



Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1357

ANNO: 2014

# A P P U N T I

STUDENTE: Costantino M.

MATERIA: Calcolo Automatico delle Strutture, Prof. Carbone

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# CALCOLO AUTOMATICO DELLE STRUTTURE

03.03.2014

reg.

## CONTENUTI del CORSO

◦ fondamenti dell'analisi strutturale

Vengono spiegati come nascono gli elementi, quali sono i pregi e le caratteristiche degli elementi.

Così come la meccanica razionale è propedeutica alla Scienza delle Costruzioni, questo corso è propedeutico all'Analisi Strutturale. Faremo solo la "teoria" per poi riuscire ad applicare il metodo.

Alla base di ciò che vedremo c'è un metodo matematico complesso che non siamo in grado di affrontare da ingegneri - lo vedremo da un punto di vista ingegneristico.

Scopo del corso è fornire le nozioni di base su alcuni elementi utilizzati nella risoluzione di alcune tipologie strutturali.

Limitaremo il corso alle strutture ELASTICO-LINEARI.

vedremo come affrontare una struttura, come schematizzarla alle luce degli elementi scelti (es: telaio → scelgo l'elemento trave, struttura reticolare → scelgo l'elemento lastra, elemento bidimensionale → scelgo un elemento con forma bidimensionale più o meno complessa...). Cercheremo di capire come funziona l'elemento e come si impiega.

Questo è il problema che affronteremo in termini ingegneristici.

⇒ cerco di capire come queste metodologie si sono sviluppate nell'ingegneria: capire come si sono formati i primi elementi per risolvere strutture e la loro evoluzione nel tempo.

È un corso teorico di base. Nel mondo lavorativo, adoperando codici di calcolo nella realtà dovete scontrarvi non solo col codice ma anche con 2 documenti importanti:

- ① MANUALE TEORICO
- ② MANUALE DEL DESIGN

① Il manuale teorico riporta al suo interno i fondamenti teorici dell'elemento che voi andate ad utilizzare per quel che è consentito.

② Esempi applicativi: cerco di capire attraverso esempi applicativi fruitivi, i limiti e le potenzialità dell'elemento che eventualmente non è descritto all'interno del manuale teorico.

Devo dunque conoscere il meccanismo che c'è dietro per poter capire e valutare l'impiego dell'elemento.

Nell'ambito non lineare il problema è molto più complesso e solo alcuni codici sono in grado di affrontarlo egregiamente.

## MATERIALE

slide al centro stampa (via Boggo)

## LEZIONI

LUNEDÌ	13:00 - 16:00	aula DITIC B
MARTEDÌ	13:00 - 14:30	aula 5D (3° piano - sopra bar Aubrogo)
Assistenti:	Bertagnoli } contattarli in caso di problemi Allaix }	

## ESAME

orale - viene registrato da Manvello (con listabilità)

27.30"

CASO 1 + CASO 2

Tras la relazione che lega le forze  $F$  agli spostamenti:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_{11} + F_{12} = k u_1 - k u_2 \\ F_2 &= F_{21} + F_{22} = -k u_1 + k u_2 \end{aligned}$$

In forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

legame forze - spostam

$|K|$  = MATRICE DI RIGIDEZZA DELL'ELEMENTO

Analizzando la matrice  $|K|$  si nota che questa gode di determinate proprie'

① SIMMETRICA:

- $K_{11}$  è il contributo alla forza 1 per lo spostamento unitario del nodo 1
  - $K_{21}$  " " " " " " 2 " " " " " " " " " "
  - $K_{12}$  " " " " " " 1 " " " " " " " " 2
- ed è uguale a  $K_{21}$

↳ Di certo deve essere simmetrica, altrimenti abbiamo sbagliato qualcosa

②  $\det |K| = 0 \Rightarrow$  la matrice NON è invertibile ( $k^2 - k^2 = 0$ )

Cosa vuol dire fisicamente?

Vuol dire che è libera nello spazio:  $u_1 = u_2$  con un'infinità di matrici

↳ L'invertibilità non ammessa è legata al fatto che la struttura in esame è libera nello spazio.

La non-invertibilità sparirà quando penseremo di incollare la struttura e quindi si tolgono le possibilità di moto rigido della struttura.

③ L'energia elastica di deformazione della molla alla luce dello spostamento  $u_1$  e  $u_2$  può essere scritta:

$$U = \frac{1}{2} k \Delta u^2 \quad \text{EN. ELASTICA}$$

$u_1 - u_2 = \Delta u$  SPOSTAMENTO EFFETTIVO DELLA MOLLA

Questa relazione (classica) può anche scriversi in termini matriciali sfruttando la matrice di rigidità  $|K|$  e l'energia elastica di deformazione può scriversi come:

$$\frac{1}{2} \{U\}^T |K| \{U\}$$

Quest'ultima relazione è GENERALE  $\rightarrow$  Non vale solo per la molla ma è valida per qualunque tipo di elemento

La MATRICE DI RIGIDEZZA dell'elemento è quella matrice che mi consente di esprimere in termini quadratici degli spostamenti l'energia elastica di deformazione del mio elemento  $\rightarrow$  OSSERVAZIONE IMPORTANTISSIMA

Questa osservazione ci consentirà di scrivere la matrice di rigidità.

Se l'elemento è complicato, non sappiamo scrivere la matrice di rigidità però partendo da  $E$  e  $\sigma$  siamo in grado di scrivere l'energia elastica di deformazione. A partire da questa riusciremo a descrivere la matrice di rigidità dell'elemento.

Completiamo il sistema.

- la MATRICE DI RIGIDEZZA continua ad essere SIMMETRICA ed è anche una MATRICE INDIPARTIBILE
- la MATRICE DI RIGIDEZZA STRUTTURALE la posso vedere come le singole matrici degli elementi prese e spalmate sulle dimensioni strutturali, dopo di che sommate globalmente l'una sull'altra.

Questa operazione di sommare globalmente vuol dire andare a costruire le equazioni nodo per nodo di equilibrio e quindi alla fine dover avere la matrice di rigidità dell'intera struttura.

Questo è il metodo per costruire la matrice di rigidità di una struttura comunque complicata esse sia.

Prendo la matrice di rigidità, le spalmo sulle dimensioni strutturali e le sommo  $\rightarrow$  per ciascun elemento

Il risultato finale è la MATRICE DI RIGIDEZZA dell'intera STRUTTURA.

L'operazione di somma equivale a scrivere nodo per nodo l'equazione d'equilibrio tra forze esterne e sollecitazioni interne  $\rightarrow$  OSSERVAZIONE IMPORTANTE

Tornando all'esempio, se considero il nodo 1 vincolato, la struttura è:

$\begin{matrix} u_1 \\ \text{---} \\ u_2 \\ \text{---} \\ u_3 \end{matrix}$  Anzi  $u_1=0$  dalla condizione vincolare imposta

$\rightarrow$  posso dunque e partizionare la mia matrice tra le forze dei nodi vincolati e le forze dei nodi liberi

$\rightarrow$  trovo la matrice che consente di valutare  $u_2, u_3$  alla luce delle forze  $F_2, F_3$  applicate sulla struttura, questa è invertibile

$\rightarrow$  Trovati  $u_2, u_3$  sono in grado di valutare  $F_1 = \text{reaz. vincolare}$

A partire dagli spostamenti nodali, attraverso le due relazioni posso valutare le sollecitazioni della struttura

$\rightarrow$  Sono in grado di definire tutto della struttura.

Questa operazione vista in questo modo può essere formalizzata:

$\rightarrow$  indico con  $u_2 =$  spostamenti liberi } vettore spostamenti  
 $\rightarrow$  indico con  $u_1 =$  spostamenti dei nodi imposti }

In modo corrispondente:  $F_2 =$  forze sui nodi liberi  
 $F_1 =$  forze sui nodi vincolati

Possiamo pensare di avere  $|K| =$  per la struttura  
 $|k| =$  per l'elemento

Si può pensare di scambiare nelle matrice le righe con le righe e colonne con colonne in modo da portare in basso tutti i nodi vincolati, quindi tutte le equazioni che riguardano i vincoli.

Si può dunque pensare di partizionare la matrice in questo modo:

$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ F_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} |k_{11}| & |k_{12}| \\ |k_{21}| & |k_{22}| \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{Bmatrix}$$

Gli spostamenti vincolati  $u_1$  possono anche essere imposti e  $F_1$  sono le reazioni vincolari.

La teoria sviluppata per le 2 molle allineate in serie è valida in ogni caso, anche quando le 2 molle non sono più allineate lungo la stessa linea, e' dunque valida per strutture reticolari composte da aste comunque disposte nel piano.

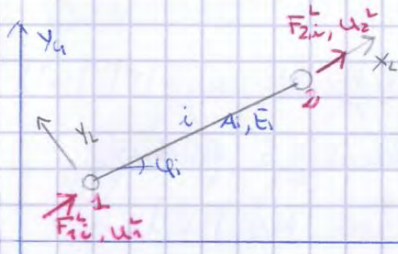
L'unica cosa da effettuare è, ricordando il percorso che effettuavamo per la costruzione della matrice di rigidezza dell'intera struttura:

Matrice dell'elemento, spalmata per la dimensione strutturale e per somma

Non abbiamo avuto problemi perché i due elementi avevano stesso sist. di rifer.  $\Rightarrow$  l'asse longitudinale aveva stesse direzioni e dunque si è scritto facilmente l'eq. di equilibrio

Nel caso generale che vedremo adesso il sistema si complica un pochino perché l'asta è comunque inclinata nel piano. Possiamo ricondurre tutto a quanto visto finora:

Appurato che parlare di molle o bielle è la stessa cosa, vediamo un'asta inclinata. Individuiamo un sistema locale di riferimento dell'elemento:  $x_i, y_i$ . Questo va dal nodo iniziale al finale come esse  $x$  e l'asse  $y$  è perpendicolare a  $x$  in una terna destrorsa.



L'asta  $i$ -esima va dal nodo 1 al 2 e ha lunghezza  $l_i$ . Ha un modulo d'elasticità  $E_i$  e un'area  $A_i$ . È inclinata con riferimento a un sistema globale  $x_0, y_0$  di un angolo  $\varphi_i$ .

Con riferimento al sistema LOCALE, presa l'asta chiamo  $F_{1i}, F_{2i}$  le forze e  $u_1^i, u_2^i$  gli spost. delle forze sui nodi con riferimento al sistema  $L_i$ , posso scrivere il legame forze-spostamenti attraverso la relazione che già conosciamo: (quella della molla)

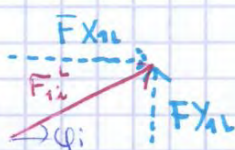
$$\begin{bmatrix} F_{1i} \\ F_{2i} \end{bmatrix} = [k]_i \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \end{bmatrix} \quad \text{con } [k]_i = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} = \frac{E_i A_i}{l_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Con riferimento al sistema locale so scrivere il legame F-u con l'uso della matrice di rigidezza che conosco

Il problema è che le aste sono comunque orientate nel piano  $\Rightarrow$  conviene prendere ciascuna asta e scomporre questo legame non all'interno di un sistema locale bensì proporre il legame all'interno di un SISTEMA GLOBALE ( $x_0, y_0$ ). Questo lavoro lo fatto per tutte le aste.

Tra scriviamo il legame visto F-u nel sistema locale, all'interno di un sistema globale.

Vediamo cosa avviene sul nodo 1:



Nella realtà la  $F_{1i}$  è inclinata rispetto al sistema globale di un angolo  $\varphi_i$ .

Questa forza si può scomporre in  $F_{X1i}$  e  $F_{Y1i}$ : le due componenti della forza con riferimento al sistema globale.

$$\begin{cases} C_i = \cos \varphi_i \\ S_i = \sin \varphi_i \end{cases}$$

Legame tra forze nodo 1 nel sist. locale e forze nel nodo 1 in

componenti nel sistema globale

Lo stesso discorso si vale per  $F_{2i}$

$$\begin{cases} F_{X1i} = F_{1i} \cos \varphi_i = F_{1i} C_i \\ F_{Y1i} = F_{1i} \sin \varphi_i = F_{1i} S_i \end{cases}$$

E attraverso la relazione:  $[F^e]^T = [K^e] \cdot [u^e]$ , ricaviamo le forze del sistema locale e dunque gli sforzi assiali del nostro elemento asta.

Il tutto è abbastanza semplice. È chiaro che la matrice  $[K^e]$  ha cambiato dimensioni rispetto a  $[k]$ .

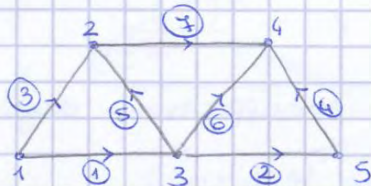
La matrice di rigidità dell'elemento nel sistema locale è una 2x2, nel sistema globale diventa 4x4 (ha le componenti).

$$[K^e] = [T]^T [k] [T] = \begin{bmatrix} c^2 & c s & -c^2 & -c s \\ c s & s^2 & -c s & -s^2 \\ -c^2 & -c s & c^2 & c s \\ -c s & -s^2 & c s & +s^2 \end{bmatrix} \frac{E_i A_i}{L_i} = \begin{bmatrix} |k_{11}|_e & |k_{12}|_e \\ |k_{21}|_e & |k_{22}|_e \end{bmatrix} \text{ Matrice di Rigidità nel sistema globale}$$

Le sottomatrici sono 2x2 con un significato fisico ben preciso:

es: La sottomatrice  $k_{21}$  rappresenta le forze che nascono sul nodo 2 a seguito degli spostamenti unitari del nodo 1.

Supponiamo di avere questa struttura:



La freccia su ciascun asta indica la direzione di  $x_i$  positivo.

ANZA  $\neq$   $[K^e]_7 = \begin{bmatrix} |k_{11}|_7 & |k_{12}|_7 \\ |k_{21}|_7 & |k_{22}|_7 \end{bmatrix}$  nel sist. globale

Come spalanza  $[K^e]_7$  scritta nel sistema globale per l'elemento 7 nella dimensione strutturale 5x5?

1 e 2 sono gli indici del nodo iniziale e finale dell'asta 7.

$|k_{11}|_7$  va nel punto (2,2)       $|k_{12}|_7$  va nel punto (4,2)

$|k_{21}|_7$  va nel punto (2,4)       $|k_{22}|_7$  va nel punto (4,4)

Così si spalanza nella dimensione strutturale la matrice di rigidità dell'elemento 7.

Questo lavoro lo faccio per tutti gli elementi: 7 volte.

[K]	1	$ k_{11} _1$					Dati i 7 "fogli", li metti uno sopra l'altro e li sommi. Sommare vuol dire andare a riscrivere le eq.ni di equilibrio al nodo. Il risultato finale è la MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA STRUTTURA.
		$ k_{11} _3$	$ k_{12} _3$	$ k_{12} _1$			
	2	$ k_{21} _3$	$ k_{22} _3$	$ k_{21} _5$	$ k_{12} _7$		
	3	$ k_{21} _1$	$ k_{22} _5$	$ k_{22} _1$	$ k_{11} _2$	$ k_{12} _2$	
	4		$ k_{21} _7$	$ k_{21} _6$	$ k_{22} _4$	$ k_{22} _6$	
5			$ k_{21} _2$	$ k_{12} _4$	$ k_{22} _2$		

A partire dagli spostamenti calcolo l'N dovuto agli spostamenti però localmente c'è ancora lo stato di sollecitazione dovuto alla variazione termica.

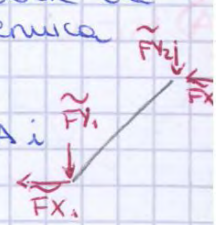
So come calcolare i carichi equivalenti = Reazioni unilaterali di incastro perfetto per questo fenomeno cambiato di segno, e poi per calcolare la sollecitazione reale devo fare attenzione perché non basta la parte del problema dovuta dagli spostamenti ma devo considerare il fenomeno locale di variazione termica.

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{X_1} \\ \bar{F}_{Y_1} \\ \bar{F}_{X_2} \\ \bar{F}_{Y_2} \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} c \\ s \\ -c \\ -s \end{bmatrix} = EA \alpha \Delta T \begin{bmatrix} c \\ s \\ -c \\ -s \end{bmatrix}$$

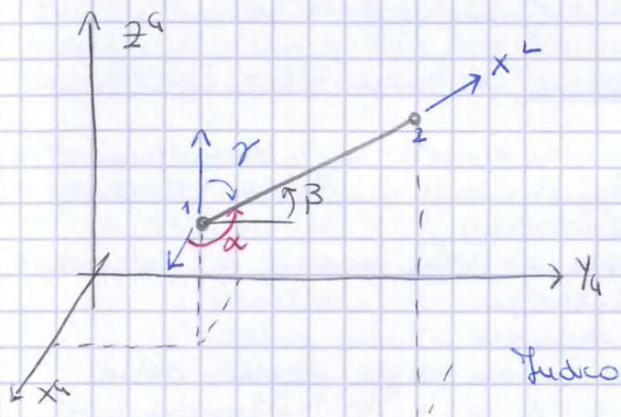
forze assiali indotte da una variazione termica

$$|\bar{F}|_i = -|\bar{F}|$$

CARICHI EQUIVALENTI RELATIVI ALL'ASTA  $i$



### MATRICE DI RIGIDEZZA DELL'ASTA NELLO SPAZIO



Definire il nodo 1 e il nodo 2, definisco  $X^L$ .

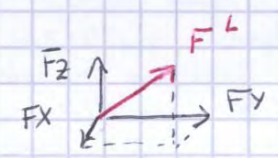
Definire i nodi 1 e 2 nel che conoscere le loro coordinate  $(x, y, z)$ .

La geometria analitica consente di valutare piano valgono per questa asta gli angoli  $\alpha, \beta, \gamma = \text{COSENI DIRETTORI}$ .

$$\left. \begin{aligned} l &= \cos \alpha \\ m &= \cos \beta \\ n &= \cos \gamma \end{aligned} \right\} \text{COSENI DIRETTORI}$$

= DA partire dalle coord geometriche dei nodi 1 e 2 riusciamo a definire i coseni direttori.

È possibile estendere questo fatto per le 2 dimensioni, alle 3 dimensioni la forza nel sistema locale la scompongo non più in due basi in 3 componenti con riferimento al sistema globale.



$$\left. \begin{aligned} F_X &= F^L \cos \alpha = F^L \cdot l \\ F_Y &= F^L \cos \beta = F^L \cdot m \\ F_Z &= F^L \cos \gamma = F^L \cdot n \end{aligned} \right\} \text{Faccio la scomposizione perché conosco i coseni direttori.}$$

Vale quanto detto nelle 2 dimensioni solo che trasformo nelle 3 dimensioni:  $\Rightarrow$  Sistema locale  $\xrightarrow{\text{MATRICE } [T]}$  Sistema globale

$$\begin{bmatrix} F_{X_1} \\ F_{Y_1} \\ F_{Z_1} \\ F_{X_2} \\ F_{Y_2} \\ F_{Z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & 0 \\ m & 0 \\ n & 0 \\ 0 & l \\ 0 & m \\ 0 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^L \\ F_2^L \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [F^G] = [T][F^L]$$

$$[u^G] = [T][u^L]$$

[T] = MATRICE DI TRASFORMAZIONE (come prima)

PROPRIETA'  $[T]^T [T] = [I]$

Riesco a calcolare la matrice di rigidità globale sempre come:

$$[K] = [T]^T [k] [T] = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 3 \times 3 & & \\ & 3 \times 3 & \\ & & 3 \times 3 \end{pmatrix} \text{ dove } [T] = 6 \times 2 \text{ questa volta}$$

$\Rightarrow$  Non è più  $4 \times 4$  ma  $6 \times 6$ . Tutto è come prima.

da pag. 165 a 178



## C) METODO DELLA SOPPRESSIONE DELLE EQUAZIONI

Il terzo metodo è quello visto ieri che comporta lo scambio di righe con righe e colonne con colonne. Viene detto tecnicamente metodo della soppressione delle equazioni perché toglie le equazioni dei nodi vincolati e risolve solo quelle che restano dei nodi non vincolati.

Il metodo B) è quello che viene usato in questo programma di calcolo che viene proposto.

Vi do l'idea di come potrebbe essere lo schema, il layout generale di un programma di calcolo agli elementi finiti.

### ANALISI STATICA

Abbiamo elementi di tipo trave ed elementi finiti di tipo bi o tri-dimensionali che possono servire per schematizzare strutture diverse:

- TIPO TRAVE: per schematizzare travi, piani, spaziali, travi, travi ..... p.182
- FINITI: per schematizzare tensioni piana, def. piana, tridim ..... p.183

Per ciascuno di questi elementi viene effettuato il calcolo della matrice di rigidezza vengono dunque imposte le condizioni di vincolo e a questo punto, nota  $K$  e le cond. vincolari, si può passare al calcolo delle reazioni vincolari.

Viene descritto la struttura di un programma di calcolo per il calcolo di strutture reticolari piane (pag. 183)

È strutturato per SUBROUTINE e ciascuna SUBROUTINE ha un compito ben preciso: lettura dati d'ingresso; assemblaggio matrice di rigidezza della struttura; l'imposizione delle condizioni di vincolo; la risoluzione della matrice e il calcolo delle sollecitazioni all'interno dei singoli elementi → stampa dei risultati

Questo programma è riprodotto sulle dispense ed è scritto in FORTRAN. (analogo a MATLAB). (provare a farlo)

Il problema non è più come assemblare la matrice o come imporre le condizioni vincolari. Il problema è risolvere il sistema da un punto di vista numerico.

Non avete mai fatto calcolo numerico e dunque non avete mai risolto un sistema lineare di equazioni da un punto di vista numerico. 27.15

Esistono metodi diversi. Ho un sistema figlio della fase di assemblaggio e dell'imposizione delle condizioni al contorno.

## SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI pag. 12

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1m}x_m = d_1 \\ \vdots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \dots + c_{mm}x_m = d_m \end{cases} \quad (1)$$

La forma matriciale  $[C] \cdot [X] = [d]$  con:  $\begin{cases} [C] = \text{matrice dei coefficienti} \\ [X] = \text{vettore delle incognite} \\ [d] = \text{termini w noti} \end{cases}$

Da un punto di vista numerico i metodi di soluzione si dividono in due grandi categorie: → METODI DIRETTI

→ METODI INDIRETTI o ITERATIVI

### DIFFERENZA FONDAMENTALE

In un metodo diretto il n° di operazioni è fisso, lo so sin dall'inizio; nel ciclo iterativo invece no, vado per convergenza

20:00

In particolare queste due matrici godono della proprietà di essere triangolari:

$$[L] = \text{Matrice triangolare inferiore}$$

$$[S] = \text{Matrice triangolare superiore}$$

Dando per scontato che si possa fare queste operazioni, pongo il prodotto  $[S][X] = [Z]$  vettore (per comodità):

$$[L][X] = [d] \rightarrow [L][S][X] = [d] \rightarrow [L]([S][X]) = [L][Z] = [d]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ l_{m1} & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}$$

Per come è fatta  $[L]$ , calcolo subito  $[Z]$ :  $z_1 = d_1$   
 $z_2 = d_2 - l_{21} z_1$   
 $\vdots$

Nota 2:

$$[S][X] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1m} \\ 0 & s_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}$$

Ricavo le  $x$ .

Date  $[L]$  ed  $[S]$  il problema è semplice. Il problema è scrivere  $[L]$  ed  $[S]$ .  
 Ho un teorema nel calcolo matriciale che dice: se ho una matrice quadrata  $[A]$  con i minimi principali non nulli sulla diagonale (la matrice deve essere invertibile), questa può essere scomposta in modo univoco in un prodotto di due matrici di cui una triangolare inferiore  $[L]$  e l'altra triangolare superiore  $[S]$ , se sono stati fissati arbitrariamente gli elementi sulla diagonale principale di una delle due matrici triangolari.

In genere si pongono pari ad 1 tutti i termini sulla diagonale della matrice triangolare inferiore  $[L]$ .

Esiste poi una metodologia per calcolare tutti i termini sia di  $[L]$  che di  $[S]$ .

Si scrive l'uguaglianza del prodotto  $[L][S]$  con i corrispondenti valori di  $[A]$  seguendo un processo ben preciso: effettivo operazioni sulla riga 1, effettivo operazioni sulla colonna 2, riga 3 - colonna 4, riga 5 - colonna 6 e così via...

Se seguo passo passo questo processo riesco a calcolare sia i termini di  $[S]$  che di  $[L]$ . Questo è il metodo del partizionamento della matrice.

Questi sono i due metodi <sup>diretti</sup> utilizzati nel mondo FEM (analisi strutturale), esistono poi infiniti altri metodi.

Nella realtà si ha a che fare con matrici di centinaia di migliaia di termini e dunque l'algoritmo cambia, è complesso e lavorato per blocks.

Con i metodi diretti sappiamo fu dell'urto qual'è il n° di operazioni da fare.

I metodi indiretti, sono metodi iterativi, noi lo sappiamo, sono in funzione del test di convergenza.

## Metodi INDIRETTI: Metodo di Gauss - Seidel

Con riferimento alla 1° equazione, impongo che tutte le incognite,  $x_2, x_3, \dots, x_m$ , siano pari a zero e ricavo il valore di  $x_1$ . Tale valore è una prima approssimazione della soluzione.

Passo alla 2° equazione, impongo  $x_3, x_4, \dots, x_m = 0$  e calcolo  $x_2$  tenendo conto del valore di  $x_1$  calcolato nel 1° passo della 1° equazione.

Varo avanti così fino alla fine. Ottingo gli  $m$  valori di  $x$  di 1° approssimazione.

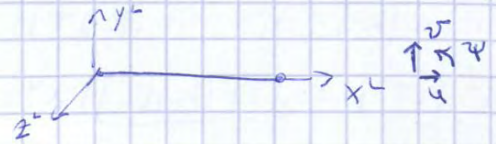
Ripeto il processo mettendo però, con riferimento alla 1° eq. me i valori di  $x_2, x_3, \dots, x_m$  NON pari a zero ma pari ai valori di 1° approssimazione e procedo come prima andando a valutare un secondo vettore di  $m \times$  di 2° approssimazione.

Quando mi fermo? Arrivato all' $n$  iterazione mi calcolo il termine  $C_{n-d}$  e vado ad esaminare questo vettore di resto. Se piccolo  $\Rightarrow$  ho raggiunto in modo soddisfacente la mia soluzione. Il resto mi misura dunque l'accuratezza della soluzione.

10 MARZO 16

La matrice di rigidezza della trave è espressa con riferimento a un sistema di riferimento locale

$y^L z^L$  = assi principali centrali d'inerzia



Hyp: lavoriamo nel piano

Avremo lo spostamento  $u$  e  $v$  e una rotazione  $\psi$

Associate a questi qd abbiamo le relative forze:  $F_x, F_y, M_z$

La matrice di rigidezza permette di esprimere il legame tra FORZE e SPOSTAMENTI.

$$[K] = \begin{bmatrix} | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

Stessa linea e auto della rigidezza al taglio.

$$[F] = [K][u]$$

Per strutture reticolari:

Per risolvere il telaio in ogni ciascun elemento devo conoscere il legame forze-spostamento non solo nel sistema locale ma anche nel sistema globale

1° operazione: passare dal sistema locale a quello globale

$x_L - y_L \rightarrow$  sist. locale

$x - y \rightarrow$  sist. globale

$\phi$  = angolo d'inclinazione trave e dunque tra i 2 sistemi

Presso 1 punto, la legge nei due sistemi.



l'asse  $z$  globale e locali coincidono e dunque  $M_z = M_{zL}$

$$F_{yL} = AD$$

$$\begin{aligned} AD &= AB - DE & p76 \\ DE &= HC \\ AE &= AC \cos \phi \end{aligned}$$

$$F_{xL} = F_y \cos \phi - F_x \sin \phi$$

Analogamente trova  $F_{xL}$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRICE DI TRASFORMAZIONE  $\rightarrow$  collega sistema locale al globale

Per i momenti ho il coeff 1 perché coincidono per sistemi locale e globale

Supponiamo di dividere nodi liberi e vincolati:

$$|F| = |k| |u|$$

$$\left| \frac{F_i}{F_i} \right| =$$

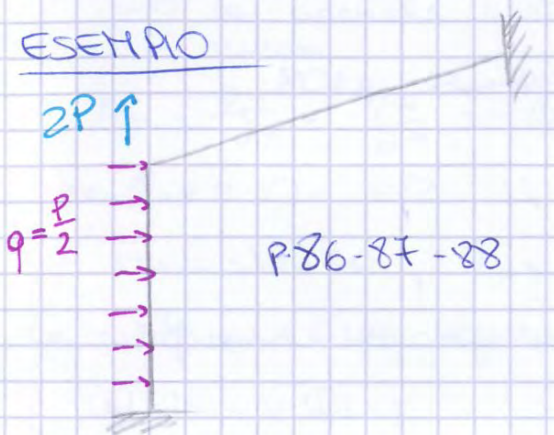
①  $du^4$

$|F_i|$  <sup>reazioni vincolari</sup> che ricavo, è figlio degli spostamenti dei nodi liberi e dunque del processo deformativo  $(u, \dot{u})$

Se ho aste direttamente connesse devo considerare anche le reazioni vincolari di incastro perfetto nel sistema globale da sommare alle reaz. vincolari del processo deformativo  $(F_i)$

reaz. vincolari  $\rightarrow$   $|R_v| = |F_i| + \sum_e |R_i^e|$   
 È un contributo importante per calcolare correttamente le reazioni vincolari.

ESEMPIO



Dati

Soluzione problema svolto passo per passo con i calcoli  $\rightarrow$  Verifica

ESEMPIO 2  $\rightarrow$  Telaio bicicletta p 89

Programma in FORTRAN scritto. Modificare perché non considera le aste connesse.

Per il passaggio da BI a TRI-DIMENSIONALE devo considerare altre 3 componenti di spostamento  $w, \theta_z$  (torsionale),  $\theta_y$  (Rot. flett.)  
 $\rightarrow$  La matrice di rigidezza diventa una  $12 \times 12$  considerando anche il coeff di deformabilità e taglio - p 105

Basta solo aggiungere i termini mancanti cambiando il momento d'inerzia - È semplice

È più complesso passare dal sistema locale e quello globale

$\rightarrow$  Vedi disegno.

Suppongo di avere l'asta 1-2 su  $x-y$  globale



$X_c, Y_c =$  assi principali centrali d'inerzia

Rivolo l'asta attorno  $Y_c$  in modo da riportarlu sul piano  $x'-y'$  temporaneo  $\rightarrow$  Rivolo di un angolo  $\alpha$   
 L'asta arancio è ancora  $E$  e  $y^g - x^g$

Rivolo semplicemente il sistema di riferimento globale di un angolo

# MODELLO TRIDIMENSIONALE ROTOCUCIETTA

→ telaio spaziale

Abbiamo risolto la TRAVE secondo EULERO - BERNOULLI

Nella nozione di rigidezza è stato considerato il coeff di deformabilità a taglio. Nella realtà posso usare diverse tecniche per definire la def e taglio oltre a bernoulli tra, quali:

## → TEORIA DELLA TRAVE DI TIMOSHENKO 111

Bernoulli: 1 normale alla linea meda prima della deformazione, continua ad essere normale anche dopo la deformazione alla linea meda

Timoshenko: non è detto che la derivata della deformato coincida con la derivata della non deformato  
 → la normale resta tale ma non rispetto alla linea meda.

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\varphi + \frac{dw}{dx}$$

se  $\gamma_{xy} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{dw}{dx} \rightarrow$  Eulero - Bernoulli

Per Timoshenko  $\gamma_{xy} \neq 0$

La rotazione è figlia della derivata e della distorsione angolare

$$u(x) = -y \varphi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\varphi(x) \quad E_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{d\varphi}{dx}$$

Da SAC:  $du = E_x dx = -y d\varphi$

$$dx = \rho \cdot d\varphi \quad \rho = \text{raggio curvatura}$$

$$E_x = -\frac{y}{\rho} \quad \sigma_y = E E_x = -E \frac{y}{\rho}$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx} \rightarrow \boxed{\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M}{EI}} \quad \text{Eq. diff. de governo la trave di Eulero-Bernoulli}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dw}{dx} - \gamma_{xy} \right) = -\frac{M(x)}{ES}$$

$\gamma_{xy}$  = distorsione figlia delle coordinate  $x, y = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}$

Hyp:  $\gamma_{xy}$  = costante lungo la sezione e uguale al valor medio.

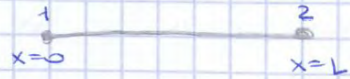
$$\gamma_{xy} = \frac{I}{KAG} \Rightarrow$$

Scuo l'energia elastica di deformazione della trave

$$U = \frac{1}{2} M d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ ES \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + KAG \gamma_{xy}^2 \right] dx = \dots$$

4) sono funzioni approssimate

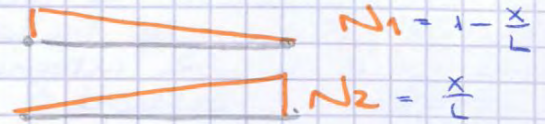
$$\begin{cases} w(x^e) = N_1 w_1 + N_2 w_2 \\ \psi(x^e) = N_1 \psi_1 + N_2 \psi_2 \end{cases}$$



$$w(x) = N_1 w_1 + N_2 w_2$$

C.C.:  $\begin{cases} \textcircled{1} w(0) = w_1 \\ \textcircled{2} w(L) = w_2 \end{cases}$  } Devo determinare la funzione di  $N_1, N_2$  tale per cui in tutti in queste situazioni

Questo è l'unico andamento che posso avere  $N_1$  e  $N_2$  affinché siano soddisfatte le C.C.



Ho solo 2 parametri nodali. Tra 2 punti non posso altro che 1 retta.

⇒ Posso pensare di dare delle approssimazioni degli spostamenti.

**INT = FUNZIONI DI BASE o DI FORMA**

$$[u] = [N] [u^e]$$

L'energia elastica di deformazione dell'elemento:

$$U = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^L ES \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx}_{\text{termine flessionale}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^L KAG \left( \frac{dw}{dx} - \psi \right)^2 dx}_{\text{termine a taglio}}$$

Riesco a definire la matrice di appross rigidità a partire da approssimazioni in termini "quadrati" di spostamento come detto in un'osservazione nella 2<sup>a</sup> lezione.

$$\frac{1}{2} [u^e]^T [k_e] [u^e]$$

$$\frac{1}{2} [u^e]^T [k_e] [u^e]$$

In genere queste matrici si risolvono in modo non esatto.

Supponiamo di volerle risolvere esattamente:

→ Integro esattamente la matrice di rigidità:

Trovo  $k_f, k_t$  →  $[K] = k_f + k_t$  per l'elemento

Posso trovare la matrice di flessibilità in funzione di

$$E = \frac{12ES}{KAGL^2}$$

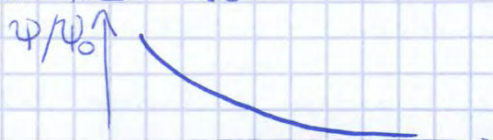
$$\rightarrow [C] = [k^{-1}] = \frac{E}{E+1}$$

•  $E \rightarrow 0$  →  $k \rightarrow \infty$  la trave non si deforma più. Questo è un assurdo.

Questo risultato lo ottengo a partire dall'integrazione esatta.

N.B.:  $N_1$  e  $N_2$  sono indipendenti tra loro

L'integrazione esatta non funziona.



hyp:  $J, k =$  righe del sistema corrispondenti all'equilibrio in direz  
 $x$  e  $y$

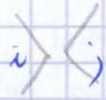
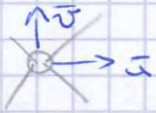
$$u_i = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} v_i$$

→ Geometria, sistemi lineari

### VINCOLO GENERALIZZATO INTERNO

Ho 2 strutture separate interconnesse in 1 punto

Nodo  $i$  e  $j$  sono distub e ciascuno fa parte del proprio telaio



Il problema è lo stesso di prima e per i 2 nodi ho:

$$\begin{aligned} u_i &= u_j = \bar{u} \\ v_i &= v_j = \bar{v} \end{aligned}$$

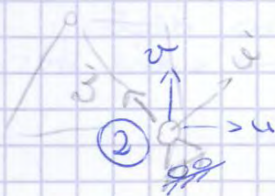
⇒ Come prima è geometrica, uso 1 combinazione lineare e mi ricostruisco il sistema

11.03.2014

### VINCOLO GENERALIZZATO 03/04/50

È possibile introdurre condizioni di vincolo sia sulle forze che sugli spostamenti.  
 Le condiz sugli spostamenti sono sulle incognite del sistema e quelle sulle forze sono sui termini noti.

Esiste anche un altro sistema.



Chiamiamo  $u'$  e  $v'$  ma nella realtà abbiamo  $u$  e  $v$

$$|F'|^q = |K'| |u'|^q$$

Passare dal sistema globale al locale è semplice notazione e si fa usando un legame di seni e coseni.  
 Con riferimento al caso in esame abbiamo  $v' = 0$   
 Questa è una condizione cinematica - la sposto sulla dimensione strutturale e dunque riferendomi ai 5 nodi.

Trovo la matrice  $|R|$  che collega il sistema globale e un sistema locale ( $u', v'$ )

Riesco dunque a scrivere  $|F'|^q = |K'| |u'|^q$

Tutti i nodi sono nel sistema globale tranne il nodo 2.  
 Questo sistema è in parte legato alle coord globali e in parte alle coord locali.

Questo metodo evita pasticci :) - Uso dunque le tecniche classiche per imporre le condizioni incoder: rig globale, termini 1 sulle diagonali, scambio righe - righe.

Il problema può essere risolto dando un valore di rigidità elevato tra i due nodi ma per non riscontrare problemi.

2° modo: Gestisco l'eccentricità. I 2 nodi sono correlati dalle eccentricità  $e_x, e_y, e_z$ .

$\{F_p\}$  = forze trave

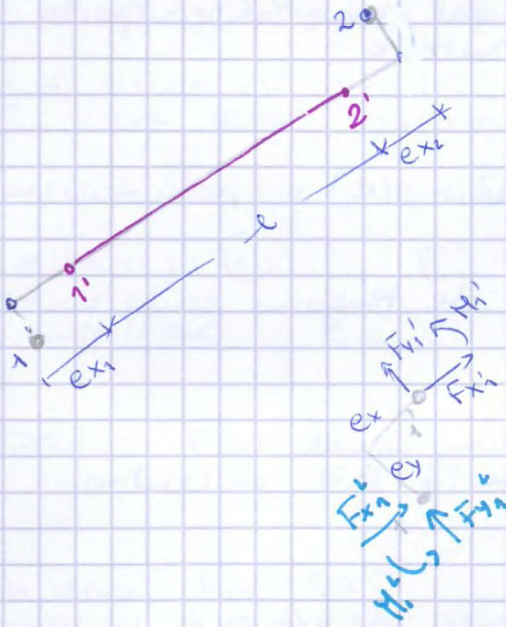
Le forze si riferiscono al nodo tramite la matrice d'eccentricità.

$$\{F\}_i = [e] \{F_p\}$$

forze nodo

Questa è la strada per gestire il problema.

