NUMERO: 1361 ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Chezzi

MATERIA: Geometria + Eserc, Prof.Musso

n NUMERO NATURALE POSITIVO

$\mathbb{R}^n$ SONO TUTTE LE n-PLE ORDINATE DI NUMERI REALI

GLI ELEMENTI DI $\mathbb{R}^n$ SONO I VETTORI DI $\mathbb{R}^n$

$v = \underbrace{(v_1, v_2, \dots v_n)}_{\text{COMPONENTI DI } \vec{v}}$ $\qquad v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}$

SOMMA DI VETTORI

$v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

$w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$

$v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n)$

DIFFERENZA DI VETTORI

$v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

$w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$

$v - w = (v_1 - w_1, v_2 - w_2, \dots, v_n - w_n)$

PRODOTTO PER SCALARE

$\alpha \in \mathbb{R} \qquad v \in \mathbb{R}^n$

$v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ $\qquad \alpha v = (\alpha v_1, \alpha v_2, \dots, \alpha v_n)$

PROPRIETÀ

1. $v + w = w + v \qquad \forall w, v \in \mathbb{R}^n$
2. $(v + w) + u = v + (w + u) \qquad \forall w, v \in \mathbb{R}^n$ ASSOCIATIVITÀ
3. $v + 0 = v \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$ ESISTENZA DI UN ELEM. NEUTRO ADDITIV
4. $\forall v \in \mathbb{R}^n \; \exists -v \in \mathbb{R}^n : v + (-v) = 0$ ESISTENZA DELL' OPPOSTO
5. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}^n, \; \lambda(\mu v) = (\lambda \mu) v$
6. $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v, w \in \mathbb{R}^n$
7. $(\lambda + \mu) v = \lambda v + \mu v \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}^n$
8. $1 \cdot v = v \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$ ESISTENZA DI UN ELEMENTO NEUTRO MOLTIPLICATIVO

1. $w = 0 \Rightarrow \|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$

2. $w \neq 0 \quad \exists \lambda \geq 0 : v = \lambda w$

$\|v\| = \|w\| \Rightarrow \|\lambda w\| = \|w\|$

$$\|\lambda w\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} (\lambda w_j)^2} = \sqrt{\lambda^2 \left(\sum_{j=1}^{N} (w_j)^2\right)} = |\lambda| \, \|w\|$$

$|\lambda| \, \|w\| = \|w\|$

$\Downarrow$

$|\lambda| = 1 \rightarrow v = w$

PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE

$DET(\lambda u, v, w) = \lambda \, DET(u, v, w)$ OMOGENEITÀ

$DET(u_1 + u_2, v, w) = DET(u_1, v, w) + DET(u_2, v, w)$

$DET(u, v, w) = -DET(v, u, w)$ (~~SE SCAMBIO 1ª E 3ª RIGA RESTA UGUALE~~

PRODOTTO VETTORIALE

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \leftarrow det = v \times w = i(v_2 w_3 - v_3 w_2) - j(v_1 w_3 - v_3 w_1) + k(v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

DEF. DATI 2 VETTORI v, w DI $\mathbb{R}^3$, IL LORO PRODOTTO VETTORIALE $v \times w$ $\in \mathbb{R}^3$ DEFINITO COME SOPRA.

$i \times i = j \times j = k \times k = 0$

NOTA: $v \times \lambda(v) = 0$

$i \times j = k \qquad j \times i = -k$

$i \times k = -j \qquad k \times i = j$

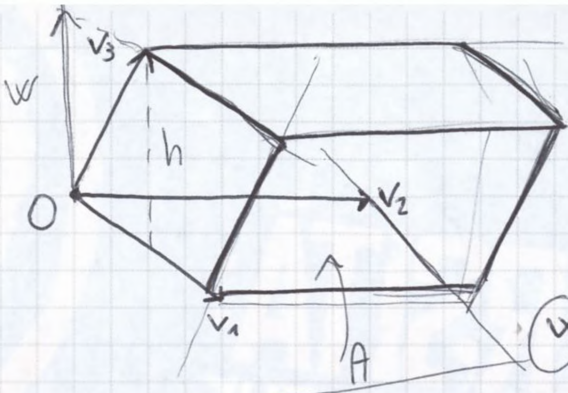
$j \times k = i \qquad k \times j = -i$

REGOLE DI CALCOLO DEL P.V.

1. $v \times w = -w \times v$ PROPRIETÀ ALTERNANTE
2. $(\lambda u) \times w = \lambda (u \times w) = u \times (\lambda w)$ PROPRIETÀ DI OMOGENEITÀ
3. $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$ PROPRIETÀ DI DISTRIBUTIVITÀ

PROPRIETÀ DEL PV

PROP: 1. $u \times w \perp$ A u E w



$|[v_1, v_2, v_3]| =$ VOLUME DEL PARALLELEPIPEDO

AREA $(A) = \|v_1 \times v_2\|$

$[\ ]$ = PRODOTTO MISTO

w = PROIEZIONE ORTOGONALE DI v_3 SU $v_1 \times v_2$

$h = \|w\|$

$$w = \left(\frac{v_3 \cdot (v_1 \times v_2)}{\|v_1 \times v_2\|^2} \right) v_1 \times v_2 = \frac{[v_1, v_2, v_3]}{\|v_1 \times v_2\|^2} v_1 \times v_2$$

VOLUME $= \|w\| \, \|v_1 \times v_2\|$ $*$

$$\|w\| = \frac{|[v_1, v_2, v_3]|}{\|v_1 \times v_2\|}$$

SOSTITUITO IN $*$ SI OTTIENE VOLUME $= |[v_1, v_2, v_3]|$

CAMPI

$\mathbb{K}$ INSIEME NON VUOTO MUNITO DI DUE OPERAZIONI:

SOMMA $(a, b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow (a+b) \in \mathbb{K}$

PRODOTTO $(a, b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow ab \in \mathbb{K}$

PROPRIETÀ DEI CAMPI

S1. COMMUTATIVITÀ: $a + b = b + a$

S2. ASSOCIATIVITÀ: $(a+b)+c = a+(b+c)$

S3. ESISTENZA DI UN ELEMENTO NEUTRO ADDITIVO 0_K: $a + 0_K = a$ $\forall a \in$

S4. ESISTENZA DELL'OPPOSTO: $\exists a \in K : a + (-a) = 0_K \quad \forall a \in K$

P1: COMMUTATIVITÀ: $a \cdot b = b \cdot a$

P2: ASSOCIATIVITÀ: $(a \cdot b) \cdot c = a(b \cdot c)$

P3: ESISTENZA DI UN ELEMENTO NEUTRO MOLTIPLICATIVO 1_K: $a \cdot 1_K = a$ $\forall a$

P4: ESISTENZA DELL'INVERSO: $\forall a \in K, a \neq 0_K, \exists a^{-1} \in K : a \cdot a^{-1} = 1_K$

P5: DISTRIBUTIVITÀ: $a(b+c) = ab + ac$

1. UNICITÀ DI 0_K
2. UNICITÀ DI 1_K
3. UNICITÀ DELL'OPPOSTO
4. UNICITÀ DELL'INVERSO

Es. SIANO $u = ai + 2j + bk$, $v = (1-b)i + bj + 2k$, $w = bi + bj + 2k$.
TROVARE I VALORI DI a E b PER CUI $u+v$ E w HANNO LA STESSA DIREZIONE.

$u + v = ((a-b+1), 2+b, 2+b)$

$u+v \parallel w \rightarrow \exists\, \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R} : u+v = \lambda w$

$$\begin{cases} a-b+1 = \lambda b \\ 2+b = \lambda b \\ 2+b = 2\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 5 \\ \lambda b = 2\lambda \Rightarrow b = 2 \\ 4 = 2\lambda \rightarrow \lambda = 2 \end{cases}$$

Es. TROVARE I VETTORI COMPLANARI CON $u = i - k$ E $v = i + j$ E ORTOGONALI A $u+v$.

$X = (x, y, z)$

$u + v = (2, 1, -1)$

$X \cdot (u+v) = 0$ CONDIZIONE DI ORTOGONALITÀ $\Rightarrow 2x + y - z = 0$

$(X \times u) \cdot v = 0$ CONDIZIONE DI COMPLANARITÀ $\Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ x - y + z = 0$

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 3x = 0 \\ y = z \end{matrix} \qquad S = (0, t, t) \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

$S = \{ti + tj : t \in \mathbb{R}\}$

Es. SAPENDO CHE $|u| = 1$, $|v| = 2$, $(u \cdot v) = 1$, CALCOLARE $|u \times v|$.

$|u \times v| = |u||v| \operatorname{sen} \widehat{uv}$

$1 = |u||v| \cos \widehat{uv}$; $1 = 1 \cdot 2 \cdot \cos \widehat{uv} \rightarrow \widehat{uv} = \frac{\pi}{3}$

$|u \times v| = 1 \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

Es. TROVARE L'ANGOLO TRA LE SEGUENTI COPPIE DI VETTORI:

i) $(i, i+j)$

ii) $(i+j, i+k)$

$$\begin{cases} -1-a = b \\ a^2+a = ac \\ 1-a^2 = ba+c \end{cases} \qquad \begin{cases} 1+a=-b \\ a^2+a=ac \\ (1+a)(1-a)=ba+c \end{cases} \qquad \begin{cases} 1+a=-b \\ a(1+a)=\cancel{a}c \\ (1+a)(1-a)=ba+c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+a=-b \\ -b=c \\ -b(1-a)=ba+c \end{cases} \qquad \begin{cases} a=c-1 \\ -b=c \\ -b+ab=ab-b \end{cases}$$

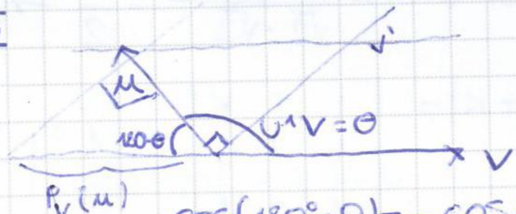
SE $a \neq 0 \rightarrow b=-c$

SE $a=0 \rightarrow b=-1$, $c=1$

ES. DATI I VETTORI $u = i+3j-k$, $v = i-j$ SCOMPORRE u NELLA SOMMA DI UN VETTORE $\perp$ A u E DI UNO AVENTE LA STESSA DIREZIONE DI v.

$|u| = \sqrt{11}$ $\qquad |v| = \sqrt{2}$

$$\cos u\hat{}v = \frac{-2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{11}}$$



$\cos(180°-\theta) = -\cos\theta$

$u = v' + P_v(u)$

$$\cos\theta = \frac{|u|}{P_v(u)} \rightarrow P_v(u) = \frac{|u|}{\cos\theta}$$

$$P_v(u) = \frac{\sqrt{11}}{-2}\cdot\sqrt{11}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}} = \frac{11}{2}(-1,1,0)$$

$$\cancel{u - P_v(u) = (1,3,-1)\left(\frac{13}{2}, -\frac{5}{2}, -1\right) = 0 \rightarrow \perp}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{v'} + \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ \frac{11}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 1+\frac{11}{2} = \frac{13}{2} \\ y = 3-\frac{11}{2} = -\frac{5}{2} \\ z = -1 \end{cases}$$

$$v' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ \frac{11}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ -5/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$u \cdot v' = (1,3,-1)\left(\frac{13}{2}, -\frac{5}{2}, -1\right) = 0 \longrightarrow \perp$$

$ax+by+cz=0 \longrightarrow$ SOTTOINSIEME FORMATO DAGLI $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ PERPENDICOLARI A (a,b,c)

$(x,y,z),(x',y',z') \in \pi$, ALLORA:

$x+x',\ y+y',\ z+z'$

$$a(x+x')+b(y+y')+c(z+z')$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{(ax+by+cz)}_{0}+\underbrace{(ax'+by'+cz')}_{0} = 0$$

$$\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

$$a(\lambda x)+b(\lambda y)+c(\lambda z) = \lambda(\underbrace{ax+by+cz}_{0}) = 0$$

π È UN SOTTOINSIEME NON VUOTO DI $\mathbb{R}^3$:

1. $\forall v,w \in \pi \Rightarrow v+w \in \pi$
2. $\forall v \in \pi, \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda v \in \pi$

V SPAZIO VETTORIALE SU K

$W \subseteq V$ SOTTOINSIEME NON VUOTO, ~~ALLORA~~ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE SE:

1. $\forall u,v \in W \Rightarrow u+v \in W$ $\rightarrow$ CHIUSO RISPETTO ALLA SOMMA
2. $\forall u \in W, \forall \lambda \in K \Rightarrow \lambda u \in W$ $\rightarrow$ CHIUSO RISPETTO AL PRODOTTO PER UNO SCALARE

Es.

