione di pressione nel caso reale (scivacciamento della ruota)

A: deformazione d'entrata
 B: deformazioni d'uscita (dovuto a ritorno elastico)

Il contatto pneumatico-strada avviene su una superficie limitata, chiamata "area di contatto" (o soma). In un comportamento perfettamente elastico della ruota, la distribuzione di pressione nell'area è perfettamente simmetrica. Nel caso reale, a causa della non perfetta elasticità dei corpi si considera μ : parametro di attrito volvente ($= \Delta x$), a causa delle perdite interne del pneumatico, l'energia elastica non viene del tutto restituita.

F_N : forza normale F_T : forza di tipo tangenziale R_L : raggio del copertone sotto carico (load)
 Per mantenere in moto la ruota istanza un momento M_F applicato in G:

$$G \curvearrowright \quad M_F = F_N \cdot R_L + (-F_T) \cdot \mu \quad |F_T| = f \cdot F_N$$

f viene definito come coefficiente d'attrito volvente: $f = \frac{\mu}{R_L}$

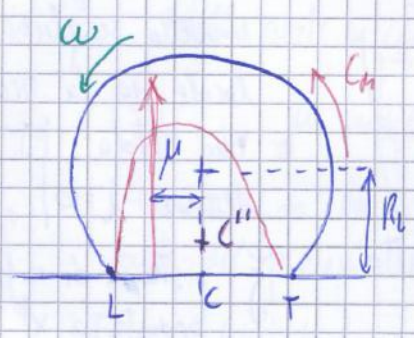
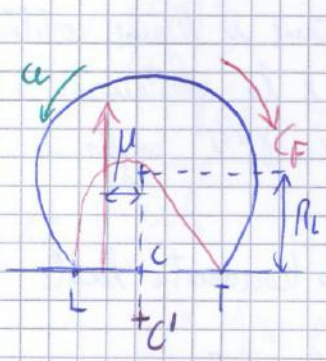
Si nota che oltre un certo valore di velocità chiamato "velocità critica", l'incremento che deve subire f per tenere lo pneumatico incollato al suolo segue la legge lineare:

$$f = f_0 + kV^2$$

f_0 : termine costante V : velocità di rotazione della ruota (entrambi sono coefficienti ricavabili a livello sperimentale)

Il modello coulombiano è introdotto per spiegare la possibilità delle ruote di trasmettere forze longitudinali. Il valore di f dipende solamente dal verso di rotazione di ω .

- Azioni di una coppia motrice (C_M (avviamento)) e di una coppia frenante (C_F (frenata))



Raggio sotto carico $R_L \approx 0,98 R_{eff}$

R_{eff} : raggio effettivo dello pneumatico

IT: zona d'impronta dello pneumatico (comprende lunghezza e larghezza)

Come è possibile osservare tra i due casi cambia la posizione del centro d'istantanea rotazione

C: centro teorico (puro rotolamento ideale) C': al di sotto di C (frenata)
 C'': al di sopra di C (partenza o avviamento)

V: velocità di alimentazione con cui le setole entrano nella superficie di contatto

$$V = \frac{d\xi}{dt} \Rightarrow V - v \left(\frac{d\xi}{d\xi} \right) = V - v \cdot R + V \cdot \frac{d\mu}{d\xi} = V \left[\left(\frac{V - vR}{V} \right) + \frac{d\mu}{d\xi} \right] = 0$$

Ammettendo che vi sia una relazione lineare tra deformazioni e sforzo longitudinale, su ogni tassello si può scrivere:

$$k \cdot \frac{V - vR}{V} = - \frac{d\mu}{d\xi} \Rightarrow \mu = \frac{\gamma(\xi)}{C_k} \quad (C_k: \text{rigidezza longitudinale del battistrada})$$

Si ottiene: $\frac{V - vR}{V} = - \frac{d\gamma(\xi)}{C_k \cdot d\xi}$ (* da $v(\xi) = 0$: presuppone che in un tratto dell'impreso del segmento del battistrada aderisca al manto stradale, presentando una velocità nulla)
 $\frac{d\gamma}{d\xi} = - C_k \cdot \left(\frac{V - vR}{V} \right) = - C_k \cdot k$ k : scorrimento longitudinale o pratico dello pneumatico. (chiamato anche con "s")

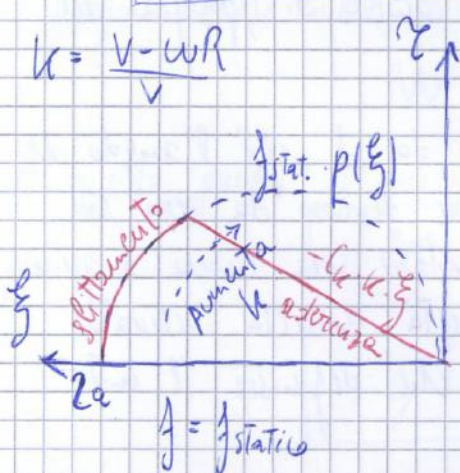
$\frac{d\gamma}{d\xi} = - C_k \cdot k$ Nel caso di scorrimento longitudinale nullo, $|k|=0$ le forze tangenziali che agiscono sul terreno deformando le setole sono nulle.

Il modello a spazzola è di tipo qualitativo, bisogna quindi ipotizzare una certa distribuzione di pressione nella zona di contatto.

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = - C_k \cdot k \cdot \int d\xi \Rightarrow \gamma(\xi) = \gamma_0 - C_k \cdot k \cdot \xi \quad \gamma_0: \text{deformazione iniziale in } 0 \text{ (sollecitazioni)}$$

La costante d'integrazione γ_0 è nulla perché la deformazione iniziale della setola è inesistente in quanto proviene da una zona non sollecitata, non in contatto con la strada. Per la validità del modello coulombiano vale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma(\xi) = - C_k \cdot k \cdot \xi \quad \text{nella parte in cui } \gamma(\xi) \leq f_{\text{statico}} \cdot p(\xi) \\ \gamma(\xi) = - f_{\text{dinamico}} \cdot p(\xi) \quad \text{in condizioni di slittamento (altrove)} \end{array} \right.$$



Aumentando lo scorrimento longitudinale k , la parte del pneumatico che slitta è ampliata.

Forza longitudinale risultante: $F_x = \int_0^{z_a} \gamma(\xi) d\xi$

Ruota motrice: $k < 0 \quad F_x > 0$

Ruota frenata: $k > 0 \quad F_x < 0$

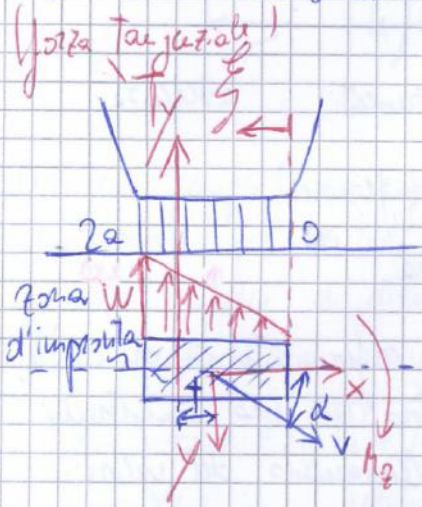
Forza longitudinale limite: $T_{x \max} = f_{\text{stat}} \cdot N$

$$\alpha = \arctan \frac{V_y}{V_x} \cong \frac{V - V_x}{V_x} \cong \arctan E_y \cong E_y$$

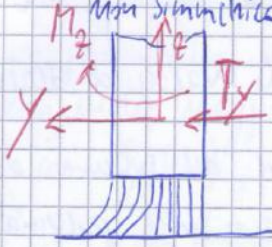
Nelle normali condizioni di marcia α è dell'ordine di $2^\circ - 4^\circ$, quindi è possibile le seguenti semplificazioni:

$$V_y = V \cdot \tan E_y \cong V \cdot E_y \quad \text{(variando il valore di } E_y \text{ si può avere:)}$$

- Deriva semplice: angolo di deriva non nullo ($E_y \neq 0$) e componente longitudinale F_x della forza di contatto nulla ($F_x = 0$) le spazzole restano dritte
- Scorrimento semplice: $E_y = 0 \Rightarrow V_y = 0$ si ha scorrimento longitudinale del pneumatico
- Scorrimento combinato: scorrimento del pneumatico in entrambe le direzioni X e Y ciò implica un certo $\alpha \neq 0$ ed un certo F_x .



W : deformazione laterale che subisce la setola, dipende dalla coordinata ξ , la deriva causa una distribuzione di pressioni non simmetrica. (velocità angolare della ruota $\omega = d \cdot \dot{\xi}$)



A causa dell'asimmetria della distribuzione delle pressioni, si genera un momento di autoallineamento, diretto secondo l'asse ξ , indicato con M_2 . La forza di deriva, cioè la risultante delle forze laterali è indicata con T_y .

Considerando le singole setole in posizione ξ , la velocità laterale dell'orlo di contatto è:

$$N_y(\xi) = V \sin \alpha + \frac{\partial W}{\partial t} = V \sin \alpha + \frac{\partial W}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = V \sin \alpha + V \cdot \frac{\partial W}{\partial \xi}$$

nella zona di aderenza $N_y = 0$: $V \sin \alpha + V \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0 \quad \sin \alpha \cong \alpha$

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = -\alpha \Rightarrow W(\xi) = -\alpha \cdot \xi \quad \text{indica la dipendenza della deformazione laterale dalla coordinata } \xi$$

Deformazione nulla all'orlo d'ingresso in una regione esente da sollecitazioni:

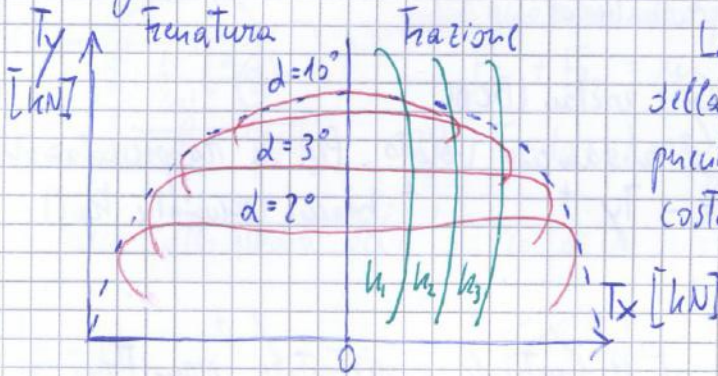
$$W(\xi=0) = 0$$

A questo punto si analizza l'andamento delle tensioni trasversali:

$$\begin{cases} T_y = C_y \cdot W = -C_y \cdot \alpha \cdot \xi \rightarrow \text{valida in condizioni di aderenza se:} \\ T_y = -\int_{dinamico} p(\xi) \rightarrow T_y = \int_{statico} p(\xi) \end{cases}$$

strisciamento laterale (NB α in rad!)

Nel caso più verosimile e quello reale si ha lo scorrimento combinato del pneumatico, cioè nel contatto pneumatico battistrada avviene sia scorrimento longitudinale, sia il fenomeno di deriva o scorrimento laterale. È possibile riportare la forza laterale T_y in funzione di quella longitudinale prendendo come parametro l'angolo di deriva $\alpha \Rightarrow$ si ottiene "Diagramma polare"



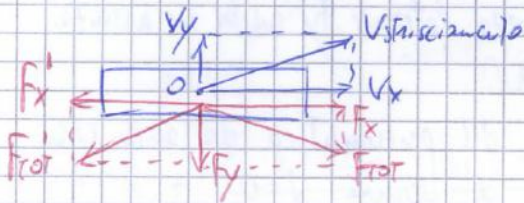
La curva tratteggiata identifica il valore della forza risultante massima esercitabile dal pneumatico. Le curve rosse sono le curve a deriva costante con scorrimento variabile. Le curve verdi sono a deriva variabile con scorrimento costante.

Visto in

(Nei casi semplificati si può essere puro scorrimento o pura deriva) \rightarrow precedenza una prova per valutare un pneumatico può essere quella di far ruotare la ruota su un cilindro di diametro molto maggiore rispetto a quello della ruota (MTS The Tread Wear Simulation System), da notare che la forza risultante:

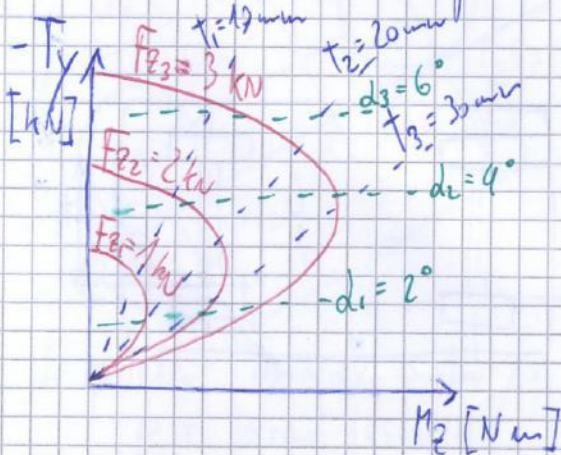
$$F_{TOT} = \sqrt{T_x^2 + T_y^2}$$

- ha direzione concorde al moto con $k < 0$ nell'accelerazione
- ha direzione opposta al moto con $k > 0$ in frenata



Nello scorrimento combinato si ha F_{TOT} in accelerazione (come risultante) e F_{TOT} in frenata.

- Aderenza generalizzata: essendo la teoria delle spazzole non applicabile al modello reale di pneumatico, si introdurrà un modello empirico basato su formule matematiche che riproduca in maniera approssimata ma più efficace, il comportamento delle forze di un dato pneumatico (ad esempio nella realtà le frenate brusche possono spiatellare la ruota, cioè si consuma in modo inopportuno il battistrada \rightarrow l'ABS può ridurre il rischio di spiatellamento).



Per avere un quadro d'insieme del comportamento laterale reale del pneumatico, si può fare riferimento al diagramma di Gough

$$T_y = T_y / |M_z| (F_z, \alpha, t)$$

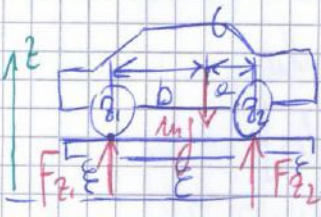
F_z : forze verticali, α : deriva, t : pneumatic trail.

