NUMERO: 1352

ANNO: 2014

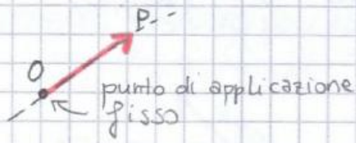
A P P U N T I

STUDENTE: Preatto

MATERIA: Geometria, Prof.Cumino

VETTORI DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA

FISSATO UN PUNTO O DEL PIANO (O DELLO SPAZIO) SI DEFINISCE **VETTORE** APPLICATO IN O QUALSIASI SEGMENTO ORIENTATO $\overline{OP}$.



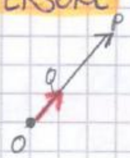
u = UNITÀ DI MISURA, CON CUI POSSO MISURARE OGNI SEGMENTO

VETTORE → SI INDICA CON $\overrightarrow{OP} = \vec{v} = \underline{v} = \mathbf{v}$
≠ DA SCALARE
→ È CARATTERIZZATO DA
- DIREZIONE = RETTA PASSANTE PER OP
- VERSO → DA O VERSO P
- MODULO (NORMA) = LUNGHEZZA DI $\overline{OP}$ SEGMENTO RISPETTO A U $|\overline{OP}|$

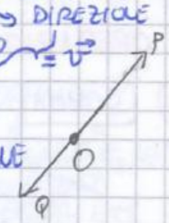
2 VETTORI SONO UGUALI SE HANNO STESSI VERSO, MODULO, DIREZIONE

VETTORE NULLO → $\vec{0}$ VETTORE OTTENUTO CONSIDERANDO $P \equiv O$ (RAPPRESENTATO DA 1 PUNTO) $O \equiv P$
→ CON → $|\vec{0}| = 0$
→ DIREZIONE, VERSO } INDETERMINATI (CASO UNICO) PER PUNTO PASSANO ∞ RETTE

VERSORE → È UN VETTORE DI MODULO 1
DATO $\vec{v} = \overrightarrow{OP} \neq \vec{0}$ SI PUÒ COSTRUIRE vers $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$ = VERSORE ASSOCIATO CON MODULO = 1, DIREZIONE, VERSO $= \vec{v}$



⇒ ∀ VETTORE ∃ UN PARTICOLARE VERSORE



SI DICE $\vec{v} \parallel \vec{w}$ ($\vec{v}$ PARALLELO A $\vec{w}$) QUANDO $\vec{v}$ E $\vec{w}$ HANNO STESSA DIREZIONE

$V = \{$ INSIEME DEI VETTORI $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ APPLICATI IN O $\}$

- DATI I VETTORI $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n$ E I NUMERI REALI $a_1, a_2 \dots a_n \in \mathbb{R}$, SI DICE COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI E NUMERI DATI IL VETTORE $\vec{w} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n$

I VETTORI $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n$ SI DICONO LINEARMENTE DIPENDENTI SE UNO DI ESSI SI PUÒ ESPRIMERE COME COMBINAZIONE LINEARE DEI RIMANENTI, OSSIA SE ESISTONO n COEFFICIENTI REALI $a_1, a_2, \dots a_n$ NON TUTTI NULLI TALI CHE $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots a_n\vec{v}_1 = \vec{0}$! OPPURE SE IL $\det = 0$

I VETTORI $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n$ SI DICONO LINEARMENTE INDIPENDENTI SE NON SONO LINEARMENTE DIPENDENTI (SE UNO DI ESSI È COMBINAZ. LINEARE DEGLI ALTRI), OSSIA SE $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 + \dots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$ È VERO SOLO PER $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$ V SE IL $\det \neq 0$

COROLLARIO: 1) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI SE UNO DI ESSI È COMBINAZIONE LINEARE DEGLI ALTRI DUE ⇔ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ SONO COMPLANARI (STANNO SULLO STESSO PIANO)

$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$

2) $\vec{v}, \vec{w}$ NON NULLI SONO LINEARMENTE DIPENDENTI SE ∃ $m \in \mathbb{R}$ / $\vec{v} = m\vec{w}$
⇔ $\vec{v}$ E $\vec{w}$ DEVONO AVERE STESSA DIREZIONE

3) $\vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$ SONO SEMPRE LINEARMENTE DIPENDENTI
! CON n VETTORI E UN VETTORE NULLO TRA ESSI, QUESTI SONO LINEARMENTE DIPENDENTI

4) $\vec{u}$ È LINEARMENTE DIPENDENTE SE ∃ $a \in \mathbb{R}$ t.c. $\vec{v}a = \vec{0}$
(SE $\vec{u} \neq \vec{0}$, $a = 0$ V SE $\vec{u} = 0$, a PUÒ ESSERE QUALSIASI)
⇓
$\vec{u} = \vec{0}$, OGNI ALTRO VETTORE È LIN. INDIPENDENTE

5) DATI 4 VETTORI $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}$ NELLO SPAZIO DELLA GEOMETRIA, SONO SEMPRE LINEARMENTE DIPENDENTI

- DATO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO ORTOGONALE E MONOMETRICO $R(O,x,y,z)$
A OGNI PUNTO P È ASSOCIATO UN VETTORE $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ E VICEVERSA AD OGNI VETTORE È ASSOCIATO UN SEGMENTO (UNICO) ORIENTATO CON ORIGINE O ED ESTREMO P ED È POSSIBILE IDENTIFICARE OGNI VETTORE IN O CON LE COORDINATE DEL SUO ESTREMO.

NB $|\vec{v}\cdot\vec{w}| \le |\vec{v}||\vec{w}|$, IN PARTICOLARE $|\vec{v}\cdot\vec{w}| = |\vec{v}||\vec{w}|$ SE $\vec{v} \parallel \vec{w}$

$\Rightarrow$ IL PRODOTTO SCALARE DEL VETTORE PER VERSORE DELLA COMPONENTE RISPETTO AGLI ASSI

$$\vec{v} = (\vec{v}\cdot\vec{i})\vec{i} + (\vec{v}\cdot\vec{j})\vec{j} + (\vec{v}\cdot\vec{k})\vec{k}$$

4) $\boxed{\text{PRODOTTO VETTORIALE}}$ DATI $\vec{u}, \vec{v}$ $\boxed{\vec{u}\wedge\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen} \widehat{\vec{u}\vec{v}}}$ → VETTORE

VETTORE CON → MODULO = AREA DEL PARALLELOGRAMMA CHE HA PER LATI I 2 VETTORI

→ DIREZIONE ORTOGONALE AL PIANO INDIVIDUATO DA $\vec{u}$ E $\vec{v}$

[DIPENDE DA ORDINE DEI 2 FATTORI → NO COMMUTATIVITÀ] → VERSO → DA REGOLA MANO DESTRA → INDICE 1° VETT., MEDIO 2° VETT., POLLICE = PRODOTTO

PROPRIETÀ →
- $\vec{u}\wedge\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{u}$ ANTICOMMUTATIVA
- $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$ QUANDO $\vec{u} = \vec{0}$ OPPURE $\vec{v} = \vec{0}$, OPPURE $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = 0$, OPPURE $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = \pi$
- $\forall m \in \mathbb{R}$ $m(\vec{u}\wedge\vec{v}) = (m\vec{u})\wedge\vec{v} = \vec{u}\wedge(m\vec{v})$
- $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\wedge\vec{v} + \vec{u}\wedge\vec{w}$

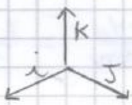
IN GENERALE NON VALE LA PROPRIETÀ ASSOCIATIVA: $(\hat{\imath}\wedge\hat{\imath})\wedge\hat{\jmath} = 0 \neq \hat{\imath}\wedge(\hat{\imath}\wedge\hat{\jmath}) = -\ldots$

! CALCOLO VETTORIALE PER COMPONENTI

$$\vec{v}\wedge\vec{u} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

NB ORTONORMALE ⇓ PRODOTTO SCALARE È ZERO MA IL MODULO DEI SINGOLI VETTORI È 1

NB PER VERSORI DEGLI ASSI



$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$

$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{i}\cdot\vec{k} = 0$

$\vec{i}\wedge\vec{i} = \vec{j}\wedge\vec{j} = \vec{k}\wedge\vec{k} = 0$

$\vec{i}\wedge\vec{k} = -\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{k}\wedge\vec{i} = \vec{j}$

$\vec{j}\wedge\vec{k} = \vec{i}$ $\qquad$ $\vec{j}\wedge\vec{i} = -\vec{k}$

$\vec{u}, \vec{v}$ SONO PARALLELI SE $\vec{u}\wedge\vec{v} = 0$ ⇆ $\vec{u} = 0 \vee \vec{v} = 0$, $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = 0 \vee \pi$

NB ! UN VETTORE ⊥ SIA A $\vec{u}$ CHE A $\vec{v}$ È UN VETTORE $\vec{t} \parallel \vec{u}\wedge\vec{v}$

5) $\boxed{\text{PRODOTTO MISTO}}$ DATI $\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}$ $\boxed{\vec{w}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})}$ → NUMERO

PRIMA BISOGNA ESEGUIRE IL PRODOTTO VETTORIALE!