$\mathbb{R}^n$, $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=0$$

$W=0$, $W=V$ } SOTTOSPAZI BANALI DI V

COMBINAZIONI LINEARI

- V SPAZIO VETTORIALE SU K
- $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$

$u \in V$ È UNA COMBINAZIONE LINEARE DI $v_1, v_2, \dots, v_n$ SE ESISTONO n SCALARI $x_1, x_2, \dots, x_n$ $\in$ TALI CHE $u = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots x_n v_n$

$W = \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ È L'INSIEME FORMATO DA TUTTE LE COMBINAZIONI LINEARI DEI VETTORI $v_1, v_2, \dots, v_n \subseteq V$

PROPRIETÀ: $\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V, DETTO SOTTOSPAZIO GENERATO DA $v_1, v_2, \dots v_n$ O IN ALTERNATIVA $v_1, v_2, \dots, v_n$ È UN SISTEMA DI GENERATORI DI W

<u>DIM</u>. 1. $0_K v_1 + 0_K v_2 + \dots + 0_K v_n = 0$

2. $u' = x_1 v_1, x_2 v_2, \dots, x_n v_n \in \mathcal{L}$
$u'' = y_1 v_1, y_2 v_2, \dots, y_n v_n \in \mathcal{L}$

$u' + u'' = (x_1 + y_1) v_1 + (x_2 + y_2) v_2 + \dots + (x_n + y_n) v_n \in \mathcal{L}$

3. $\lambda \in K$, $u = x_1 v_1, x_2 v_2, \dots x_n v_n$

$\lambda u = (\lambda x_1) v_1 + (\lambda x_2) v_2 + \dots + (\lambda x_n) v_n \in \mathcal{L}$

<u>ES.</u> $\mathbb{R}^3$

$e_1 = (1,0,0) = i$

$e_2 = (0,1,0) = j$ $\qquad \mathcal{L}(i, j, k) = \mathbb{R}^3$

$e_3 = (0,0,1) = k$ $\qquad \mathcal{L}(i, j) = Oxy$

$z = 0 \perp i \times j$

<u>ES.</u>

$a = (l, m, n) = (1, 2, 1)$

$b = (l', m', n') = (-1, 3, -1)$ $\qquad \mathcal{L}(a, b) = ?$

$\mathcal{L}(a,b) = pa + qb$ CON $p, q \in \mathbb{R}$

LE COMPONENTI DEI VETTORI DI $\mathcal{L}(a,b)$ SONO DEL TIPO:

~~$x = p - q$~~

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 176

DIPENDENZA E INDIPENDENZA LINEARE

DEF. $v_1, \dots, v_n \in V$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI SE DATA $x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_n = 0$.
IN CASO CONTRARIO, I VETTORI $v_1, \dots, v_n$ SI DICONO LINEARMENTE DIPENDENTI, OVVERO ESISTERANNO $x_1, \dots, x_n$ NON TUTTI NULLI TALI CHE $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = 0$.

PROPRIETÀ: $(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n})$ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI $\Leftrightarrow$ UNO ALMENO DI ESSI È COMBINAZIONE LINEARE DEI RIMANENTI

COROLLARIO: ~~[illegible]~~ I VETTORI $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI SE E SOLO SE NESSUNO DI ESSI È COMBINAZIONE LINEARE DEI RIMANENTI

ES. IN $\mathbb{R}^3$ TRE VETTORI SONO L. D $\Leftrightarrow$ SONO COMPLANARI
DUE VETTORI SONO L. D $\Leftrightarrow$ COLLINEARI

BASE DI UNO SP. VETT. FIN. GEN.

DEF. SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE FINITAMENTE GENERATO. UNA BASE $B = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n})$ È UNA n-PLA ORDINATA TALE CHE:

1. $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI
2. $\mathcal{L}(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}) = V$

PROP: $\mathcal{B} = (\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n})$ UNA BASE DI V. ALLORA, $\forall \vec{v} \in V \; \exists!$ n-PLA ORDINATA $(x_1 \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ TALE CHE $\vec{v} = x_1 \vec{v_1} + \dots + x_n \vec{v_n}$
$(x_1, \dots, x_n)$ = COMPONENTI DI $\mathbf{v}$ RISPETTO ALLA BASE $\mathcal{B}$

ES. $\mathbb{R}^3$, $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$v = (l, m, n) = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$

$\mathcal{B}' = (\vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$. QUALI SONO LE COMPONENTI DI V IN $\mathcal{B}'$?

$v = (m, l, n)$

$B = (\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n})$ $\qquad$ $\vec{v} = x_1 \vec{v_1} + \dots + x_n \vec{v_n}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X_B(\vec{v})$$

Es 2

$\Gamma: P = (R\cos t, R\operatorname{sen} t) \qquad 0 < t < 2\pi \qquad \gamma = [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$t \to (R\cos t, R\operatorname{sen} t)$

REGOLARE E CHIUSA $\Rightarrow \gamma(0) = (R, 0) = \gamma(2\pi) \qquad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} -R\operatorname{sen} t \\ R\cos t \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma'(t) \neq$

Es. 3 (ELICA CIRCOLARE)

$L: P: \gamma(t) = (R\cos t, R\operatorname{sen} t, ht)$ (R POSITIVO) È UNA CURVA REGOLARE

$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -R\operatorname{sen} t \\ R\cos t \\ h \end{pmatrix}$

LA RETTA TANGENTE AD UNA CURVA REGOLARE

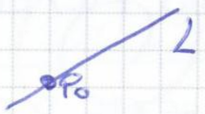
$\gamma(t) = P = P(t) \qquad t \in (a, b)$

CURVA REGOLARE

LA RETTA PASSANTE PER P_0 È PARALLELA AL VETTORE (NON NULLO) $P'(t_0)$ E SI DICE RETTA TANGENTE IN P_0

Es.

SE L È UNA RETTA



$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{pmatrix} \qquad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

LA TANGENTE A L IN P_0 $\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$

Es: TROVARE LA RETTA TANGENTE A $L: P = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, t)$ NEL PUNTO $P_0(-2, 0, \pi)$.

γ SARÀ LA RETTA PASSANTE PER P_0 E PARALLELA AL VETTORE $P'(\pi)$.

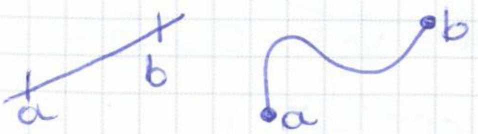
$P'(\pi) = \begin{pmatrix} 2\operatorname{sen} t \\ 2\cos t \\ 1 \end{pmatrix}_{\pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma = \begin{pmatrix} x = -2 + 0t \\ y = 0 - 2t \\ z = \pi + 1t \end{pmatrix}$

LUNGHEZZA DI UN ARCO

$L: P = P(t) \qquad t \in I$

CURVA REGOLARE

$a, b \in I \qquad a = P(a) \qquad b = P(b)$



$\ell(\gamma) = \int_a^b P'(t)\,dt = P'(t) > 0 \quad \forall t$

DEF. SI DICE CHE UNA PARAMETRIZZAZIONE REGOLARE $L: P(t) = P$ È INTRINSECA $\Longleftrightarrow |P'(t)| = 1 \quad \forall t$

NELL'ESEMPIO DELL'ELICA, CON $R = 1 = h$ IN $P_0(1,0,0)$ COME ORIGINE, L'ASCISSA CURVILINEA NEL PUNTO GENERICO $P(t)$ DI L È:

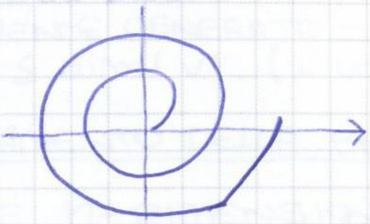
$$s(t) = \int_0^t |P'(u)|du = t\sqrt{2}, \text{ ALLORA } t = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

LA PARAMETRIZZAZIONE INTRINSECA È $P(t) = \begin{cases} x = \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \\ y = \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{2}} \\ z = \frac{s}{\sqrt{2}} \end{cases}$

SI HA CHE $|P'(s)| = 1$

SPIRALE ARCHIMEDEA

$r\theta = a + b\theta \qquad \theta \to \left((a+b\theta)\cos\theta, (a+b\theta)\operatorname{sen}\theta\right)$



SPIRALE LOGARITMICA

$\theta \to (a \cdot e^{b\theta}\cos\theta, a \cdot e^{b\theta}\operatorname{sen}\theta)$

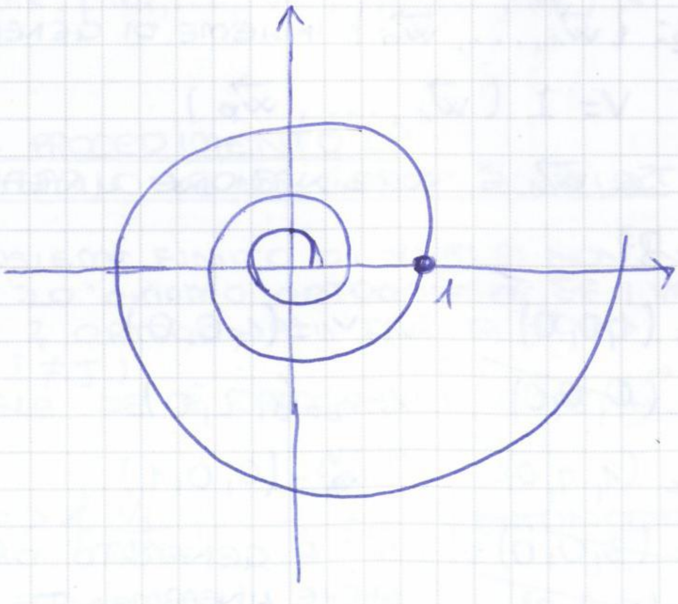
$R = a \cdot e^{b\theta}$

$\log R = \log a + b\theta$

$\log R - \log a = b\theta$

$\frac{\log R}{\log a} = b\theta$

$\theta = \frac{1}{b}\log\left(\frac{R}{a}\right)$



TEOREMA: DUE BASI DI UNO SPAZIO VETTORIALE V f.g. HANNO SEMPRE LO STESSO NUMERO DI ELEMENTI.
IL NUMERO DEGLI ELEMENTI È LA DIMENSIONE DI V.

PROPRIETÀ: SE $B = (\vec{v_1} \dots \vec{v_n})$ È UNA BASE E SE $J = \{\vec{w_1}, \dots \vec{w_p}\}$ È UN INSIEME LIBERO $\Rightarrow p \leq n$

LEMMA: SIANO $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}$ DEI VETTORI DI V. PRENDO $w = \lambda_1 \vec{v_1} + \dots + \lambda_J \vec{v_J} + \dots + \lambda_p \vec{v_p}$. SUPPONIAMO CHE $\lambda_J \neq 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} L(\vec{v_1} \dots \vec{v_J} \dots \vec{v_p}) \\ L(\vec{v_1} \dots \vec{w} \dots \vec{v_p}) \end{array}\right\} \text{UGUALI}$$

$V = K^n$, LA SUA DIMENSIONE È n

$\dim(\mathbb{R}_m[X]) = m + 1$

PROPRIETÀ: SIA $W \subseteq V$ SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V. SE V È FINITAMENTE GENERATO $\Rightarrow$ ANCHE W LO È E $\dim(W) \leq \dim(V)$. (L'UGUAGLIANZA VALE SOLO SE $W = V$)

TEOREMA DEL COMPLETAMENTO DELLA BASE

V SPAZIO VETTORIALE n-DIMENSIONALE

$\vec{w_1}, \dots, \vec{w_p}$ CON $p < n$ LINEARMENTE INDIPENDENTI $\Rightarrow$

$\exists$ VETTORI $\vec{v}_{p+1}, \dots, \vec{v_n}$ TALI CHE $(\vec{w_1}, \dots, \vec{w_p}, \vec{v}_{p+1}, \dots, \vec{v_n})$ È UNA BASE DI V.