### TRAVE NEL PIANO



- Trave effettivamente flessibile

Sistema locale  $\rightarrow$  si riferisce a 1'-2'

Con riferimento al sist locale:

Devo scrivere il passaggio delle forze tra l'estremità flessibile e quella rigida.

Per le forze si scrive e scrivere il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -e_y & e_x & 1 \end{bmatrix}$$

Da semplici considerazioni di trasposizione lego le forze sull'estremità rigida e quelle sull'estremità flessibile.

Le due relazioni possono essere messe insieme e si ottiene la matrice di trasformazione.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} =$$

Considerazioni analoghe si hanno per gli spostamenti. Trovo il legame tra gli spostamenti dei nodi rigidi e quelli dei nodi flessibili.

Per la parte flessibile costruiamo tutto:  $\{F\} = [k] \{U\}$

$[k]$  matrice di rigidità della parte flessibile



Con le equazioni che ho adesso posso risolvere solo incastri.

Devo trovare qualche tecnica per svincolare la rotazione tra l'elemento 2 e l'elemento 3.

Devo far rilasciare dei gdl all'asta. Questo è un altro problema che trattiamo con riferimento alle matrici di rigidità dell'elemento.

### RILASCIO dei gdl

$$[F^v]^T = [k] [u^v]$$

$u_v$  = gdl vincolati  
 $u_r$  = gdl rilasciati

$u_r$  = ROTAZIONE NODO

$$\textcircled{1} \begin{bmatrix} F^v \\ F^r \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} k_{vv} & k_{vr} \\ k_{rv} & k_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^v \\ u^r \end{bmatrix}^T$$

Scambio righe e colonne per riportarmi in queste condizioni.

$F_r =$  forze sui gdl rilasciati = 0  
 Il  $M = 0$  se rilascio la rotazione e metto la cerniera

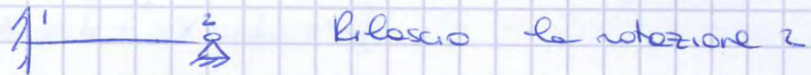
I nodi rilasciati si correlano ai nodi vincolati attraverso la matrice  $G_0$  che posso calcolare.

$$u_r = G_0 u_v$$

Ritorno in  $\textcircled{1}$  :  $F^v = k_{vv} u^v + k_{vr} u^r = k_{vv} u^v + k_{vr} G_0 u^v$

→ Trovo  $\bar{k}_{vv}$  e  $[F^v]^T = [\bar{k}_{vv}] [u^v]^T$

### ESEMPIO PRATICO



Ho una  $k_{vv} = 5 \times 5$   
 $k_{rr} = 1 \times 1$

Trovo  $k_{rr}$  e  $k_{rr}^{-1}$ ,  $k_{vr}$  e  $k_{vr}^{-1}$

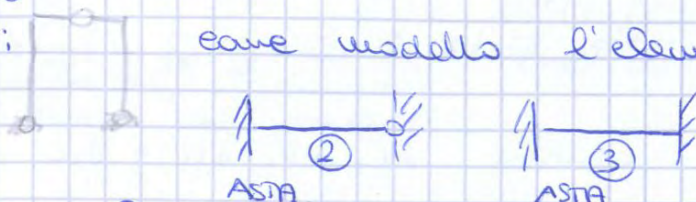
$$G_0 = [k_{rr}]^{-1} [k_{vr}]^T$$

Trovo  $k_{vr} \cdot G_0$

Somma  $k_{vv}$  e  $k_{vr} G_0$  → Trovo la matrice di rigidità che correla le forze locali agli spost dopo aver rilasciato i gdl voluti.

Posso rilasciare gdl!

Trovo all'esercizio: come modello l'elemento  $\textcircled{2}$  e  $\textcircled{3}$ ?



Perché modello l'asta  $\textcircled{3}$  incastro - incastro? Altrimenti il nodo 3 non ha rotazione vincolata.

PLV: ①  $d_{11} X_1 + d_{12} X_2 = 0 \quad \rightarrow X_1 = - \frac{d_{12} X_2}{d_{11}}$

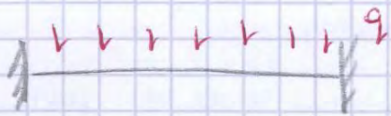
②  $X_2 = \varphi \cdot \left| \frac{d_{11}}{d_{11} d_{22} - d_{12}^2} \right| \rightarrow K_2$  rigidezza e seguito delle rotazioni in 2.

$\Rightarrow$  ①  $X_1 = - \frac{d_{12} X_2}{d_{11}} = \varphi \cdot \left| \left( - \frac{d_{12}}{d_{11} d_{22} - d_{12}^2} \right) \right| K_1 =$  termine indotto sul nodo 2.

Riesco a ricavare anche ciò che succede nel nodo 1 e seguito della rotazione nel nodo 2  $\rightarrow$  termini indotti.

$\rightarrow$  Abbiamo risolto il problema delle rotture di rigidezza.

In modo analogo devo valutare i carichi equivalenti.



Valuto le reazioni all'incastro e seguito del carico uniformemente distribuito  $q$ .

$f_{10} =$

$f_{20} =$

Riesco tutto senza problemi. Anche per travi a sezioni variabili ho le soluzioni senza dividere in troppi carichi la trave. Ho un n° limitato di nodi.

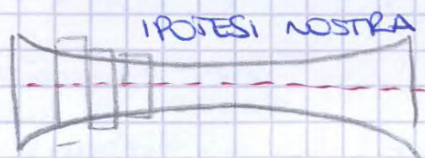
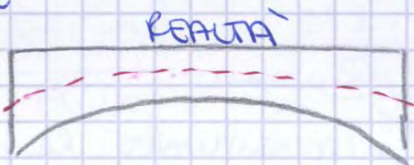
Osservazioni:

$\rightarrow$

$\rightarrow$  Abbiamo usato  $k$  per  $\frac{1}{k} \rightarrow k \Rightarrow$  rilascio gde

$\rightarrow$  Nel caso di variazioni di rigidezza uso questo metodo approssimativo.

Il problema è che ragionando io ho supposto una linea mediana dritta.



Sta a me vedere se porta gravi conseguenze quest' approssimazione.

$\rightarrow$  Se ho una trave curva e devo affrontarla con le conoscenze che ho ora il problema dell'arco, posso solo spezzare l'arco in carichi e fare una poligonale che porterà ad avere cuspidi in corrispondenza delle giunzioni tra i carichi.

Nelle travi curve il problema assiale non è disgiunto dal flessionale. Non ho l'ortogonalità dell'energia (energia indotta dai termini  $u^T \theta$  è zero).

$\rightarrow$  faccio una doppia approssimazione:

- da continuo a cuspidi
- 

Se non ho altri strumenti per avere una % d'errore contenuta quanto deve essere fitta la discretizzazione? Dovrà avere che  $\alpha =$  angolo sotteso della trave minore di  $10 - 15^\circ$ .

Posso pensare di introdurre e trattare il campo di spost.  $h$  assumendo per questi delle approssimazioni con polinomi, che nel caso bi e tri dimensionale seguono il corso di Tartaglia.

Questa è l'impostazione da cui si parte per cercare di introdurre ciò che abbiamo visto fin ora lavorando con SdC.

Iniziamo a prendere l'elemento **MONODIMENSIONALE** **BECCA** parte II pag 103



Questo è caratterizzato da una funzione di campo generale:

$$\textcircled{1} \begin{cases} \Phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i \\ \Phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j \end{cases}$$

Ho 2 dati, le condizioni ai nodi  $\Phi_i$  e  $\Phi_j$ .

Con 2 e.c. che polinomio riesco a scrivere?

Riesco a scrivere un POLINOMIO LINEARE con  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  da determinare con le c.c. (vedi  $\textcircled{1}$ )

Si può vedere che il termine costante e lineare è necessario poiché con quest'insieme si descrive lo stato di def. in costante, con dunque necessari i primi 2 termini.

Determino  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  imponendo le c.c.

Ho 1 sistema  $\textcircled{1}$  con 2 incognite  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ :  $[\Phi] = [X][\alpha]$

$[X]$  = matrice dei parametri nodali, è invertibile

$$[\alpha] = [X]^{-1} [\Phi]$$

$\Phi_i, \Phi_j$  = Parametri nodali.

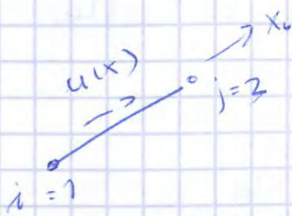
$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} x_j & -x_i \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{bmatrix}$$

$$[\Phi](x) = [X]^T [\alpha] = [1 \ x] \begin{bmatrix} x_j/l & x_i/l \\ -1/l & 1/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{l} (x_j - x) \Phi_i + \frac{1}{l} (x - x_i) \Phi_j$$

$$= \frac{1}{l} (x_j - x) \Phi_i + \frac{1}{l} (x - x_i) \Phi_j$$

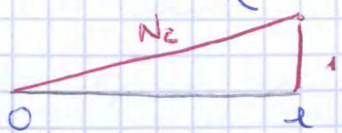
funzioni di forma LINEARI



$$N_1(x^e) = 1 - \frac{x^e}{l}$$



$$N_2(x^e) = \frac{x^e}{l}$$



Funzioni di forma per il caso dell'asta

$$u(x^e) = N_1 u_1^e + N_2 u_2^e$$

OSSERVAZIONI DI SdC:  $N = \sigma A = (EE) A$

$$\bullet \frac{d}{dx^e} u(x^e) = \frac{d}{dx^e} (N_1 u_1 + N_2 u_2) = \begin{bmatrix} \frac{dN_1(x^e)}{dx^e} & \frac{dN_2(x^e)}{dx^e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix}$$

Questa è una formula del tutto generale che può usarsi anche nei casi bi. e tri-dimensionali -

Parto da  $\sigma$  scritto come  $\sigma$  e  $E$

$$\sigma E dV = \frac{\sigma^2}{E} dV = \frac{M^2}{EJ} dV$$

### CARICHI EQUIVALENTI

Lavoro compiuto dai carichi distribuiti = Lavoro compiuto dalle forze concentrate di estremità.

$$W = \int_0^l p(x') v(x') dx'$$

Si trova

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ M_2 \\ Y_2 \\ N_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int \\ \int \\ \int \\ \int \end{pmatrix}$$

pag 109

### TRAVE SU SUOLO ELASTICO ALLA WINKLER



Terreno alla Winkler: le molle sono tutte indipendenti l'una dall'altra.

Se avessi solo la trave: l'eu elastica di def.  $\int \frac{1}{2} EI v''^2 dx^2$   
 l'eu. potenziale  $\pi_p = \int_0^l \frac{1}{2} EJ (v''(x'))^2 dx^2 - \int_0^l p(x') v(x') dx^2$

Con le molle:

$$\pi_{pf} = \int_0^l \frac{1}{2} (k_f v(x')) v(x') = \frac{1}{2} \int_0^l ((u')^T [K]^{-1} k_f [K] u') dx$$

Adiziamo i 2 contributi:

$$[k_f] = l k_f$$

Problema molto semplicemente e risolvere problemi di natura complessa.

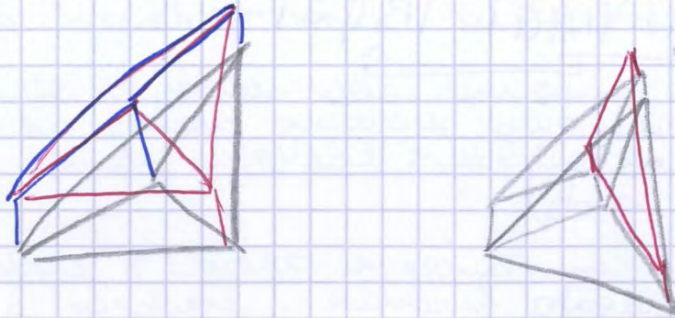
### c) TRAVE AD INERTIA VARIABLE (tapered beam)

$\alpha$  ed  $\alpha$  = parametri geometrici della variazione del momento d'inertia

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [N(x,y)] [\Phi] = b_1 \Phi_1 + b_2 \Phi_2 + b_k \Phi_k$$

Questa derivata è costante su tutto l'elemento ← OSS.

L'aver derivata cost su tutto l'elemento vuol dire che se immagino di avere domo o diviso in elementi di questo tipo:



- La derivata prima è costante

Posso sfruttare questo visto da 1 punto di vista formale di 1 caso strutturale?

Sì. Lo posso sfruttare nello studio di STATO PIANO DI TENSIONE e di DEFORMAZIONE.

①.  $(\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}) \neq 0$   $\sigma_z = 0$   
 Ho u e v.

②.  $E_z = 0$  ( $\sigma_z \neq 0$ )

Come studio il problema di STATO PIANO?

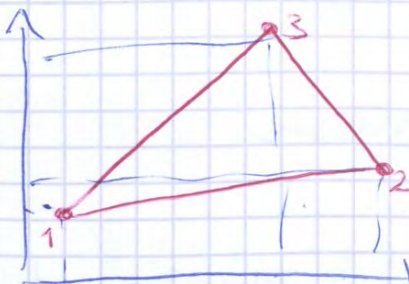
Sol C: 
$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

pag 127

$$[D] = [B][E]$$

con [D] costante e ricordo di tensione o deformazione piano

Suppongo di avere un elemento triangolare



$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y \end{cases}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}$$

$$[\alpha] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

[X] a ricerca delle c.c.

con e b c = inverto e trovo  $\alpha = [X^{-1}] [u]$   
 e quelli visti prima

# STATO TENSIONALE

$\sigma$  sono legate a  $E$  -  $E$  sono legate alle funzioni di forma  $\rightarrow$  sono legate a  $B$ .

Se ho rapido variaz di  $\sigma$ , lo devo cogliere attraverso una corretta discretizzazione della struttura.  $\rightarrow$  molto fitte

La mesh che sto usando deve tener conto dell'elemento che sto usando e dove ho elevato gradiente devo aumentare la discretizzazione dunque dipende anche dal problema meccanico.

Attraverso il concetto di approssimazione delle funzioni di campo, cerco e risolvere i problemi. La SDC non basta.

È questa l'approssimazione più semplice, forse da pensare di aumentare il n° dei nodi, ...

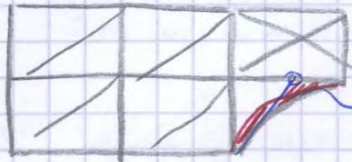
Questo elemento si dice

CST: CONSTANT STRAIN TRIANGULAR (Elemento triangolare a def. costante)

È riportato a codice di calcolo in FORTRAN

pag 148  $\rightarrow$  PIASTRA CON FORO

Ne studio il quarto



Errore di discretizzazione. INCONCEPIBILE  
Non posso pensare mesh che vanno fino del dominio

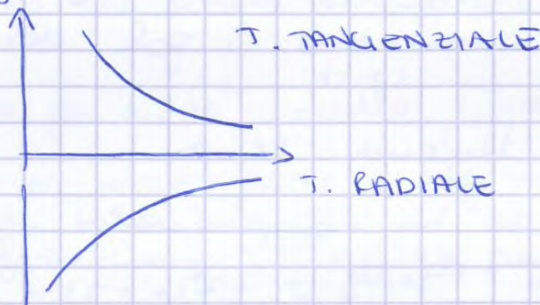
Nella zona forata ho il gradiente di tensione  $\rightarrow$  Rho di  $\epsilon$  e faccio elementi via via più grandi allontanando gli elementi intorno e perche zona  $\rightarrow$  ATTENZIONE.

Ho risultati dati da diverse discretizzazioni.  
Viene effettuato in 10 strisce: 0,4 per ogni striscia.

Nello spessore ho 3 tipi di discret.  
Se devo effettuare un'analisi di convergenza  $\Rightarrow$  devo avere all'interno della mesh tutta la mesh precedente.  
Infiltramento mesh.  
Se non contengo la mesh precedente NON POSSO usarla per arrivare a convergenza.

Nel 3° caso non ho regolarità gli elementi sono troppo stretti.  
Voglio elementi più regolari possibili.

Alla luce dei 3 momenti con affinamento a tensione radiale e tangenziale sono i risultati risultati.

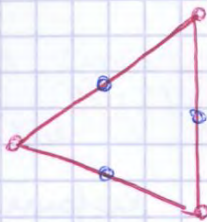


3 modelli spaziosi molto bene il risultato teorico  
linea continua = risultato teorico

L'elemento CST è estremamente povero perché in virtù del n° limitato dei nodi che ha consente di scrivere eq. n sul campo degli spostamenti estremamente limitate.  
Le strade seguite per migliorare sono:

① AUMENTO IL N° DEI NODI (pag 158 PARTE II)

Per ora utilizzeremo elem. triangolari con lati rettilinei.



Gli ulteriori 3 nodi sono scelti e metà del lato. De 3 passo e 6 gde.

Avrà 6 condizioni di parame nodali in u e 6 in v.

Devo rispettare il triangolo di Castiglione e avere problema lineare:

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2$$

Il campo di spostamenti ha forma quadratica e dunque quello delle def. n avrà andamento lineare (derivate degli spost. n).

Si parlerà di LST = LINEAR STRAIGHT TRIANGULAR

Sulla stessa strada c'è l'elemento di FEUPPA e 10 nodi. In ogni lato ho 2 nodi.



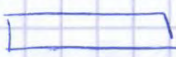
3 termini sono 10 e dunque mettendo i nodi a dist  $\frac{1}{3}$  del lato ho la necessità di aggiungere il 10° nodo e lo inserisco nel baricentro del triangolo.

Attraverso queste strade che è la COMPENSAZIONE STATICA della MATRICE DI RIGIDITÀ io tolgo dai piedi i nodi centrali -

### 9) CONFRONTO SOLUZIONI / ESEMPI PRATICI

Vedo 2 esempi

① Uso l'elemento CST Ho a trave povera con rapporto alt trave / luce = 1/3

Di questo modello esistono soluzioni teoriche (Focke / Griffiths ... )  
 trave appoggiata

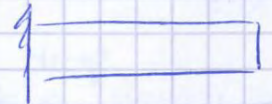
② Nel 2° caso ho una trave incastrata -

Se ho una sezione rettangolare come è l'andamento delle  $v$ ?

Anche per questo modello esiste 1 soluzione teorica (CARR)

Posso di discretizzare perché struttura con elementi diversi e non solo triangolari -

Confronteremo i risultati con quello di CARR



#### 1° ELEMENTO:


Elementi CST con mesh diverse -

Ho visto 3 mesh regolari



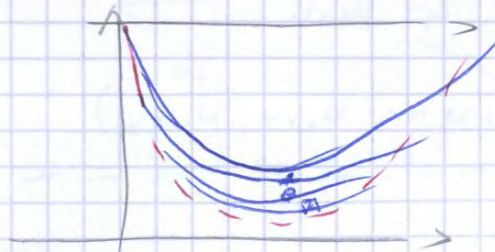
La mesh A non è parente di B e C -  
 Se discuto di infiltramento mesh la B è contenuta in C -  
 la A non è contenuta in C

Vedo la differenza dei risultati ottenuti.

LINEA CONTINUA: trave inflessa senza def. e taglio  
 " TRATTI: trave elastica  
 Ho altre 3 linee  mesh (a, b, c)

influenza tanto

Deformata



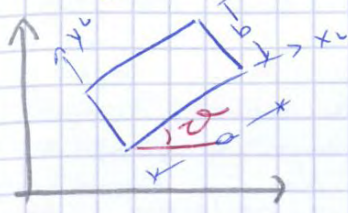
La 1° mesh che sembra ragionevole non lo è esattamente. Per avvicinarsi alla soluzione esiste con l'elemento CST deve avere 1 mesh di questo genere 341 -

Per un problema di questo tipo non posso usare mesh larghe



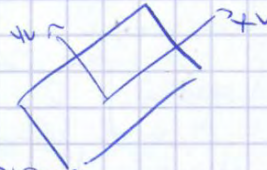
# ELEMENTO RETTANGOLARE

→ angoli retti, lati rettilinei



A differenza di prima, adesso definisco un sistema locale per l'elemento.

Potrei anche vederlo così:



Così posso dare l'approssimazione con riferimento al sistema locale. Per  $u, v$  ho 4 condizioni.

Ho  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  e devo aggiungere un quarto elemento che potrebbe essere sull'asse di simmetria  $x_0, x_y$ .

Si impone che gli spost. locali siano dati dalle coord. dei nodi per  $x$

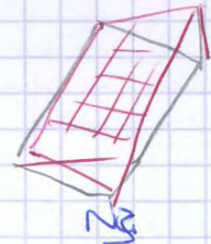
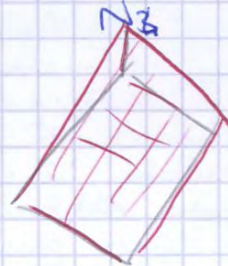
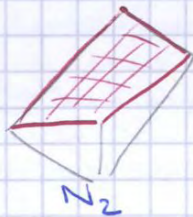
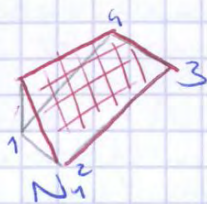
$$[u] = [x'] [a]$$

↓  
8 sp. nodali (2 per ogni nodo)

Invertito  $[x'] \rightarrow [x']^{-1}$  e calcolo  $a$

$$[u'] = [x'] [a] = [x'] [x']^{-1} [u'] = [N] [u']$$

È esattamente uguale a quanto visto. Adesso costruiamo solo  $[N]$



$$N_1 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$N_2 = \frac{x^2}{a^2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$N_3 = \frac{x}{a} \frac{y}{b}$$

$$N_4 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \frac{y}{b}$$

Sono delle **RIGATE**: se prendo queste superficie e le taglio con un piano  $\perp$  agli assi, l'intersezione tra il piano e la superficie è una **RETTA**.

Le funzioni di forma assommano queste forme. Valgono 1 con riferimento al nodo e 0 negli altri nodi.

Già è stato dimostrato da alcuni autori: Wilson, Taylor...

Nella realtà è possibile effettuare questa deformazione continuando ad avere gli stessi requisiti del metodo:

WILSON - TAYLOR      Peppi di SAP  
TAYLOR -              Peppi di NON SAP

Immagino di voler risolvere una trave

Si ipotizzano 3 discretizzazioni

La terza discretizzazione in realtà contiene la prima

Di questo problema conosco la sol. esatta  $c$  da lì posso dunque calcolare gli abbassamenti verticali  $A$  e  $B$  e la tensione in  $C$ .

In termini di abbassamenti ho valori molto discosti dalla realtà

Abb. in  $A \rightarrow$  disc. (d)  $\rightarrow$  la differenza è 30 su 600 (5-6%)  
Sulla stato tensionale NO

Att:

Dalla 1<sup>a</sup> mesh vedo che i risultati sono molto diversi dalla realtà.

CASO 2  $\rightarrow$  flessione



Si può sempre prelevare un elemento e si considera l'approssimazione di Taylor sul taglio.

Sono state analizzate 2 mesh che non consentono di verificare la convergenza perché l'una non contiene l'altra.

Con riferimento al nodo  $i$  e  $j$  si valutano spostamenti e tensioni rispettivamente.

Confronto i risultati con la teoria della trave che può far perdere posto considerare quella la trave.

Pseudo l'elemento base e lo confronto con quello modificato da Taylor e Wilson sul taglio.

Nota che i risultati non sono confrontabili con quelli dati dalla teoria della trave. Le cose migliorano se considero la deformabilità e taglio della trave.

Abbiamo risolto il problema. In questo caso si ma non è sempre così.

Questo è un problema povero. **12) ELEMENTI RETT. DI ORDINE ELEVATO**  
Posso renderlo ricco aumentando il n° dei gli, il n° dei nodi -  
fresco ed aumentare il grado della funzione approssimante la mia funzione di campo.

Con riferimento ai nodi, farò riferimento al triangolo di base come al solito.

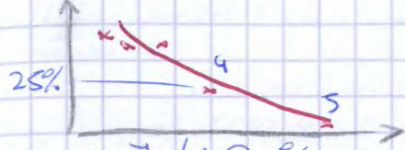
Considero 1 elemento del 1° ordine e 3° ordine.

1	u	u	3° ordine
Confronto			
2	elemento triangolare CST		
u	di Argyris		
u	rettangolo del 3° ordine		
u	triangolare CST u u u		
Soluzione teorica			

Nella realtà sta a noi scegliere che elem usare alla luce del problema che studo.  
QST  $\rightarrow$  Sono per lo spost.  
Q-1  $\rightarrow$  u u le tensioni

5 4 3 2 1 176

Con pochi 5 elementi costruisco la mesh e faccio il calcolo numerico confrontando il risultato con la soluzione esatta.



Errore di 7/10 % non sono accettabili.

La mesh deve essere tale da avere aspettativa tale da non condizionare il problema.

L'elemento deve essere più possibile regolare

## CONFRONTO TRA ELEMENTI DEL I e del II ORDINE

Stessa geometria struttura - Ho 6 mesh di elemento CST per confrontare i risultati - Vedo inoltre altre 6 mesh con elementi rettangolari - Sulla stessa struttura scelgo LST e faccio 3 mesh del II ordine e scelgo anche 3 mesh con elem del II ordine quadrangolari.

Ho il confronto dei risultati con la soluzione esatta

Considero elementi CST	→ tempo di calcolo	119
" " " rett. a 4 nodi	" " "	129
Triang a 6 nodi	" " "	131
rett a 8 nodi	" " "	146

La differenza è piccola in termini di calcolo e tempo - ma ho tante differenze in termini di risultati

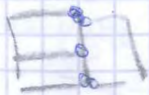
Ho anche un grafico oltre alla tabella per confrontare i risultati. Sta in termini di spostamento e di tempo.

## OSSERVAZIONI DEFINIZIONE DEL MODELLO p.181

È importante affiancare elementi che fanno parte della stessa famiglia

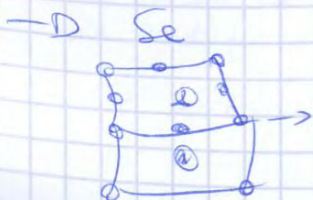


Atti: Non è detto che il polinomio approssimante gli spost nel tratto 2-3 coincida per i due elementi. Questo caso non è accettabile per la continuità degli spostamenti, → stesso sbagliando.



Anche questo caso non è possibile, non ho continuità di spost. ti perché in un lato ho appross quadratico e nell'altro lineare.

Dovrei definire gli ELEMENTI DI TRANSIZIONE per passare da 1 mesh all'altra.



Se l'elem 2 è quadrato e 1 è lineare → sul lato adiacente devo imporre tramite le condizioni di vincolo GENERALIZZATO che lo spostamento sia lineare su quel nodo anche per l'elemento 2.

Rappresento ... le soluzioni reali (curve continue) e la soluzione con elementi CST.

Bisogna anche usare per un problema analogo degli elementi rettangolari  
 Ho 2 mesh: la 1 con spessore d'angolo crescente e la seconda costante e pari a  $10^\circ$  nelle 2 direzioni.

Si riportano i risultati FEM e si confrontano con i teorici.

Per studiare lo stato piano di tensione di una "TRAVE PERPETUA" si usano sempre mesh con elem. quadrangolari e lineari.

Ho 1 paio di simmetria

Si riportano le soluzioni in termini di  $\sigma$  e livello dell'asse di simmetria. Ho anche l'andamento delle  $\tau$ .

Con riferimento alle mesh faccio un'osservazione. pag 191

### DEFINIZIONE DEL MODELLO p 181

Fatta una mesh, come lo numero in modo da ottenere la minima larghezza di banda possibile?

ESEMPLO:

- 1° in alto: n° nodi in orizzontale  $\rightarrow$  larghezza di banda 11
- 2° in alto: " " " " verticale  $\rightarrow$  10
- 3° figura: " " in modo particolare  $\rightarrow$  9
- 4° " : tecnica simmetrica di soluzione cerebellata  $\rightarrow$  8

L'ultima tecnica è quella che mi dà minima larghezza di banda da 11 passi a 8

$\Rightarrow$  Fatta la mesh nasce anche il problema di come numerare i nodi, con quale ordine.

Questo problema non nasce con un codice di calcolo pronto che ha qualcosa di preimpostato.

Abbiamo legato dunque campo di spost nel locale e i parametri nodali nel sistema globale

Ho u in termini di parametri nodali.

Deforni e Curvatore in scarto II sono legate al sistema locale alle componenti di spostamento

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ E_\theta \\ K_s \\ K_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & 0 \\ & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}$$

$|D|$  = Matrice di derivazione  
 $|N|$  = Funzioni di forma

$$|E| = |D| |u| = |D| |N| |\bar{u}| = |B| \quad |\bar{u}|$$

Con rif. al sist locale ho il legame tra  $GdS$  e  $E$ :

$$|F| = |D| |E| = |D| |B| |\bar{u}|$$

⇒ Dall'energia el di defor. dell'elemento e considerando che  $(K)$  us consente di scrivere  $|U|$  in term. quadratici degli spostamenti:

$$|K| = \int_A |B|^T |D| |B| dA$$

$|D|$  è una matrice in funzione di  $v$  e  $\theta$

Penso di particolarezzare la trattazione

PAU. 198 **ALZIO CILINDRICO CIRCOLARE ( $\phi = 0^\circ$ )**

Questo cilindro ha spessore piccolo

Studio un cilindro sottile dove ho altezza 6. L'estremità inferiore è vincolata e quella superiore è libera.

Viene suddiviso in 3 macroregioni alte 2. Le prime 2 restano uguali e la 3ª regione viene suddivisa in altre 3 diversi modi:

①



5 strati alti 0,2  
 $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{2}$

pag 201



10 strati 0,1



20 strati 0,05

All'estremità libera ho un carico radiale. Studio come si defor. questo reticolo radialmente.

La condizione di carico non influenza in termini di spostamenti la parte bassa del cilindro ma influenza solo la parte superiore

pag 202-203 →  $\Sigma$  rappresenta gli spostamenti della sola parte superiore

Questa stessa filosofia (cond. generalizzate) può essere usata anche per studiare **elementi di volume** - (pag 211 parte II)

Tra i più semplici ho il **TETRAEDRO**

Il tetraedro è l'estensione al 3D dell'elemento triangolare  
La funzione di campo risulta essere approssimata da

$$\Phi(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z$$

ho un termine in più -

Introduco rispetto al triangolo una dimensione in più -

Le  $\alpha$  si determinano imponendo i parametri nodali -

Dalle c.c. si trova  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  pag - 214

Nel denominatore degli  $\alpha$  non ho più l'Area ma il Volume dell'elemento

Trao le funzioni di forma che risultano analoghe a quelle dell'elemento triangolare.

La matrice  $B$  è proprio l'estensione al 3D dell'elemento triangolare

Così come per l'elemento CST, trovo

$$u = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \text{ in funz. di } (x, y, z) \text{ (} u \text{ è 1 termine ma } v \text{ e } w \text{ sono 2 termini)} \\ \bar{u} = \text{ spost. in } x, y, z \text{ espressi in funzione dei parametri nodali (3 per ogni nodo)}$$

Per il legame cinematico:  $[E] = [D][u]$   
 $\uparrow$   $u = [N][\bar{u}]$  funz. forma  $[N]$

$$[E] = [D][N][\bar{u}] = [B][\bar{u}]$$

La matrice  $[B]$  è formata da coeff. costanti -

$\Rightarrow$  Le  $E$  all'interno dell'elemento sono costanti all'interno dell'elem.

Essendo le  $\sigma$  legate a  $E$  dalla matrice di elasticità,

anche le  $\sigma$  risultano costanti -

$$\text{Ricavo: } u = \frac{1}{2} [\bar{u}]^T \underbrace{([B]^T [D] [B])}_K [u]$$

Estensione al 3D dell'elemento triangolare

Potrei far crescere il grado del polinomio approssimante e migliorare il calcolo -

Il problema del tetraedro è quello della realizzazione delle mesh

Dato un prisma, in un parallelepipedo quanti tetraedri ci sono al suo interno?

Dev'essere dei forti strumenti di controllo della mesh

# PIASTRE INFLESSE pag. 225

31. MARZO. 16

Sempre col problema delle coord. generalizzate affrontiamo:

- PIASTRE INFLESSO
- GUSCI

① Si è partito con lo studio delle piastre inflesse alla Kirchhoff (Sophie Germain, SdC II) dove la rotazione coincide con la deviazione piana dell'abbassamento.

Richiamo la trattazione

Le  $\epsilon$  sono legate a  $u, v$  spostamenti

$$|\epsilon| = z \cdot |2w| \rightarrow \text{contiene derivate seconde}$$

$z$  = asissa corrente, distanza tra piano medio e fibra considerata

Il legame  $\sigma - \epsilon$ :

$$|\sigma| = \frac{Ez}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} |2w|$$

In genere nella teoria delle piastre ci si correla ai momenti e non alle  $\sigma$ .

Con riferimento a Kirchhoff esiste l'estensione della teoria di Kirchhoff  $\rightarrow$  TEORIA DI HINDLIN -  
normale alla linea media.

Una retta dopo la def. ne resta tale ma non mantiene l'ortogonalità con la linea media.

È come per le travi dove abbiamo visto l'estensione della teoria di Bernoulli come teoria di Timoshenko - È solo visto in 2D ma è lo stesso.

Applicando la teoria dell'elasticità  $\rightarrow$  trovo le relazioni pag. 227  
Trovo che le rotazioni sono legate alle derivate dell. spost.  $w$ .

Per caso di Mindlin, in termini matriciali: trovo le  $E$  e le  $\gamma$ .

$|\epsilon|$ : riguardano il problema flessionale.

$|\gamma|$ : riguardano la def. ne trasversale e taglio.

pag. 229.

Quando dovrò considerare la def. ne e taglio nella piastra?  
Quando mi riferisco a  $K$  e prendo a  $H$ ?

In genere, nel caso di piastre omogenee e isotrope, mi baso su 2 parametri geometriche:  $L$  e  $t$

Se  $\frac{L}{t} > 20 \Rightarrow$  Piastra sottile  $\rightarrow$  Kirchhoff

Se  $4 \leq \frac{L}{t} < 20 \Rightarrow$  Mindlin.

Se  $\frac{L}{t} < 4 \rightarrow$  ho un elemento 3D - NO PIASTRA.

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \dots$$

Ho 3 relazioni  $w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$

Poiché  $x=0 \rightarrow$  le 3 relazioni si semplificano (pag 233)

All'interno delle 3 relazioni ho delle coord gen  $x$

$$\left. \begin{aligned} w &= \alpha_1 + \alpha_3 y + \alpha_6 y^2 + \alpha_{10} y^3 \\ D_x &= \alpha_3 + 2\alpha_6 y + 3\alpha_{10} y^2 \end{aligned} \right\} \text{Contengono gli stessi } \alpha$$

Con riferimento alle prime 2 eq. posso scrivere 4 relazioni e dunque posso ricavare 4 parametri nodali.

Con  $w$  e  $D_x$  determino 4 parametri.

$\rightarrow$  Non i 4 parametri nodali, conosco l'andamento di  $w$  e  $D_x$ .

Resta:

$$D_y = \alpha_2 + \alpha_5 y + \alpha_9 y^2 + \alpha_{12} y^3$$

Ho a disposizione solo 2 parametri nodali ( $D_{y1}$  e  $D_{y4}$ )

Ma ho 4 costanti da dover determinare.

$\rightarrow$  Non posso definire le 4  $\alpha$ , devo riferirmi anche ad altri parametri nodali.

Cio' vuol dire che  $\alpha_1, \alpha_5, \alpha_9$  e  $\alpha_{12}$  sono propri dell'elemento, l'elemento adiacente avrà altre valori di queste 4 costanti. Cio' vuol dire che non esiste continuita' nei lati. (pag 233)

Perché  $D_x$  funziona e  $D_y$  no? ( $D_y$  discontinuita')

Se sono  $\neq$  ad un lato e conosco i parametri nodali, la rotazione è definita poiché sono una cubica, come una linea \*

$D_y$  non mi dà continuità degli spostamenti.

Ma se tengo poiché si dimostra che ho convergenza verso la soluzione se raffino la mesh.

Elementi di questo tipo si dicono NON CONFORMI  
La convergenza c'è l'errore in termini di energia e spostamenti; non è detto si abbia anche la convergenza in termini di sollecitazioni. Vedremo che in realtà andrà bene.

Questo elemento è stato tra i più usati per le piastre e buoni risultati eccitabili per spostamenti nella realtà.

Mesh a, c, d  $\rightarrow$  di raffinamento, ma contiene l'altra b è per i fatti suoi.

La piastra è incastata.

Si riporta lo spostamento del punto centrale A, il momento in A, e il momento in C.

Rispetto alle soluzioni reali con l'affinamento della mesh ho una convergenza verso i risultati. pag 237.

Ho nelle curve dei salti  $\rightarrow$  Questi nascono dalle discontinuita' di momento e diminuiscono via via con l'affinamento della mesh.



Si dimostra che per elementi triangolari si necessitano 18 gdl per avere continuità (così come per l'elem. rettangolare ce ne vogliono 16 e per il quadrangolare 24).

Var autori hanno dato diverse approssimazioni di  $w$ .

a) elemento ADINI (macca  $xy$ )  $\rightarrow$  è 1 polinomio cubico (di solito ha 10 param, no 9)

b) TOCHER 1

Se l'elem. è usato in un quadrato, non riesce a risolvere perché  $[K]$  non è invertibile.

c) Lo stesso Tocher ha proposto un elemento con 4 nodi e 10 gdl  $\rightarrow$  il polinomio approssimante ha 10 parametri.

Ho un caso e proprio polinomi o cubici con 10 param.

Tutti questi elementi in ogni caso non soddisfano la continuità (o meglio la soddisf. negli spostamenti ma non nelle derivate)

d) Vissier vuole avvicinarsi alla soluzione con l'uso di 6 nodi (pag. 244).

Copri vertici ha 3 gdl e in vertice di ogni nodo ha altri nodi (3 nodi opposti).

Per questi nodi scegliamo come parametri l'abbassamento e la deviate normale.

NB: I lati sono sempre rettilinei.

e) Elemento a 6 nodi con 21 parametri nodali.