OSS 1) $\vec{w}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v}) = -\vec{w}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{u})$ NON È INDIFFERENTE L'ORDINE CON CUI PRENDO I VETTORI!

2) PRODOTTO MISTO PER COMPONENTI DATI $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{w}(x, y, z)$

$$\vec{w}\cdot\vec{u}\wedge\vec{v} = \det\begin{pmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

3) $|\vec{w}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})|$ = volume del parallelogramma di spigoli $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

$\underbrace{|\vec{u}\wedge\vec{v}|}_{A_{base}} \cdot \underbrace{\left|\vec{w}\cdot\frac{\vec{u}\wedge\vec{v}}{|\vec{u}\wedge\vec{v}|}\right|}_{h}$ proiezione di $\vec{w}$

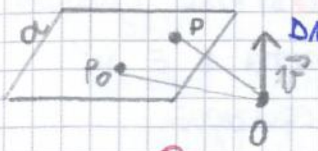
4) $\vec{w}\cdot\vec{u}\wedge\vec{v} = 0$ QUANDO → 1 DEI VETTORI È $\vec{0}$

→ $\vec{w} \perp \vec{u}\wedge\vec{v}$ → $\vec{w}$ È COMPLANARE DI $\vec{u}, \vec{v}$

!! IL PRODOTTO MISTO SERVE A TESTARE SE I VETTORI SONO LINEARMENTE DIPENDENTI

→ $\vec{u}\wedge\vec{v} = 0$ → SE $\vec{u}$ E $\vec{v}$ HANNO STESSA DIREZIONE

PIANO α DATI $P_0(x_0, y_0, z_0)$ E $\vec{u}$, α È IL PIANO PASSANTE PER P_0 E ORTOGONALE A $\vec{u}$



$P(x,y,z) \rightarrow$ PUNTO GENERICO NEL PIANO

DATI $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{OP} - \vec{OP_0} \perp \vec{v}$

EQUAZIONE VETTORIALE DI α $\boxed{(\vec{OP} - \vec{OP_0}) \cdot \vec{v} = 0}$

(1)

EQUAZIONE IN COMPONENTI $\alpha: \boxed{a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0}$

$$ax + by + cz \underbrace{- (ax_0 + by_0 + cz_0)}_{d} = 0$$

$\alpha: \boxed{ax + by + cz + d = 0} \rightarrow$ EQUAZIONE CARTESIANA DI α

$\downarrow$

EQUAZIONE LINEARE IN x, y, z DOVE (a, b, c) SONO COEFFICIENTI DI $\vec{v}$

(2) DATI $P_0 \in \alpha$, $\vec{u}, \vec{w}$ LINEARMENTE INDIPENDENTI E $\parallel \alpha$

VETTORE $\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w}$ COSÌ $\vec{v} \perp \vec{u}, \vec{w} \iff \vec{u} \perp \alpha$

EQUAZIONE VETTORIALE $\boxed{(\vec{OP} - \vec{OP_0}) \cdot \vec{u} \wedge \vec{w} = 0}$

EQUAZIONE CARTESIANA DATI $P(x, y, z)$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}(x_2, y_2, z$

$$\alpha: \det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = 0$$

(3) DATI P_0, P_1, P_2 3 PUNTI NON ALLINEATI

PER TROVARE $\vec{v} \perp \alpha$ CONSIDERO

$$\left.\begin{array}{l} (\vec{OP_1} - \vec{OP_0}) \parallel \text{ SEGMENTO } \overline{P_1 P_0} \\ (\vec{OP_2} - \vec{OP_0}) \parallel \text{ SEGMENTO } \overline{P_2 P_0} \end{array}\right\} \parallel \alpha$$

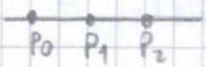
PTI NON ALLINEATI $\equiv$ VETTORI COPLANARI

$\searrow$ ESISTE SEMPRE UN PIANO CHE LI CONTIENE

$\alpha: \boxed{(\vec{OP} - \vec{OP_0}) \cdot (\vec{OP_1} - \vec{OP_0}) \wedge (\vec{OP_2} - \vec{OP_0}) = 0}$

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix}$$

NB P_0, P_1, P_2 SONO ALLINEATI SE GIACCIONO SULLA STESSA RETTA $\iff$ SE SONO LINEARMENTE DIPENDENTI



$\Downarrow$

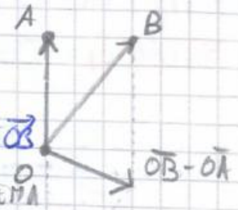
$$\exists t \in \mathbb{R} \,/\, (\vec{OP_1} - \vec{OP_0}) = t(\vec{OP_2} - \vec{OP_0})$$

! 3 VETTORI SONO COMPLANARI SE IL LORO PRODOTTO MISTO $= 0$

DISTANZE → !!! DISTANZA È LEGATA A RICERCA DI MINIMO NELLA FUNZIONE!

DATI 2 PUNTI, $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ IN $R(O, x, y, z)$

LA LORO DISTANZA COINCIDE CON LA DISTANZA TRA I 2 VETTORI $\vec{OA}$ E $\vec{OB}$



$|\vec{OB} - \vec{OA}| \Rightarrow \boxed{d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$ ← TEOREMA PITAGORA

DISTANZA TRA 2 INSIEMI = MINIMO DELLE DISTANZE $d(P_1, P_2)$

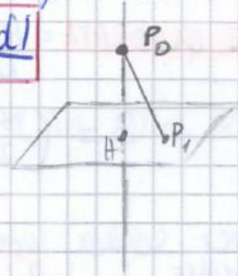
$\forall P_1 \in A, \forall P_2 \in B$

1) **DISTANZA PUNTO-PIANO**: DATI $P_0(x_0, y_0, z_0)$ E $\alpha: ax + by + cz + d = 0$

$$\boxed{d(P_0, \alpha) = d(P_0, H) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

↓ PROIEZIONE ORTOGONALE DI P_0 SU PIANO

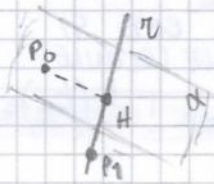
$H = r \cap \alpha$



2) **DISTANZA PUNTO-RETTA**: DATI $P_0(x_0, y_0, z_0)$ E r

CONSIDERO H COME INTERSEZIONE TRA α = PIANO PASSANTE PER P_0 E ⊥ r, r

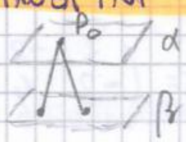
$H = \alpha \cap r$



$$\boxed{d(P_0, r) = d(P_0, H) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

$d(P_0, r) = \frac{|\vec{PP_1} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}$

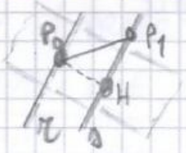
3) **DISTANZA TRA PIANI //**: DATI α, β CON $\alpha // \beta$