BASI ORTONORMALI DI $\mathbb{R}^n$ E IL PROCEDIMENTO DI ORTOGONALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT

DEF. $J = \{v_1, \dots, v_p\}$ UN INSIEME FINITO DI VETTORI NON NULLI DI $\mathbb{R}^n$. L'INSIEME J LO CHIAMO ORTOGONALE SE I VETTORI SONO A 2 A 2 ORTOGONALI TRA DI LORO (SE $\vec{v_i} \cdot \vec{v_J} = 0$ CON $i \neq J$)
LO CHIAMO ORTONORMALE SE È ORTOGONALE E SE $\|\vec{v_i}\| = 1$ $\forall i = 1, \dots, p$.

$\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}\}$ ORTOGONALE $\Rightarrow \left\{ \dfrac{\vec{v_1}}{\|\vec{v_1}\|}, \dots, \dfrac{\vec{v_p}}{\|v_p\|} \right\}$ ORTONORMALE

ES. $\mathbb{R}[x]$

$\mathbb{R}_{PARI}[x] = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 \dots$

$\mathbb{R}_{DISPARI}[x] = a_1 x + a_3 x^3 + \dots$

$\mathbb{R}_{PARI}[x] \cap \mathbb{R}_{DISPARI}[x] = \{0\}$

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots = (a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 \dots) + (a_1 x + a_3 x^3 + \dots)$

$\mathbb{R}[x] = \mathbb{R}_{PARI}[x] \oplus \mathbb{R}_{DISPARI}[x]$

MATRICI TRIANGOLARI SUPERIORI

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_2^1 & a_3^1 \\ 0 & a_{22} & a_3^2 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{K}_+(3,3)$ = INSIEME DELLE MATRICI 3×3 TRIANGOLARI SUPERIORI

$\rightarrow$ SOTTOSPAZIO VETTORIALE (dim 6)

$(M_1, M_4, M_5, M_7, M_8, M_9)$ È UNA BASE DI $\mathbb{K}_+$

MATRICI TRIANGOLARI INFERIORI

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_1^2 & a_{22} & 0 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}$$

$K_-(3,3)$ = INSIEME DELLE MATRICI 3×3 TRIANGOLARI INFERIORI

$\rightarrow$ SOTTOSPAZIO VETTORIALE (dim 6)

$(M_1, M_2, M_3, M_5, M_6, M_9)$ È UNA BASE DI K_-

MATRICI DIAGONALI

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^3 \end{pmatrix}$$

$\Delta(3,3)$ = INSIEME DELLE MATRICI 3×3 DIAGONALI

$\rightarrow$ SOTTOSPAZIO VETTORIALE (dim 3)

(M_1, M_5, M_9) È UNA BASE DI Δ

$K_+(3,3) \cap K_-(3,3) = \Delta(3,3) \neq \{0\}$

$\dim K(3,3) = 9 = \dim K_+(3,3) + \dim K_-(3,3) = \dim(K_+(3,3) - K_-(3,3)) - \dim(\Delta(3,3))$

UGUAGLIANZA O RELAZIONE DI GRASSMAN

$$\mathbb{R}^{3\times3} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$A = a_{11}\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} + \dots + a_{33}\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$$

$\dim(\mathbb{R}^{3\times3}) = 9$

MATRICI SIMMETRICHE

$V = \{A \in \mathbb{R}^{3\times3} : {}^tA = A\}$

$${}^t\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$a_{11}\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix} +$$

$$a_{23}\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{pmatrix} + a_{33}\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$$

$\dim = 6$

MATRICI ANTISIMMETRICHE

$W = \{B \in \mathbb{R}^{3\times3} : {}^tB = -B\}$

$${}^t\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{12} & -b_{13} \\ -b_{21} & -b_{22} & -b_{23} \\ -b_{31} & -b_{32} & -b_{33} \end{pmatrix}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{pmatrix} : b_{12}, b_{13}, b_{23} \in \mathbb{R} \right\}$$

$\dim = 3$

$P = P(t)$ SI DICE **BIREGOLARE** SE È REGOLARE E INOLTRE
$P'(t) \times P''(t) \neq 0 \quad \forall t$.

ES.

$$r: \begin{cases} x = 0 + t \\ y = -1 + 2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - \frac{5}{2}t \end{cases} \qquad P'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \qquad P''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$P'(t) \times P''(t) = (0, 0, 0) \Rightarrow$ LA RETTA NON È BIREGOLARE

ES. (ELICA CIRCOLARE)

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\,\mathrm{sen}\,t \\ ht \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} R > 0 \\ h \neq 0 \end{matrix} \qquad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} -R\,\mathrm{sen}\,t \\ R\cos t \\ h \end{pmatrix}$$

$$\gamma''(t) = \begin{pmatrix} -R\cos t \\ -R\,\mathrm{sen}\,t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma'(t) \times \gamma''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -R\,\mathrm{sen}\,t & R\cos t & h \\ -R\cos t & -R\,\mathrm{sen}\,t & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} hR\,\mathrm{sen}\,t \\ -hR\cos t \\ R^2 \end{pmatrix} \neq 0$$

L'ELICA CIRCOLARE È BIREGOLARE

ES.

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 + t^2 \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$$ È BIREGOLARE?

È REGOLARE? SI

$$P'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 2e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P''(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P'(t) \times P''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2t & 2e^{2t} & 0 \\ 2 & 4e^{2t} & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8te^{2t} - 4e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ PER } t = \frac{1}{2}$$

LA CURVA NON È BIREGOLARE

$$\begin{vmatrix} x-x(t) & y-y(t) & z-z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{EQ. PIANO OSCULATORE}$$

ES. TROVARE IL PIANO OSCULATORE DELLA CURVA $L: (x,y,z) = (t^2, t+1, 2t-t^2)$ IN $t=0$.

$t=0 \qquad P(0) = (0,1,0)$

$P'(t) = (2t, 1, 2-2t) \qquad P'(0) = (0,1,2)$

$P''(t) = (2, 0, -2) \qquad P''(0) = (2,0,-2)$

PIANO OSCULATORE : $\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$-2x - (y+1)(-4) - 2z = 0$

$x - 2y + z + 2 = 0$

L È PIANA? SOSTITUISCO $(t^2, t+1, 2t-t^2)$ NELL'EQ. DEL PIANO OSC.

$t^2 - 2(t+1) + 2t - t^2 + 2 = 0$

$-2t - 2 + 2t + 2 = 0 \longrightarrow$ LA CURVA È PIANA

ES. (CUBICA GOBBA)

$P(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \end{pmatrix} \qquad t=0 \qquad P(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad 2x = 0; \quad x = 0$

$t^3 = 0 \rightarrow t = 0 \rightarrow$ LA CURVA NON È PIANA

$$C(t) = \frac{\sqrt{(R\,\text{sen}\,t)^2 + (-R\cos t)^2 + (R^2)^2}}{\sqrt{(-R\,\text{sen}\,t)^2 + (R\cos t)^2 + 1}} = \frac{\sqrt{R^2(\overbrace{\text{sen}^2 t + \cos^2 t}^{1}) + R^4}}{\sqrt{R^2(\text{sen}^2 t + \cos^2 t) + 1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{R^2(R^2+1)}}{\sqrt{R^2+1}} = \frac{R\sqrt{R^2+1}}{\sqrt{R^2+1}} = R$$

APPLICAZIONI LINEARI

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ LINEARE SE IL SUO GRAFICO È UNA RETTA CHE PASSA PER L'ORIGINE. $f(t) = at$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ LINEARE SE IL SUO GRAFICO È UN PIANO CHE PASSA PER L'ORIGINE. $f(x,y) = ax + by$ CON $a, b \in \mathbb{R}$.

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ LINEARE SE $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$(x_1, \dots, x_n) \quad (y_1, \dots, y_m) \qquad f(x_1 \dots x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$

$f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ SONO LE COMPONENTI DI f

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots x_m) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_m) \end{cases}$$

ES.

$f: (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to (2x+3y, \; x-y) \in \mathbb{R}^2$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ È LINEARE SE TUTTE LE SUE COMPONENTI $f_1, \dots, f_m$ SONO FUNZIONI LINEARI DA $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

DEF. $F: V \to W$ SPAZI VETTORIALI SU K È UN'APPLICAZIONE LINEARE SE:

1. $F(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = F(\vec{u}_1) + F(\vec{u}_2) \qquad \forall \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in V$
2. $F(\lambda\vec{u}) = \lambda F(\vec{u}) \qquad \forall \lambda \in K, \forall \vec{u} \in V$

$$\Updownarrow$$

$$F(\lambda\vec{u}_1 + \mu\vec{u}_2) = \lambda F(\vec{u}_1) + \mu F(\vec{u}_2)$$

$$\forall \lambda, \mu \in K, \; \forall \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in V$$

$\pi_1(\vec{v}) = (\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot u$

$\vec{v} = \underbrace{(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{u}}_{\vec{v'}} + \underbrace{[\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{u}]}_{\vec{v''}} \in L(\vec{u})^\perp$

$\pi_2(\vec{v}) = \vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{u}$

PROPRIETÀ: $f: V \rightarrow W$

1. $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$
2. $f(\lambda_1\vec{v}_1 + \dots + \lambda_K\vec{v}_K) = \lambda_1 f(\vec{v}_1) + \dots + \lambda_K f(\vec{v}_K) =$
$= f\left(\sum_{n=1}^{K} \lambda_K \vec{v}_K\right) = \sum_{m=1}^{K} \lambda_K f(\vec{v}_K)$

MATRICI

$K(m,n)$ = INSIEME DELLE MATRICI CON m RIGHE ED n COLONNE DI ELEMENTI DI K.

$m \times n$ A COEFFICIENTI IN K

$$\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \dots & A_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1^m & A_2^m & \dots & A_n^m \end{pmatrix}$$

$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x_1, x_2, x_3) \qquad (y_1, y_2)$

$F(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} A_1^1 \\ A_1^2 \end{pmatrix} \qquad F(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} A_1^2 \\ A_2^2 \end{pmatrix} \qquad F(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} A_3^1 \\ A_3^2 \end{pmatrix}$

$A_F = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \end{pmatrix} \qquad F(x^1, x^2, x^3) = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1x^1 + A_1^2x^2 + A_1^3x^3 \\ A_1^2x^1 + A_2^2x^2 + A_3^2x^3 \end{pmatrix}$

ES.

$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\vec{v} \longrightarrow (\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{u}$

$\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$F(i) = \frac{1}{2}(1, 0, -1)$

$F(j) = (0, 0, 0)$

$F(k) = \frac{1}{2}(-1, 0, 1)$

$\xrightarrow{A_F =} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} - \frac{z}{2} \\ 0 \\ -\frac{x}{2} + \frac{z}{2} \end{pmatrix}$

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. QUANDO $\vec{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(f)$?

$\vec{b} \in \mathrm{Im} f \iff \exists\, \vec{x} : f(\vec{x}) = \vec{b}$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix} \iff \begin{cases} A^1_1 x^1 + A^1_2 x^2 + \dots + A^1_n x^n = b^1 \\ A^2_1 x^1 + A^2_2 x^2 + \dots + A^2_n x^n = b^2 \\ \dots \\ A^m_1 x^1 + A^m_2 x^2 + \dots + A^m_n x^n = b^n \end{cases}$$ È COMPATIBILE

$* \ \vec{b} \in \mathrm{Im} f \iff \exists\, \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{b} = \vec{u} \times \vec{x} \iff \vec{b} \perp \vec{u} \iff \vec{b} \in \mathcal{L}(\vec{u})^\perp$

$\mathrm{Im} f = \mathcal{L}(\vec{u})^\perp$

$$\begin{cases} -u_3 y + u_2 z = b^1 \\ u_3 x - u_1 z = b^2 \\ -u_2 x + u_1 y = b^3 \end{cases}$$

$\vec{b} \in \mathrm{Im} f \iff$ IL SISTEMA HA SOLUZIONI

IL SISTEMA HA SOLUZIONI $\iff b^1 u^1 + b^2 u^2 + b^3 u^3 = 0$

<u>Oss</u>: $f: A \longrightarrow B$, 1. f È INIETTIVA SE $f(a') = f(a'') \Rightarrow a' = a''$

2. f È SURIETTIVA SE $B = \mathrm{Im} f$

3. f BIETTIVA (INIETTIVA E SURIETTIVA) $\Rightarrow \exists\, f^{-1} : B \longrightarrow A$

- f È INIETTIVA $(f: V \to W) \iff \mathrm{Ker} f = \{\vec{0}\}$
- $f: V \to W$ APPLICAZIONE LINEARE BIETTIVA (O ISOMORFISMO), ALLORA $f^{-1}: W \to V$ È ANCORA LINEARE
- $f: V \to V$ È UN ENDOMORFISMO

