



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1365A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Zito

MATERIA: Complementi di Tecnica delle Costruzioni,
Prof.Fantilli

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**



L'Hemisfèric (Planetarium) at the City of Arts and Sciences in Valencia

APPUNTI di COMPLEMENTI di TECNICA delle COSTRUZIONI

Prof. Ing. Alessandro Fantilli

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Edile



aggiornamento gennaio 2015

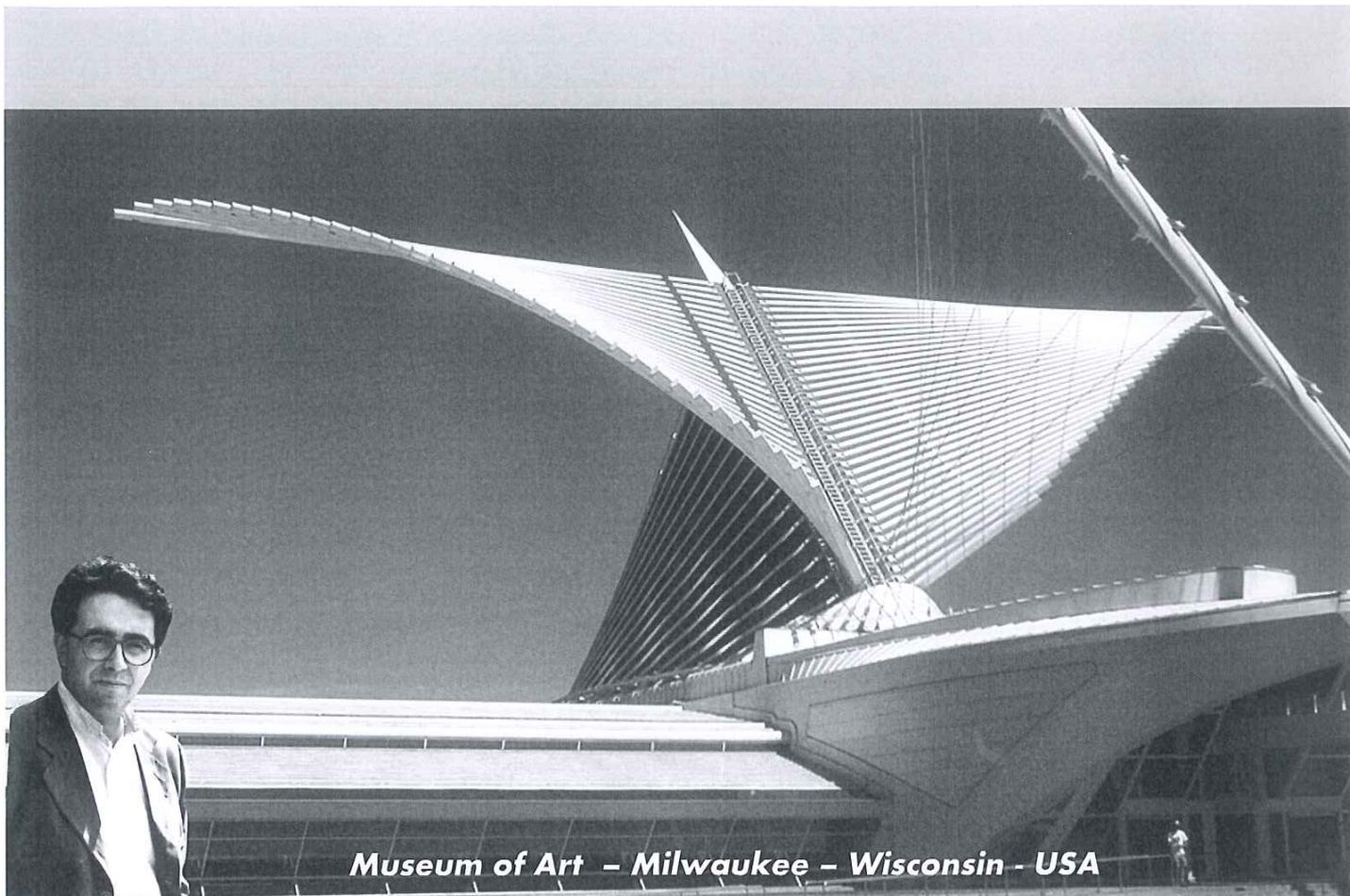


appunti alessandro zito

APPUNTI di COMPLEMENTI di TECNICA delle COSTRUZIONI
Prof. Ing. Alessandro Fantilli

Alessandro Zito

Lezione		Tipologia Lezione	Argomento Lezione	Stato di avanzamento Studio		Percentuale di avanzamento
Numer o	Data			Studiata	Ripassata	
1	02/10/2014	Teoria	Calcolo delle strutture a molte iperstatiche - Metodo delle forze			4,00%
2	03/10/2014	Teoria	Calcolo delle strutture a molte iperstatiche - Metodo degli spostamenti			8,00%
3	07/10/2014	Teoria	Calcolo delle strutture a molte iperstatiche - Metodo del Telaio 4x4			12,00%
4	09/10/2014	Teoria + Esercitazione	Calcolo delle strutture a molte iperstatiche - Metodo del Telaio 4x4			16,00%
5	10/10/2014	Esercitazione	Calcolo delle strutture a molte iperstatiche - Metodo del Telaio 4x4			20,00%
6	16/10/2014	Teoria	Calcolo delle strutture a molte iperstatiche - Metodo del Telaio 6x6			24,00%
7	23/10/2014	Esercitazione	Calcolo delle strutture a molte iperstatiche - Metodo del Telaio 6x6			28,00%
7	23/10/2014	Teoria	Azioni sulle Costruzioni - Combinazione + Disposizione delle azioni			28,00%
8	24/10/2014	Teoria	Azioni sulle Costruzioni - Combinazione + Disposizione delle azioni. Azione Sismica			32,00%
9	31/10/2014	Teoria	Ripartizione dell'azione sismica sui pilastri			36,00%



Museum of Art – Milwaukee – Wisconsin – USA

APPUNTI di COMPLEMENTI di TECNICA delle COSTRUZIONI
Prof. Ing. Alessandro Fantilli

Capitolo Uno
Le strutture a molte iperstatiche

aggiornamento gennaio 2015

alessandro zito

CORSO: COMPLEMENTI di TECNICA delle COSTRUZIONI

DOCENTE: ALESSANDRO ING. FANTILLI

LEZIONE n°: 1

DATA: 2/10/2014

CALCOLO di STRUTTURE a MOLTE IPERSTATICHE

Si devono seguire 3 OPERAZIONI:

CONDIZIONE **○** EQUILIBRIO: AZIONI ESTERNE e SOLLECITAZIONI AGENTI in ogni SEZIONE della STRUTTURA.

CONDIZIONE **●** CONGRUENZA: La STRUTTURA deve avere SPOSTAMENTI e ROTAZIONI COMPATIBILI con i VINCOLI.

● LEGGI COSTITUTIVE: riguardano il MATERIALE, ci dicono qual è la RISPOSTA MECCANICA del MATERIALE.

STRUTTURE ISOSTATICHE: Delle 3 CONDIZIONI, a noi interessa la PRIMA di EQUILIBRIO

STRUTTURE IPERSTATICHE: ci interessano tutte e TRE le CONDIZIONI. Per quanto concerne la CONDIZIONE TRE, il REGIME è ELASTICO LINEARE $\sigma = E \cdot \epsilon$.

PROBLEMA IPERSTATICO -----> può essere RISOLTO

FORZE ←
MOMENTI ←

→ SPOSTAMENTI
→ ROTAZIONI

METODO delle FORZE

METODO degli SPOSTAMENTI

DUALI: il loro PRODOTTO è un LAVORO.

Le INCOGNITE sono QUANTITÀ STATI

CHE

FORZE

MOMENTI

devono rispettare le CONDIZIONI di CONGRUENZA

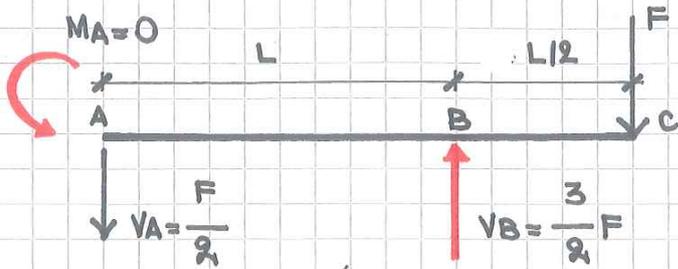
Le INCOGNITE sono SPOSTAMENTI e ROTAZIONI

devono rispettare le CONDIZIONI di EQUILIBRIO

In generale, il METODO PIU' UTILIZZATO è quello degli SPOSTAMENTI.



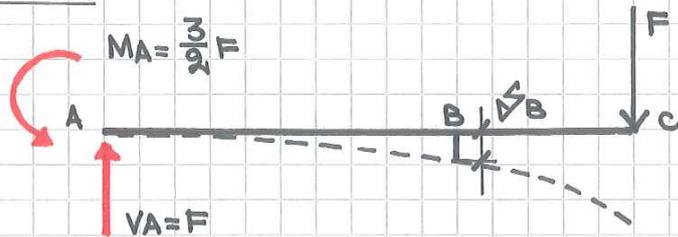
ESISTONO altri METODI che vengono definiti IBRIDI o MISTI, ovvero MIX tra METODO delle FORZE e METODO degli SPOSTAMENTI.



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow +MA + \frac{3}{2}F \cdot L - \frac{3}{2}FL = 0 \Rightarrow MA = 0$$

CASO 2

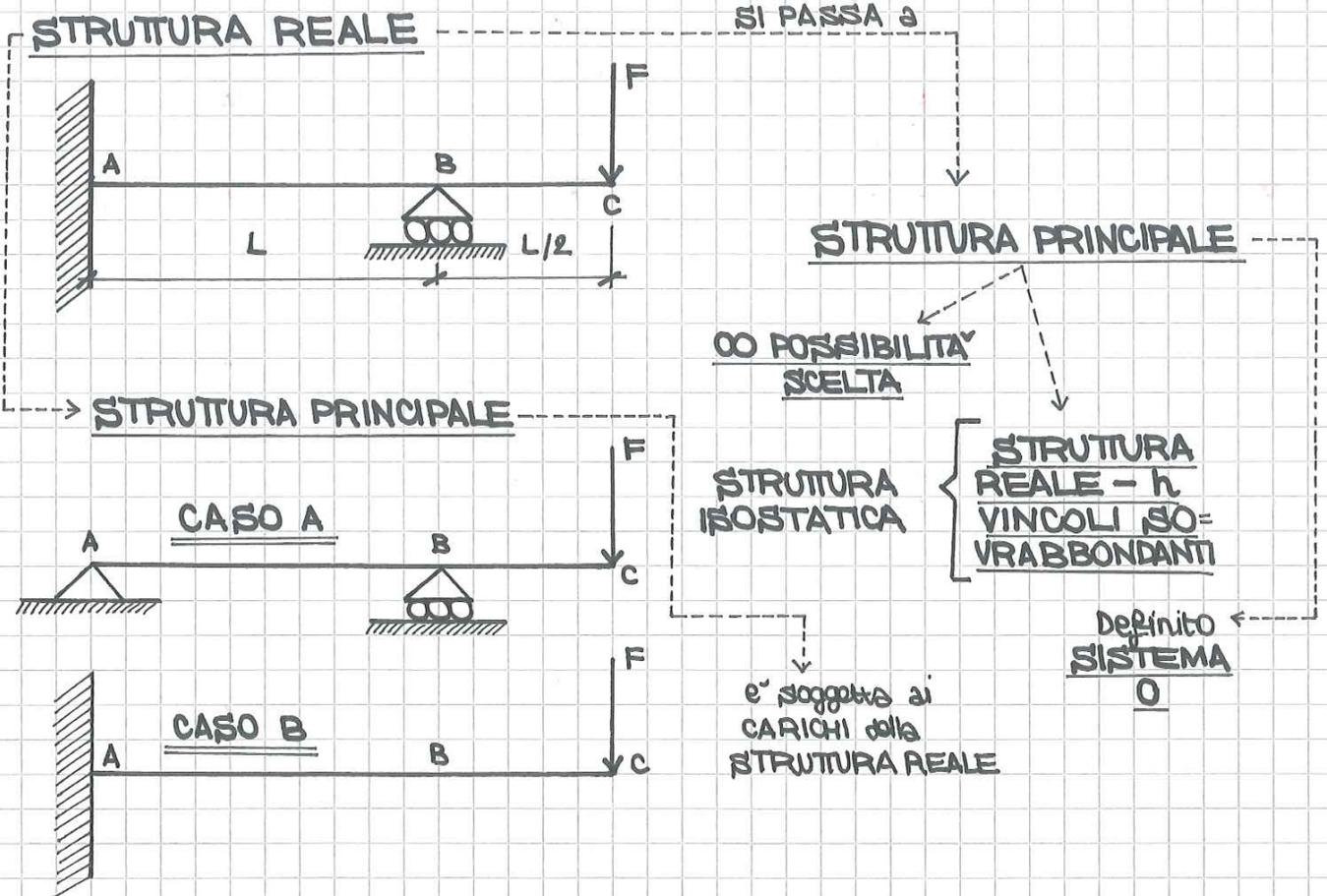
$V_B = 0 \Rightarrow$ imponiamo che la STRUTTURA NON abbia più il CARRELLO.



Il PUNTO B, sulla base della SCELTA FATTA, subisce uno SPOSTAMENTO δ_B , dunque CONDIZIONE NON CONGRUENTE con lo SCHEMA STATICO della STRUTTURA REALE.

METODO delle FORZE

definisco tra le ∞ SOLUZIONI EQUILIBRATE, l'UNICA CONGRUENTE.



CONDIZIONE di EQUILIBRIO STRUTTURALE REALE

COMBINAZIONE di EQUILIBRIO delle DUE STRUTTURE

LEGAME ELASTICO-LINEARE

PRINCIPALE

SUPPLEMENTARE

Nella STRUTTURA REALE

$$\begin{cases} M_b = M_0 + \sum_{j=1}^h x_j M_j \\ T_b = T_0 + \sum_{j=1}^h x_j T_j \\ N_b = N_0 + \sum_{j=1}^h x_j N_j \end{cases}$$

- M_0, T_0, N_0 → MOMENTO STRUTTURA PRINCIPALE
 - M_j, T_j, N_j → MOMENTO STRUTTURA SUPPLEMENTARE
 - x_j → INCOGNITE

Le x_j con $j=1, \dots, h$ sono le INCOGNITE del PROBLEMA.

⇒ L'EQUILIBRIO è già SODDISFATTO. Bisogna IMPORRE le CONDIZIONI di CONGRUENZA.



LADDOVE HO ELIMINATO IL VINCOLO

ROTAZIONE

SPOSTAMENTO

deve essere NULLA/O

EQUAZIONE dei LAVORI VIRTUALI

serve per CALCOLARE → SPOSTAMENTI
→ ROTAZIONI

$$L_{INT}^{A,B} = L_{EST}^{A,B}$$

A ≡ SISTEMA VIRTUALE ≡ j

B ≡ SISTEMA REALE

$$L_{INT}^{j,B} = L_{EST}^{j,B}$$

$$\underline{1 \leq j \leq h}$$

• $\mu_B = \frac{M_0 + \sum_{j=1}^h x_j \cdot M_j}{E\bar{I}} + \bar{\mu}$

• ~~$\varphi_B = \frac{T_0 + \sum_{j=1}^h x_j \cdot T_j}{GA^*} + \bar{\varphi}$~~

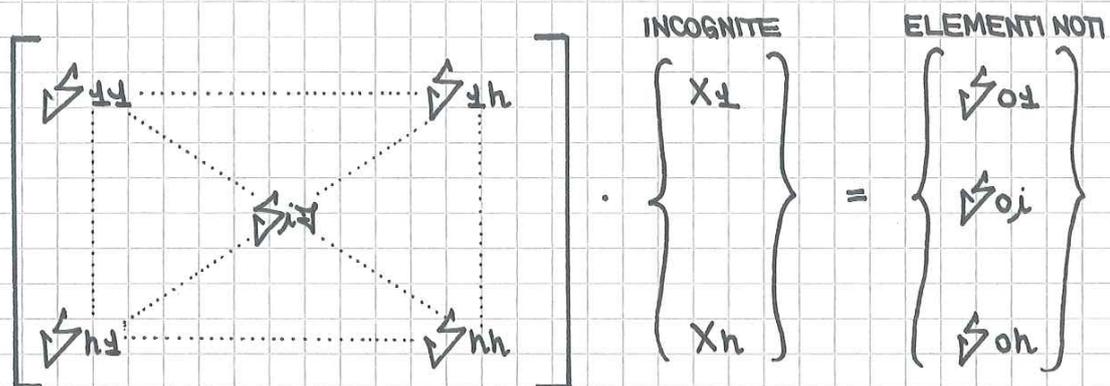
⇒ DEFORMABILITÀ di TAGLIO TRASCURGIBILE

• $\lambda_B = \frac{N_0 + \sum_{j=1}^h x_j \cdot N_j}{EA} + \bar{\lambda}$

⇒ $L_{INT}^{i,B} = \int_L M_A^i \cdot \left(\frac{M_0 + \sum_{j=1}^h x_j \cdot M_j}{E\bar{I}} \right) dz + \int_L N_A^i \cdot \left(\frac{N_0 + \sum_{j=1}^h x_j \cdot N_j}{EA} \right) dz = 0$