RICOLLEGABILE A DISTANZA PUNTO-PIANO CONSIDERANDO $P_0 \in A$

$\boxed{d(\alpha, \beta) = d(P_0, \beta)}$ $\forall P_0 \in \alpha$ $= \frac{|d - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

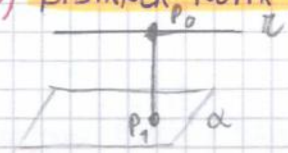
4) **DISTANZA TRA RETTE //**: DATE r, s CON $r // s$



CONSIDERO IL PIANO ORTOGONALE ALLE 2 RETTE

$\boxed{d(r, s) = d(P_0, s) = d(P_0, H)}$ $\forall P_0 \in r$

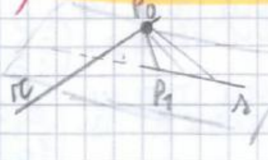
5) **DISTANZA RETTA-PIANO CON $r // \alpha$** $\forall P_0 \in r$



DATI r, α CON $r // \alpha$ → SI RICOLLEGA A DISTANZA PUNTO-PIANO

$\boxed{d(r, \alpha) = d(P_0, \alpha) = d(P_0, H)}$

6) **DISTANZA TRA RETTE SGHEMBE**: RETTE NON // E NON INCIDENTI



IMMAGINO UN PIANO CHE APPARTIENE AL FASCIO DI RETTA s E PARALLELO A r

α: PIANO PER s, $// r$

$\boxed{d(r, s) = d(r, \alpha) = d(P_0, \alpha)}$ $\forall P_0 \in r$

$r: P_1 + t\vec{v}$
$s: P_2 + t\vec{u}$

$d(r, s) = |\vec{P_1P_2} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{u})|$

OPERAZIONI CON LE MATRICI

1) **SOMMA** → DI A, B MATRICI $\in \mathbb{R}^{m,n}$ SI DICE $C = A+B = (a_{ij}+b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ → DEVONO AVERE STESSO N° DI RIGHE E COLONNE

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ $C = A+B = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & 6 & 1 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

PROPRIETÀ →
- COMMUTATIVA $A+B = B+A \quad \forall A,B \in \mathbb{R}^{m,n}$
- ASSOCIATIVA $A+(B+C) = (A+B)+C \quad \forall A,B,C \in \mathbb{R}^{m,n}$
- $\exists 0 \in \mathbb{R}^{m,n}$ t.c. $A+0 = A$
- $\forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\exists -A \in \mathbb{R}^{m,n} \mid A+(-A) = 0$

LA MATRICE OPPOSTA SI OTTIENE CAMBIANDO I SEGNI A TUTTI GLI ELEMENTI DELLA MATRICE

! PROPRIETÀ DELLA TRASPOSTA $\forall A,B \in \mathbb{R}^{m,n}$ ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

2) **PRODOTTO DI UN NUMERO PER MATRICE** → DI $\lambda \in \mathbb{R}$ E $A \in \mathbb{R}^{m,n}$

$B = \lambda A = \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$

$3\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 \\ -6 & 3\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

PROPRIETÀ →
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n} \quad (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
- $\forall A \in \mathbb{R}^{m,n} \quad 1 \cdot A = A$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n} \quad (\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A,B \in \mathbb{R}^{m,n} \quad \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

IN PARTICOLARE SE $\lambda = 0 \Rightarrow A\lambda = 0$ MATRICE NULLA

3) **PRODOTTO TRA MATRICI** → DATE $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,p}$ SI DICE $C = A \cdot B = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,p}$

DOVE $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}$ $C = AB = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 16 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$

PROPRIETÀ →
- $\forall A \in \mathbb{R}^{m,n}, B \in \mathbb{R}^{n,p}, C \in \mathbb{R}^{p,q} \quad A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$
- $\exists I_m \mid \forall A \in \mathbb{R}^{m,n} \quad I_m \cdot A = A$
  $\exists I_n \mid \forall A \in \mathbb{R}^{m,n} \quad A \cdot I_n = A$
- $\forall A \in \mathbb{R}^{m,n}, \forall B,C \in \mathbb{R}^{n,p} \quad A\cdot(B+C) = AB+AC$

! PROPRIETÀ DELLA TRASPOSTA $\forall A \in \mathbb{R}^{m,n}, B \in \mathbb{R}^{n,m}$ $\boxed{{}^t(A\cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA}$

NON VALE LA LEGGE DELL'ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO → DA 2 MATRICI NON NULLE POSSO OTTENERE UNA MATRICE NULLA

4) **POTENZA DELLE MATRICI** → DATA LA MATRICE QUADRATA $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ E $p \in \mathbb{N}$ $p>1$ SI DICE POTENZA DI A ELEVATO A p IL PRODOTTO DI p FATTORI UGUALI AD A

$A^3 = A \cdot A \cdot A \qquad A^1 = A \qquad A^0 = I_K$

INVERSA DI MATRICE → SIA A UNA MATRICE QUADRATA $(n \times n)$ SI DICE CHE A È INVERTIBILE SE ESISTE UNA MATRICE B TALE CHE

$A \cdot B = B \cdot A = I$

$B = A^{-1} \neq \frac{1}{A}$ DATA $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$

$A^{-1}A = I$

$A^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ DOVE $|A| = \det A = ad - cb$

! $\det A \neq 0$ DEVE ESSERE $\neq 0$

$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

PER TROVARE LE SOLUZIONI DI UN SISTEMA QUALSIASI SI CERCA DI RICONDURLO AD UN SISTEMA A SCALA EQUIVALENTE

$(A|B)$ É EQUIVALENTE AD $(A'|B')$ QUANDO HANNO ESATTAMENTE LE STESSE SOLUZIONI

METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS

LEMMA: IL SISTEMA

$$M = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & b_2 \end{cases} \underset{\text{AL SISTEMA}}{\overset{\text{É EQUIVALENTE}}{\iff}} M' = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & b_1 \\ (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n) + k(a_{21}x_1 \dots) & b_1 + kb_2 \end{cases}$$

$\forall k \in K,\ k \neq 0$

$\Rightarrow$ CONSEGUENZA DATA $M = (A|B) \in K^{m,n}$ QUALSIASI, POSSO RIDURLA A SCALA OTTENENDO $M' = (A'|B')$ DI UN SISTEMA EQUIVALENTE AD $(A|B)$ CON

OPERAZIONI ELEMENTARI:

- SCAMBIO TRA LORO 2 RIGHE IN $(A|B) = M$
- SOSTITUZIONE DI $R_i \to kR_i$ CON $k \neq 0$
- SOSTITUZIONE DI $R_i \to R_i + kR_j$, $k \in K$

→ SI SCEGLIE UN ELEMENTO NON NULLO DELLA RIGA NON NULLA E APPLICANDO LE TRASFORMAZIONI SI CERCA DI OTTENERE ZERO SOTTO DI ESSO (STESSO PROCEDIMENTO PER ALTRE RIGHE)

IN MATRICE A SCALA
- i) COLONNE CON INDICATORE → INCOGNITE VINCOLATE
- ii) COLONNE SENZA INDICATORE → INCOGNITE LIBERE → DA CUI DIPENDE IL NUMERO DI SOLUZIONI DEL SISTEMA

NB GLI INDICATORI DI M' DIPENDONO DALLE SCELTE ARBITRARIE CHE SI EFFETTUANO DURANTE LA RIDUZIONE A SCALA MA IL LORO NUMERO $r = rg(A)$ (= NUMERO DI RIGHE NON NULLE) NON DIPENDE DALLA SCELTA DELLE OPERAZIONI

TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI

IL SISTEMA LINEARE $AX=B$ CON $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $X \in \mathbb{R}^{n,1}$, $B \in \mathbb{R}^{m,1}$

1. É COMPATIBILE SE E SOLO SE $rg(A) = rg(A|B)$ (INCOMPATIBILE QUANDO $rg(A) < rg(A|B)$) NON PUÒ ESSERE $rg(A) > rg(A|B)$
2. SE É COMPATIBILE CI SONO n INCOGNITE E $rg(A) = rg(A|B) = r$: ALLORA LE SOLUZIONI SONO $\boxed{\infty^{n-r}}$
   - SE $r = n$ IL SISTEMA É DETERMINATO
   - SE $r < n$ IL SISTEMA É INDETERMINATO → HA SOLUZIONI CHE DIPENDONO DA $n-r$ PARAMETRI

   LE INCOGNITE CHE SI POSSONO PRENDERE COME LIBERE SONO QUELLE CHE CORRISPONDONO ALLE COLONNE SENZA INDICATORE E SONO $n - r$.