$f, g : V \longrightarrow W$

$f + g : \vec{v} \in V \longrightarrow f(\vec{v}) + g(\vec{v}) \in W$

$\lambda f : \vec{v} \in V \longrightarrow \lambda(f(\vec{v})) \in W$

$\mathcal{L}(V, W)$ = INSIEME FORMATO DA TUTTE LE APPLICAZIONI LINEARI $f: V \longrightarrow W$

<u>Es.</u>

$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ QUALI DELLE SEGUENTI CONDIZIONI DA "STRUTTURA" DI "SOTTOSPAZIO" VETTORIALE DI V?

i) $a = \sqrt{2}$ ii) $a + d = 0$ iii) $ad - bc = 0$

ES. $f: V \longrightarrow V$ K-LINEARE TALE CHE $f^2 = f$. PROVARE CHE $V = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

$\boxed{f^2 = f \circ f}$

$f^2(v) = f(v) \quad \forall v \in V$

$(f \circ f)(v) - f(v) = 0_V$

$f(f(v)) - f(v) = 0_V$

$f(f(v) - v) = 0_V$

$f(v) - v \in \ker f$

$f(v) - v = w \;,\; w \in \ker f$

$v = f(v) - w \;,\; -w \in \ker f \;,\; f(v) \in \operatorname{Im} f \longrightarrow V = \ker f + \operatorname{Im} f$

$v \longrightarrow f(v)$ LA DECOMPOSIZIONE È UNICA $\Rightarrow V = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$

ES. SIA $B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$.

i) PROVARE CHE B È UN INSIEME LINEARMENTE INDIPENDENTE

ii) PROVARE CHE $\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}\big(\overset{v_1}{(1,1,1)}, \overset{v_2}{(1,1,0)}, \overset{v_3}{(1,0,0)}\big)$

i) $\alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0) = (0,0,0)$ PER DIMOSTRARE CHE $\alpha = \beta = \gamma = 0$

INFATTI, $(\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta, \alpha) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = -\beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \longrightarrow B \text{ È UN INSIEME LINEARMENTE INDIPENDENTE}$$

PER LA TEORIA, SICCOME $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, B COSTITUISCE UNA BASE PER $\mathbb{R}^3$ E ALLORA $\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$.

iii) ESPRIMERE IL VETTORE $(-1, 2, -1)$ COME COMBINAZIONE LINEARE DI v_1, v_2, v_3.

$\alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0) = (-1, 2, -1)$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -1 \\ \alpha + \beta = 2 \\ \alpha = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma = -3 \\ \beta = 3 \\ \alpha = -1 \end{cases} \qquad (-1,2,-1) = \big[\underbrace{-1, 3, -3}_{\text{COORDINATE RISPETTO A } B}\big]_B$$

$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \operatorname{Im} f = \mathcal{L}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{BASE Im}f}\Big)$ $\quad \dim \operatorname{Im} f = 1$

$\Downarrow$

f NON È SURIETTIVA $(\neq 4)$

$\operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$

2) TROVARE UNA MATRICE PRIVA DI CONTROIMMAGINE

$f^{-1}\left(\begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ -\pi & 5 \end{pmatrix}\right) = 0$

Es. $\mathbb{R}^4$

$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : 2x_1 - x_2 + x_3 = x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$

$V = \mathcal{L}\big((0,0,1,1), (1,1,0,0)\big)$

i) DIMOSTRARE CHE $U \cap V = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$

ii) TROVARE UNA BASE DI U

i) $v \in V \cap U$ (b, b, a, a) $\begin{cases} 2b - b + a = 0 \\ b + b - a = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} b + a = 0 \\ 2b - a = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$

ii) $\dim V = 2$

$\dim U \cap V = 0$

$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = x_2 - 2x_1 \\ x_1 = x_4 - x_2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = x_2 - 2(x_4 - x_2) = 3x_2 - 2x_4 \\ x_1 = x_4 - x_2 \end{cases}$

$U = \{(x_4 - x_2, x_2, 3x_2 - 2x_4, x_4) : x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$

$= \{x_4(1,0,-2,1) + x_2(-1,1,3,0) : x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$

$= \mathcal{L}\big(\underbrace{(1,0,-2,1), (-1,1,3,0)}_{\text{BASE DI } U}\big)$

$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim U \cap V = 2 + 2 - 0 = 4$

APPLICAZIONI LINEARI TRA SPAZI VETTORIALI FINITAMENTE GENERATI

PROPRIETÀ: $f: V \to W$ UN ISOMORFISMO. SE V È FINITAMENTE GENERATO, $\dim(V) = n \Rightarrow W$ È FINITAMENTE GENERATO E $\dim(W) = n$

OSS: SIA V F.G. SIA $B = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ BASE DI V.
SCELGO $B' = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$ UNA n-PLA ORDINATA DI VETTORI DI W.
ESISTE UN'UNICA APPLICAZIONE LINEARE $f_{(B',B)}: V \to W$ TALE CHE $f_{(B',B)}(\vec{v}_1) = \vec{w}_1, \dots, f_{(B',B)}(\vec{v}_n) = \vec{w}_n$

$f_{(B',B)} = ?$

1. SCRIVO $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$
2. $f_{(B',B)} = \lambda_1 \vec{w}_1 + \dots + \lambda_n \vec{w}_n$

QUINDI:

$\mathbb{R}^3$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{R}^3$

$B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, con $\vec{i} \to \vec{v}_1$, $\vec{j} \to \vec{v}_2$, $\vec{k} \to \vec{v}_3$

$\vec{w}_1 = 2\vec{i} - \vec{k}$

$\vec{w}_2 = 3\vec{i}$

$\vec{w}_3 = 3\vec{k}$

NOTA: $\mathcal{L}(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3) = \mathcal{L}(\vec{i}, \vec{k})$

$f_{(B',B)}(x, y, z)$: $\quad x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \to x(2\vec{i} - \vec{k}) + y \cdot 3\vec{i} + z3\vec{k} =$
$(2x + 3y, 0, -x + 3z)$

COROLLARIO: $\mathrm{Im} f =$ COMBINAZIONI LINEARI $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n) = \mathcal{L}(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$

$\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ LINEARMENTE INDIPENDENTI $\leftarrow$ Hp

$\vec{v} \in V \qquad \vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots \lambda_n \vec{v}_n$

$f(\vec{v}) = \lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2 + \dots + \lambda_n \vec{w}_n$

$f(\vec{v}) = \vec{0}_W \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}_V$

$\ker f = \{0_V\} \to f$ INIETTIVA

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1^a \text{ RIGA} \\ \leftarrow 2^a \text{ RIGA} \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad A^1, A^2, \dots, A^m \in K_n$$

$$\Rightarrow \langle A^l, B_J \rangle$$

$$B = (B_1, \dots, B_p) \qquad B_1, B_2, \dots, B_p \in K^n$$

B_1: 1^a COLONNA

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO TRA MATRICI

1. DISTRIBUTIVITÀ (A DX)

$A_1, A_2 \in K(n,m)$

$B \in K(m,p)$

$$(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 B + A_2 B$$

2. DISTRIBUTIVITÀ (A SX)

$A \in K(n,m)$

$B_1, B_2 \in K(m,p)$

$$A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$$

3. OMOGENEITÀ

$A \in K(n,m)$

$B \in K(m,p)$

$$(\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B) = \lambda (A \cdot B) \quad \text{CON } \lambda \in K$$

4. ASSOCIATIVITÀ

$A \in K(n,m)$

$B \in K(m,p)$

$C \in K(p,q)$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

5. $A \cdot B$ E $B \cdot A$ ESISTONO ENTRAMBI SOLO SE A E B SONO MATRICI QUADRATE. IN GENERALE, $AB \neq BA$.

COMMUTATORE DI 2 MATRICI QUADRATE

$A, B \in K(n,n)$

$[A, B] = AB - BA$

$[A, B] = 0 \iff AB = BA$

$L_A : K^n \longrightarrow K^m$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1_1 x^1 + A^1_2 x^2 + \dots + A^1_n x^n \\ \dots \\ A^m_1 x^1 + A^m_2 x^2 + \dots + A^m_n x^n \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(L_A) \iff x \text{ È UNA SOLUZIONE DI } *$$

$\dim(N(A)) = \nu(A)$ NULLITÀ DI A

L'INSIEME DELLE SOLUZIONI DI $*$ COINCIDE CON $N(A) = \ker(L_A)$ ED È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE $= \nu(A)$.
CONSIDERO $\ell_1, \dots, \ell_\nu$ VETTORI DI K^n CHE VERIFICANO $*$.
CHIAMO $\ell_1, \dots, \ell_\nu$ SISTEMA FONDAMENTALE DI SOLUZIONI DI $*$.
OGNI ALTRA SOLUZIONE DI $*$ SARÀ DEL TIPO $t_1 \ell_1 + \dots + t_\nu \ell_\nu$ CON $t_1, \dots, t_\nu \in K$ PARAMETRI LIBERI.
LE SOLUZIONI DI $*$ DIPENDONO DA ν-PARAMETRI LIBERI, DOVE ν = NULLITÀ DI A (TEOREMA DI ROUCHÈ CAPELLI)

Es.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_A : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3x + 2y + z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z = -3x - 2y \\ x - y + 2(-3x - 2y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = -3x - 2y \\ -5x - 5y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = -x \\ y = -x \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ -x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \ell_1$$

OPPURE

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{5} R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases} \to z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \tilde{\ell}_1$$

$R(A) = \mathcal{L}(A^1, \dots, A^m) \subseteq K_n$ = SPAZIO DELLE RIGHE DI A

PROPOSIZIONE: $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{R}(A)$

SISTEMI LINEARI NON OMOGENEI DI m - EQUAZIONI IN n-INCOGNITE

$$(*) \begin{cases} A^1_1 x^1 + A^1_2 x^2 + \dots + A^1_n x^n = b_1 \\ A^2_1 x^1 + A^2_2 x^2 + \dots + A^2_n x^n = b^2 \\ \dots \\ A^m_1 x^1 + A^m_2 x^2 + \dots + A^m_n x^n = b^m \end{cases}$$

- COMPATIBILE SE CI SONO SOLUZIONI
- INCOMPATIBILE SE NON CI SONO SOLUZIONI

Es.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 4x + y + z = 3 \end{cases}$$

$L_A(x) = b$ $\qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}$

$L_A : K^n \longrightarrow K^m$

IL SISTEMA È COMPATIBILE $\iff b \in \operatorname{Im}(L_A)$

$b \in$ SPAZIO DELLE COLONNE DI $A \Leftarrow \mathcal{C}(A)$

MATRICE COMPLETA

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} A^1_1 & \dots & A^1_n & b^1 \\ A^2_1 & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \\ A^m_1 & \dots & A^m_n & b^m \end{array}\right) \in K(m, n+1)$$

$\mathcal{C}(A) = \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n)$

$\mathcal{C}(A|b) = \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n, b)$

$b \in \mathcal{C}(A) \iff \mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(A|b) \iff \rho(A) = \rho(A|b)$

1. TROVARE UNA SOLUZIONE PARTICOLARE $x_0 \in K^n$ DI $*$
2. TROVARE LA SOLUZIONE GENERALE DI $AX = 0$, CIOÈ TROVARE UN SISTEMA $\ell_1, \dots, \ell_d$ FONDAMENTALE DI SUE SOLUZIONI ($\ker(L_A)$).

$x_0 + t_1 \ell_1 + \dots + t_d \ell_d \qquad t_1, \dots, t_d \in K$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 176

INVERSA DI UNA MATRICE

$A \in K(n,n)$ $\qquad \exists X \in K(n,n) : AX = 1_{n\times n}$?