⇒ $L_{INT}^{i,B} = \int_L M_j \left(\frac{M_0}{E\bar{I}} + \mu \right) dz + \int_L N_j \left(\frac{N_0}{EA} + \lambda \right) dz +$
 $+ x_1 \left[\int_L \frac{M_j \cdot M_1}{E\bar{I}} dz + \int_L \frac{N_j \cdot N_1}{EA} dz \right] +$
 \vdots
 $+ x_h \left[\int_L \frac{M_j \cdot M_h}{E\bar{I}} dz + \int_L \frac{N_j \cdot N_h}{EA} dz \right] = 0$

È un SISTEMA di h EQUAZIONI in h INCOGNITE



$[D] \cdot \{X\} = \{b\}$

• $\Delta_{i\bar{j}} = \int_L \frac{M_j \cdot M_{\bar{j}}}{E\bar{I}} dz + \int_L \frac{N_j \cdot N_{\bar{j}}}{EA} dz$ $\begin{matrix} 1 \leq j \leq h \\ 1 \leq \bar{j} \leq h \end{matrix}$

• $\Delta_{0i} = - \left[\int_L M_j \left(\frac{M_0}{E\bar{I}} + \bar{\mu} \right) dz + \int_L N_j \left(\frac{N_0}{EA} + \bar{\lambda} \right) dz \right]$

$$\begin{aligned} \Delta_{10} &= \frac{L}{6E\mathcal{I}} \left[0 + 4 \left(-\frac{FL}{4} \right) \left(+\frac{\mu c}{2} \right) + 0 \right] = \\ &= \frac{L}{6E\mathcal{I}} \left[-\frac{FL\mu c}{2} \right] = -\frac{FL^2\mu c}{12E\mathcal{I}} = \int_L \frac{M_0 M_1}{E\mathcal{I}} dz \end{aligned}$$

$$\Delta_{11} = \frac{L}{6E\mathcal{I}} \left[\mu c^2 + 4 \left(\frac{\mu c}{2} \right) \left(\frac{\mu c}{2} \right) \right] = \frac{2\mu c^2 \cdot L}{6E\mathcal{I}} = \frac{\mu c^2 L}{3E\mathcal{I}} = \int_L \frac{M_1^2}{E\mathcal{I}} dz$$

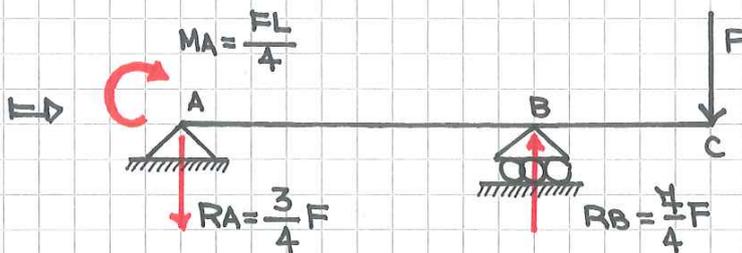
$$\Rightarrow X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\Delta_{11}} = +\frac{FL^2\mu c}{12E\mathcal{I}} \cdot \frac{3E\mathcal{I}}{\mu c^2 \cdot L} = +\frac{F \cdot L}{4\mu c}$$

⚠ X_1 è un COEFFICIENTE, NON ha DIMENSIONI.

$$\underline{M_A} = M_{0A} + X_1 \cdot M_{1A}$$

MOMENTO STRUTTURA REALE
nel PUNTO A.

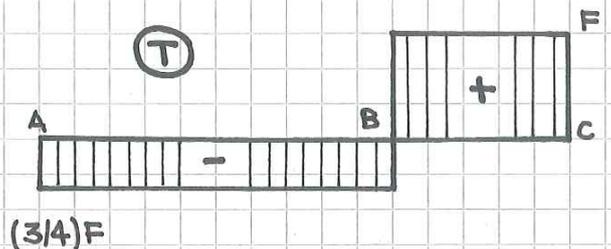
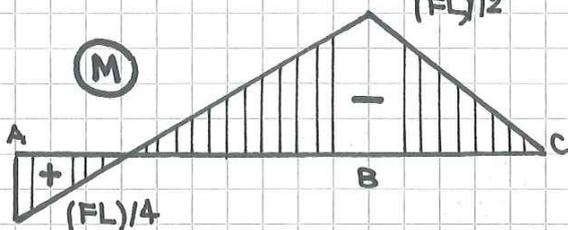
$$\Rightarrow M_A = 0 + \frac{FL}{4\mu c} \cdot \mu c = \frac{FL}{4}$$



$$\sum (+) \curvearrowright A: M_A + F \cdot (3/2)L - R_B \cdot L = 0$$

$$\Rightarrow R_B \cdot L = \frac{FL}{4} + \frac{3}{2} FL = \frac{1+6}{4} FL \Rightarrow R_B = \frac{7}{4} F$$

$$\sum (+) \uparrow: -R_A + R_B - F = 0 \Rightarrow R_A = R_B - F = \frac{7}{4} F - F = \frac{3}{4} F$$



CORSO: COMPLEMENTI di TECNICA delle COSTRUZIONI

DOCENTE: ALESSANDRO ING. FANTILLI

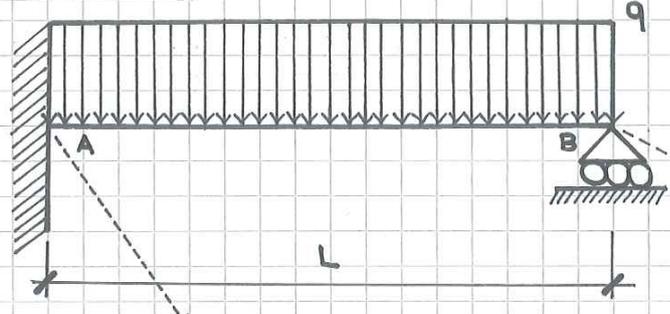
LEZIONE n°: 2

DATA: 3/10/2014

METODO degli SPOSTAMENTI ----- \rightarrow e' il DUALE del METODO delle FORZE



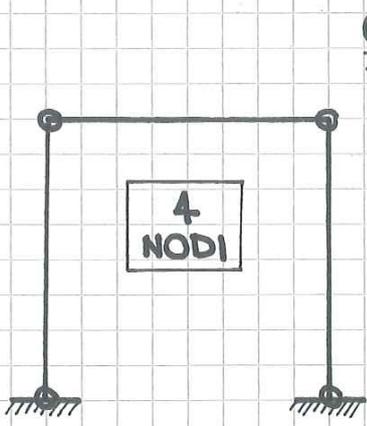
ESEMPIO



ψ_B
 h_B
 $n = n^\circ$ di INCOGNITE : 2
 $h =$ GRADO di IPERSTATICITA' : 1

In A ho ZERO SPOSTAMENTI
 In B ho DUE SPOSTAMENTI

Le INCOGNITE sono gli SPOSTAMENTI NODALI



COLLEGAMENTO tra TRAVE e VINCULO
NODI
COLLEGAMENTO tra TRAVI
 posso SCEGLIERLI OTTENGO \rightarrow DEFORMATA CONGRUENTE
 ψ_B
 h_B
 La SCELTA ARBITRARIA puo' portare ad una SOLUZIONE CONGRUENTE NON EQUILIBRATA

\rightarrow se VOGLIO TROVARE la SOLUZIONE REALE \Rightarrow devo trovare quella

COPPIA di SPOSTAMENTI che mi dia CONTEMPORANEAMENTE una

$$\left\{ \begin{aligned} \bullet \mu_A &= \mu_0 + \sum_{i=1}^n x_i \cdot \mu_i \\ \bullet \lambda_A &= \lambda_0 + \sum_{i=1}^n x_i \cdot \lambda_i \\ \bullet \eta_A &= \eta_0 + \sum x_i \cdot \eta_i \end{aligned} \right.$$

STRUTTURA REALE

Tra tutti gli INFINITI x_i c'è ne uno che oltre a produrre una TERNA di DEFORMAZIONE CONGRUENTE, SODDISFA le CONDIZIONI di EQUILIBRIO.

COME FACCIAMO a CALCOLARE le x ?

Inserendo l'INCASTRO in B ho AGGIUNTO REAZIONI VINCOLARI che NON ci sono. \Rightarrow Dovrò ANNULLARE le REAZIONI VINCOLARI AGGIUNTE.

\Rightarrow Applico l'EQUAZIONE dei LAVORI VIRTUALI:

$$\underline{\underline{L_{INT}^{A,B} = L_{EST}^{A,B}}}$$

A = REALE

B = SISTEMA SUPPLEMENTARE i -ESIMO.

$$\Rightarrow L_{EST}^{A,i} = \underbrace{C_B \cdot \psi_i + H_B \cdot S_i}_{\text{PUNTO di APPOGGIO}}$$

Sono NULLE perché nella STRUTTURA REALE il PUNTO B è un APPOGGIO SEMPLICE.

$$L_{INT}^{A,i} = \int_L M_A \cdot \mu_i dz + \int_L N_A \cdot \lambda_i dz + \int_L T_A \cdot \eta_i dz = 0 \quad \begin{array}{l} \text{DEFORMABILITÀ} \\ \text{al TAGLIO TRA-} \\ \text{SCURABILE} \end{array}$$

$$\bullet \underline{M_A = E \cdot I \cdot \mu_A} \Rightarrow \underline{M_A = E \cdot I \cdot \left(\mu_0 + \sum_{i=1}^n x_i \cdot \mu_i \right)}$$

$$\bullet \underline{N_A = E \cdot A \cdot \lambda_A} \Rightarrow \underline{N_A = E \cdot A \cdot \left(\lambda_0 + \sum_{i=1}^n x_i \cdot \lambda_i \right)}$$

$$L_{INT}^{A,i} = \int_L E \cdot I \cdot \left(\mu_0 + \sum_{i=1}^n x_i \cdot \mu_i \right) \cdot \mu_i dz + \int_L E \cdot A \cdot \left(\lambda_0 + \sum_{i=1}^n x_i \cdot \lambda_i \right) \cdot \lambda_i dz = 0$$

Otteniamo un SISTEMA di n EQUAZIONI in n INCOGNITE.

$$\underline{\underline{[K] \cdot \{x\} = \{K_0\}}}$$

CORSO: COMPLEMENTI di TECNICA delle COSTRUZIONI

DOCENTE: ALESSANDRO ING. FANTILLI

LEZIONE n°: 3

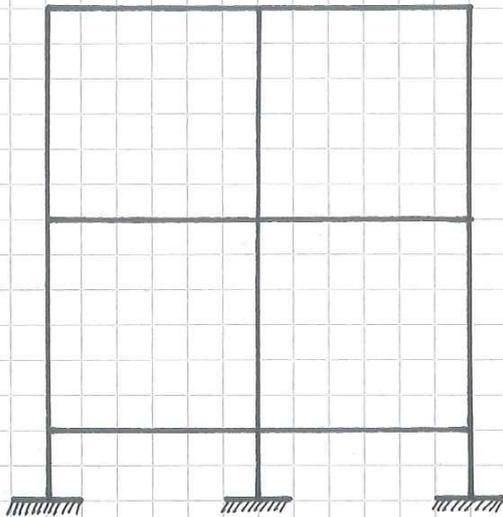
DATA: 7/10/2014

METODO degli SPOSTAMENTI

avevamo un PICCOLO PROBLEMA.
Bisogna risolvere una STRUTTURA
che è PIU' IPERSTATICA rispetto
to quella REALE

Dobbiamo fare una
SEMPLIFICAZIONE

Consideriamo una STRUTTURA ± COMPLESSA:



È costituita da una SERIE
di MACROELEMENTI STRUT-
TURALI

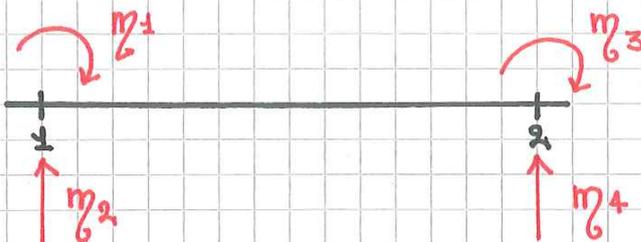
ELEMENTI
RESISTENTI
VERTICALI:
PILASTRI

ELEMENTI
RESISTENTI
ORIZZONTALI:
TRAVI

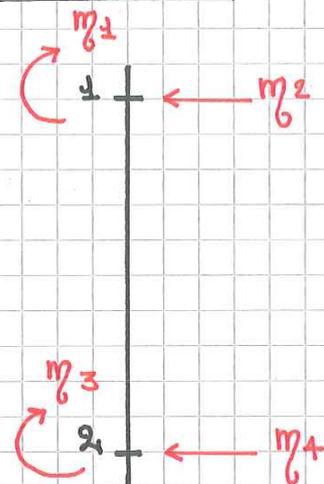
sono entrambi SOLIDI
di SAINT VENANT

Consideriamo ciascun ELEMENTO ed imponiamo gli SPOSTAMENTI cui
possono essere soggetti:

TRAVE



PILASTRO

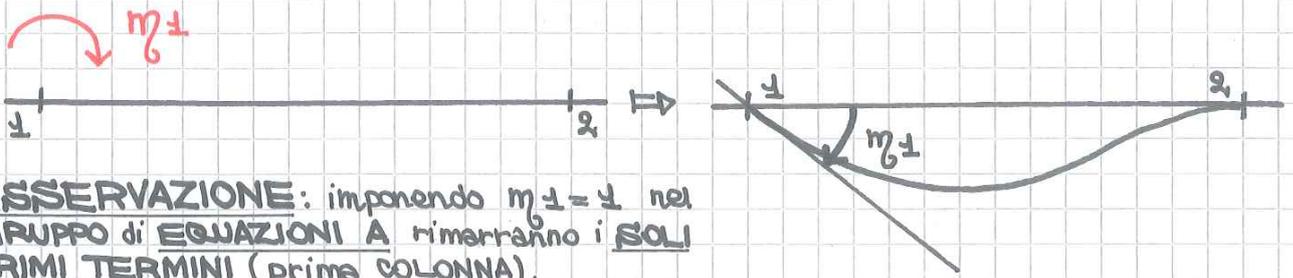


HP: STRUTTURA ASSIALMENTE INDEFORMABILE

(Nella REALTA', CONDIZIONE quasi
sempre RISPETTATA).

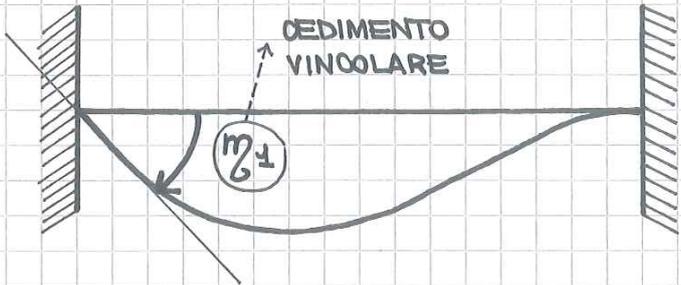
OSSERVAZIONE: gli spostamenti sono stati imposti secondo la CONVENZIONE
INDICATA.

CASO 1 : $m_1 = 1$ mentre gli altri $m_i = 0$



OSSERVAZIONE: imponendo $m_1 = 1$ nel GRUPPO di EQUAZIONI A rimarranno i SOLI PRIMI TERMINI (prime COLONNA).

STRUTTURA REALE a NODI BLOCCATI



3 VOLTE IPERSTATICA

STRUTTURA PRINCIPALE

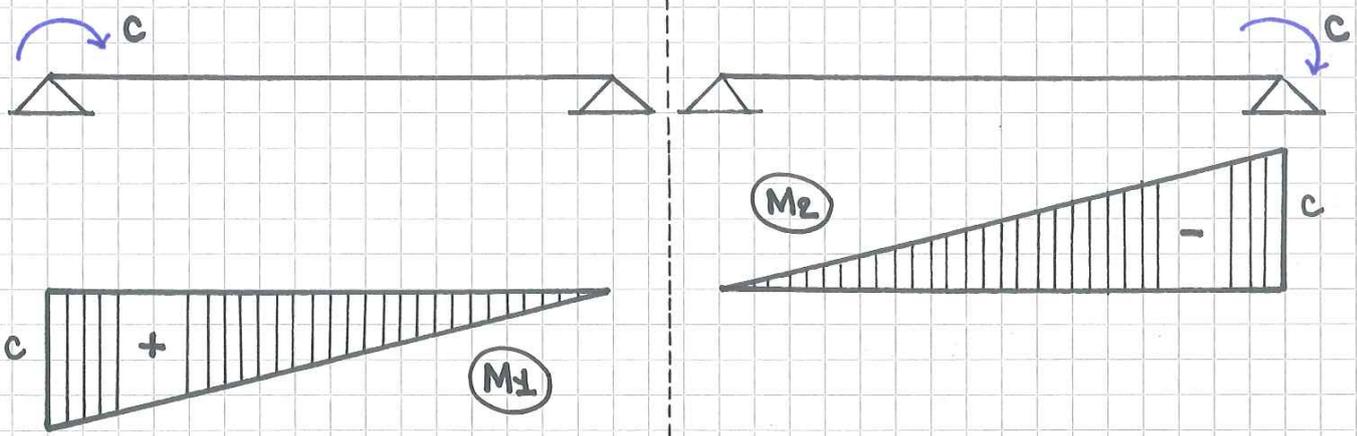
NON ha APPLICATI CARICHI ESTERNI



$\Rightarrow M_0 = 0$

SISTEMA 1

SISTEMA 2



Applico l'ELV:

VIRTUALE \rightarrow REALE
 $L_{EST} = C \cdot m_1$

$L_{INT}^{i,b} = L_{EST}^{i,b}$

COPPIA e ROTAZIONE hanno lo stesso SEGNO.