COROLLARIO DATO UN SISTEMA LINEARE OMOGENEO ($\iff B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$)

1. $AX=0$ HA SEMPRE SOLUZIONI — I RANGHI SONO SEMPRE UGUALI $(A|0)$: $rg(A) = rg(A|0)$
2. $AX=0$ HA ∞^{n-r} SOLUZIONI E SE $n = r \to$ LA SOLUZIONE É UNICA ED É $(0 \dots 0)$: NULLA! (SOLUZIONE BANALE)

! IL NUMERO m DI EQUAZIONI DEL SISTEMA É IRRILEVANTE! CIÒ CHE CONTA É r (= NUMERO DI EQUAZIONI LINEARMENTE INDIPENDENTI.

DATO UN SISTEMA LINEARE NON OMOGENEO $AX=B$ SI DICE SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO IL SISTEMA $\boxed{AX=0}$

- DATO $AX=0$ E DATE 2 SOLUZIONI $X_1 \neq X_2$ CON $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

  X_1 É SOLUZIONE $\iff AX_1 = 0$ E X_2 SOLUZIONE $\iff AX_2 = 0$

  MA ANCHE $X_1 - X_2$ É SOLUZIONE, E ANCHE kX_1 É SOLUZIONE.

  $AX_1 = B$, $AX_2 = B$, $A(X_1 - X_2) = B - B$, $X_1 - X_2 = 0$ SOL

- DATO $AX=B$ E DATE 2 SOLUZIONI $X_1 \neq X_2$

  $X_1 - X_2$ É SOLUZIONE DEL SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO $\iff$ $AX=0$, $X_1 - X_2 = Z$, $X_1 = Z + X_2$

SPAZI VETTORIALI $\mathbb{R}^n$

FISSATO UN INTERO POSITIVO $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$

$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, a_3, \dots a_n)\} \; \forall a_i \in \mathbb{R}$ TUTTE LE N-UPLE ORDINATE DI NUMERI REALI

$\mathbb{R}^3$ VETTORI DELLO SPAZIO APPLICATI IN O

$\mathbb{R}^{1,n} = \{$MATRICI A COEFFICIENTI REALI CON 1 RIGA, n COLONNE$\}$ →

$\mathbb{R}^{n,1} = \{$MATRICI A COEFFICIENTI REALI CON n RIGHE, 1 COLONNA$\}$ ↗

3 MODI PER RAPPRESENTARE UN ELENCO ORDINATO DI n COEFFICIENTI REALI

UN ELEMENTO $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ É COSTITUITO DA n NUMERI REALI = COMPONENTI DI VETTORE

VALGONO LE OPERAZIONI DI

1) $\boxed{\text{SOMMA}}$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$$

PROPRIETÀ
- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $(\vec{u}+\vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v}+\vec{w})$
- $\exists \vec{0} \in \mathbb{R}^n \,/\, \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
- $\forall \vec{v} \neq 0 \quad \exists -\vec{v} \,/\, \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

2) $\boxed{\text{PRODOTTO}}$ $\quad \forall k \in \mathbb{R}$, $\quad k(a_1, a_2, a_3 \dots a_n) = (ka_1, ka_2 \dots ka_n)$

PROPRIETÀ →
- $k(m\vec{v}) = (km)\vec{v} = m(k\vec{v})$
- $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$
- $(a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$
- $a(\vec{v}+\vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}$

⇒ $\mathbb{R}^n$ É DOTATO DI UNA STRUTTURA VETTORIALE (DI SPAZIO) SU $\mathbb{R}$ IN QUANTO SONO DEFINITE IN $\mathbb{R}^n$ LE OPERAZIONI DI SOMMA E PRODOTTO CON LE RISPETTIVE PROPRIETÀ

SOTTOSPAZIO VETTORIALE = É UN SOTTOINSIEME V DI $\mathbb{R}^n$ CHE É:
- NON VUOTO $\quad V \neq \emptyset$
- CHIUSO RISPETTO A OPERAZIONI DI → SOMMA $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$, $\vec{u}+\vec{v} \in V$
  ↘ PRODOTTO $\forall \vec{u} \in V, \forall k \in \mathbb{R} \quad k\vec{u} \in V$

OSS:
- $\forall$ SOTTOSPAZIO VETTORIALE ACQUISISCE DA $\mathbb{R}^n$ UNA STRUTTURA DI SPAZIO VETTORIALE
- $\forall$ SOTTOSPAZIO VETTORIALE CONTIENE $\vec{0}$ VETTORE NULLO
  (MA SE UN INSIEME CONTIENE $\vec{0}$ NON NECESSARIAMENTE É SOTTOSPAZIO)

SOTTOSPAZI DI $\mathbb{R}^2$
- $\mathbb{R}^2$
- $V = \{\vec{0}\}$ SOTTOSPAZIO NULLO (CIOÉ L'ORIGINE)
- TUTTE RETTE PASSANTI PER ORIGINE

SOTTOSPAZI DI $\mathbb{R}^3$
- $V = \mathbb{R}^3$ (CASO LIMITE)
- $V = \{\vec{0}\}$

  } SOTTOSPAZI IMPROPRI
- TUTTE LE RETTE PASSANTI PER O
- TUTTI I PIANI PASSANTI PER O

  } SOTTOSPAZI PROPRI

PERÒ SE $\vec{0} \notin r \rightarrow r$ NON É UN SOTTOSPAZIO!

UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $\mathbb{R}^n$ SI INDICA COME

$$\boxed{W = \mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n)}$$

// $\vec{w}$ APPARTIENE A SPAZIO VETTORIALE W SE É COMBINAZ LINEARE DI VETTORI

BASE DI SOTTOSPAZIO VETTORIALE $W \subseteq \mathbb{R}$ → È UN INSIEME ~~ORDINATO~~ PRECISO DI VETTORI DI $\mathbb{R}^n$ CHE DEVE SODDISFARE 2 CONDIZIONI:

① $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_r$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

② $W = \mathcal{L}(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_r)$ CIOÈ $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_r$ SONO GENERATORI DI W

! 2 SPAZI COINCIDONO SE HANNO STESSA DIMENSIONE ~~BASE~~

SI INDICA CON $\boxed{\mathcal{B}_W = (\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_r)}$

NESSUNA BASE PUÒ CONTENERE $\vec{0}$ CHE $\notin$ A NESSUN INSIEME DI VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI

TEOREMA: SE $\mathcal{B}_W = (\vec{v}_1 \dots \vec{v}_r)$ È BASE DI $W \subseteq \mathbb{R}^n$ ALLORA OGNI $\vec{w} \in W$ SI ESPRIME IN MODO UNICO COME COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DI $\mathcal{B}_W$

$\Leftrightarrow \forall \vec{w} \in W \quad \vec{w} = \mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_r)$

$\vec{w} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_r\vec{v}_r$ CON $a_1, a_2, \dots a_3$ UNIVOCAMENTE DETERMINATI

$\vec{w} \longleftrightarrow (a_1, a_2, \dots a_r)$ = SI DICONO COMPONENTI DI $\vec{w}$ RISPETTO A $\mathcal{B}_W$ (RISPETTANDO L'ORDINE!)