ESISTE SE $\text{RANGO}(A) = \underset{\overset{\shortparallel}{n}}{\text{RANGO}(A, 1_{n\times n})} \iff \text{RANGO}(A) = n$

UNA MATRICE QUADRATA È INVERTIBILE $\iff \text{RANGO}(A) = n$

$\text{RANGO}(A) = n \iff$ NULLITÀ DI $A = 0$

LA SOLUZIONE È UNICA.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A, 1_{3\times 3}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to 2R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to -\frac{1}{3}R_3]{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7/2 & \frac{3}{2} & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - \frac{7}{2}R_3]{R_1 \to R_1 - 3R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -\frac{10}{6} & 14/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -5/3 & 7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -5/3 & 7/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

$A^1 \cdot A^2 = a_1^1 a_1^2 + a_2^1 a_2^2 = 0$

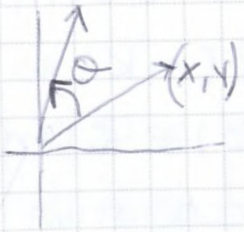
$A^2 \perp A^1 = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \Rightarrow A^2 = \lambda(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

$(a_1^2)^2 + (a_2^2)^2 = 1 = \|A^2\|^2 = \lambda^2 \left\langle \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{array} \right.$

SE $\lambda = 1$:

$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\, x - \operatorname{sen}\theta\, y \\ \operatorname{sen}\theta\, x + \cos\theta\, y \end{pmatrix}$ = ROTAZIONE



SE $\lambda = -1$:

$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\, x - \operatorname{sen}\theta\, y \\ -\operatorname{sen}\theta\, x - \cos\theta\, y \end{pmatrix}$ = ROTAZIONE + RIFLESSIONE RISP. ASSE X

SIA $(A_1, \dots, A_n)$ UNA BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^n$.

CONSIDERO LA MATRICE $A = (A_1, \dots, A_n)$ CHE HA COME COLONNE I VETTORI DELLA BASE.

${}^TA \cdot A = 1_{n\times n}$ (CIOE $A \in O(n, \mathbb{R})$)

$$\begin{pmatrix} {}^TA_1 \\ {}^TA_2 \\ \vdots \\ {}^TA_n \end{pmatrix} \cdot (A_1, A_2, \dots, A_n) = \begin{pmatrix} {}^TA_1 \cdot A_1 & {}^TA_1 A_2 & \dots & {}^TA_1 \cdot A_n \\ {}^TA_2 \cdot A_1 & {}^TA_2 \cdot A_2 & \dots & {}^TA_2 \cdot A_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^TA_n \cdot A_1 & {}^TA_n \cdot A_n & \dots & {}^TA_n \cdot A_n \end{pmatrix}$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ $\quad {}^Tx \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ = PRODOTTO SCALARE DI X CON Y

SE $(A_1, \dots, A_n)$ È ORTONORMALE $\Rightarrow {}^TA \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = 1_{n\times n}$

$\Rightarrow A \in O(n, \mathbb{R})$

$\vec{x} = \mathcal{B} \cdot w_{\mathcal{B}}(\vec{x})$ $\qquad \vec{x} = \mathcal{B}' \cdot w_{\mathcal{B}'}(\vec{x})$

$\mathcal{B} \cdot (M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}, w_{\mathcal{B}'}(\vec{x}))$

$w_{\mathcal{B}}(\vec{x}) = M_{B,B'} \cdot w_{B'}(\vec{x})$

- $M_{B,B'} \in GL(n,k)$
- $\mathbb{R}^n$, B e B' BASI ORTONORMALI $\Rightarrow M_{B,B'} \in O(n,\mathbb{R})$

ES. SIA $f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ L'APPLICAZIONE LINEARE ASSOCIATA ALLA MATRICE

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

i) DETERMINARE UNA BASE PER $\mathrm{Ker}\, f$ E UNA PER $\mathrm{Im}\, f$.

ii) STABILIRE PER QUALI VALORI DI $h \in \mathbb{R}$ IL VETTORE $(-2, h, h^2) \in \mathrm{Im}\, f$.

$f(x,y,z,t,w) = (x-z+2t+3w,\ 2x+y+t+2w,\ -3x+y+z-3t-5w)$

$f(e_1) = (1, 2, -3)$

$f(e_2) = (0, -1, 1)$

$f(e_3) = (-1, 0, 1)$

$f(e_4) = (2, 1, -3)$

$f(e_5) = (3, 2, -5)$

$\mathrm{Ker}\, f = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^5 \,/\, f(\vec{v}) \in (0,0,0) \}$

RIDUCO

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \rho = \underset{\mathrm{Im} f}{2} \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\, f = 5 - 2 = 3$$

$$\begin{cases} x - z + 2t + 3w = 0 \\ -y + 2x - 3t - 4w = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = z - 2t - 3w \\ y = 2z - 3t - 4w \end{cases}$$

$\mathrm{Ker}\, f = \{ (z-2t-3w,\ 2z-3t-4w,\ z, t, w) \,/\, z,t,w \in \mathbb{R} \}$

$= \{ z(1,2,1,0,0) + t(-2,-3,0,1,0) + w(-3,-4,0,0,1) \,/\, z,t,w \in \mathbb{R} \}$

$= \mathcal{L}((1,2,1,0,0), (-2,-3,0,1,0), (-3,-4,0,0,1))$

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$$

$$\begin{tikzcd}
(x,y,z) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(x,y,z) \arrow[r] & g(f(x,y,z))
\end{tikzcd}$$

$$g \circ f = g(f(x,y,z)) = g(x+y,\ x+y-z) =$$
$$= (3x+3y-x-y+z,\ 3x+3y-3z-x-y,\ x+y) =$$
$$= (2x+2y+z,\ 2x+2y-3z,\ x+y)$$

$$M(g \circ f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M(g) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M(g) \cdot M(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es. TROVARE $\rho(A)$ AL VARIARE DI $a \in \mathbb{R}$ SAPENDO CHE $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2a & 0 & a \end{pmatrix} \qquad \text{SE } a=0 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \rho(A) = 2$$

$$\text{SE } a \neq 0: \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \to \rho(A) = 3$$

OSS: $A \in K^{m,n}$, $\rho(A) \leq \min(m,n)$

Es1 SI FISSI UN ANGOLO θ. SIA $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ L'APPLICAZIONE:

$f_\theta(x,y) = (X, Y)$ CON $X + iY = (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)(x+iy)$

i) CALCOLARE $f_\theta(1,0)$ E $f_\theta(0,1)$

ii) SCRIVERE $M(f_\theta)$ RISPETTO ALLA BASE CANONICA

iii) DESCRIVERE L'EFFETTO DI f_θ SUI VETTORI DEL PIANO

Es2. RISOLVERE IL SEGUENTE SISTEMA $\underset{3\times3}{A}\,\underset{3\times2}{X} = \underset{3\times2}{B}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{f(x,y,z)}_{\text{GENERALE} \to \text{IN RIGA}} = (2x \ ; y-z)$$

$$\underbrace{f(\vec{e_i})}_{\text{BASE} \to \text{IN COLONNA}} = \dots \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

LEZIONE

<u>Es.</u> IN $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{B} = (\vec{v_1}(1,1,0), \vec{v_2}(0,1,1), \vec{v_3}(1,0,1))$ $\qquad M_{BB'} = ?$

$\mathcal{B}' = (\vec{v_1}'(-1,0,1), \vec{v_2}'(1,1,-1), \vec{v_3}(1,1,0))$ $\qquad M_{B'B} = ?$

$B_0 = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$B = B_0 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{M_{B_0 B}} \qquad B' = B_0 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_{B_0 B'}}$$

$$B_0 = B \cdot M_{B_0 B}^{-1} \qquad M_{B_0 B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\frac{1}{2} \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\frac{1}{2} & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$B' = B_0 \cdot M_{B_0 B'} = B \cdot M_{B_0 B}^{-1} \cdot M_{B_0 B'}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1/2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$B' = B_0 \cdot \longrightarrow$
$\vec{v_1}' = -\vec{v_1} + \vec{v_2}$
$\vec{v_2}' = \frac{3}{2}\vec{v_1} - \frac{1}{2}\vec{v_2} - \frac{1}{2}\vec{v_3}$
$\vec{v_3}' = \vec{v_1}$

SE $\vec{x} = x'^1 \vec{v_1}' + x'^2 \vec{v_2}' + x'^3 \vec{v_3}'$

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3/2 & 1 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}$$

B e B' DUE BASI ORTONORMALI DI $\mathbb{R}^n$.

$$B' = B \cdot \underbrace{M_{BB'}}_{\text{ORTOGONALE}}$$

<u>Es.</u> $V^n \xrightarrow{F} V^n$ ENDOMORFISMO

$\mathbb{B}$ $\quad \mathbb{B}$

$\mathbb{B}'$ $\quad \mathbb{B}'$

$M(F)_{\mathbb{B}}$ = MATRICE DI F RISPETTO A B

$M(F)_{\mathbb{B}'}$ = MATRICE DI F RISPETTO A B'

$M(F)_{B'} = M_{B'B} \cdot M(F)_B \cdot \underbrace{M_{B'B}^{-1}}_{= M_{BB'}}$

<u>Es.</u>

$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\vec{m}(1,1,0) = \vec{i}+\vec{j}$ $\qquad F(\vec{x}) = \vec{m} \times \vec{x}$

1. PRENDO $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

2. CALCOLO $M(F)_B$.

$F(\vec{i}) = (\vec{i}+\vec{j}) \times (\vec{i}) = -\vec{k} = (0,0,-1)$

$F(\vec{j}) = (\vec{i}+\vec{j}) \times \vec{j} = \vec{k} = (0,0,1)$

$F(\vec{k}) = (\vec{i}+\vec{j}) \times \vec{k} = -\vec{j}+\vec{i} = (+1,-1,0)$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M(F$$

3. PRENDO $B' = (\vec{v_1}(\cancel{0},1,0), \vec{v_2}(0,1,1), \vec{v_3}(0,-1,1))$

4. CALCOLO $M(F)_{B'}$

$$M_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M(F)_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>ENDOMORFISMI DI V^n</u>

1) $F: V^n \longrightarrow V^n$

2) SI FISSA $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$

3) SI COSTRUISCE $M_B(F)$ ASSOCIATA A F NELLA BASE B

<u>DEF.</u> $A, A' \in K(n,n)$ SI DICONO <u>SIMILI</u> SE $A = X A' X^{-1}$ DOVE $X \in K(n,n)$ INVERTIBILE (<u>RANGO</u> n)

<u>CLASSI DI ENDOMORFISMI</u>

1) $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ <u>ISOMETRICO</u> SE $\|\vec{v}\|^2 = \|F(\vec{v})\|^2 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

2) ENDOMORFISMI <u>AUTOAGGIUNTI</u> SE $F(\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot F(\vec{w}) \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$

- CALCOLO BASE $Ker(F)$

• A $\qquad B = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$

*$AX = 0$ SISTEMA HA $n - p = \nu = \dim(\ker F)$ PARAMETRI LIBERI $t^1, \dots, t^\nu$

$$\begin{cases} x^1 = m^1_1 t^1 + m^1_2 t^2 + \dots + m^1_\nu t^\nu \\ \dots \\ x^n = m^n_1 t^1 + m^n_2 t^2 + \dots + m^n_\nu t^\nu \end{cases}$$

* HA m-EQUAZIONI IN n-INCOGNITE

LEZIONE

$$\vec{v} = x^1 \vec{v}_1 + \dots + x^n \vec{v}_n \in Ker F \iff A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\vec{v} = (m^1_1 t^1 + \dots + m^n_\nu t^\nu)\vec{v}_1 + \dots + (m^1_1 t^1 + \dots + m^n_\nu t^\nu)\vec{v}_n =$$

$$= t^1 (m^1_1 \vec{v}_1 + m^2_1 \vec{v}_2 + \dots + m^n_1 \vec{v}_n) + \dots + t^\nu (m^1_\nu \vec{v}_1 + m^2_\nu \vec{v}_2 + \dots + m^n_\nu \vec{v}_n)$$

$$\left.\begin{aligned} m^1_1 \vec{v}_1 + m^2_1 \vec{v}_2 + \dots + m^n_1 \vec{v}_n &= \vec{a}_1 \\ m^1_2 \vec{v}_1 + m^2_2 \vec{v}_2 + \dots + m^n_2 \vec{v}_n &= \vec{a}_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \\ m^1_\nu \vec{v}_1 + m^2_\nu + \dots + m^n_\nu \vec{v}_n &= \vec{a}_n \end{aligned}\right\} \text{GENERANO } Ker(F)$$

$\nu = \dim Ker(F)$ QUINDI $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\nu)$ SONO UNA BASE DI $Ker F$

$$\begin{tikzcd} \overset{B}{V^n} \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right, "G \circ F"'] & \overset{e}{W^m} \arrow[r, "G"] & \overset{D}{U^k} \end{tikzcd}$$