RISCRIVO le EQUAZIONI EQ.A e EQ.B

$$\begin{cases} \text{EQ.A} & X_1 \left(\frac{c^2 L}{3} \right) + X_2 \left(-\frac{c^2 L}{6} \right) = c \cdot m_1 \cdot E \Delta \\ \text{EQ.B} & X_1 \left(-\frac{c^2 L}{6} \right) + X_2 \left(\frac{c^2 L}{3} \right) = 0 \end{cases}$$

Dall' EQ.B cerco la CORRELAZIONE tra X₁ e X₂

$$\Rightarrow X_1 \left(-\frac{c^2 L}{6} \right) + X_2 \left(\frac{c^2 L}{3} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{X_1 = 2X_2}$$

Questa SOLUZIONE la SOSTITUISCO nella EQ.A

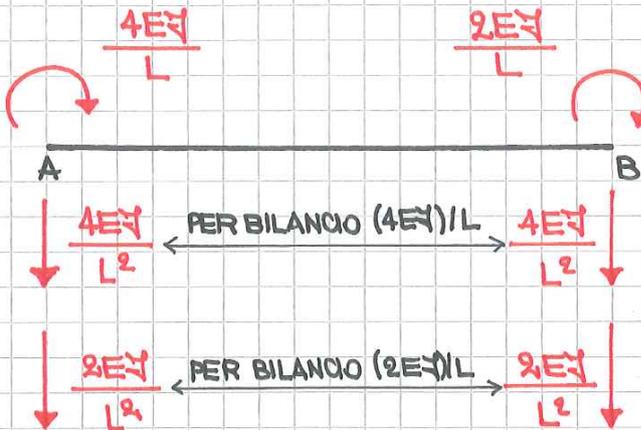
$$\Rightarrow 2X_2 \left(\frac{c^2 L}{3} \right) + X_2 \left(-\frac{c^2 L}{6} \right) = c \cdot m_1 \cdot E \Delta$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6} \right) \cdot X_2 = \frac{c \cdot m_1 \cdot E \Delta}{c^2 L} \Rightarrow X_2 = \frac{2 \cdot m_1 \cdot E \Delta}{c \cdot L}$$

CERCO il VALORE di X₁

$$\Rightarrow X_1 = 2 \cdot X_2 \Rightarrow X_1 = \frac{4 m_1 E \Delta}{c \cdot L}$$

Riprendo la STRUTTURA REALE



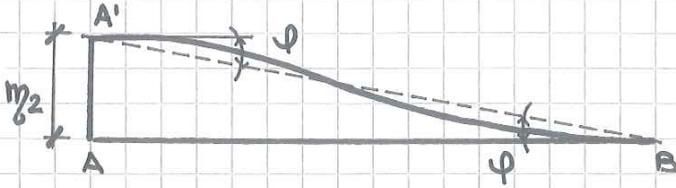
REAZIONI TOTALI in A e in B si definiscono per mezzo del PRINCIPIO di SOVRAPPORZIONE degli EFFETTI.

$$\begin{aligned} M_B &= M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 = \\ &= 0 - \frac{2 m_1 E \Delta}{c \cdot L} \cdot c + 0 \\ &= -\frac{2 m_1 E \Delta}{c \cdot L} \end{aligned}$$

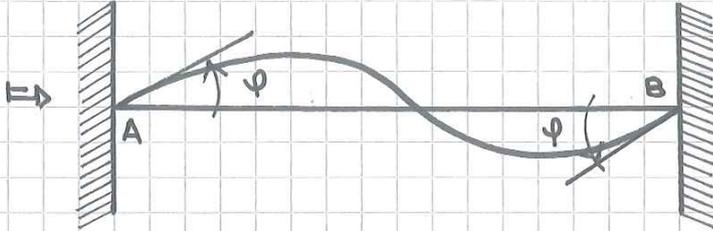
$$\begin{aligned} M_A &= M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 = \\ &= 0 + \frac{4 m_1 E \Delta}{c \cdot L} \cdot c + 0 \\ &= +\frac{4 m_1 E \Delta}{L} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{HP: m_1 = 1}}$$

ORA: IMPONGO $m_2 = 1$ mentre tutti gli altri $m_i = 0$



Se CONGIUNGO A' e B e' come se IMPONESSI una ROTAZIONE in A ed una ROTAZIONE in B.



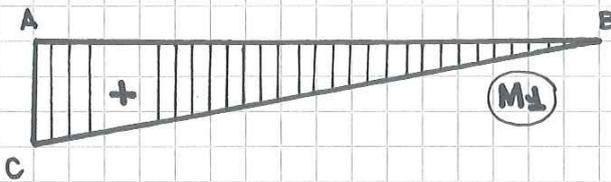
$\varphi = \frac{m_2}{L}$ Nell'ambito dei PICCOLI SPOSTAMENTI

SISTEMA PRINCIPALE

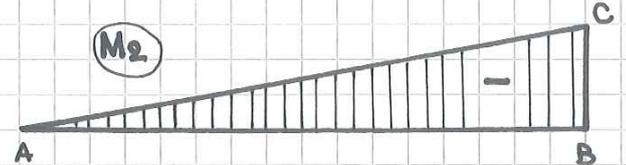


$M_0 = 0$

SISTEMA 1



SISTEMA 2



Applico l'ELV:

$L_{EST}^{1,b} = -C \cdot \varphi = -C \frac{m_2}{L} = -\frac{C}{L}$ IMPONENDO $m_2 = 1$

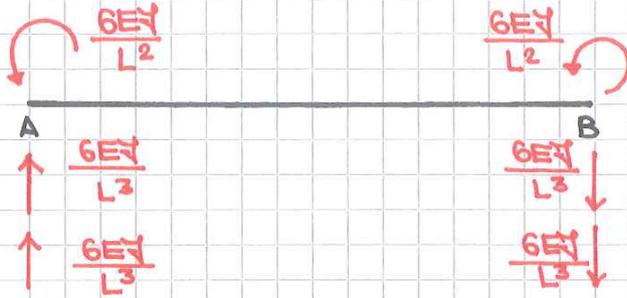
$L_{INT}^{1,b} = \int M_1 \cdot \mu_b \cdot dz$ $\mu_b = \frac{M_0 + X_1 \cdot M_1 + X_2 \cdot M_2}{EI}$

$L_{INT}^{1,b} = X_1 \int \frac{M_1^2}{EI} dz + X_2 \int \frac{M_1 M_2}{EI} dz$

Riprendo l'EQ.A* e sostituisco ad X_2 il valore ottenuto nella pagina precedente:

$$2X_1 + \frac{6EY}{CL^2} = -\frac{6EY}{CL^2} \Rightarrow X_1 = -\frac{6EY}{CL^2}$$

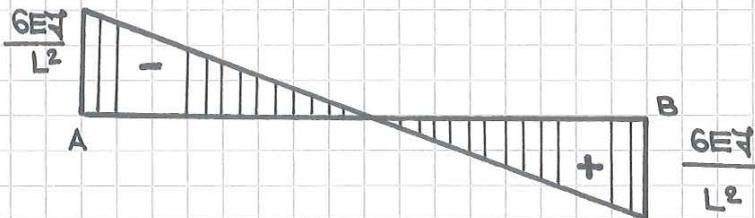
Riprendo la STRUTTURA REALE



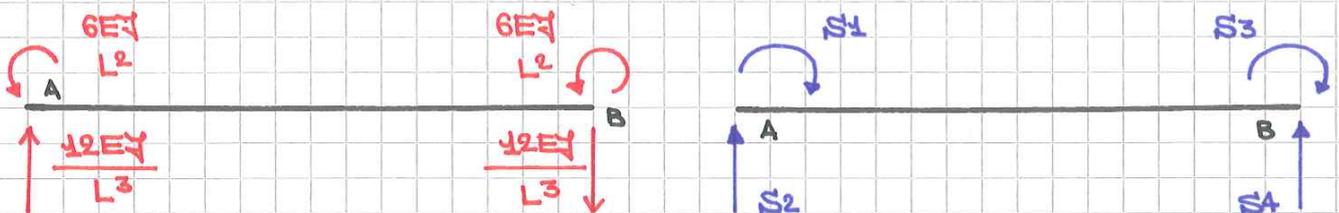
$$M_A = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 = -\frac{6EY}{CL^2} \cdot (+C) = -\frac{6EY}{L^2}$$

$$M_B = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 = -\frac{6EY}{CL^2} \cdot (-C) = +\frac{6EY}{L^2}$$

(M)



(T)



HP: $m_2 = 1$ mentre tutti gli altri $m_i = 0$

$$S_1 = K_{12} \cdot m_2 \Rightarrow S_1 = K_{12} \Rightarrow K_{12} = -6EY/L^2$$

$$S_2 = K_{22} \cdot m_2 \Rightarrow S_2 = K_{22} \Rightarrow K_{22} = +12EY/L^3$$

$$S_3 = K_{32} \cdot m_2 \Rightarrow S_3 = K_{32} \Rightarrow K_{32} = -6EY/L^2$$

$$L_{INT}^{1,b} = \int M_1 \cdot \mu_b \cdot dz \quad \mu_b = \frac{M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2}{E\chi}$$



NON HO DEFORMAZIONI IMPRESSE che producono CURVATURE IMPRESSE.

EQUAGLIO le DUE ESPRESSIONI:

$$X_1 \cdot \int M_1^2 dz + X_2 \int M_1 \cdot M_2 \cdot dz = 0$$

$i=2$

$$L_{EST}^{2,b} = +C \cdot \eta_3$$

$$L_{INT}^{2,b} = \int M_2 \cdot \mu_b \cdot dz \quad \mu_b = \frac{M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2}{E\chi}$$



NON HO DEFORMAZIONI IMPRESSE che producono CURVATURE IMPRESSE.

$$L_{INT}^{2,b} = X_1 \int M_1 \cdot M_2 \cdot dz + X_2 \int M_2^2 \cdot dz \quad (\text{a meno del fattore } 1/E\chi)$$

EQUAGLIO le DUE ESPRESSIONI:

$$X_1 \int M_1 \cdot M_2 dz + X_2 \int M_2^2 \cdot dz = +E\chi \cdot C \cdot \eta_3$$

METTO a SISTEMA le DUE EQUAZIONI:

$$\text{EQ. A} \left[X_1 \int M_1^2 dz + X_2 \int M_1 \cdot M_2 \cdot dz = 0 \right.$$

$$\text{EQ. B} \left[X_1 \int M_1 \cdot M_2 \cdot dz + X_2 \int M_2^2 \cdot dz = +E\chi \cdot C \cdot \eta_3 \right.$$

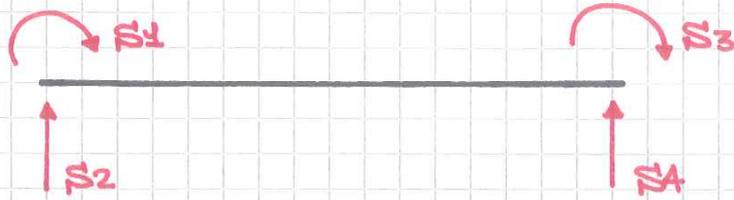
COMPUTO gli INTEGRALI:

$$\int M_1^2 dz = \frac{L}{6} \cdot \left[c \cdot c + 4 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} + 0 \cdot 0 \right] = \frac{c^2 \cdot L}{3}$$

$$\int M_2^2 dz = \frac{L}{6} \cdot \left[0 \cdot 0 + 4 \cdot \left(-\frac{c}{2}\right) \left(-\frac{c}{2}\right) + (-c) \cdot (-c) \right] = \frac{c^2 L}{3} \quad 25$$

$$M_B = + \frac{4EI \cdot \eta_3}{c \cdot L} \cdot (-c) = - \frac{4EI \cdot \eta_3}{L} = - \frac{4EI}{L}$$

CONVENZIONI di SEGNO per le SOLLECITAZIONI



HP: $\eta_3 = 1$ mentre tutti gli altri $\eta = 0$

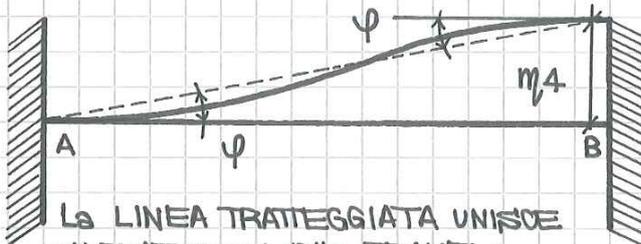
$$S_1 = K_{13} \cdot \eta_3 \quad \Rightarrow \quad S_1 = K_{13} \quad \Rightarrow \quad K_{13} = \frac{2EI}{L}$$

$$S_2 = K_{23} \cdot \eta_3 \quad \Rightarrow \quad S_2 = K_{23} \quad \Rightarrow \quad K_{23} = - \frac{6EI}{L^2}$$

$$S_3 = K_{33} \cdot \eta_3 \quad \Rightarrow \quad S_3 = K_{33} \quad \Rightarrow \quad K_{33} = \frac{4EI}{L}$$

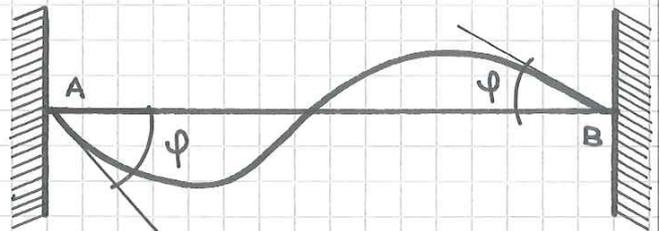
$$S_4 = K_{34} \cdot \eta_3 \quad \Rightarrow \quad S_4 = K_{34} \quad \Rightarrow \quad K_{34} = + \frac{6EI}{L}$$

ORA: IMPONGO $\eta_4 = 1$ mentre tutti gli altri $\eta = 0$



La LINEA TRATTEGGIATA UNISCE gli ESTREMI della TRAVE a DEFORMAZIONE AVVENUTA. Rispetto a tale COLLEGAMENTO e' come se ci fossero DUE ROTAZIONI agli ESTREMI.

$$\varphi = \frac{\eta_4}{L}$$

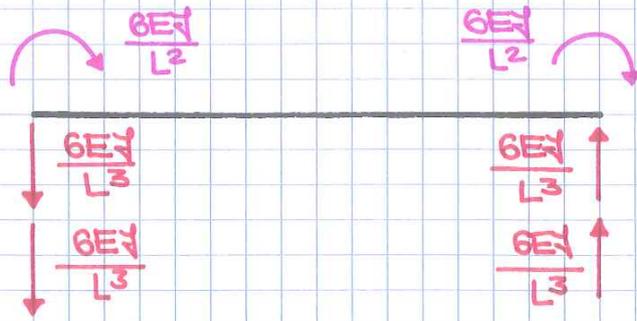


La STRUTTURA e' 2 VOLTE IPERSTATICA. Si imposta un SISTEMA REALE (0) e DUE SISTEMI AUSILIARI (1+2).