LA **BASE CANONICA** DI $\mathbb{R}^n$ È DATA DAI VETTORI RIGA (O COLONNA) DI I_n (MATRICE IDENTITÀ $n \times n$) E SI INDICA CON $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$

TEOREMA: DATO W SOTTOSPAZIO NON NULLO DI $\mathbb{R}^n$ E UNA BASE $\mathcal{B}_W = (\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_r)$, ALLORA OGNI ALTRA BASE $\mathcal{B}_W$ HA LO STESSO NUMERO DI ELEMENTI (VETTORI)

COROLLARIO OGNI SOTTOSPAZIO VETTORIALE W DI $\mathbb{R}^n$ HA UNA BASE CON AL PIÙ n ELEMENTI (HA DIMENSIONE $\leq n$)

DIMENSIONE DI W SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^n$ → È IL NUMERO DI ELEMENTI DI UNA SUA QUALUNQUE BASE

SI INDICA CON $\boxed{\dim(V)}$ SE $W = \vec{0}$, $\dim(W) = 0$

$\forall M \in \mathbb{R}^{m,n}$ MATRICE SI HA $\boxed{rg(M) = \dim R(M) = \dim C(M)}$

COME TROVARE BASE E DIMENSIONE DI $W = \mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_s)$

1) METODO DEGLI **SCARTI SUCCESSIVI** → DATI $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \dots \vec{u}_s$ GENERATORI DI W PER TROVARE LA BASE: SCARTO TUTTI I VETTORI CHE SONO COMBINAZIONE LINEARE DEGLI ALTRI

BASTA 1 SOLA DELLE 2 PROPRIETÀ SE m VETTORI IN SOTTOSPAZIO DI $\dim = m$

METODO CON LE **MATRICI** → RIDUCO A SCALA E LE RIGHE NON NULLE DELLA MATRICE RIDOTTA A SCALA SONO BASE DI W

SE INSERISCO I GENERATORI DELLE COLONNE E RIDUCO A SCALA $rg(M) = \dim(V)$ MA NON SERVE PER BASE

2) SE W È ASSEGNATO CON EQUAZIONI

RISOLVO IL **SISTEMA LINEARE OMOGENEO** → DETERMINO GENERICO VETTORE COME COMBINAZIONE LINEARE DI ALTRI DUE VETTORI CHE SONO SEMPRE LINEARMENTE INDIPENDENTI

METODO PER DETERMINARE IL $\ker f$ → RISOLVO IL SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO ALLA MATRICE DI f $(M|0)$

$\ker f = f(0)$

PER DETERMINARE LA CONTROIMMAGINE DI f RISOLVO IL SISTEMA

$f^{-1}(w) = \{ f_M(\vec{v}) = \vec{w} \}$

$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{w}$

f → ISOMORFISMO → SE BIETTIVA (INVERTIBILE)

QUINDI SE → $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

→ $rg(M) = max$

→ ENDOMORFISMO $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\dim V = \underset{n - rg M}{\dim \ker f} + \underset{rg M}{\dim \operatorname{Im} f}$

f ↗ SURIETTIVA → SE COPRE TUTTO IL CODOMINIO → $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^n$

↘ INIETTIVA → SE $\ker f_M = \{\vec{0}\}$ → $\dim(\ker f_M) = 0$

$\operatorname{Im} f$ → È SOTTOSPAZIO GENERATO DALLE COLONNE DI M

$\mathcal{B}_{\operatorname{Im} f}$ 2 VETTORI COLONNA L.I.

IMMAGINE DI $f_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\boxed{Im(f_M) = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \vec{v} \in \mathbb{R} \mid f_M(\vec{v}) = \vec{w}\}}$$ $M\vec{v} = \vec{w}$ → RAPPRESENTA TUTTI I VETTORI DI $\mathbb{R}^3$ CHE HANNO ALMENO UNA CONTROIMMAGINE

f_M ↗ SURIETTIVA QUANDO $Im(f_M) = \mathbb{R}^m$ (COPRE TUTTO IL CODOMINIO)
f_M ↘ INIETTIVA QUANDO $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n \; \vec{v}_1 \neq \vec{v}_2 \Rightarrow f_M(\vec{v}_1) \neq f_M(\vec{v}_2)$

$$\left\{\vec{w} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \mid \exists \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} \mid \underbrace{M\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{\text{SISTEMA LINEARE CON COLONNA DEI TERMINI NOTI } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}\right\}$$

$\forall M \in \mathbb{R}^{m,n}$ ↗ $Im(f_M)$ È SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^m$ GENERATO DALLE COLONNE DI M
↘ $\boxed{dim(Im(f_M)) = rg(M)}$

! $\mathcal{B}_{Imf}$ = 2 VETTORI COLONNA LINEARMENTE INDIPENDENTI

TEOREMA DATA $f_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($\forall M \in \mathbb{R}^{m,n}$)

$$\boxed{dim(ker(f_M)) + dim(Im(f_M)) = n}$$

$$n - \cancel{rg(M)} + \cancel{rg(M)} = n$$

TEOREMA DATA $f_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($\forall M \in \mathbb{R}^{m,n}$)

f_M È INIETTIVA $\Leftrightarrow$ (SE E SOLO SE) $dim(ker\, f_M) = 0$ ($ker\, f_M = \{\vec{0}\}$) (se $dim(ker f) = 1$ → f NON INIETTIVA)

TEOREMA FISSATE UNA BASE $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ E UNA BASE $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$
$\exists M \in \mathbb{R}^{m,n} \mid f = f_M$

DA $(x_1 - x_2,\ 2x_1,\ x_1 + x_2)$ → SUPPONGO CHE I VETTORI SONO ESPRESSI IN BASE CANONICA

$M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbb{R}^{3,2}$

$f(1,0) = (1,2,1)$ $\quad f(0,1) = (-1,0,1)$

COMPOSIZIONE / PRODOTTO DI MATRICI

DATE 2 APPLICAZIONI LINEARI

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "g"'] & \mathbb{R}^r \end{tikzcd}$$

$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n,\ g \circ f(v) = g[f(\vec{v})]$

$\vec{v} \xmapsto{f} f(\vec{v}) \xmapsto{g} g(f(\vec{v}))$
$\vec{v} \longmapsto A\vec{v} \longmapsto B(A\vec{v})$

$M_f = B \in \mathbb{R}^{r,m}$
$M_f = A \in \mathbb{R}^{m,n}$

POSSO FARE IL PRODOTTO RIGA PER COLONNA

$$\boxed{M_{g \circ f} = B \cdot A = M_g \cdot M_f}$$ RIGA PER COLONNA

CASO PARTICOLARE

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend right] & \mathbb{R}^n \arrow[r] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$ IDENTITÀ

$M_? \circ M_f = I_n$ $\quad M_? = M_f^{-1}$ MATRICE INVERSA

$f: C \to D \quad f^{-1}: D \to C$
$f^{-1} \circ f = Id_C \quad f \circ f^{-1} = Id_D$

$$\boxed{M_f^{-1} \circ M_f = I_n}$$

TEOREMA UN ENDOMORFISMO $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ È INVERTIBILE $\Leftrightarrow$ È ASSOCIATA A UNA MATRICE M INVERTIBILE. EQUIVALE A DIRE CHE $rg(M) = n$, OVVERO f È

DATI V, W K-SPAZI VETTORIALI

$f: V \to W$ SI DICE APPLICAZIONE LINEARE SE $\begin{cases} \forall \vec{v}, \vec{w} \in V & f(\vec{v}+\vec{w}) = f\vec{u} + f(\vec{w}) \\ \forall k \in K & f(k\vec{u}) = k f(\vec{u}) \end{cases}$

ES: DATA $f: \mathbb{C}_2[X] \to \mathbb{C}_2[X]$

DEFINITA $\forall p \in \mathbb{C}_2[X]$ DA $f(p(x)) = \frac{dp(x)}{dx}$

PER VERIFICARE CHE È UN'APPLICAZIONE LINEARE

1) $f(p(x)+q(x)) = 0 + (b_1+a_1) + 2(b_2+a_2)x$

$f(p(x)) = 0 + a_1 + a_2 x$

$f(q(x)) = 0 + b_1 + b_2 x$ ok!