$M(F)_{eB} \in K(m,n) \qquad M(G)_{De} \in K(k,m)$

$M(G \circ F)_{DB} \in K(k,n)$

$M(G)_{De} \cdot M(F)_{eB} \in K(k,n) = M(G \circ F)_{DB}$

DETERMINANTI DI MATRICI QUADRATE E DI ENDOMORFISMI TRA SPAZI VETTORIALI FINITAMENTE GENERATI

$\det((a)) = a \qquad \det \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix} = a^1_1 a^2_2 - a^1_2 a^2_1$

$$\det \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix} = a^1_1 \det(A_{(1,1)}) + (-1)^{1+2} a^1_2 \det(A_{(1,2)}) + (-1)^{1+3} a^1_3 \det(A_{(1,3)})$$

$$M_{F,E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

iii) $(1,0,0) = \alpha(1,-1,0) + \beta(1,0,-1) + \gamma(0,1,1)$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ -\alpha + \gamma = 0 \\ -\beta + \gamma = 0 \end{cases} \qquad \beta + \gamma = 1 \rightarrow \gamma = 1 - \beta \qquad -2\beta = 1 \rightarrow \beta = \frac{1}{2} \quad \gamma = \frac{1}{2} \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

1ª COLONNA DI $M_{E,F}$

$(0,1,0) = \alpha(1,-1,0) + \beta(1,0,-1) + \gamma(0,1,1)$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \gamma = 1 \\ -\beta + \gamma = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{cases}$$

2ª COLONNA DI $M_{E,F}$

$(0,0,1) = \alpha(1,-1,0) + \beta(1,0,-1) + \gamma(0,1,1)$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \\ -\beta + \gamma = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = -\frac{1}{2} \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{cases}$$

3ª COLONNA DI $M_{E,F}$

$$M_{E,F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

<u>Es.</u> SIA $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ TALE CHE $(x,y,z) \longrightarrow (x+y, x+y-z)$

SIA $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ TALE CHE $(s,t) \longrightarrow (3s-t, 3t-s, s)$

i) CALCOLARE $f \circ g$

ii) CALCOLARE $M(f)$, $M(g)$, $M(g \circ f)$

iii) VERIFICARE CHE $M(f \circ g) = M(f) \cdot M(g)$

i)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

$f \circ g(s,t) = f(g(s,t)) = f(3s-t, 3t-s, s) = (2s+2t, s+2t)$

$$M(f \circ g) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$= (-6x+4y, -9x+6y) + (6x-3y, 8x-4y) = (y, -x+2y)$

c) $(3,4) = \alpha(1,2) + \beta(2,3) = (\alpha+2\beta, 2\alpha+3\beta)$

$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 3 \\ 2\alpha + 3\beta = 4 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = -1 \end{cases} \rightarrow (3,4) = -1(1,2) + 2(2,3)$

$f(3,4) = -f(1,2) + 2f(2,3) = -(2,3) + 2(3,4) =$

$= (-2,-3) + (6,8) = (4,5)$

ES. VERIFICARE CHE NON ESISTONO ENDOMORFISMI INIETTIVI PER CUI $f(2,3,1) = u$, $f(2,1,0) = v$, $f(3,0,0) = u+v$ $\forall u, v \in \mathbb{R}$.

$((2,3,1),(2,1,0),(3,0,0))$ BASE DI $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Im} f = \mathcal{L}(u, v, v+u) = \mathcal{L}(u, v) \rightarrow \dim \mathrm{Im} = 2$

$\dim \ker = 1 \Rightarrow$ NO INIETTIVO

ES. DETERMINARE UN ENDOMORFISMO DI $\mathbb{R}^3$ TALE CHE $\ker f = \mathcal{L}((1,0,-1),(1,1,0))$ E $\mathrm{Im} f = \mathcal{L}((1,0,-1))$.

PROPRIETÀ: LEZIONE

1. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
2. $\det(A) = \det({}^{T}A)$
3. $\det A = \det(BAB^{-1})$
4. $\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det B}$
5. $F: \underset{B}{V^n} \to \underset{B}{V^n}$, $\det(F) = \det(M_B(F))$

PROPRIETÀ: $A \in K(n,n)$, $b \in K^n$

$AX = b$ $\quad \det(A) \neq 0$

HA UN'UNICA SOLUZIONE

$x^i = \frac{1}{\det A} \det(A_1, \dots, A_{i-1}, \overset{b}{B} \dots A_n) =$ i-ESIMA COORDINATA DELLA SOLUZIONE

$b = x^1 A_1 + \dots + x^n A_n$

$\det(A_1, \dots A_{i-1}, x^1 A_1 + \dots + x^n A_n, A_{i+1}, \dots A_n) = x^1 \det(A_1, \dots A_{i-1}, A_i, A_{i+1} \dots A_n) +$

PROPRIETÀ: SE $\mu \in K$ È UNO SCALARE $| \exists \vec{v} \neq \vec{0}$ CON $F(\vec{v}) = \mu\vec{v} \iff \mu$ È UN AUTOVALORE DI F (IDEM PER LE MATRICI).

DATO $F: V^n \longrightarrow V^n$ E μ = AUTOVALORE DI F, POSSO CONSIDERARE $V_\mu \{ \vec{v} \in V^n / F(\vec{v}) = \mu\vec{v} \} \neq \{\vec{0}\}$

$A \in K(n,n)$, μ = AUTOVALORE DI A, $V_\mu = \{ X \in K^n / AX = \mu X\} \neq \{0\}$

CHIAMO V_μ L' AUTOSPAZIO DI F RELATIVO ALL' AUTOVETTORE μ (IDEM PER LE MATRICI). V_μ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE E $\dim V_\mu \geq 1$.

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ = SPETTRO DI F

$m_1, \dots, m_n$ = MOLTEPLICITÀ ALGEBRICHE DEGLI AUTOVALORI

$$\left.\begin{array}{l}\dim(V_{\lambda_1}) = n_1 \\ \vdots \\ \dim(V_{\lambda_n}) = n_n\end{array}\right\}$$ MOLTEPLICITÀ GEOMETRICHE DEGLI AUTOVALORI DI F

$$\left\{\begin{array}{l} n_1 \leq m_1 \\ \vdots \\ n_n \leq m_n \end{array}\right.$$

~~1. $m_1 + \dots + m_n = n$~~

~~2. $n_1 = m_1, \dots, n_n = m_n$~~

DEF. UN ENDOMORFISMO $F: V^n \longrightarrow V^n$ SI DICE SEMPLICE (O DIAGONALIZZABILE) SE ESISTE UNA BASE DI V FORMATA DA AUTOVETTORI.

$$M_B(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$ È UNA MATRICE DIAGONALE.

OSS: $\det(F) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

$A \in K(n,n) \Rightarrow L_A: K^n \longrightarrow K^n$ ASSOCIATO AD A RISPETTO A B_0 = BASE CANONICA DI K^n.
A È DIAGONALIZZABILE SE L_A È SEMPLICE.

PROPRIETÀ: UN ENDOMORFISMO $F: V^n \longrightarrow V^n$ È SEMPLICE SE E SOLO SE:

1. TUTTE LE RADICI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO APPARTENGONO A K

2. SIANO $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ LE RADICI DISTINTE DEL P.C.
$n_1 = \dim V_{\lambda_1}$
$\dots$ $\quad n_1 + \quad + n_h = n (\dim V)$

$\dim V_A(3) = 3 - \rho(A) = 1$

$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$

$V_A(3) = \{(x, x, x) / x \in \mathbb{R}\} =$
$= \{x(1,1,1) / x \in \mathbb{R}\} =$
$= \mathcal{L}((1,1,1))$

L'INTERSEZIONE TRA DUE AUTOSPAZI È FORMATA SOLO DAL VETTORE NULLO!

Es. VERIFICARE CHE f DELL' ESERCIZIO PRECEDENTE È SEMPLICE (OSSIA A È DIAGONALIZZABILE).

TEO: $\forall \lambda$ DI A, MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA$_A$ λ = MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA$_A$ λ

CIOÈ $\exists P$ INVERTIBILE / $P^{-1} A P = D$

$$P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Es. DATA LA MATRICE $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & h+1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ CON $h \in \mathbb{R}$, TROVARE

IL VALORE DI h PER CUI LA MATRICE A HA UN AUTOVALORE = 3
POSTO $h = -2$, PROVARE CHE A È DIAGONALIZZABILE.

$\rho(A - 3I) < 3 \iff$ AUTOVALORE $= 3$

i) $A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & h+1 \\ 6 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & h+1 \\ 0 & 0 & 2h+4 \end{pmatrix}$ $\quad \rho = 2 \iff h = -2$

ii) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to \rho(A) = 1 \Rightarrow$ A NON È INVERTIBILE $\iff$ 0 È AUTOVALORE DI A

$\dim V_A(0) = 3 - \rho(A) = 2 =$ MOLTEP. GEOM.

Es. TROVARE UNA MATRICE A DIAGONALIZZABILE E NON INVERTIBILE.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

FORME QUADRATICHE

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ $\qquad (x,y)$

$$\phi(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$(x,y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (a_{11}x + a_{12}y,\ a_{12}x + a_{22}y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

$$\longleftrightarrow$$

$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n \longrightarrow {}^T\vec{x} \cdot A \cdot \vec{x}$ $\qquad$ A MATRICE SIMMETRICA

$$\varphi(x^1, \dots, x^n) = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} A_{ij}\, x^i x^j$$

$$\longleftrightarrow$$

$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\varphi(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \longrightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (x,y,z)\cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \varphi(x,y,z)$$

TEOREMA DI DIAGONALIZZAZIONE

POSSO TROVARE UNA BASE ORTONORMALE $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \simeq P$ /

$$PA^TP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

SE PRENDO LE COORDINATE $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^n)$ RELATIVE ALLA BASE:

$$\vec{x} = \tilde{x}^1\vec{e}_1 + \dots + \tilde{x}^n\vec{e}_n \longmapsto \lambda_1((\tilde{x}^1)^2 + \dots + (\tilde{x}^n)^2) + \lambda_2(\dots)$$

Es.

$$\varphi(x,y) = 2x^2 + xy + y^2$$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

- BASE ORTONORMALE FORMATA DA AUTOVETTORI

Es.

$A(2,1)$
$B(1,-1)$ $\rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$; $2(x-2)-(y-1)=0$
$2x-y-3=0$

- EQUAZIONE PARAMETRICA

$P_0(x_0, y_0)$ PUNTO INIZIALE

$(l, m) = \vec{v} \rightarrow$ DIREZIONE DELLA RETTA

$(lt+x_0, mt+y_0) \iff \begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \end{cases}$

$(lt+x_0, mt+y_0) = t\vec{v} + P_0 \rightarrow$ EQ. VETTORIALE PARAMETRICA

Es.

$2x+3y+1=0$

$P_0\left(\frac{-2\cdot 1}{4+9}, -\frac{3\cdot 1}{4+9}\right) = -\left(\frac{2}{13}, \frac{3}{13}\right)$

$\vec{v}(-3,2)$ $\rightarrow \begin{cases} x = -3t - \frac{2}{13} \\ y = 2t - \frac{3}{13} \end{cases}$

Es.