L : passo del veicolo. Può essere ricavato dalla somma dei semi passi $L = a + b$

h_G : altezza del baricentro, agisce sul trasciammento di carico

t_1, t_2 : carreggiate posteriori e anteriori (ipotesi semplificativa $t_1 = t_2$)

Per ricavare il valore di a e b per definire G è possibile pesare l'auto con la bilancia



Equazioni di equilibrio

$$F_{z1} + F_{z2} = m \cdot g$$

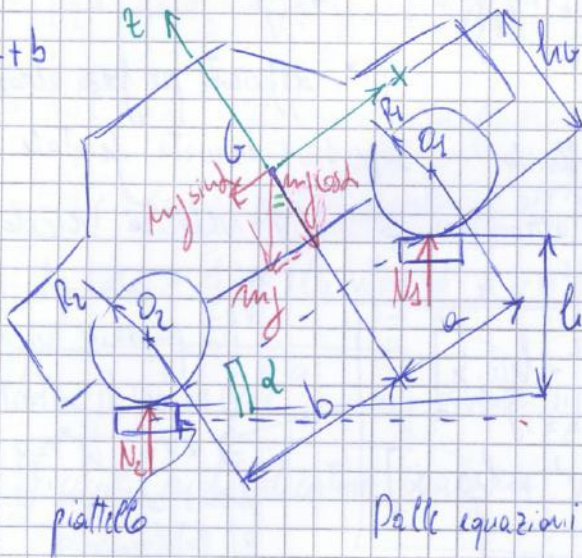
$$\sum \vec{e}_2 \quad F_{z1} \cdot (a+b) = m \cdot g \cdot a$$

Posizione G :

$$a = \frac{F_{z2}}{F_{z1} + F_{z2}} \cdot L \quad b = \frac{F_{z1}}{F_{z1} + F_{z2}} \cdot L$$

Si passa allo studio della statica di un autoveicolo in pendenza su due piattelli:

$L = a + b$



R_1, R_2 : raggi ruote (in generale $R_1 \neq R_2$)

$$N_1 + N_2 = m \cdot g$$

$$N_1 = F_{z1} - \Delta F$$

$$N_2 = F_{z2} + \Delta F$$

ΔF : surplus di carico per pendenza, dato dalla slacciatura del pneumatico N_2

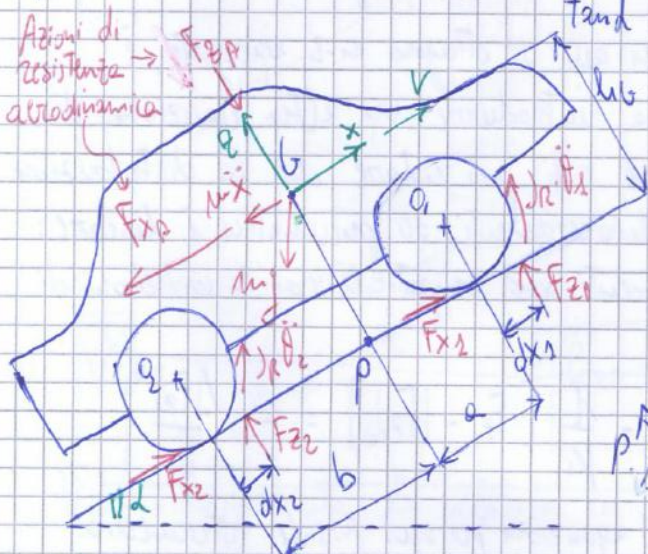
$$\sum \vec{e}_1 \quad m \cdot g [a \cos \alpha + (h_G - R_1) \sin \alpha] = (F_{z2} + \Delta F) \cdot [L \cos \alpha + (R_2 - R_1) \sin \alpha]$$

$\alpha = 0$ per ipotesi $R_1 = R_2 = R$

Dalle equazioni si ricava: $h_G = \frac{F_{z2} + \Delta F}{m \cdot g} \cdot L - \frac{a}{\tan \alpha} + R =$

$$= R + \frac{F_{z2} \cdot a + \Delta F \cdot a + F_{z2} \cdot b + \Delta F \cdot b - m \cdot g \cdot a}{m \cdot g \cdot \tan \alpha} = R + \frac{\Delta F \cdot L}{m \cdot g \cdot \tan \alpha} = R + \frac{\Delta F}{m \cdot g} \cdot L \cdot \frac{\sqrt{L^2 - h_G^2}}{h_G}$$

Per diversi valori di h_G vale: $\frac{\Delta F}{m \cdot g} = \frac{m \cdot g (h_G - R)}{L} \quad (m \cdot g = F_{z1} + F_{z2})$



- Moto di un veicolo con dinamica iniziale
Situazione transitoria del moto di un veicolo con forze esterne agenti (caso generico)

$$\rightarrow F_{x1} + F_{x2} - F_{xP} = m \cdot \ddot{x} + m \cdot g \sin \alpha$$

$$\uparrow F_{z1} + F_{z2} = m \cdot g \cos \alpha + F_{xP}$$

$$F_{z1} \cdot (a + \Delta x_1) - F_{z2} \cdot (b - \Delta x_2) + m \cdot g \sin \alpha \cdot h_G + F_{xP} \cdot h_G + m \cdot \ddot{x} \cdot h_G = 0$$

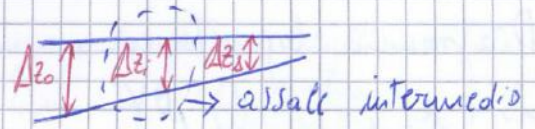
Si ipotizza $\Delta x_1 = \Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_1 = \Delta x_2$
 $p \in$ terreno (asfalto)

$$\Delta x_i = f \cdot R_i = R_i (f_0 + k \cdot v)$$

parametro d'attrito volvente.

$$\Delta z_i = - \frac{1}{k_i} [F_{z_i} - (F_{z_i})_0]$$

$$\frac{1}{L} (\Delta z_m - \Delta z_i) = \frac{1}{a-x_i} (\Delta z_m - \Delta z_i)$$



$$\frac{b+x_i}{k_i} [F_{z_i} - (F_{z_i})_0] + \frac{a-x_i}{k_m} [F_{z_m} - (F_{z_m})_0] - \frac{l}{k_i} [F_{z_i} - (F_{z_i})_0] = 0$$

Eq. di equilibrio da aggiungere al sistema verso del moto



El Forza di resistenza all'avanzamento di un autoveicolo

$$R_r = m g \cos \alpha (f_0 + k v^2) \quad \text{resistenza al rotolamento (verso } \uparrow \text{)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{deportanza} \\ \text{verso } \downarrow \end{array} \right.$$

$$R_{aer_z} = \sum_{i=1}^n F_{z_i} (f_0 + k v^2) = \frac{1}{2} \rho S C_z v^2 (f_0 + k v^2) \quad \text{resistenza aerodinamica (verso } \downarrow \text{)}$$

$$R_z = R_r + R_{aer_z} = [m g \cos \alpha - \frac{1}{2} \rho S C_z v^2] (f_0 + k v^2) \quad \text{resistenza complessiva in } z$$

$$R_p = m g \sin \alpha \quad \text{resistenza alla pendenza (verso } \leftarrow \text{)} \quad R_{aer_x} = \frac{1}{2} \rho S C_x v^2$$

In generale la forza di resistenza all'avanzamento è data da:

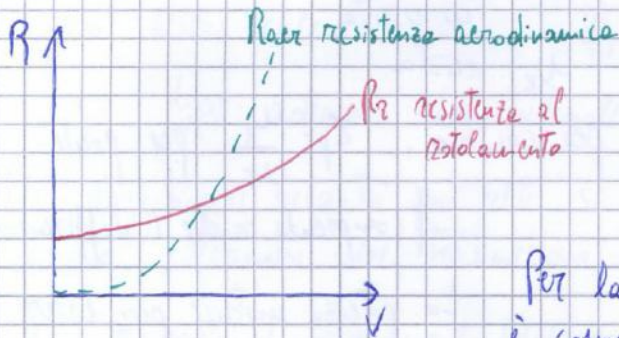
$$R = [m g \cos \alpha - \frac{1}{2} \rho S C_z v^2] (f_0 + k v^2) + \frac{1}{2} \rho S C_x v^2 + m g \sin \alpha$$

$$R = A + B v^2 + C v^4 = 0 \quad \text{diventa significativo solamente per macchine sportive}$$

I coefficienti moltiplicativi valgono: $A = m g (f_0 \cos \alpha + \sin \alpha)$

$$B = m g k \cdot \cos \alpha + \frac{1}{2} \rho S C_x - \frac{1}{2} \rho S C_z f_0$$

Andamento delle resistenze all'avanzamento all'aumentare della velocità.



La potenza resistente si ottiene dall'eq. precedente:

$$P = R \cdot v = A \cdot v + B \cdot v^3$$

Per la valutazione delle prestazioni degli autoveicoli è comodo riportare le potenze necessarie al moto in funzione della velocità su un grafico logaritmico.

$$v_{car} = \sqrt{\frac{A}{B}}$$

$$P_{car} = A \cdot v_{car} + B \cdot v_{car}^3 = 2A \sqrt{\frac{A}{B}}$$

v_{car} rappresenta la velocità caratteristica del veicolo, quindi P_{car} è la potenza caratteristica.

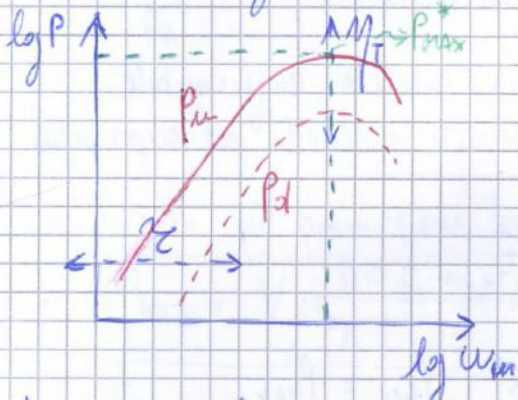
Terminato lo strisciamento presente nei dischi che compongono la frizione, nell'investo si raggiunge una situazione detta di regime in cui $\omega_p = \omega_m$.

Rendimento della trasmissione:
$$\eta_T = \frac{P_d}{P_m} = \frac{C_R \omega_R}{C_m \omega_m}$$

Nel regime:
$$\eta_T = \frac{C_R}{C_m} \cdot \tau_{tot} \Rightarrow \text{Coppia resa disponibile alle ruote: } C_R = C_m \cdot \frac{\eta_T}{\tau_{tot}}$$

Se $\omega_R < \omega_m$ allora $C_R > C_m$, quindi la macchina non si avvia.

È l'effetto delle variazioni di τ : rapporto di trasmissione e del η_T : rendimento della trasmissione sulle curve logaritmiche Potenza-velocità.



Al variare del rendimento della trasmissione trasla in verticale la curva nel grafico (un aumento di rendimento implica un aumento della potenza massima).

Al variare del rapp. di trasmissione trasla in orizzontale la curva (una diminuzione di τ , aumenta la velocità angolare del motore).

Non sempre la curva potenza-velocità ha il seguente andamento. Essa dipende dalla tipologia di motore impiegato (più bassa in un sincro-trifase, spigolosa in un inverter). È inutile che il motore generi un grande quantitativo di potenza motrice se non è poi in grado di scaricarla a terra, bisogna evitare i macro-slittamenti del pneumatico.

$P_d > P_{max} \Rightarrow$ slittamento della ruota con P_{max} potenza massima scaricabile che può essere calcolata:

$$P_{max} = V \cdot \sum_i F_{xi} = V \cdot \sum_i \mu_{pi} \cdot F_{zi}$$

μ_{pi} : aderenza longitudinale della singola ruota.

Per raggiungere velocità più alte si ingrava la marcia più alta (si definisce presa diretta i cambi che trasmettono con un rapporto 1:1).

α_0 : rapporto d'ingravo (diffuso in America) $\alpha_0 = \frac{1}{\tau}$ (da 1:3,15 con τ a 3,15 con α_0)

Ritornando alla massima potenza trasmissibile al suolo vale:

Potenza necessaria al moto:
$$P = A \cdot V + B \cdot V^3$$

$$P_{max} = V \cdot \mu_{p,i} \left(m_j \cos \alpha - \frac{1}{2} \rho V^2 \right) C_{\phi} =$$

$$= V \mu_{p,i} (F_{zi} + F_{zi})$$

termine aerodinamico trascurabile per basse velocità

è chiamato di tipo "open" (nel caso di slittamento di un solo semi-asse c'è un difetto di distribuzione di coppia) ⇒ la soluzione è l'impiego di un differenziale autobloccante (nel caso di slittamento viene bloccata la ruota slittante per ripartire la coppia alle ruote in aderenza).

$k_T > 1$: più potenza all'avantreno
 $k_T < 1$: più potenza al retrotreno

Coppia che agisce su una ruota: $C = F_x \cdot R_L = \mu \cdot F_z \cdot R_L$

Si assumeva che i due assi abbiano ruote dello stesso tipo e che si trovino in identiche condizioni di aderenza. Nel caso a due assi: $k_T \frac{F_{z2}}{F_{z1}}$ è costante

$k_T \frac{F_{z2}}{F_{z1}} > 1$, le condizioni di aderenza limite si verificano all'avantreno

$$k_T = \frac{\mu_1 F_{z1}}{\mu_2 F_{z2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

μ_1 : coeff. d'attrito all'avantreno
 μ_2 : coeff. d'attrito al retrotreno

La potenza che può essere trasmessa al limite dello slittamento vale:

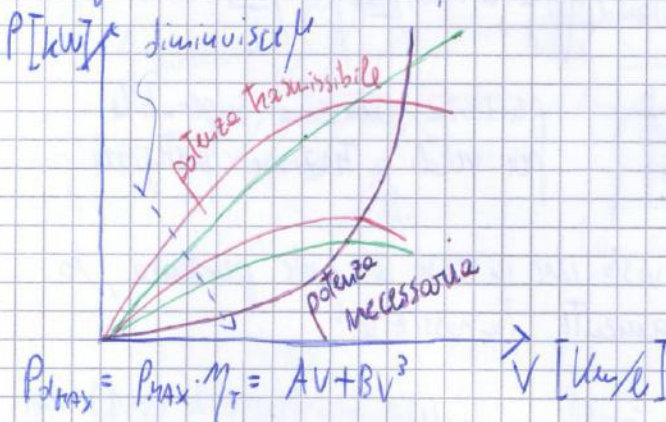
$$P_{MAX} = V \mu_{xp} F_{z1} \left(1 + \frac{F_{z2}}{F_{z1}} \right) = V \mu_{xp} F_{z1} \left(\frac{1+k_T}{k_T} \right) \quad (\text{crisi avantreno})$$

$k_T \frac{F_{z2}}{F_{z1}} < 1$, le condizioni di aderenza limite si verificano al retrotreno

Potenza che è possibile trasmettere: $P_{MAX} = V \mu_{xp} F_{z2} (1+k_T)$ (crisi retrotreno)

Le condizioni di aderenza limite possono determinare la crisi dell'avantreno, nel primo caso, e la crisi del retrotreno, secondo caso.

- Grafico della massima potenza trasmissibile e potenza necessaria su strada piana.



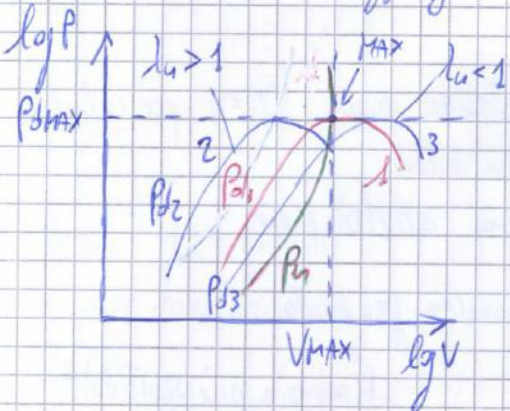
— trazione anteriore (avantreno)
 — trazione posteriore (retrotreno)

Note: Aumentando la velocità il carico sul retrotreno aumenta per diventare ad un certo punto maggiore di quello sull'avantreno (per potenza trasmissibile). La potenza necessaria include solo le resistenze al rotolamento delle ruote non motrici. La trazione anteriore è più performante a bassi velocità.

Non si tiene conto del trasferimento di carico longitudinale dovuto a X , quindi le curve non sono realistiche a basse V .

Massime prestazioni rese possibili dal motore.