3 vertici: 18 parametri, 6 per nodo

3 nodi intermedi ai lati: prendo la deviate normale.

Questo è un elemento performante.

Senza il limite della gestione fisica del problema, ho 6 gdl per ogni nodo.

Quando vi è un parametro nodale, devo poter associare e questo un senso fisico - (non so per altri elementi associare le condizioni al contorno).

Questo elemento funziona bene e garantisce tutta la continuità. pag 245  $\rightarrow$  si riporta in esempio di piastra.

In genere non uso elementi triangolari per la piastra, si preferisce usare elementi con un n° di gdl limitato ma costruiti in un certo modo  $\rightarrow$  ELEMENTI HCT pag 246

$\rightarrow$  HCT 12

$\rightarrow$  HCT 9

Questi elementi partono dall'idea di suddividere l'elemento in 3 sottotriangoli

Se considero la stessa piastra non più incastrata ma appoggiata:  
 → secondo grafico pag. 254

Nel caso di carico concentrato, la soluzione più discussa è quella di Timoshenko (carico di più se la piastra diventa incastrata) 255

Sulle piastre bisogna stare attenti.

Se abbiamo la teoria di Kirchhoff e passò alla teoria di Mindlin, esse però allo studio dell'energia di def. ne considerano anche la deformabilità e taglio, non che nascono problemi analoghi a quelli de viscosità, nella teoria di Timoshenko e nell'elasticità piana - pag. 256.

Bisogna controllare la nascita dell'instabilità nel problema.

Nel mondo delle piastre, come potrei in qualche modo capire se con l'elemento che sto studiando ho dei questi problemi?

Si dimostra che c'è un INDICE  $C_b$  = Coefficiente di Bloccaggio e Taglio o indicatore di bloccaggio.

Si definisce  $C_b$  come rapporto del n° di equazioni.

$$C_b = \frac{N_{eq}}{N_{kt}} \quad \text{pag. 257}$$

Se  $C_b = \frac{3}{2}$  sembra non ho nessuna dimostrazione in contrario che mi dice che ho dei problemi di shear se  $C_b = \frac{3}{2}$ .

Se  $C_b = 1$  purtroppo ho dei problemi di bloccaggio e taglio - Certo.

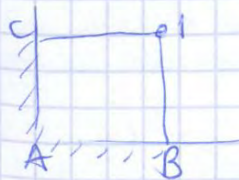
Per  $1 < C_b < \frac{3}{2}$  devo discutere

Con la teoria di Mindlin aggiungo la parte di deformabilità e taglio  
 $k_T(\quad)$  p. 256

p. 257. Il vantaggio di avere elemento rettangolare. La struttura è composta da 2 elementi - Voglio lavorare alla Mindlin  $\Rightarrow$   $\gamma$  è legato alla rotazione. Posso considerare le rotaz. indipendenti dell'abbassamento - Se che le rotaz. hanno certe funzioni approssimate

Considero  $w, \varphi_x, \varphi_y$  indipendenti tra loro con coord. generalizzate le diverse tra loro.


$$\left. \begin{matrix} w(x,y) \\ \varphi_x(x,y) \\ \varphi_y(x,y) \end{matrix} \right\} \text{Approssimo il campo di spost.}$$



Solo il modo  $\gamma$  è libero

$$\Rightarrow w = \frac{xy}{L^2} w_1 \quad \varphi_x = \frac{xy}{L^2} \varphi_{x1} \quad \varphi_y = \frac{xy}{L^2} \varphi_{y1}$$

Sono  $\gamma$  in funzione di derivata di  $w$


 Come entra in gioco nella deformazione delle lastre  
 questo elemento  
 È completamente bloccato dalle condizioni vincolari  
 ⇒ energia di def. = zero.

Nella mesh A invece anche quella zona entra in gioco nel campo di deformazione.

→ **FARE ATTENZIONE** nel gestire le mesh

p. 263 → Questo problema di realizzazione di mesh è estremamente complicato se ho flessione-torsione.

Ultimo elemento HTC

16/16 → Soluzione corretta (linea tratteggiata)

Con la mesh 1, l'HTC si discosta troppo.

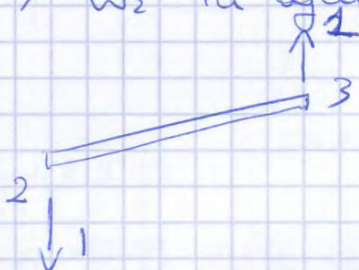
DKT = Kirchhoff discreto, lo vedremo

Con la mesh 2 guadagno qualcosa in performance

Nel caso 2 la mesh è diretta come le tensioni, viceversa nel caso 1.

È la mesh che può nascere contributi di rigidezza se nella realtà non c'è.

$w_3 \neq w_2$  in ogni caso - ti aspetterei  $w_1 = w_2$  perché ho 2  
 travi uguali (2 si abbassa, 1 si alza)  
 La mesh non è simmetrica e  
 genera una dissimmetria nella  
 soluzione.



→ È importante la simmetria

- ① C'è solo l'ovveramento della mesh provoca diversi risultati
- ② la dissimmetria della mesh provoca dissimmetria nei risultati. la mesh deve rispettare la simmetria

Sono 2 aspetti delicati.

pag. 264

pag. 265 → Non fare mai elementi di questo tipo:

meastro - maestro



L'ideale è fare mesh di tipo isotropo.

Nelle lastre in genere ho elementi **NON CONFORMI**. Perché nella realtà l'elemento si usa e funziona lo stesso? Si dimostra che l'elemento può essere sottoposto ad un test, il **PACHTEST**, che se superato ⇒ può essere utilizzato l'elemento.

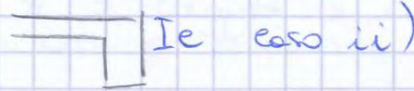
Nel pach test, l'elemento assume una forma geometrica ed è in condizioni particolari. Se per esempio un elemento quadrangolare supera il pach test in forma rettangolare ⇒ dovrà usarlo solo in questa forma, altrimenti non funziona.

I carichi visti non valgono solo per le piastre ma sono generali.  
 Ho riportato un programma che utilizza il BFS16: elemento a 4 nodi con 16 g.d.l.

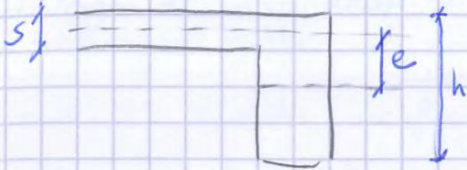
## ESEMPIO PIASTRE NERVATE 289

In questo caso ho la combinazione di un elemento piastra con un elemento trave.

È possibile ottenere la soluzione del caso A o B. (i) Se sono in ii) ⇒ Usa elementi di tipo beam che e tutti gli effetti hanno una certa eccentricità:



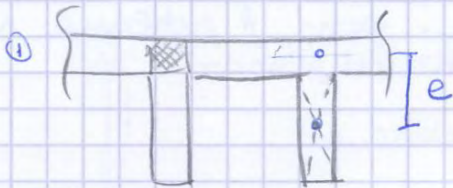
Quanto vale e?



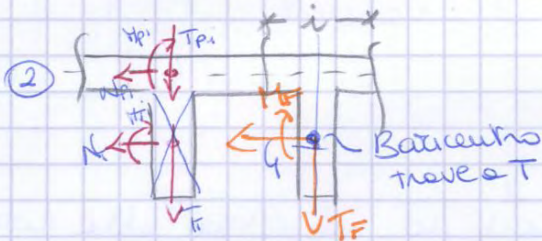
Non è  $\frac{h}{2} - \frac{s}{2}$  perché altrimenti avrei una sovrastima di rigidità. Considero 2 volte la stessa cosa.

$$\Rightarrow \frac{h}{2} + \frac{s}{2} = e \quad (1)$$

Devo progettare la trave a T (2)



Con riferimento allo schema (1) dovrò poi riportare le forze nello schema (2) considerando le dovute eccentricità.



Devo dare una discretizzazione e redire una mesh coerente con la struttura, dunque senza sovrapposizione delle rigidezze.

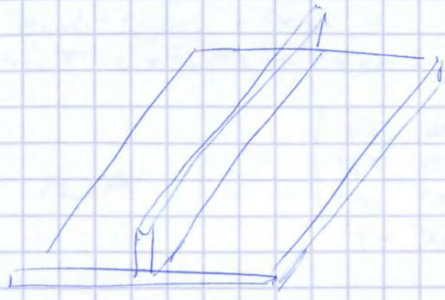
Esiste anche un'altra soluzione

Studio il problema in quel modo e poi restituisco i risultati in quel modo (1) la restituzione è sull'elemento B

All'esterno, i progetti devono essere assicurati, STC = Service Level of Control sono assicurazioni e pago il premio in funzione dell'affidabilità del progetto.

La seconda è una strada adottabile da STC esteri

### Definendo dei vincoli generalizzati



È la stessa cosa grazie al controllo.  
Come risolvo il problema di  $D_2$ ?  
In questo caso il problema  $D_2$  è delicato

Una piastra o un guscio non ha nessuna rigidezza rispetto a  $z$

Per problemi di questo tipo devo considerare questi problemi

Devo tener in ballo le cond. generalizzate.

Un caso che si vede meglio:

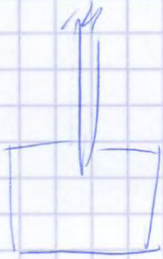
guscio + trave incernata sulla piastra - Le sollecitazioni sono il momento torcente

Il carico torsionale sulla trave finisce lì e non si trasmette al guscio

Gli elementi si accoppiano con i vincoli

generalizzati

Prevedo: 3 componenti e dico che mi serve così



Parte III

PAG. 3

27 APRILE 14

La teoria dell'interpolazione

Con riferimento alla sua funzione basta usare la teoria d'interpolazione basata sui POLINOMI DI LAGRANGE.

In genere se ho derivate di ordine superiore al primo e preferisce usare l'interpolazione.

L'approssimazione di Lagrange si basa sul concetto di approssimare la funzione stessa.

Data una funzione  $u(x)$ , ipotizzo di conoscere il valore di questa in determinati punti.

$\{N_i\}$  = lettere polinomi di Lagrange

Si tratta del prodotto di tutto

Le funz. di Lagrange godono della proprietà che  $N_{ij} = \Delta_{ij}$  delta di Kronecker tale 1 nel punto d'interesse - 0 altrove

a) CAMPO LINEARE

$$N_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

$$N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

f. di Lagrange

b) CAMPO QUADRATICO

$\Rightarrow$  Ho bisogno di 3 punti (NB - In Lagrange, i punti sono tra loro equidistanti -  $\rightarrow$  IMPORTANTE)

c) CAMPO CUBICO

Ho 4 espressioni di N

Tutto ciò si usa quando si approssimano direttamente le funzioni di campo e non ci si preoccupa di approssimare le sue derivate. In caso contrario invece, ci riferiamo al

POLINOMI DI HERMITE

Invece di voler studiare solo 2 punti di stazione ( $i=1,2$ )

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} H_{i,k}^{(N)}(x) \cdot \Phi_i^{(k)}$$

$\Phi_i^{(k)}$  = derivata k-esima della funzione di campo nel punto i

$H_{i,k}^{(N)}$  = funzione di Hermite.

⇒ La base di Eul. Bern risponde all'approssimazione di Hermite con continuità della derivata prima.

Per chi si vuol avventare usano anche le funzioni di ordine superiore.

⌈ A partire da questa base d'approx posso pensare di costruire direttamente le funzioni di forma. → p. 11

Con riferimento agli elementi monodimensionali, se lavoro con Lagrange riesco solo ad approssimare la funzione con polinomi del 1° grado con 2 punti di stazione.

Nel caso lineare, parlare di Lagrange o Hermite è lo stesso.

Se voglio un campo quadratico, mi servono 3 nodi.

Dalla base di Lagrange questi punti devono essere equidistanti tra loro.

Attraverso questa strada, do un'approssimazione solo di  $\phi$  e non delle sue derivate.

L'elemento cubico può essere visto in 2 casi:

→ lo vedo nella base di Lagrange ⇒ mi servono 4 funzioni, 4 condizioni

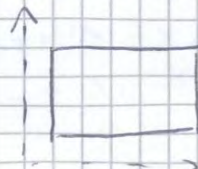
→ posso approssimare oltre alla funzione di campo, anche la sua derivata. In questo caso ho solo 2 punti di stazione e le funzioni di forma sono 4

Per gli elementi unidimensionali, con questa approssimazione, posso direttamente le funzioni di forma, senza passare attraverso le coordinate generalizzate.

Le stesse tecniche possono essere usate nel campo BIDIMENSIONALE:

### ① Elemento rettangolare

lavoro con i polinomi di Lagrange.



L'approssimazione che voglio studiare è

bi-lineare: in  $x$  e  $y$

$$N_i(x, y) = N_i(x) \cdot N_j(y)$$

↳ Prodotto di 2 funzioni lineari

Il biquadratco è composto da 9 nodi. A pag 16 si riportano alcune funzioni di forma.

Il biquadratco ha 6 termini invece che 3 e il problema è un po' più complesso.

pag 15

Le forme polinomiali del genere si usano per stati piani e per le piastre generalmente si usano le funzioni di Hermite. Sempre con l'uso di elementi rettangolari vedo dove studia il problema della piastra inflessa con 4 nodi e 6 parametri nodali. Come visto la scorsa settimana la scelta del BFS16, un elemento conforme con continuità della derivata anche.

Utilizzo pol. di Hermite: 16  $\Rightarrow$  Siamo in presenza del BFS16. Se invece del polin. di Hermite solo nella derivata prima, uso quelli nella derivata seconda...

$\leadsto$  Cerco di abbandonare l'idea di approssimare le funzioni di campo con polinomi e lo approssimo direttamente con l'interpolazione tramite Lagrange o Hermite.

### SISTEMA DI RIFERIMENTO INTERNO $\downarrow$

p. 22 Ci riferiamo adesso ad un sistema di riferimento interno all'elemento stesso, locale, che mi permette di fare delle considerazioni pag. 26

#### A) ELEMENTO QUADRIANGOLARE

Partiamo da un elemento con campo lineare

$$\phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

Posso pensare di indicare il punto P interno generico tramite delle coordinate  $L_1$  e  $L_2$ .

$$L_2 = L - x_1$$

$$L_1 = x_2 - x = L - L_2$$

} Adimensionalizzato

$$\frac{L_1}{L}$$

$$\frac{L_2}{L}$$

$$\frac{L_1}{L}$$

$$\frac{L_2}{L}$$

} Trovo le funzioni di forma  $N_1$  e  $N_2$



Operare in questo modo ha vantaggi e svantaggi.

La tecnica dell'interpolazione può utilizzarsi, non solo per le funzioni di campo, ma anche per la geometria dell'elemento (evitando così geometria rigida).

Attraverso la tecnica d'interpolazione è dunque possibile utilizzare 2 tecniche. - LAGRANGE  
- HERMITE

In genere le riferiamo sempre alle coordinate naturali.  
⇒ Da ora in poi, ci riferiamo e faremo di forma definite nel dominio  $\xi(-1; 1)$ .

Abbiamo visto gli elementi rettangolari e sia per problemi mono che bi-dimensionali abbiamo visto la approssimazione solo con riferimenti e domini rettangolari.

Per avere elementi triangolari -

Per elementi triangolari vale il discorso della geometria dell'area e coordinate d'area:

Un punto interno al triangolo può essere visto in termini di aree di triangoli ottusi.

È possibile oppure riferirsi alle aree adimensionalizzate.

$$L_1 = \frac{A_1}{A}$$

$$L_2 = \frac{A_2}{A}$$

$$L_3 = \frac{A_3}{A}$$

$L_1, L_2, L_3$  sono aree che variano tra zero e 1.

Definito qualunque punto  $P$  trovato da  $L_1, L_2, L_3$  sono dei pari.



Un punto generico può essere espresso tramite una relazione matriciale

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

Questa relazione è stata già vista nelle lezioni/def. in piano.

Lavorare con le coord. d'area è semplice per gli elementi triangolari poiché gli integrali si sostituiscono con formule lineari.

Se  $L=0 \Rightarrow$  la funzione vale 1

$$N_1 = L_1(2L_1 - 1)$$

Così si calcolano le altre  $N_2, \dots, N_6$ .

pag 43: di fianco vedo rappresentate le funzioni  $N$  approssimate

$\Rightarrow$  Usando Lagrange in elem. Triang. vedo e rappresentare

le funzioni di forma approssimate direttamente

Il problema può anche studarsi per il campo cubico,

valgono le stesse formule, ovvero  $m=3$ .

Risultati a pag. 45: 287.

Vi ricordo che parlare di  $L_1 = \xi_1$  è lo stesso.

pag 40  $\rightarrow$  ho l'elemento cubico nella rappresentazione classica di Lagrange.

È anche possibile utilizzare funzioni di forma che contengano le derivate.

Quale problema nasce in una formulazione di questo tipo?

(Quando lavoro in termini di coordinate interne?)

Se formulo il campo di spostamenti in termini di  $\xi$ : quale problema nasce?

Si va ad esprimere le funzioni di campo in termini di  $\xi$ : variabile adimensionale. Quando studiate i vostri parametri,

per esempio la deformazione, so che  $\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$

Se voglio derivare una funzione di  $\xi$  rispetto a  $x$ , devo sapere come  $\xi$  si correla a  $x$ !

Devo costruire una correlazione tra  $x$  e  $\xi$ .

Da una parte ho la semplicità d'approccio, dall'altra ho questo problema.

NO lezione

08/APRILE/2014

In realtà non ci interessano gli spostamenti ma da questi ricaviamo le deformazioni e attraverso le leggi costitutive calcoliamo le tensioni.

" In un problema PIANO, mi interessano 3 deformazioni

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Nota il campo di spostamenti, da queste relazioni riesco a ricavare le deformazioni e attraverso la matrice dell'elasticità trovo le tensioni.

$$\underline{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \underline{D} \cdot \underline{\epsilon}$$

$\sigma_z = 0$  STATO PIANO DI TENSIONE

$\epsilon_z = 0$  " " " DEF. me ( $\epsilon_z \neq 0$ )

Tutto ciò (D) è legato alle caratteristiche dei materiali e al tipo di problema che sto studiando. Evidente in gioco in modo diverso le approssimazioni in N.

Dato un problema FEM, scelto un elemento (es. triangolare) posso usare 2 strade per migliorare l'approssimazione:

- ① Aumento l'ordine del polinomio approssimante il campo di spostamento
- ② Infitto la mesh

Att: Devo comunque avere continuità nell'interfaccia tra due elementi.

Lo spostamento di un lato dell'elemento, dipende esclusivamente dai nodi iniziale e finale, dunque essendo il lato comune a 2 elementi, viene automaticamente soddisfatta la continuità degli spostamenti. Questo è un requisito molto importante.

La matrice di rigidezza dell'elemento:

$$[K] = t \int_A [B]^T [D] [B] dA$$

È semplice se  $B$  costante.

Altrimenti è più semplice lavorare con coordinate diverse  $\xi, \eta$

### B) ELEMENTO BIDIMENSIONALI (TRIANGOLARE) (coord. adim.)

Definisco  $L_1, L_2, L_3$ .

Fissate  $x, y$  in un punto, individuando 3 sottotriangoli e dunque 3 aree e anche  $L_1, L_2, L_3$ .

La funzione di  $x, y$  posso definire  $L_1, L_2, L_3$ .

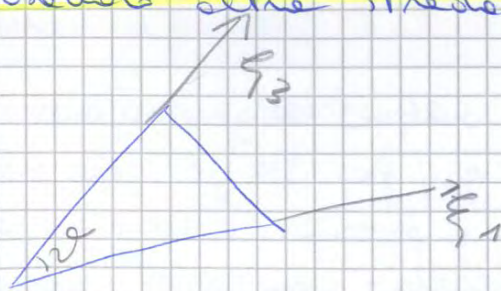
Passando da  $x, y$  a  $L_1, L_2, L_3$ , nel momento in cui devo derivare rispetto a  $x$ , devo prima rispetto a  $L_i$  e poi rispetto a  $x$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial L_i} \cdot \frac{\partial L_i}{\partial x}$$

Per la estrazione di  $[K]$ , si dimostra che date le  $L_1, L_2, L_3$ , il loro integrale è esprimibile come:

$$\int_A \xi_1 \xi_2 \xi_3 dA = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \dots$$

È possibile relazionare  $(x, y)$  di un punto  $P$  nel triangolo, usando altre strade.



$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} = \\ &= x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + L_1\xi_1\vec{e}_1 + L_2\xi_2\vec{e}_2 \end{aligned}$$

La legge di trasformazione da  $x, y$  a  $\xi_1, \xi_2$  si trova le funzioni  $\xi_1$  e  $\xi_2$  sono imparentate con  $L_1, L_2, L_3$ .

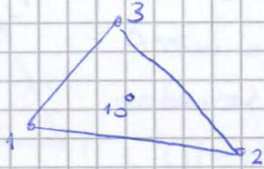
È possibile usare una similitudine tra i triangoli

$$\frac{\text{Area } P23}{\text{Area } 123} = L_1$$

Partendo da  $x, y$ , passo a  $L_1, L_2, L_3$ , dopo passo  $\xi_1, \xi_2$  centrati nel vertice 3 dell'elemento - Trovo

$$\xi_i = \frac{A_i}{A} = L_1$$

2) ELEMENTO CUBICO o 10 nodi, alto l'ord del polinomio  
 È possibile non enumerare il n° dei nodi ma considerare solo 1 nodo in più baricentrico e poi considerare le derivate degli spostamenti sia rispetto a x che a y.



4) ELEMENTO QUADRATICO (Def. me lineare)

Ho 3 ulteriori nodi sui lati del triangolo.

Le funzioni di forma possono scriversi sempre in funzione di  $x, y$  o  $\xi_1, \xi_2, \xi_3 = L_1, L_2, L_3$

Usando  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , sono  $u, v$  e ho 6 coefficienti incogniti sia per  $u$  che per  $v$ .

Non gli spostamenti, passo alle deformazioni.

Stato p.e. di def. me  $\Rightarrow$  l'interesse  $\rightarrow$  solo le 3 componenti nel piano  $xy$ :  $E_x, E_y, \gamma_{xy}$

Date le  $\xi_i$ , queste coincidono con le funzioni di forma dell'elemento triangolare a 3 nodi.

$B =$  Matrice delle derivate parziali rispetto a  $\xi$  delle funzioni di forma.

Dato  $t =$  spessore costante:

$$[k] = t \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega$$

dell'energia potenziale elastica

Posso ancora aumentare l'ordine del polinomio p.e. ad esempio al 5° ordine.

Ho 1 elemento che presenta 12 incognite per ogni nodo e dunque 36 g.d.l. in toto.

pag. 55 → parte III

reg.

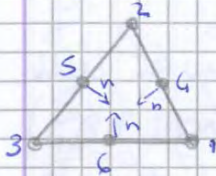
FORMULAZIONE DI ELEMENTI PIASTRA

15 APRILE 2016 p 55

1) ELEMENTO DI FEUPPA - CLOUGH (HTC 12)

Essendo differente la formulazione, il risultato può essere differente. (Capiamo con cosa sto lavorando) - lasciamo i dubbi e l'approccio da seguir

- HTC 12 → 6 nodi - la coord d'area  $\xi - \eta$



Assumo come funzione interpolante un polinomio cubico completo con 10 coord gen  $x$  e 12 gde

$$W = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^3 + \alpha_8 \xi^2 \eta + \alpha_9 \xi \eta^2 + \alpha_{10} \eta^3$$

Essendo il polinomio di tipo cubico servono 10 c.c. per definire  $\alpha$  riesco a scrivere solo 9 c.c.

→  $\alpha_5, \alpha_8, \alpha_9$  non sono univocamente definite.

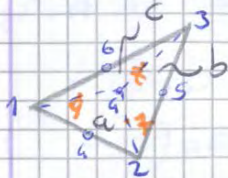
Ocorre introdurre un ulteriore spost. modello.

L'operazione proposta è considerare le derivate normali sui nodi intermedi dei lati.

p 54 Per esempio assumendo la derivata di  $w$  sul nodo 4 come decimo spostamento nodale, risolvo il problema (10° c.c.). Lo faccio solo su uno dei lati → Otengo continuità della funzione  $w$  solo su uno dei lati.

Perché allora non pensare di usare un elemento così formulato come base di un elem. conforme? A partire da questo elem, posso costruire un elem. triangolare bypassando in qualche modo questo problema della non continuità di  $w$  sui lati 1-3 e 2-3?

p 55 Parto da questo elem e vedo se riesco a costruire uno conforme.



Individuo nel triangolo originario  $G$  e suddivido questo in 3 sottotriangoli  $a, b, c$

Ogni sottoelemento nella realtà è coincidente con l'elemento appena visto.

Per esempio: considero il triangolo 1-4-3, il nodo 6 e quel nodo che mi garantisce la continuità degli spostamenti lungo il lato 1-6-3. Così vale anche per gli altri sottotriangoli.

In questo modo non veniamo ad avere un elem. dove ho come gde:

- spost. e derivate sui 1, 2, 3
- " " " " " 4
- derivate normali sui nodi c. s.c.

} 15 gde

È solito chiamare le  $N$  come  $f, g, h$ , soprattutto nelle piastre.  
 NB:  $\bar{W}$  è maiuscolo se la risposta dell'elemento è NON CONFORME.

Ho le  $f$  di forma in coord. d'area.

$f, g, h$  sono funzioni di  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  - Per le def. in area

$\frac{dw}{dx} \Rightarrow$  dovrà derivare rispetto a  $x$ .

$\xi_1, \xi_2, \xi_3$  sono le coordinate d'area:  $L_1 = \frac{A_1}{A} = \xi_1$

$$\xi_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \rightarrow \text{PIANO}$$

$\rightarrow a, b, c =$  costanti legate alle coord dei nodi

Questo elemento è noto come elem. di IRONS-ZIENKIEWICZ

Questo elemento può essere preso come base per la costruzione di un altro elemento. Partendo da questo estruendo un elemento così:  $\bar{W} = \bar{W}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) +$  CORREZIONE data dalle derivate normali su tutti i nodi da 1 a 6 (anche gli intermedi) e prendo come funz. base di riferimento  $f_i$ :

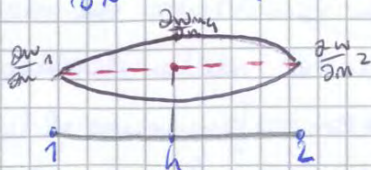
$$\bar{W} = W + \sum_{i=1}^6 f_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial m} \right)_i - \left( \frac{\partial \bar{W}}{\partial m} \right)_i \right]$$

In realtà abbiamo definito ancora solo 3 nodi  $\Rightarrow$  devo definire le 3 funz. di forma per i nodi intermedi aggiuntivi:

$$\begin{cases} f_4 = \frac{8A}{I_{12}} \frac{\xi_1^2 \xi_2^2 \xi_3^2}{(\xi_2 + \xi_1)(\xi_3 + \xi_2)} \\ f_5 = \frac{8A}{I_{23}} \frac{\xi_1^2 \xi_2^2 \xi_3^2}{(\xi_1 + \xi_2)(\xi_1 + \xi_3)} \\ f_6 = \frac{8A}{I_{13}} \frac{\xi_1^2 \xi_2^2 \xi_3^2}{(\xi_2 + \xi_1)(\xi_2 + \xi_3)} \end{cases}$$

Queste si valuteranno considerando (per es. per  $f_4$ )

- $f_i = 0$  nei lati del triangolo
- $\frac{\partial f_4}{\partial x} = \frac{\partial f_4}{\partial y} = \frac{\partial f_4}{\partial n} = 0$  nei 3 angoli
- $\frac{\partial f_4}{\partial m} = 0$  nei lati opposti
- $\frac{\partial f_4}{\partial n}$  è parabolico nel lato che contiene il nodo 4.



Con una formulazione di questo tipo l'elemento diventa a 12 gradi e risulta essere di tipo conforme

In termini matriciali  $[C_j^T] \{u\} = 0$  con  $j = 1, \dots, m$  per 1 lato

$j = n^o$  identificativo dell'interfaccia tra 2 elem.

$[C_j^T]$  = vettore riga contenente le  $\frac{f}{m}$  delle funzioni di forma

$\{u\}$  = spost. nodali di tutta la struttura

Sono  $m$  perché l'elemento che fue risulta conforme avendo assicurato con queste condizioni imposte la continuità -

$[C_j^T] \{u\} = 0$  per l'intera struttura -

A partire dalla  $[k]$  dell'elem non conforme, assemblo la  $[K]$  della struttura. È chiaro che l'energia elastica che ne risulta non è corretta perché ricovera apporto da un elemento non conforme - Posso pensare però di applicare il METODO DEI

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE -

Se parto dall'Energia potenziale dell'elem NON conforme e con questo metodo summo per ogni condizione scatta sui lati e partine dal propo:

$\lambda$  = Moltiplicatore di Lagrange, l'energia potenziale totale (non conforme + contributi di condizione imposte) è:  $\Pi = \Pi_p + \lambda^T [C_j^T] \{u\}$

Ne studio il minimo (principio di min. dell'En. Pot. generalizzato):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0 \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda_i} = 0 \quad \text{ho stazionarietà rispetto a } u \text{ e } \lambda$$

Si ricava: 
$$\begin{cases} [k] \{u\} - \{F\} + [c] \lambda = 0 \\ [c] \{u\} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} k & c \\ c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il  $\lambda$  può essere visto come delle forze nodali necessarie per riportare la continuità nella derivata (forma analoga una cuspidi, ma a riparte la continuità).

I alcuni codici si parla di ELEM. a 4 NODI con compatibilità imposta (si ottiene a partire dai moltiplicatori di Lagrange).

Anche qui il nodo 6 interno che fastidio che si può eliminare tramite condensazione statica -

- Dfs reso un elemento conforme con un altro tecnica -

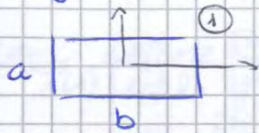
Dobbiamo ancora affrontare gli elementi di volume in coord. naturali ma li facciamo in fretta -

Anticipiamo ciò che dobbiamo affrontare -

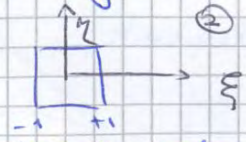


## C) ELEMENTO BIDIMENSIONALE RETTANGOLARE 28. APRILE 2014

Vediamo elementi di geometria regolare in coordinate naturali.  
Per gli elementi rettangolari, mantenendo forme regolari



Se lavoro con elementi



$\Rightarrow$  basta fare un cambiamento di scala per passare da ① a ② tramite funzioni  $\chi$  biettive.

Considero il problema ②.

Il problema visto in termini di polinomi di Lagrange permetterebbe di definire le funzioni di ~~forma~~<sup>campo</sup> con determinate funzioni di forma.

pag 69 - ELEMENTO BIDIMENSIONALE (Rettangolare)

per esempio per il biquadrico:  $N(\xi, \eta) = N(\xi) \cdot N(\eta)$   
(costruzione funzione di forma - prodotto)

Abbiamo il problema dei nodi interni.

Riesco a costruire nella realtà elementi simul-Lagrange senza nodi interni? Riesco ad avere un'interpolazione che mi da i nodi esterni senza quelli interni? Sì

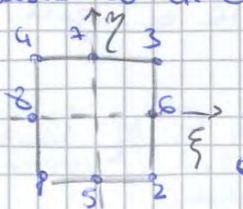
Elementi così fatti rientrano nel gruppo SERENDIPITÀ

Questa tecnica si basa sul costruire le funzioni per passi successivi (pag 70). Con questa tecnica è semplice eliminare i nodi centrali. Come posso pensare di operare in questo contesto? (Erito la condensazione statica)

L'altra faccia di questa strada è che il polinomio interpolante è più povero, mancano dei termini  $\Rightarrow$  risulta essere un elemento meno ricco.

Questa famiglia si fa con costruzioni di funzioni di forma create passo passo e secondo di noi che ho bisogno.

Considero un elemento molto semplice: EL. QUADRATICO.



La funzione di forma nel nodo 5 deve avere valore 1, 0 in 1 e 2 e deve avere

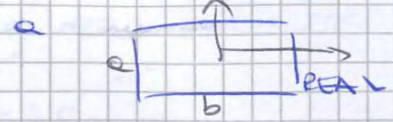
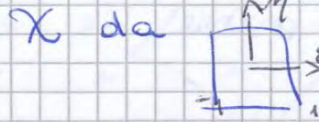
evidentemente parabolico:  $N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$

La matrice  $[B]$  può essere pensata scritta per i singoli nodi 1, 2, 3, 4  $\rightarrow$  Matrice  $3 \times 2$

$$[B] = [B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4] = [3 \times 8]$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{2z_i}{2L} & \frac{2z_i}{2L} \\ 0 & \frac{2z_i}{2L} \\ \frac{2z_i}{2L} & \frac{2z_i}{2L} \end{bmatrix}$$

È importante che si passi



Considero l'elemento lineare:



L'elemento non viene considerato nel suo stato flessionale

$\rightarrow$  Si aggiungono ...

Faccio una forzatura in una condizione ben precisa.

Avremo detto del patch test

Se faccio per questo elemento lo studio del patch test presso lo sapere in una condizione ben precisa  $\rightarrow$  l'elemento deve essere strettamente RETTANGOLARE.

Esempio membro - pag 79

Discorso analogo si può fare per elementi di tipo cubico dove consideriamo spost e derivate di spost risp  $x, y$ .

Discors. analoghi si fanno per la famiglia della serendita.

Gi siamo riferiti a elementi con stato presso ma il discorso è del tutto generale

pag 89-90 - Per l'elemento ACH

Posso riferirmi normalmente a coord  $z, F, M$

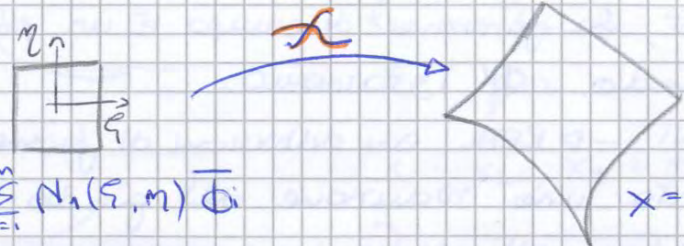
Quanto visto fin ora è servito a vedere come ingegneristicamente si è evoluto il mondo FEM.

Adesso ci riferiamo allo stato ideale PAR (tra + e -)

Il domo è sempre -1; +1

## ELEMENTI ISOPARAMETRICI pag. 127

Si definiscono elementi isoparametrici tutti quegli elementi per i quali la funzione di campo e quella geometrica usano la stessa funzione di forma



$$\Phi = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \bar{\Phi}_i$$

$$x = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \bar{x}_i$$

Ho il passaggio da un sistema a un altro:  $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \leftrightarrow \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix}$

Qual'entità matematica consente lo studio di  $\chi$  e mi consente di dire se questa è o tutt'glieffetti una funzione di Heury? È la matrice jacobiana della trasformazione quella che dice se possibile passare da  $x-y$  a  $\xi, \eta$  e viceversa.

Già vol dire che la forma dell'elemento real dovrà essere tale per cui la jacob della trasformazione in generale sia una  $\chi$  biettiva  $\rightarrow |J|$

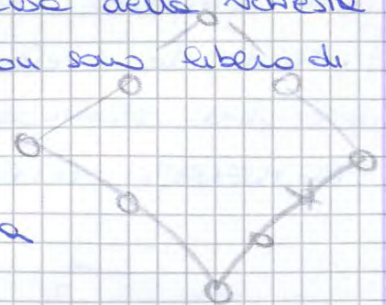
Vedremo come nella realtà la richiesta che faremo è che  $\det J > 0 \leftarrow 1^\circ$  PUNTO

$\rightarrow$  Dovranno studiare l'elemento REAL

Se ho un elemento quadrato con lati curvi, i nodi centrali possono essere messi ovunque? O è causa della richiesta sullo Jacobiano no? Nella realtà non sono libero di mettere ovunque il nodo centrale.

$\rightarrow$  L'irregolarità che posso avere è comunque controllata dalla richiesta  $\det |J| > 0$

Non posso fare proprio ciò che voglio se voglio che ciò che vale nel PAR valga anche nel REAL.

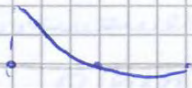


$\xi = -1 \quad 0 \quad +1$

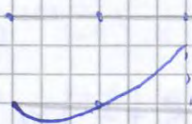
Applico l'elemento PARENT a diversi REAL element.

Entro di scrivere tante relazioni matematiche.

FUNZIONI DI FORMA



Le uso sia per la geometria che per le funz di campo



$x_1, x_2, x_3 =$  coord elem real

Posiziamo  $x_2$  al centro

$$(*) \quad x = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) x_1 + (1 + \xi)(1 - \xi) x_2 + \frac{1}{2} (\xi + 1) x_3$$

↳ approssimazione della geometria

$$\xi(x) = \frac{2x - x_3 - x_1}{x_3 - x_1} \quad \text{è lineare}$$

Ho le f. di forma nell'elemento parent e posso trovare una relazione lineare e quelle nell'elemento real il tutto funziona.

Posiziamo il punto 2 a  $\frac{1}{4}$ .  $\rightarrow x_2 = x_1 + \frac{1}{4}(x_3 - x_1)$  HYP 2

Dalla (\*), trovo la legge di trasformazione:

$$x = \chi(\xi) = \frac{1}{4}(3 + \xi) \dots$$

È di tipo quadratico

Non è più lineare

La relazione è quadratica in funzione di  $\xi$  e dunque non è più direttamente invertibile.

figura (c): vedo le funzioni di forma.

- Se le studio analiticamente vedo che  $N_1, N_2, N_3$  hanno nel nodo 1 tangente verticale. → "SINGOLARITÀ"

HYP 3: Ho posizioni ad  $\frac{1}{8}$

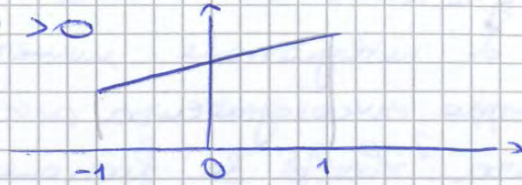
Ancora: peggio - figura (d) - Non ho più funzioni ma relazioni, in un intervallo ho che per un valore di  $\xi$  mi corrispondano due valori di  $x$ .  $\Rightarrow$  la  $\chi$  non è più una funzione, è tutt'al più biettiva.

Nella realtà il posizionamento del punto 2 sull'elemento è IMPORTANTE: non è detto ottenga una  $\chi$  biettiva

Devo richiedere  $J > 0$  all'interno del dominio.