$\begin{cases} x = -t+3 \\ y = 2t-1 \end{cases}$ $\quad \underset{t=0}{(3,-1)} \in r$ $\quad (-1,2) =$ COEFF. DIRETTORI

$\underbrace{(a,b) \rightarrow (-b,-a)}_{\text{RUOTARE DI } 90° \text{ ANTIORARIO}}$

$-2(x-3)-1(y+1)=0$; $-2x-y+5=0$

MUTUA POSIZIONE DI 2 RETTE

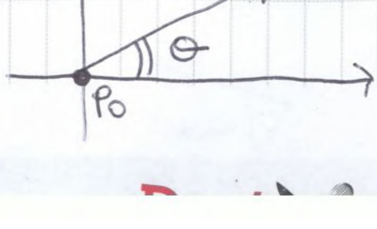
$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$

1) se $\rho\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}}_{A} < \rho\underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}\right)}_{A'} \rightarrow$ RETTE PARALLELE E DISTINTE

2) $\rho(A) = \rho(A') = \begin{cases} 1 \rightarrow \text{LE DUE RETTE COINCIDONO} \\ 2 \rightarrow \text{LE DUE RETTE SI INTERSECANO IN UN PUNTO} \end{cases}$

$(l, m) = \vec{v}$

$\left(\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}}, \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}}\right) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$



$x^2 - 2x_0 x + y^2 - 2y_0 y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0$

$x^2 + 2\alpha x + y^2 + 2\beta y + \gamma = 0 \longrightarrow \begin{cases} \alpha = -x_0 \\ \beta = -y_0 \\ \gamma = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 \end{cases}$

$f(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow x^2 + 2\alpha x + y^2 + 2\beta y + \gamma$

$\Gamma : f(x,y) = 0 \rightarrow$ CURVA DI LIVELLO DI f

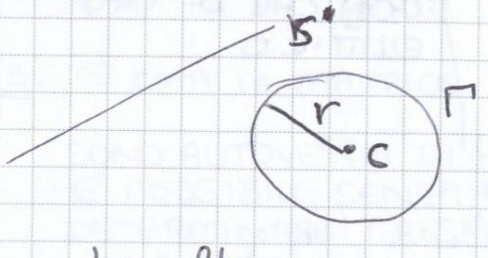
$r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma$

- POSIZIONE PUNTO - CERCHIO

$\Gamma : x^2 + 2\alpha x + y^2 + 2\beta y + \gamma = 0 \qquad P(x_0, y_0)$

$x_0^2 + 2\alpha x_0 + y_0^2 + 2\beta y_0 + \gamma = 0 \begin{cases} > 0 & P \text{ ESTERNO A } \Gamma \\ = 0 & P \in \Gamma \\ < 0 & P \text{ INTERNO A } \Gamma \end{cases}$

- POSIZIONE RETTA - CERCHIO



$\begin{cases} d(C,s) > r & \text{LA RETTA NON INTERSECA } \Gamma \\ d(C,s) = r & \text{LA RETTA HA UNA SOLA INTERSEZIONE CON } \Gamma \ (s \ tg) \\ d(C,s) < r & \text{LA RETTA INTERSECA } \Gamma \text{ IN DUE PUNTI DISTINTI (s SECANTE } \Gamma) \end{cases}$

$* \ r: \begin{cases} x = lt + x_1 \\ y = mt + y_1 \end{cases} \qquad (lt + x_1)^2 + 2\alpha(lt + x_1) + (mt + y_1)^2 + 2\beta(mt + y_1) + \gamma = 0$

- $t_1 \neq t_2$ DUE INTERSEZIONI: PONGO $t = t_1, t = t_2$ IN *
- $t_1 = t_2$ RADICE DOPPIA
- DUE RADICI COMPLESSE E CONIUGATE: RETTA ESTERNA A Γ

- MUTUA POSIZIONE DI DUE CIRCONFERENZE

$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0 \\ x^2 + y^2 + 2\alpha' x + 2\beta' y + \gamma = 0 \end{cases}$

1) $\alpha = \alpha', \ \beta = \beta' \rightarrow$ CIRCONFERENZE CONCENTRICHE $\begin{cases} \gamma = \gamma' \text{ COINCIDO[NO]} \\ \gamma \neq \gamma' \text{ CONCENTRIC[HE] CON } r \text{ DIVE[RSO]} \end{cases}$

2) $(\alpha, \beta) \neq (\alpha', \beta')$

$\Gamma_1 \begin{cases} x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0 \\ 2(\alpha' - \alpha)x + 2(\beta' - \beta)y + (\gamma' - \gamma) = 0 \end{cases} \leftarrow$ ASSE RADICALE r DELLE DUE CIRCONFERENZE

1. r INTERSECA Γ_1 E Γ_2 IN 2 PUNTI: Γ_1 E Γ_2 SI INTERSECANO IN 2 PUNTI
2. r INTERSECA Γ_1 E Γ_2 IN UN PUNTO: Γ_1 E Γ_2 SONO TANGENTI

$m_\ell = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad D = m_\ell^{C,C}$

<u>Es.</u> TROVARE P INVERTIBILE / $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$.

$V_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to x+y=0 \to x=-y$

$V_4 = \{(x,-x) \,/\, x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,-1) \,/\, x \in \mathbb{R}\} = \alpha(1,-1)$

$V_8 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to -3x+y=0 \to x=3x$

$V_8 = \{(x,3x) \,/\, x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,3) \,/\, x \in \mathbb{R}\} = \alpha(1,3)$

BASE $\to \ell = ((1,-1),(1,3))$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

<u>Es.</u> È DATA LA MATRICE $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. • VERIFICARE CHE $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ E $w = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ SONO AUTOVETTORI DI A.

- È POSSIBILE, SENZA FARE CALCOLI ESPLICITI DI A^2 E A^{-1}, DETERMINARE I RISPETTIVI AUTOVALORI ED AUTOVETTORI?
- VERIFICARE CHE $v+w$ NON È UN AUTOVETTORE DI A.

i)
$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 21 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \to A \cdot v = \lambda v$ $\quad v$ AUTOVETTORE

$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \to A \cdot w = \lambda w$ $\quad w$ AUTOVETTORE

ii)
$A \cdot v = \lambda v$

$A(Av) = A(\lambda v)$

$A^2 v = \lambda (Av) = \lambda(\lambda v)$

$A^2 v = \lambda^2 v$

49 AUTOVALORE PER A^2
9 AUTOVETTORE PER A^2

$A \cdot v = \lambda v$

$A^{-1}(A \cdot v) = A^{-1}(\lambda v)$

$v = \lambda A^{-1}(v)$

$\frac{1}{\lambda} v = A^{-1}(v)$

$\frac{1}{7}$ AUTOVALORE PER A^{-1}

$\frac{1}{3}$ AUTOVALORE PER A^{-1}

i)

$\ell(x,y) = x^2 + 4xy + 3y^2 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

LO STUDIO DEL SEGNO DELLA F.Q.

RICERCA DEI SEGNI DEGLI AUTOVALORI DI A.

$t^2 - 4t - 1 = 0$ 1 CAMBIAMENTO DI SEGNO $\xrightarrow[\text{CARTESIO}]{\text{TEO DI}}$ 1 RADICE ~~REALE~~ POSITIVA

F.Q NON È DEFINITA < 1 AUTOVALORE POSITIVO / 1 AUTOVALORE NEGATIVO

ii) $\ell(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

P.C: $t^2 - 3t + 1 = 0$ 2 CAMBIAMENTI DI SEGNO $\longrightarrow$ 2 RADICI POSITIVE

F.Q È DEFINITA POSITIVA $\rightarrow$ 2 AUTOVALORI POSITIVI

iii) $\ell(x,y) = x^2 + 4xy + 4y^2 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

P.C: $t^2 - 5t = 0$ 1 CAMBIAMENTO DI SEGNO $\longrightarrow$ 1 RADICE POSITIVA

F.Q È SEMIDEFINITA POSITIVA < $\lambda > 0$ / $\lambda = 0$

iv) $\ell(x,y) = xy + y^2 \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

P.C: $t^2 - t - \frac{1}{4} = 0$ 1 CAMBIAMENTO DI SEGNO $\longrightarrow$ 1 RADICE POSITIVA

F.Q. NON È DEFINITA

ES. DIRE SE ESISTE UN VETTORE COLONNA $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ TALE CHE ${}^t v A v < 0$ NEI SEGUENTI CASI:

$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

A) $(x,y)\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4x^2 - 6xy + 4y^2$

P.C: $t^2 - 8t + 7 = 0 \rightarrow$ 2 RADICI POSITIVE $\nexists\, v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / {}^t v A v < 0$

$\det A < 0$, $\det \tilde{A} \neq 0$ IPERBOLE

$\det A < 0$, $\det \tilde{A} = 0$ IPERBOLE DEGENERE

$\det A = 0$, $\det \tilde{A} \neq 0$ PARABOLA

$\det A = 0$, $\det \tilde{A} = 0$ PARABOLA DEGENERE

$\det A > 0$, $\det \tilde{A} = 0$ ELLISSE DEGENERE (1 PUNTO)

$\det A > 0$, $\det \tilde{A} \cdot tr(A) < 0$ ELLISSE

$\det A > 0$, $\det \tilde{A} \cdot tr(A) > 0$ ELLISSE IMMAGINARIA

RICHIAMI SULLE FORME QUADRATICHE

$\varphi : \mathbb{R}^n \ni \overline{x} \to {}^T\overline{x} \cdot A \cdot \overline{x} \in \mathbb{R}$

1. ϕ È NON DEGENERE SE $\det A \neq 0$

2. $\det A = 0$, ϕ DEGENERE (PARABOLICO)

Se $\det A \neq 0$:

F.Q DEFINITA POSITIVA

a. TUTTI GLI AUTOVALORI DI A SONO POSITIVI: $\varphi(x) \geq 0$ ($= 0 \iff x = \vec{0}$)

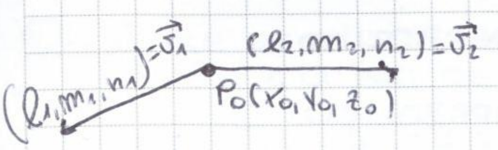
b. TUTTI GLI AUTOVALORI DI A SONO NEGATIVI: $\varphi(x) \leq 0$ ($= 0 \iff x = \vec{0}$)
(F.Q. DEFINITA NEGATIVA)

c. GLI AUTOVALORI DI A SONO TUTTI $\neq 0$ MA NON DELLO STESSO SEGNO (F.Q DI TIPO IPERBOLICO): $\varphi(x) = \begin{cases} >0 \\ <0 \\ =0 \end{cases}$

PIANI

$ax + by + cz + d = 0 \to$ EQ. CARTESIANA

$\vec{n} = (a, b, c) \to$ VETTORE $\perp$ PIANO



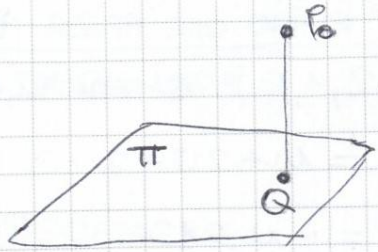
$P(x, y, z) \in$ PIANO SE $P - P_0 = u\vec{v_1} + v\vec{v_2}$
$u, v \in \mathbb{R}$

EQ. PARAMETRICA $\longrightarrow$ $\begin{cases} x = l_1 u + l_2 v + x_0 \\ y = m_1 u + m_2 v + y_0 \\ z = n_1 u + n_2 v + z_0 \end{cases}$

$\mathbb{R}^2 \ni (u, v) \longrightarrow (l_1 u + l_2 v + x_0, m_1 u + m_2 v + y_0, n_1 u + n_2 v + z_0) \in \mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^3$ PIANO $= \mathrm{Im}(F)$

• DISTANZA PUNTO-PIANO



$\pi: ax+by+cz+d=0 \qquad P(x_0, y_0, z_0)$

$$d(P_0,\pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$H_+ = \{(x,y,z) \,/\, ax+by+cz+d>0\}$

$H_- = \{(x,y,z) \,/\, ax+by+cz+d<0\}$

EQUAZIONI CARTESIANE DELLE RETTE NELLO SPAZIO

$\pi: ax+by+cz+d=0$

$\pi': a'x+b'y+c'z+d'=0$

$$(a,b,c)\times(a',b',c') \begin{cases} \vec{0} \ \text{(PRIMO CASO)} \\ \neq \vec{0} \end{cases}$$

$$\pi \cap \pi' : \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

1) $\pi = \pi'$ SE $a' = \lambda a,\ b' = \lambda b,\ c' = \lambda c,\ d' = \lambda d$ → PIANI // E COINCIDENTI

2) SISTEMA INCOMPATIBILI: $(a,b,c) \,//\, (a',b',c')$ → CONDIZIONE DI PARALLELISMO

$a' = \lambda a,\ b' = \lambda b,\ c' = \lambda c,\ d' \neq \lambda d$ → 2 PIANI // E DISTINTI

3) (a,b,c) NON // (a',b',c'): SISTEMA COMPATIBILE CON SOLUZIONI CHE DIPENDONO DA UN PARAMETRO LIBERO. I PIANI SI INTERSECANO IN UNA RETTA

EQ. PARAMETRICHE DELLA RETTA IN $\mathbb{R}^3$

$\vec{v}(l,m,n) \neq \vec{0} \qquad P_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \\ z = nt + z_0 \end{cases} \rightarrow P(t) = t\vec{v} + P_0$$

$P_0(x_0, y_0, z_0) \qquad P_1(x_1, y_1, z_1)$

$\vec{v} = P_1 - P_0$

* $P(t) = t(P_1 - P_0) + P_0$ → EQ. PARAMETRICA RETTA PER 2 PUNTI

$t \in \mathbb{R}$

SE $t \in [0,1]$, $P(0) = P_0$, $P(1) = P_1$

• POSIZIONE RETTA-PIANO

$\pi: ax+by+cz+d=0$ $\qquad r: \begin{cases} a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases}$

$$\pi \cap r: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases}$$

1. SISTEMA INCOMPATIBILE: $r // \pi$ MA $r \notin \pi$
2. UNA SOLA SOLUZIONE: INCIDENTE π
3. SOLUZIONI CHE DIPENDONO DA UN PARAMETRO LIBERO: $r \in \pi$