Massima velocità raggiungibile: intersezione tra curva di potenza disponibile e di potenza necessaria (curva 1 in cui si ha la massima potenza)



$$P = P_{dmax} = P_{mmax} \cdot \eta_T$$

$$AV + BV^3 + \sqrt{V^5} = P_{mmax} \cdot \eta_T$$

↳ ≈ 0 si trascura la potenza aerodinamica

Dalla seguente equazione può essere ricavata la velocità massima che vale:

$$V_{max} = \sqrt[3]{\frac{P_{mmax} \cdot \eta_T}{2B} \cdot \left(\sqrt[3]{C+1} - \sqrt[3]{C-1} \right)}$$

$$C = \sqrt{1 + \frac{4A^3}{27 P_{mmax}^2 \eta_T^2 B}}$$

Supponendo che il veicolo abbia trazione di tipo meccanico, è possibile calcolare il rapporto di trasmissione per ottenere V_{max} :

$$\gamma_{TOT} = \gamma_u \cdot \gamma_p = \frac{V_{max}}{R_L \cdot \omega_m(P_{max})}$$

nella marcia il rapporto di trasmissione al cambio vale circa $\gamma_u = 1$

Quindi è possibile trovare il valore di γ_p

Introduciamo il rapporto: $\lambda_u = \frac{\omega(V_{max})}{\omega(P_{max})}$

velocità angolare del motore che fornisce
- velocità massima
- potenze massima (curva 2)

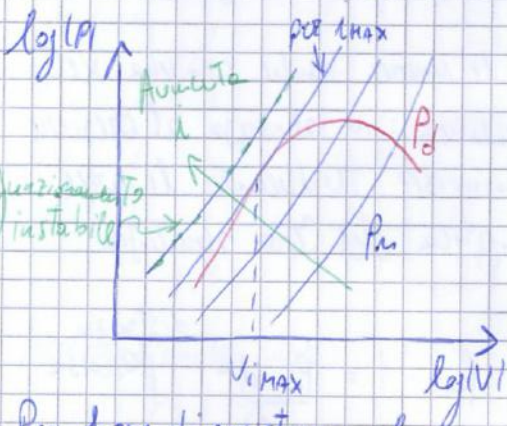
$\lambda_u > 1$: il rapporto di trasmissione è troppo

corto, per migliorare le prestazioni in termini di accelerazione e potenza superabile

$\lambda_u < 1$: il rapporto di trasmissione è troppo lungo, per ridurre i consumi di carburante

(curva 3) si installa overdrive, sistema meccanico che incrementa il rapporto

di trasmissione e rende possibile l'aggiunta della 6° marcia



λ_{max} : massima pendenza per un veicolo a combustione interna

La potenza disponibile al motore:

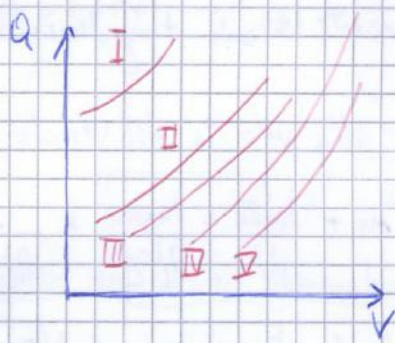
$$P_{m} = C_m \omega_m = C_m \cdot \frac{V}{R_L \cdot \gamma_u \cdot \gamma_p}$$

Per forze di resistenza al rotolamento e resistenza alle pendenze

Si può calcolare il rapporto di trasmissione totale:

$$\gamma_{TOT} = \gamma_u \cdot \gamma_p = \frac{C_m \eta_T}{R_L \cdot n_{gr} |f_0 \cos \alpha + \sin \alpha|}$$

η_T per prima marcia per la marcia più corta è riferita alle velocità minima di

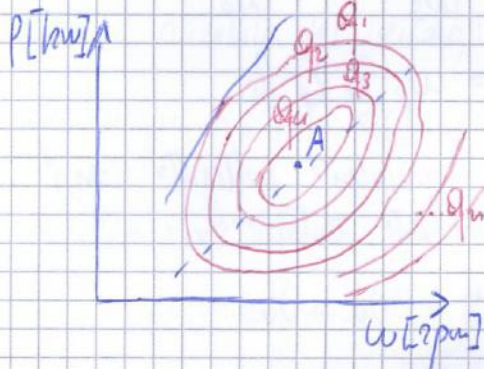


A sinistra: consumo per unità di distanza percorsa a v costante in funzione della velocità e della pendenza
 A destra: consumo nelle differenti marce

(ipotesi $\eta_m = \text{costante}$)

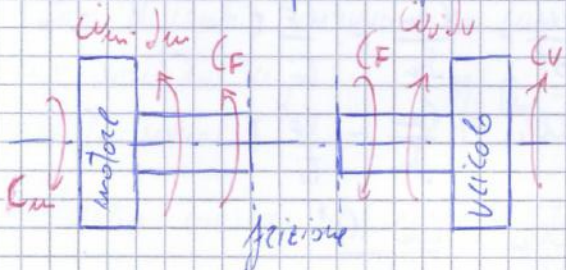
Curve caratteristiche di un motore ad accensione comandata con relative curve isocome (q)

q: consumo specifico $\left[\frac{g}{cvh} \right]$. Le curve sono state



Trovate sperimentalmente in condizioni stazionarie
 A: punto di consumo specifico minimo in cui il motore lavora meglio

- Avviamento del veicolo: il motore termico non è in grado di lavorare (si spegne) al di sotto di una ω_{min} , per non può scendere al di sotto di $\omega_{min} = \omega_{min} R_e \tau_p \tau_c$

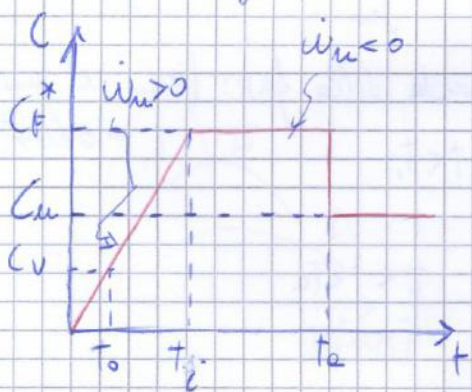


L'innesto e frizione o il convertitore di coppia permettono l'avviamento e l'arresto del veicolo.
 J_m, J_v : momenti d'inerzia per simulare motore e veicolo

Equazioni transitorie:

$$C_m - \omega_m \cdot J_m - C_f = 0$$

$$C_f - \omega_v \cdot J_v - C_v = 0$$



- Il transitorio può essere diviso in tre fasi:
- $0 < t < t_0$, il veicolo è fermo ma il motore accelera. La coppia trasmessa dall'innesto non è ancora sufficiente a vincere la resistenza al moto.
 - $t_0 < t < t_1$, la frizione scivola e il motore inizialmente continua ad accelerare.
 - la frizione scivola fino a t_2 in cui si raggiunge la situazione di innesto rigido.

Accelerazioni angolari:

$$\omega_m = \frac{C_m - C_f^*}{J_m}$$

$$\omega_v = \frac{C_f^* - C_v}{J_v}$$

Energia cinetica: $E_c = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n J_i \omega_i^2$

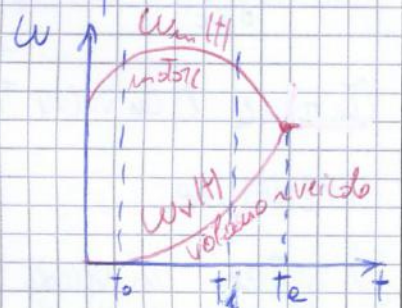
m: massa totale del veicolo. La sommatoria si estende a tutti gli elementi rotanti che devono essere accelerati.

$\omega_m = \omega_{primario} = \frac{C_m(t) - C_v(t)}{J_{eq}}$ per $t > t_a$ con un'unica inerzia equivalente

Se $\omega_m = \omega_v$ allora si ricava: $t_a = \frac{2 J_m J_v (C_f^* \omega_{m0} + C_f^* t_i (J_v - J_m) - t_i C_f^* J_m)}{2 (C_f^* [J_m (C_f^* - C_v) + J_v (C_f^* - C_m)]}$
(tempo di avviamento)

Quantità di energia cinetica presa dal motore sommata al lavoro dei campi tra 0 e t_a :

$E_m = \int_0^{t_a} C_m \omega_m dt + \frac{1}{2} J_m (\omega_{m0}^2 - \omega_{ma}^2)$



Energia ricevuta dal veicolo: $E_v = \int_0^{t_a} C_v \omega_v dt + \frac{1}{2} J_v \omega_{va}^2$

⇒ Energia dissipata all'innesto: $E_d = E_m - E_v$

Accelerazione. Durante la crescita di velocità di un veicolo nel tempo vale:

$\frac{dE_c}{dt} = M_{at} \cdot P_m - P_n$ P_n : potenza necessaria al moto
 P_m : potenza del motore

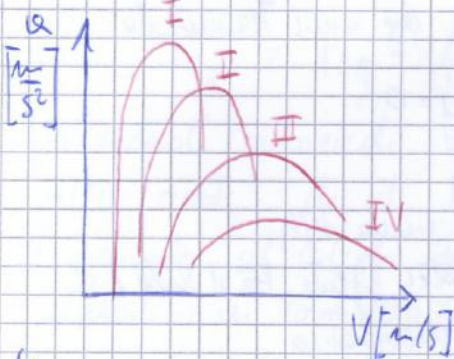
$E_c = \frac{1}{2} M_{at} V^2 \Rightarrow M_{at} \cdot V \cdot \frac{dV}{dt} = M_{at} \cdot P_m - P_n$ con M_{at} costante

Nel caso di cambio continuo o con cambio automatico con convertitore di coppia si ha che M_{at} varia nel tempo:
(perché τ_{rot} variabile)

$M_{at} \cdot P_m - P_n = M_{at} V \frac{dV}{dt} + \frac{1}{2} V^2 \frac{dM_{at}}{dt}$

Accelerazione massima del veicolo riesce a raggiungere:

$\left| \frac{dV}{dt} \right|_{max} = \frac{M_{at} P_m - P_n}{M_{at} V}$



l'area tratteggiata rappresenta il tempo necessario per accelerazione. Il cambio ottimale di marcia per minimizzare il tempo di accelerazione è rappresentato dalle

intersezioni tra le curve, l'area sotto rappresenta quindi i tempi di ripresa ottimali in condizioni ideali

(Accelerazione massima in funzione della velocità per ogni marcia)

Distanza necessaria per accelerare sino ad un dato valore di velocità: $(v = \frac{dx}{dt})$

$\int_{v_1}^{v_2} v dt$

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = V \frac{dv}{dx} \Rightarrow \int_{v_1}^{v_2} \frac{v}{a} dv = \int_{v_1}^{v_2} \frac{M_{at}}{M_{at} P_m - P_n} V^2 dv$

$$|\dot{x}| = \left| \frac{dv}{dt} \right| = \frac{\sum_i F_{xi}}{m} = \frac{\sum_i F_{zi} \mu_{xi}}{m}$$

Cond. limite

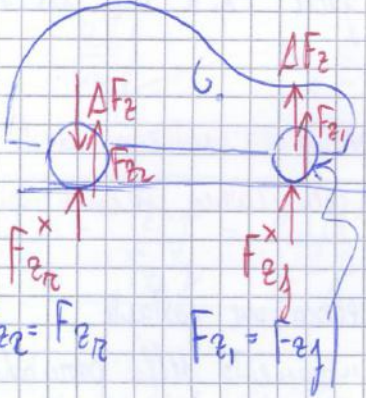
An condizioni ideali vale: $F_{x1} = F_{z1} \cdot \mu_{x1}$ $F_{x2} = F_{z2} \cdot \mu_{x2}$

An queste condizioni limite è possibile calcolare il valore della massima decelerazione realizzabile (che sarà sicuramente maggiore al valore di accelerazione massima)

$$|\dot{x}|_{max} = \mu_{xi} \cdot g$$

Tempo di arresto: $t_a = \frac{v}{|\dot{x}|_{max}} = \frac{v}{\mu_{xi} \cdot g}$ spazio di arresto: $s_a = \frac{v^2}{2 \mu_{xi} \cdot g}$

Per quanto riguarda i trasferimenti di carico in frenatura si ha un aumento del carico statico verticale sull'assale anteriore, ciò significa una diminuzione del carico statico verticale sull'assale posteriore.



F_z^x : carico statico su assale
 ΔF_z : variazione del carico verticale durante la frenatura
 $|\Delta F_z| = m \cdot \ddot{x} \cdot \frac{h \cdot g}{L}$

In caso di assenza di inerzia (moto uniforme $\ddot{x} = 0$)
 $F_{z1}^x = m g \frac{b}{L}$ $F_{z2}^x = m g \frac{a}{L}$

Nel caso di frenatura, i nuovi carichi statici sono così calcolabili:

$$F_{z2}' = F_{z2}^x - |\Delta F_z| \quad < \quad F_{z1}' = F_{z1}^x + |\Delta F_z|$$

Nei normali autoveicoli vale $\mu < \frac{a}{h \cdot g}$, per cui si raggiunge prima lo slittamento delle ruote che il ribaltamento in senso longitudinale.

Ritornando al calcolo dei carichi statici effettivi, considerando anche i risultati ottenuti in considerazioni precedenti si ottiene:

$$F_{z1} = \frac{m g}{L} (b \cos \alpha - h g \sin \alpha) + |\Delta F_z| = \frac{m}{L} (g b \cos \alpha - g h g \sin \alpha - h g \ddot{x}) \quad \left(\begin{matrix} NO \\ \ddot{x} < 0 \end{matrix} \right)$$

$$F_{z2} = \frac{m g}{L} (a \cos \alpha + h g \sin \alpha) - |\Delta F_z| = \frac{m}{L} (g a \cos \alpha + g h g \sin \alpha + h g \ddot{x})$$

$$\rightarrow F_{z2} + F_{z1} = m g \cos \alpha \Rightarrow \frac{F_{x1} + F_{x2}}{\mu_x} = m g \cos \alpha \Rightarrow \mu_x = \frac{F_{x1} + F_{x2}}{m g \cos \alpha}$$

$$F_{x1} = F_{z1} \cdot \mu_x \quad F_{x2} = F_{z2} \cdot \mu_x \quad \text{In frenatura ideale } \sum_i F_{xi} = \mu \sum_i F_{zi}$$

Durante una frenata il trasferimento di carico non può essere evitato con conseguente fenomeno di beccheggio del veicolo che può essere regolato diminuendolo con l'aumento della rigidità delle sospensioni del veicolo (sospensioni più rigide: anti-squat)

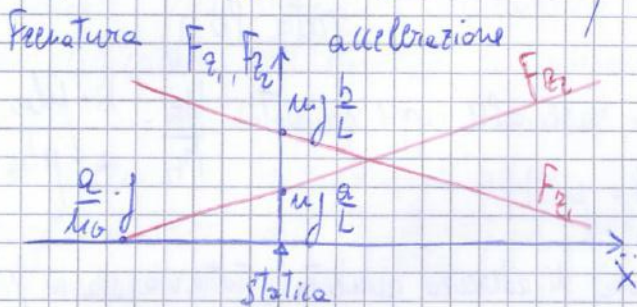
$$|\dot{x}_{max}| = \mu \cdot g \quad \mu < \frac{a}{L_b} \Rightarrow L_b < \frac{a}{\mu} \text{ requisito progettuale per non far impennare il veicolo.}$$

$$F_{z2} = 0 \Rightarrow m \cdot g \frac{a}{L} + m \frac{L_b}{L} \cdot \ddot{x} = 0 \quad \text{condizione teorica di ribaltamento}$$

$$m \cdot a = |\ddot{x}| \cdot L_b \Rightarrow |\ddot{x}| = \frac{a}{L_b} \cdot g \quad \text{decelerazione limite prima del ribaltamento}$$



$$\mu_{limite} = \frac{a}{L_b} \Rightarrow L_{b,limite} = \frac{a}{\mu} \quad \text{altezza limite di } L_b \text{ oltre la quale si ha il ribaltamento del veicolo.}$$



(Carichi verticali sui due assali in funzione dell'accelerazione longitudinale)

- Ripartizione della frenatura
Si consideri il rapporto tra F_{x1} e F_{x2} in condizioni limite d'aderenza

$$\frac{F_{x1}}{F_{x2}} = \frac{F_{z1} \cdot \mu}{F_{z2} \cdot \mu} = \frac{b + \mu L_b}{a - \mu L_b}$$

Tale rapporto è indicativo per ripartire le forze frenanti tra i due assali in modo da ottenere una frenatura ottimale.