2) $f(kp(x)) = f(ka_0 + ka_1 x + ka_2 x^2) = 0 + ka_1 + 2ka_2 x$

$k f(x) = k\ (0 + a_1 + 2a_2 x)$

TROVO UNA MATRICE ASSOCIATA AD f

FISSO $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ SIA IN PARTENZA CHE IN ARRIVO

$M_f^{\mathcal{B}\mathcal{B}} \in \mathbb{C}^{3,3}$ $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ IN COMPONENTI RISPETTO A $\mathcal{B}$

$\qquad\qquad f(1)\quad f(x)\quad f(x^2)$

$f(1) = 0 \cdot 1 + 0x + 0x^2 \leftrightarrow (0,0,0)$

$f(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0x + 0x^2 \leftrightarrow (1,0,0)$

$f(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2x + 0x^2 \leftrightarrow (0,2,0)$

TROVARE UNA MATRICE DIVERSA

PER ESEMPIO PRENDO UNA BASE $C \neq \mathcal{B}$ NELLO SPAZIO DI PARTENZA $(x, 1+x^2, 2)$

$M_f^{C,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f(x) = 1 \cdot 1 + 0x + 0x^2 = (1,0,0)$

$f(1+x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2x + 0x^2 \leftrightarrow (0,2,0)$

$f(2) = 0 = 0 \cdot 1 \cdot 0x + 0x^2 \leftrightarrow (0,0,0)$

ES: $W = \{ p(x) \in \mathbb{C}_2[X] \mid p(1) = 0 \}$ VERIFICARE CHE È SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{C}_2$ E TROVARE UNA BASE

1. W NON VUOTO! $(x-1)^2 \in W$
2. $p(x), q(x) \in W$ $\quad p(1) + q(1) = 0 \Rightarrow$ chiuso rispetto alla somma
3. $p(x) \in W \Rightarrow kp(1) = 0 \Rightarrow kp(x) \in W$

PER TROVARE UNA BASE DEL SISTEMA CERCO IL GENERICO POLINOMIO DI W

$p(x) \in W$ È $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ tale che $p(1) = 0$

$p(1) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = a_0 + a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_0 = -a_1 - a_2$

GENERICO VETTORE $p(x) = (-a_1 - a_2) + a_1 x + a_2 x^2$

DATI $\mathcal{U}, W \leq V$ SOTTOSPAZI, SE $\mathcal{U} \cap W = \{\vec{0}\}$

$\mathcal{U} + W$ SI DICE SOMMA DIRETTA

$$\boxed{\mathcal{U} + W = \mathcal{U} \oplus W} \rightarrow$$

BASE $\mathcal{U}+W$ FORMATA DA GENERATORI DI $\mathcal{U}$ E W LINEARMENTE INDIPENDENTI

$$\dim(\mathcal{U}+W) = \dim(\mathcal{U}) + \dim(W)$$

! LA SOMMA $\mathcal{U}+W$ È DIRETTA SOLO SE OGNI VETTORE $\vec{v} \in \mathcal{U}+W$ SI SCRIVE IN MODO UNICO COME $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ CON $\vec{u} \in \mathcal{U}, \vec{w} \in W$.

UNA BASE DI $\mathcal{U} \oplus W$ SI OTTIENE FACENDO L'UNIONE DI UNA BASE DI $\mathcal{U}$ E DI UNA BASE DI W.

CAMBIAMENTO DI BASE IN K-SPAZIO VETTORIALE V

DATA UNA BASE $\mathcal{B}_V = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n)$ PASSO A $\mathcal{B}_V' (\vec{v}_1', \vec{v}_2', \dots \vec{v}_n')$ ATTRAVERSO LA MATRICE DI PASSAGGIO (O DEL CAMBIO DI BASE) P

$$P \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

prodotto riga per colonna

$\Rightarrow$ $P \in K^{n,n}$ QUADRATA, HA NELLE COLONNE I VETTORI DI UNA BASE DI K_n

$rg(P) = n \rightarrow$ MASSIMO $\rightarrow$! P È INVERTIBILE

$$\underbrace{\cancel{P^{-1}} \, P}_{I_n} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

ESPRIME LE COMPONENTI DELLA NUOVA BASE IN FUNZIONE DELLA VECCHIA BASE

!!! P È UNA MATRICE LE CUI COLONNE SONO I VETTORI DELLA NUOVA BASE SCRITTI IN COMPONENTI RISPETTO ALLA VECCHIA BASE

CONSIDERANDO LE APPLICAZIONI LINEARI

$f: V \rightarrow W$ $\quad V, W$ K-SPAZI VETTORIALI

DATE $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$

$$\exists! \, M_f^{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W} = M \iff \forall \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V \qquad M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix} \in W$$

ESISTE ED È UNICA

COMPONENTI RISPETTO A $\mathcal{B}_V$

COMPONENTI RISPETTO A $\mathcal{B}_W$

SE CAMBIO BASE IN V

$$\mathcal{B}_V \rightarrow \mathcal{B}_V' \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \rightarrow M \left(P \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix} \qquad MP = M_f^{\mathcal{B}_V', \mathcal{B}_W}$$

$$\mathcal{B}_W \rightarrow \mathcal{B}_W' \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_s' \end{pmatrix} \qquad Q^{-1} M P \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \cancel{Q^{-1} Q} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} M P = M_f^{\mathcal{B}_V', \mathcal{B}_W'}$$

M E M' SONO SIMILI SE ESISTE UNA MATRICE INVERTIBILE P t.c. $M' = P^{-1} M P$

AUTOVETTORI E AUTOVALORI

AUTOVETTORE → DELL'ENDOMORFISMO $f: V \to V$ IN $\mathbb{R}$-SPAZIO VETTORIALE

GEOMETRICAMENTE = VETTORE $\vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ SE

È UN VETTORE PARALLELO ALLA f DI SÉ STESSO.

$$\boxed{f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}}$$ PER UN CERTO $\lambda \in \mathbb{R}$

PER VERIFICARE SE $\vec{v}$ È AUTOVETTORE
SOSTITUISCO $\vec{v}$ IN $f(\vec{v})$

λ È **AUTOVALORE** DI f ASSOCIATO A $\vec{v}$

AUTOSPAZIO = V_λ DI $f: V \to V$, RELATIVO ALL'AUTOVALORE λ

$$\boxed{V_\lambda = \{ \vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \}}$$

! V_λ CONTIENE TUTTI GLI AUTOVETTORI RELATIVI A λ E IL VETTORE $\vec{0}$

INFATTI UN AUTOVETTORE È PER DEFINIZIONE NON NULLO
HA $f(\vec{0}) = \vec{0} = \lambda \vec{0}$

V_λ È SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V

NB IL VETTORE NULLO $\vec{0}$ NON SI PUÒ CONSIDERARE AUTOVETTORE (ANCHE SE HO $f(\vec{0}) = \vec{0}$) PERCHÉ HA AUTOVALORE λ INDETERMINAT

OSS DATO $f: V \to V$
SE $\ker f \neq \{\vec{0}\} \Rightarrow \ker f = V_0$ (PERCHÉ $\lambda = 0$ È AUTOVALORE)

SE UN ENDOMORFISMO f NON È INIETTIVO → HA AUTOVALORE 0
(E VICEVERSA SE 0 È AUTOVALORE → f NON È INIETTIVO)

PROPOSIZIONE: AD AUTOVALORI DISTINTI CORRISPONDONO AUTOVETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI → IN PARTICOLARE $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ AUTOVETTORI DI f, RELATIVI AGLI AUTOVALORI λ_1, λ_2 CON $\lambda_1 \neq \lambda_2$
$\vec{v_1}$ E $\vec{v_2}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

TEOREMA: DATO UN ENDOMORFISMO $f: V \to V$ SE ESISTE $\mathcal{B}_V$ FORMATA DAGLI AUTOVETTORI DI f ALLORA $M_f^{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_V} = (\quad)$ È DIAGONALE
(VALE ANCHE VICEVERSA)

COROLLARIO: SE $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots V_{\lambda_p}$ SONO AUTOSPAZI DI f
ALLORA $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_p} \subseteq V$
È UNA SOMMA DIRETTA $\Rightarrow V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_p}$

IN PARTICOLARE $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$
GLI AUTOVETTORI DI V_{λ_1} SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI DAGLI AUTOVETTORI DI V_{λ_2}.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 56

DATO $f: V \to V$ $\qquad V = \mathbb{R}$-SPAZIO VETTORIALE

$$\boxed{\dim V_\lambda = n - rg(M_f - \lambda I)}$$

PROPOSIZIONE IN GENERALE $\boxed{1 \leq \dim V_\lambda \leq m_\lambda}$

DOVE m_λ = MOLTEPLICITÀ DI λ COME RADICE DEL POLINOMIO CARATTERISTICO.