Posso trovare l'intervallo t.c.  $x_2$  rispetto la condizione?

$$J^{(e)}(\xi) > 0$$



pag 140

$$\begin{cases} J^{(e)}(-1) = & = > 0 & \rightarrow x_2 > x_1 + \frac{1}{5} L \\ J^{(e)}(+1) = & = > 0 & \rightarrow x_2 < x_1 + \frac{3}{4} L \end{cases}$$

Trovo l'intervallo di posizionamento del punto  $x_2$

$$x_2 - \frac{L}{4} < x_2 < x_2 + \frac{L}{4} \quad \text{estremi esclusi! (vedi caso c)}$$

Non vanno liberi nel gestire la mesh.

Alle luce di questa impostazione faccio delle considerazioni: se voglio realizzare un elemento asta con endamento isoparametrico.

$$u(x) = \sum N_i(\xi) \underbrace{u_i}_{\text{lettore parametro nodale}}$$

$$D(x) = E \frac{du}{dx} = E \cdot \sum$$

$$[B] = \left[ \frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \quad \frac{dN_3}{dx} \right]$$

Ho l'elemento asta rettilineo a sez costante.

$$[K] = EA \int_{x_1}^{x_2} [B]^T [B] dx = \quad dx = J d\xi$$

$$= (\dots) = EA \int_{-1}^{+1} \left( \frac{1}{J} B^T \right) \cdot \left( \frac{1}{J} B \right) J d\xi =$$

$$= EA \int_{-1}^{+1} \frac{1}{J(\xi)} [B]^T [B] d\xi$$

Da qui vedo l'importanza che  $J > 0$ .

- No  $J = 0$  poiché è a denominatore (divergo  $\infty$ )
- No  $J < 0$  poiché otterrei termini di rigidità negativi

Fisicamente queste cose non avrebbero senso!

La Jacobiana della trasformazione:

$$[J] = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

→ la ricerca in termini di approssimazione

$$J = \begin{pmatrix} \sum \frac{\partial N}{\partial \xi} \cdot x_i^e \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

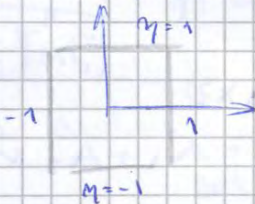
2) Calcolo l'inverso:

$$([J^e])^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix}$$

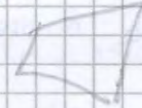
Sul bidimensionale gestisco il problema del passaggio mondo  $x$ , mondo  $\xi$  con la Jacobiana della trasformazione

At:  $x$  deve essere BETTIVA!

b.) ELEMENTO QUADRANGOLARE (lineare) (p. 145)



Non ho più il problema del rettangolo nell'elemento reale, può essere qualsiasi

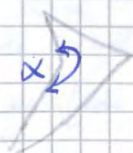


Usa la formula di prima!

Quali sono le condizioni da soddisfare affinché la  $[J]$  della transf sia definita maggiore di zero in tutto il dominio?

Si può far vedere: l'elemento con riferimento agli angoli deve avere certe caratteristiche

ⓐ



$\alpha > 180^\circ \rightarrow$  Questo elemento NON risulta accettabile

Richiedere  $J > 0$  all'interno dell'elemento vuol dire richiedere  $\alpha < 180^\circ$

Se  $\alpha \rightarrow 180^\circ \Rightarrow$  ho un movimento del sistema è come dire che  $x_i \rightarrow \frac{1}{4}$  nel probl. di prima

Ricavate le  $E$ , valute le  $\sigma$

$$\sigma = D E$$

→ Ricavo  $[k] = t \int [B]^T [D]^T [B] dA = \dots$

Questo sarà risolto numericamente.

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}$$

$\det J = A_0 + A_1 \xi + A_2 \eta$       Raccogliendo i termini.

A partire da questo voglio capire come studiando questo determinante è influenzato dalle distorsioni ~~...~~ e come la matrice di rigidezze è influenzata da tali distorsioni.

05. MAGGIO 2014

pag. 151

$$[k] = \iint \frac{1}{\det S} [B]^T [D]^T [B] d\xi d\eta$$

Come valuto  $[k]$  se l'elemento quadrangolare presenta una distorsione? Averano espresso:

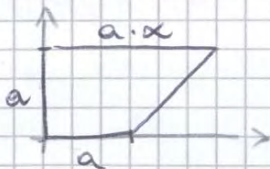
$$\det S = A_0 + A_1 \xi + A_2 \eta \quad p. 150$$

$A_0, A_1, A_2 = \text{cost}$  figlie delle coord. nodali

$$\frac{1}{\det S} = \frac{1}{A_0 + A_1 \xi + A_2 \eta} = \frac{1}{A_0} \left( 1 + \frac{A_1 \xi}{A_0} + \frac{A_2 \eta}{A_0} \right)^{-1} = \frac{1}{A_0} \left( 1 - \frac{A_1 \xi}{A_0} - \frac{A_2 \eta}{A_0} + \dots \right)$$

posso esprimere  $\frac{1}{\det S}$  in serie

Scelgo 1 elemento distorto:



$$A_0 = a^2 \cdot \frac{\xi + 1}{8}$$

$$A_1 = 0$$

$$A_2 = a^2 \cdot \frac{\xi - 1}{8}$$

Posso valutare e integrare anche numericamente.

Aumento l'accuratezza, aumentando  $n = n^\circ$  di Gauss.

Il valore di  $\xi$  mi dice come si distorce l'elemento.

$\xi = -1$        $\rightarrow n=1$   
 $\leftarrow n=3$

$$\begin{matrix} 0.23 \\ 0.25 \end{matrix}$$

(2 su 25 → errore di calcolo numerico)

$$|k_{aul}| = \int P' D B dV$$

$$\Rightarrow \left( \int_V P' D B dV \right) \cdot |u| = 0$$

Porto dentro l'integrale  $|u|$ :  $\int_V P' \overbrace{[D]}^{\text{COSTANTE}} \cdot [B] \overbrace{[u]}^{\text{COSTANTE}} dV$

$E = \text{COST}$  per definizione

$$\Rightarrow \int P' dV = |0|$$

$$t \int \int \int d\xi d\eta$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P' J d\xi d\eta = |0|$$

l'integrale (\*) diviene:

$$t \int \int \int d\xi d\eta = |0| \cdot PIS$$

Come impugno l'integrale = 0?

$\Rightarrow$  l'unico modo è dire che non c'è variazione e considero variazioni costanti all'interno dell'elemento potendo calcolare il loro valore nel baricentro.

Ho ritratto:

$$\int_{-1}^1 \xi d\xi = \int_{-1}^1 \eta d\eta = 0 \quad \text{che è VERO per DEFINIZIONE.}$$

Il trucco è valutare  $\frac{\partial x}{\partial \xi}$   $\frac{\partial x}{\partial \eta}$   $\frac{\partial y}{\partial \xi}$  e  $\frac{\partial y}{\partial \eta}$  con riferimento al baricentro.

Taylor: Ne consegue che posso integrare in  $|k|$  la parte NON legata a  $|P|$  in modo tradizionale e la parte con  $|P|$  valutabile nel baricentro.

In questo modo bypasso il problema dell'ircompatibilità.

Questo è l'elemento più semplice. Vedremo

**ELEMENTO QUADRANGOLARE** (famiglia delle pseudopipe)

È un elemento a 8 nodi.

Vedo l'elemento PARENT e REAL  $\rightarrow$  p. 159

$x \rightarrow$  direttori  $\Rightarrow |J| > 0$  in tutto l'elemento.

Si vede che è posta assunzione con i nodi

una serie di requisiti geometrici che l'elemento REAL deve rispettare (per far sì che  $J > 0$ )

Non vedremo la dimostrazione ma solo i requisiti.



Per bypassare il problema: nella realtà o noi interesse che effettuate la mesh, calcolate il risultato e in finché la mesh, io convergia al risultato.

A seguito dell'integr. esatta per elementi soffrono del problema dello shear lock. Per garantire la convergenza e bypassare lo shear lock usò un risultato ottenuto da 2 elementi Fix e Stiffing (Non lo dimostro)

→ Per avere convergenza della mesh NON è obbligatorio integrare esattamente il polinomio contenuto all'interno dell'energia ed. di def. ma è necessario integrare con una precisione minima di un certo livello. L'integrazione minima è legata al grado del polinomio contenuto nella funzione integranda.

Questo grado minimo ha un n° di punti inferiore rispetto a quelli che viene con l'integrazione esatta. La convergenza sarà più lenta magari, ma ci sarà. Così facendo, con un'integrazione di questo tipo, non ho più il problema dello shear lock.

→ INTEGRAZIONE RIDOTTA o REDUCE INTEGRATION p.162

L'integrazione esatta di certo ci porta allo shear lock.

Carichi equivalenti: è sempre la solite storie

Alcune considerazioni

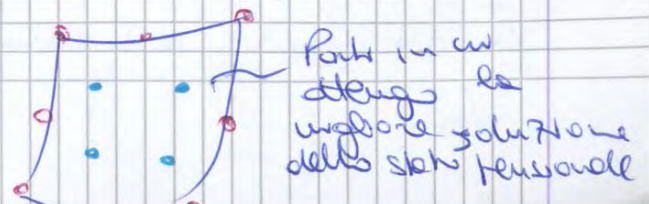
R165  $[B] = [D][B^*]/u$

Se  $D$  non si calcolano esatti

Si fa vedere che nella realtà lo stato tensionale si valuta con riferimento ad alcuni punti interni.

Il signor Barlow ha studiato questo problema. Le tensioni valutate nei punti di Gauss (p.161) sono più accurate rispetto a quelle in altri punti.

Trao i punti di Gauss



## ELEMENTO TRIANGOLARE ISOPARAMETRICO

a 6 nodi

p. 169 - 177

Negli elementi isoparametrici devo rispettare certe condizioni geometriche nell'elemento real  $\rightarrow$  altrimenti perdo la biettività di  $\chi$  e le condizioni  $J > 0$ .

p. 177: abbiamo 2 esempi

elementi a 6 nodi  $\rightarrow$  2 mesh

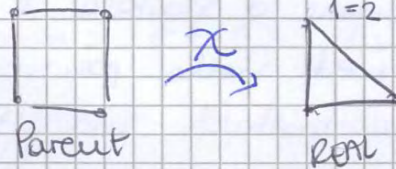
I risultati sono l'80% della soluzione teorica e sono stati ottenuti tramite integrazione esatta.

Attenzione ai rapporti di forma che influenzano i risultati

p. 178  $\rightarrow$

Nella realtà ...

p. 179



Ho che nell'elemento real, il nodo 2 coincide col nodo 1.

$$x = \frac{1}{2}(1+\eta)x_2 +$$

$$y = \frac{1}{2}(1+\eta)y_2 +$$

p. 180 Risultato:  $[B]^T = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$

Il nodo 2 coincide in 1  $\rightarrow \begin{cases} u_1 = u_2 \\ v_1 = v_2 \end{cases}$

$$E = \int u = \int N^T \bar{u} = [B^*]^T \bar{u}$$

$N^*$   $\rightarrow$  solo 3 (non più 4)  $\rightarrow N_1^*, N_2^*, N_3^*$

valori  $B^*$  facendo le derivate di  $N^*$  e noto che ottengo solo costanti.

$\Rightarrow$  Anche  $[E]$  sono costanti.

Otengo un elemento triangolare pari al classico CST partito dall'elemento isoparametrico quadrangolare e arrivato al triangolare.

Attn: Se i nodi 1 e 2 nell'el. REAL restano **DISTINTI**  $\Rightarrow$  hanno spostamenti diversi.

Così come ho trattato gli element di stat piano, si trattano gli element di VCUTE.

p190 **ESAEDRO A 8 NODI** HATONKINO Blich 8

Nella rappresentazione vedo rigate nello spazio.

Ho l'approssimazione dello spostamento e della geometria. Le funt di forme sono uguali se che l'elemento lo vedo nella famiglia di Lagrange se nella famiglia della serendipita.

Lo stato di deformazione: E

Non ho niente di nuovo rispetto al bidimensionale.

Passo solo da 2 a 3 dimensioni e dunque si aggiungono degli element:  $E_x E_y \gamma_{xy} E_z, \gamma_{xz} \gamma_{yz}$

Se voglio usare element così per rappresentare il problema della trave di Etero-Bernoulli, devo considerare il problema flessionale.

Tutti i problemi che avevo in 2D ce li ho in 3D.

I lati sono comunque rettilinei, non sono in grado di rappresentare problemi flessionali.

Anche per element così esiste la possibilità di averla con l'aggiunta degli element incompatibili. Posso avere 2 nodi incompatibili, ora ne ho 3.

- p193 **ESAEDRO A 20 NODI**

È solo della famiglia di serendipita (in Lagrange anche più nodi)

Questi element si usano tendenzialmente sui lati curvi.

Questi sono gli element 3D più usati.

Esistono poi gli element della famiglia di Lagrange che risultano essere molto più ricchi.

nte p196 **ESEMPI e CONSIDERAZIONI**

d31) Trave - Ho il grafico di come varia il rapporto tra lo spost. flex e il reale al variare della lunghezza. Trave mensole incastrate con forza all'estremità.

06. MARZO 14

p. 201 Con riferimento agli isometrici di volume si può effettuare lo stesso discorso fatto per gli elementi piani: il COLLASSO DEI NODI.

Posso passare da un parallelepipedo a base quadrangolare a un parallelepipedo a base triangolare.

⇒ Posso usare elementi a 8 nodi per costruire elementi con minor n° di nodi oltre verso questa semplice tecnica.

Viene fatto vedere il problema del tetraedro.

Si ritrovano gli stessi risultati di comportamento dove avevamo generato la funzione di campo e partire da un polinomio.

p. 199 Abbiamo visto lo studio di una piastra.

p. 205 Se volessi usare l'elemento a 20 nodi per lo studio di un guscio sottile ⇒ ho brutte sorprese.

L'elemento non risponde al guscio 2D. malcondizionato.

Posso migliorare i risultati partendo dalla filosofia del guscio, pensando l'elemento a 20 nodi semplificato:

- ① un n° di superficie (sup o inferiore) oppure
- ② un n° di superficie ~~alla~~ superficie media (facendo collassare superf. superiore e inferiore e dicendo che lungo l'altezza ho una variazione lineare)

Studio l'elemento come fosse una piastra.

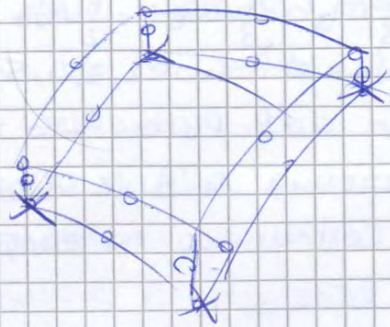
Posso pensare di usare lo schema a 8 nodi della famiglia della serendipità e trattarlo come piastra: con riferimento alla superficie media ho  $u$  e  $v$  nulli.

Le 3 componenti di spostamento le posso rappresentare così:

$$p. 206 \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{w}{D_y} \\ \frac{w}{D_x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \delta_x = \sum_1^8 N_i \cdot \bar{\delta}_x (\dots)$$

Parto da un elemento della serendipità e impongo queste condizioni. Con questo tecnico un nodo col avere solo 3 gdf e ogni nodo (riduco i gdf).

Nonostante l'elemento a 20 nodi dia buoni risultati come elemento PIASTRA non è così per i GUSCI SOTTILI.  
 Un'altra strada è quella di eliminare i 4 nodi inferiori ai vertici, passo da 20 a 16 nodi

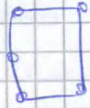


lo vedremo

È possibile costruire elementi particolari usando la tecnica di costruzione della fam. delle serendipità e ?

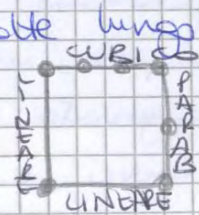
p.208 ELEMENTI DI TRANSIZIONE

Costruisco un elem. che passo da nod. parabolico su un lato e nod. lineare sull'altro → questo è un elem. di transizione

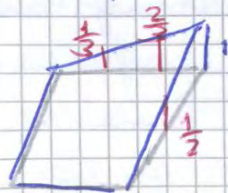


p.209 Suppongo di essere in questa situazione:

Devo costruire N t. c. siano soddisfatte lungo i 4 lati le leggi di spostamento che noi vogliamo:  
 Come posso pensare di arrivare a questo tipo di funzione di forma?

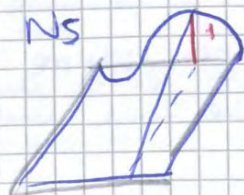


Immagino di partire da un bi-lineare:



Devo riuscire ad annullare i valori  $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$

Costruisco  $N_5$  che vale 1 in S e 0 negli altri



stessa cosa per  $N_6$  →



p. 213 Il problema è che con gli elementi di volume risulta difficile la corretta visualizzazione degli elementi di raccordo.  
 → Non tutti i meshatori sono in grado di gestire queste cose.  
 A volte vi dovete ricorrere all'inserimento di elementi di questo tipo.  
 Dovete avere meshatori che vi danno in dettaglio la vostra geometria e la mesh. Se avete meshatori che vi fanno vedere 2 elementi vicini staccati, analizzate i dettagli.  
 Da un punto di vista pratico gli elem. di transizione portano a dei problemi (anche se teoricamente è semplice) - A volte il meshatore è separato dal codice di calcolo.

p. 214 Detto questo chiudo il problema ricordando alcune cose sulle mesh:

Prima: 1° mesh corretta

2° " troppo rigida. (Il problema delle c.c. è serio)  
 (ho meshato quei bordi)

L'elemento che sto usando, si comporta bene con certe condizioni al contorno? Nella definizione di una mesh importante è scegliere elementi raffinati sì, ma fisicamente significativi.  
 Il bordo e le c.c. sono condizioni molto delicate.

→ Condizionare se la mesh che il tipo di elemento.  
 La mesh deve cogliere il comportamento strutturale e rappresentare correttamente i carichi.

La mesh è condizionata da tutti fattori.

Attenzione alle DISTORSIONI: meno distorge l'elemento, meglio è.

→ Evitare distorsioni elevate anche in zone lontane da ciò che voglio studiare. → Il problema della distorsione è delicato

Attenzione agli stati tensionali soprattutto nel 3-Dimensionale

Dovete perfettamente conoscere il codice di calcolo che state usando.

Abbiamo chiuso questa parte sugli isoparametrici.

Li vedremo ma in un'altra ottica alcuni elementi.

ELEMENTI ISOPARAMETRICI TRAVE

P219

Possano essere anche elementi a 3/4 nodi.

L'elemento parent può essere rappresentato da 3 nodi o 4 nodi.

Le funzioni di forma cambiano a seconda del n° di nodi.

per 3 nodi aggiungo  $N_3$  e cambio  $N_1$  e  $N_2$

per 4 " " " "  $N_3$  e  $N_4$  " "  $N_1$  e  $N_2$

Questi elem non si impiegano mai nel mondo delle travi sottili di ELLERO-BERANUVI. Se lo volessi fare

⇒ Devi usare elem a 3/4 nodi

Questo perché il semplice elem a 2 nodi NON rappresenta il problema flessionale.

Sapete già cosa è una trave alla Timoshenko: la deformazione è allo stato piano ma non è detto che la sezione resti normale a questa (ha una rotazione  $\psi = \frac{dw}{dx} - \gamma$ )

Si usano elem della Serendipità per travi alla Timoshenko.

Per il calcolo di  $[K]$  un riferimento sempre all'energia di deformazione: cioè sempre il contributo deformativo,

il contributo del taglio e dei carichi p e m

Dico che la trave è ISOPARAMETRICO: us le stesse funzioni di forma per spost e geometria

$$w = \sum N_i u_i$$

$$\psi = \sum N_i \theta_i$$

Il campo di spostamenti si può scrivere in modo

ABBASSAMENTI  $w = [N_w] \{u\}$

ROTAZIONI  $\psi = [N_\psi] \{\theta\}$

$\{u, \theta\}$  ordine prima gli abbassamenti e poi le rotazioni.

P220 Nell'espress dell'energia di def. entra in gioco le

derivate  $\frac{dw}{dx}$  e  $\frac{d\psi}{dx}$

At:  $N$  sono le funzioni di  $\xi$ . le derivate è in funz di  $x \Rightarrow$  entra in gioco la Jacobiana

P221 Scrivo  $[K]$

At: la matrice  $B$  contiene le derivate

## ELEMENTI A STRA ISOPARAMETRICO

p.224

È un elem. che in generale è un elem. pstr. secondo Mindlin.  $\nu D_N u$  è detto che le sez. rest.  $\perp$  alla superficie media.

E' un gioco il problema delle distorsioni angolari con riferimento ai piani  $xz$  e  $yz$ .

Con riferimento all'el. elastica si definisce la legge del contributo flessionale e a taglio. La totale può essere vista come somma tra i due.

p.225. Parto dall'elem. più semplice: a 4 nodi.

Si approssima la geometria con funz. lineari e per ciascun nodo ho come spost. l'abbassamento e le 2 rotazioni. In problemi di questo tipo siamo sempre interessati a  $[S]^T$  per correlare le derivate in  $x$  e quelle in  $\xi$ .

(Presenti nell'espressione dell'energia)

Sapendo che le componenti di spostamento  $u$  e  $v$  si correlano in funzione dello spessore  $z$  e delle rotazioni:

$$u = z \vartheta_y \quad v = -z \vartheta_x$$

⇒ Alla luce di questa analisi posso trovare lo stato di deformazione  $[E]$  come nella teoria dell'elasticità e riscriverlo in termini di  $N$  e dei parametri nodali.

6 kiana  $k_x, k_y, k_{xy}, \vartheta_x, \vartheta_y$

Le  $\vartheta$  le correla alle  $[E]$  tramite la matrice  $[D]$ .

p.227 Definito il vettore  $[E]_p = \begin{pmatrix} \epsilon \\ \gamma \\ \vartheta \end{pmatrix}$  lo scrivo in funz. delle derivate di  $N$  e dei parametri nodali:  $= [B \dots] [\bar{w}_i]$

Integrando trova  $H$  e  $Q \rightarrow$  vettore  $[\sigma_p]$

Le  $[D_p]$  si collegano alle  $E$  della matrice d'elasticità:

$$[\sigma_p] = [D_p] [E]_p = [D_p] [B] [\bar{w}]$$

Correla  $[\sigma_p]$  ai parametri nodali  $[\bar{w}]$ .

Nb. vogliamo studiare  $[k]$ : scavo l'energia (p.224) e

p.229 da cui nasce  $[k] = \int [B]^T [D] [B] dA = \iint \dots$



Vedevo gli elementi rappresentati.

Vedo molti secondo la teoria di Gauss quindi non danno prendere in diretta  $x$  e  $y$  per integrare esattamente.

Vedo la soluz di una piastra e calcolo l'abbassamento del nodo centrale.

Conosco la soluzione di Kirchhoff.

P.235 Ho la soluzione per i diversi elementi utilizzati.

Il Q16 parte subito alla soluzione

Il Q9 di Lagrange arriva rapidamente alla soluz

Gli altri no.

Cosa succede se stabilite una certa mesh con  $\frac{L}{h}$ ?

Mi rendo conto che Q4 - Q12 - Q8 hanno tutti il problema di shear lock. (Fam. serendipita)

Q9 e Q16 no  $\rightarrow$  questi sono elem della fam di Lagrange

$\Rightarrow$  Il problema dello shear locking obiettivamente non ce l'ha nella fam di Lagrange  $\Rightarrow$  Posso pensare di usare l'integrazione esatta per questa famiglia.

Battie ha fatto vedere che se col Q9 e Q16 quando rappresento nel mondo "real": i nodi intermedi sono leggermente spostati rispetto alla loro posizione di riferimento, io posso avere il problema dello shear locking.

Se stavo questi elementi e valuto  $C_b \rightarrow$  P.236

P.237 Se vedo gli elem. triangolari:

P.238 L'elem non ha shear locking, configura la struttura e trova shear locking  $\rightarrow$  Attenzione agli elem. triang.

Lo shear locking può essere esteso a 1 concetto strutturale.

Anche se l'elem non soffre, la struttura soffre!

Se già l'elem ha shear locking  $\Rightarrow$  Non va bene e prescuderli. Altrimenti attenzione!

P 247 Ricavo  $|K_T| \rightarrow |K|$  si riduce }  $|K|$  viene ad avere questa forma:  
 Ricavo  $|K_T| \rightarrow |K|$  si riduce }

$$\begin{vmatrix} K_T & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_{T0} \\ K_{T1} \end{vmatrix} \cdot |K_T|^{-1} (|K_{T0} \quad K_{T1}|)$$

Anche se l'ho visto per l'elem. a 4 nodi, questa filosofia vale per qualunque elemento di tipo misto

Le matrici di rigidezza  $|K_T|, |K|$  possono essere uguali e quelle dell'elemento a 4 nodi normali in funzione della scelta di  $M$  e  $T$  e dello schema d'integr. numerica.

$\Rightarrow$  Posso pensare di vedere l'elem. misto come fosse normale ma con un certo tipo d'integrazione.

P 248 ESEMPIO elem. Q4M

param. nodali: abbass + 2 rotazioni

definisce l'andamento dei momenti longitudinali a  $W, \theta_1, \theta_2$

I valori definiti dall'apross. del campo di spostamenti -

Da avere un'apross. al taglio: è costante e vale  $Q_x$  e  $Q_y$  su tutto l'elemento.

P 249 Se rivedo l'elem. otologo che  $k$  è dato da un contributo fless e uno a taglio.

importante è che NON ho dato condizioni sui momenti ma solo sui tagli - Otengo tagli costanti.

$\Rightarrow$  Nella realtà non è obbligatorio approssimare tutte le Cds ma posso scegliere: nel Q4M scelgo di appross. solo taglio ( $Q_x$  e  $Q_y$ )  $\rightarrow$  l'apros. può essere parziale.

P 250 Con queste tecniche:

• Q4M Taglio costante

• Q8M Taglio bilineare

In questo caso posso tranquillamente usare un'aprossim. numerica esatta

13. MAGGIO. 14

q.255 ELEMENTI KIRCHOFF discreti

- TRIANGOLARE e QUADRANGOLARE

Ho 3 gdl per nodo: abbassamento + 2 rotazioni  $\theta_x$  e  $\theta_y$   
 lavorare allo kirchoff nel dire  $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}$   $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}$

Definisco la geometria a partire dalle N

Posso valutare  $\int \Omega$

Per l'appross delle fnz. di campo:

Approssimo prima di tutto  $B_x$  e  $B_y$  (rotazioni)

Si assumono di classe  $C_0$ , e ciascuna la partono ma non le derivate

Con riferim a 1 lato considero  $B_m$  e  $B_s$

Sceglo  $B_s$  in modo che sia quadratico in s

"  $B_m$  " " " " " lineare " "

$B_x$  e  $B_y$  le appross a partire da  $N_1, N_2, \dots, N_m$  e dai parametri nodali e in più introduco parametro  $x$  legati alle variazioni quadratiche di  $B_s$ .

Questi  $x$  sono legati a polinomi  $P$ .

I polinomi  $P \cdot x$  sono dei covarianti vettoriali  $\rightarrow$  Sono vettori

I polinomi hanno struttura del genere in tabella -

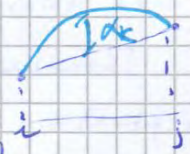
Per avere  $B_s$  quadratico devo prendere un 3° nodo interno al lato e costruisco un polinomio che mi consente di ottenere curva meno parabolica di  $B_s$  in quel lato.

q.257 Da un punto di vista fisico: tra le  $B_s, B_m$  locali e  $B_x, B_y$  globali valgono le relazioni di rotazione classiche. Voglio  $B_s$  parabolica - Ho i parametri nodali nei nodi interni e finali. Le N sono bilineari

$\Rightarrow$  Otengo con le N andamento lineare

Voglio curv parabolica  $\Rightarrow$  devo aggiungere

qualecosa con valore nullo agli estremi e valore  $x_k$  in mezzo



$\rightarrow$  Costruisco un polinomio che vale 0 in i e j e  $x_k$  al centro

Le  $N^*$  sono le funz. di forma uscite alla luce dei parametri  $x$ , ovvero alla luce delle richieste che sono effettuate su  $\beta_s$  e  $\beta_m$ . Queste 2 richieste soddisfanno la continuità di classe  $C_0$  di  $\beta_x$  e  $\beta_y$ .

All'interno di  $N^*$  entrano in gioco coeff  $k$  e  $m$  che si valutano in termini del nodo  $i$ .

p259 Che sono in grado di scrivere  $U$  in termini delle curvature  $\chi = \frac{\partial \beta_x}{\partial x}; \frac{\partial \beta_y}{\partial y}$

Trao la matrice  $[B_i]$  e entra in gioco la Jacobiana poiché le derivate sono in termini di  $x$  e  $y$  e li esprimiamo in funzione di  $\xi$  e  $\eta$ .

Siamo riusciti a calcolarle analiticamente  $[K] = \text{MATR di RIGIDITÀ}$

p260 Ovviamente  $[K]$  viene calcolate per via numerica.

Se usi l'elem ~~quadriangolare~~ <sup>rettangolare</sup>, nello schema di Gauss usi una giugla  $3 \times 3$ . Se l'elem è un quadrangolo devi fare un'integr. ridotta (NO selettiva) su una giugla  $2 \times 2$ .

Le CdS si calcolano nei punti di integrazione numerica.

Nella realtà  $\beta_s$  è di classe  $C_0$  perché nella sua determinazione entrano in gioco i parametri relativi solo al lato dove ho  $x$ . Per diventarci potete applicare rotazioni all'elem trave così come fatto qui alla Kirchhoff  $\rightarrow$  si trova una soluzione alla Eulero Bernoulli.

L'elemento DKT e DKQ partono da queste ipotesi.

Ho anche cas. <sup>di altri elementi</sup> in cui  $\beta_s$  viene assunto con andamento cubico  $\rightarrow$  si complica l'algoritmo.

p261 ESEMPIO

Piastre appoggiate al contorno, ne studio  $\frac{1}{4}$ , carico in mezzo, n° suddivisioni 4. Faccio 2 modelli di mesh.

Risolvero sia col DKT che col DKQ.

Nel DKT in A arrivo a soluzione, nel DKQ no. DKT  $\rightarrow \beta_s$  è di tipo cubico e non parabolico.

Studio anche il caso di bordo incastrato.

Con riferimento al patch test, l'elemento lo passo nelle condizioni che: beh sono rettilinei (nel real).

Dobbiamo imporre le condizioni e questo è una difficoltà oggettiva analitica.

Questo è un altro famiglia degli isoparametrici

Nel mondo isoparam. ho:

→ elemento normale

→ variazioni sul tema: (1) elem misti (approssimo le GDS)  
(2) elem in cui impongo certe condizioni (es: Kirchhoff discreti)

Potrei anche avere appross di funzioni ma non trattiamo questi elementi.

⇒ A partire dal concetto di isoparametrico posso gestire elementi anche in modo diverso.

27)

## ELEMENTI INFINITI

Posso partire da un elemento "parent"  $(-1, +1)$  e arrivare a un elemento "real"  $(x, +\infty)$ . In realtà le condizioni a  $\infty$  si conoscono.

Posso farlo per l'elem a 2 nodi, 3 nodi e così via.

Oltre agli elem monodim, esistono i bidim, ...

Questi elementi servono quando a un certo punto devo rappresentare tutto il resto del mondo e non è necessario che mi metta a farlo.

Dobbiamo vedere come l'elemento è influenzato dalle cc.

In campo elastico posso avere un nodo all'  $\infty$ . Se ho effetto di onde nel mezzo, mi aspetto che all'  $\infty$  le onde si smorzano. Non vorrei che questi elem vanno a distorcere il problema, dando riflessioni d'onda.

⇒ Bisogna fare attenzione ai problemi che possono nascere. Si costruiscono questi elem per vari dare condizioni di mesh tanto lontano.

Si dimostra che le  $\xi_i$  sono all'interno dei polinomi di Legendre. Le  $\xi$  sono le radici del polinomio di ordine  $n$  di Legendre.   
 DA PARTIRE) dal polinomio di ordine  $n$  e in funzione delle  $\xi$  così ottenute, riesco a calcolare il peso  $w_i$

$$w_i = \frac{2(1-\xi_i^2)}{n(n-1)\xi_i^2} \quad i = 1, \dots, n$$

ESEMPIO per  $n=2$   $\rightarrow$  Polinomio di tipo cubico  $\rightarrow$  Bastano 2 punti di Gauss e loro peso

p.280 Ho 4 equazioni e devo risolvere questo sistema.

p.281 Trovo polinomio  $P$  e le radici.

Valuto  $w_i = \frac{2(1-1/3)}{(2 \cdot 1/3)^2} = 1$

usati a  $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

19 MAGGIO 16

p.281 Da un punto di vista numerico nel caso uno dimensionale vedo che gli errori sono dell'ordine di  $10^{-9}$ .

Si deve operare almeno con un real macchina di tipo 128 bit voglio almeno 15 cifre decimali.

La stessa cosa può vedersi a p. 282 con una rappresentazione grafica. Per ciascuno punto ho il valore del peso. Quando parlo di 2 punti, 1 punto, 3 punti intendo quelli sull'asse  $\xi$ .

p.283 Oltre al Metodo di Gauss (il più diffuso nel mondo) ce ne sono altri. Tra questi uno che si usa è il NEWTON-COTES

La filosofia è la stessa ma in questo caso diffuso e può avere sono razionali, i punti di stazione del problema. Questi si distribuiscono equidistanti tra loro e in modo simmetrico rispetto all'asse.

Definito il grado del polinomio  $n-1$ , si parte dietro ogni  $n$  punti di stazione (non da simmetrica e equidistanti)

287 (2) METODI DIRETTI

Indichiamo il n° di punti di stazione e il peso. Opero così come ho fatto in campo unidimensionale.

Sfrutto il metodo per integrare in 2D.

Nel metodo diretto calcolo punti e peso con una relazione di peso tipo

$$\iint y(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum w_i y(\xi_i, \eta_i)$$

Il peso è uno.

Se lavoro così, mi ritrovo alla fine con soluzioni del tipo in tabella -

Es.: ordine 3 → 4 punti. (Corrisponde al unidimensionale)

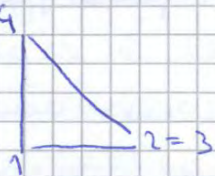
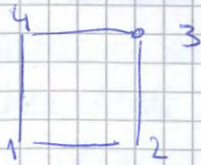
Per me è meglio operare in campo unidimensionale, dove ho guide in x e y.

Con questo metodo ho invece punti posizionati in modo più strano. ⇒ Percorro l'altra strada, più semplice da vedere.

Utilizzeremo Gauss sia nel caso che nel bi dimensionale.

288 Se il nostro dominio è TRIANGOLARE, oltre alle integrazioni momentane in coord d'area, posso avere un'integrazione numerica anche qui ricorrendo Gauss-Kronrod.

Si parte sempre dal (-1, +1) pedata. Lo colloso in un triangolo riportando il nodo 3 sul 2.



Un quadrato colosso in un triangolo.

A seguito del colosso, l'integrale:  $\int_0^1 \int_0^{1-\xi} y(\xi, \eta) d\xi d\eta$   
 $= \frac{1}{2} \int \int$

Facendo gli sviluppi, mi ritrovo a scrivere la soluzione sul triangolo attraverso la soluzione

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n W_S(j) W_I(i) y(\xi_i, \eta_{ij}) \quad p. 289$$

## TEOREMA DI STRAIN & FIX.

Arrivo a convergenza anche usando un ordine di integrazione inferiore -

Nella realtà quando integri, usi le regole di integrazione polinomiali ma non stai integrando dei polinomi ma RAPPORTI DI POLINOMI -

Così a fianco agli elementi comunemente usati, legni, serend... parlare di integr. esatta secondo Gauss vuol dire usare una maglia di integrazione così come rappresentata a pag. 293

8 nodi  $\rightarrow 3 \times 3$   
 ... 16 nodi  $\rightarrow 4 \times 4$ .

Attn: Per molti di questi elem. l'uso della FULL INTEGRATION porta problemi di shear locking.

$\rightarrow$  Non sempre questa maglia è possibile

Daò cercare di capire come gestire la cosa

294. Nella realtà è d'obbligo oscillare fra scelte di questo tipo:

Così dipende dall'elemento se presenta o meno problemi di shear-locking. In questo punto usare integraz. RIDOTTA o SELETTIVA. In questo modo eliminiamo il problema di shear lock.

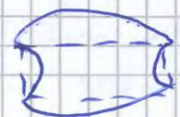
L'INT. RIDOTTA così come la SELETTIVA risolvono un problema ma ne generano un altro.

Il problema che nasce è legato ai NON SPURI.

Sono modi di deformazione (l'elem. si deforma) ma cui non è l'energia elastica ad averne e' pari a zero.

Così riferimenti alla meccanica classica so che l'eu. def. el. è zero se l'elemento ha un modo di traslazione rigida. Qui no. L'elem. subisce def. ma a seguito di queste  $U$  è zero.

Es: elem. a 8 nodi  $3 \times 3$  full integ.  
 o  $2 \times 2$  integ. reduced





Calcolata così  $[K]$ , valore  $k$  di una struttura:

$\downarrow$  ————— ASTA.  $\rightarrow k = \begin{pmatrix} \frac{4S}{L} & -\frac{6S}{L^2} \\ -\frac{6S}{L^2} & \frac{4S}{L} \end{pmatrix}$

Posso studiare l'inverso  $\rightarrow$

$[K^{(2)}]^{-1} = \frac{\Phi}{\Phi + E} \left( \quad \right) \quad \Phi = \frac{12 EI}{G S L^2}$

MATRICE DI FLESSIBILITÀ

Lavoro sulla matr. di flessibilità, perché alla luce dei valori di  $\Phi$  riesco a vedere i perché che vedo.

Per  $L \rightarrow \infty \Rightarrow \Phi \rightarrow 0$

e dunque  $k \rightarrow \infty$  rigidità infinita - shear locking.

Partendo da questo allora vedo cosa accade.

Se invece di integrare esattamente la matrice  $k_c$ , uso un integr. ridotto su 1 punto di Gauss:

$k_c = \frac{4S}{L} \left[ \quad \right] \quad p. 297$

Tras  $[k^{(1)}] = k_f + k_c^{(1)}$

Studio l'inverso  $[\phi^{(1)}] = [k^{(1)}]^{-1}$

Questo non presenta più problemi di rigidimento - Se cresce la lunghezza, non ho più probl. di shear locking.