Per un quadro completo di tutte le condizioni di frenatura (anche quelle non comprese nel rapporto), si risolvono l'equazioni di equilibrio imponendo il massimo valore compatibile con l'aderenza solo per uno dei due assali.

$$\text{Per } F_{x1} = \mu F_{z1} \Rightarrow F_{x1} = \mu \left(\frac{m g \frac{b}{L} + \frac{L_b}{L} F_{x2}}{1 - \mu \frac{L_b}{L}} \right)$$

retta QP
all'anteriore
↑
limite aderenza
↓
al posteriore
retta PS

$$\text{Per } F_{x2} = \mu F_{z2} \Rightarrow F_{x2} = \mu \left(\frac{m g \frac{a}{L} - \frac{L_b}{L} F_{x1}}{1 + \mu \frac{L_b}{L}} \right)$$

Per il caso di frenatura solo all'anteriore o solo al posteriore (sotto frenatura)

• sotto frenatura al posteriore $F_{x2} = 0$ $F_{x10} = \mu \left(\frac{m g \frac{b}{L}}{1 - \mu \frac{L_b}{L}} \right)$

• sotto frenatura all'anteriore $F_{x1} = 0$ $F_{x20} = \mu \left(\frac{m g \frac{a}{L}}{1 + \mu \frac{L_b}{L}} \right)$

Nel caso del sistema ABS la ripartizione non è necessaria in quanto garantisce sempre la frenatura ottimale in ogni condizione di carico e di fondo stradale.
 (nel pedale del freno si ha booster → servofreno, simile a servosterzo per funzione)

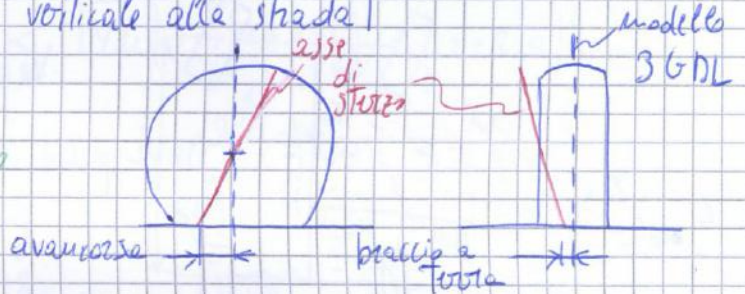
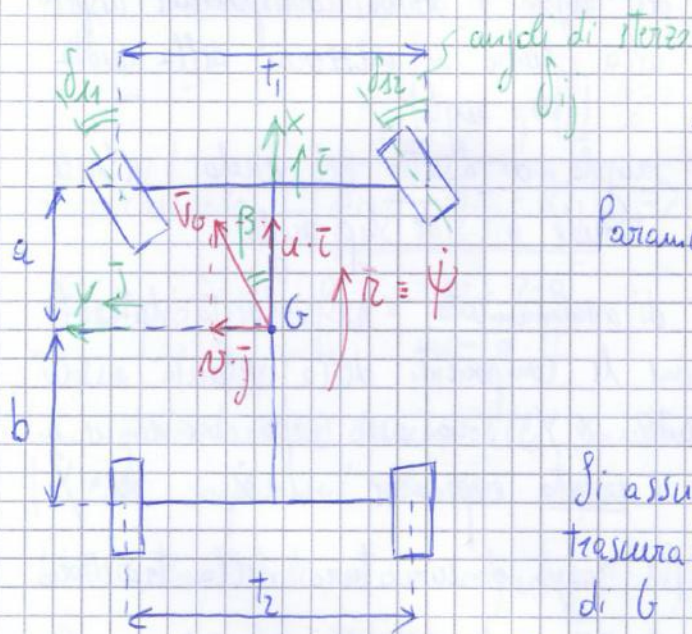
HANDLING (comportamento direzionale del veicolo)

È importante definire i modelli matematici che permettono di valutare il comportamento direzionale e la stabilità di un autoveicolo. Durante la sterzata non è possibile associare un modello cinematico all'autoveicolo, nel caso reale gli angoli di deriva devono essere necessariamente diversi da 0, per cui il comportamento della sterzata è prettamente dinamico (nel manovraccio a due assi è possibile abbinare una sterzata cinematica, ma si tratta di una condizione molto semplificata). Nel modello si introducono delle ipotesi semplificative:

- veicolo su strada piana e orizzontale, si trascurano le azioni orizzontali dovute al rollio, si trascurano le azioni delle sospensioni e si ipotizzano piccoli angoli di sterza delle ruote ⇒ l'effetto totale delle semplificazioni è quello di avere 3 GDL.

(Nel caso reale l'asse di sterzo è sghembo, con distanze caratterizzate nella figura, nel nostro modello si considera verticale alle strade)

Modello di veicolo a 3 GDL



Parametri: t_2, t_1 carreggiata posteriore e anteriore, per ipotesi $t_2 \approx t_1 \approx t$ (track)
 m massa del corpo rigido
 (x, y, z, θ) assi corpo solidale al veicolo

Si assume che le masse delle ruote anteriori sia trascurabile, in modo da non provocare lo spostamento di G durante la sterzata.

vettore velocità baricentro $\vec{V}_G = u \cdot \vec{i} + v \cdot \vec{j}$

velocità d'imbardata (Yaw rate) $\vec{\Omega} = \omega \cdot \vec{k}$

$\omega > 0$ se il veicolo ruota in senso antiorario

$l = a + b$ passo del veicolo (wheelbase)

Si definisce l'angolo di Ackermann:

$$\gamma = \arctan \left(\frac{r \cdot L}{u} \right) \approx \frac{r \cdot L}{u} = \frac{L}{R}$$

Nel moto di un veicolo, nel suo avanzamento vale $u \gg v$, $R \gg a$

Velocità assolute \bar{V}_{ij} i : indice asse (1 front, 2 rear)
 j : indica posizione ruota rispetto al passo (l left, r right)

Per esempio: $\bar{V}_{1l} \Rightarrow \bar{V}_{11} = \bar{V}_0 + r \cdot \bar{\omega} \times G P_{11} = (u\bar{i} + v\bar{j}) + r \cdot \bar{\omega} \times (a\bar{i} + \frac{t}{2}\bar{j})$ ruota anteriore sinistra

$\bar{V}_{1r} \Rightarrow \bar{V}_{12} = (u\bar{i} + v\bar{j}) + r \cdot \bar{\omega} \times (a\bar{i} + \frac{t}{2}\bar{j}) = \dots$ ruota anteriore destra

Raggruppando \bar{i} e \bar{j} per tutte e quattro le ruote si ottiene:

$$\bar{V}_{11} = (u - r \cdot \frac{t}{2}) \cdot \bar{i} + (v + r \cdot a) \cdot \bar{j} \quad \bar{V}_{12} = (u + r \cdot \frac{t}{2}) \cdot \bar{i} + (v + r \cdot a) \cdot \bar{j}$$

$$\bar{V}_{21} = (u - r \cdot \frac{t}{2}) \cdot \bar{i} + (v - r \cdot b) \cdot \bar{j} \quad \bar{V}_{22} = (u + r \cdot \frac{t}{2}) \cdot \bar{i} + (v - r \cdot b) \cdot \bar{j}$$

In una curva a sinistra le velocità della ruota di un veicolo in modulo sono (su un asse)

$$|\bar{V}_{11}| = \sqrt{(u - r \cdot \frac{t}{2})^2 + (v + r \cdot a)^2} < |\bar{V}_{12}| = \sqrt{(u + r \cdot \frac{t}{2})^2 + (v + r \cdot a)^2}$$



Vale: $|\bar{V}_{11}| < |\bar{V}_{12}|$
 $|\bar{V}_{21}| < |\bar{V}_{22}|$

Genericamente: $\beta_{ij} = \delta_{ij} - \alpha_{ij} \Rightarrow \tan \beta_{ij} = \tan(\delta_{ij} - \alpha_{ij}) = \frac{v_{ij} \cdot \bar{j}}{u_{ij} \cdot \bar{i}}$

Esempio $\beta_{11} = \frac{v + r \cdot a}{u - r \cdot \frac{t}{2}}$ Angolo di deriva: $\alpha = \delta - \beta$

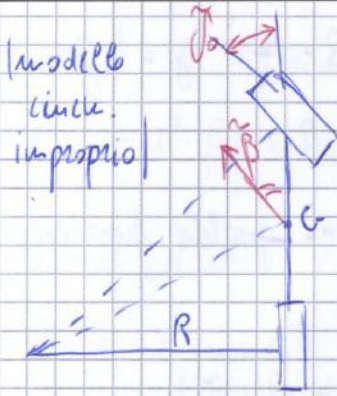
La sterzata è dovuta allo squotimento delle ruote posteriori \rightarrow elastocinematicità delle sospensioni da cui deriva *camber* δ e deriva β ... più avanti).

Linearizzando le eq. di convergenza si assume $u \gg |r| \frac{t}{2} \Rightarrow u - r \cdot \frac{t}{2} \approx u$

Da cui: $(\beta_{11} \approx \beta_{12}) = \beta_1 = \frac{v + r \cdot a}{u}$ $(\beta_{21} \approx \beta_{22}) = \beta_2 = \frac{v - r \cdot b}{u}$

Se $u \gg v \Rightarrow \beta_1, \beta_2$ hanno dei valori piccoli (Se $\delta_{11} \approx \delta_{12} \Rightarrow \alpha_{11} \approx \alpha_{12}$)

Di norma gli angoli di sterzo delle ruote anteriori sono molto simili $\delta_{11} \approx \delta_{12}$



ωR : velocità di rotolamento

Per piccoli angoli di sterzo

$\sin \delta_{ij} \approx \delta_{ij}$ $\cos \delta_{ij} \approx 1$

Nella guida a velocità costante e non troppo elevata vale: $\sigma_{y_{ij}} \approx |\delta_{ij}|$ $k_{ij} = 0$
(sempre per piccoli angoli di sterzo)

- Scorrimento dei pneumatici
 ω_{ij} : velocità angolare del cerchio ij -esimo attorno al proprio asse
 R_i : raggi di rotolamento della ruota $k = \frac{\omega - \omega R}{\omega R}$
 Scorrimento longitudinale del pneumatico: (Analogamente k_x)
 $k_{x_{ij}} = \frac{(u - r \frac{v}{L}) \cos \delta_{ij} + (v + r \cdot a) \sin \delta_{ij} - \omega_{ij} R_i}{\omega_{ij} R_i}$

Scorrimento laterale del pneumatico: (Analogamente $\sigma_{y_{ij}}$)
 $\sigma_{y_{ij}} = - \frac{(u - r \frac{v}{L}) \sin \delta_{ij} + (v + r \cdot a) \cos \delta_{ij}}{\omega_{ij} R_i}$

Equazioni di equilibrio (eq. cardinali della dinamica del corpo rigido):

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$ $\vec{M}_G = I_G \cdot \dot{\vec{\omega}}$ I_G : momento della quantità di moto

$\vec{a}_G = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$ $I_G = -J_{xz}(\dot{z}\vec{i} - \dot{x}\vec{z}) + J_z \cdot \dot{\omega} =$
 $= -J_{xz}(\dot{z}^2 \vec{i} + \dot{x}^2 \vec{j}) + J_z \cdot \dot{\omega}$

$m a_x = X$ $m \cdot a_y = Y$

Si ricavano le relazioni:

$\vec{F} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k}$
 (Z = forza trasc.)

$\vec{M}_G = L \cdot \vec{i} + M \cdot \vec{j} + N \cdot \vec{k}$

componente tangenziale $L = (\text{centrifuga})$
 componente normale $M = (\text{centripeta})$
 componente verticale $N = \text{verticale}$

In generale M e L sono trascurabili

Velocità del baricentro: $\vec{V}_G = u \cdot \vec{i} + v \cdot \vec{j}$ (con $\frac{d\vec{i}}{dt} = \omega \cdot \vec{j}$ $\frac{d\vec{j}}{dt} = -\omega \cdot \vec{i}$)

$\vec{a}_G = \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \dot{u} \cdot \vec{i} + u \cdot \omega \cdot \vec{j} + \dot{v} \cdot \vec{j} - v \cdot \omega \cdot \vec{i}$

\vec{a}_G si può scomporre: • in accelerazione longitudinale (in modulo)

$a_x = \dot{u} - v \cdot \omega = \dot{u} - u^2 \cdot \frac{\beta}{L}$ (Pa: $v = \beta u$
 $\omega = \frac{v}{R} = u \cdot \frac{\beta}{L}$)

(Pa: $\dot{v} = \beta \cdot \dot{u} + \dot{\beta} \cdot u$)

• in accelerazione trasversale (in modulo)

$a_y = \dot{v} + u \cdot \omega = \dot{v} + \frac{u^2}{R} = u \dot{\beta} + \dot{\beta} u + u^2 \cdot \frac{\beta}{L}$ ($\frac{u \dot{\beta}}{R} = \frac{\dot{\beta}}{L}$)

Rispetto al riferimento (x, y, z, G) inclinato di β , si ha a regime:

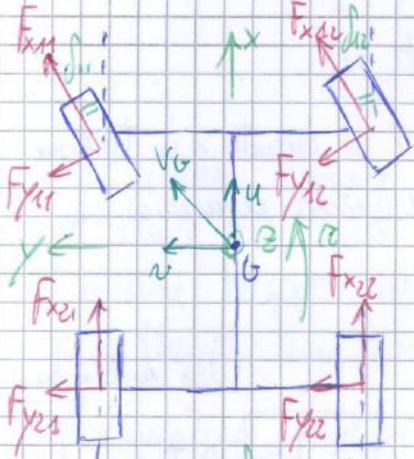
$$a_x = -u^2 \cdot \beta \frac{z}{R} = -v \cdot z \quad a_y = \ddot{y} = \frac{u^2}{R}$$

Essendo il moto piano, l'accelerazione angolare è data da $\dot{\Omega} = (0, 0, \dot{\Omega})$

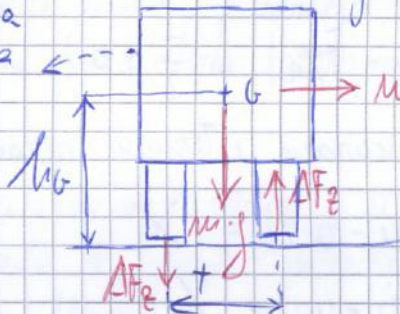
Forze e momenti che agiscono sul veicolo. Sistema di riferimento (x, y, z, G)

Agiscono tre tipi di forze: forza peso, le reazioni delle quattro ruote dovute al contatto pneumatico-strada e le forze aerodinamiche dovute alla presenza dell'aria.

Momento di forza centripeta: $m \frac{v^2}{R}$ (ho)



curva a sinistra



$M_{sospesa} \cdot a_y$ (implica il trasferimento della massa sospesa)

Si suppone $d_{11} \approx d_{12} \approx d_1$

NB Il trasferimento di carico nel moto piano \dot{x} non dipende dal rollio del veicolo. Il rollio di un veicolo dipende esclusivamente della rigidità delle molle e del roll bar, per cui più un'auto è rigida e meno rolla e della ripartizione di ΔF_z nell'anteriore e nel posteriore, che regola il comportamento di un veicolo in curva. Passaggio da modello a 3 GDL a single-track model: \downarrow

$X, Y, Z \rightarrow$ componenti della forza \vec{F} risultante $L, M, N \rightarrow$ componenti del momento \vec{M}_G
 I momenti di auto-allineamento vengono trascurati

Somma dei contributi delle componenti relative alle due ruote di uno stesso asse:

$$F_{x1} = F_{x11} + F_{x12} \quad F_{x2} = F_{x21} + F_{x22} \quad F_{y1} = F_{y11} + F_{y12} \quad (\dots F_{y2}, F_{z2})$$

Trasferimento di carico laterale: $\Delta F_{z1} = \frac{F_{z11} - F_{z12}}{2} \quad \Delta F_{z2} = \frac{F_{z21} - F_{z22}}{2}$

$$F_{z1} = F_{z11} + F_{z12} \quad F_{z2} = F_{z21} + F_{z22}$$

Componenti di \vec{F} :

$$\begin{cases} X = F_{x1} + F_{x2} - F_{y1} \cdot d_1 + X_a \\ Y = F_{y1} + F_{y2} + F_{x1} \cdot d_1 + Y_a \\ Z = F_{z1} + F_{z2} - m \cdot g \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{F} = (X, Y, Z)$

Pal contributo: $\begin{cases} F_{y1} \cdot \sin \delta_1 \\ F_{x1} \end{cases}$
 con $\sin \delta_1 \approx \delta_1$
 $\cos \delta_1 \approx 1$

componenti aerodinamiche trascurabili = 0

1) $C_{dij} \approx C_{dij}^0 + k \cdot \Delta F_{zij}$ C_{dij}^0 : rigidezza di riferimento assunta in corrispondenza del carico verticale agente sul pneumatico, quando il veicolo si muove con vel. uniforme u

2) F_{zij} corrispondente a C_{dij} è il carico statico (senza le resistenze aerodin. cioè portanza e deportanza)

3) - Modello linearizzato per i due assali ($i=1,2$) $F_{y_i} = C_i d_i$ (monotraccia)
 $C_i \approx 2 C_{diz} \approx 2 C_{diz}^0$ (solo per piccole variazioni di carico di F_{z_i})

4) (Rigidità ottimale per il montaggio di roll-over $C_i \approx 2 C_{diz}^0$, la rigidità dell'assale può causare l'usura delle giunzioni, l'aumento di rigidità sull'interno è minore rispetto alla diminuzione sull'esterno correcciata nel momento in cui si affronta una curva)

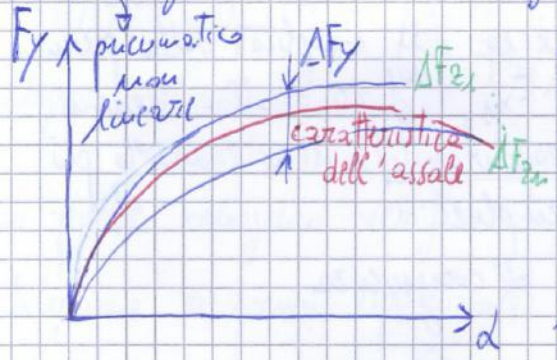
5) - Pneumatico linearizzato con ritardo di risposta: si presuppone una lunghezza di rilassamento di ciascuna ruota d , quindi introducendo un ritardo di risposta, si aggiunge un'eq. differenziale per ogni assale

d : relaxation length

$$\frac{d}{u} \dot{F}_{y_i} + F_{y_i} = C_i d_i(t) \quad (\text{caso limite } d \rightarrow 0)$$

6) Si introduce la caratteristica effettiva dell'assale $Y_i(d_i)$ per cui $F_{y_i} = Y_i(d_i)$

$F_y = f(d, F_z)$ $d = f(t, d, \dots) \Rightarrow$ non è sufficiente il modello empirico di Pacejka (maggiori incognite)



Nel grafico ΔF_y è molto ridotto per individuare la caratteristica effettiva dell'assale per tutti i vari valori di ΔF_z . Per la determinazione delle caratteristiche effettive, si utilizza la Magic Formula o altri test diretti sui pneumatici.