OPPURE

$\pi: ax+by+cz+d=0$ $\qquad r: \begin{cases} x=lt+x_0 \\ y=mt+y_0 \\ z=nt+z_0 \end{cases}$

$la+mb+nc \neq 0 \rightarrow$ r NON È // AL PIANO

$(am+bn+cl)t+(ax_0+by_0+cz_0+d)$

$t=-\dfrac{ax_0+by_0+cz_0+d}{am+bn+cl} \longrightarrow$ PUNTO DI INTERSEZIONE

<u>Es.</u>

$\pi: 3x+2y-z=1$ $\qquad r: \begin{cases} x=2t+1 \\ y=t-1 \\ z=3 \end{cases}$

$2\cdot 3+1\cdot 2+0 \neq 0$

$3(2t+1)+2(t-1)-3-1=0$

$8t=3 \; ; \; t=\frac{3}{8} \longrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{4} \\ y=-\frac{5}{8} \\ z=3 \end{cases}$

• MUTUA POSIZIONE DI DUE RETTE

1. $(Q-P)\cdot(\vec{v}\times\vec{v'}) \neq 0 \rightarrow$ RETTE SGHEMBE
2. $(Q-P)\cdot(\vec{v}\times\vec{v'}) = 0 \rightarrow$ RETTE COMPLANARI

$\vec{v}\times\vec{v'} \neq 0 \rightarrow$ NON //, SI INTERSECANO IN UN PUNT

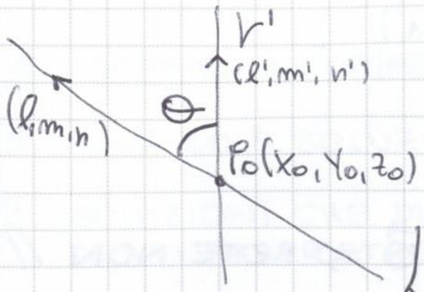
- SFERE

RAGGIO r, CENTRO (x_0, y_0, z_0)

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$$

$$\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0 x - 2y_0 y - 2z_0 z + (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2) = 0$$

- ANGOLI FORMATI DA RETTE



$$r: \begin{cases} lt + x_0 = x \\ y = mt + y_0 \\ z = nt + z_0 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = l't + x_0 \\ y = m't + y_0 \\ z = n't + z_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta = \arccos\left(\dfrac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}} \right) \\ \pi - \theta \end{cases}$$

- FASCIO DI PIANI PROPRIO

$$\lambda(ax+by+cz+d) + \mu(a'x+b'y+c'z+d')$$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ NON ENTRAMBI NULLI

* π E π' INCIDENTI: AL VARIARE DI λ, μ DESCRIVONO LA FAMIGLIA FORMATA DA TUTTI I PIANI DI $\mathbb{R}^3$ CHE CONTENGONO $\pi \cap \pi'$

- FASCIO DI PIANI IMPROPRIO

SE π E π' SONO PARALLELI E DISTINTI, ALLORA AL VARIARE DI λ E μ I PIANI $\pi_{\lambda,\mu}$ DESCRIVONO LA FAMIGLIA DI TUTTI I PIANI PARALLELI A π E π'.

$$f(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z + \delta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \alpha = -x_0 \\ \beta = -y_0 \\ \gamma = -z_0 \end{cases} \qquad \delta = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - r^2 \text{ CIOÈ } r^2 = (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - \delta > 0$$

Σ È LA SUPERFICIE DI LIVELLO 0 DELLA f $\quad f(x,y,z) = 0$

Es.

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - 3 = 0 \qquad \alpha = 1, \beta = +\frac{1}{2}, \gamma = 0$

$C(1, -\frac{1}{2}, 0) \qquad r^2 = (1 + \frac{1}{4}) + 3 > 0 \rightarrow$ SFERA PROPRIA

$r = \frac{\sqrt{17}}{2}$

1) $\alpha=\alpha',\ \beta=\beta',\ \gamma=\gamma'$: Σ_1, Σ_2 CONCENTRICHE $<$ $\delta=\delta'$ COINCIDONO; $\delta\neq\delta'$ DISGIUNTE

2) Σ_1, Σ_2 NON CONCENTRICHE:

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 : \begin{cases} x^2+y^2+z^2+2\alpha x+2\beta y+2\gamma z+\delta=0 \\ 2(\alpha'-\alpha)x+2(\beta'-\beta)y+2(\gamma'-\gamma)z+(\delta'-\delta)=0 \end{cases}$$

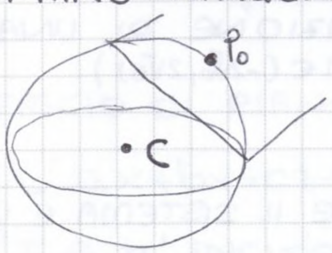
PIANO RADICALE

a) $d(\pi, C_1) < r_1$: $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ È UNA CIRCONFERENZA

b) $d(\pi, C_1) = r_1$: Σ_1 e Σ_2 SONO TANGENTI

c) $d(\pi, C_1) > r_1$: Σ_1 e Σ_2 NON SI INTERSECANO

• PIANO TANGENTE A UNA SFERA IN UN SUO PUNTO



π PIANO PER $P_0 \perp (P_0 - C)$ $\qquad C=(0,0,0)$

$P_0 - C = (x_0, y_0, z_0)$

$\pi: x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0$

$x_0x+y_0y+z_0z=r^2$

QUADRICHE

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{10}x+2a_{20}y+2a_{30}z+a_{00}=0$$

$f(x,y,z)=0$

NON TUTTI I COEFFICIENTI DEI TERMINI DI 2° GRADO SONO NULLI

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$ = MATRICE ASSOCIATA AI TERMINI DI 2° GRADO DELL'EQUAZIONE

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$ = MATRICE COMPLETA

DOPPIAMENTE DEGENERE DI TIPO ELLITTICO (COPPIA DI PIANI COMPLESSI CONIUGATI)	2	0	$\begin{pmatrix} + & + & 0 \\ & 0 & \\ - & - & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
DOPPIAMENTE DEGENERE DI TIPO PARABOLICO (COPPIA DI PIANI DISTINTI PARALLELI)	2	0	$\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ & 0 & \\ - & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$x^2=a$
TRIPLAMENTE DEGENERE (UN SOLO PIANO CONTATO DUE VOLTE)	1	0	$\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ & 0 & \\ - & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$x^2=0$

VERIFICARE CHE ℓ' GIACE SU α:

$$\ell': \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 0+t \\ z = 0+t \end{cases} \qquad \alpha: 0x - y + z + 0 = 0 \ ; \quad y = z$$

$0+\cancel{t} = 0\cancel{+t} \rightarrow \ell'$ GIACE SU α

iv)
$$\begin{array}{c} \ell \\ \\ \pi_h \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \\ h & -1 & h & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3h-1 & -h-1 \end{array}\right)$$

SE $h = \frac{1}{3}$ $\begin{cases} \rho(A) = 2 \\ \rho(A|B) = 3 \end{cases} \rightarrow$ SISTEMA INCOMP. $\rightarrow \pi_h \cap \ell = \emptyset$, $\ell \parallel \pi_h$

SE $h \neq \frac{1}{3} \Rightarrow \rho(A) = \rho(A|B) = 3$ $\rightarrow \ell \cap \pi_h =$ UN PUNTO

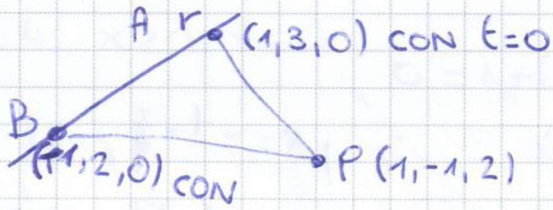
SE $h \neq 0$

SE $h=0$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \rho(A) = \rho(A|B) = 3$$

$\ell \cap \pi_h = 1$ PUNTO

Es. TROVARE L'EQUAZIONE DEL PIANO CHE CONTIENE LA RETTA r

$$r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 3+t \\ z = 0 \end{cases}$$ E IL PUNTO $P(1,-1,2)$.



$$\begin{array}{r} X-P \ (x,y,z) \\ A-P \\ B-P \end{array} \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$(x-1)(-2) - (y+1)(-4) + (z-2)(8) = 0$

$-2x + 4y + 8z - 10 = 0$

Es.

$O(0,0,0) \qquad \pi: 2x - 4y - 8z + 10 = 0$

$$d(O,\pi) = \frac{|2\cdot 0 - 4\cdot 0 - 8\cdot 0 + 10|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-8)^2}} = \frac{10}{\sqrt{84}}$$

Es. 27/06/2011 Q1

$$r: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

VETTORE NORMALE AL PIANO

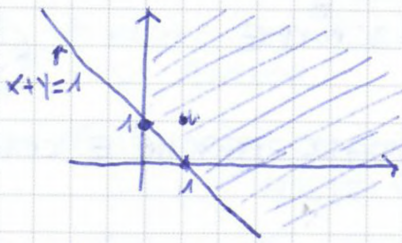
$(2,0,0)\cdot(r) = 0 \rightarrow r \parallel \pi: x = 2$

$(2,0,0)\cdot(s) = 0 \rightarrow s \parallel \pi: x = 2$

Es. DISEGNARE $A = \{ (x,y) / |x| + |y| \geq 1 \}$.

CASO 1: $x \geq 0, \; y \geq 0$

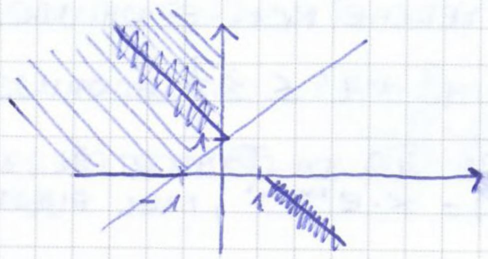
$x + y \geq 1$



$x + y = 1$

CASO 2: $x \leq 0, \; y \geq 0$

$-x + y \geq 1$

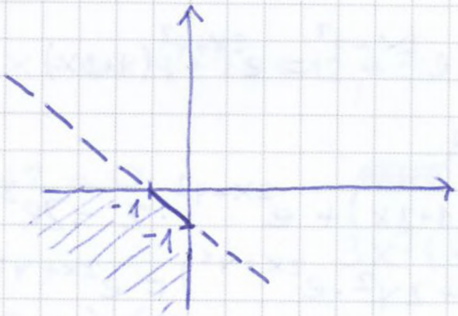


$-x + y = 1$

CASO 3: $x \leq 0, \; y \leq 0$

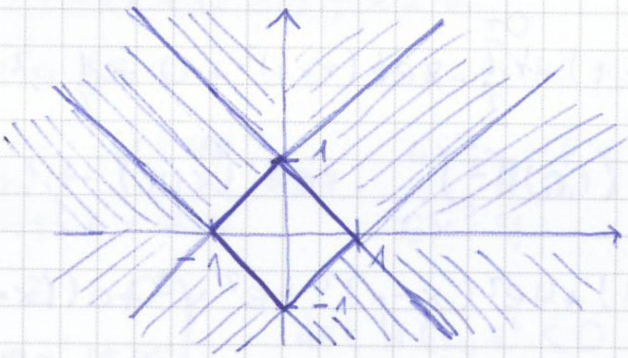
$-x - y \geq 1$

$x + y \leq -1$



$x + y = -1$

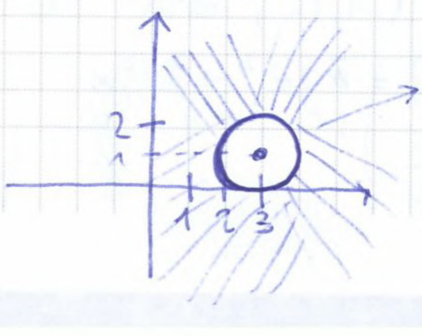
CASO 4: $x \geq 0, \; y \leq 0$



A = TUTTI I PUNTI DEL PIANO AL DI FUORI DEL QUADRATO

Es: DETERMINARE dom f SE $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \; / \; (x,y) \to \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 - 1}$

$\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; / \; (x-3)^2 + (y-1)^2 - 1 \geq 0 \}$



$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$

dom f = TUTTI I PUNTI ESTERNI ALLA CIRCONFERENZA, INCLUSA LA CIRCONFERENZA STESSA