SISTEMA PRINCIPALE



$$\Rightarrow M_0 = 0$$



$$M_A = \frac{6EI\Delta}{L^2} \cdot c = \frac{6EI\Delta}{L^2}$$

$$M_B = -\frac{6EI\Delta}{L^2} \cdot c = \frac{6EI\Delta}{L^2}$$

CONVENZIONE di SEGNO per le SOLLECITAZIONI



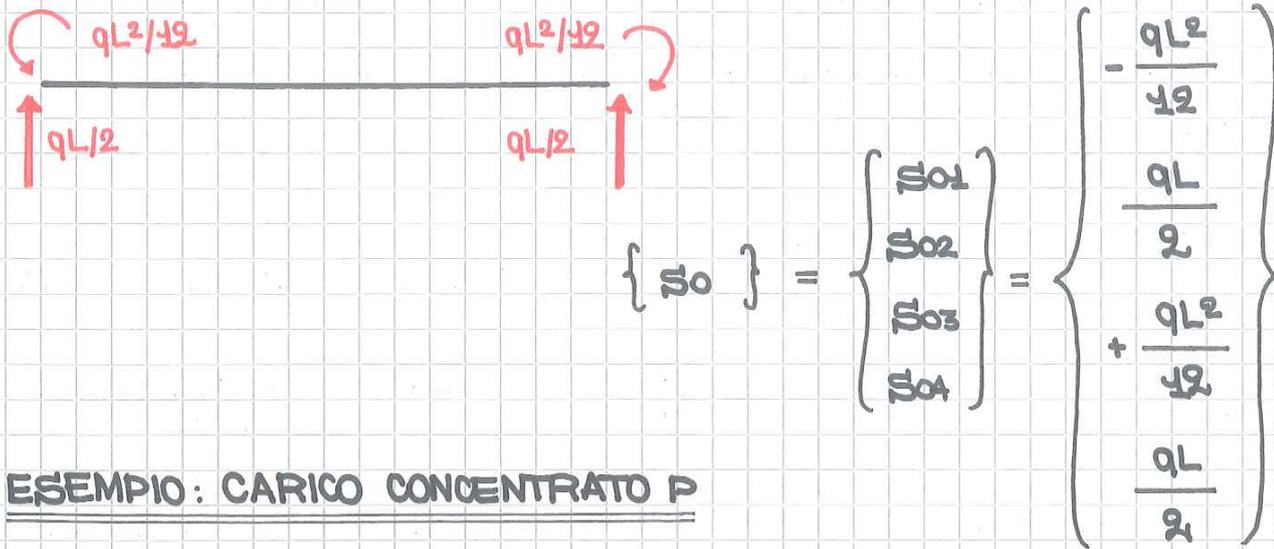
HP: $m_4 = \Delta$ mentre tutti gli altri $m = 0$

$$S_1 = K_{14} \cdot m_4 \quad \Leftrightarrow \quad S_1 = K_{14} \quad \Leftrightarrow \quad K_{14} = \frac{6EI\Delta}{L^2}$$

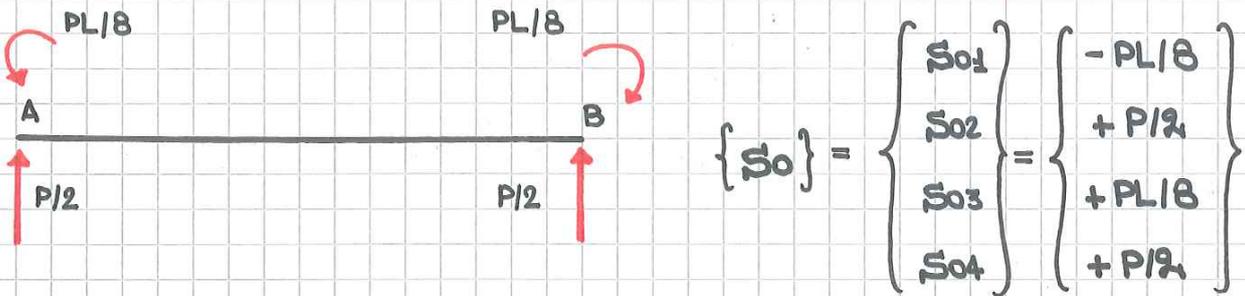
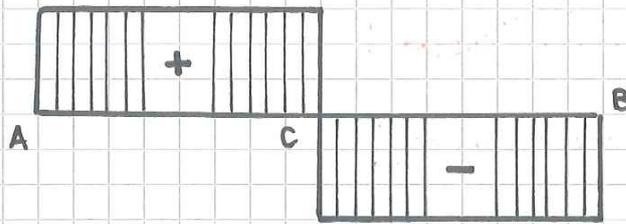
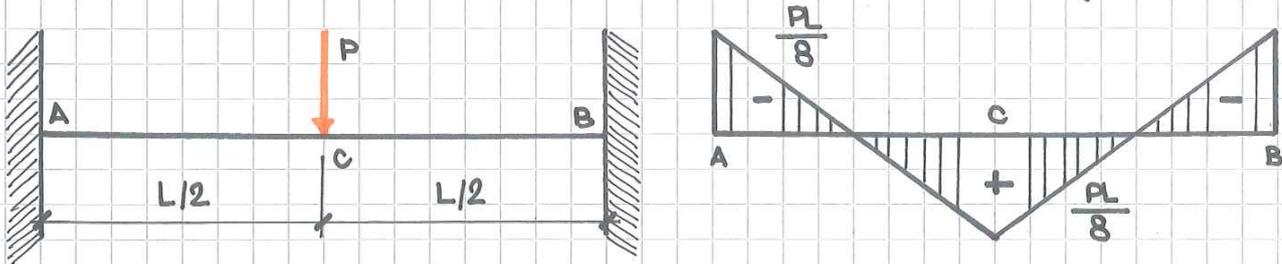
$$S_2 = K_{24} \cdot m_4 \quad \Leftrightarrow \quad S_2 = K_{24} \quad \Leftrightarrow \quad K_{24} = -\frac{12EI\Delta}{L^3}$$

$$S_3 = K_{34} \cdot m_4 \quad \Leftrightarrow \quad S_3 = K_{34} \quad \Leftrightarrow \quad K_{34} = +\frac{6EI\Delta}{L^2}$$

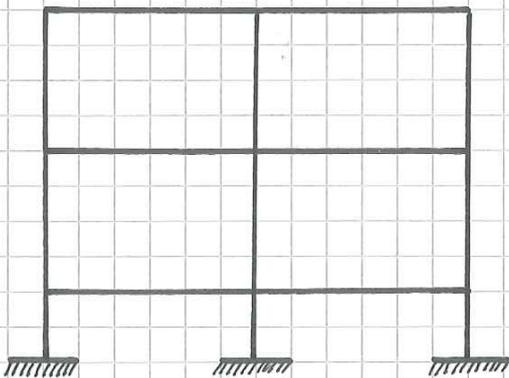
$$S_4 = K_{44} \cdot m_4 \quad \Leftrightarrow \quad S_4 = K_{44} \quad \Leftrightarrow \quad K_{44} = +\frac{12EI\Delta}{L^3}$$



ESEMPIO: CARICO CONCENTRATO P



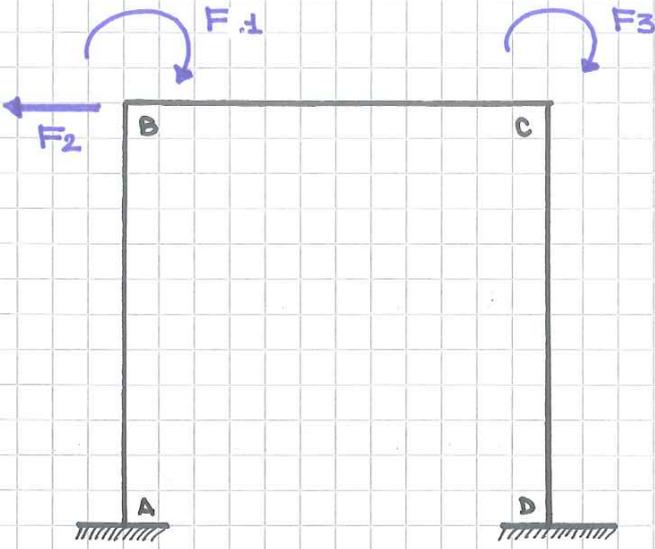
Considero una STRUTTURA PIANA a MAGLIE ORTOGONALI



2
$$\{F\} = [H] \cdot \{x\} + \{F_0\}$$

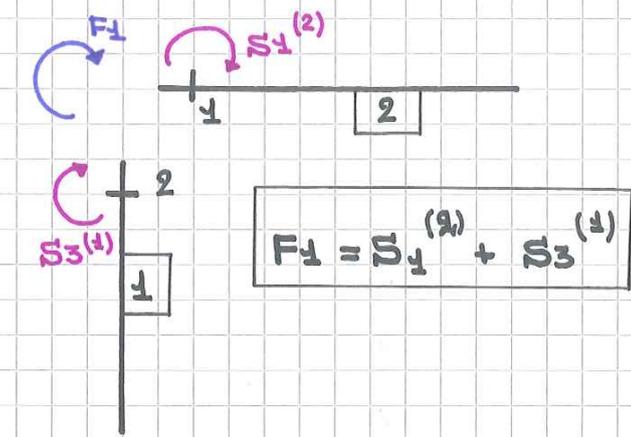
$\{x\}$: SPOSTAMENTI NODALI dell'IN=
TERA STRUTTURA

OSSERVAZIONE : $\{X\}$ è COMPOSTO da 3 ELEMENTI
 \Rightarrow anche $\{F\}$ è COMPOSTO da 3 ELEMENTI

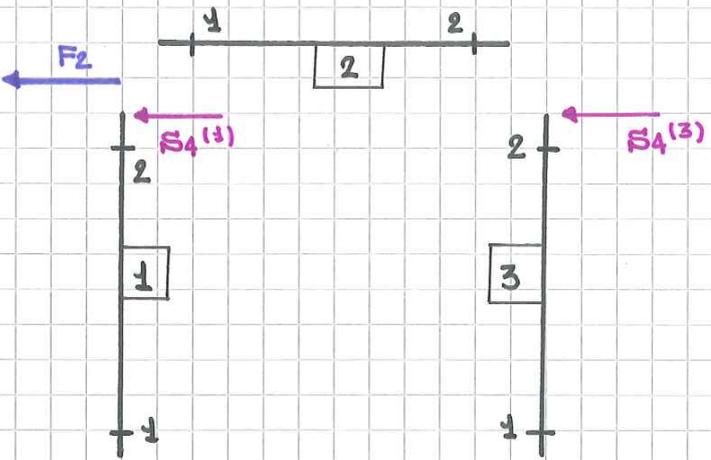
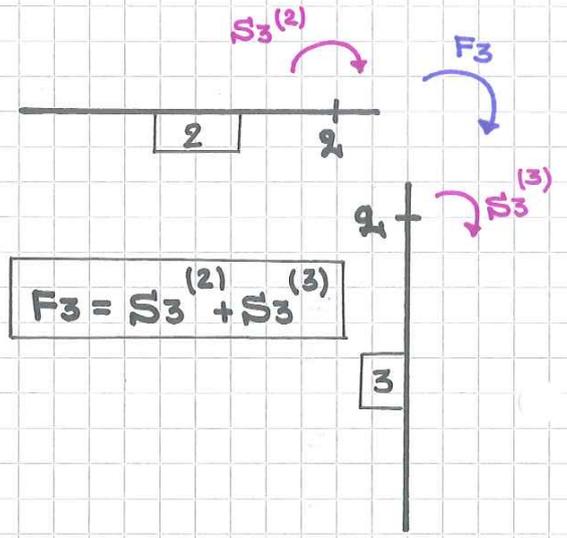


In OGNI NODO ci deve essere l'EQUILIBRIO tra le F e le S presenti nello stesso NODO.

NODO B



NODO C



Confronto questa EQUAZIONE con quella del PRIMO EQUILIBRIO

● $H_{11} = K_{11}^{(2)} + K_{33}^{(1)}$

● $H_{12} = K_{34}^{(1)}$

● $H_{13} = K_{43}^{(2)}$

● $F_2 = H_{21} \cdot X_1 + H_{22} \cdot X_2 + H_{23} \cdot X_3$

Confronto questa EQUAZIONE con quella del SECONDO EQUILIBRIO

● $H_{21} = K_{43}^{(1)}$

● $H_{22} = K_{44}^{(1)} + K_{44}^{(3)}$

● $H_{23} = K_{43}^{(3)}$

● $F_3 = H_{31} \cdot X_1 + H_{32} \cdot X_2 + H_{33} \cdot X_3$

Confronto questa EQUAZIONE con quella del TERZO EQUILIBRIO

● $H_{31} = K_{34}^{(2)}$

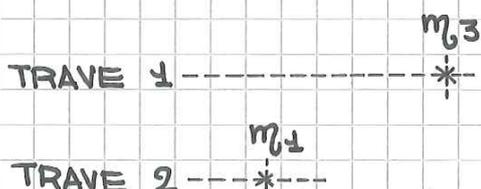
● $H_{32} = K_{34}^{(3)}$

● $H_{33} = K_{33}^{(2)} + K_{33}^{(3)}$

OSSERVAZIONE:

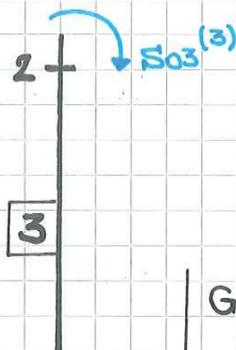
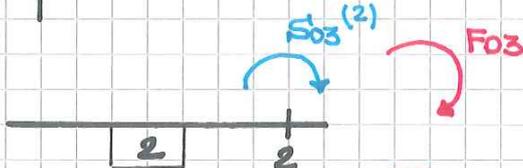
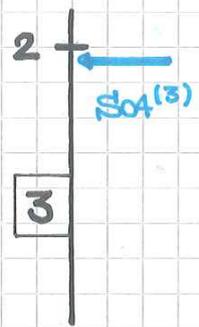
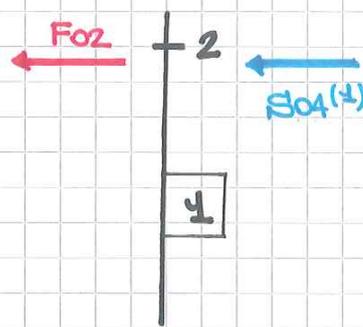
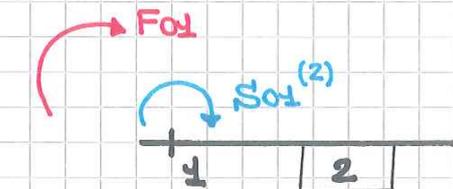
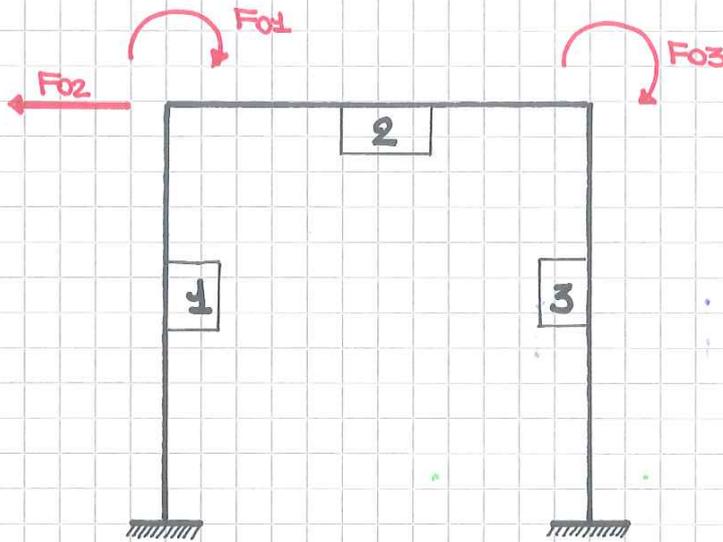


H_{11} → nella MATRICE di INCIDENZA GUARDO dove c'è 1.



Resta da definire $\{F_o\}$ → quando NON ci sono SPOSTAMENTI NODALI

AGISCONO nella stessa DIREZIONE delle $\{F\}$



$F_{01} = S_{01}^{(2)} + S_{03}^{(1)}$

$F_{02} = S_{04}^{(1)} + S_{04}^{(3)}$

$F_{03} = S_{03}^{(2)} + S_{03}^{(3)}$

Gli $\{F_o\}$ possono essere definiti a partire dalla MATRICE di INCIDENZA.