7) - Riepilogo monotraccia: lo studio comprende le eq. di equilibrio, descritte nella pagina precedente, e le eq. di congruenza trovate in precedenza

$$\Rightarrow d_1 = d_1 - \beta_1 = d_1 - \frac{u + \pi \cdot a}{u} \quad d_2 = d_2 - \frac{u - \pi \cdot b}{u}$$

8) È possibile da queste ricavare N e π :

$$N = \frac{u}{L} [b(d_1 - d_1) + a(d_2 - d_2)] = \frac{u}{L} (b \cdot \beta_1 + a \cdot \beta_2) = u \cdot \beta \quad \beta: \text{angolo di assetto}$$

zo
te

Sostituendo i valori di F_{y1} e F_{y2} nelle ① e ② con $\delta_1 \approx 0$, si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{v} = - \frac{(C_1 + C_2)}{m \cdot u} v - \frac{(C_1 a - C_2 b)}{m \cdot u} r + \frac{C_1 + \lambda C_2}{m} z \cdot \dot{v} \\ \dot{r} = - \frac{(C_1 a - C_2 b)}{J_z \cdot u} v - \frac{(C_1 a^2 + C_2 b^2)}{J_z \cdot u} r + \frac{C_1 a - \lambda C_2 b}{J_z} z \cdot \dot{v} \end{cases}$$

In forma sintetica:

$$\begin{cases} m \dot{v} = Y_1 v + Y_2 r + Y_3 \dot{v} \\ J_z \dot{r} = N_1 v + N_2 r + N_3 \dot{v} \end{cases}$$

derivate di stabilità: coefficienti opposti, che dipendono dal tipo di veicolo e dalle condizioni di moto (in genere sono trovate sperimentalmente e sono tabulate)

Al sistema composto da v, r è possibile scriverlo con notazione matriciale come

$$\dot{\bar{w}} = [A] \bar{w} + [B] \cdot \dot{v} \quad \text{in cui } \bar{w} = [v(t), r(t)] \text{ è il vettore delle variabili di stato}$$

$[B] \cdot \dot{v} \rightarrow$ forzante esterna in cui $[B] = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \cdot \dot{v}$ rappresenta il vettore dei termini noti.

$$[A] = - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \bar{A} \text{ (ult) è la matrice dei coefficienti}$$

- Soluzione generale per velocità di avanzamento costante ($u = \text{cost.} \Rightarrow \dot{u} = 0$)

$$\bar{w}(t) = \bar{w}_H(t) + \bar{w}_p(t) \quad \text{I coefficienti sono costanti}$$

integrale del sistema omogeneo associato \rightarrow integrale particolare

La parte omogenea verifica $\dot{\bar{w}}_H = [A] \cdot \bar{w}_H \quad \bar{w}_H = (v_H(t), r_H(t))$

Soluzione in forma esponenziale: $\bar{w}_H(t) = (v_H(t), r_H(t)) = X \cdot e^{\lambda t}$
 $\dot{\bar{w}}_H(t) = \bar{w}_H(t) = \lambda X e^{\lambda t} \Rightarrow [A]X = \lambda X$

Autovalori: $\det([A] - \lambda[I]) = 0 \quad I: \text{matrice identità } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \rightarrow$ Risolvendo l'equazione si ottengono i seguenti autovalori

coeff. di smorzamento $\lambda_{1,2} = \frac{t_2(A) \pm \sqrt{t_2(A)^2 - 4 \det(A)}}{2}$

$\lambda_{1,2} = -\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (\xi < 1, \text{ sistema sottosmorzato, } \lambda_{1,2} \text{ complessi coniugati})$

In condizioni stazionarie $\dot{v}=0$, $\dot{r}=0$, le eq. di equilibrio diventano:

$$m(\dot{v} + u r) = F_{y1} + F_{y2} \Rightarrow m \cdot u \cdot r = F_{y1} + F_{y2} \quad \text{con } \ddot{a}_y = u \cdot r$$

$$r \cdot X_2 = F_{y1} \cdot a - F_{y2} \cdot b = 0$$

$N_p, r_p, \beta_p, \gamma_p \dots$ grandezze a regime (stazionarie)

$$m \cdot \ddot{a}_y = m \cdot u \cdot r_p = F_{y1}^p \cdot \frac{L}{b} = F_{y2}^p \cdot \frac{L}{a} \rightarrow \text{componente normale centripeta}$$

\Rightarrow A regime le forze laterali esercitate dai pneumatici equilibrano la componente laterale della forza d'inerzia e danno momento nullo rispetto a G.

N_p, r_p permettono di ottenere tutte le altre grandezze a regime (si noti che V_G del baricentro non è tangente alla traiettoria)



Angolo di assetto a regime: $\beta_p = \frac{N_p}{u} = \beta_0 - \ddot{a}_y \cdot \frac{m}{L^2} \left(\frac{C_1 \cdot a^2 + C_2 \cdot b^2}{C_1 \cdot C_2} \right)$

$\Rightarrow \beta_p = \frac{N_p}{u} = \frac{S_p}{R_p}$ (con ipotesi di differenziale bloccato)

Angolo di Ackermann a regime: $\gamma_p = L \cdot \frac{r_p}{u} = \gamma_0 - \ddot{a}_y \cdot \frac{m}{L} \left(\frac{C_1 \cdot a - C_2 \cdot b}{C_1 \cdot C_2} \right) = \frac{L}{R_p}$

In cui: $\beta_0 = b \cdot \frac{d_1 + a \cdot d_2}{L} = \frac{b + a \cdot X}{L} \cdot r \cdot \delta$ e $\gamma_0 = d_1 - d_2 = (1 - X) \cdot r \cdot \delta$

Ξ Assetto del veicolo rispetto alla traiettoria del baricentro



• Per basse velocità del veicolo ($u < u_\beta$)
 (Pa ricordare nella pagina precedente i valori di N_p, r_p)
 Con velocità u prossima a zero $d_1 = 0 \Rightarrow$ sterzata cinematica, l'angolo di assetto è concorde con l'angolo di sterzo ($\beta_p \rightarrow \beta_0$), la ruota dell'avantreno ha raggio di curvatura R maggiore, rispetto alla ruota del retrotreno. Al crescere di u , l'angolo β_p cala fino ad annullarsi per un certo valore u_β , definito come:

u_β : velocità di tangenza (tangent speed), caso limite in cui $\beta = 0$

$$u_\beta = \sqrt{\frac{C_2 \cdot L \cdot b}{a \cdot m}}$$

(si ricava dalla formula di N_p , ponendo $N_p = 0$)
 per cui $\Rightarrow m u^2 \cdot a = C_2 \cdot L \cdot b$

$$\Rightarrow d_{sp} - d_{zp} = \frac{m \cdot b}{L \cdot C_1} \cdot \ddot{a}_y - \frac{m \cdot a}{L \cdot C_2} \cdot \ddot{a}_y$$

Espresso in funzione di k_y : $d_{sp} - d_{zp} = \left(\frac{k_y \cdot u^2}{L + k_y \cdot u^2} \right) \cdot \delta = k_y \cdot u \cdot r_p$

$\det(A) = \frac{C_1 C_2 L}{m \cdot J_z} \left(\frac{L}{u^2} + k_y \right)$, con $\det(A) = 0$ è possibile ricavare u :

$k_y < 0$, veicolo sovsterzante \Rightarrow velocità critica: $u_{cr} = \sqrt{-\frac{L}{k_y}}$

$k_y > 0$, veicolo sottosterzante \Rightarrow velocità caratteristica: $u_{car} = \sqrt{\frac{L}{k_y}}$

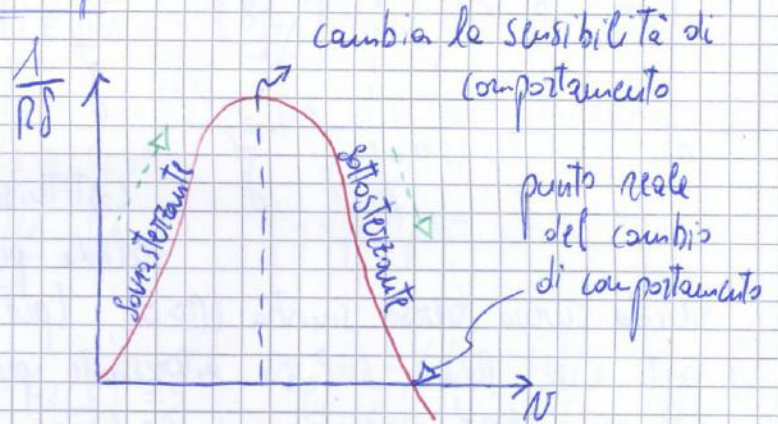
nel caso $u = u_{car}$ il guadagno di velocità d'imbarcata "r_p" è massimo (Yaw velocity gain)

$$\left(\frac{r_p}{\delta} \right)_{max} = \frac{u}{L + k_y \cdot u^2}$$

Alla velocità caratteristica u_{car} si ha $\delta_{car} = \frac{2L}{R_p}$, l'angolo di sterzo è il doppio di quello necessario in condizioni di deriva nulle \Rightarrow condizione instabile $k_y > 0, u = u_{car} \Rightarrow \delta = 2 \cdot \gamma$

$\frac{\ddot{a}_y}{\delta}$: guadagno di accelerazione laterale, $\frac{\beta}{\delta}$: guadagno dell'angolo di assetto

$$\frac{1}{R_p} : \frac{1}{R \cdot \delta} = \frac{1}{\frac{L}{R_p} \left(1 + k_y \cdot \frac{u^2}{L} \right) \cdot \delta} \approx \frac{1}{L} : \text{guadagno di curvatura (caso cinematico)}$$



$\frac{d}{du} \left(\frac{1}{R\delta} \right) = 0$, nel punto critico o massimo, cambia la percezione del veicolo

k_y cresce $\Rightarrow \frac{1}{R\delta}$ cresce, aumenta il sovsterzo

k_y diminuisce $\Rightarrow \frac{1}{R\delta}$ diminuisce, aumenta il sottosterzo

$$\left(\frac{\ddot{a}_y}{\delta} \right) \propto u$$

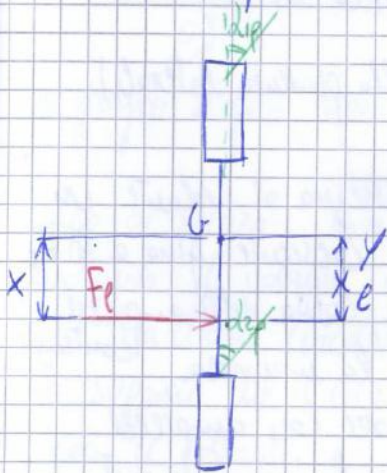
- Forza di trazione. Utilizzando il valore di F_{x2} , ottenuto nel monostacco classico, si ricava la forza di trazione esercitata dalle ruote motrici per mantenere il veicolo in moto stazionario. P : regime

$$F_{x2,p} = -m v_p \rho_p + F_{y1,p} \delta_1 + P_{acc} = \frac{C_1 C_2 (C_1 a^2 + C_2 b^2) (m \cdot u)^2 \delta_1^2 + \frac{1}{2} \rho S C_x u^2}{[C_1 C_2 L^2 - m u^2 (C_1 a - C_2 b)]^2} \delta_1^2 + \frac{1}{2} \rho S C_x u^2$$

Se $u \rightarrow u_{cr} \Rightarrow F_{x2,p} \rightarrow \infty$ a meno che $\delta_1 = 0$, condizioni di moto rettilineo. Il modello si presenta poco realistico, tranne che in condizioni di marcia rettilinea.

= Spinta laterale a cui è soggetto un veicolo

L'ipotesi è che la forza sia costantemente perpendicolare all'asse del veicolo, tale forza esterna, chiamata F_e , può essere dovuta alla presenza di vento trasversale o ad una pendenza laterale. Nel caso F_e spinga da sinistra verso destra:



$$m(\dot{v} + u z) = F_{y1} + F_{y2} - F_e$$

$$J_z \cdot \ddot{\varphi} = F_{y1} \cdot a - F_{y2} \cdot b - F_e \cdot x \quad (\text{con } \dot{v} = 0)$$

Eq. del moto nella forma $\ddot{w} = [A] \cdot \bar{w} + [B] \delta_v$

$[A]$ $[B]$ si somma $[B]_F = - \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \\ \frac{x}{J_z} \end{pmatrix} \cdot F_e \Rightarrow$ componente spinta laterale

$$[B]_{ris} = [B] + [B]_F$$

Si risolve $-[A] \bar{w}_p = [B]_{ris}$, con $\dot{v} = 0$ si ottiene:

$$v_p = \frac{[x(C_1 a - C_2 b + m u^2) - (C_1 a^2 + C_2 b^2)] u}{C_1 C_2 L^2 - m u^2 (C_1 a - C_2 b)} \quad \text{velocità laterale a regime}$$

$$r_p = \frac{[C_1 a - C_2 b - x(C_1 + C_2)] u}{C_1 C_2 L^2 - m u^2 (C_1 a - C_2 b)} \cdot F_e \quad (\exists x \mid r_p = 0 \Rightarrow x = e)$$

$$x = e + y \quad \text{con} \quad e = \frac{C_1 a - C_2 b}{C_1 + C_2} \Rightarrow r_p = \frac{-y (C_1 + C_2) u}{C_1 C_2 L^2 - m u^2 (C_1 a - C_2 b)} \cdot F_e$$

Se $y = 0 \Rightarrow x = e$, con F_e applicata il suo effetto è traslante, ma non imbardante a causa di $d_{xp} = d_{ep}$ ($r_p = 0$)

$e > 0$: l'effetto è sovrasterzante ($C_1 a - C_2 b > 0$) \rightarrow per curva verso sinistra $r_p > 0$

$e < 0$: l'effetto è sottosterzante ($C_1 a - C_2 b < 0$) \rightarrow per curva verso sinistra $r_p > 0$

$\frac{e}{L}$: margine di stabilità (in vetture medie $-0,05 - 0,07$)

È da notare che la presenza di F_e non influenza in alcun modo k_y e k_p

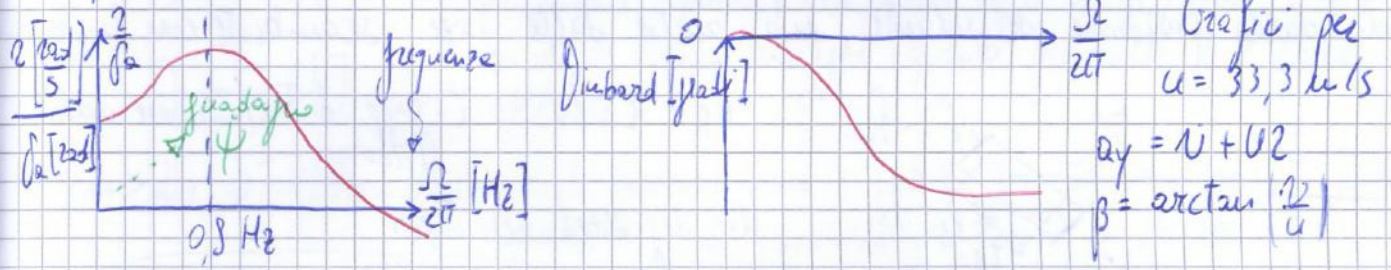
È possibile ricavare $X_p = (N_p, z_p)$ con $X_p \in \mathbb{C}$, ricavando $\frac{V_p}{j\omega}$, $\frac{z_p}{j\omega}$