Dalla teoria di Eul-Bernoulli vedo che  $k$  della trave snella, dove tengo conto della def. e taglio visto che le due matrici sono quasi uguali.

Questo vuol dire che devo usare + element.

Vedo che già con 2 elem ho  $\frac{W_{PERT}}{W_{E1}} = 0,94 = 94\%$

Vedo i risultati grafici a pag. 298.

299. Osservazione:

L'elemento di Timoshenko ottenuto dall'integr. ridotto sulla parte del taglio è equivalente a un elemento misto dove vedo e considerare il taglio  $Q$  variabile attraverso del problema in aggiunta a abbass e rotazioni.  $Q$  si assume nel nodo centrale.



A partire da queste  $E$  valuto  $U$ .

Se valuto  $U$  con riferimento all'integr. ridotta  $\Rightarrow$  allego i termini fless e di taglio rispetto a un solo punto di Gauss  $\rightarrow \eta = \xi = 0$

$$\rightarrow [K] = (B^T D B) \eta - \xi = 0$$

Ottengo:

$$\frac{1}{2} u^T x + (B^T D B) \bar{u} = 0$$

$$\frac{1}{2} u^T x + B^T D \underbrace{[B] \bar{u}}_{\rightarrow E=0}$$

$\rightarrow$  Ho trovato un modo puro.

Devo fare in modo di evitare che questi modi puri si propagano nella struttura.

303 Tabella - In questi casi sicuramente nasce modo puro.

C'è un modo col quale posso verificare, stabilire fin dall'inizio se se calcolo  $[K]$  in un certo modo presta un dato un modo puro o meno? E se presto si può propagare nella strutt?

Sì.

304 Ho l'elemento e ho valutato  $[K]$

So che vale la relazione  $KU = F$

Ipotesi i carichi nodali  $F$ :  $F = 1 \bar{u}$

$$\rightarrow (K - \lambda [I]) [\bar{u}] = 0$$

Il problema si trasforma in un problema agli autovalori

$$\lambda_i = [u] [K] [u] = 2 V_i$$

$\rightarrow \lambda_i$  è correlato all'energia di deformazione e non al fattore 2.

$\rightarrow$  Tutte le volte che ottengo un autovalore nullo, questo rappresenta un modo puro e il suo autovettore rappresenta la deformazione pura associata.

Dato un elemento a 8 nodi, 8 g.d.l., questo modo reale

è una matrice  $8 \times 8$  con 8 autovalori. Tra questi

3 autoval. sono nulli e 5 sono  $\neq 0$ . I tre autoval. nulli dovrebbero rappresentare 3 modi rigidi dell'elem mentre i 5 autoval.  $\neq 0$  rappresentano 5 modi di deformarsi.

② Per l'elem. Heterosis si usa solo integr. selettiva e l'elem così fatto non ha un shear locking, né un spin.

③ Lagrange. Posso integrare sia in full che ridotto e non ho mai problemi di shear locking.

Con integr. selettiva possono nascere un spin.

## p. 307 Contratto

- elem. linear

- elem. quadratici - serendipità

in full integr. hanno il serio problema di shear locking che scompare con reduced integr. Ma con altri <sup>condizioni</sup> problemi di vincolo può ritornare.

La maggior parte di elem per le piastre grandi intorno a lagrange.

Nella realtà il modo Spuro non si propaga nella struttura. Ho una rappresentazione grafica di quanto visto finora.

Piastre miste, vedo cosa succede riducendo lo spessore.

Chiuso il problema dell'integrazione numerica.

## ELEMENTI GUSCIO

311

Ho le CdS che di solito considero nel guscio in linea media.

In genere il modo più semplice per studiare l'elem guscio è partire dall'elem piastra, ma:

Le eq. diff. di governo il proble del guscio non vengono approssimate nel passaggio al limite dello spessore, le discontinuità di pendenza di geometria  $\rightarrow$  gli elem piani si ricordano sui lati generici una cuspidale, posso prendere l'elem piastra e quello membrana, rafforzi ma i fenomeni flessionali e membrana li combino non si considero.

$\Rightarrow$  Considero elem piastra e in modo rispettoso di affrontare gli elem gusci.

$\Rightarrow$  Se è pensato di studiare il guscio come elem curvo

P.313 → OSSERVAZIONI

Dalla geometria, dato  $P$  sulla superficie, date 2 direzioni  $\xi, \eta$  e  $P$  e nell'intersezione di  $\eta, \xi \Rightarrow$  Posso valutare le tangenti da  $P$  a

$\xi$  e  $\eta$  attraverso queste relazioni

$$\vec{T}_\xi =$$

$$\vec{T}_\eta =$$

- Entrano in gioco le derivate di  $x, y, z$
- \* Rispetto a  $\xi, \eta$ .
- Costruite le tangenti posso valutare le normali al piano medio

Con riferimento alla superficie media posso costruire un S.R. di versori  $e_1, e_2, e_3$  dove nella realtà i versori si costruiscono seguendo queste strade

Trao  $\vec{e}_3 = \frac{\vec{T}_n}{|\vec{T}_n|}$  vettore / modulo → ottengo  $\begin{matrix} e_3 \\ m_3 \\ M_3 \end{matrix}$

Costruisco  $\vec{y}^*$  normale a  $\vec{T}_{\xi_0}$  :  $y^* = \vec{e}_3' \wedge \vec{T}_{\xi_0}$

Trao  $\vec{e}_2' = \frac{\vec{y}^*}{|y^*|}$  → valuto  $\begin{matrix} e_2 \\ m_2 \\ u_2 \end{matrix}$

Dal sistema  $e_1, e_2, e_3$  posso passare al sistema  $e_1, e_2, e_3$ .  
 Questa nota mi serve poiché prendo struttura il processo difformato della struttura  $\Rightarrow$  un leggero e presto.

Espresso degli spostamenti nel sistema globale tramite delle rotazioni  $|R^T|$  nel sistema locale.

Posso pensare di esprimere  $|x^T|$  nel sistema globale.

$$\rightarrow |x^T| = |R^T| \cdot |x^L|$$

$\rightarrow$  Posso esprimere  $|\Delta u^T|$  in funzione degli  $|\theta^T|$  nel sistema globale

$$|\Delta u^T| = G \frac{h}{2} |R^T| |R^T| |\theta^T| = G \frac{h}{2} |R^T| |\theta^T|$$

Componenti di spostamento globale con riferimento alle rotazioni nel sistema globale.

$\rightarrow$  Definisco i  $\Delta u_i$  alla luce delle rotazioni.

Ricordo la definizione di  $u_i, v_i, w_i$ , in termini di parametri nodali (Spost. ti nodi e rotazioni nodi)

(Poiché i  $\Delta u_i, \Delta v_i, \Delta w_i$  iniziali non erano parametri nodali) gli  $|\theta^T|$  sono parametri nodali.

p. 316 Con riferimento a un layer in un punto generico;

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta w_i \end{pmatrix} = \dots = \sum N_i (|\bar{u}_i^T| + G \frac{h_i}{2} |R_i^T| |\bar{\theta}_i^T|)$$

Abbiamo espresso il campo di spostamenti in termini di parametri nodali.

### Definizioni

È conveniente far riferimento al modo al sistema  $x'y'z'$  poiché è il più comodo fare i conti. Posso scrivere le deformazioni con riferimento al sistema locale attraverso la teoria dell'elasticità:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{x'} \\ \vdots \\ \gamma_{x'z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \vdots \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{pmatrix}$$

Dobbiamo poi passare alle  $\epsilon$  nel sistema globale.

CONSIDERAZIONI per cambio sistema di riferimento;

p. 317 Posso esprimere:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \vdots \\ \gamma_{x'z'} \end{pmatrix} = |R^T|^T \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \vdots \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} = |R^T| \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \vdots \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix}$$

La  $K$  è la matrice rigide integrazione numerica.

Questo elemento così studiato è pentra da un elem 3D soffre di shear locking  $\Rightarrow$  S. resolve tramite integrazione selettiva

$\rightarrow$  Cont. flessionale - Matrice integ  $2 \times 2$

$\rightarrow$  cont. e taglio - Schema di Gauss  $1 \times 1$

La forma geometrica ha

È una rigata

Nella realtà i nodi sono legati da rette - la superficie del secondo ordine che si ottiene è una rigata.

$\Rightarrow$  Sto discretizzando una superficie curva con degli elementi che sono rigate  $\Rightarrow$  Non è detto che si approssimano bene gli spostamenti tra due elementi adiacenti.

Evitando il problema dello shear locking, questo elem funziona abbastanza bene

A pag. 314 con riferimento al sistema locale primo, nell'impostazione non si è tenuto conto della rotazione  $\alpha'_3$ . p. 324

È pensabile considerare anche quella rotazione  $\alpha'_3$  perché nella sdg reale reale abbiamo 6 gde. Noi con riferimento al sistema locale abbiamo considerato solo 5 gde.

Per noi raggiungere risultati che non sono soluzione.

Come considero  $\alpha'_3$ ?

Un modo consiste la rotazione di moto rigido

A meno della rotazione rigida, con riferimento alla superficie media ( $q=0$ ) calcoliamo l'energia:

$$U = d + Gh \int_A \left( \alpha'_3 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) \right)^2 dA$$

calcolo i km.

Posso esprimere  $\alpha'_3$  in funzione di  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ :

p. 325  $\rightarrow$  Posso valutare la Matrice di rigidezza Torsionale

$$K_T = [u^T | k_T | u]$$

$k_T$  si calcola numericamente in 1 solo punto di Gauss e si somma a  $k$ . Questa matrice di rig. Torsionale dipende da  $\alpha_T$ .  $\alpha_T$  influenza una non degrada il comportamento dell'elemento.

La soluzione che ottengo non è condizionata dall'aggiunta di  $k_T$

p. 326 Anche qui ho il problema dei carichi nodali.

Questo è il più semplice elemento

Att: Il sistema  $x', y', z'$  varia da punto a punto.

## Le nuove norme Tecniche italiane

DM 16.01.08

Esiste un capitolo che riguarda l'analisi strutturale e le relative verifiche condotte con codici di calcolo.

Viene esplicitamente detto che il progettista DEVE:

1. controllare l'affidabilità dei codici usati
2. verificare l'attendibilità dei risultati ottenuti

Con codici di calcolo si intendono oltre ai programmi comprati anche i programmi sviluppati da voi (anche in excel...)

Oltre a controllare l'affidabilità e l'attendibilità, se l'opera ha particolari rilevanza, i calcoli devono essere eseguiti da un soggetto diverso con un diverso codice di calcolo.

Il progettista (paragrafo 10.1) deve farsi carico del controllo del calcolo fatto.

### Obbligo del controllo dell'affidabilità del programma

Il progettista deve esaminare preliminarmente la documentazione, a corredo del software. (a, b, c, d)

Queste cose devono essere fornite o dal produttore o dal distributore del software.

Quando b) analizzo la descrizione degli algoritmi, richiedo la diagnostica

→ non basta float element o... → Voglio la diagnostica

Nel d) cosa prova non devo avere cose e caso ma dei test riconosciuti a livello internazionale.

→ Oss: Non è sufficiente confrontare soluzioni di casi standard... (SAC o Tecniche DC) con i risultati ottenuti al fem.

Esistono organizzazioni indipendenti di utenti (NAFEN) che valuta la bontà e la stima dei risultati ottenuti da un software tramite dei test numerici indipendenti dallo spirito commerciale.

### Obbligo di controllo dell'attendibilità dei risultati

Per ogni progetto dove uso un codice, devo stilare una relazione scritta dove dico qual'è la natura dei controlli che abbiamo fatto su quel progetto per verificare l'attendibilità dei materiali.

Se uso più codici di calcolo, cosa mi conviene che contenga tutti e tre i codici. Che tipi di controllo fare?

→ Confronto con risultati ottenuti da semplici calcoli tradizionali

→ Devi avere un'idea delle risposte della struttura

Devo elaborare e illustrare i contenuti NDT.

(È evidente che le prime cose che voglio sono le eq. in d'equilibrio)  
 Entrò poi nel particolare e nel dettaglio - partendo dal generale.

Il dettaglio è mirato, so dove potrei riscontrare i problemi.

⇒ Questo discorso lo faccio alla luce delle problematiche che potrei avere.

CNR 10024/86 ho riportato ciò che nell'86 veniva richiesto nell'istruzione 1. A parte la descrizione generale dell'opera e le Normative di riferimento, si richiedevano i CRITERI DI ANALISI DELLA SICUREZZA (20 anni prima dell'NTC). Queste cose del tutto logiche non venivano mai applicati.

Nell'86 era molto più diretta che non nelle NTC: era molto più realistica sul problema.

⇒ È un documento che bisognerebbe avere e utilizzare in parallelo con le NTC. (È più esplicativo su ciò che bisogna fare)

Sulle NTC non si dice nulla dell'interazione tra elementi strutturali (es: tempo momento - come li tratto?)

Quando si conducono analisi di un certo tipo, specialmente sismiche, dovete essere in grado di valutare correttamente se il codice di calcolo che usi è coerente con quel modello di comportamento che usi.

⇒ In certi casi potrebbe essere meglio eliminare parti di struttura e fare l'analisi senza. Si userebbero metodi semplificati per che sono in letteratura per valutare l'azione del pannello.

Se usi un codice di calcolo che analizza anche il pannello devi vedere come cambia la rigidezza e altri parametri.

⇒ Attenzione all'interazione di elementi strutturali tra loro.

Devo capire se il software è in grado di risolvere l'interazione:

es: Sottoblocco pieno d'acqua.

È in grado il codice di modellare l'azione dell'acqua in campo sismico? → 3.7 Modellazione delle azioni.

Se ho analisi sismica e devo fare un'integrazione al passo, siete in grado se ad un certo passo di dire se ho raggiunto il risultato?

Certo è morto.

L'uso di codici di calcolo si porta dietro questi dubbi indipendentemente dal codice di calcolo usato. Devo sapere ciò che c'è dietro.

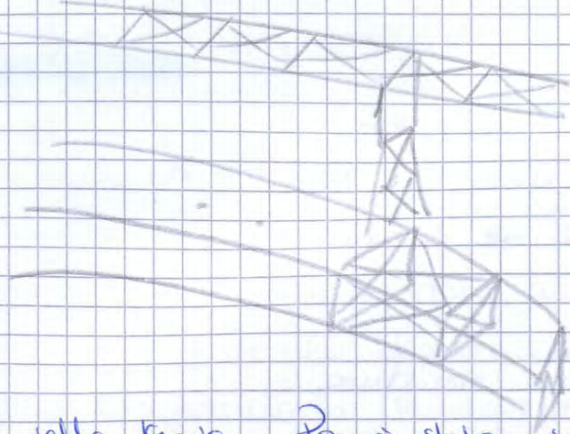
la responsabilità è solo del progettista.

DONATI Roberto - Corso NTC calcolo

AVUA FB



MODELLO DI LANCIA

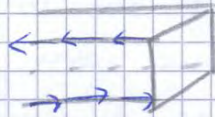


Devo determinare un outubo per determinare le rigidità equivalenti.

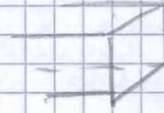
→ Definito lo schema, voglio che questo corrisponda a quello reale  
 ⇒ voglio le rigidità reali.  
 Come si può fare?

Vi dico della nave. Poi è stato usato lo stesso outubo per tutto. La nave ha andamento modulare ripetitivo. ⇒ Considero un modulo. Essendo simmetrico, posso studiare metà modello e con riferimento a questo studio tutti i parametri di rigidità del modello (rigidità torsionale, flessionale ...). Ciò si fa cambiando schema a seconda di ciò che studio:

TORIONE PURO



FLESSIONE



(...)

Attraverso questo studio si sono valutati i vari parametri di rigidità e si sono applicati questi al vostro modello.

Il problema reale non implicava la rappresentazione di tutti gli elementi nella realtà → perciò è stato corretto semplificare. Valeremo solo valutare il centro de ... sull'arco ⇒ Abbiamo valutato in modo corretto le rigidità.

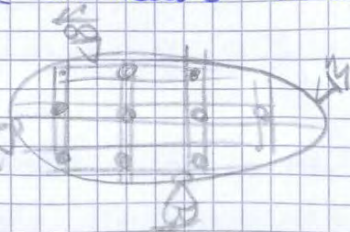
⇒ Nella realtà a fronte di strutture complicate NON devo mai partire modellando la struttura reale.

Devo prima capire come è fatta la struttura e qual'è il problema reale. Conviene perdere giorni per individuare una giusta ed equa schematizzazione.

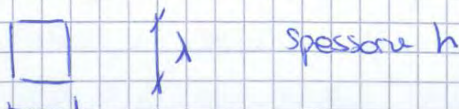


Adesso vedo cosa può succedere in Africa se non ho codice di calcolo e voglio risolvere un problema di stato piano di flessione.

Si ha un vecchio metodo: FRANKENBERG METHODS (Metodo Telero)



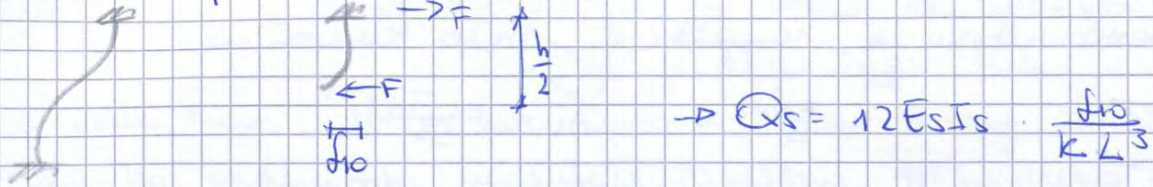
Individuo una maglia all'interno





Posso fare la stessa cosa per l'altro schema.

Ho ancora il problema delle distorsioni



Posso anche esprimere  $\delta$  in funzione di parametri geometrici dell'equilibrio alla traslazione orizzontale.

Oltre all'equilibrio di traslazione ho anche il momento in ciascun nodo.

Ora ho  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5$  valori di spost. legati ai parametri geometrici della sezione.

Per contare  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5$  sono  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5$  precedenti trade inizialmente.

$$f_1 = \frac{k \Delta T_x}{\Delta x} \quad \text{Sono noti}$$

⇒ Sostituendo si ricavano questi parametri:

$$E_c A_c \quad E_s A_s \quad E_d A_d \quad E_c I_c \quad E_s I_s$$

In queste relazioni (Q) cosa si nota?

Entrano in gioco solo ed esclusivamente parametri geometrici

$\lambda$  = Dimensione  $\Delta x_y$  e  $\Delta y_x$

$\frac{1}{k} = \text{stiff}$

Se il materiale è isotropo, le relazioni si semplificano ancora.

In caso di materiale isotropo per passare da  $\lambda$  continuo a una sola framework:

$$E_c A_c = S A (1 - \nu^2) (1 - \nu^2)$$

$$E_s A_s = \dots$$

In questo modo ho studiato la struttura come modello equivalente.

Se studio gli spost. nodali con la framework theory, a partire dai questi altri valutare le tensioni.

Ho i risultati che vengono fuori da tensionare a partire dalla teoria dell'elasticità.

7 GIUGNO 2014

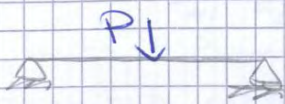
## PARTE IV

Vediamo un metodo che risulta sempre nel calcolo automatico delle strutture: il METODO DELLE STRISCIE FINITE.

È in genere utilizzato nel mondo delle strutture e discende dal metodo fem. È semplice teoricamente ma operativamente si porta dietro delle c.c. abbastanza pesanti.

Si basa da una parte sul metodo fem e dall'altra sullo sviluppo in serie di Fourier.

### ELEMENTO TRAVE



Nell'ipotesi di Eulero Bernoulli:

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$$

Le condizioni: DIRETTA  $w=0$   $x=0, l$   
INDIRETTA  $M=0$   $x=0, l$

Voglio studiare la struttura a partire dalla deformata. Scrivo la deformata in termini di serie di Fourier

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Uso uno sviluppo in serie di SENI. Scelgo le funzioni seno perché queste soddisfano automaticamente le c.c.

Nella realtà nei nostri sviluppi in serie di Fourier con le funzioni seno, devo implicitamente soddisfare le condizioni al contorno. Questo è il peccato originale di questo metodo.

L'energia Potenziale Totale è data dall'energia elastica di deformazione più l'energia dovuta ai carichi:

$$\Pi = U + W = \frac{EI}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - Pw \quad \text{abbass in } P$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \left( -\frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sum \delta_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)^2$$

$$\Pi = \frac{EI}{2} \frac{n^4 \pi^4}{l^4} \int \left( \sum \delta_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)^2 dx - P \left( \sum \delta_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)_{x=\frac{l}{2}}$$

→  $\Pi = f(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$  è funzione degli  $n$  coefficienti dello sviluppo in serie

Il  $\delta$  non lo conosco - lo ipotizzo nello sviluppo in serie. Ricavo  $\delta$  imponendo che:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial \delta_2} = \dots = 0$$

IMPOSIZIONE STAZIONARIETA' NELL'ENERGIA

A partire da questa filosofia, l'elemento è visto come una striscia.  
 La striscia è un elemento reale oppure, un elemento bidimensionale.  
 La striscia può nella realtà essere anche un elemento di volume.

Il concetto di strip method può essere generalizzato, si passa dal unidimensionale al bidimensionale. Così posso pensare di espandere il concetto a strutture comunque complicate.

In direzione  $x$  si approssima la funzione di campo in sviluppo in serie.

Il continuo è suddiviso in strip (striscia o elem di volume ...)

Questi strip sono connessi tra loro lungo le LINEE NODALI.

È una forma speciale del metodo f.e.m.

Per ogni striscia il campo è approssimato come:

- Sviluppo in serie con il termine del prodotto di 2 funzioni

$$f_m(x) \cdot y_m$$

La funzione  $y_m$  è una funzione che deve soddisfare fun dell'inc  
le c.c. che ho. Questo è il limite del problema.

Nel caso bidim. posso avere elem con 2 soli "nodi" = linee in cui convergono le strisce.

Nell'approssimazione in direzione  $x$  i param nodali:

- o  $f$
- o  $f, \frac{\partial f}{\partial x}$
- o  $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}$

Posso anche avere elementi che contengono 3 "nodi" = linee.

In questo caso la linea centrale (2) non è interconnessa e non

⇒ equivale ai nodi interni ush negli elem in precedenza.

→ la elem. tramite condensation statica.

Da un punto di vista di sezione trans non ho problema.

Torno alla striscia a 2 nodi.

$$w(x, y) = \sum f_m \cdot \psi_m(x) \quad f_m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Posso esprimere:  $w = \sum_{m=1}^n [f_m] [C_m] = \sum \gamma \sum [C_m] [k_m]$

Travo le  $f$  a fronte  
 se ho 5 linee, ho 5 f.d.f.

## STATI PIANI DI TENSIONE

Cosa vuol dire semplicemente appoggiato in uno stato piano?

Le  $\sigma$  in direz  $y$  e  $z$  sono nulle. Le trave semplicemente appoggiata non ha sforzi, allungamenti.

$\Rightarrow$  ha approssimazioni di  $u$  e  $v$ .

$v$  serve perché insieme a  $u$ , le derivate consentono di scrivere  $\sigma_x$ .

Se gli estremi sono incastriati  $\begin{cases} u=0 \\ v=0 \end{cases}$  condizioni più semplici

Il problema dello stato piano nasce perché posso studiare non solo elem piastra ma anche elem gusci: quest'ultime sono ottenute da elem piastra + elem stato piano.

Vedo alcuni classici elem della strip method:

### PIASTRA INFLESSA

Lelem  $b$   $abb + notez$       c)  $w, \theta, \kappa$       d)  $w, \theta$  (3 linee)

libro.

FEM - Supporto alla Caroscerza.

### STRIP METHOD - NO ESAME

NO LEZIONE

Bertagnoli (fogli)

10/GIUGNO/2014

11/GIUGNO/2014

## Elementi BIDIMENSIONALI

- CST, LST, QST, cuboide cubico → coord. generalizzate, coord. naturali
- RETT. ARGYRIS → coord. generalizzate, isoparametrico, coord. naturali  
rett. ORDINE ELEVATO → coord. generalizzate, isoparametrico, naturali (logreder)
- Quadr. da CST → coord. generalizzate
- triangolare da collasso di quadr. (CST) → isoparametrico
- elem. di transizione ISOPARAMETRICI

## PIASTRA

- elementi di volume degeneri (gusci sottili) ISOPARAMETRICI Mindlin
- elementi USCIO (moderatamente spessi) ISOPARAMETRICI Mindlin
- elementi PIASTRA <sup>HINDLIN</sup> ISOPARAMETRICI, coord. gen. <sup>KIRCHOFF</sup> (ACM, BFG) e naturali
- elementi MISTI ISOPARAMETRICI
- elementi PIASTRA KIRCHOFF DISCRETI ISOPARAMETRICI
- elem. PIASTRA TRIANGOLARI (HTC) coord. gen. e naturali
- GUSCI ASSIALSIMMETRICI coord. gen.

## Elementi di VOLUME

- tetraedro → coord. gen.
- esaedro → coord. gen., isoparametrico
- da esaedro a tetraedro → isoparametrico (collasso)

# ELEMENTI BIDIMENSIONALI

- **PLASTICITÀ INFLESSE**

- **ACM**

- **BFS 16**

- **TRIANGOLARE a b c d e f(HTC)**

- **Clb**

- **PATCH TEST**

## PARTE III

INTERPOLAZIONE

MONODIMENSIONALI

BIDIMENSIONALE rettangolare

SISTEMA a R. INTERNO

monodimensionale

bidimensionale ~~triangolare~~

"

rettangolare (logr. + serend.)

## ISOPARAMETRICI

monodim

bidim

volume

transizione

**Convergenza e distorsioni**

trave

placca

lunotto

**DKT DKQ**

} *placca*

## INFINITI

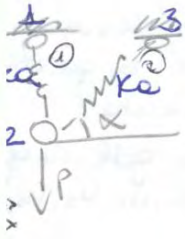
## INTERPOLAZIONE NUMERICA

1 dim

2 dimension

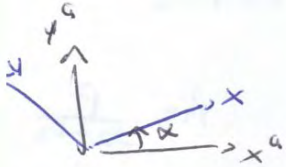
## GUSCIO

## Bartolucci



$[k] = ?$

①  $\rightarrow k_a$    
 ②  $\rightarrow k_b$    
  $\rightarrow$  Non hanno nulla in comune e le devo riportare nel SRG



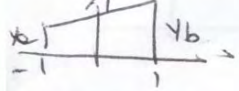
$x = x^g \cos \alpha$    
  $y = y^g \cos \alpha$    
  $\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c \\ s \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x^g \\ y^g \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} F_1^x \\ F_2^x \\ F_1^y \\ F_2^y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$

$F^g = R F$    
  $F^l = k^l u^l$    
  $R F^g = k^l R u^l$    
  $F^g = k^g u^g$    
  $k^g = R^T k^l R$

elemento CST

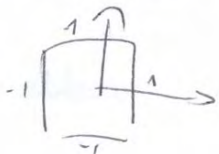
Integrale numerico di New-Cotes



$A = \frac{y_a + y_b}{2} \cdot 2$

Trovare i pesi

isoparametrico e 4 nodi bidimensionale (usato come elem nell'esercizio zone fatto con lui)



funz di forma per il parent   
 Il real?

## Prof. CARBONE

Con riferimento all'elemento trave di Hermite, come faremo l'interpolazione?

$\begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix}$   $\textcircled{u}$   $F = F_1 + F_2$    
  $F_1 = k_1 u$    
  $F_2 = k_2 u$    
  $F = F_1 + F_2 = k_1 u + k_2 u = \frac{(k_1 + k_2)}{k} u$

$\text{---} \text{---}$   $\textcircled{F}$   $u_1 + u_2$    
  $f = u_1 + u_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = \frac{F}{k}$

$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$

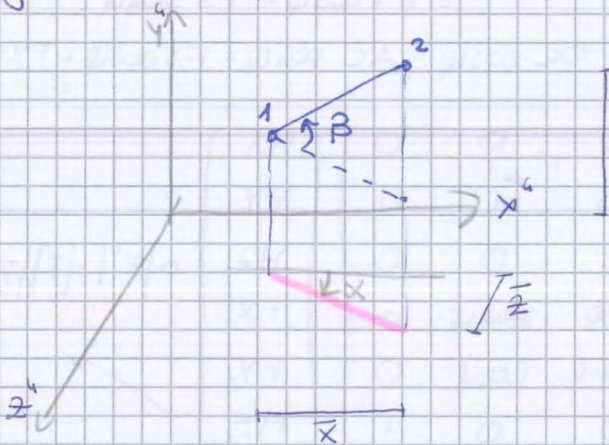


(a) 
$$\begin{bmatrix} x^t \\ y^t \\ z^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^t \\ y^t \\ z^t \end{bmatrix}$$

(b) 
$$\begin{bmatrix} x^t \\ y^t \\ z^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^t \\ y^t \\ z^t \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} x^t \\ y^t \\ z^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & \cos \beta \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \beta & \cos \beta & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^t \\ y^t \\ z^t \end{bmatrix} \rightarrow |X^t| = |\lambda_1| |X^t|$$

Voglio trovare  $\alpha, \beta$  sono tutto in termini di coordinate



$$\bar{x} = x_2 - x_1 \quad \bar{y} = y_2 - y_1 \quad \bar{z} = z_2 - z_1$$
  

$$S = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}$$
 lunghezza proiezione in xz  

$$L = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 + \bar{y}^2}$$
 lunghezza totale

$$\sin \alpha = \frac{\bar{z}}{L} \quad \cos \alpha = \frac{\bar{x}}{S}$$
  

$$\sin \beta = \frac{\bar{y}}{L} \quad \cos \beta = \frac{S}{L}$$

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} \frac{\bar{x}}{L} & \frac{\bar{y}}{L} & \frac{\bar{z}}{L} \\ -\frac{\bar{x}\bar{y}}{LS} & \frac{\bar{z}}{L} & -\frac{\bar{y}\bar{z}}{LS} \\ -\frac{\bar{z}}{S} & 0 & \frac{\bar{x}}{S} \end{bmatrix} \rightarrow$$
 Matrice di Trof. in termini di coord. nodali

NB: Se l'asta è verticale devo dare regole per  $\alpha, \beta$  ( $\lambda_1$  non è calcolabile  $\bar{x} = \bar{z} = 0$ )

$$\bar{y} > 0 \quad \lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{y} < 0 \quad \lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Atti: Se  $x^t - y^t$  non è il sistema principale d'inertzia, definire  $T$  = rotazione intorno a  $x^t$  che porta il sistema a essere principale centrale d'inertzia

$$\begin{bmatrix} x^t \\ y^t \\ z^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos T & \sin T \\ 0 & -\sin T & \cos T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^t \\ y^t \\ z^t \end{bmatrix} \Rightarrow |X^t| = |\lambda_1| \cdot |X^{t1}| = \frac{|\lambda_2| |\lambda_1|}{|\lambda_1|} |X^{t1}| = |\lambda_2| |X^{t1}|$$

Nel sistema globale  $|k| = [T]^{-1} |k| [T]$   

$$\rightarrow T = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Trave secondo Eulero - Bernoulli!

$$\frac{d\phi}{dx} = -\frac{M}{ES} \quad \text{Eq. diff. che governa la trave di Eulero - Bernoulli}$$

Bernoulli: una normale alla linea mediana prima della deformazione, continua ad essere normale alla linea mediana anche dopo la deformazione  

$$\gamma_{xx} = 0 \quad \gamma = \frac{dw}{dx}$$

$$K_b = \int_0^L ES \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{dN_1}{dx} & 0 & \frac{dN_2}{dx} \\ 0 & \frac{dN_1}{dx} & 0 & \frac{dN_2}{dx} \\ 0 & 0 & \frac{dN_1}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dN_2}{dx} & 0 \end{bmatrix} dx \quad K_t = \int_0^L KAG \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & -N_1 & \frac{dN_2}{dx} & -N_2 \\ \frac{dN_1}{dx} & -N_1 & \frac{dN_2}{dx} & -N_2 \\ \frac{dN_1}{dx} & -N_1 & \frac{dN_2}{dx} & -N_2 \\ \frac{dN_1}{dx} & -N_1 & \frac{dN_2}{dx} & -N_2 \end{bmatrix} dx$$

$$K = K_b + K_t$$

Ipotesi di voler calcolare la matrice di flessibilità, se  $C = \frac{12ES}{KAG L^2}$

$$\rightarrow [Q] = [K]^{-1} = \frac{E}{E+1} \quad \text{per } L \text{ grande (snello)}, E \rightarrow \infty \\ \Rightarrow [Q] \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad [K] \rightarrow \infty \text{ ASSURDO}$$

L'elemento è condizionato dalla deformabilità e taglio (SHEAR LOCKING)

$\rightarrow$  Integro in modo ridotto  $K_t$ . OK. (sul punto)

⇒ È possibile introdurre condizioni di vincolo sia sulle forze che sugli spostamenti.

VINCOLO ESTERNO

La vincolo esterno è quello che si applica ad una parte del sistema, mentre il vincolo interno si applica all'intero sistema.



$$F \cdot \delta = P \cdot \delta$$

$$\Rightarrow (P + K) \delta = P \delta$$

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = P \\ F_2 = F_1 = P \end{cases}$$

VINCOLO GENERALIZZATO ESTERNO



La vincolo esterno generale è quello che si applica ad una parte del sistema, mentre il vincolo interno si applica all'intero sistema.

$$F \cdot \delta = P \cdot \delta$$

$$F_x = F \cos \theta + F_y \sin \theta = 0$$

La vincolo interno è quello che si applica all'intero sistema, mentre il vincolo esterno si applica ad una parte del sistema.

VINCOLO GENERALIZZATO INTERNO

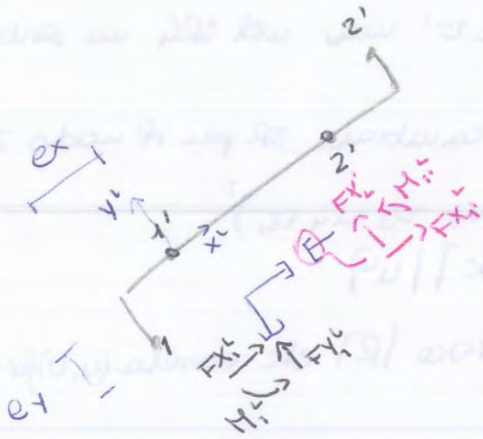


La vincolo interno generale è quello che si applica all'intero sistema, mentre il vincolo esterno si applica ad una parte del sistema.

$$\begin{cases} U_1 = U_2 = U \\ U_2 = U_1 = U \end{cases}$$

nel PIANO

Devo scrivere il passaggio tra le forze nell'estremità flessibile e quelle nell'estremità rigida



$$\begin{bmatrix} FX_1^c \\ FY_1^c \\ M_1^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -e_{y1} & e_{x1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} FX_1^f \\ FY_1^f \\ M_1^f \end{bmatrix} = |e_1| |F_{21}^f|$$

$$\begin{bmatrix} FX_2^c \\ FY_2^c \\ M_2^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ e_{y2} & -e_{x2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} FX_2^f \\ FY_2^f \\ M_2^f \end{bmatrix} = |e_2| |F_{22}^f|$$

$$[F^c] = [e] [F^f]$$

$$e = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix}$$

Lo stesso per gli spostamenti:  $[u^c] = [e]^T [u^f]$

$$\rightarrow [F^c] = [k] [u^c]$$

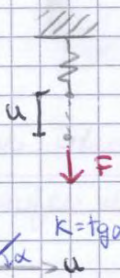
$$[e] [F^c] = [e] [k] [u^c]$$

$$[F^c] = [e] [k] [u^c] = \frac{[e] [k] [e]^T}{\text{matrice inversa estq}}$$

Potrei anche avere eccentricità in 1 sola direzione

→ Si usa molto in EDIFICI INTELLIATI

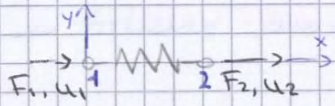
# RIGIDEZZA



$F = k \cdot u$  lo spostamento subito è legato alla forza  $F$  e alla caratteristica propria della molla  $k = \text{rigidezza}$

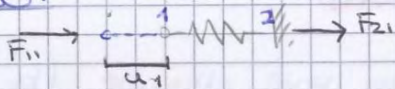
L'ENERGIA DI DEFORMAZIONE ELASTICA accumulata nella molla durante il processo deformativo:  $U = \frac{1}{2} k u^2 = \int F du = \int k u du$

## A) MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA MOLLA



Devo individuare la relazione tra  $F_1, F_2$  e  $u_1, u_2$ .  
Si suddivide il problema in 2 casi e poi PSE

### CASO 1



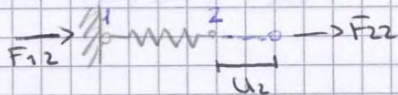
Blocco il nodo 2 e immagino applicato  $u_1$

$$\begin{cases} F_{11} = k u_1 & \text{EQ. MOLLA} \\ F_{21} = -F_{11} = -k u_1 & \text{EQUILIBRIO} \end{cases}$$

$F_{11}$  = forza che nasce sul nodo 1 e seguito di  $u_1$

$F_{21}$  = forza che nasce sul nodo 2 e seguito di  $u_1$  (forza sul vincolo)

### CASO 2



Blocco il nodo 1 e immagino applicare  $u_2$

$$\begin{cases} F_{22} = k u_2 & \text{EQ. MOLLA} \\ F_{12} = -F_{22} = -k u_2 & \text{EQUILIBRIO} \end{cases}$$

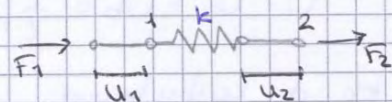
$F_{22}$  = forza sul nodo 2 e causa di  $u_2$

$F_{12}$  = forza sul nodo 1 e causa di  $u_2$

Applico PSE  $\rightarrow$  CASO 1) + CASO 2)

$$F_1 = F_{11} + F_{12} = k u_1 - k u_2$$

$$F_2 = F_{21} + F_{22} = -k u_1 + k u_2$$



$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow |F| = |K| |u|$$

$\rightarrow$  MATRICE DI RIGIDEZZA DELL'ELEMENTO MOLLA

### PROPRIETA' DELLA MATRICE |K|

① SIMMETRIA (Teorema di Betti)

②  $\det |K| = 0$  matrice non invertibile perché la struttura è libera nello spazio. La non invertibilità sparisce quando vincolo la struttura e tolgo dunque le possibilità di moto rigido alla struttura.

$$\textcircled{3} \quad U = \frac{1}{2} k (u_2 - u_1)^2 = \frac{1}{2} (u^T |K| u) = \frac{1}{2} k \Delta u^2$$

Per il 1° teorema di Castigliano:  $F_1 = \frac{\partial U}{\partial u_1} = k(u_1 - u_2)$  ok

$F_2 = \frac{\partial U}{\partial u_2} = k(u_2 - u_1)$  ok

Per costruire la matrice di rigidezza di una struttura comunque complicata sia:

Prendo la matrice di rigidezza di ciascun elemento, le spallo sulle dimensioni strutturali e le sommo ← OSSERVAZIONE IMPORTANTE

L'operazione di somma equivale a scrivere nodo per nodo l'equilibrio tra le forze esterne e le sollecitazioni interne.