● CALCOLO $\{x\}$

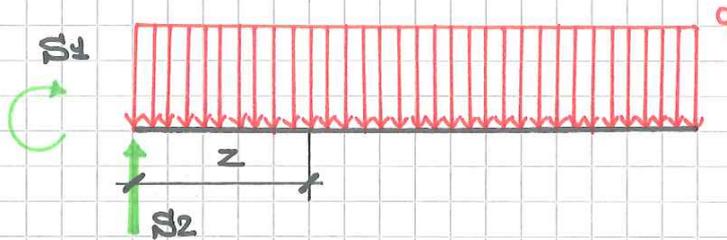
$$\underline{\underline{\{x\} = [H]^{-1} \{F\} - \{F_0\}}}$$

$$\underline{\underline{\{F - F_0\} = [H] \cdot \{x\} \Rightarrow [H]^{-1} \{F - F_0\} \cdot \underbrace{[H][H]^{-1}}_{\substack{\text{MATRICE} \\ \text{IDENTICA}}} \cdot \{x\}}}$$

● Passo da $\{x\}$ a $\{m\}$ → dare SINGOLE TRAVI

● NOTE le $\{m\}$ CALCOLO le $\{S\}$ in OGNI SINGOLA TRAVE

● CALCOLO SOLLECITAZIONI in ogni SINGOLA TRAVE



$$\bullet \underline{\underline{M(z) = S_1 + S_2 \cdot z - q \cdot \frac{z^2}{2}}}$$

$$\bullet \underline{\underline{T(z) = S_2 - q \cdot z}}$$

● $H_{21} = K_{13}^{(1)} = + \frac{2E\mathcal{I}}{L}$

● $H_{22} = K_{33}^{(1)} + K_{11}^{(2)} =$
 $= + \frac{4E\mathcal{I}}{L} + \frac{4E\mathcal{I}}{L} = \frac{8E\mathcal{I}}{L}$

● $H_{23} = K_{13}^{(2)} = + \frac{2E\mathcal{I}}{L}$

● $H_{31} = \text{ZERO}$

● $H_{32} = H_{23} = K_{13}^{(2)} = + \frac{2E\mathcal{I}}{L}$

● $H_{33} = K_{33}^{(2)} = + \frac{4E\mathcal{I}}{L}$

$$[H] = \frac{E\mathcal{I}}{L} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

● Calcolo il VETTORE $\{F_0\}$

● $F_{01} = S_{01}^{(1)} = - \frac{qL^2}{12}$

● $F_{02} = S_{03}^{(1)} + S_{01}^{(2)} = - \frac{qL^2}{12} + \frac{qL^2}{12} = 0$

● $F_{03} = S_{03}^{(2)} = + \frac{qL^2}{12}$

● Scrivo il VETTORE $\{F\}$

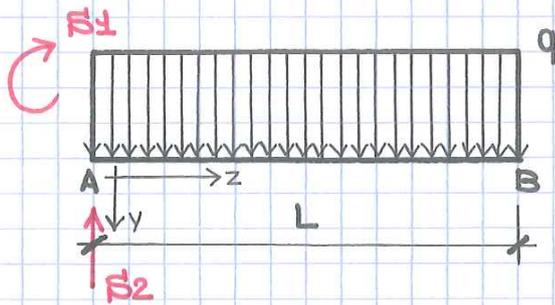
$F_1 = F_2 = F_3 = 0$

Riepilogando:

VETTORE $\{F_0\} = \frac{qL^2}{12} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$ VETTORE $\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$S_4 = K_{41} \cdot m_1 + K_{42} \cdot m_2 + K_{43} \cdot m_3 + K_{44} \cdot m_4 + S_{04}$$

Considero TRAVE 4



$$S_1 = K_{11} \cdot m_1 + K_{12} \cdot m_2 + K_{13} \cdot m_3 + K_{14} \cdot m_4 + S_{01} =$$

$$= \frac{4EI}{L} \cdot \frac{qL^3}{48EI} - \frac{qL^2}{12} = \frac{qL^2}{12} - \frac{qL^2}{12} = 0$$

$$S_2 = K_{21} \cdot m_1 + K_{22} \cdot m_2 + K_{23} \cdot m_3 + K_{24} \cdot m_4 + S_{02} =$$

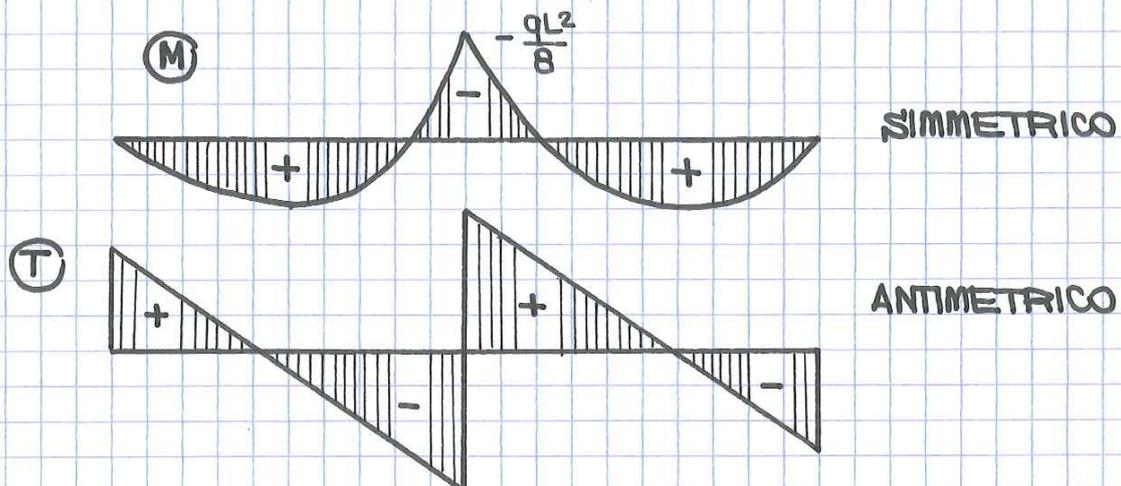
$$= -\frac{6EI}{L^2} \cdot \frac{qL^3}{48EI} + \frac{qL}{2} = -\frac{qL}{8} + \frac{qL}{2} = +\frac{3}{8} qL$$

Voglio ora determinare il MOMENTO e il TAGLIO nel PUNTO B

$$\bullet M_B = R_A \cdot z - q \cdot z \cdot \frac{z}{2} = + S_2 \cdot L - q \cdot \frac{L^2}{2} = \frac{3}{8} qL^2 - \frac{4}{8} qL^2$$

$$= -\frac{1}{8} qL^2$$

$$\bullet T_B = R_A - q \cdot z = + S_2 - q \cdot L = \frac{3}{8} qL - \frac{8}{8} qL = -\frac{5}{8} qL$$



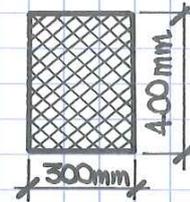
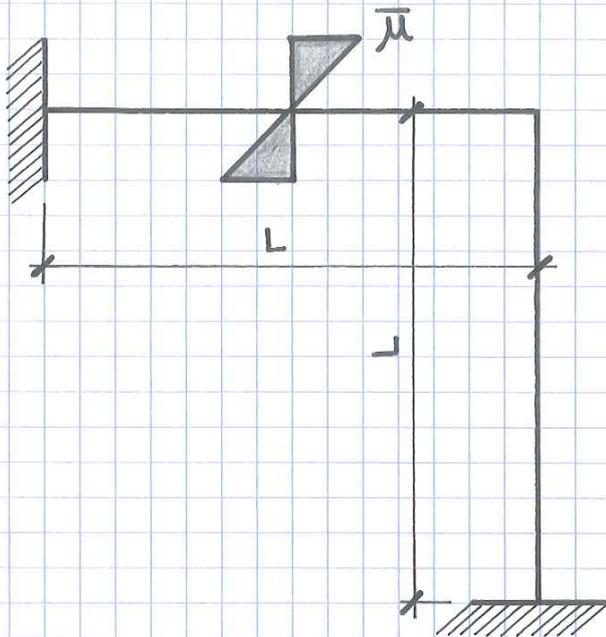
CORSO: COMPLEMENTI di TECNICA delle COSTRUZIONI

DOCENTE: ALESSANDRO ING. FANTILLI

LEZIONE n°: 5

DATA: 10/10/2014

Esercizio di APPLICAZIONE METODO TELAIO 4x4



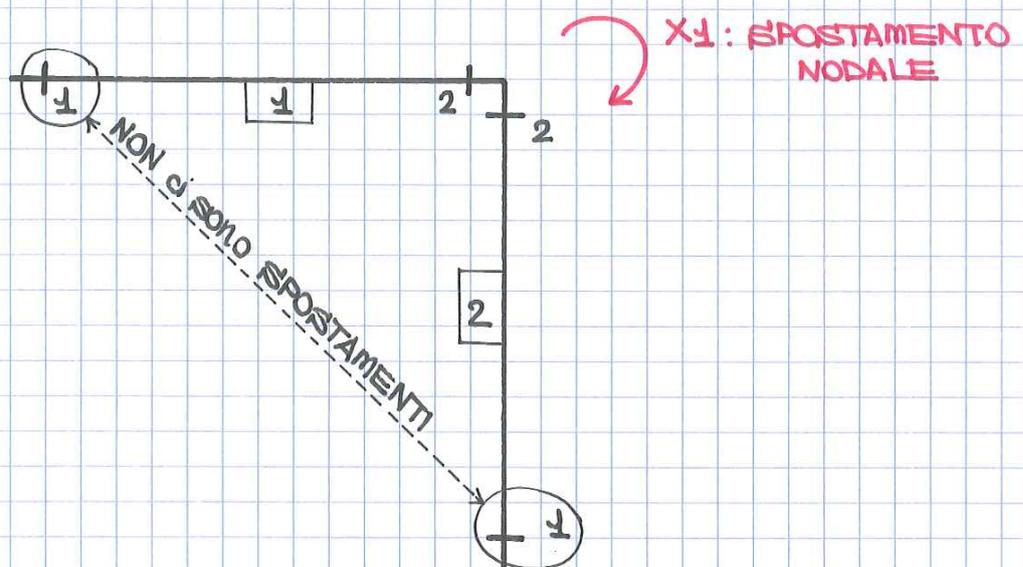
$$E = 30 \text{ GPa}$$

$$\Delta T = 20^\circ\text{C}$$

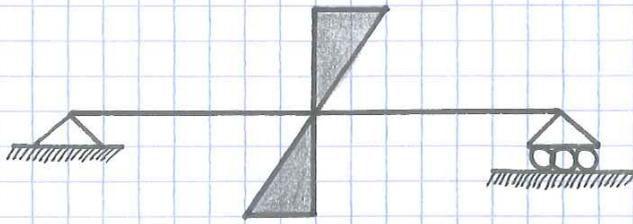
$$\alpha = 2 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/^\circ\text{C}$$

Analizzo il PROBLEMA con applicazione del METODO degli SPOSTAMENTI.

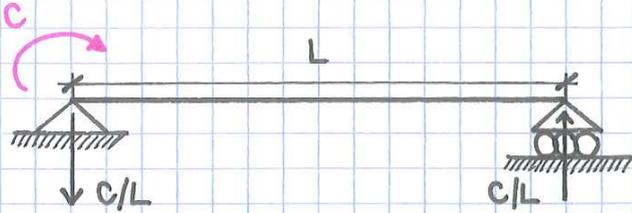
Dividiamo la nostra STRUTTURA in TRAVI



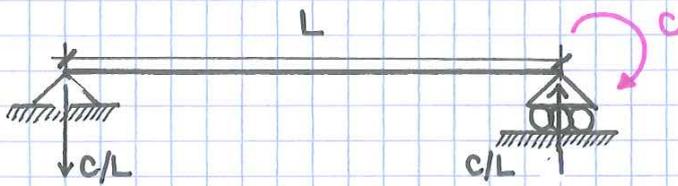
Applico il METODO delle FORZE: definisco



- SISTEMA 0 -



- SISTEMA 1 -



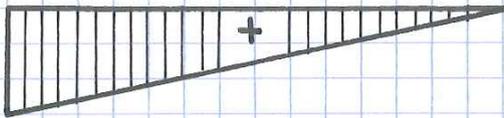
- SISTEMA 2 -

⚠ La STRUTTURA ISOSTATICA soggetta a $\bar{\mu}$ NON è soggetta a SOLLECITAZIONI, pertanto la STRUTTURA si DEFORMA LIBERAMENTE.

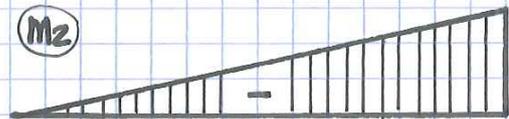
- SISTEMA 1 -

- SISTEMA 2 -

(M₁)



(M₂)



(T₁)



(T₂)



Applico l' ELV :

$$L_{INT}^{i,b} = L_{EST}^{i,b}$$

$$\Rightarrow L_{INT}^{1,b} = L_{EST}^{1,b} \Rightarrow \int M_1 \cdot \mu_b \cdot dz = 0$$

$$\Rightarrow L_{INT}^{2,b} = L_{EST}^{2,b} \Rightarrow \int M_2 \cdot \mu_b \cdot dz = 0$$

$$\mu_b = \frac{M_b}{E \cdot I} + \bar{\mu}$$

44

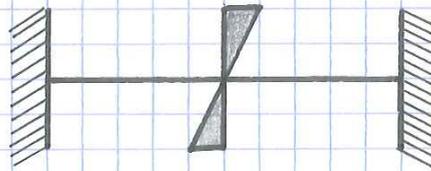
$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 \cdot \frac{c^2 L}{3} - X_2 \cdot \frac{c^2 L}{6} = -E\alpha \cdot \bar{\mu} \cdot \frac{c \cdot L}{2} \\ -X_1 \cdot \frac{c^2 L}{6} + X_2 \cdot \frac{c^2 L}{3} = +E\alpha \cdot \bar{\mu} \cdot \frac{c L}{2} \end{cases}$$

Ora: SOMMO le DUE EQUAZIONI

$$+ X_1 \cdot \frac{c^2 L}{3} + X_2 \cdot \frac{c^2 L}{3} = 0$$

$$\Rightarrow X_1 + X_2 = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = -X_2$$



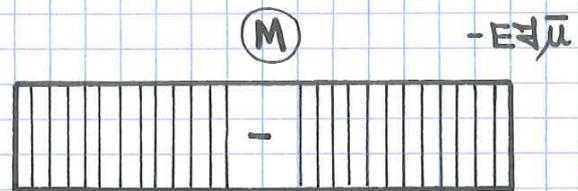
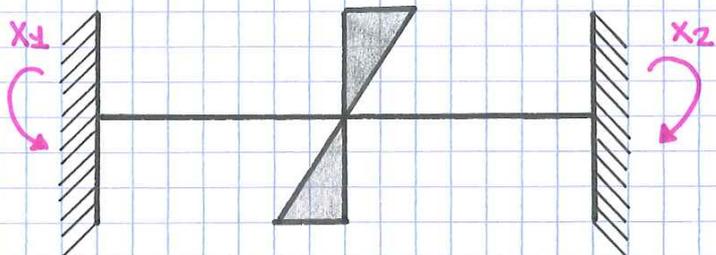
La STRUTTURA è SIMMETRICA e SIMMETRICAMENTE CARICATA

$$\Rightarrow -X_2 \cdot \frac{c^2 L}{3} - X_2 \cdot \frac{c^2 L}{6} = -E\alpha \cdot \bar{\mu} \cdot \frac{c \cdot L}{2}$$

$$-X_2 \cdot \left(\frac{3c^2 L}{6} \right) = -E\alpha \cdot \bar{\mu} \cdot \frac{c \cdot L}{2}$$

$$+ X_2 = E\alpha \cdot \bar{\mu} \cdot \frac{c \cdot L}{2} \cdot \frac{2}{c^2 L} \Rightarrow X_2 = \frac{E\alpha \cdot \bar{\mu}}{c}$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{-E\alpha \cdot \bar{\mu}}{c}$$



\Rightarrow La SOMMA di 2 DIAGRAMMI LINEARI è ancora LINEARE.



$$T = \frac{dM}{dz} \rightarrow \text{è una COSTANTE}$$

$$S_2 = K_{21} \cdot \eta_1 + K_{22} \cdot \eta_2 + K_{23} \cdot \eta_3 + K_{24} \cdot \eta_4 + S_{02} =$$

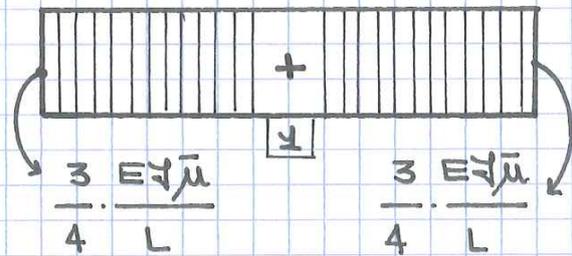
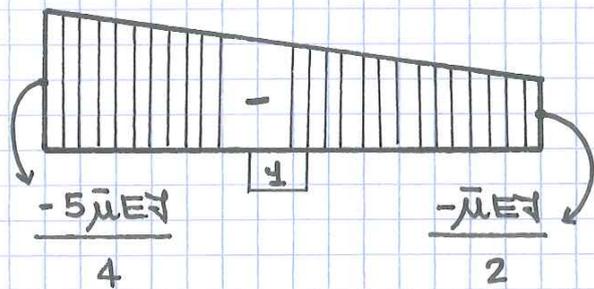
$$= - \frac{3 E \nu}{L^2} \cdot \left(- \frac{\bar{\mu} \cdot L}{8} \right) + 0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\bar{\mu} E \nu}{L}$$

→ $M(z) = S_1 + S_2 \cdot z$

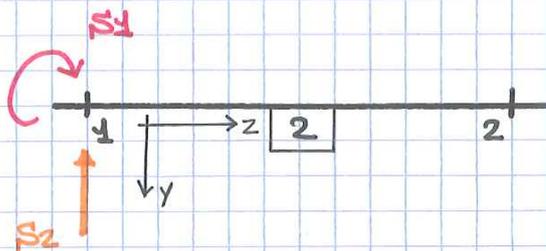
⇒ $M(L) = - \frac{5}{4} \mu E \nu + \frac{3}{4} \cdot \frac{\bar{\mu} E \nu}{L} \cdot L = - \frac{1}{2} \bar{\mu} E \nu$

→ $T(z) = + S_2$

⇒ $T(z) = + \frac{3}{4} \cdot \frac{\bar{\mu} E \nu}{L}$



Che cosa accade per la TRAVE 2 ?