Solo le ruote anteriori sono sterzanti: $J_1 = J_2 \sin|\delta|$, $J_2 = 0$

$$\frac{V_p}{j\omega} = \frac{C_1 u [C_2 b L - u m a^2 + i u L J_2]}{C_1 C_2 L^2 - m u^2 (C_1 a - C_2 b + J_2 \Omega^2) + i u \Omega [J_2 (C_1 + C_2) + m (C_1 a^2 + C_2 b^2)]}$$

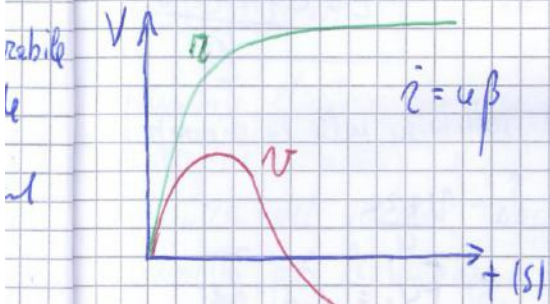
$$\frac{z_p}{j\omega} = \frac{C_1 u [C_2 L + i u \Omega m a^2] - u \Omega J_2}{C_1 C_2 L^2 - m u^2 (C_1 a - C_2 b + J_2 \Omega^2) + i u \Omega [J_2 (C_1 + C_2) + m (C_1 a^2 + C_2 b^2)]}$$

In questa manovra J_2 assume una certa rilevanza



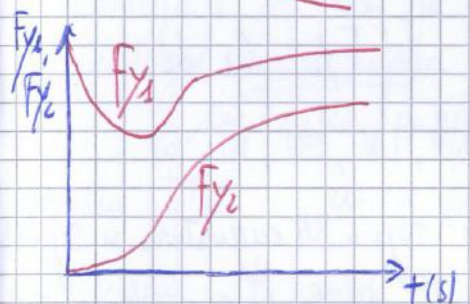
Nei grafici si può riportare anche $\frac{\beta}{\omega} = f\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)$, $\beta[\text{in gradi}] = f\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)$

Colpo di sterzo: manovra che comprende una rotazione istantanea dello sterzo, ruotando il volante di δ_0 gradi e attendendo che il veicolo si stabilizzi lungo una traiettoria circolare (anche in questo caso è rilevante il valore di J_2). Si suppone che il colpo di sterzo avvenga in un tempo nullo e che sia mantenuto con u costante.



$\psi = \phi$ aumenta fino ad un picco max. \rightarrow sovrallongazione, il picco dipende dallo smorzamento del sistema. (nel picco \equiv regime)
 $u > 0$ sottosterzo iniziale, $u < 0$ stabilizzazione

F_{y1} : forza laterale anteriore $F_{y1} = C_1 \cdot \delta_1$
 F_{y2} : forza laterale posteriore $F_{y2} = C_2 \cdot \delta_2$



Essendo il veicolo sottosterzante $d_{sp} > d_{zp}$
 È importante analizzare il caso transitorio corrispondente a W_{ult} , in quanto il caso a regime corrisponde alla manovra di steering pad.
 \Rightarrow nel transitorio si ha dipendenza dagli autovalori λ_1, λ_2 .

$$d_{sp} = \frac{m b}{L C_1} \cdot \tilde{\omega}_1$$

$$d_{zp} = \frac{m a}{L C_2} \cdot \tilde{\omega}_2$$

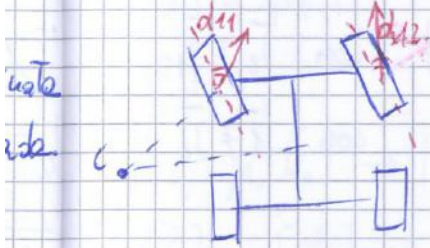
Applicando il modello con pneumatici rilassati per cui d : lunghezza di rilassamento del pneumatico

Velocità critica: $U_{cr} = \sqrt{-\frac{L}{k_2}}$

La cedevolezza elastica del veicolo aumenta il sottosterzo, stabilizzando il veicolo

Aumentando $d_s - d_1 \Rightarrow$ aumenta d_1 (nel caso ideale)

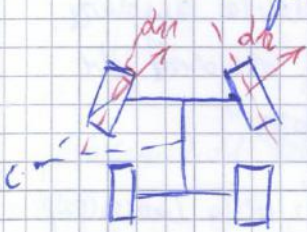
Influenza della convergenza delle ruote: come è stato già visto, in un modello di sterzatura con ruote parallele, in cui avviene sterzatura cinematica all'anteriore vale la condizione: $d_{11} > d_{12}$



La massima forza laterale si ottiene per angoli di deriva lievemente superiori alle derive delle ruote esterne e per angoli di deriva maggiori quanto più alto è il carico verticale.

$d_{11} > d_{12} \Rightarrow$ difetto: il limite di aderenza viene raggiunto in istanti differenti nelle ruote anteriori, ciò paralizza la tenuta di strada.

Soluzione: si montano le ruote dello stesso asse non parallele, ma con una certa convergenza (miglioramento $d_{12} > d_{11}$, migliorando il trasferimento di carico, la stabilità e l'inserimento in curva.



Per garantire una certa prontezza d'inserimento in curva si adotta il controllo della convergenza (con convergenza negativa).

SOSPENSIONI

Elementi elastici che migliorano l'handling (le ruote non perdono il contatto con la superficie stradale) e il comfort dei passeggeri. Hanno un effetto diretto sulla dinamica del veicolo, garantendo una maggiore mobilità della cassa, e un effetto indiretto per le variazioni d'assetto che impongono alla ruota (uscita di camber e di convergenza, che non fa lavorare la ruota in condizioni ideali).

Si distingue massa sospesa da quella non sospesa

m_s : cassa, passeggeri m_n : sospensioni, ruote, elementi di collegamento

massa totale $m = m_s + m_n$ Netto spazio 6 GDL per il veicolo (m_s)

Michiano Ψ : angolo d'imbardata, φ : angolo di beccheggio, θ : angolo di rollio

Da notare che le rotazioni non sono commutative rispetto alle traslazioni

$R, P, Y \rightarrow 12$ permutazioni possibili per rendere il sistema autoveicolo definito

$[R, P, Y]$ rollio - beccheggio - imbardata \rightarrow sequenza tipica utilizzata

Le matrici di rotazione R_1, R_2, R_3 sono ortogonali tra loro

Proprietà matrici: $A \cdot A^T = I \quad A^T \cdot A = I \Rightarrow \det(A) = \det(A^T)$

$i=1,2,3 \quad R_i^{-1}(\alpha) = R_i^T(\alpha) = R(-\alpha)$ invertire matrice \equiv matrice con angle opposto di rotazione

Secondo lo schema generale che porta da $(\bar{i}_0, \bar{j}_0, \bar{k}_0)$ a $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ si ottiene:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = R_1(\varphi) \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_1(\varphi) R_2(\theta) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_1(\varphi) R_2(\theta) R_3(\psi) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$(\bar{i}_2, \bar{j}_2, \bar{k}_2) \rightarrow (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$, poiché $\bar{i}_2 = \bar{i} \Rightarrow R_1(\varphi) = I$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_2(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_2(\theta) R_3(\psi) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Sviluppando i calcoli si ottiene:

- velocità di rollio
- velocità di beccheggio
- velocità di imbardata

$$\begin{aligned} p &= \dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ q &= \dot{\theta} \cos \theta + \dot{\psi} \sin \theta \cos \theta \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta \cos \theta - \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

(fino a 180°)

Approssimazione valida negli autoveicoli φ, θ modesti \Rightarrow $\sin \theta \approx \theta \quad \sin \varphi \approx \varphi$
 $\cos \theta \approx 1 \quad \cos \varphi \approx 1$

$$p = \dot{\varphi} - \dot{\psi} \cdot \theta \quad q = \dot{\theta} + \dot{\psi} \cdot \varphi \quad r = \dot{\psi} - \dot{\theta} \cdot \varphi$$

- velocità del baricentro della massa sospesa $\bar{V}_0 = (x_0, y_0, z_0) \rightarrow$ nel rif. fisso

Ne gli assi corpo (u, v, w)

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = R_1(\varphi) R_2(\theta) R_3(\psi) \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

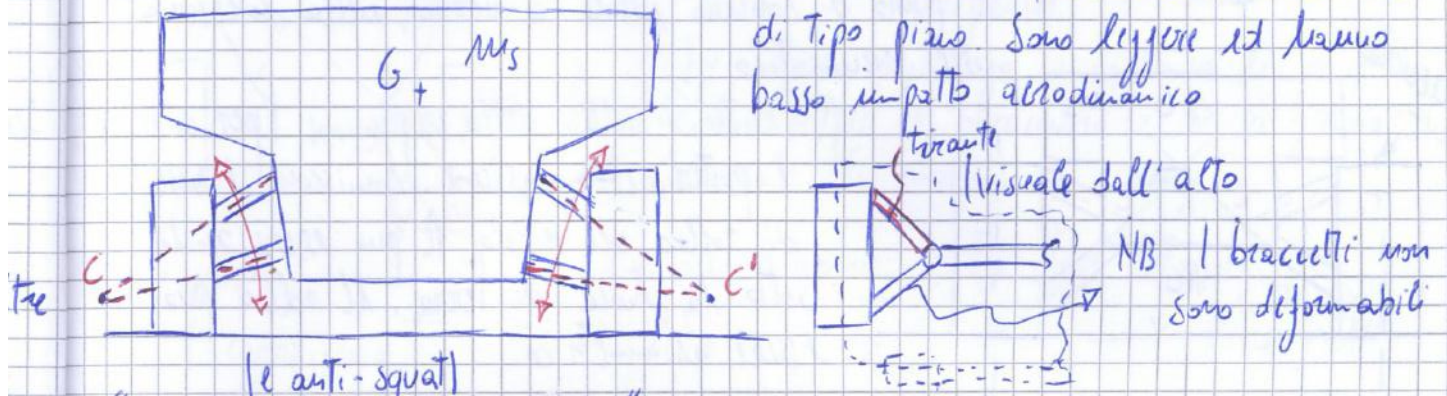
u : vel. longitudinale, v : vel. trasversale
 w : vel. normale

in cui $R = R_1(\varphi) \cdot R_2(\theta) \cdot R_3(\psi) \Rightarrow R = R(\varphi, \theta, \psi)$

Si ricava dal sistema: $u \approx \cos \psi \cdot x_0 + \sin \psi \cdot y_0 - \dot{\theta} z_0 \dots$

- Definizione elastocinematica di sospensione: collegamento del mozzo ruota con la cassa, tramite opportuni cinematicismi, è necessario dotare ogni sospensione di molle (elementi flessibili elastici) per contrastare il movimento relativo e ripristinare la configurazione di riposo con delicatezza. In fine sono necessari ammortizzatori, per limitare l'ampiezza delle oscillazioni in condizioni di risonanza. Il comportamento a compressione della sospensione è diverso rispetto a quello di estensione. ideale
 Il comportamento dei cinematicismi (insieme di connessioni e di giunti) sarà considerato

- Sospensioni a quadrilateri trasversali: collegamento a cinematici piani, cioè a quadrilatero articolato. Si ricavano facilmente i centri di velocità C e C' , il moto relativo tra mozzo e albero è di tipo piano. Sono leggere ed hanno basso impatto aerodinamico.



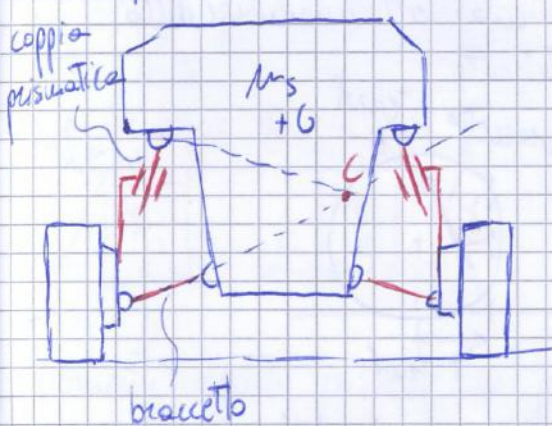
(e anti-squat)
 "Effetto anti-lift o anti-dive" → Anti-dive: una percentuale della forza d'inerzia si scarica lungo i braccetti della sospensione, invece di essere scaricata sulla molla, evitando il beccheggio del veicolo. Letteralmente dive = schiacciamento dell'avantreno in frenata (inclinata).

0% anti-dive, il carico sul braccetto è nullo, è interamente distribuito sulla molla.
 100% anti-dive, il carico è interamente distribuito sui braccetti.

lift = alzamento dell'avantreno, squat = schiacciamento retrotreno (in accelerazione)

Il braccetto è composto da due tiranti (o punzoni) che eliminano 2 GDL.

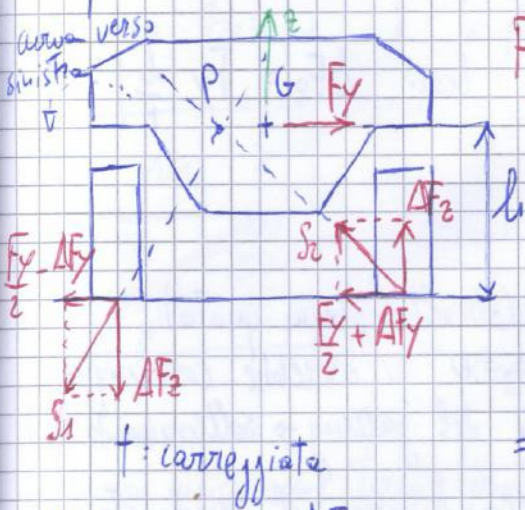
- Sospensioni MacPherson: si ottengono dalle quadrilateri trasversali sostituendo la coppia rotoidale con una coppia prismatica. Il numero di GDL non cambia.



Il centro di velocità C si ottiene come punto d'intersezione tra retta del braccetto e la perpendicolare alla direzione della coppia prismatica. Si riducono al minimo gli elementi necessari, ha poco ingombro trasversale, è una soluzione semplice. Il moto è spaziale, per cui ad ogni vista corrisponde un centro teorico di rotazione.

- Sospensioni ad assale rigido: i mozzi delle due ruote sono fra loro rigidamente collegati, l'assale rigido viene scelto quando è importante la robustezza, ma non la precisione della sospensioni (fuoristrada, autocarri). La posizione del punto C non dipende solamente dai cinematici, ma anche dalle forze agenti sul sistema. L'assale rigido è guidato trasversalmente mediante una barra Panhard.

- Equilibrio in curva di un solo asse



$$F_y = m \cdot \dot{y}$$

il tipo di sospensioni non è specificato.

F_y : forza centrifuga a distanza h da terra passante per il baricentro $G \Rightarrow$ si forma durante la marcia in curva

Eq. alle rotazioni:

$$F_y \cdot h = \Delta F_z \cdot t$$

$$\Rightarrow \Delta F_z = F_y \cdot \frac{h}{t}$$

moto unif. $(v > vt)$

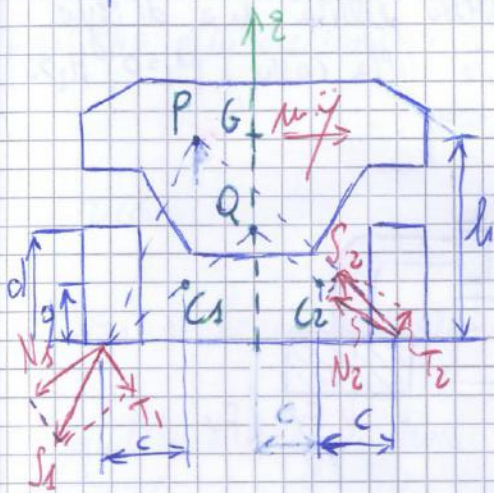
Valutazione $\Delta F_y \rightarrow$ occorre conoscere d_{n1} e d_{n2} . Si suppone che $d_{n1} \approx d_{n2} \approx d$

$$\frac{F_y}{2} \pm \Delta F_y = f(d, \frac{F_z}{2} \pm \Delta F_z)$$

a regime le forze non dipendono dalla rigidità delle molle.