NB PER CAPIRE SE f È SEMPLICE (= DIAGONALIZZABILE) C'È ANCHE IL CRITERIO DI DIAGONALIZZABILITÀ

SE L'ENDOMORFISMO f DI $\mathbb{R}^n$ HA n AUTOVALORI DISTINTI (TUTTI DI MOLTEPLICITÀ 1) ALLORA È DIAGONALIZZABILE.

! NON TUTTI GLI ENDOMORFISMI SONO DIAGONALIZZABILI, VALE INFATTI LA SEGUENTE RELAZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE:

TEOREMA: f È DIAGONALIZZABILE (SEMPLICE) SE E SOLO SE:

1. TUTTE LE RADICI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO $\in \mathbb{R}$
2. PER OGNI AUTOVALORE λ DI f $\dim(V_\lambda) = m_\lambda$

$\Rightarrow$ PER COSTRUIRE UNA BASE DI $\mathbb{R}^n$ RISPETTO A CUI f HA MATRICE DIAGONALE, BASTA SCEGLIERE UNA BASE PER OGNI AUTOSPAZIO V_λ E FARE L'UNIONE DELLE BASI OTTENUTE COSÌ.

(INFATTI $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_n} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}$)

TEOREMA DI LAPLACE $\Rightarrow$ PER IL CALCOLO DEI DETERMINANTI

DEF DATA $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $A = (a_{ij})$ SI DICE COMPLEMENTO ALGEBRICO DI a_{ij} IL PRODOTTO DI $(-1)^{i+j}$ PER IL DETERMINANTE DELLA MATRICE CHE SI OTTIENE DA A CANCELLANDO LA RIGA i-ESIMA E LA COLONNA j-ESIMA

ES DATA $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad 3 = a_{24}$

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

COMPLEMENTO ALGEBRICO

TDL: $\det(A)$ = SOMMA DEI PRODOTTI DI UNA RIGA (O UNA COLONNA) DI A PER I RISPETTIVI COMPLEMENTI ALGEBRICI

! CONVIENE PUNTARE UNA RIGA CON TANTI $\emptyset$

$$\det A = a_{31} A_{31} + \cancel{\overset{0}{a_{32}} A_{32}} + \cancel{\overset{0}{a_{33}} A_{33}} + a_{34} A_{34}$$

$$= 2(-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 1(-1)^{3+4} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\left(1(-2) + 2(-1)\right) - 1(-1) = +1 \quad \Rightarrow$$

MATRICI ORTOGONALI E FORME QUADRATICHE

IN $\mathbb{R}^n$ SI DICE PRODOTTO SCALARE $\vec{u}\cdot\vec{v}$ UNA QUALUNQUE OPERAZIONE DA $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$

DEFINIZIONE ASSIOMATICA

$$(\vec{u},\vec{v}) \longrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} \in \mathbb{R}$$

TALE CHE VALGANO LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

1) $\vec{u}\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
2) $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w}$
3) $\vec{u}\cdot(m\vec{v}) = m(\vec{u}\vec{v}) = m\vec{u}(\vec{v}) \quad \forall m \in \mathbb{R}$
4) $\vec{u}\cdot\vec{v} \geq 0$, $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

CASO PARTICOLARE IN $\mathbb{R}^3$ FISSATO $\mathbb{R}(0,x,y,z)$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

PRODOTTO RIGA PER COLONNA

$$\vec{u}\vec{v} = xx' + yy' + zz' = (x\,y\,z)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ IN $\mathbb{R}^n$ DEFINISCO PRODOTTO SCALARE EUCLIDEO (CANONICO)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

SE DATI $\vec{v_1}, \vec{v_2} \dots \vec{v_p}$ NON NULLI E ORTOGONALI A 2 A 2 ALLORA SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} \underset{def}{=} {}^t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2 \dots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}$$

SI DICE NORMA (O MODULO) DI UN VETTORE IL NUMERO $\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}}$

SODDISFA LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

1) $\|\vec{u}\| \geq 0$, $\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$
2) $\|m\vec{u}\| = |m|\,\|\vec{u}\|$
3) $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$
4) $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWATZ

DATO IN $\mathbb{R}^3$ $\Downarrow$ $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\widehat{\vec{u}\vec{v}}$

POICHÉ $\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} \leq 1 \Rightarrow$ POSSO DEFINIRE $\boxed{\cos\widehat{\vec{u}\vec{v}} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}}$

SI DEFINISCE DISTANZA TRA 2 VETTORI

$$\boxed{d(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}-\vec{v}\|}$$

DATA $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ ORTOGONALE HA SEMPRE $\boxed{\det P = \pm 1}$

TEOREMA DI BINET DATE A, B QUADRATE DI ORDINE n
$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

DATA $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ ORTOGONALE SE $\boxed{\det P = +1}$, P SI DICE ORTOGONALE SPECIALE.

GEOMETRICAMENTE RAPPRESENTANO UNA ROTAZIONE RISPETTO AL SISTEMA DI RIFERIMENTO ORTONORMALE.

! IN GENERALE LE MATRICI ORTOGONALI $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ SONO LE MATRICI DI PASSAGGIO TRA BASI ORTONORMALI.

LE MATRICI ORTOGONALI SPECIALI, PER $n=2, 3$ RAPPRESENTANO LE ROTAZIONI IN $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ($\Rightarrow$ BASE ORTONORMALE DI EGUALE ORIENTAMENTO)

PER ORTONORMALIZZARE UNA MATRICE DI PASSAGGIO
CONSIDERO LA MATRICE DI PASSAGGIO FORMATA DA VERSORI E DIVIDO PER LA NORMA.

MATRICI SIMMETRICHE

$S \in \mathbb{R}^{n,n}$ SIMMETRICA QUANDO $S = (a_{ij})$, $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i, j$
OPPURE QUANDO ${}^tS = S$.

TEOREMA DATA $S \in \mathbb{R}^{n,n}$ SIMMETRICA:

1) TUTTE LE RADICI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO $\det(S - \lambda I)$ SONO REALI
2) ESISTE SEMPRE UNA BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^n$ CHE È FORMATA DA AUTOVETTORI DI S (ESISTE MATRICE CHE DIAGONALIZZA)

LEMMA DATI $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ AUTOVETTORI DI S RELATIVI AD AUTOVALORI $\lambda_1 \neq \lambda_2$
ALLORA $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$

!!! SE AUTOSPAZIO HA $\dim = 2$ DEVO CONTROLLARE CHE I VETTORI TROVATI SIANO ORTOGONALI!