! SISTEMA di RIFERIMENTO

~~$$S_1 = K_{11} \cdot \eta_1 + K_{12} \cdot \eta_2 + K_{13} \cdot \eta_3 + K_{14} \cdot \eta_4 + S_{01} =$$

$$= \frac{2 E \nu}{L} \cdot \left(- \frac{\bar{\mu} L}{8} \right) = - \frac{\bar{\mu} E \nu}{4}$$~~

~~$$S_2 = K_{21} \cdot \eta_1 + K_{22} \cdot \eta_2 + K_{23} \cdot \eta_3 + K_{24} \cdot \eta_4 + S_{02} =$$

$$= - \frac{6 E \nu}{L^2} \cdot \left(- \frac{\bar{\mu} L}{8} \right) = + \frac{3 E \nu \bar{\mu}}{4 L}$$~~

→ $M(z) = S_1 + S_2 \cdot z \Rightarrow M(L) = - \frac{\bar{\mu} E \nu}{4} + \frac{3 E \nu \bar{\mu}}{4 L} \cdot L = + \frac{1}{2} E \nu \bar{\mu}$

→ $T(z) = S_2$

⇒ $T(z) = + \frac{3}{4} \cdot \frac{E \nu \bar{\mu}}{L}$

51

CORSO : COMPLEMENTI di TECNICA delle COSTRUZIONI

DOCENTE : ALESSANDRO ING. FANTILLI

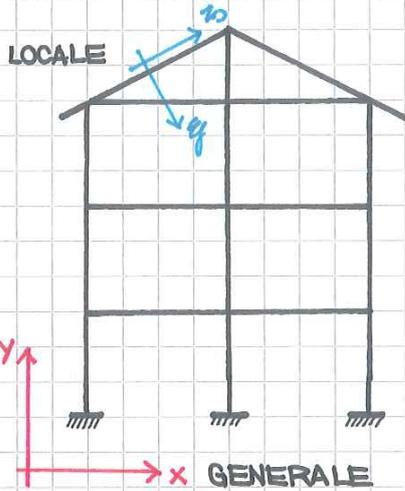
LEZIONE n° 6

DATA : 16/10/2014

METODO del TELAIIO 4x4

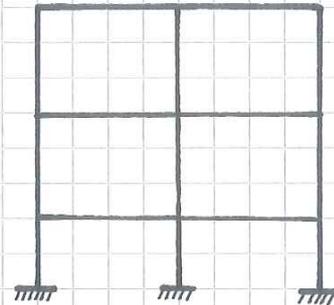
TEORIA fondata su una SERIE di IPOTESI

ESTENSIONE TEORIA ad ELEMENTI che risultano essere INCLINATI



Le IPOTESI 1 e 3 del TELAIIO 4x4 sono ELIMINATE.

1. MAGLIA di ELEMENTI MUTUAMENTE ORTOGONALI



2. SOLLECITAZIONI nel PIANO

3. NO DEFORMAZIONI ASSIALI

(ELEMENTI INFINITAMENTE RIGIDI lungo l'ASSE)

METODO del TELAIIO 6x6

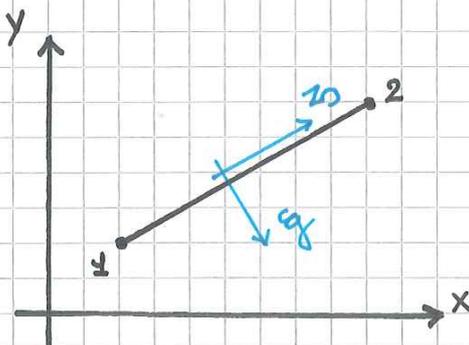
Stesse TAPPE del 4x4

e' piu' LABORIOSO

ESISTONO DUE SISTEMI di RIFERIMENTO

GENERALE [x,y]

LOCALE [z0, g]



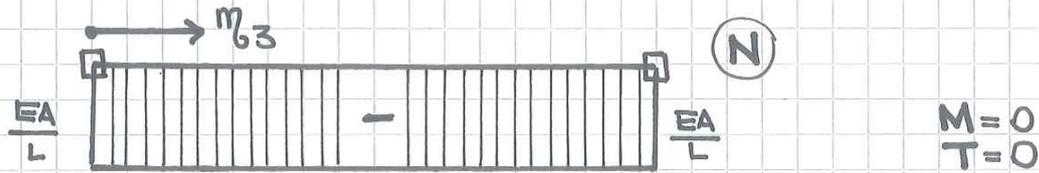
$$\{S\} = [K] \cdot \{m\} + \{S_0\}$$

$K_{11} \Rightarrow$ definito per $m_1 = 1$, tutti gli altri $m_i = 0$.

$\Rightarrow K_{11} = S_{11} \Rightarrow$ mi riconduco al caso del **TELAIO**

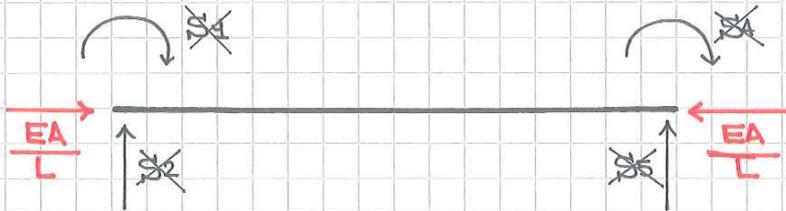
4 x 4

• $m_3 = 1$, altri $m_i = 0$

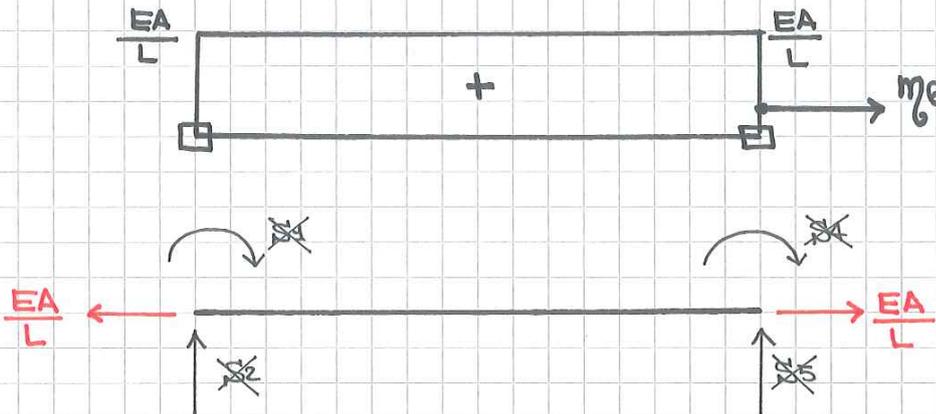


• $\sigma = E \cdot \epsilon$ • $\sigma = \frac{N}{A}$ • $\epsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{m_3}{L}$

$\Rightarrow \frac{N}{A} = E \cdot \frac{m_3}{L} \Rightarrow N = \frac{EA}{L} \cdot m_3$



• $m_6 = 1$, altri $m_i = 0$



$\{S_0\}$: SOLLECITAZIONI NODALI quando $m_i = 0$; quindi **PRODOTTE** dall' **APPLICAZIONE** dei **CARICHI**

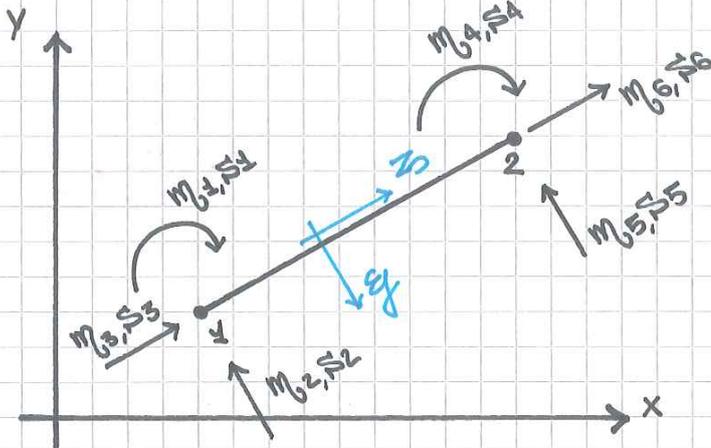
$$\{F\} = [K]\{X\} + \{F_0\}$$

si riferisce alla STRUTTURA GENERALE

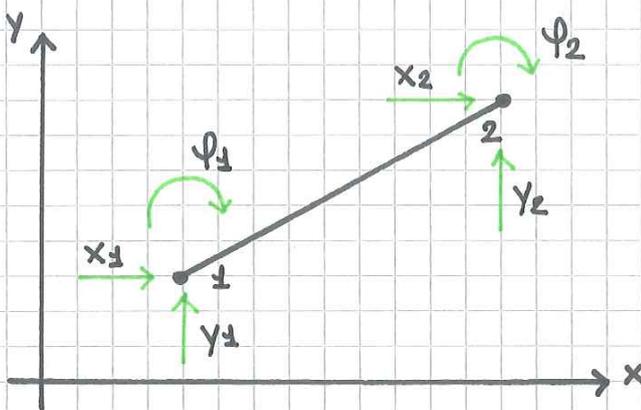
Riferito al SISTEMA x,y

$[K]$ ed $\{S_0\}$ devono essere riferiti al SISTEMA x,y.

$\{F\}$ ed $\{F_0\}$ li definisco in relazione alla MATRICE di INCIDENZA facendo riferimento alle QUANTITA' LOCALI $[K]$ ed $\{S_0\}$.

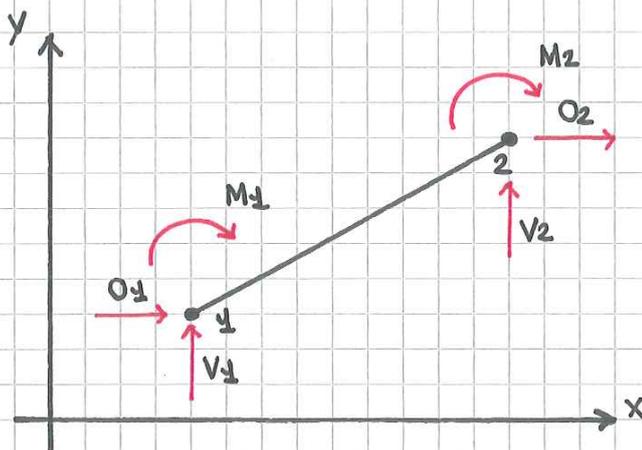


$$\begin{Bmatrix} m \\ s \end{Bmatrix} [z; \eta]$$



$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ y_1 \\ x_1 \\ \phi_2 \\ y_2 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

SPOSTAMENTI NODALI riferiti al SISTEMA [x,y]



$$\{R\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ V_1 \\ O_1 \\ M_2 \\ V_2 \\ O_2 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow + m_3 \cdot \text{sen} \alpha + \frac{m_2}{\text{cos} \alpha} \cdot \text{cos}^2 \alpha = y_1$$

$$\Rightarrow \underline{y_1 = + m_3 \cdot \text{sen} \alpha + m_2 \text{cos} \alpha}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= m_2 \cdot \text{cos} \alpha + m_3 \cdot \text{sen} \alpha \\ x_1 &= m_3 \cdot \text{cos} \alpha - m_2 \cdot \text{sen} \alpha \\ \psi_1 &= m_1 \quad \text{RIMANE lo stesso + RIF.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= m_5 \cdot \text{cos} \alpha + m_6 \cdot \text{sen} \alpha \\ x_2 &= m_6 \cdot \text{cos} \alpha - m_5 \cdot \text{sen} \alpha \\ \psi_2 &= m_4 \end{aligned}$$

LEGAME tra $\{\mu\}$ e $\{m\}$

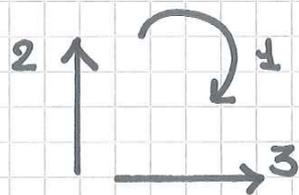
$$\begin{Bmatrix} \psi_1 \\ y_1 \\ x_1 \\ \psi_2 \\ y_2 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{cos} \alpha & \text{sen} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\text{sen} \alpha & \text{cos} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{cos} \alpha & \text{sen} \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen} \alpha & \text{cos} \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\{\mu\} = [\omega] \cdot \{m\}} \quad \rightarrow \quad \underline{\{m\} = [\omega]^{-1} \cdot \{\mu\}}$$

1) NOTI:

- GEOMETRIA (COORDINATE VERTICI dei NODI)
A, B, C, D, E
- CARICHI TRAVI q_v, q_0
- FORZE NODALI $\{F\}$ -----> riferite a x, y
- SEZIONI delle TRAVI -----> ∇
- MODULO ELASTICO -----> E

2) DEFINIZIONE degli SPOSTAMENTI NODALI $[x, y]$



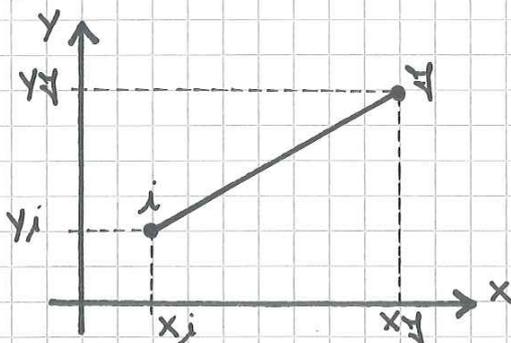
CONVENZIONE -----> Per CALCOLO MATRICE di ROTAZIONE UNICA

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_g$: SPOSTAMENTI NODALI

3) Definire degli ESTREMI nelle TRAVI e SCRIVERE MATRICE di INCIDENZA.

TRAVE	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
TRAVE 1	0	0	0	1	2	3
TRAVE 2	1	2	3	4	5	6
TRAVE 3	4	5	6	7	8	9
TRAVE 4	0	0	0	7	8	9

4) VALORI di L e di α di OGNI TRAVE



$$L = \sqrt{(y_j - y_i)^2 + (x_j - x_i)^2}$$

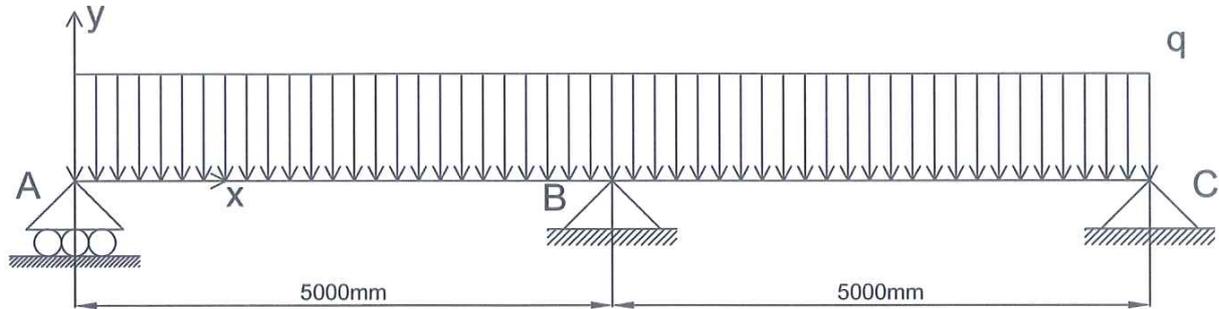
$$\alpha = \text{tg}^{-1} \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} \quad (\text{arctg})$$

CORSO : COMPLEMENTI di TECNICA delle COSTRUZIONI
DOCENTE : ALESSANDRO ING. FANTILLI
LEZIONE n° : 7

DATA : 23/10/2014

ESERCIZIO 1 - UTILIZZO PROGRAMMA TELAIO 6 X 6

Schema Statico della struttura - Trave continua su tre appoggi

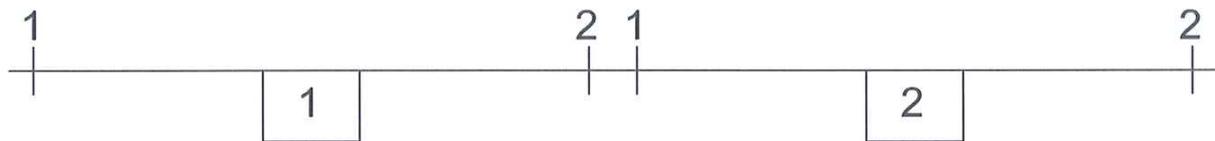


Dati

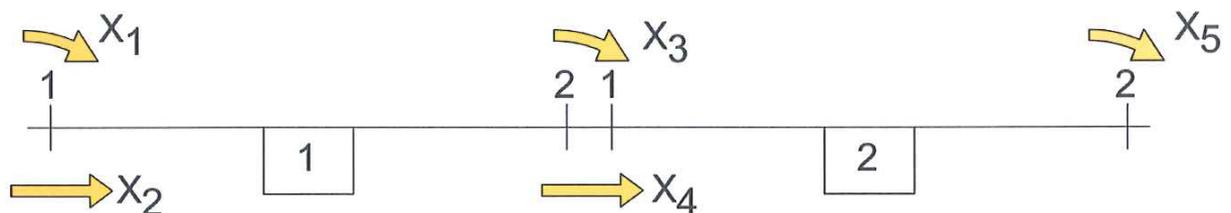
- a) Sezione trasversale rettangolare : $b = \text{base} = 20 \text{ mm}$; $h = \text{altezza} = 40 \text{ mm}$;
- b) Modulo di Young $E = 210'000 \text{ MPa}$;
- c) $q = 1,2 \text{ N/mm}$.

TAPPA 1 : fisso sistema di riferimento x,y

TAPPA 2 : divido il mio schema statico in macroelementi strutturali definiti come solidi di Saint Venant



TAPPA 3 : definisco gli spostamenti nodali



Avrò dunque 5 incognite.

TAPPA 4 : scrivo la matrice di incidenza

TRAVE	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
TRAVE 1	1	0	2	3	0	4

CORSO : COMPLEMENTI di TECNICA delle COSTRUZIONI

DOCENTE : ALESSANDRO ING. FANTILLI

LEZIONE n° : 7

DATA : 23/10/2014

Nell'inserimento dei dati, bisogna essere coerenti con l'unità di misura. I dati geometrici verranno introdotti in mm essendo il modulo elastico E espresso in MPa (N/mm²), e pertanto anche l'area A e il momento di inerzia J_{xx}.