ΔF_y dipende dal tipo di sospensione \rightarrow si considera separatamente caso per caso
 Tramite ΔF_y si studia l'equilibrio interno per valutare lo spostamento di ciascuna ruota rispetto alla cassa.

• Sospensioni a ruote indipendenti



Q : centro di rotazione C_1, C_2 : centri di rotazione (o delle velocità) di ciascun pezzo rispetto alla cassa del veicolo. d : componente assorbita da molle N_1 e N_2 vengono equilibrate dai braccetti delle sospensioni e quindi non richiedono l'intervento delle molle.

T_1 e T_2 sono equilibrate dal solo intervento delle molle e costituiscono il motivo di deformazione delle molle.

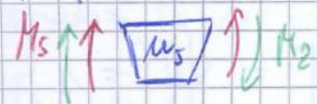
Momenti agenti rispetto ai punti C_1 e C_2 :

$$M_1 = \left(\frac{F_y}{2} - \Delta F_y \right) \cdot q - \Delta F_z \cdot c = \left(\frac{F_y}{2} \cdot q - \Delta F_z \cdot c \right) - \Delta F_y \cdot q = -M_2 - M_s$$

$$M_2 = \left(\frac{F_y}{2} + \Delta F_y \right) \cdot q - \Delta F_z \cdot c = \left(\frac{F_y}{2} \cdot q - \Delta F_z \cdot c \right) + \Delta F_y \cdot q = -M_2 + M_s$$

$$M_2 = \Delta F_z \cdot c - \frac{F_y}{2} \cdot q$$

$$M_s = \Delta F_y \cdot q$$



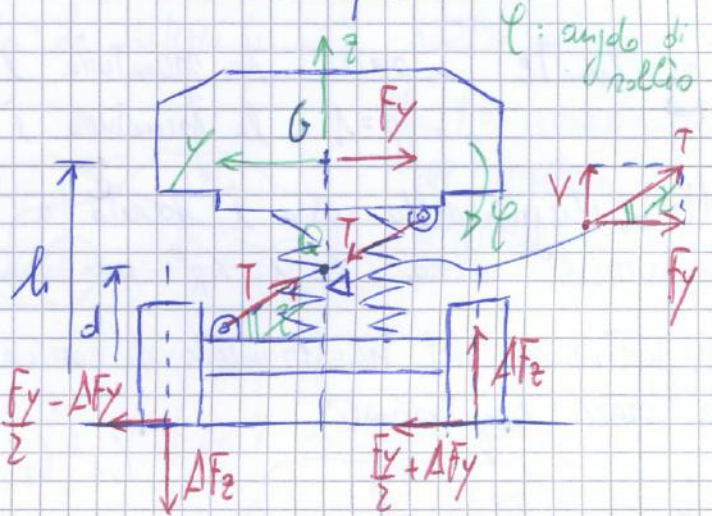
M_2 : momento responsabile del rollio M_{roll}

M_s : momento responsabile del sollevamento M_{soll}

• Sospensioni ad assale rigido: assale guidato da una sbarra Panhard, l'assale è senza trazione. X : angolo d'inclinazione della sbarra rispetto l'orizzontale



Schema dell'equilibrio



si) assale rigido
La sbarra agisce come tirante-puntone.
La massa della sbarra viene considerata trascurabile.

$$F_y = T \cdot \cos X$$

T: forza esercitata dalla sbarra

Equilibrio alla rotazione: $\Sigma \rightarrow F_y(l-d) - k_\phi \cdot \phi = 0$

k_ϕ : rigidità di rollio

k_z : rigidità a squotamento verticale

(Le rigidità miste risultano nulle $k_{\phi z} = 0$) Se $\phi = 0$ non si ha il rollio della cassa.

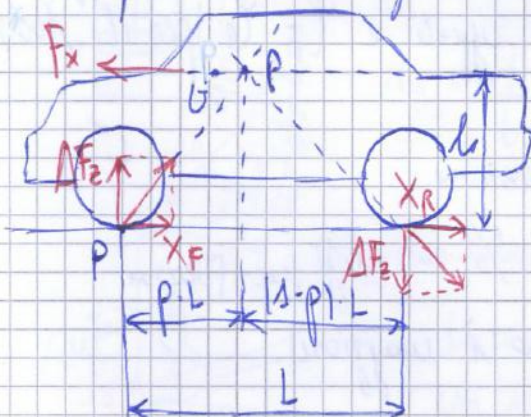
o) Equilibrio alla direzione $\Sigma \downarrow -V - k_z \cdot \Delta z_0 = 0 \Rightarrow |V| = k_z \cdot |\Delta z_0|$

$$V = F_y \cdot \tan X$$

Si ricava: $\Delta z_0 = - \frac{F_y \cdot \tan X}{k_z}$ (X viene mantenuto piccolo)

(Non si hanno variazioni di camber a cause del rollio della cassa $\Gamma = 0$)

≡ Equilibrio in frenatura. → Analisi globale dell'equilibrio, escludendo gli istanti iniziali, il moto della cassa dovuto alle sospensioni ha scarsa influenza sulle prestazioni in frenatura su strade piane.



Frenatura $\ddot{x} < 0$ $F_x = \mu \ddot{x}$

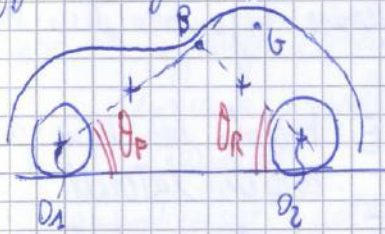
F: front R: rear

All'equilibrio: $\Delta F_z \cdot L = F_x \cdot l$

$$\Delta F_z = F_x \cdot \frac{l}{L}$$

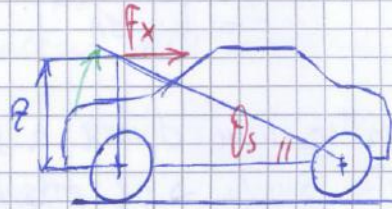
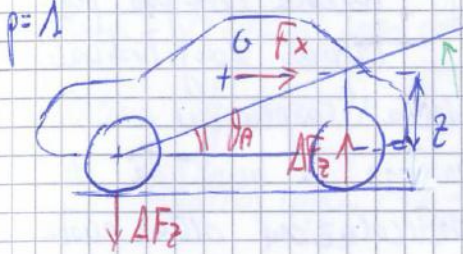
$$\rightarrow F_x = X_F + X_R$$

- Effetto lift/squat durante la trasmissione



Supponendo O_1, O_2 centri ruote, si ha una % di anti-diva dipendente da $\Delta\alpha_F \neq \Delta\alpha_R$ e $\Delta\alpha_R \neq \Delta\alpha_P$.
Per $\Delta\alpha_P = \Delta\alpha_R$ (altezza G) \Rightarrow 100% anti-diva

Squat \Rightarrow abbassamento del retrotreno in accelerazione.



Anti-lift \rightarrow nei veicoli a trazione anteriore $\Delta\alpha$ (100% anti-lift $z = h$)

Anti-squat \rightarrow nei veicoli a trazione posteriore $\Delta\alpha$ (100% anti-squat $z = h$)

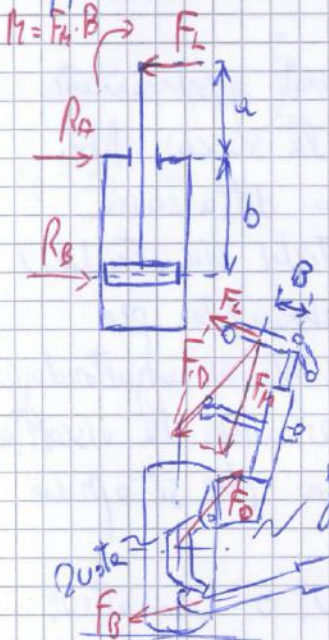
$$\% AL = \frac{z}{h} \cdot \tan \Delta\alpha \cdot 100$$

$$\% AS = \frac{z}{h} \cdot \tan \Delta\alpha \cdot 100 \quad (\text{in percentuali})$$

- Soluzioni costruttive per vari modelli di sospensioni.

• Multi-link è composto da: organi portanti (strutturali) + organi elastici primari + organi elastici secondari + elementi dissipativi

• MacPherson per assale anteriore: Traversa di meccanica (consente il passaggio dell'albero di trasmissione + bracci + boccole elastiche + snodo sferico + montante + cuscinetto + mozzo + disco freno + cerchio ruota + semiassie + pinza freno + staffa + corpo ammortizzatore + piattello + molla + tassello* + stelo + Tampone di fine corsa + Trante sterzo + scatola sterzo + bielletta + barre antirullo (per coppie antirullo) (* i tasselli sono doppiati \rightarrow 1 per molla, 1 per ammortizzatore)



• Forze agenti sullo stelo di collegamento alla scocca.
Analisi di tipo statico \rightarrow equazioni di equilibrio

$$R_A = \frac{1}{b} [F_z \cdot (a+b) - M]$$

$$\Delta\alpha = \frac{b}{\Delta EL} [F_z \cdot a - M]$$

$$R_B = \frac{1}{b} [F_z \cdot a - M]$$

$$R_T = R_A + R_B$$

(Per eliminare il carico di inflessione dello stelo si inclina l'asse di spinta della molla).

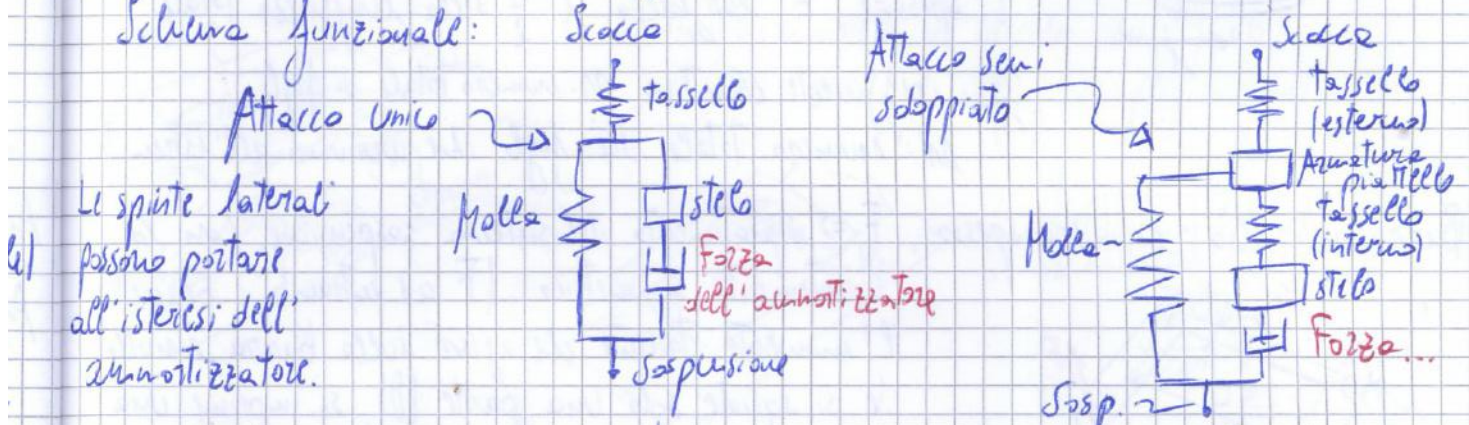
La sospensione è collegata alla scocca (unus) tramite un supporto specifico \rightarrow duomo di scocca

se gestite in parte dal pilota. Puntigli principali delle tipologie di ammortizzatore:

- bitubo → ingombri contenuti, diametro minimo e vetture di tipo Standard.
- monotubo → buone prestazioni, elevati smorzamenti con buona risposta nell'off road e sprint.

Tasselli ammortizzatore: collegano la m.s. alla m.s. senza mantenere rigido il sistema, le forze non costanti generano delle vibrazioni indesiderate

Schemi funzionali:



Le spinte laterali possono portare all'isteresi dell'ammortizzatore.

- Quadrilateri: alti per strada, bassi per assetto abbassato da pista. Componenti: braccio inferiore + braccio sup. + montante + snodi sferici + gruppo ammortizzatore + snodo elastico + forcella + pre duoni
- Sospensioni multilink: più complesse, ma più versatili e performanti. Per la progettazione e i punti virtuali sono richiesti sistemi multibody.

Rigidità del sistema.

Rigidità equivalente della molla $k_s = \frac{G \cdot d^4}{64 \cdot R^3 \cdot N}$
 N: numero di spire efficaci

Rigidità equivalente della ruota $k_w = \frac{F_B}{\varphi_B}$

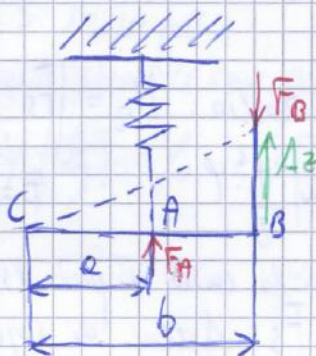


Molla verticale

Per molla: $k_s = \frac{F_A}{\varphi_A}$

$\varphi_B = \varphi_A \cdot \frac{b}{a}$

De: $\varphi_B \cdot a = \varphi_A \cdot b$



$F_A \cdot a = F_B \cdot b$
 $\Rightarrow F_B = F_A \cdot \frac{a}{b}$

$k_w \cdot \varphi_B = k_s \cdot \varphi_A \cdot \frac{a}{b}$

$\Rightarrow k_w = \frac{F_A \cdot \frac{a}{b}}{\varphi_A \cdot \frac{a}{b}} = k_s \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2$

$k_w = k_s \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2$ valido per molla verticale

COMFORT / HANDLING: vengono influenzati dalle rigidità delle molle, e dai coefficienti di smorzamento degli ammortizzatori. Per il comfort la variabile più significativa è l'accelerazione verticale.

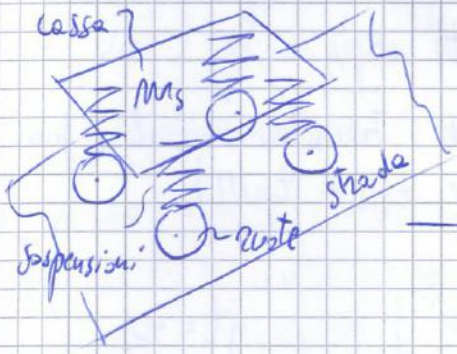
NVH (noise vibrations harshness) è una misura di confortevolezza del veicolo che tiene conto dell'irregolarità del terreno, delle vibrazioni provenienti dalle ruote (quelle del motore vengono trascurate) e il livello di rumorosità prodotta dal veicolo durante la marcia.

21004

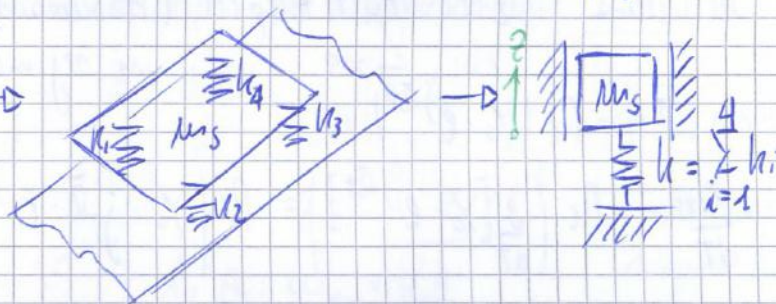
Te.

i)

2

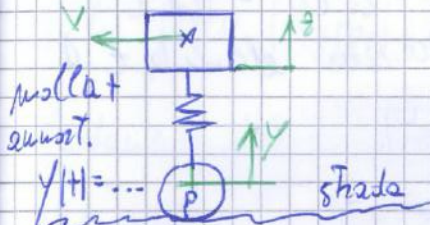


Si adotta un modello di veicolo semplificato:
 $7 \text{ GDL} \rightarrow 1 \text{ GDL}$ (semplificazioni)



Ipotesi semplificative: moto unidimensionale z , pneumatico rigido con solo massa sospesa m_s oscillante, comportamento lineare delle sospensioni con rigidità equivalente k_i di quattro molle in parallelo, la velocità trasversale è nulla $v \approx 0$. Tali semplificazioni sono ragionevoli per frequenze $f < 5 \text{ Hz} \approx 30 \text{ rad/s}$

2



Modello monosospensione (quarter car model): semplificato a 1 GDL, si trascura anche l'oscillazione della massa non sospesa m_n .