Se considero il nodo 1 fisso:  $u_1 = 0$

Partiziono la matrice tra le forze dei nodi vincolati e le forze dei nodi liberi

$$\begin{array}{c|cc|cc|c} F_1 & k_a & -k_a & 0 & u_1=0 \\ \hline F_2 & -k_a & k_a+k_b & -k_b & u_2 \\ \hline F_3 & 0 & -k_b & k_b & u_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc|c} F_2 & k_a+k_b & -k_b & u_2 \\ \hline F_3 & -k_b & k_b & u_3 \end{array} \quad \text{Trao la matrice che consente di valutare } u_2, u_3 \text{ alla luce di } F_2, F_3 \rightarrow \text{questa è INVERTIBILE}$$

→ Tra gli  $u_2, u_3$  sono in grado di valutare la reazione vincolare  $F_1$ .

A partire dagli spostamenti nodali, valuto le sollecitazioni della struttura.

Questa operazione vista in questo modo può essere formalizzata nel METODO DEGLI SPOSTAMENTI

indico con:

$$|u| = \begin{array}{c} u_2 \\ u_3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{SPOSTAMENTI NODI LIBERI} \\ \text{SPOSTAMENTI NODI VINCOLATI (nodi)} \end{array} \quad \rightarrow \text{vettore spostamenti}$$

$$|F| = \begin{array}{c} F_2 \\ F_3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{FORZE SUI NODI LIBERI} \\ \text{FORZE SUI NODI VINCOLATI} \rightarrow \text{reazioni vincolari richieste} \end{array}$$

$|K|$  per la struttura       $|k|$  per l'elemento

Si può pensare di scambiare nelle matrici le righe con le righe e le colonne con le colonne in modo da portare in basso tutti i nodi vincolati:

$$|F| = |K| |u| \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c|cc} |F_2| & |k_{11}| & |k_{12}| \\ \hline |F_3| & |k_{21}| & |k_{22}| \end{array} \begin{array}{c} u_2 \\ u_3 \end{array} \quad \begin{array}{l} F_2 = k_{11} u_2 + k_{12} u_3 \quad (1) \\ F_3 = k_{21} u_2 + k_{22} u_3 \quad (2) \end{array}$$

Dalla (1):  $k_{11} u_2 = (F_2 - k_{12} u_3) = [F]_2 \quad \rightarrow F_2 = k_{11} \cdot u_2$

Questo scatto è un sistema risolubile e  $k_{11}$  è invertibile → trovo  $u_2$

→ Posso dunque tornare indietro e ricavare le reazioni:

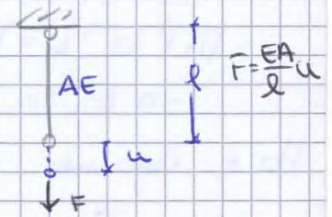
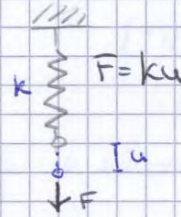
$$|F_3| = |k_{21}| \cdot |u_2| + |k_{22}| \cdot |u_3|$$

Questo è il modo formale per risolvere il problema strutturale (concettualmente è semplice)

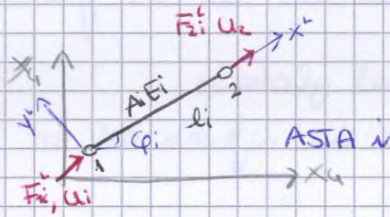
# STRUTTURE RETICOLARI

Per l'elemento biella/asta valgono tutte le considerazioni fatte per l'elemento molle:

$$k = \frac{EA}{l} \quad \text{rigidezza biella}$$



La teoria sviluppata per 2 nodi allineate è valida in ogni caso anche se non ho più allineamento.  $\rightarrow$  la posso dunque usare per strutture reticolari composte da aste comunque inclinate nel piano.



Data un'asta inclinata, nel suo sistema locale  $x^i, y^i$  vale quanto detto:

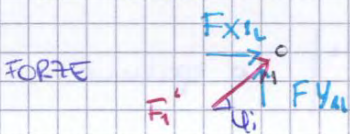
$$\begin{bmatrix} F_{1i}^i \\ F_{2i}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1i}^i \\ u_{2i}^i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{1i}^i \\ F_{2i}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA_i}{l_i} & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1i}^i \\ u_{2i}^i \end{bmatrix} \quad \text{legame F-u nel sistema locale } x^i, y^i$$

Per scrivere la matrice di rigidezza globale della struttura, occorre sommare le matrici di tutte le aste insieme comunque disposte nel piano. È conveniente dunque per ciascuna asta riferire il legame F-u ad un sistema di riferimento globale  $x^g, y^g$ .

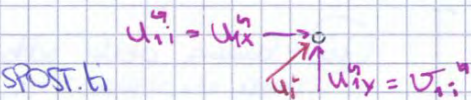
Trasferisco il legame F-u nel sistema locale allo stesso nel sist. globale

• nel nodo 1:



$$\begin{cases} F_{x1i} = F_{1i}^i \cos \varphi_i = F_{1i}^i C_i \\ F_{y1i} = F_{1i}^i \sin \varphi_i = F_{1i}^i S_i \end{cases}$$

lo stesso nel nodo 2



$$\begin{cases} u_{1i}^g = u_{1i}^i \cos \varphi_i = u_{1i}^i C_i \\ u_{2i}^g = u_{1i}^i \sin \varphi_i = u_{1i}^i S_i \end{cases}$$

lo stesso nel nodo 2

Riunisco e costruisco il legame tra sistema locale e globale:

$$\begin{bmatrix} F_{x1i} \\ F_{y1i} \\ F_{x2i} \\ F_{y2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_i & \emptyset \\ S_i & \emptyset \\ \emptyset & C_i \\ \emptyset & S_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{1i}^i \\ F_{2i}^i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{1i}^g \\ u_{2i}^g \\ u_{2i}^g \\ u_{1i}^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_i & \emptyset \\ S_i & \emptyset \\ \emptyset & C_i \\ \emptyset & S_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1i}^i \\ u_{2i}^i \end{bmatrix}$$

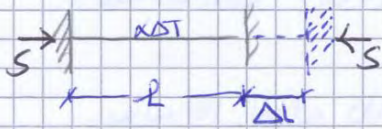
$$|F_i^g| = |T_i| |F_i^i|$$

$$|u_i^g| = |T_i| |u_i^i|$$

T = Matrice di trasformazione  $4 \times 2$

mutare alle vertici e avere più applicate nei nodi. Se in campo elastico (es. variazione termica) danno applicate i carichi equivalenti sui nodi. (PSE)

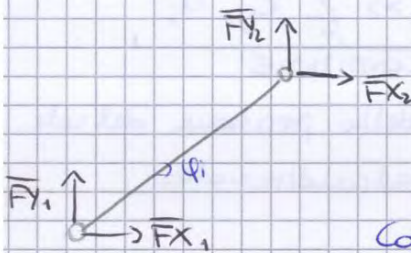
**ESEMPIO** Asta soggetta a variazione termica.



A causa della variazione termica, la struttura vorrebbe spostarsi di  $\Delta l \rightarrow$  uosa dunque una sollecitazione nell'asta.

$$\Delta l = \alpha \Delta T L$$

$$S = \frac{EA}{L} \Delta l = EA \alpha \Delta T \rightarrow \text{sollecitazioni ai nodi note a causa di } \alpha \Delta T$$



$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} = S \begin{Bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ -\cos \phi \\ -\sin \phi \end{Bmatrix} = EA \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} C \\ S \\ -C \\ -S \end{Bmatrix}$$

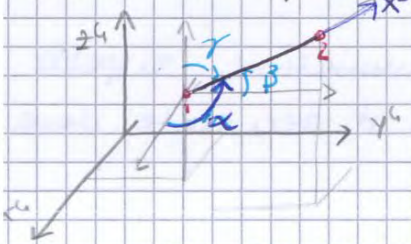
Considero la variazione termica aggiungendo ai nodi i carichi equivalenti  $\tilde{F}_i = -F_i$  (carichi equivalenti)

Il vettore sollecitazioni globale nell'asta è figlio di 2 contributi:

- > 1 dovuto agli spostamenti
  - > 1 dovuto alla variazione termica
- } PSE  $[K] \{u\} + \{F\}$

I carichi equivalenti sono dunque pari alle reaz. vincolari d'incastro per presto fluo meno cambiate di segno

**Asta nello spazio**



Note le coord. x, y, z dei nodi 1 e 2, posso valutare i coseni direttori dell'asse  $x'$

$$\begin{aligned} l &= \cos \alpha \\ m &= \cos \beta \\ n &= \cos \gamma \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} F_x = F^l \cos \alpha = F^l \cdot l \\ F_y = F^l \cos \beta = F^l \cdot m \\ F_z = F^l \cos \gamma = F^l \cdot n \end{cases}$$

$F_x, F_y, F_z$  nel sist. globale

Lo per ogni nodo

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & 0 \\ m & 0 \\ n & 0 \\ 0 & l \\ 0 & m \\ 0 & n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1^l \\ F_2^l \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow |F^l| = |T| |F^l|$$

$$|u^l| = |T| |u^l|$$

T = matr. di trasformazione 6x2  
Proprietà  $|T^T T| = |I|$

Presto a calcolare la matr. di rigidezza globale per l'elemento, est. procedimento visto prima:

$$[K]_g = [T] [k] [T]^T = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 \times 3 & 3 \times 3 \\ 3 \times 3 & 3 \times 3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{otengo una } 6 \times 6$$



# SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

Dato un sistema:

$$\textcircled{1} \begin{cases} C_{11} X_1 + C_{12} X_2 + \dots + C_{1m} X_m = d_1 \\ C_{21} X_1 + C_{22} X_2 + \dots + C_{2m} X_m = d_2 \\ \vdots \\ C_{n1} X_1 + C_{n2} X_2 + \dots + C_{nm} X_m = d_n \end{cases} \rightarrow |C| |X| = |d|$$

Ho un sistema figlio della fase di assemblaggio e dell'imposizione delle c.c.

I metodi di soluzione del sistema si dividono in 2 categorie:

A) METODI DIRETTI - Passano sin dall'inizio il n° di operazioni di calcolo

B) METODI INDIRETTI - Sono cicli iterativi e si va verso la soluzione per convergenza  
 => Non so con precisione quanti cicli sono necessari.

## ① Metodi diretti METODO DI GAUSS

Questo metodo parte dal sistema iniziale e giunge ad un sistema così fatto:

$$\textcircled{2} \begin{cases} X_1 + g_{12} X_2 + g_{13} X_3 + \dots + g_{1m} X_m = h_1 \\ X_2 + g_{23} X_3 + \dots + g_{2m} X_m = h_2 \\ \vdots \\ X_m = h_m \end{cases}$$

Con un sistema di questo tipo, la soluzione è semplice perché ho già l'ultimo termine, tornando indietro trovo gli altri. Il problema è passare da ① a ②.

- Per ottenere ② devo normalizzare la 1° riga (RIGA CARDINE) dividendo i suoi termini per  $C_{11}$  (CARDINE):  $X_1 + g_{12} X_2 + g_{13} X_3 + \dots + g_{1m} X_m = h_1$
- Sostituisco le altre righe con la combinazione lineare fra la riga stessa e la riga cardine normalizzata moltiplicata per il coefficiente  $C_{i1}$  (in modo da ottenere come coeff di  $X_1$  il valore 0).
- Assumo come riga cardine la seconda e ripeto il processo: normalizzo e riscivo come combinazione lineare con questa tutte le altre righe in modo da annullare il coefficiente di  $X_2$  dalla 3° riga in poi.
- Si applica lo stesso procedimento alle righe successive (facendole diventare cardine una per volta). Si ottiene un nuovo sistema equivalente

all'originale.

$$|S| |X| = \begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1m} \\ 0 & S_{22} & \dots & S_{2m} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{matrix} & = \begin{matrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_m \end{matrix} \end{array}$$

Operazione di TRIANGOLARIZZAZIONE della matrice nel METODO DI GAUSS

La soluzione è adesso semplice, calcolo e ritroso tutte le incognite  
 -> BAND SOSTITUZIONE o SOSTITUZIONE A RITROSO

con i metodi diretti sappiamo già dal corso di matematica che, i metodi indiretti invece sono di tipo iterativo, non lo sappiamo, sono in funzione del test di convergenza.

## Metodi indiretti: METODO DI GAUSS SEIDEL

L'algoritmo scelto si inizia mediante l'attribuzione di un valore arbitrario alle incognite. È consuetudine al 1° ciclo di calcolo attribuire nella 1° eq.me:  $x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = \dots = x_n^{(0)} = 0$  e  $x_1 = \frac{d_1}{c_{11}}$

nella 2° eq.me:  $x_3^{(0)} = x_4^{(0)} = \dots = x_n^{(0)} = 0 \rightarrow x_2 = (d_2 - c_{21}x_1) / c_{22}$

ho calcolato  $x_2$  avendo come dato  $x_1$  calcolato nell'eq. 1.

Uscendo avanti così per le  $m$  eq.me fino alla fine e ottengo  $m$  valori  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  di 1° approssimazione.

Si inizia il 2° ciclo analogo al precedente usando come valori approssimati delle incognite  $x$  quelli del ciclo precedente e non zero.

Valuto il 2° vettore  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  di 2° approssimazione.

Quando mi fermo?

Per valutare l'accuratezza della soluzione, analizzo il vettore RESIDUO:

$$|R| = |C| |X^{(m)}| - |d| \quad \text{al passo } m$$

Se piccolo, ho raggiunto in modo soddisfacente la soluzione.

Se grande, proseguo con le iterazioni.

Posso valutare la differenza fra la soluzione esatta e quella approssimata:

premultiplico entrambi i membri per  $|C|^{-1}$

$$|C|^{-1} |R| = |X^{(m)}| - |C|^{-1} |d|$$

Anche se  $|R|$  è risultato piccolo, non è detto che questi valori siano piccoli.

È una cosa diversa, è una seconda verifica che devo sempre effettuare perché potrebbe capitare una matrice  $|C|$  (di righe) malcondizionata (es: posto in modo errato l'impostazione dei vincoli). Il MALCONDIZIONAMENTO lo legge da questa seconda verifica (piccole variazioni di  $|C|$  o di  $|d|$  provocano grandi variazioni di  $|X|$ )

Per valutare la convergenza posso anche operare per convergenza di norma:

$$\text{Range } f_i = \frac{S_i}{|c_{ii}| - S_i} \quad \text{con } S_i = \sum_{k \neq i}^m c_{ik} \quad k \neq i$$

$$\rightarrow f_i \leq f = \max f_i$$

Il metodo converge se  $f_i > 0 \forall i$  e tanto più rapidamente quanto  $f$  è più piccolo (un valore empirico che assicura rapida convergenza è  $f < 2$ )

## Polinomi di Hermite

Polinomio interpolatore o funzione di Hermite:  $H_{ki}^{(N)}(x)$

$N = n^{\circ}$  di derivate da interpolare (grado di derivazione)  $0 < k < N$

$i =$  indica il modo dove la funzione  $\phi(x)$  risulta definita

CASO MONODIMENSIONALE con 2 punti d'interpolazione

INTERPOLAZIONE

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^N H_{ki}^{(N)}(x) \cdot \phi_i^{(k)}$$

$$(*) = \sum_{i=1}^2 \left[ H_{0i}^{(N)}(x) \cdot \phi_i^{(0)} + H_{1i}^{(N)}(x) \phi_i^{(1)} + H_{2i}^{(N)}(x) \phi_i^{(2)} + \dots + H_{Ni}^{(N)}(x) \phi_i^{(N)} \right]$$

$\phi_i^{(k)}$  = valore della derivata "k-esima" nel punto "i" (dimostrazione)

$\phi_i^{(0)}$ , per  $k=0$  = valore della funzione in "i"

I polinomi di Hermite godono delle seguenti proprietà:

$$(**) \frac{d^{\tau}}{dx^{\tau}} H_{ki}^{(N)}(x_p) = \delta_{ip} \delta_{k\tau}$$

$i, p = 1, 2$   
 $k, \tau = 0, 1, \dots, N$  (\*\*)

OS:  $\phi_p^{(k)}$  = valore della derivata "k-esima" in "p"

$$\frac{d^{\tau} \phi}{dx^{\tau}}(x_p) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^N \frac{d^{\tau} H_{ki}^{(N)}(x_p)}{dx^{\tau}} \cdot \phi_i^{(k)} = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^N \delta_{ip} \delta_{k\tau} \phi_i^{(k)} = \phi_p^{(\tau)}$$

$$\rightarrow \phi(x) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^N H_{ki}^{(N)}(x) \frac{d^k \phi}{dx^k}(x_i) \quad (**)$$

a) FUNZIONE DI ORDINE ZERO (continuità della sola funzione).

Per semplicità studio il caso di due sole stazioni ( $i=1, 2$ )

FUNZIONE APPROSSIMANTE  $\phi(x) = \sum_{i=1}^2 H_{0i}^{(0)}(x) \cdot \phi_i^{(0)} = \sum_{i=1}^2 H_{0i}^{(0)}(x) \cdot \phi(x_i)$

I polinomi di Hermite si determinano mediante la (\*\*\*) ( $H_{01}^{(0)}$  e  $H_{02}^{(0)}$ )

Esempio  $H_{01}^{(0)}$ :  $\frac{d^0 H_{01}^{(0)}}{dx}(x_p) = \delta_{1p} \delta_{00} = \delta_{1p} = H_{01}^{(0)}(x_p)$

$\rightarrow H_{01}^{(0)}(x_1) = 1$   $H_{01}^{(0)}(x_2) = 0$   $H_0$  2 condizioni  $\Rightarrow$  la funzione di Hermite

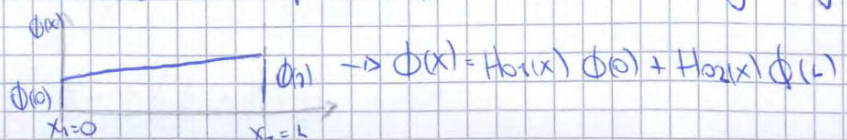
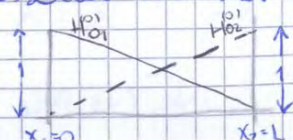
$H_{01}^{(0)}$  è definita da due soli parametri incogniti e dunque è una retta.

Il polinomio può solo essere di questo tipo:  $H_{01}^{(0)}(x) = a_1 + a_2 x$

Ipotezzando  $x_1=0$  e  $x_2=L$   $\rightarrow a_1 = 1$   $a_2 = -\frac{1}{L}$   $\hookrightarrow H_{01}^{(0)}(x) = 1 - \frac{x}{L}$

Analogamente per  $H_{02}^{(0)}(x)$  si ricava:  $H_{02}^{(0)}(x) = \frac{x}{L}$

Si osserva che  $H_{01}^{(0)}$  e  $H_{02}^{(0)}$  coincidono con i polinomi lineari di Lagrange



### 3) Elementi monodimensionali

Con l'uso di questi metodi d'approssimazione, si evitano direttamente le funzioni di forma senza passare attraverso le "condotte generalizzate".

#### (a) ELEMENTO LINEARE (a 2 nodi, $x_1=0$ $x_2=L$ )

$$\Phi(x) = [N]^T \bar{\Phi} \rightarrow \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}$$

•  $[N_1(x) \ N_2(x)] = \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \frac{x}{L} \right]$  LAGRANGE

•  $[H_{01}^0(x) \ H_{02}^0(x)] = \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \frac{x}{L} \right]$  HERMITE

Nel caso lineare, parlare di Lagrange o di Hermite è lo stesso.

#### (b) ELEMENTO QUADRATICO (a 3 nodi $x_1$ $x_2$ $x_3$ )

$$\Phi(x) = [N]^T \bar{\Phi} = [N_1(x) \ N_2(x) \ N_3(x)] \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} \quad \text{Lagrange}$$

$$N_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$N_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$N_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Per avere campo quadratico un elemento 3 nodi e dalla teoria di Lagrange questi devono essere equidistanti tra loro.

Tramite Lagrange riesce a dare un'approssimazione solo di  $\Phi(x)$  e non delle sue derivate.

#### (c) ELEMENTO CUBICO

- Può essere visto in 2 casi: ① teoria di Lagrange (4 punti di stazione)  
 ② teoria di Hermite (2 punti di stazione)

##### (C1) A 4 NODI ( $x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$ )

$$\Phi(x) = [N]^T \bar{\Phi} \quad \left\{ \begin{array}{l} N_1 = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \\ N_2 = \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} \\ N_3 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} \\ N_4 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} \end{array} \right.$$

Teoria di Lagrange

##### (C2) A 2 NODI ( $x_1$ $x_2$ )

Si utilizzano i valori nodali di  $\Phi(x)$  e della sua derivata prima  $\frac{d\Phi(x)}{dx}$

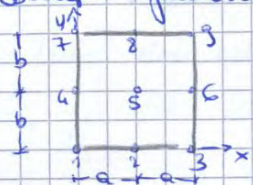
$$\Phi(x) = [N]^T \bar{\Phi} = [H_{01}^{(1)} \ H_{02}^{(1)} \ H_{11}^{(1)} \ H_{12}^{(1)}] \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \frac{d\Phi_1}{dx} \\ \Phi_2 \\ \frac{d\Phi_2}{dx} \end{bmatrix} \quad \text{Hermite}$$

2 punti  
4 punti di forma

• Tale tecnica di approssimazione è utilizzata quando è necessario soddisfare la continuità  $C^1$  della funzione di campo  $\Phi(x)$

• In alcuni casi d'interesse il problema Hesseiano della trave

Esempio funzione di forma:



$$N_I = N_I(x) \cdot N_I(y)$$

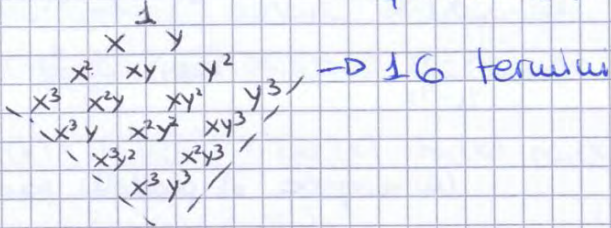
$$N_I(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-a)(x-2a)}{(-a)(-2a)}$$

$$N_I(y) = \frac{(y-y_1)(y-y_4)}{(y_2-y_1)(y_2-y_4)} = \frac{y(y-b)}{2b(2b-b)}$$

$$N_I(x,y) = \frac{(x-a)(x-2a)}{2a^2} \cdot \frac{y(y-b)}{2b^2}$$

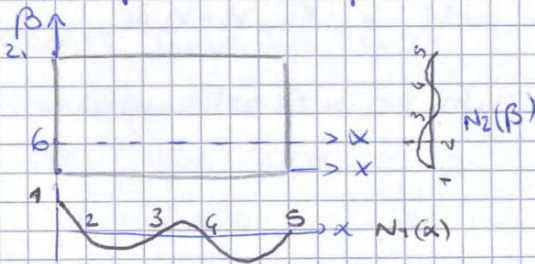
Analogamente a quanto visto per il biquadrico, è possibile pensare l'elemento bicubico lagrangiano come prodotto di 2 polinomi unidimensionali cubici in x e y:

$$\Phi(x,y) = (a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3)(b_1 + b_2y + b_3y^2 + b_4y^3)$$

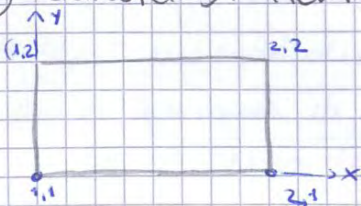


In genere polinomi del genere si usano per gli STATI PIANI mentre si usano le funzioni di Hermite per le piastre

→ Principio dell'interpolazione lagrangiana in 2D  $N_6(x,y) = N_1(x) \cdot N_2(y)$   
PRINCIPIO GENERALE



(b) POLINOMI DI HERMITE



Sempre con l'uso di elementi rettangolari è possibile ricavare le funzioni di interpolazione  $N(x,y)$  basate sui polinomi di Hermite del primo ordine.

Ho elemento rettangolare con 4 nodi e 4 parametri per ciascun nodo:  $\Phi_x \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_x \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_x \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)_x$

→  $4 \times 4 = 16$  gradi

$$\Phi(x,y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 [H_{0i}^{(1)}(x) H_{0j}^{(1)}(y) \cdot \Phi_{ij} + H_{1i}^{(1)}(x) H_{0j}^{(1)}(y) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{ij} + H_{0i}^{(1)}(x) H_{1j}^{(1)}(y) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{ij} + H_{1i}^{(1)}(x) H_{1j}^{(1)}(y) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)_{ij}] = [N] \{\Phi\}$$

Le funzioni di forma sono dunque del tipo:

$$\begin{aligned} N_1(x,y) &= H_{01}^{(1)}(x) H_{01}^{(1)}(y) \\ N_2(x,y) &= H_{11}^{(1)}(x) H_{01}^{(1)}(y) \\ &\vdots \\ N_{16}(x,y) &= H_{22}^{(1)}(x) H_{22}^{(1)}(y) \end{aligned}$$

QSS: Data  $f=f(L_1, L_2)$ , la derivata di  $f$  rispetto ad  $x$  vale:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial x} \quad \leftarrow \quad \frac{\partial L_1}{\partial x} = -\frac{1}{L} \quad \text{e} \quad \frac{\partial L_2}{\partial x} = \frac{1}{L}$$

Se sto valutando  $|K|$  scritta in termini di  $L_1$  e  $L_2$ , l'integrazione di termini di polinomi in "coordinate interne" può essere effettuato in modo semplice:

$$\int_{x_1}^{x_2} L_1^\alpha L_2^\beta = \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha+\beta+1)!} \quad \text{tramite l'uso di tabelle che in funzione di } \alpha, \beta \text{ danno il valore dell'integrale}$$

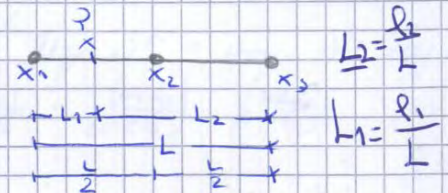
⇒ Ci conviene usare queste coordinate proprio perché è più semplice integrare.

a<sub>2</sub>) CAMPO QUADRATICO

Può farsi lo stesso discorso in campo quadratico

Per come costruite,  $L_1$  e  $L_2$  variano tra 0 e 1

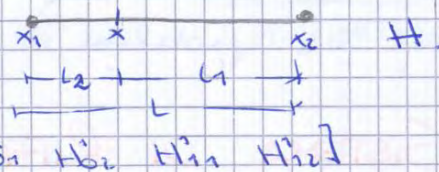
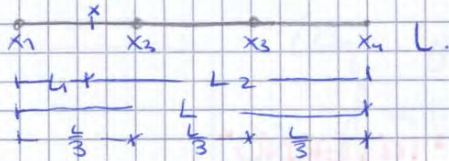
Sono  $N_1, N_2, N_3$  in funzione di  $L_1, L_2$



a<sub>3</sub>) CAMPO CUBICO LAGRANGE

a<sub>4</sub>) CAMPO CUBICO HERMITE

Per il campo cubico ho la formulazione di Lagrange e di Hermite.



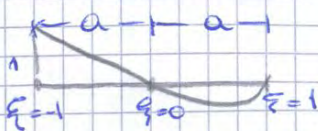
$$N = [H_{01} \quad H_{02} \quad H_{11} \quad H_{12}]$$

Q5) DA "COORDINATE INTERNE" A "COORDINATE NATURALI"

$L_1$  e  $L_2$  si definiscono "COORDINATE INTERNE". Se studio l'elemento fatto adimensionatamente NON faccio riferimento a queste. Si fa solitamente riferimento ad un sistema di riferimento adimensionale detto "COORDINATE NATURALI".

Questo sistema può essere visto come generalizzazione del sistema di coordinate interne; in questo caso l'adimensionalizzazione è tale per cui la coordinata naturale risulta compresa tra -1 e 1. Nel dominio, gli estremi variano tra -1 e 1.

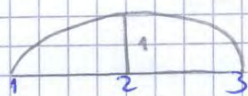
1- CAMPO QUADRATICO



$$N_1(\xi) = \frac{1}{2} \xi(\xi-1)$$

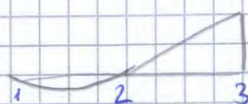
Si definisce coordinate naturale  $\xi$ :

$$\xi = \frac{x-x_2}{a}$$



$$N_2(\xi) = (1+\xi)(1-\xi)$$

→ Sono le  $N$  in coord  $x_1, x_2, x_3$  (lagr.) e poi le trasformo in  $\xi$ .



$$N_3(\xi) = \frac{1}{2} \xi(\xi+1)$$

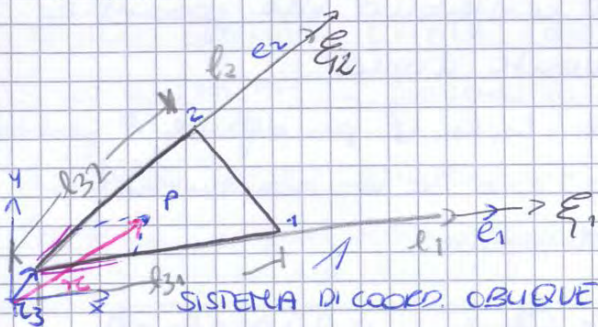
Questa rappresentazione di  $N$  è impiegata negli elementi ISOPARAMETRICI.

Lavorare con le coordinate d'area è semplice per gli elementi triangolari poiché gli integrali si sostituiscono con formule lineari.  
 L'integrazione di termini di polinomi in "coordinate interne" può essere effettuato usando le relazioni

$$\int_{\Delta} L_1^\alpha L_2^\beta dA = \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha + \beta + 1)!} \cdot 2A \quad \rightarrow \quad \int_{\Delta} L_1^\alpha L_2^\beta L_3^\gamma dA = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} \cdot 2A$$

tramite l'uso di tabelle che in funzione di  $\alpha \beta \gamma$  danno il valore dell'integrale.  
 $\rightarrow$  Ci conviene usare queste coordinate proprio perché è poi più semplice integrare.  
N.B. Parlare di  $L_1, L_2, L_3$  equivale a parlare di  $L_1, L_2$  poiché ho dipendenza.

Un altro modo per relazionare  $(x, y)$  alle coordinate d'area  $(L_1, L_2, L_3)$  si ottiene considerando un sistema particolare estrutto nel triangolo:



Posso analizzare il vettore posizione del generico punto P posto all'interno dell'elem.

$\xi_1$  e  $\xi_2$  = coord. adimensionalizzate

$$P(x, y) = P(\xi_1, \xi_2)$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = \frac{x_3\vec{i} + y_3\vec{j}}{x_3} + L_{31}\xi_1\vec{e}_1 + L_{32}\xi_2\vec{e}_2$$

Le coord. oblique adimensionalizzate  $\xi_1, \xi_2$  possono anche essere interpretate come rapporti di area. Si ricave  $\xi_1 = L_1$  e  $\xi_2 = L_2 \rightarrow L_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$   
 vedi pag. 40-41 arco

b) CAMPO LINEARE (Lagrange)

$$L_i(x, y) = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y = N_i(x, y))$$

Assumendo come funzioni di forma  $N_i$  per approssimazioni lineari:

$$N_i = a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3$$

ricavo  $L_i = N_i$  se impongo la condizione  $N_i = 1$  in  $i$  e 0 altrove.

$$N_1 = \begin{cases} 1 & L_1=1 & L_2=0 & L_3=0 \\ 0 & L_1=0 & L_2=1 & L_3=0 \\ 0 & L_1=0 & L_2=0 & L_3=1 \end{cases} \rightarrow N_1 = L_1 \quad \begin{cases} a_1=1 \\ a_2=0 \\ a_3=0 \end{cases}$$

b) CAMPO QUADRATICO (Lagrange) - Dho 6 nodi sul contorno

$$\Phi(x, y) = \sum N_i \Phi_i$$

Le funzioni di forma sono espresse mediante prodotti di polinomi di Lagrange.

I polinomi di Lagrange sono espressi in termini di coordinate d'area.

$$N_i = \prod_{k=1}^{(i)} f^{(k)}(L_j) \cdot \prod_{k=1}^{(i)} f^{(k)}(L_3) \quad \rightarrow \quad f^{(i)}(L_j) = \begin{cases} \frac{1}{i!} \prod_{k=1}^i (i L_j - k + 1) & L \geq 1 \\ 1 & L=0 \end{cases}$$

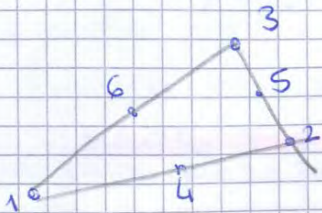
Prodotto di 3 funzioni di Lagrange.  
 $i$  = grado approssimazione (2=QUADR)

$i$  = indice nodo

$L_i^{(i)}$  = valore della coord d'area  $L$  al nodo  $i$

Att: Formulando il comp di spostamenti in termini di  $\xi$ , variabile adimensionale, anziché  $x$  - studiare parametri (es la deformazione) si ha che  $\xi = \frac{2x}{L}$  - Se voglio derivare una funzione di  $\xi$  rispetto ad  $x$ , devo SAPERE COME  $\xi$  si correla a  $x$ .  
Devo costruire la relazione tra  $\xi$  e  $x$ .

4) ELEMENTO QUADRATICO (Def. lineare) LST



Ho 3 ulteriori nodi sui lati del triangolo  
Sotto  $N$  in funzione di  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 \xi_1 + \alpha_3 \xi_2 + \alpha_4 \xi_1^2 + \alpha_5 \xi_1 \xi_2 + \alpha_6 \xi_2^2$$

$$v = \beta_1 + \dots$$

6 coeff. incogniti per  $u$  e 6 per  $v$ .

$[u] = [N][\alpha]$   $\rightarrow$  Noti gli spostamenti, passo alle deformazioni ( $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ )

$\xi_i = N_i$   
Tras  $[E] = [B][\alpha]$

La matrice di rigidezza:  $[K] = t \cdot \int_A [B]^T [D] [B] dA$   $t = \text{spessore}$

9 termini di  $[K]$  sono del tipo  $\int_A \xi_1^x \xi_2^y \xi_3^z dA$

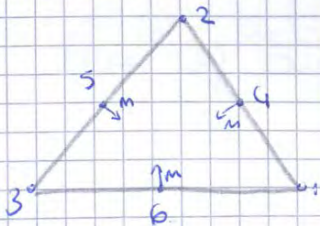
5) ELEMENTO con POLINOMIO del 5° ORDINE (3 nodi)

Ho 12 gde in ogni nodo (6 per  $u$  e 6 per  $v$ )

$\rightarrow$  36 gde in totale

6) FORMULAZIONE DI ELEMENTI PIASTRA

1) ELEMENTO DI FEUPPA - CLOUGH (HTC 12)



Elemento a 6 nodi

Si assume come funz. interpolante un polinomio cubico

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2 + \alpha_4 \xi^3 + \alpha_5 \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \eta^3 + \alpha_8 \xi \eta + \alpha_9 \xi \eta^2 + \alpha_{10} \xi^2 \eta + \alpha_{11} \xi^3 \eta + \alpha_{12} \xi^2 \eta^2$$

COMPLETE

Se considero come incognite nodali lo spost. e le sue derivate rispetto a  $\xi, \eta$  con riferimento a 3 vertici  $\Rightarrow$  Otengo 9 condizioni, ne manca 1.

Devo inserire un ulteriore spostamento nodale  $\rightarrow$  Scelgo la derivata normale rispetto a 1 nodo intermedio (es 4). Si aggiunge dunque un'ulteriore condizione che mi consente di scrivere e determinare i 10 valori di  $\alpha$ .

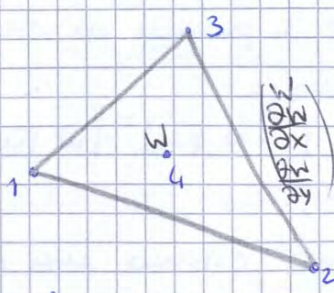
La relazione  $w$  risulta CONTINUA in tutti i lati e la  $\frac{\partial w}{\partial \eta}$  risulta continua nel lato del nodo in cui ho imposto la 10<sup>ma</sup> condizione. Non risulta continua negli altri due lati.  $\rightarrow$  l'elemento risulta non conforme

A partire da questa formulazione è possibile formulare un elem. triang. COMPATIBILE.



Per semplicità posso prendere anche un elemento lineare di  $(\frac{\partial w}{\partial n})/4$  - la continuità dell'elemento si mantiene e si ottiene lo stesso  $|K|$  dell'HIC12

5) ELEMENTO TRIANGOLARE A 4 NODI



Ricordando l'elem di Tocher: ho polinomio cubico, 3 gdl per ogni nodo esterno e 1 gdl per il nodo interno. In coordinate d'area con la N formulata da Felippa:

$$w = \sum_{i=1}^3 [f_i w_i + g_i (\frac{\partial w}{\partial x})_i + h_i (\frac{\partial w}{\partial y})_i] + f_4 w_4$$

Con formulato l'elemento è NON CONFORME - Un metodo per superare tale problema è quello indicato da HARNEY e KELSEY: la modifica da loro proposta va riguarda l'elemento ma la formulazione dell'incastro tra 2 elementi adiacenti: Dati 2 elementi ho continuità di derivata nei nodi ma non nei lati

⇒ la impanga  $(\frac{\partial w}{\partial n})_A = (\frac{\partial w}{\partial n})_B$  (\*) in tutti i lati interni.

⇒  $[C]^T [u] = 0$  ⇒  $[C] [u] = [0]$

$j = n^o$  interfaccia  $[C]^T =$  derivate normali delle funz. di forma  $[u] =$  spost. nodali strutt.

Avendo così imposto la continuità di  $\frac{\partial w}{\partial n}$  l'elemento è CONFORME.