Per prima cosa, calcoliamo l'Area A della Sezione:

$$A = b \cdot h = 20 \cdot 40 = 800 \text{ mm}^2$$

ed anche il Momento di Inerzia J_{xx} :

$$J_{xx} = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{12} \cdot 20 \cdot 40^3 = 106666,6667 \text{ mm}^4$$

Procediamo con l'analizzare le coordinate dei punti:

A (0,0)

B(+5000,0)

C(+10000,0)

Raccogliamo i dati nella tabella:

dati geom/mecc							
trave	x1	y1	x2	y2	E	A	J
1	0	0	5000	0	210000	800	106666,7
2	5000	0	10000	0	210000	800	106666,7

B. Scrivo la matrice di incidenza

matrice di incidenza						
trave	u 1	u 2	u 3	u 4	u 5	u 6
1	1	0	2	3	0	4
2	3	0	4	5	0	0

C. Inserimento Carichi Nodali

Sono tutti nulli, in quanto non abbiamo applicato alcun carico ai nodi.

carichi nodali	
spost/rota	forza/momen
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0

D. Inserimento Carichi Ortogonali

CORSO : COMPLEMENTI di TECNICA delle COSTRUZIONI
DOCENTE : ALESSANDRO ING. FANTILLI
LEZIONE n° : 7

DATA : 23/10/2014

2. Tabella Trave 1

Ci da informazioni riguardo le caratteristiche della sollecitazione M,N,T.

trave 1			
z	M	N	T
0	-4,65661E-10	0	2250
500	975000	0	1650
1000	1650000	0	1050
1500	2025000	0	450
2000	2100000	0	-150
2500	1875000	0	-750
3000	1350000	0	-1350
3500	525000	0	-1950
4000	-600000	0	-2550
4500	-2025000	0	-3150
5000	-3750000	0	-3750

3. Tabella Trave 2

Ci da informazioni riguardo le caratteristiche della sollecitazione M,N,T.

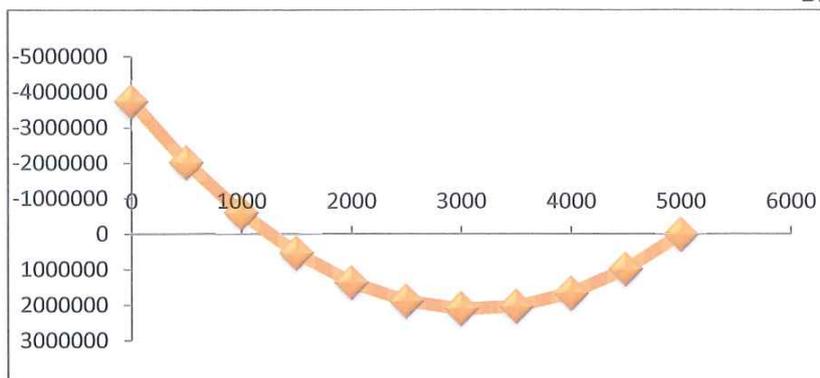
trave 2			
z	M	N	T
0	-3750000	0	3750
500	-2025000	0	3150
1000	-600000	0	2550
1500	525000	0	1950
2000	1350000	0	1350
2500	1875000	0	750
3000	2100000	0	150
3500	2025000	0	-450
4000	1650000	0	-1050
4500	975000	0	-1650
5000	5,54792E-10	0	-2250

Otengo inoltre i Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione M,N,T

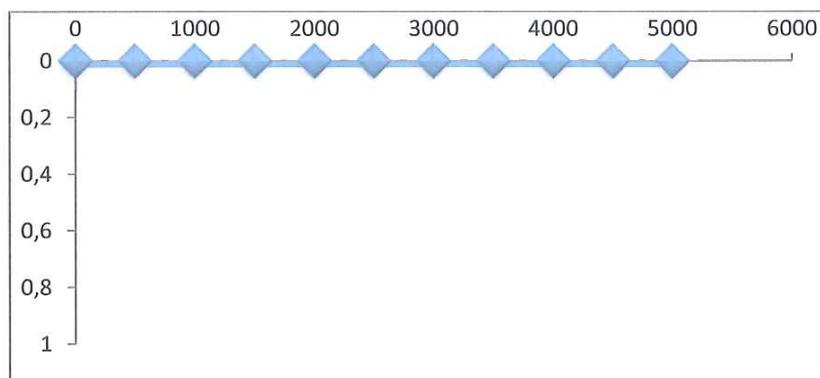
a) Diagramma del Momento Trave 1

CORSO : COMPLEMENTI di TECNICA delle COSTRUZIONI
DOCENTE : ALESSANDRO ING. FANTILLI
LEZIONE n° : 7

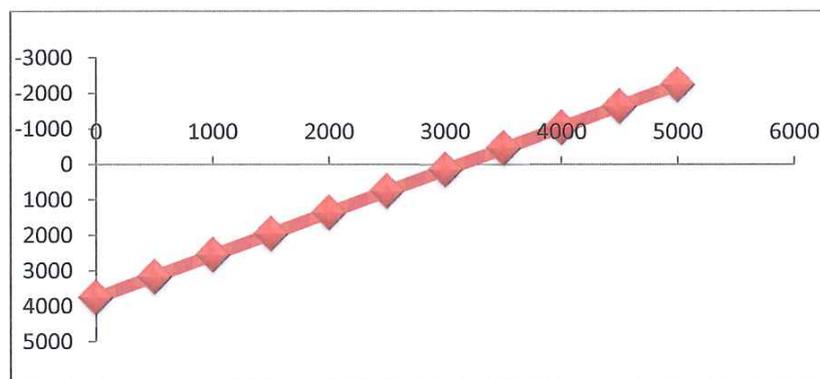
DATA : 23/10/2014



e) Diagramma dello Sforzo Normale Trave 2



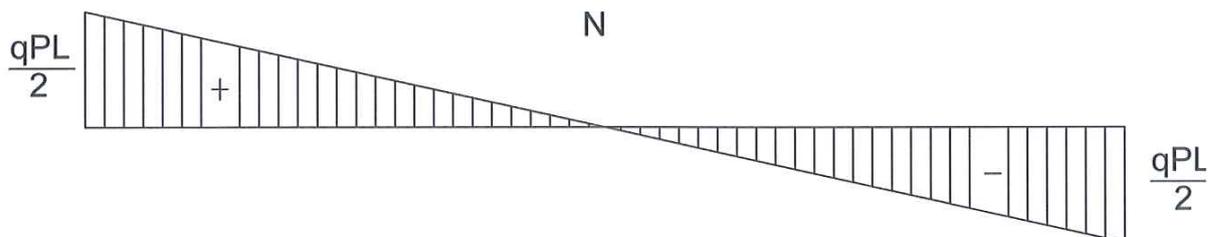
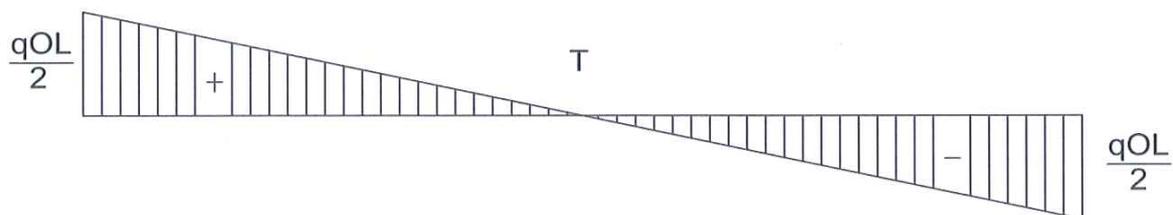
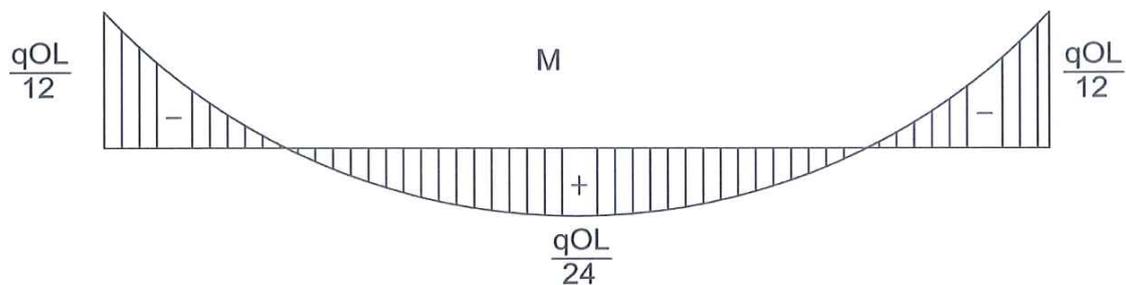
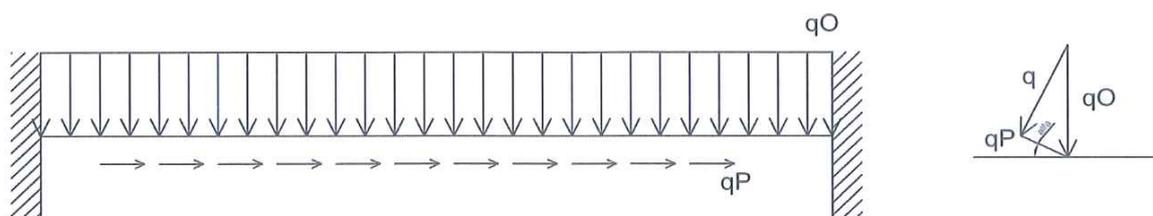
f) Diagramma dello Sforzo di Taglio Trave 2



Osserviamo la simmetria del diagramma del momento flettente essendo la struttura simmetrica e simmetricamente caricata, mentre l'antimetria del diagramma del taglio.

CORSO : COMPLEMENTI di TECNICA delle COSTRUZIONI
DOCENTE : ALESSANDRO ING. FANTILLI
LEZIONE n° : 7

DATA : 23/10/2014



CORSO : COMPLEMENTI di TECNICA delle COSTRUZIONI

DOCENTE : ALESSANDRO ING. FANTILLI

LEZIONE n° : 7

DATA : 23/10/2014

1	0	0	0	1	2	3
2	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	0	0	0

C. Inserimento Carichi Nodali

Sono tutti nulli, in quanto non abbiamo applicato alcun carico ai nodi.

carichi nodali	
spost/rota	forza/momen
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0

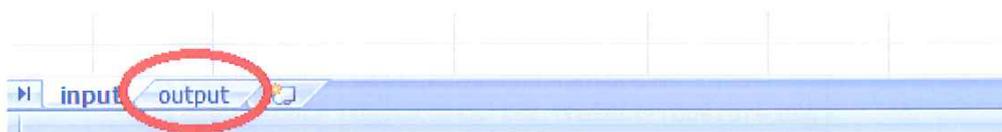
D. Inserimento Carichi Ortogonali

carichi ortogonali	
trave	q ort
1	0
2	3,21
3	0

E. Inserimento Carichi Paralleli

carichi paralleli	
trave	q para
1	0
2	-1,6
3	0

Ho terminato la fase di Input. Passo alla fase di Output cliccando sul Foglio di lavoro Output



G. Output

Clicco su risultati.



Ottingo tre tabelle:

CORSO : COMPLEMENTI di TECNICA delle COSTRUZIONI
DOCENTE : ALESSANDRO ING. FANTILLI
LEZIONE n° : 7

DATA : 23/10/2014

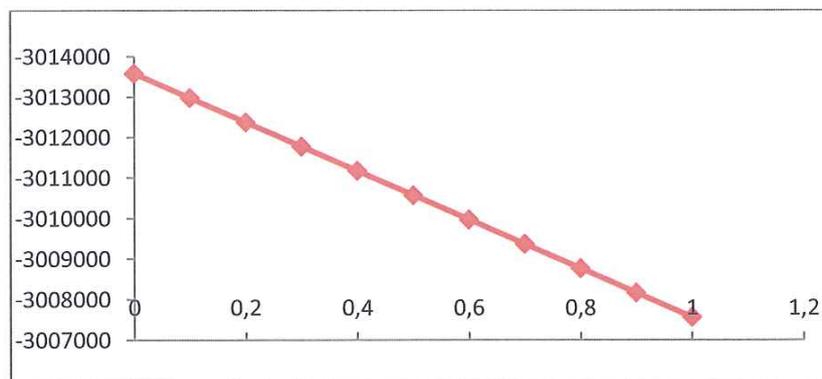
4. Tabella Trave 3

Ci da informazioni riguardo le caratteristiche della sollecitazione M,N,T.

trave	3		
z	M	N	T
0	-3007579,833	7,5	-6015
0,1	-3008181,333	7,5	-6015
0,2	-3008782,833	7,5	-6015
0,3	-3009384,333	7,5	-6015
0,4	-3009985,833	7,5	-6015
0,5	-3010587,333	7,5	-6015
0,6	-3011188,833	7,5	-6015
0,7	-3011790,333	7,5	-6015
0,8	-3012391,833	7,5	-6015
0,9	-3012993,333	7,5	-6015
1	-3013594,833	7,5	-6015

Otengo inoltre i Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione M,N,T

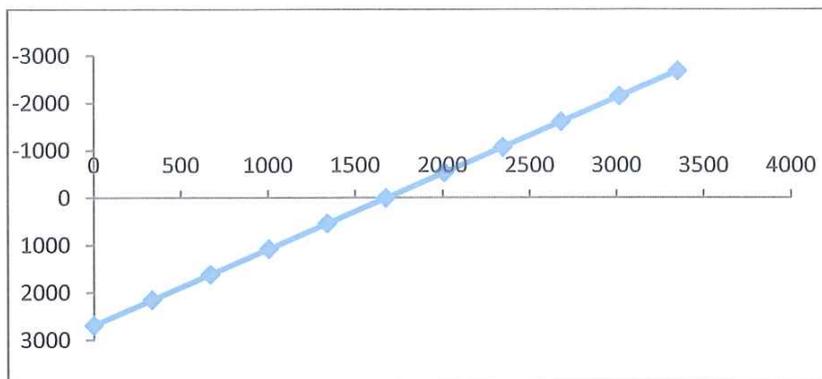
a) Diagramma del Momento Trave 1



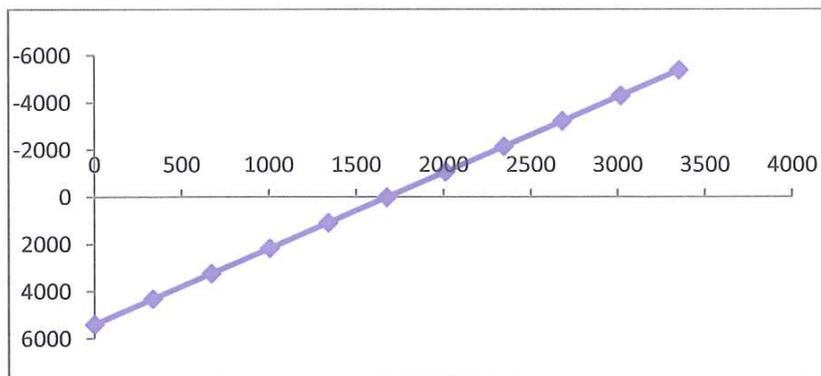
b) Diagramma dello Sforzo Normale Trave 1