Singola molla $\rightarrow m_i \approx \frac{m_s}{4}$ (sistema equivalente)



P: punto di contatto col terreno
 In genere $m_{\text{asse ant.}} > m_{\text{asse post.}}$
 Le irregolarità del manto stradale sono periodiche

Disturbo generato: $|Y/Z| = y_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot z\right) \rightarrow$ eccitazione armonica del sistema

pulsazione: $\bar{\omega} = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{\lambda}$ periodo: λ velocità: $v = \frac{\Delta z}{\Delta t}$ è costante

$\Rightarrow z = v \cdot t$, sostituendo nel disturbo $Y(t) = y_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot v \cdot t\right) = y_0 \cos(\bar{\omega} t)$

È possibile ricavare la risposta in frequenza del sistema.

pulsazione che eccita il sistema $\bar{\omega}$

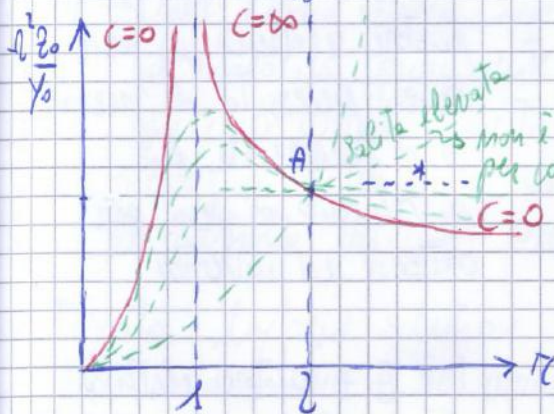
Le frequenze di risonanza ottenute per $C=0$, differiscono dalle frequenze naturali di pulsazione $\omega_n = 2\pi \cdot f_n$ ($f_n \approx 1,1 / 1,3$ Hz)

pulsazione critica di risonanza $\omega_R = \frac{2\pi}{\lambda} v_{crit}$ \Rightarrow velocità critica: $v_{crit} = \omega_R \cdot \frac{\lambda}{2\pi}$

Per frequenze comprese tra 1,1 / 1,3 Hz si sente un basso rumore di fondo durante il moto, i tasselli presentano tutti una lunghezza diversa.

Filtro meccanico: la sospensione lavora come un filtro lascia basso, taglia tutto ciò che è al di sopra di una certa frequenza. (È attivato in cond. di regime)

\ddot{z} : disturbo maggiore all'interno del veicolo per il corpo umano.



$$\ddot{z} = \frac{d^2 \ddot{z}(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} |z_0 \cdot e^{j\omega t}| \Rightarrow \frac{|\ddot{z}_0|}{\gamma_0} = \omega^2 \frac{|z_0|}{\gamma_0}$$

$$\ddot{z} = -\omega^2 z_0 e^{j\omega t}$$

valido per la risposta in frequenza

in A: $\omega_{mp} = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

Per favorire il comfort si sceglie una curva con poche variazioni in A: nell'accelerazione non si ha l'effetto del filtro meccanico.

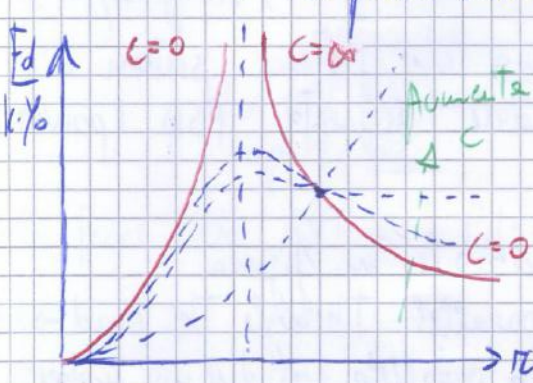
$\Rightarrow \frac{d}{d\omega} \left(\omega^2 \frac{|z_0|}{\gamma_0} \right) = 0$

Da cui si ricavano ottimo: $C_{opt} = \frac{k \cdot m}{2} = \frac{C_{critico}}{2\sqrt{2}}$
 Surrogamento critico: $C_{cr} = 2 \sqrt{k \cdot m}$

si ha jerk (strappo)

* salita ideale = tangente orizzontale

Aumento della ampiezza della forza verticale scambiata col suolo



$F_{st} = m \cdot g$ forza statica

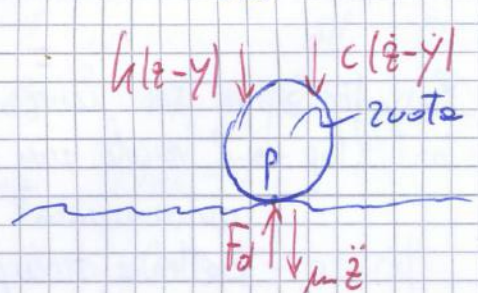
$F_d = c(\dot{z} - \dot{y}) + k(z - y)$ forza dinamica

$$\frac{F_d}{k \gamma_0} = \frac{-\frac{m \omega}{k} \left(\frac{j \omega}{k} \frac{c}{C_{cr}} + 1 \right)}{-\frac{m \omega^2}{k} + j \frac{\omega}{k C_{cr}} + 1}$$

Sospensioni più rigide: \uparrow handling ($C \rightarrow \infty$)

Sospensioni più morbide: \uparrow comfort ($C \rightarrow 0$)

Anche se si può trovare un compromesso



Si interrompe il ICE quando il veicolo si ferma, ottenendo un risparmio di combustibile del 4-5%, è richiesto uno starter aggiuntivo con generatore, per far ripartire il motore termico.

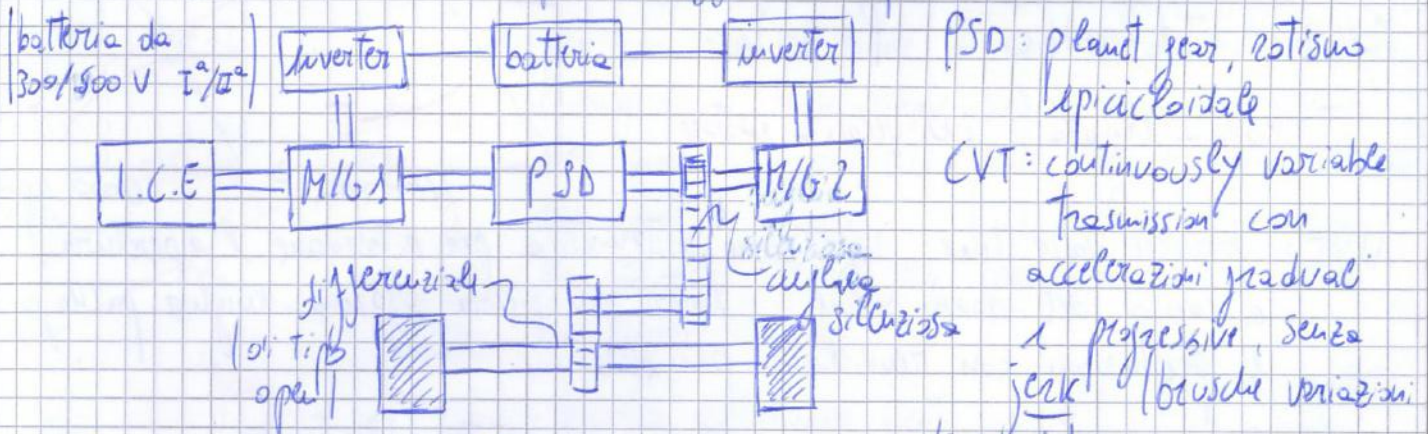
• HV → (hybrid vehicle) il motore termico e il motore elettrico generano la coppia motrice in modo congiunto. Ciò implica un possibile sottodimensionamento (downsizing) del motore termico ICE, il surplus di potenza è fornito dal motore elettrico che può funzionare anche da generatore.

B: batteria M/G: motore/generatore (Mild hybrid)

Al motore di trazione rimane quello termico. La frenata rigenerativa consente di recuperare energia, in genere è riservata ad uno dei due assi.

• FEV → (full hybrid vehicle) sono in grado di provocare l'avanzamento del veicolo in modalità puramente elettrica (riservata per le basse velocità) quindi sui cicli urbani questi veicoli danno il massimo, tuttavia hanno prestazioni inferiori ai veicoli con ICE ad alte velocità. Hanno logiche di controllo delicate per gestire i flussi di potenza in diverse condizioni.

• Toyota hybrid solution (con due motori elettrici): integra i vantaggi dell'ibrido serie e del parallelo, ma presenta una maggiore complessità della trasmissione ed un peso maggiore complessivo.



PSD: planet gear, rotismo epicicloidale

CVT: continuously variable transmission con accelerazioni graduali e progressive, senza jerk brusche variazioni di coppia.

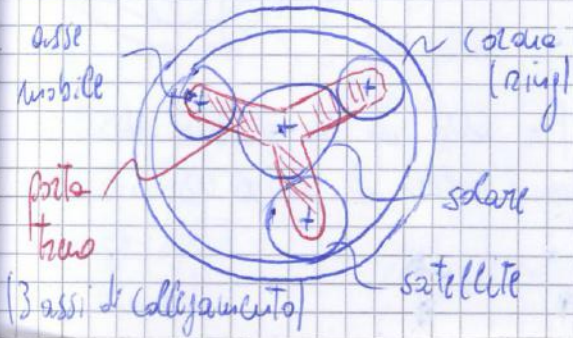
Nella fase di CVT a PM-EVT: \Rightarrow permanent magnet type electric variable transmission.

• Realizzazione del PSD (rotismo epicicloidale) da meccanica applicata

È possibile il funzionamento del sistema secondo diversi flussi di potenza:

Veicolo fermo $\omega_{ICE} = 0$

(rotismo epicicloidale \rightarrow (-carica))



litel Il rotismo epicicloidale ripartisce la coppia distribuita su più assi. Per uno stesso valore di coppia sui due semiasse: $C_{s/2}$ in entrata, $C_{r/2}$ in uscita con due ingressi e un'uscita.

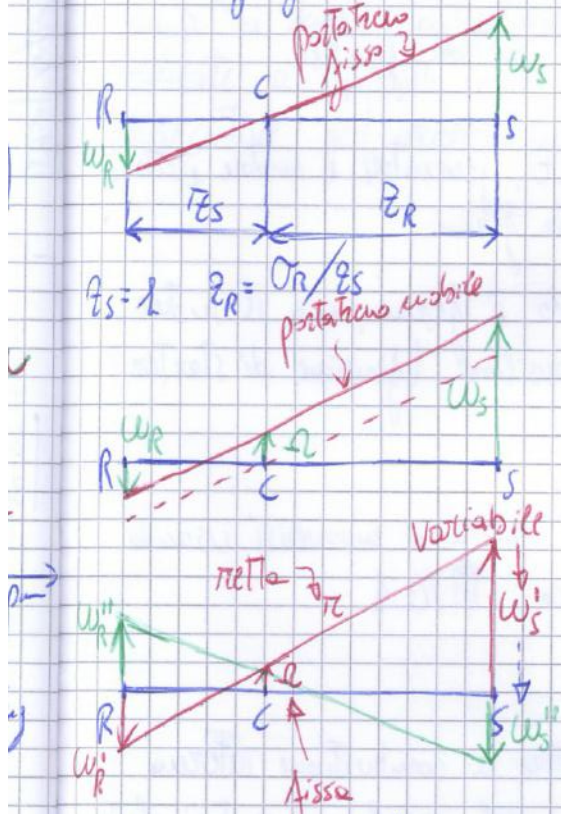
Esat. Equazione di coppia: $T_R + T_s + T_p = 0$, $\mathcal{Q}_R = \mathcal{Q}_s + \mathcal{Q}_{Esar}$ (AGOU su velocità)

Considerando il rendimento unitario $\eta = 1 \Rightarrow$ la potenza si conserva dall'entrata all'uscita del rotismo.

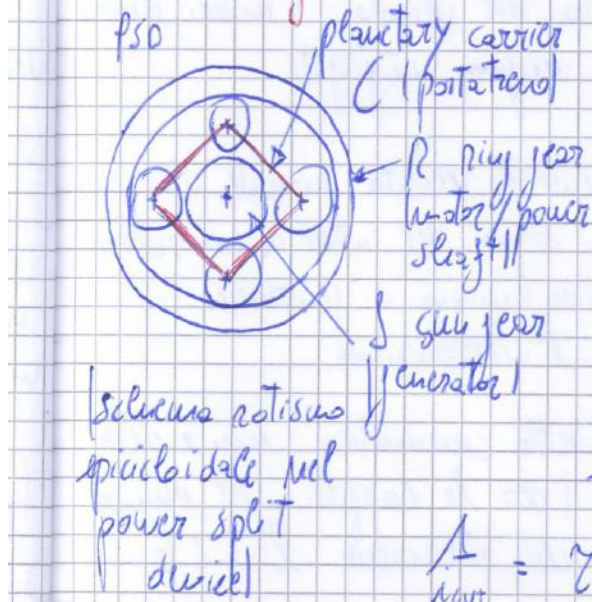
$$T_R \cdot \omega_R + T_s \cdot \omega_s + T_p \cdot \omega_p = 0 \quad V = f(\omega_R) = f(\omega_s, \Omega, \mathcal{Q}_R, \mathcal{Q}_s)$$

$$\frac{T_s}{T_R} = \frac{\mathcal{Q}_s}{\mathcal{Q}_R} \Rightarrow |T_p| = |T_R| \cdot \frac{\mathcal{Q}_s + \mathcal{Q}_R}{\mathcal{Q}_R} = |T_s| \cdot \frac{\mathcal{Q}_s + \mathcal{Q}_R}{\mathcal{Q}_s}$$

- Metodo grafico di risoluzione "Nomogrammi" (Analogia della leva)



Metodo grafico per poter risolvere il rotismo. R indica la ruota, C il portatreno e S il solare. Nel primo caso la velocità ang. del portatreno C è nulla ($\Omega = 0$). Con il portatreno mobile $\Omega > 0$ quindi ω_R e ω_s subiscono una certa traslazione in particolare nel sistema EVT della Toyota Prius si varia la velocità ω_s per cambiare il valore di $\omega_R \Rightarrow$ da notare che il rapporto di trasmissione subisce una variazione, ma non la coppia risultante, che dipende solo dal numero di denti. (Ω è fissa), si varia la ω_s da ω'_s a ω''_s per ottenere un valore maggiore di ω_R .



- Analisi delle coppie agenti.

Equilibrio: $\mathcal{Q}_R \cdot \mathcal{Q}_s = T_s \cdot \mathcal{Q}_R$

$$\Rightarrow \frac{T_s}{T_R} = \frac{\mathcal{Q}_s}{\mathcal{Q}_R} \quad (T_R \text{ dipende solo dal numero dei denti})$$

$$\uparrow T_p = T_R + T_s$$

$$|T_{out}| = T_{ICE} \cdot \frac{\mathcal{Q}_R}{\mathcal{Q}_s + \mathcal{Q}_R} \quad \eta_{CVT} = \frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}$$

T_{ICE} : coppia motore T_{out} : coppia utile in uscita

$$\frac{1}{\eta_{out}} = \eta_{CVT} \quad \eta_{CVT}: \text{rapp. di trasmissione nelle accelerazioni graduali.}$$

è superiore a 6000 rpm (ritenuto a Wsl), per la retroazione è sufficiente W_{6ms}, per cui W₁₅ è mille.

Modelli ibridi dual split: I^a generazione (300V battery) → II^a generazione (500V battery) + ciclo Atkinson

- Classificazione dei cambi manuali automobilistici: (denti elicoidali con innesti sincronizzati)
- Cambi in cascata, per vetture con cambio e motore integrati con assale motore, il differenziale è integrato con il cambio e ciò prende il nome di trasmissione
- Cambi a centralbero, nei veicoli con motore a trazione anteriore longitudinale e con trazione posteriore, la riduzione finale non è integrata con il cambio, ma è collegata attraverso un albero di trasmissione.
- Cambi a doppio centralbero, le ruote dentate possono essere contemporaneamente dedicate a rapporti diversi, gli innesti sono montati appaiati per marce consecutive per riduzione dell'ingombro generale.