A partire da  $|K|$  dell'elem non conforme, assemblo  $|K|$  struttura - È chiaro che l'energia elastica di defome risulta sbagliata → Applico il METODO

DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE  $[\lambda]$

Scrittura  $\pi_p$  (scorrette) la somma dei prodotti di ciascuna condizione (\*) per il proprio moltiplicatore  $\lambda_j$ :

$$\pi = \pi_p + [\lambda]^T [C] [u] = \frac{1}{2} [u]^T [K] [u] - [F]^T [u] + [\lambda]^T [C] [u]$$

Dal principio di minimo dell'energia potenziale generalizzata:

$$\left[ \frac{\partial \pi}{\partial u_i} = 0 \right] \quad \left[ \frac{\partial \pi}{\partial \lambda_j} = 0 \right] \quad \text{Stazionarietà rispetto a } u \text{ e } \lambda$$

Si scrive:  $\begin{cases} [K] [u] - [F] + [C] [\lambda] = 0 \\ [C] [u] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} [K] & [C]^T \\ [C] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u] \\ [\lambda] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F] \\ 0 \end{bmatrix}$

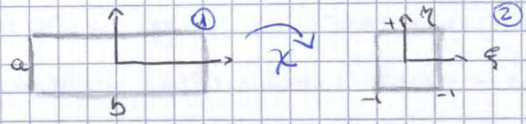
$[\lambda]$  fisicamente è un vettore di forze generalizzate vincolari necessarie per eliminare il salto di derivata normale

Posso poi eliminare  $[\lambda]$  tramite condensazione statica.

• Sono possibile ad un elemento conforme attraverso un altro tecnica.

### C) ELEMENTO BIDIMENSIONALE (RETTANGO) (KETTANQUAKE)

Per gli elementi rettangolari, per passare da ① a ② mantenendo forme regolari, basta fare un cambiamento di scala.

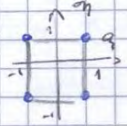


Si studia il problema ②

#### 1) Elementi della famiglia di Lagrange

La determinazione delle funzioni di forma per elementi rettangolari di classe  $C^0$  è semplice: si esegue il prodotto di funzioni di forma 1-D per costruire la funzione di forma 2D voluta:  $N(\xi, \eta) = N(\xi) \cdot N(\eta)$

##### • BILINEARE



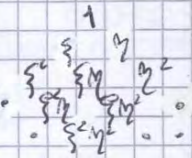
$$N(\xi, \eta) = (1 + \xi)(1 + \eta) = 1 + \xi + \eta + \xi\eta$$

Non corrette  
(individuo solo i termini)

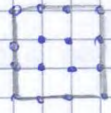
##### • BIQUADRATICO



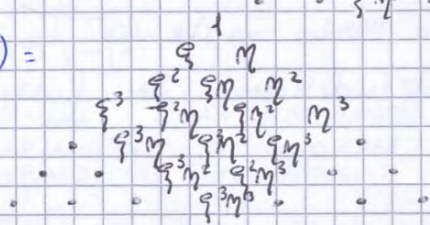
$$N(\xi, \eta) = (1 + \xi + \xi^2)(1 + \eta + \eta^2) = 1 + \eta + \eta^2 + \xi + \xi\eta + \xi\eta^2 + \xi^2 + \xi^2\eta + \xi^2\eta^2$$



##### • BICUBICO



$$N(\xi, \eta) = (1 + \xi + \xi^2 + \xi^3)(1 + \eta + \eta^2 + \eta^3) = \dots$$



##### • BIQUARTICO



$$N(\xi, \eta) = (1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4) \cdot (1 + \eta + \eta^2 + \eta^3 + \eta^4) = \dots$$

La famiglia Lagrangiana presenta alcuni inconvenienti

- ① Il rapporto di convergenza dall'ordine del polinomio interpolante completo.  $\Rightarrow$  Gli elementi di Lagrange contengono termini extra di grado superiore rispetto al grado di completezza (Un elem. di grado  $p$  ha  $(p+1)^2$  termini di cui solo  $\frac{(p+1)(p+3)}{2}$  termini sono necessari per la completezza; i rimanenti  $\frac{(p+1)^2}{2}$  termini NON migliorano il rapporto di convergenza.)
- ② I nodi interni possono generare dei problemi nella costruzione della mesh. Riesco ad avere un'interpolazione che dia i nodi esterni senza gli interni?

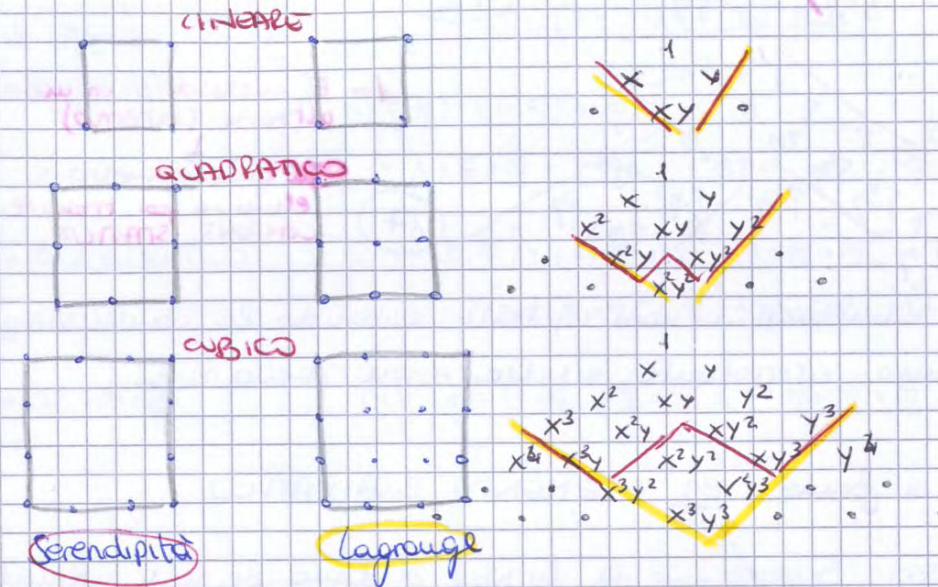
#### 2) Elementi della famiglia della SERENDIPITA'

Questi due problemi risultano in parte risolti dagli elementi della famiglia della Serendipita'. Questi elementi si costruiscono ponendo nei lati nodi aggiuntivi per poter definire una variazione quadratica, cubica... (e seconda) delle funzioni di campo sui lati stessi. Si completano poi questi nodi con dei nodi interni, nel minor numero possibile, in modo da ottenere l'approssimazione voluta mediante un polinomio COMPLETO e SIMMETRICO.

$\rightarrow$  Per un tale elemento le funzioni di forma non sono definite con una

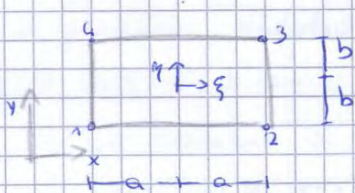
Il metodo ora presentato per le N è valido solo per i nodi sul contorno che contengono i termini appartenenti alle 2 diagonali esterne -  
 Questa procedura genera elementi incompleti per polinomi interpolanti del 4° ordine o superiore - I termini mancanti si costruiscono con procedure diverse concatenate a questa.

CONFRONTO POLINOMI INTERPOLATORI  
POLINOMI DI LAGRANGE e della SERENDIPITA'



(C1) FORMULAZIONE PER ELEMENTI DI STATI PIANI

1) ELEMENTO LINEARE



Definisco il sistema locale naturale  
 $\xi = \frac{1}{a}(x - x_c)$        $\eta = \frac{1}{b}(y - y_c)$

Il campo di spostamenti:

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot \bar{u}_i \\ v = \beta_1 + \beta_2 \xi + \beta_3 \eta + \beta_4 \xi \eta = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot \bar{v}_i \end{cases} \rightarrow |u| = N|u^e|$$

$$\rightarrow N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

$$|u^e| = [\bar{u}_1 \ \bar{v}_1 \ \bar{u}_2 \ \dots \ \bar{u}_4 \ \bar{v}_4]$$

$$\rightarrow D N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) \text{ lineare}$$

Le deformazioni:

$$|\epsilon| = |D| |u| = |D| |N| |u^e| = |B| |u^e|$$

$$|\epsilon| = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \rightarrow |B| = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} = \left[ |B_1| \ |B_2| \ |B_3| \ |B_4| \right]$$

Fondamentale è che u sia il passaggio:

$$\begin{matrix} \eta \rightarrow & x & \rightarrow & \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \downarrow & & & & & \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \eta} \end{matrix}$$

# ELEMENTI ISOPARAMETRICI

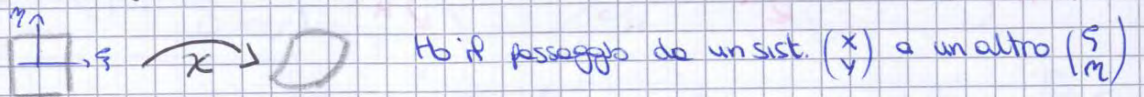
È possibile pensare di studiare elementi con contorno curvilineo per i quali il dominio geometrico risulta definito da regole d'interpolazione sui nodi del contorno stesso. In questo modo nella costruzione dell'elemento interviengono due tipi di interpolazione:

① INTERPOLAZIONE GEOMETRICA

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^m \hat{N}_i(\xi, \eta, \zeta) x_i \\ y = \sum_{i=1}^m \hat{N}_i(\xi, \eta, \zeta) y_i \\ z = \sum_{i=1}^m \hat{N}_i(\xi, \eta, \zeta) z_i \end{cases} \Rightarrow [x] = [\hat{N}] [x_i]$$

② INTERPOLAZIONE degli SPOSTAMENTI  $\Rightarrow [u] = [N] [u]$

Un elemento finito è detto ISOPARAMETRICO quando questo si basa su interpolazioni identiche per la geometria e per il campo di spostamenti:  $[\hat{N}_i] = [N_i]$



L'entità matematica che consente lo studio di  $X$  per dire se è una funzione di Heury è la MATRICE JACOBIANA della trasformazione -

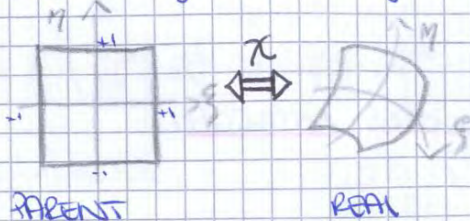
$\Rightarrow$  la forma dell'elemento REAL dovrà essere tale per cui la  $J$  della trasform. un garantisca  $X$  biettiva

La richiesta che faremo è  $\boxed{\det J > 0}$

Tale richiesta esporterà delle limitazioni sull'elem. REAL: per un elem. quadrato o rett. curv., per esempio, i nodi centrali NON possono essere posizionati ovunque. L'irregolarità sulla posizione dei nodi è controllata dalla richiesta  $\det J > 0$  (fatta per avere validità delle proprietà del PAR anche nel REAL)

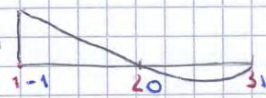
Un secondo importante aspetto riguarda la distorsione dell'elemento real. Nell'elem. PARENT la  $\phi$  è un polinomio di un certo grado, il passaggio a un elem. REAL con distorsioni di forma che ne deviano comporta una riduzione del grado del polinomio. Quando l'interpolazione geometrica è di grado inferiore rispetto alle corrispondente interpolazione di spostamenti, l'elem. è detto SUBPAR

Si avrà un elemento adimensionale (PARENT), di dominio adimensionale (-1, 1) che dopo trasformazione genera l'elemento ISOPARAMETRICO REAL (REAL).



(Elem. adimensionale in coord. naturali) (Elem. ISOPARAMETRICO REAL)

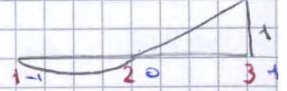
## FUNZIONI DI FORMA ELEMENTO PARENT



$$N_1(\xi) = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1)$$



$$N_2(\xi) = (1 + \xi)(1 - \xi)$$



$$N_3(\xi) = \frac{1}{2} \xi (\xi + 1)$$

La corrispondenza tra PARENT e REAL deve essere del tipo:

$$\xi_1 = -1 \rightarrow x = x_1$$

$$\xi_2 = 0 \rightarrow x = x_2$$

$$\xi_3 = 1 \rightarrow x = x_3$$

Usando per l'elem. parent le stesse  $N_k$ , la rappresentazione geometrica dell'elemento reale isoparametrico è:

$$X = \sum_{k=1}^3 N_k(\xi) x_k = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) x_1 + (1 + \xi)(1 - \xi) x_2 + \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) x_3 \quad (1) \quad \chi \text{ QUADRATICA}$$

Oss: Un esempio di elemento "subparametrico" si ottiene se uso una corrispondenza geometrica del tipo:  $X = \frac{1}{2} (1 - \xi) x_1 + \frac{1}{2} (1 + \xi) x_3$

(Usa funzioni di forma lineari).

1<sup>a</sup> HYP: nodo 2 centrale nell'elem. REAL  $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3)$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) x_1 + (1 + \xi)(1 - \xi) \cdot \frac{1}{2} (x_1 + x_3) + \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) x_3 = \frac{1}{2} (1 - \xi) x_1 + \frac{1}{2} (1 + \xi) x_3 \quad (1') \quad \chi \text{ LINEARE}$$

Oss: La relazione ottenuta è una funzione lineare in  $\xi$  e quindi la funzione quadratica iniziale.

Ricavo

$$\xi(x) = \frac{2x - x_1 - x_3}{x_3 - x_1}$$

Se sostituisco  $\xi$  nelle  $N$  dell'elemento parent ricavo le  $N$  in termini di  $x$  e dunque con riferimento all'elemento REAL ISOPARAMETRICO

$$N_1(x) = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{2x - x_1 - x_3}{x_3 - x_1} \right) \cdot \left( \frac{2x - x_1 - x_3}{x_3 - x_1} - 1 \right) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$N_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

→ Coincidono con i polinomi di Lagrange di tipo quadratico

$$N_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

OK.

2<sup>a</sup> HYP: nodo 2 ad  $\frac{1}{4}$  dell'elemento reale  $x_2 = x_1 + \frac{1}{4}(x_3 - x_1)$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) x_1 + (1 + \xi)(1 - \xi) \cdot \left( x_1 + \frac{1}{4}(x_3 - x_1) \right) + \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) x_3 = \frac{1}{4} (3 + \xi)(1 - \xi) x_1 + \frac{1}{4} (1 + \xi)^2 x_3 \quad (1'') \quad \chi \text{ QUADRATICA}$$

Oss: - La relazione ottenuta è una funzione quadratica in  $\xi$  e dunque NON è facilmente invertibile per ottenere in forma esplicita l'espressione di  $\xi(x)$

- Posso comunque costruire le  $N$  dell'elem. REAL selezionando valori di  $\xi \in \{-1, 0, 1\}$  e calcolando con la (1'') la  $X$  e mediante  $N_1(\xi), N_2(\xi), N_3(\xi)$  i valori delle funzioni di forma.

- Le due oss precedenti valgono sempre quando il nodo 2 non è centrale

b)  $x_2 = x_1 + \frac{3}{8}L$  e a  $\frac{3}{8} \rightarrow \xi$

$J^{(e)}(\xi) = (\xi - \frac{1}{2})x_1 - 2\xi(x_1 + \frac{3}{8}L) + (\xi + \frac{1}{2})x_3 = (\frac{\xi+2}{2})\frac{L}{2} > 0$  in tutto il dominio

J varia linearmente in tutto il dominio, l'applicazione non è uniforme. Ho distorsioni delle funzioni di forma ma  $\chi$  è biettiva ( $J > 0$ ).

c)  $x_2 = x_1 + \frac{1}{4}L$  e a  $\frac{1}{4} \rightarrow \xi$

$J^{(e)}(\xi) = (\xi + 1)\frac{L}{2}$

$J > 0$  all'interno dell'elemento,  $J = 0$  nel punto  $\xi = -1$  ( $x = x_1$ ).

Le funzioni di forma presentano tg. verticale (derivata  $\infty$ ) nel punto  $x_1$ . (SINGOLARE)

d)  $x_2 = x_1 + \frac{1}{8}L$  e a  $\frac{1}{8}$

$J^{(e)}(\xi) = (\frac{3\xi+2}{2})\frac{L}{2}$

$J > 0, J = 0, J < 0$  all'interno dell'elemento

$J > 0$	$-\frac{2}{3} < \xi < 1$
$J = 0$	$\xi = -\frac{2}{3}$
$J < 0$	$-1 < \xi < -\frac{2}{3}$

Per un valore di  $x$  ho due valori di  $\xi$

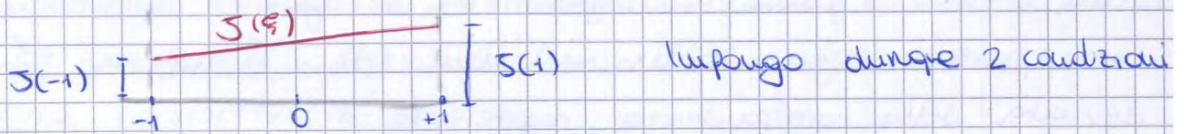
$\Rightarrow \chi$  risulta NON biettiva ( $J < 0$  in alcuni punti)

Nella realtà la geometria dell'elemento non è libera nella gestione dei nodi. I nodi intermedi devono soddisfare il requisito  $J > 0$ .

a) b) OK                      c) d) NO X

Ricerca l'intervallo t.c. sia soddisfabile la condizione  $J > 0$  per  $x_2$ :

$J(\xi) = (\xi - \frac{1}{2})x_1 - 2\xi x_2 + (\xi + \frac{1}{2})x_3 > 0$                        $-1 < \xi < 1$                       lineare in  $\xi$



1)  $J(-1) > 0 \rightarrow J(-1) = -\frac{3}{2}x_1 + 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 > 0 \rightarrow x_2 > x_1 + \frac{1}{4}L$

2)  $J(1) > 0 \rightarrow J(1) = \frac{1}{2}x_1 - 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 > 0 \rightarrow x_2 < x_1 + \frac{3}{4}L$

$x_1 + \frac{L}{4} < x_2 < x_1 + \frac{3}{4}L$                       estremi esclusi

oppure:  $x_c - \frac{L}{4} < x_2 < x_c + \frac{L}{4}$                       ( $x_c = \frac{x_1+x_3}{2}$ )



$\Rightarrow$  Non siamo liberi nel gestire la mesh

Se voglio dunque realizzare un elemento asta quadratico isoparametrico:

$u(x) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) \bar{u}_i$

Le tensioni:  $\sigma(x) = E \cdot \frac{du}{dx} = E \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{dN_i(\xi)}{dx} \cdot \bar{u}_i = E \cdot [B] \cdot [\bar{u}]$                       con  $\begin{cases} [B] = \left[ \frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \quad \frac{dN_3}{dx} \right] \\ [\bar{u}] = [\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{u}_3] \end{cases}$

La matrice di rigidità

$[K] = EA \int_{x_1}^{x_2} [B]^T [B] dx$

$dx = J^{(e)}(\xi) d\xi$

$\frac{dN_i}{dx} = \frac{dN_i}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{dN_i}{d\xi} \cdot \frac{1}{J(\xi)} = B_{\xi i} \cdot \frac{1}{J(\xi)}$

I termini  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$  si ottengono seguendo le procedure:

① Valuto la Jacobiana della Trasformazione:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{vmatrix}$$

② Calcolo l'inversa  $|J|^{-1}$

$$|J|^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{1}{\det |J|} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{vmatrix}$$

In definitiva le derivate di una funzione  $f = \sum_{i=1}^n N_i f_i$  sono

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{vmatrix} = [J]^{-1} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

• L'integrale di una funzione  $g(\xi, \eta)$  sull'elemento REAL:

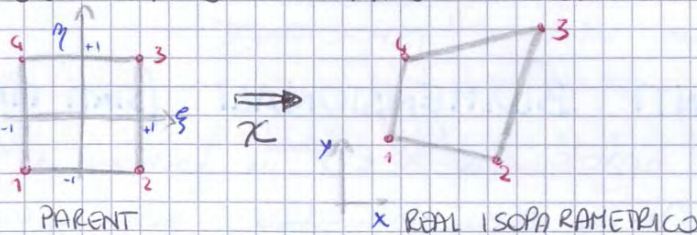
$$\int_A g(\xi, \eta) dA \quad dA = dx dy = \det J \cdot d\xi d\eta$$

$$\rightarrow \int_A g(\xi, \eta) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta) \det J \cdot d\xi d\eta$$

"Sul bidimensionale gestisco il problema del passaggio  $x \rightarrow \xi$  con la Jacobiana della trasformazione."

N.B.  $\det J$  è funzione di  $\xi, \eta$ .

### b) ELEMENTO LINEARE QUADRANGOLARE

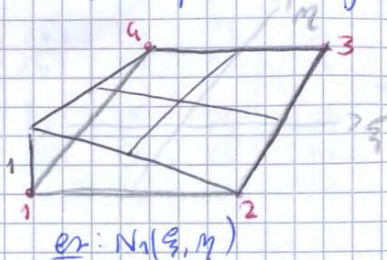


L'elemento REAL può essere di qualsiasi forma, non ho più il problema del RETTANGOLO

Per l'elemento REAL valgono le seguenti leggi di interpolazione:

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \bar{u}_i \\ v = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \bar{v}_i \end{cases} \rightarrow \text{CAMPO degli SPOSTAMENTI} \quad \begin{cases} x = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i \\ y = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i \end{cases} \rightarrow \text{GEOMETRIA}$$

$N_i(\xi, \eta)$  = funzioni di forma definite sull'elemento PARENT



$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned}$$

Quali sono le condizioni da soddisfare perché  $J > 0$  in tutto il dominio?

Oss: Se l'elemento è un parallelogramma (rettangolo o quadrato), i termini  $A_2 = A_4 = B_2 = B_4 = 0$ , il determinante della matrice Jacobiana è costante:  $\det |J| = \frac{(\text{AREA ELEMENTO})}{4} = \text{COSTANTE}$

=> la trasformazione  $\chi$  non genera distorsione -

Se Area  $\rightarrow 0 \Rightarrow \det J \rightarrow 0 \Rightarrow |K|$  cresce, cattivo condizionamento

È bene usare elementi non troppo distorti, con lati e angoli comparabili.

Nella maggior parte dei casi per i lati  $S/1$  è un limite, e per gli angoli  $20/30$

In caso contrario è conveniente usare discretizzazioni diverse o ricorrere ad elementi triangolari.

Abbiamo  $J$  - Calcolo la Matrice di Rigidezza:

Le deformazioni: 
$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

$\rightarrow [E] = [B]^T [D] [B]$  con:  $[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \end{bmatrix}$

$[J]^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} B_1 + B_4 \xi & -(B_1 + B_2 \eta) \\ -(A_3 + A_4 \xi) & A_1 + A_2 \eta \end{bmatrix}$

Le tensioni: 
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \rightarrow [D] = [D] [E] = [D] [B]^T [u]$$

L'ENERGIA ELASTICA DI DEFORMAZIONE:

$U = \frac{1}{2} \int_V [D]^T [E] dV = \frac{1}{2} \int_V [E]^T [B]^T [D] [B] [u] dV = \frac{1}{2} [u]^T [K] [u]$

→ Matrice di RIGIDEZZA:

$[K] = t \cdot \int_A [B]^T [D] [B] dA = t \iint_{\xi, \eta} [B]^T [D] [B] \det |J| d\xi d\eta$

Oss: Il calcolo dell'integrale dei singoli coefficienti della matrice di rigidità avviene attraverso tecnica d'integrazione numerica.

Riavvolgendo  $J$ , questo può essere risolto come:

$J = \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 \eta & a_2 + b_2 \eta \\ a_3 + b_3 \xi & a_4 + b_4 \xi \end{vmatrix}$

$\det J = A_0 + A_1 \xi + A_2 \eta$

$A_0 = \frac{1}{8} [(y_4 - y_2)(x_3 - x_1) - (y_3 - y_1)(x_4 - x_2)]$   
 $A_1 = \frac{1}{8} [(y_3 - y_4)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_4)]$   
 $A_2 = \frac{1}{8} [(y_1 - y_4)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_4)]$

costanti  
(dipendono dalle  
coord. nodali)



Ques: Se attivato lo spostamento  $u^* = (1-\eta)u_2$  in un elemento e non negli elementi adiacenti, questo produce un distacco lungo un lato ed una sovrapposizione lungo l'altro.

- L'elemento passa il patch test solo se è forma di parallelogramma con spessore costante. Occorre modificare lo schema d'integrazione numerica per rimuovere questa restrizione.

-> Miglioramento suggerito da TAYLOR al fine di eliminare le inconsistenze dell'elemento:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^4 N_i x_i \\ y &= \sum_{i=1}^4 N_i y_i \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \rightarrow \text{definizione geometrica} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^4 N_i \bar{u}_i + \begin{bmatrix} P_1 a_1 + P_2 a_2 \\ P_1 a_3 + P_2 a_4 \end{bmatrix} \sim \text{NODI INCOMP.} \\ v &= \sum_{i=1}^4 N_i \bar{v}_i + \begin{bmatrix} P_1 a_3 + P_2 a_4 \\ P_1 a_1 + P_2 a_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \rightarrow \text{definizione campo degli spostamenti.} \end{array} \right.$$

$P_1, P_2 \rightarrow$  funzioni a forma nodi incompatibili  
 $a_1, \dots, a_4 \rightarrow$  componenti di spostamento nodi incompatibili

Le deformazioni:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \rightarrow |E| = |D| |u| \rightarrow |u| = |N| |\bar{u}| + |P| |a|$$

$$|E| = |D| (|N| |\bar{u}| + |P| |a|) = |D| |N| |\bar{u}| + |D| |P| |a| = |B| |\bar{u}| + |P'| |a|$$

L'ENERGIA DI DEFORMAZIONE ELASTICA:

$$U = \frac{1}{2} \int_V |E|^T |D| |E| dV = \frac{1}{2} \int_V (|\bar{u}|^T |B|^T + |a|^T |P|^T) |D| (|B| |\bar{u}| + |P| |a|) dV$$

$$\bullet |B| |\bar{u}| + |P| |a| = |B| |P'| \cdot \frac{|\bar{u}|}{|a|} \quad \bullet |\bar{u}|^T |B|^T + |a|^T |P|^T = \frac{|\bar{u}|^T |a|^T}{|P'|^T} \begin{bmatrix} |B|^T \\ |P|^T \end{bmatrix}$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \frac{|\bar{u}|^T |a|^T}{|P'|^T} \begin{bmatrix} |B|^T \\ |P|^T \end{bmatrix} |D| |B| |P'| \frac{|a|}{|a|} dV = \frac{1}{2} |u^*|^T |K| |u^*|$$

$$\Rightarrow |K| = \int_V \frac{|B|^T}{|P'|^T} |D| |B| |P'| dV$$

$$u^* = \frac{|\bar{u}|}{|a|}$$

EQUILIBRIO  $\rightarrow |K| \cdot |u^*| = |F| \rightarrow \begin{bmatrix} k_{u1} & k_{u2} \\ k_{a1} & k_{a2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\bar{u}| \\ |a| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |F_u| \\ |F_a| \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Fin qui Taylor non entra in gioco, ho solo riscritto eq.me con nodi incompatibili.

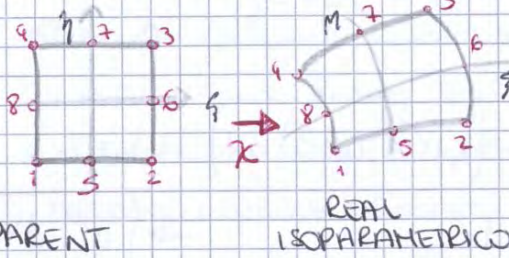
Per la CONVERGENZA, l'elemento deve rappresentare STATO di DEF.me COSTANTE.

Indico con  $|\bar{u}|$  vettore spostamenti che garantisce stato di def.me COSTANTE

$$|a| = |D|$$

$\rightarrow$  dalla (2):  $|k_{a1}| |\bar{u}| + |k_{a2}| |a| = |b| \rightarrow |k_{a1}| |\bar{u}| \neq 0$

52) ELEMENTO QUADRATICO QUADRANGOLARE (Serendipità - 8 nodi)



$X$  biettiva  $\Rightarrow |J| > 0$  in tutto l'elemento

$$\begin{cases} u = \sum N_i u_i \\ v = \sum N_i v_i \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sum N_i x_i \\ y = \sum N_i y_i \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{SPOST. e} \\ \text{GEOM.} \end{matrix}$$

$N_i (S, M)$  già viste in SERENDIPITÀ (C)  $\rightarrow 2$

Come già visto in precedenza per l'elemento lineare, è importante valutare la legge di trasformazione  $X$  tra l'elemento "PARENT" e "REAL" usando il criterio dello studio del determinante dello Jacobiano:  $|J| > 0$

Si dimostra che a questa osservazione corrisponde una serie di requisiti geometrici che l'elemento REAL deve rispettare (NO DIMOSTRO):

- ① Angoli interni ai vertici  $< 180^\circ$ . Limite al massimo la distorsione angolare;  $\rightarrow 90^\circ \pm 20^\circ/30^\circ$  al massimo
- ② Così come per l'elemento quadrato unidimensionale, anche per questo ho dei vincoli sul posizionamento dei nodi intermedi ai lati:  $\pm \frac{1}{4}$  (coincide) Il nodo posto esattamente a  $\pm \frac{1}{4}$  produce singolarità del tipo  $\sqrt{\quad}$ , dunque tale posizionamento è utile in meccanica della frattura.
- ③ Da risultati sperimentali è stata notata perdita di accuratezza se la curvatura del lato è maggiore dell'arco circolare definito dai 3 nodi e sotteso da un angolo di  $180^\circ$ .
- ④ Altro problema è l'ASPECT RATIO: rapporto tra dimensioni dei lati di 5:1 al massimo. Meglio 1:1 o 1:2.
- ⑤ Lati curvi solo al contorno. Se ho grandi curvature del lato  $\Rightarrow$  uso un n° grad. adeguato
- ⑥ Elementi inutilizzabili:

Per la MATRICE di RIGIDEZZA vale lo stesso procedimento riportato in precedenza. Si integra numericamente e occorre porre cura nella definizione del n° dei punti di Gauss da adottare:

$$|K| = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{\det J} |B^T D B| dx dy$$

L'integrande risulta un rapporto di polinomi e dunque NON integrabile esattamente. Con l'integrazione numerica  $|K|$  è approssimata.

Si definisce FULL INTERPOLATION se integro  $|K|$  ESATTAMENTE. Si utilizza una griglia di punti in funzione del grado massimo del polinomio. Sarebbero necessari 3x3 punti di Gauss per l'integrazione esatta ma posso approssimare il calcolo e prendere una griglia di punti inferiore a questa.

Con elementi di questo tipo infatti, l'integrazione esatta può condurre al problema dello SHEAR LOCKING  $\rightarrow$  Rigidezza a taglio dell'elemento elevata e

53) ELEMENTO LINEARE TRIANGOLARE

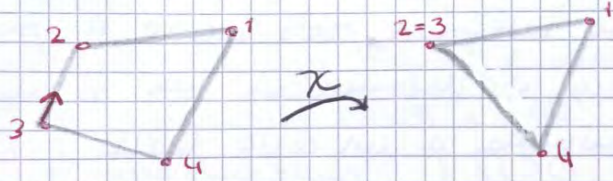
54) ELEMENTO QUADRATICO TRIANGOLARE

Negli elementi ISOPARAMETRICI devo rispettare certe condizioni geometriche nell'elemento REAL, altrimenti perde la biattività di  $\mathcal{K}$  e la condizione  $|J| > 0$ .

55) ELEMENTI TRIANGOLARI FORMULATI MEDIANTE COLASSO DI ELEMENTI

QUADRANGOLARI

①



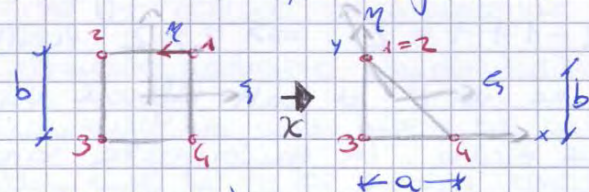
Nodo 3 collassa nel nodo 2.

PARENT quadr.

REAL triang. (CST)

Una strada naturale per generare elem. triangolari partendo da elementi quadrangolari è quella di far collassare un nodo su un altro.

Da un elemento "parent" lineare quadrangolare si ottiene un elemento "real" triangolare CST.



$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i$$

con  $N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$

GEOMETRIA

Se  $x_1 = x_2$  e  $y_1 = y_2$  poiché  $1=2 \Rightarrow$

$$x = \frac{1}{2}(1 + \eta)x_2 + \frac{1}{4}(1 - \eta)(1 + \eta)x_3 + \frac{1}{4}(1 + \eta)(1 - \eta)x_4$$

$$y = \frac{1}{2}(1 + \eta)y_2 + \frac{1}{4}(1 - \eta)(1 - \eta)y_3 + \frac{1}{4}(1 + \eta)(1 - \eta)y_4$$

Volendo studiare  $J$ , calcolo la derivata:

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{a}{4}(1 - \eta) \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{a}{4}(1 + \eta) \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = +\frac{b}{2}$$

$$\rightarrow J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{a}{4}(1 - \eta) & 0 \\ -\frac{a}{4}(1 + \eta) & \frac{b}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{a}{2}(1 - \eta) & 0 \\ -\frac{a}{2}(1 + \eta) & b \end{vmatrix}$$

$$|J|^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{vmatrix} = \frac{1}{\frac{ab}{8}(1 + \eta)} \begin{vmatrix} \frac{b}{2} & 0 \\ \frac{a}{4}(1 + \eta) & \frac{a}{4}(1 - \eta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{4}{a(1 - \eta)} & 0 \\ \frac{2(1 + \eta)}{b(1 + \eta)} & \frac{2}{b} \end{vmatrix}$$

Per gli spostamenti:  $\begin{cases} u_1 = u_2 \\ v_1 = v_2 \end{cases} \Rightarrow$

$$u = \frac{1}{2}(1 + \eta)u_2 + \frac{1}{4}(1 - \eta)(1 - \eta)u_3 + \frac{1}{4}(1 + \eta)(1 - \eta)u_4$$

$$v = \frac{1}{2}(1 + \eta)v_2 + \frac{1}{4}(1 - \eta)(1 - \eta)v_3 + \frac{1}{4}(1 + \eta)(1 - \eta)v_4$$

Le deformazioni:  $[E] = [B][u] = [B][N^*][\bar{u}] = [B^*][\bar{u}]$

$N^*$  lato 3 e un po' 4:  $N_1^* = \frac{1}{2}(1 + \eta)$   $N_2^* = \frac{1}{4}(1 - \eta)(1 + \eta)$   $N_3^* = \frac{1}{4}(1 + \eta)(1 - \eta)$

$$[N^*] = \begin{vmatrix} N_1^* & 0 & N_2^* & 0 & N_3^* & 0 \\ 0 & N_1^* & 0 & N_2^* & 0 & N_3^* \end{vmatrix} \quad [B^*] = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial x}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial x}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial y}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial y}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{vmatrix} [N^*] = \begin{vmatrix} N_{1,x}^* & 0 & N_{2,x}^* & 0 & N_{3,x}^* & 0 \\ 0 & N_{1,y}^* & 0 & N_{2,y}^* & 0 & N_{3,y}^* \\ N_{1,x}^* & N_{1,y}^* & N_{2,x}^* & N_{2,y}^* & N_{3,x}^* & N_{3,y}^* \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{vmatrix} = [J]^{-1} \begin{vmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{vmatrix} \rightarrow \text{Otengo valori COSTANTI} \Rightarrow [B^*] = \text{COSTANTE} \Rightarrow [E] = \text{COSTANTE} \Rightarrow [D] = \text{COSTANTE}$$

Otengo l'elemento triangolare CST

## C) ELEMENTI DI VOLUME

Così come ho trattato gli elementi di stati piani bidimensionali, si trattano gli elementi di volume. Si consideri un generico elemento di volume con un suo  $(x, y, z)$ ,  $N_i(\xi, \eta, \zeta)$  funzioni di forma. Ne approssimo la geometria:

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^m N_i \cdot x_i \\ y = \sum_{i=1}^m N_i \cdot y_i \\ z = \sum_{i=1}^m N_i \cdot z_i \end{cases}$$

• Data una funzione definita sull'elemento:  $f(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^m N_i \bar{f}_i$

le derivate cartesiane:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{cases}$$

In termini matriciali:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

- $\frac{\partial f}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \bar{f}_i$
- $\frac{\partial f}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \bar{f}_i$
- $\frac{\partial f}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \bar{f}_i$

I termini  $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \dots, \frac{\partial \zeta}{\partial z}$  si ottengono seguendo la procedura:

① Valuto la Jacobiana della Trasformazione:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \dots \\ \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \dots \\ \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i & \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i & \dots \end{bmatrix}$$

② Calcolo l'inversa  $|J|^{-1}$ :

$$|J|^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{1}{\det J} \cdot \begin{bmatrix} (\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta}) & \dots \\ \dots & \det \text{ minore} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

In definitiva, le derivate di una funzione  $f = \sum_{i=1}^m N_i \bar{f}_i$  sono:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = |J|^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| = |J|^{-1} \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial \xi} \right|$$

• L'integrale di una funzione  $f(\xi, \eta, \zeta)$  sull'elemento REAL:

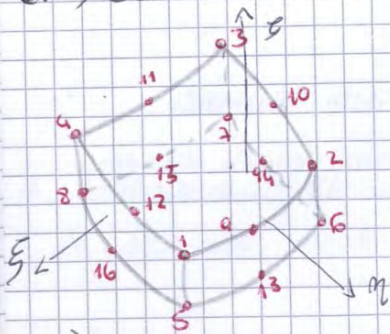
$$\int_V f(\xi, \eta, \zeta) dV \quad dV = \det J \cdot d\xi d\eta d\zeta$$

$$\hookrightarrow \iiint f \det |J| d\xi d\eta d\zeta$$

"Atte sul tridimensionale gestisce il problema del passaggio  $x \rightarrow \xi$  con la Jacobiana della trasformazione"

Q55: Nella condizione generale questo elemento soddisfa il patch test per delle discretizzazioni rettangolari. la risposta subisce un degrado nel caso di mesh irregolari. (Si può procedere come per l'elemento quadrangolare all'integrazione selettiva.)

### d2) ELEMENTO QUADRATICO ESAEDRO A 20 NODI (Sereudipita)



(In Lagrange anche più nodi  $\rightarrow$  risultano molto più ricchi)  
 Questi elementi si usano tendenzialmente sui lati curvi e sono gli elementi 3D più usati.