CORSO : COMPLEMENTI di TECNICA delle COSTRUZIONI
DOCENTE : ALESSANDRO ING. FANTILLI
LEZIONE n° : 7

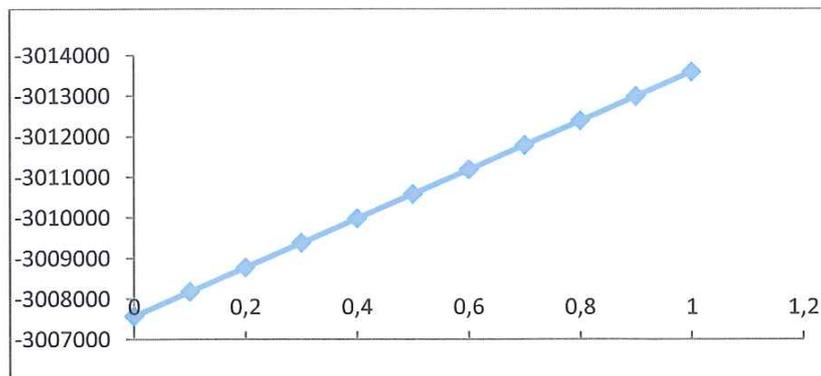
DATA : 23/10/2014

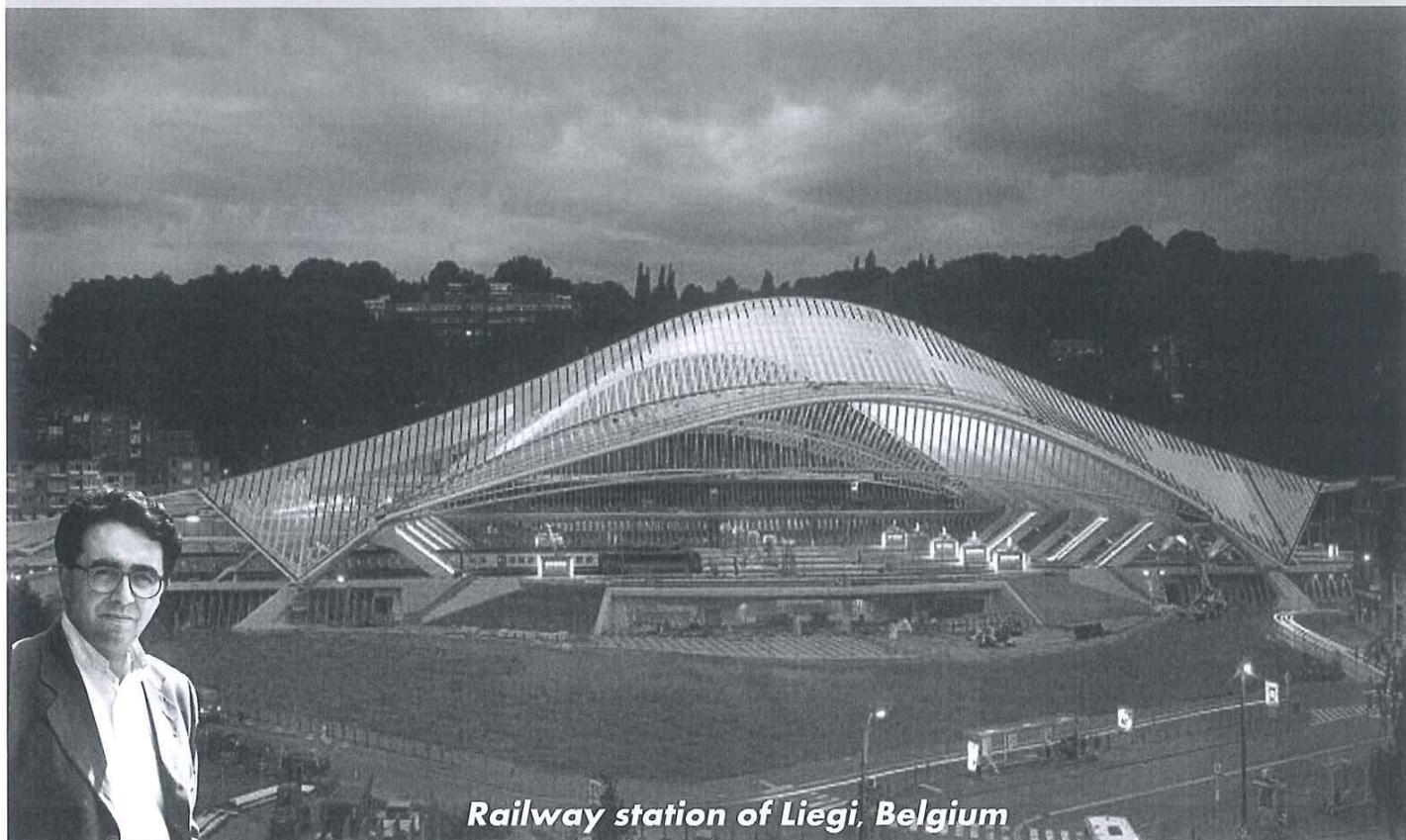


f) Diagramma dello Sforzo di Taglio Trave 2



g) Diagramma del Momento Trave 3





Railway station of Liegi, Belgium

APPUNTI di COMPLEMENTI di TECNICA delle COSTRUZIONI

Prof. Ing. Alessandro Fantilli

Capitolo Due

Le Azioni sulle costruzioni

Azione Sismica

aggiornamento gennaio 2015

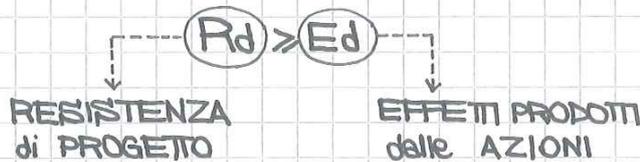
alessandro zito

CORSO: COMPLEMENTI di TECNICA delle COSTRUZIONI

DOCENTE: ALESSANDRO ING. FANTILLI

LEZIONE n°: 7

DATA: 23/10/2014



$$R_d = \frac{R_k}{\gamma_{MATERIALE}} \Rightarrow \text{FRATTILE } 105\%$$

$$E_d = E_k \cdot \gamma_q \Rightarrow \text{CALCOLO SOLLECITA= ZIONI e VERIFI= FICO me sia= no } \leq R_d$$

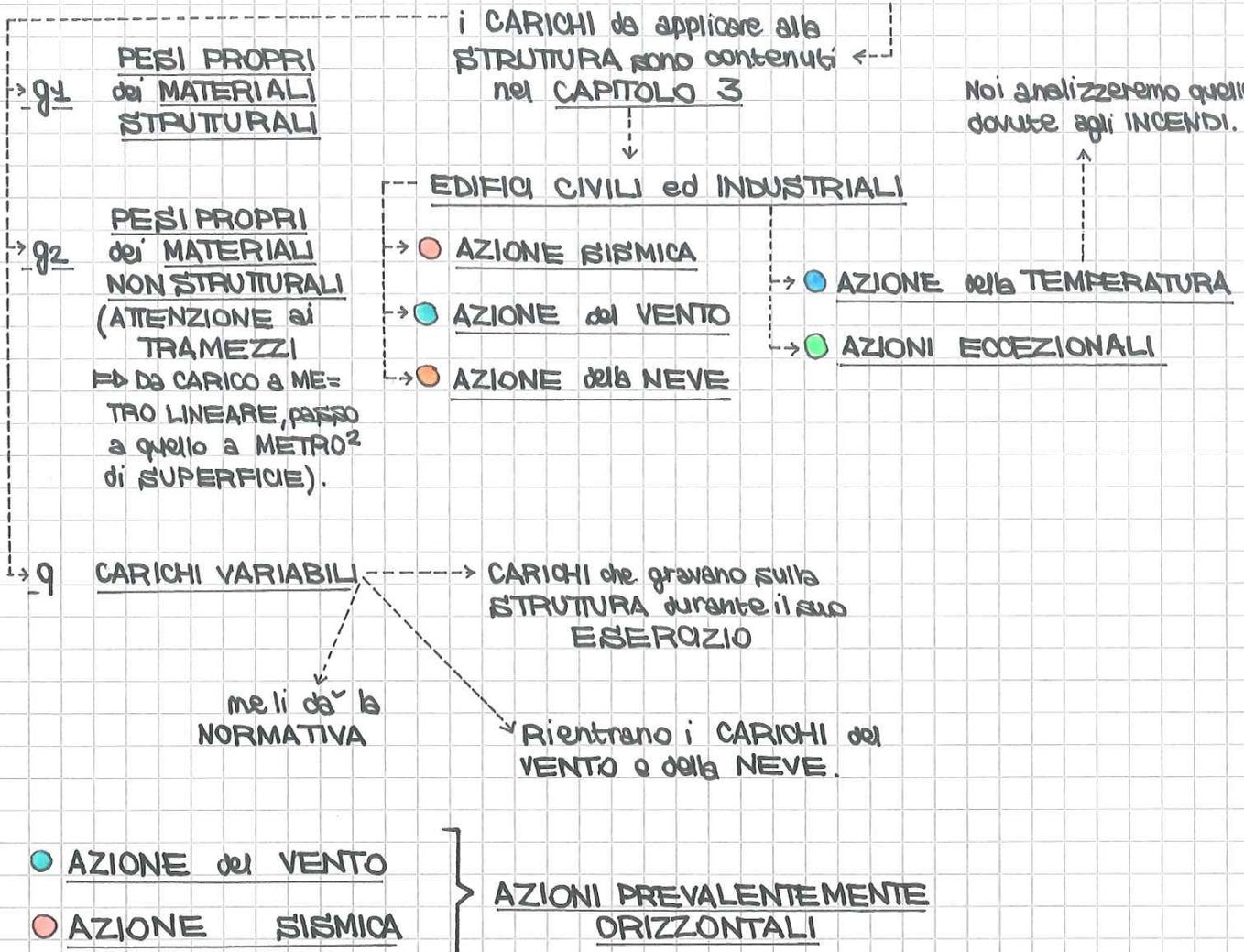
FRATTILE 95%

Analizo i CARICHI

NTC 14/01/2008

i CARICHI da applicare alla STRUTTURA sono contenuti nel CAPITOLO 3

Noi analizzeremo quelle dovute agli INCENDI.



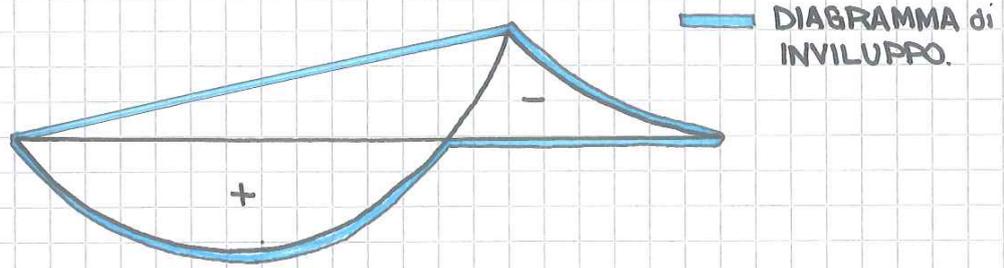
● AZIONE del VENTO

● AZIONE SISMICA

} AZIONI PREVALENTEMENTE ORIZZONTALI

CALCOLO CONGLOMERATO
CEMENTIZIO ARMATO

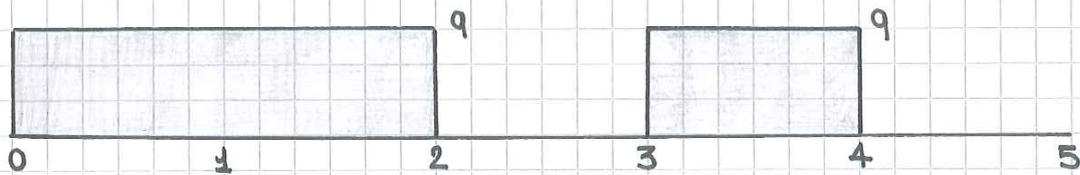
Devo considerare il DIAGRAMMA
di MOMENTO di INVILUPPO



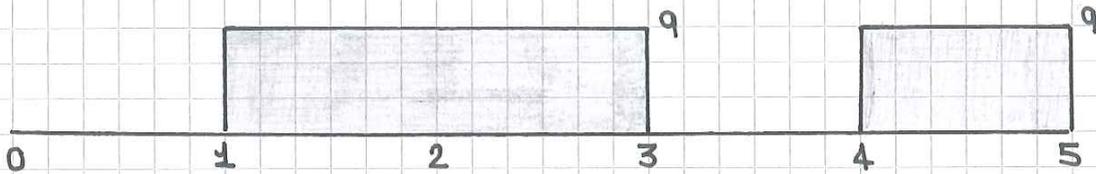
ESEMPIO : TRAVE CONTINUA



OBBIETTIVO : MASSIMIZZARE MOMENTI + TAGLI



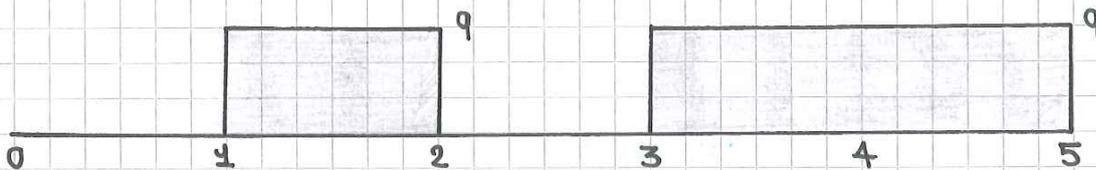
(A)
CONDIZIONE
 $M_1 (-)$
MAX



(B)
CONDIZIONE
 $M_2 (-)$
MAX



CONDIZIONE
 $M_3 (-)$
MAX



CONDIZIONE
 $M_4 (-)$
MAX



MOMENTO VINCOLO 0 e VINCOLO 5 e' NULLO !!!!

CORSO: COMPLEMENTI di TECNICA delle COSTRUZIONI

DOCENTE: ALESSANDRO ING. FANTILLI

LEZIONE n°: 8

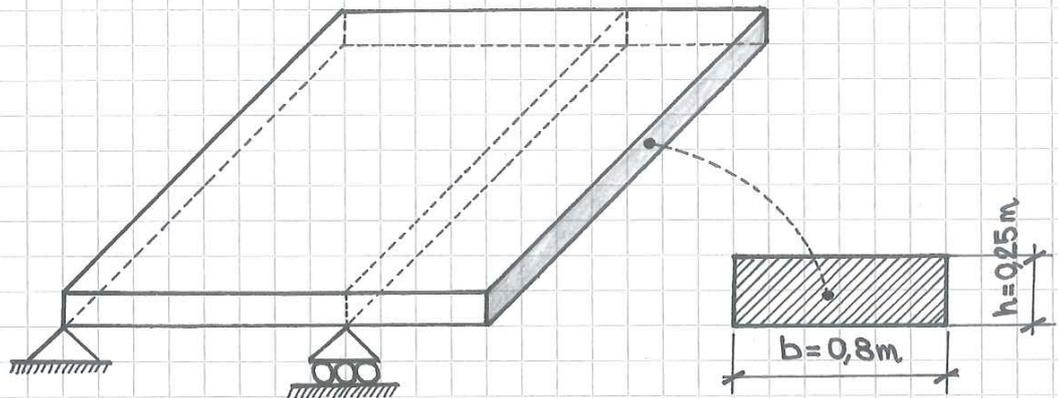
DATA: 24/10/2014

DISPOSIZIONE e COMBINAZIONE dei CARICHI

Le OPERAZIONI di DISPOSIZIONE e COMBINAZIONE dei CARICHI

NON sono SLEGATE tra loro.

Consideriamo
STRISCIA di
SOLAIO
di COPERTURA



CARICHI AGENTI:



Sono CARICHI di SUPERFICIE

⇒ Devono passare a CARICHI su UNITA' di LUNGHEZZA

- Q_p PESO PROPRIO STRUTTURALE (C.A.)
- Q_s CARICO VARIABILE (COPERTURA NON PRATI-CABILE)
→ NTC 2008 → $= 0,5 \text{ kN/m}^2$
- Q_n CARICO NEVE $= 1,38 \text{ kN/m}^2$
- Q_v CARICO VENTO $= - 0,35 \text{ kN/m}^2$

Q_p ---- NTC 2008: PESO dell'UNITA' di VOLUME CLS ----> $\gamma_{CLS} = 25,00 \text{ kN/m}^3$

$q_p = \gamma_{CLS} \cdot b \cdot h = 25,00 \cdot 0,8 \cdot 0,25 = 5,00 \text{ kN/m}$

$q_s = Q_s \cdot 0,8 = 0,5 \cdot 0,8 = 0,40 \text{ kN/m}$

AZIONI ORIZZONTALI -----> prodotte da un SISMA

TORINO -----> ZONA 4 -----> ZONA a PIU' BASSA SISMICITA'



NON vuol dire che e' ZERO l'EFFETTO del SISMA

Tutto il TERRITORIO NAZIONALE ricade in ZONA SISMICA.

AZIONI SISMICHE

MOVIMENTO BRUSCO del TERRENO su cui la STRUTTURA POGGIA

NON e' piu' un' AZIONE STATICA (LENTA) ma DINAMICA

Alle STRUTTURE sono IMPRESSI:

● X : SPOSTAMENTI

● V' : VELOCITA'

● a : ACCELERAZIONI

REAGISCE

→ a SPOSTAMENTO : con FORZA PROPORZIONALE ad X, detta FORZA di RICHIAMO ELASTICA

$$F_E = (K) \cdot X$$

RIGIDEZZA

→ a VELOCITA' : con FORZA PROPORZIONALE a V', detta FORZA VISCOUSA

$$F_V = (C) \cdot V'$$

COEFFICIENTE di VISCOSITA' della STRUTTURA

→ ad ACCELERAZIONE : con FORZA PROPORZIONALE ad a, detta FORZA d'INERZIA

$$F_I = (m) \cdot a$$

MASSA STRUTTURA

$$F_I + F_E + F_V = 0$$

$$\Rightarrow m \cdot a + K \cdot x + c \cdot \dot{v} = -m \cdot g$$

\swarrow \searrow \swarrow \swarrow
 e^z f_z

EQUILIBRIO DINAMICO

EQUAZIONE DIFFERENZIALE
del SECONDO ORDINE

TORINO: ZONA 4

AZIONE SISMICA
si applica nelle 2
DIREZIONI PRINCIPALI
x, y

$$F.S = \gamma \% \cdot g \cdot m$$

ACCELERAZIONE di GRAVITA'

$\gamma = 0,686\%$ ACCELERAZIONE SISMICA

FORZA ORIZZONTALE

SOLAIO si comporta in 2 MODI

SOLAI RIGIDI nel PROPRIO PIANO:
TRASLA, ma NON
SUBISCE SPOSTAMENTI RELATIVI.

va a ricadere sui PILASTRI che sorreggono il SOLAIO

si va ad applicare nel BARIENTRO del SOLAIO (INCONTRO DIAGONALI)

SOLAI FLESSIBILI nel PROPRIO PIANO

→ AZIONE SISMICA NON viene RIPARTITA in EGUAL MODO tra tutti i PILASTRI, ad eccezione di alcuni casi