### d3) CONFRONTO TRA ELEMENTI ESAEDRICI p. 194

1) TRAVE MENSOLA: - elem. esed. a 8 nodi e a 20 nodi. - 1 mesh

L'esedro a 20 nodi dà buoni risultati

2) TRAVE MENSOLA: - esedro a 8 nodi + nodi incompatibili e a 20 nodi - 2 mesh

Non ho tante differenze. N.B.: i nodi incompatibili funzionano bene perché siamo in presenza di un elemento estremamente regolare: parallelepipedo.

3) TRAVE CURVA - esedro a 8 nodi e a 20 nodi. 2 cond. di carico - 2 mesh

L'elemento a 20 nodi risponde meglio ornamente.

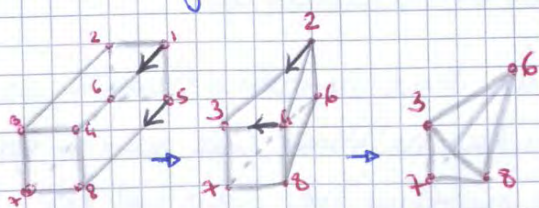
4) PIASTRA APPROCIATA - All'aumentare dello spessore, la def. reale si scosta da quella di piastra sottile perché si viene a sentire la def. a taglio

5) DUA A DOPPIA CURVATURA - elem. a 8 nodi e 20 nodi.

### d4) DEGENERAZIONE DI ELEMENTI ESAEDRICI

Con riferimento agli invarianti di volume si può effettuare lo stesso discorso fatto per gli elementi bidimensionali piani: il collasso dei nodi.

Posso passare da un parallelepipedo a base quadrangolare ad un elemento prismatico a base triangolare o addirittura ad un elemento tetraedro:



$\Rightarrow$  Posso usare elementi a 8 nodi per costruire elementi con minor n° di nodi attraverso questa semplice tecnica.

### PROBLEMA DEL TETRAEDRO - valore $|J| \rightarrow |J|^{-1}$

In seguito al collasso:  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4$   $u_5 = u_6$  figura pag. 20

Valore  $u, v, w$  con questa considerazione e trovando  $N_4^* N_5^* N_7^* N_8^*$  nuove  
 le def. in  $|E| = |B^*| |u^*|$   $|B^*| = |J| |N^*| = |J|^{-1} |J_0| |N^*|$

Svolgendo i calcoli ottengo:  $|B^*| = \text{COSTANTE} \Rightarrow |E| = \text{COSTANTE} \Rightarrow |D| = \text{COST}$

Nel tetraedro ho uno stato di deformazione costante.

$$\begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \\ N_{i,z} \end{bmatrix} = |J|^{-1} \begin{bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \\ N_{i,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & 0 \\ J_{21}^* & J_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \\ N_{i,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i = J_{11} N_{i,\xi} + J_{12} N_{i,\eta} \\ b_i = J_{21}^* N_{i,\xi} + J_{22}^* N_{i,\eta} \\ N_{i,z} \end{bmatrix}$$

Sostituendo questi valori di  $N_{i,x}$  e  $N_{i,y}$  in  $|E|$ :

$$|E| = |B| |u| = (|B_0| + z|B_1|) |u|$$

dove  $|B_0| \rightarrow$  Non contiene i termini in  $z$

$|B_1| \rightarrow$  Coefficienti dei termini che moltiplicano  $z$ .

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_i & 0 & -N_i \\ a_i & N_i & 0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 0 & a_i & 0 \\ 0 & 0 & -b_i \\ 0 & b_i & -a_i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_i \end{bmatrix} = \sum |B_i| |u_i| = \sum (|B_0| + z|B_1|) |u_i|$$

Le Kessiani:  $|D| = |D| |E| = |D| (|B_0| + z|B_1|) |u|$  ( $|D|$  è valutata per elem. di volume)

La MATRICE DI RIGIDEZZA:  $|K| = \int_V |B_0|^T |D| |B_0| dV + \int_V (|B_0|^T + z|B_1|^T) |D| (|B_0| + z|B_1|) dV =$

$$\int_V \{ |B_0|^T |D| |B_0| + |B_0|^T |D| z|B_1| + z|B_1|^T |D| |B_0| + z^2 |B_1|^T |D| |B_1| \} dV =$$

$$= \int_V |B_0|^T |D| |B_0| dV + \int_V z^2 |B_1|^T |D| |B_1| dV \rightarrow \text{In } |K| \text{ ho anche il contributo del taglio trasversale.}$$

$|B_0|$  ha dei coefficienti solo in  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{2}$   $\rightarrow$  TAGLIO

CONTRIBUTO DATO DALLA FLESSIONE

Nel caso di piastra omogenea, dopo integrazione lungo  $z$ , si ha:

$$|K| = |K_f| + |K_s| = t \cdot \iint_S |B_0|^T |D| |B_0| \det S d\xi d\eta + \frac{t^3}{12} \iint_S |B_1|^T |D| |B_1| \det S d\xi d\eta$$

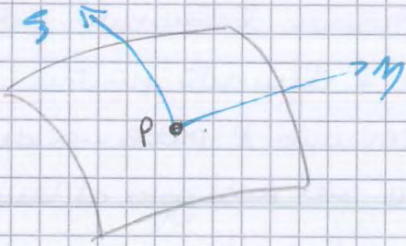
Ho affrontato l'elemento piastra.

N.B.:  $|K|$  non può essere integrata con la tecnica della full integration poiché vi porterebbe a problemi di shear locking. Gli integrali si calcolano per via numerica applicando regole di integrazione selettiva (Simpson & Fix o altro) al fine di evitare il fenomeno di shear locking.

Nonostante l'elemento a 20 nodi dia dei buoni risultati come elemento piastra non è così per i gusci sottili.

## E) ELEMENTI DI TRANSIZIONE

raffresento la geometria con riferimento al piano medio --- e al layer \* —  
 Al variare di  $\xi$  individuo layer sempre diversi e su quelli la geometria.



Definito un punto P sulla superficie media, definisco i vettori tangenti alle curve  $\xi = \text{cost}$ ,  $\eta = \text{cost}$  passanti per P:

$$\begin{cases} \bar{T}_\xi = \frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{j} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \bar{k} \\ \bar{T}_\eta = \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{j} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \bar{k} \end{cases}$$

Costruite le tangenti,

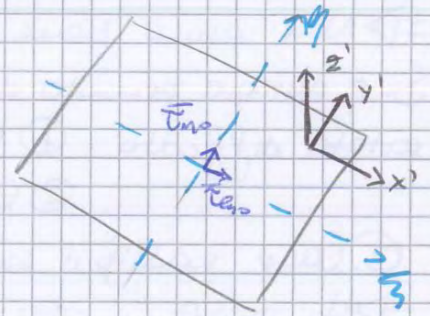
costruisco il vettore normale alla superficie media in P:  $\bar{T}_n = \bar{T}_\xi \wedge \bar{T}_\eta$

Con riferimento alla superficie media dell'elemento, costruisco per ogni punto  $(\xi, \eta, \xi=0)$  un sistema di riferimento  $x', y', z'$  di vettori  $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ , seguendo questa strada ben precisa:

$$\bar{e}'_3 = \frac{\bar{T}_n}{|\bar{T}_n|} \rightarrow \begin{vmatrix} l_3 \\ u_{13} \\ u_{23} \\ u_3 \end{vmatrix} \quad \text{vettore normale}$$

$$\bar{y}' = \bar{e}'_3 \wedge \bar{T}_{\xi_0} \rightarrow \bar{e}'_2 = \frac{\bar{y}'}{|\bar{y}'|} \rightarrow \begin{vmatrix} l_2 \\ u_{12} \\ u_2 \end{vmatrix}$$

$$\bar{e}'_1 = \bar{e}'_2 \wedge \bar{e}'_3 \rightarrow \begin{vmatrix} l_1 \\ u_{11} \\ m_1 \end{vmatrix}$$



Di tal modo è possibile costruire la matrice di trasformazione  $[R]$  formata dai coseni direttori dei nuovi assi  $x', y', z'$  rispetto agli assi  $x, y, z$ .

$$[R] = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}$$

Matrice di trasformazione per passare dal sistema di riferimento locale  $x', y', z'$  al globale  $x, y, z$

Ci serve questo sistema perché a partire da  $N$  bilineare, approssimiamo la geometria con riferimento a un layer \*  $\rightarrow$  cioè qui entra in gioco un vettore normale legato a  $z'$   $[\bar{e}'_3 \quad u_{13} \quad u_{23}]$

$\Rightarrow$  È stato costruito un sistema locale  $x', y', z'$  ad hoc  $\rightarrow \bar{e}'_3 = \frac{\partial \bar{n}}{\partial \eta}$  VETT. NORMALI

Faccio questa costruzione con riferimento al piano medio in tutti i punti.

● APPROSSIMAZIONE CAMPO degli SPOSTAMENTI

$\begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i \cdot \begin{vmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{vmatrix}$	$\rightarrow$ sono spostamenti riferiti ad un layer *	$\begin{vmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta w_i \end{vmatrix}$	sono dati dagli spostamenti del nodi sulla superficie media + degli incrementi di spost.
--	---	--	--

che considerano gli spostamenti tra il piano medio e il layer con una certa  $\xi$  (lungo lo spessore dell'elemento sono prodotti dalle rotazioni  $\theta_{x1}, \theta_{y1}, \theta_{z1}$ )

$u_i$	$\bar{u}_i$	$\Delta u_i$	$u_i$
$v_i$	$\bar{v}_i$	$\Delta v_i$	$v_i$
$w_i$	$\bar{w}_i$	$\Delta w_i$	$w_i$

$$v_i = \bar{v}_i + \Delta v_i = \bar{v}_i + \xi \frac{h_i}{2} |\bar{R}| |\bar{\sigma}_i| = \bar{u}_i^* + \xi \frac{h_i}{2} |\bar{R}| |\bar{\sigma}_i|$$

In termini di parametri nodali

In definitiva, con riferimento ad un layer \* in un punto generico, l'approssimazione del campo degli spostamenti è:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i \left( \bar{u}_i^* + \xi \frac{h_i}{2} |\bar{R}| |\bar{\sigma}_i| \right)$$

Abbiamo espresso il campo di spostamenti in termini di PARAMETRI NODALI  $(\bar{u}_i^*; |\bar{\sigma}_i|)$

● LEGGE SPOSTAMENTI - DEFORMAZIONI

Facciamo riferimento al sistema di ref. puntuale  $x'y'z'$ . Dalla teoria dell'elasticità le deformazioni:

$$\{\epsilon'\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{x'} \\ \epsilon_{y'} \\ \gamma_{xy'} \\ \gamma_{xz'} \\ \gamma_{yz'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{Bmatrix}$$

$u', v', w'$  → Componenti dello spostamento nel sistema puntuale  $x', y', z'$

$$(\epsilon_z' = 0)$$

Per passare al sistema globale considero che:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = [R]^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot [R]$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = l_{11} \left( l_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + m_{11} \frac{\partial v}{\partial x} + n_{11} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + m_{12} \left( l_{11} \frac{\partial u}{\partial y} + m_{11} \frac{\partial v}{\partial y} + n_{11} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + m_{13} \left( l_{11} \frac{\partial u}{\partial z} + m_{11} \frac{\partial v}{\partial z} + n_{11} \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial z'} = l_{33} \left( l_{33} \frac{\partial u}{\partial x} + m_{33} \frac{\partial v}{\partial x} + n_{33} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + m_{32} \left( l_{33} \frac{\partial u}{\partial y} + m_{33} \frac{\partial v}{\partial y} + n_{33} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + m_{31} \left( l_{33} \frac{\partial u}{\partial z} + m_{33} \frac{\partial v}{\partial z} + n_{33} \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

La cui segue:

$$\{\epsilon'\} = [T] \{\epsilon\}$$

$[T] =$	$l_1^2$	$m_1^2$	$n_1^2$	$l_1 m_1$	$m_1 n_1$	$n_1 l_1$
	$l_2^2$					

Matrice di Trasformazione delle componenti di deformazione dal sistema globale al locale



● Lo stato TENSIONALE  $\{\sigma\}$  risulta legato allo stato di deformazione  $\{\epsilon\}$

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} & \tau_{yx} & \tau_{yz} & \tau_{zy} \end{bmatrix}^T = [D] \{\epsilon\} \quad \text{nel sistema puntuale } x'y'z'$$

Mancava la  $\sigma_z$  poiché per definirlo avevamo imposto che nel sistema locale  $\{\epsilon_z\} = 0$  IPOTESI.

### ● MATRICE di RIGIDEZZA

Ai fini dell'integrazione numerica è utile separare i termini membrana-flessione dai termini dati dal taglio:  $[K] = [K]_m + [K]_s$

$$-[K]_{m,lm} = \int_V [B_{mi}]^T [D_{mi}] [B_{mi}] dV \quad 6 \times 6$$

$$-[K]_{s,ls} = \int_V [B_{si}]^T [D_{si}] [B_{si}] dV \quad 6 \times 6$$

Le sottomatrici sono posizionate secondo lo schema:

$$[K_{lm}] \circ [K_{ls}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

Il calcolo delle sottomatrici avviene per via numerica.

Questo elemento così studiato è partito da un elemento 3D soffre del problema dello shear locking  $\Rightarrow$  fare INTEGRAZIONE SELETTIVA.

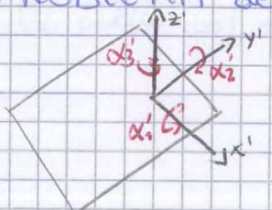
• Sottomatrici di  $[K_{lm}] \rightarrow$  contributo FLESSIONALE sistema di Gauss (2x2)

• Sottomatrici di  $[K_{ls}] \rightarrow$  contributo a TAGLIO sistema di Gauss (1x1)

La forma geometrica è una rigata, i nodi sono legati da rette e si ottiene una superficie del secondo ordine rigata.

$\rightarrow$  Discretizzo una superficie curva con degli elementi che sono rigate, dunque non è detto che approssimino bene gli spostamenti tra 2 elementi adiacenti. Evitando shear locking, l'elem funziona bene.

### ● PROBLEMA della RIGIDEZZA TORSIONALE



Fa riferimento al sistema puntuale  $x'y'z'$ , non si è tenuto conto delle rotazioni  $\alpha_3$  nel piano  $x'y'$  nell'ipotesi

Nella soluzione reale abbiamo 6 gdl ma con riferimento al sistema puntuale ne abbiamo considerati solo 5  $\Rightarrow$  potrei

raggiungere una soluzione sbagliata. Temo di considerare dunque  $\alpha_3$

$\Rightarrow$  Considero la rotazione attorno all'asse normale alla superficie media  $z'$  come campo di spostamenti indipendente.

la geometria dell'elemento per un qualsiasi punto:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + G \begin{Bmatrix} x_i^* \\ y_i^* \\ z_i^* \end{Bmatrix} \quad (\text{Nell'elem di Karwok avevo } \frac{1}{2} G h_i)$$

$$\text{eqn: } \begin{cases} N_i = \frac{1}{4} [(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1)] & i=1, \dots, 4 \\ N_i = \frac{1}{2} (1-\xi^2)(1+\eta\eta_i) & \text{lungo } \eta & i=5, \dots, 7 \\ N_i = (1-\eta^2)(1+\xi\xi_i) & \text{lungo } \xi & i=6, \dots, 8 \end{cases} \quad \text{funzioni di forma 18 nodi}$$

◎ CAMPO DEGLI SPOSTAMENTI

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + G \begin{Bmatrix} u_i^* \\ v_i^* \\ w_i^* \end{Bmatrix}$$

Lo stesso discorso per gli spostamenti. Ho gli spostamenti del piano medio + gli spost. tra piano medio e bottom

Spost. sup. medio → ↑ increments di spost. lungo lo spessore

La filosofia d'approccio è analoga, l'impostazione è un po' diversa.

Questo è l'elemento tra i più semplici a 8 nodi.

In questo elemento importanti sono le regole d'integrazione per la determinazione della matrice di rigidità  $[k] = \iiint_V B^T |D| B dV$  (INTEGRALE DI GAUSS)

Il calcolo della matrice avviene per via numerica nelle 3 dimensioni

- GUSCI SPESSI schema di Gauss (3x3x2)
- GUSCI SOTTILI schema di Gauss (2x2x2) INTEGR. RIDOTTA
- GUSCI MODERATAMENTE SPESSI → D INTEGR. SELETTIVA (PAWSEY)
  - contributo Hessianale (3x3x2)
  - contributo a taglio (2x2x2)

ESEMPI → si utilizzano i due elementi visti (4 nodi e 8 nodi) per risolvere

- a) GUSCIO CILINDRICO SOTTILE p. 334 - 335
- b) PARABOLOIDE IPERBOICO p. 336 -
- c) MODELLO PONTE PLEXIGLASS p. 337 - 338

In definitiva posso trattare il campo di SPOSTAMENTI assumendo per questo approssimazioni con polinomi che nel caso bi e tri-dimensionale seguono il triangolo di vertigine.

## 2) DEFINIZIONE DELL'ELEMENTO

→ ELEMENTO SEMPLICE: l'approssimazione polinomiale adottata contiene termini costanti e lineari. Ha nodi solo ai vertici.

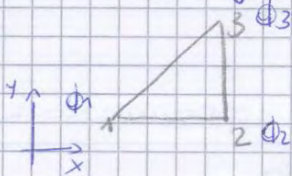
→ ELEMENTO COMPLESSO: l'approssimazione polinomiale adottata contiene termini quadratici, cubici o più elevati in aggiunta ai termini costanti e lineari. Ha nodi aggiuntivi disposti lungo il contorno e all'interno dell'elemento stesso.

→ ELEMENTO "MULTIPLEX": Hanno i lati del contorno  $\perp$  agli assi coordinati e polinomi approssimanti di ordine elevato.

→ ORDINE DEL POLINOMIO:

- ① Il polinomio deve soddisfare le condizioni di convergenza.
- ② Il polinomio deve rispettare l'ISOTROPIA GEOMETRICA (symm triang TRIANGOLA).
- ③ Il n° di coord. generalizzate  $X_i$  deve essere uguale al n° di gdl dell'elemento. → in questo modo riesco ad esprimere  $\Phi$  in termini di valori che la funzione assume nei nodi dell'elemento  $|\bar{\Phi}|$ .

Esempio: triangolo SIMPLEX (1 gdl per nodo)



$$\rightarrow \Phi(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

$$\hookrightarrow |\Phi| = |X|^T |\alpha|$$

Impongo per ogni gdl:  $|\Phi_i| = |X_i|^T |\alpha|$

$$\rightarrow \begin{cases} \Phi_1 = \alpha_1 + \alpha_2 X_1 + \alpha_3 Y_1 \\ \Phi_2 = \alpha_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 Y_2 \\ \Phi_3 = \alpha_1 + \alpha_2 X_3 + \alpha_3 Y_3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \Phi_1 = \alpha_1 + \alpha_2 X_1 + \alpha_3 Y_1 \\ \Phi_2 = \alpha_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 Y_2 \\ \Phi_3 = \alpha_1 + \alpha_2 X_3 + \alpha_3 Y_3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \Phi_1 = \alpha_1 + \alpha_2 X_1 + \alpha_3 Y_1 \\ \Phi_2 = \alpha_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 Y_2 \\ \Phi_3 = \alpha_1 + \alpha_2 X_3 + \alpha_3 Y_3 \end{cases}$$

$$\left. \begin{matrix} |\bar{\Phi}| = |\bar{X}|^T |\alpha| \\ \rightarrow 3 \text{ eq. in } 3 \text{ incognite} \end{matrix} \right\}$$

ricavo  $|\alpha| = |X|^{-1} \cdot |\bar{\Phi}|$  in termini di parametri nodali

$$\rightarrow |\Phi| = |X|^T |\alpha| = |X|^T |X|^{-1} |\bar{\Phi}| = |N| \cdot |\bar{\Phi}| \quad \text{Ho espresso la funzione } \Phi$$

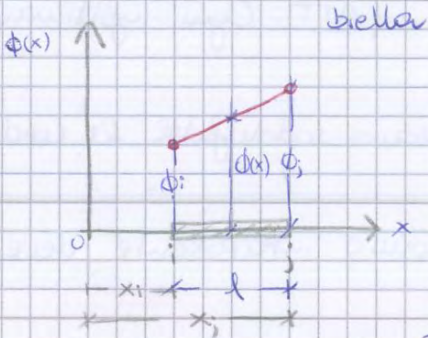
in termini di param. nodali

$$|N| = |X|^T |X|^{-1} \rightarrow \text{FUNZIONI DI FORMA}$$

Attn: Il tipo di polinomio interpolante connesso a  $|X|$  che potrebbe divenire singolare e dunque NON invertibile. Per ovviare a questo inconveniente è possibile esprimere la matrice  $|N|$  in funzione di quantità adimensionali (coordinate naturali) e verificare a posteriori la convergenza.

ELEMENTI MONODIMENSIONALI

4) ASTA RETICOLARE (SIMPLEX)



bella

$\Phi_i, \Phi_j$  valori della funzione  $\Phi(x)$  nei nodi  $i$  e  $j$

Assumo una funzione di campo generale  $\Phi(x)$

lineare:  $\Phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x = [x]^T [\alpha]$

Ho infatti solo 2 gdl, 2 dati:  $\Phi_i$  e  $\Phi_j$

$\Rightarrow$  cerco e sovrappo al più un polinomio lineare

con 2 cond. generalizzate  $\alpha_1, \alpha_2$  da determinare

Impongo le condizioni ai nodi:

$$\begin{cases} \Phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i \\ \Phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \rightarrow [\Phi] = [\bar{X}] [\alpha] \rightarrow \text{Ricavo } [\alpha] = [\bar{X}]^{-1} [\Phi]$$

$[\bar{X}]$  = Matrice parametri nodali da INVERTIRE

Invertire una matrice A

$$[A]^{-1} = \frac{1}{\det[A]} (\text{cof } [A]_{ij})^T$$

$\text{cof}(A, x_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot \text{minor } A_{ij}$

$$(-1)^{i+j} = \begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Nel nostro caso:

$$\det[\bar{X}] = x_j - x_i = l$$

$$\Rightarrow [\bar{X}]^{-1} = \frac{1}{l} \begin{pmatrix} +x_j & -x_i \\ -1 & +1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{pmatrix} x_j & -x_i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{bmatrix}$$

Ricavo  $\Phi(x)$ :

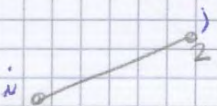
$$\Phi(x) = [x]^T [\alpha] = [x]^T [\bar{X}]^{-1} [\Phi] = [1 \ x] \begin{bmatrix} \frac{x_j}{l} & -\frac{x_i}{l} \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{bmatrix} =$$

$$= \left[ \frac{x_j}{l} - \frac{x}{l} \quad -\frac{x_i}{l} + \frac{x}{l} \right] \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{bmatrix} = \left[ \frac{1}{l}(x_j - x) \quad -\frac{1}{l}(x_i - x) \right] \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{bmatrix} = [N_i(x) \ N_j(x)] \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{bmatrix}$$

$$= N_i(x) \Phi_i + N_j(x) \Phi_j$$

Otengo funzioni di forma lineare:  $N_i(x) = \frac{1}{l}(x_j - x)$

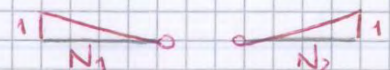
$$N_j(x) = \frac{1}{l}(x - x_i)$$



Se  $\Phi(x)$  è la funz spostata lungo l'asse locale:  $x_i = 0$ ,  $x_j = l$

$$\Rightarrow N_i(x) = 1 - \frac{x}{l} = N_1$$

$$N_j(x) = \frac{x}{l} = N_2$$



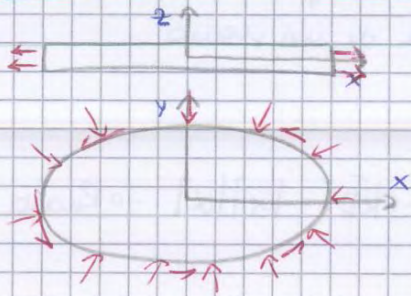
Essendo la funzione  $\Phi$  lineare in  $x$  e  $y$ , il gradiente delle variabili di campo nelle direzioni  $x$  e  $y$  risulta costante.

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [N(x,y)] \cdot \Phi = b_1 \Phi_1 + b_2 \Phi_2 + b_3 \Phi_3 \rightarrow \text{derivata costante su tutto l'elemento}$$

L'elemento è molto semplice ma anche povero. Se  $\Phi = \text{spostamento}$ , si ottiene deformazione costante nell'elemento ed è necessario avere mesh molto fitte  $\rightarrow$  Ho la necessità di usare discretizzazioni fitte quando si è in presenza di rapide variazioni dei valori di  $\Phi(x,y)$ .

Questo visto si può sfruttare in casi strutturali tra i quali:

A) STATO PIANO DI TENSIONE / DEFORMAZIONE



STATO PIANO DI TENSIONE

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \neq 0$$

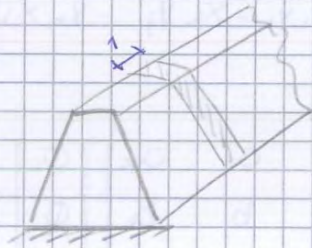
$$\sigma_z = 0$$

$\rightarrow$  Il campo di spostamenti  $u$  e  $v$  è in funzione solo di  $x$  e  $y$  - ( $w = 0$ )

STATO PIANO DI DEFORMAZIONE

$$\epsilon_z = 0$$

$$\sigma_z \neq 0 \text{ (dipende anche da } \epsilon_x, \epsilon_y)$$



Viene considerata una "fetta" di spessore unitario di un corpo indefinitamente lungo in direzione  $z$ .  
Si studia la sezione di mezz'elemento.

Dalla teoria dell'elasticità:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} = [D] [u] \quad \text{EQ. CINEMATICHE}$$

$$[D] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [D] [E] \quad \text{LEGAME COSTITUTIVO (con } D \text{ variabile a seconda di tensione o deformazione piana)}$$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{TENSIONE PIANA}$$

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{DEFORMAZIONE PIANA}$$

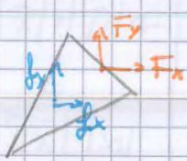
ENERGIA:

$$\begin{aligned} \pi_e &= \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon dV = \frac{1}{2} \int_V |E^T \sigma^T| dV = \frac{1}{2} \int_A |E^T D^T E| dA = \frac{1}{2} t \int_A |B^T u^T D^T B| u^T dA \\ &= \frac{1}{2} u^T \cdot \left[ t \int_A |B^T D^T B| dA \right] u = \frac{1}{2} u^T [k] u \end{aligned}$$

L'energia elastica di deformazione dell'elemento è esprimibile tramite la matrice di rigidità, come forma quadratica in termini di spostamenti nodali  $u$

$$[k] = t \int_A |B^T D^T B| dA = t \cdot A \cdot |B^T D^T B| \quad \text{COSTANTE}$$

CARICHI EQUIVALENTI:



Date forze di volume ( $f_x, f_y$ ) e forze di superficie ( $F_x, F_y$ ) sull'elemento, è possibile calcolare i corrispondenti carichi equivalenti.

$$F^e = \int_V |N^T f| dV = t \int_A |N^T f| dA = t \left( \int_A |N^T dA \right) f = t \begin{bmatrix} \int N_1 dA & 0 \\ 0 & \int N_1 dA \\ \int N_2 dA & 0 \\ 0 & \int N_2 dA \\ \int N_3 dA & 0 \\ 0 & \int N_3 dA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \frac{tA}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

→ Le forze di volume costanti si ripartiscono in parti uguali sui 3 nodi → ripartizione isotatica

$$F^e = \int_S |N^T p| ds$$

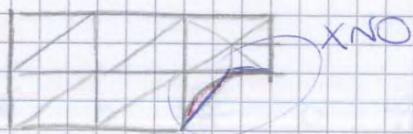
Lo STATO TENSIONALE all'interno dell'elemento:

$$\sigma^T = D^T \epsilon^T = D^T \cdot |B| u^T = D^T |B| |N^T| u^T = D^T |B^T| \cdot u^T \quad \text{COSTANTE}$$

**CST** → Elemento triangolare a def. me costante  
(in tutte le direzioni stato tensionale costante)

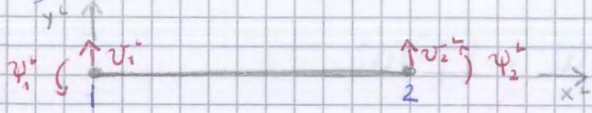
La mesh che vado ad utilizzare deve tener conto del tipo di elemento. In questo caso dove ho elevato gradiente, rapida variazione di  $\sigma$ , devo aumentare la discretizzazione (deve essere molto fitta) per coglierlo.

DEFINIZIONE MESH PASTRA CON FORO



Non posso avere mesh che vanno fuori dal dominio. Nella zona foro ho un gradiente di tensione → parto da lì e defino la mesh e faccio elementi via via più grandi

5) TRAVE



Ho 2 parametri nodali per ciascun nodo:  
 - spostamento e rotazione - D.C.C.  
 Approssimo la funzione spostamento  $v^L(x)$  mediante un polinomio cubico:

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

Le condizioni ai nodi sono:

$$\begin{cases} v(0) = v_1^L \\ v(l) = v_2^L \end{cases} \quad \frac{dv(0)}{dx} = \psi_1^L \quad \frac{dv(l)}{dx} = \psi_2^L$$

$$\begin{cases} v_1^L = \alpha_1 \\ \psi_1^L = \alpha_2 \\ v_2^L = \alpha_1 + \alpha_2 l + \alpha_3 l^2 + \alpha_4 l^3 \\ \psi_2^L = \alpha_2 + 2\alpha_3 l + 3\alpha_4 l^2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} v_1^L \\ \psi_1^L \\ v_2^L \\ \psi_2^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \rightarrow [u^L] = [X] [\alpha]$$

$$\rightarrow [\alpha] = [X]^{-1} [u^L] \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} l^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l^3 & 0 & 0 \\ -3l & -2l^2 & 3l & -l^2 \\ 2 & l & -2 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^L \\ \psi_1^L \\ v_2^L \\ \psi_2^L \end{bmatrix}$$

e dunque:

$$v(x) = v_1^L + \psi_1^L x - \frac{3}{l^2} v_2^L x^2 - \frac{2}{l} \psi_1^L x^2 + \frac{3}{l^2} v_2^L x^2 + \frac{1}{l} \psi_2^L x^2 + \frac{2}{l^3} v_1^L x^3 + \frac{1}{l^2} \psi_1^L x^3 - \frac{2}{l^3} v_2^L x^3 + \frac{1}{l^2} \psi_2^L x^3$$

$$v(x) = [X]^T [\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} l^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l^3 & 0 & 0 \\ -3l & -2l^2 & 3l & -l^2 \\ 2 & l & -2 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^L \\ \psi_1^L \\ v_2^L \\ \psi_2^L \end{bmatrix} =$$

$$= [N_1(x^L) \quad N_2(x^L) \quad N_3(x^L) \quad N_4(x^L)] \begin{bmatrix} v_1^L \\ \psi_1^L \\ v_2^L \\ \psi_2^L \end{bmatrix} = [N] [u^L]$$

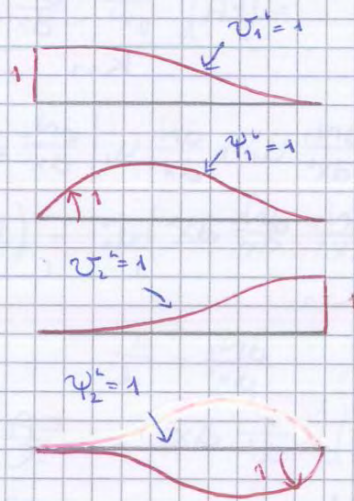
Le funzioni di forma:

$$N_1(x^L) = 1 - 3\left(\frac{x^L}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x^L}{l}\right)^3$$

$$N_2(x^L) = x^L - 2\frac{x^{L2}}{l} + \frac{x^{L3}}{l^2}$$

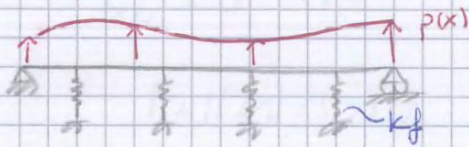
$$N_3(x^L) = 3\left(\frac{x^L}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x^L}{l}\right)^3$$

$$N_4(x^L) = -\left(\frac{x^L}{l}\right) + \frac{x^{L3}}{l^2}$$



Le funzioni di forma ottenute fisicamente rappresentano la deflessione della trave per spostamenti o rotazioni unitari in corrispondenza del nodo considerato

• TRAVE SU SOLO ELASTICO



-> Terreno alla Winkler: le molle sono tutte indipendenti l'una dall'altra

L'energia elastica di def. della sola trave:  $U = \frac{1}{2} \int EI v''^2 dx$

L'energia potenziale dell'elemento trave:  $\mathcal{T}_p = \int_0^l \frac{1}{2} ES v''^2 dx - \int_0^l p(x)v dx$

Occorre considerare il termine addizionale dovuto alla rigidità della fondazione

$$\mathcal{T}_{pf} = \int_0^l \frac{1}{2} (k_f v(x)) v(x) dx = \int_0^l \frac{1}{2} (u^T N^T k_f N u) dx$$

Differenziando rispetto a  $u^T$  ed uguagliando a zero si trova:

$$(ES \int_0^l B^T B dx + k_f \int_0^l N^T N dx) u = \int_0^l p(x) N^T dx \quad \text{avendo posto } v = N u$$

$$\rightarrow k_{f,ij} = k_f \int_0^l N_i(x) N_j(x) dx$$

• TRAVE AD INERZIA VARIABILE

Si assume come funz. spostamento  $v(x)$  la stessa di prima:  $v(x) = N u$

$$k_{ij} = \int_0^l E S(x) \cdot N_i''(x) N_j''(x) dx \quad \text{con } I = I_0 \left(1 + \left(\frac{x}{l}\right)^\alpha\right) \text{ e } \alpha, \tau = \text{param. geom.}$$

6) TRAVE CIRCOLARE

Esistono varie formulazioni che dipendono da come si approssima la funzione spostamento tangenziale  $u(s)$  e radiale  $v(s)$  -> lineare, cubica, ...

Con riferimento al codice che si ha, tramite il manuale tecnico, sta a noi scegliere l'elemento e l'approssimazione.

La differenza fondamentale tra trave curva e rettilinea è che nella teoria dei piccoli spostamenti, il comportamento assiale e flessionale risultano accoppiati nella trave curva e non in quella retta.



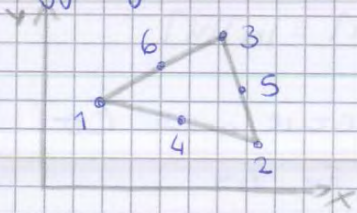
L'elemento CST è estremamente povero poiché in tutto il n° limitato di gdl che possiede, consente di scrivere equazioni sul campo degli spostamenti estremamente limitate. Per migliorarlo ho 2 possibilità:

- ① Aumento il n° dei nodi per arricchire il campo di spostamenti ma non aumento i gdl di ciascun nodo; A-B
- ② Aumento i gdl di ciascun nodo e dunque del polinomio approssimante per arricchire il campo di spostamenti. C

## 8) ELEMENTI TRIANGOLARI DI ORDINE "SUPERIORE" PER GLI STATI PIANI

### A) ELEMENTO A 6 NODI - LST (Argyris/Fraeijs de Veubeke)

Aggiungo all'elemento CST 3 ulteriori nodi a metà di ogni lato.



Passo da 3 gdl a 6 gdl

Avrò 6 condizioni nodali in  $u$  e 6 in  $v$ .

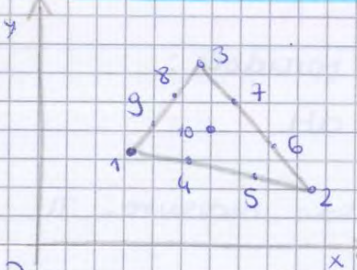
Posso dunque scegliere un polinomio con 6 coord. generalizzate che rispetti il triangolo di Tartaglia.

→ POLINOMIO DI 2° GRADO IN  $x$  e  $y$  per il campo di spostamenti:

$$\begin{cases} u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 \\ v(x,y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2 \end{cases}$$

Avendo il campo di spostamenti forma quadratica, essendo le deformazioni pari alle derivate di questo, il campo di deformazioni avrà andamento lineare → LST: Linear Straight Triangular (lo studio completo dell'LST verrà svolto in "coordinate naturali")

### B) ELEMENTO A 10 NODI - QST (Felippa)



Ho 2 nodi per ogni lato oltre a quelli di estremità, posizionati a  $\frac{1}{3}$  l'uno dall'altro, più un nodo centrale → 10 gdl.

Avrò 10 condizioni nodali in  $u$  e 10 in  $v$ .

Posso dunque scegliere un polinomio con 10 coord. generalizzate che rispetti il triangolo di Tartaglia → POLINOMIO CUBICO in  $x$  e  $y$

$$\begin{cases} u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 x y^2 + \alpha_{10} y^3 \\ v(x,y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2 + \beta_7 x^3 + \beta_8 x^2 y + \beta_9 x y^2 + \beta_{10} y^3 \end{cases}$$

Essendo il campo di spostamenti cubico, ed essendo le deformazioni pari alle derivate di questo, il campo di deformazioni avrà andamento quadratico → QST: Quadratic Straight Triangular

(lo studio completo del QST verrà svolto in "coordinate naturali")

## 9) CONFRONTO DI SOLUZIONI/ ESEMPI PRATICI

### A) IMPIEGO ELEMENTO CST TRAVE PARETE

Il f.e.m. conduce ad una sotto stima della soluzione esatta, sotto stima che diminuisce con l'affinamento della suddivisione in elementi.

L'aumento delle  $\sigma$  è che Eulero - Bernoulli e in termini tensionali lo scostamento dei risultati da quelli reali è modesto in questo caso

### B) IMPIEGO ELEMENTI TRIANGOLARI DIVERSI: CST - LST - QST

## 10) ULTERIORI ELEMENTI TRIANGOLARI DI ORDINE "ELEVATO"

Vari autori si sono specializzati nel generare elementi triangolari con approssimazioni del polinomio addrittivo del 5° ordine (20 nodi).

N.B.: Si utilizza il triangolo di Pascal per la generazione dei polinomi degli elementi triangolari.

(Nella notazione delle "coordinate naturali" si farà osservare la corrispondenza di tali polinomi interpolatori con le funzioni interpolatrici di Lagrange.)