$\Rightarrow$ DATA UNA MATRICE $S \in \mathbb{R}^{n,n}$ SIMMETRICA È INDIVIDUATA $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ FORMA QUADRATICA E VICEVERSA (PER MECCANISMO DI PRODOTTO TRA MATRICI)

SE $n = 2$

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{f_S(x_1, x_2) = {}^t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}XY + a_{13}Y^2}$$

SE $n = 3$

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$f_S(x_1, x_2, x_3) = {}^t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

METODO PER PASSARE DA FORMA QUADRATICA ATTRAVERSO MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI RIFERIMENTO PER METTERLA IN FORMA CANONICA:

1. SCRIVO LA MATRICE A
2. DETERMINO POLINOMIO CARATTERISTICO
3. SCRIVO P ORTOGONALE CHE DIAGONALIZZA A
4. $\boxed{P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}}$ MATRICE IN FORMA CANONICA
5. LA FORMA CANONICA SI OTTIENE DALLA MATRICE DIAGONALE

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

IL LUOGO DEI PUNTI PUÒ ESSERE DI DIVERSI TIPI DATI λ_1, λ_2 AUTOV..

1) $\lambda_1, \lambda_2, \gamma$ NON NULLI CONCORDI $\Rightarrow \det A > 0$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \rightarrow \text{ELLISSE}$$

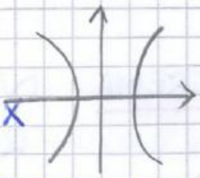
SE $\gamma = -1 \rightarrow$ ELLISSE IMMAGINARIO

IN PARTICOLARE SE $\lambda_1 = \lambda_2 \rightarrow$ CIRCONFERENZA

2) $\lambda_1, \lambda_2, \gamma$ NON NULLI E λ_1, λ_2 DISCORDI $\Rightarrow \det A < 0$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

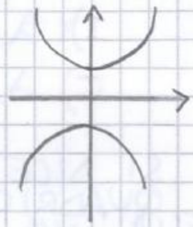
$\rightarrow$ IPERBOLE CON ASSE TRASVERSO X



SE $\lambda_1 = -\lambda_2 \rightarrow$ IPERBOLE CON ASINTOTI $\perp$ PERPENDICOLARI

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1}$$

IPERBOLE CON ASSE TRASVERSO Y



3) $\lambda_1 = -\lambda_2$, $\gamma = 0 \Rightarrow \det A < 0$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0} \rightarrow \text{RETTE INCIDENTI}$$

4) λ_1 O λ_2 NULLO γ CONCORDE $\Rightarrow \det A = 0$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} = 1} \rightarrow \text{RETTE PARALLELE}$$

5) λ_1 O λ_2 NULLO E $\gamma = 0 \Rightarrow \det A = 0$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} = 0} \rightarrow \text{RETTE COINCIDENTI}$$

6) λ_1, λ_2 CONCORDI E $\gamma = 0 \Rightarrow \det A > 0$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} = 0} \rightarrow \text{PUNTO}$$

7) IN OGNI ALTRO CASO L'INSIEME DEI PUNTI È VUOTO $= \Phi$

SE NEL TIPO I) E II) È NULLO ALMENO 1 DEI COEFFICIENTI NELLE EQUAZIONI CANONICHE, LA CONICA È DEGENERE.

$\Rightarrow$ LE CONICHE DUNQUE POSSONO ESSERE DI 2 TIPI

I) CONICHE A CENTRO $\rightarrow$ SE $\det A \neq 0$

CON OPPORTUNA ROTAZIONE $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = \gamma$

IL PUNTO $O(0,0)$ È CENTRO DI SIMMETRIA

CON OPPORTUNA TRASLAZIONE POSSO ELIMINARE TERMINI DI 1° GRADO

II) PARABOLE $\rightarrow$ SE $\det A = 0$ (CON λ_1 O λ_2 NULLO)

NON POSSO ELIMINARE TERMINI DI 1° GRADO

ESEMPI DI QUADRICHE DEGENERI:

1) CILINDRO ELLITTICO → CON 1 AUTOVALORE NULLO

ES: $\lambda_1, \lambda_2, \gamma$ POSITIVO, $\lambda_3 = 0$ → CILINDRO ELLITTICO SU ASSE Z

$$Q: \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

2) CILINDRO PARABOLICO → CON 2 AUTOVALORI NULLI

ES λ_1, γ NON NULLI, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ → CILINDRO PARABOLICO // Y

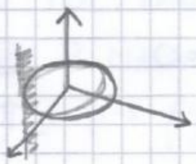
$$Q: \boxed{\frac{x^2}{a^2} = 2z}$$

3) CILINDRO IPERBOLICO → UN AUTOVALORE NULLO

λ_1, λ_2 DISCORDI
γ CONCORDE CON λ_1
λ_3 NULLO

$$Q: \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

⇒ PER CILINDRO ELLITTICO → CASO PARTICOLARE $a = b$



$$Q: \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1} \rightarrow$$ CILINDRO DI ROTAZIONE ATTORNO A Z

$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ CRF DI $r = a$, $C = (0,0)$

4) PIANI PARALLELI → λ_2, λ_3 NULLI
λ_1, γ CONCORDI

$$Q: \boxed{x^2 = a^2}$$

$(x+a)(x-a) = 0$ → SE $x^2 = 0$ PIANI SOVRAPPOSTI

5) PIANI INCIDENTI λ_1, λ_2 DISCORDI
λ_3, γ NULLI

$$Q: \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0} \qquad \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$$

6) CONO ELLITTICO → ! EQUAZIONE OMOGENEA DI 2° GRADO → TUTTI I TERMINI A STESSO GRADO
IN $(x-a), (y-b), (z-c)$ RAPPRESENTA SEMPRE UN CONO QUADRICO DI VERTICE (a,b,c)

ES $(x-1)(y-2) - (z-3)^2 = 0$ → CONO QUADRICO DI VERTICE $(1,2,3)$

$$Q: \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0}$$

IN PARTICOLARE SE $\lambda_1 = \lambda_2$ → CONO DI ROTAZIONE

METODO PER CLASSIFICARE LE CONICHE

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}$$

$A \downarrow$ PER CLASSIFICARE CONICHE

$B \downarrow$ PER CAPIRE SE CONICA É DEGENERE

$\det A$:
- >0 ELLISSE
- <0 IPERBOLE
- $=0$ PARABOLA

$\det B$:
- $=0$ DEGENERE
  - 2 RETTE
  - 1 PUNTO $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$
  - $\emptyset$
- $\neq 0$ NON DEGENERE

RETTE:
- INCIDENTI $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
- COINCIDENTI $\frac{x^2}{a^2} = 0$
- PARALLELE $\frac{x^2}{a^2} = 1$

PER DETERMINARE → MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI RIFERIMENTO
→ FORMA CANONICA

1. SCRIVO A
2. TROVO POL. CARATTERISTICO
3. SCRIVO P MATRICE ORTOGONALE CHE DIAGONALIZZA A
4. $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI RIFERIMENTO
5. FORMA CANONICA
   - COME PARTE QUADRATICA LA OTTENGO DA D (MATRICE DIAGONALE)
   - COME TERMINI DI 1° GRADO $(d \;\; e) P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$
   - COME TERMINE NOTO f
6. SE NECESSARIO SI APPLICA IL METODO DEL COMPLETAMENTO DEL QUADRATO.

METODO PER CLASSIFICARE LE QUADRICHE

- QUADRICHE A CENTRO $\quad ax^2 + by^2 + cz^2 = d$
  1. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \gamma$ STESSO SEGNO → ELLISSOIDI
  2. $\lambda_1, \lambda_2, \gamma$ CONCORDI, λ_3 DISCORDE → IPERBOLOIDE A UNA FALDA
  3. λ_1, γ CONCORDI, λ_2, λ_3 DISCORDI → IPERBOLOIDE A DUE FALDE
- PARABOLOIDI $\quad ax^2 + by^2 = z$
  1. COEFFICIENTI CON STESSO SEGNO → PARABOLOIDE ELLITTICO
  2. COEFFICIENTI CON DIVERSO SEGNO → PARABOLOIDE IPERBOLICO

CURVE IN $\mathbb{R}^n$

UNA FUNZIONE $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ DEFINITA DA

$$\boxed{\gamma(t) = (\underbrace{x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)}_{\text{FUNZIONI COMPONENTI}})} \quad \forall t \in I, \text{ CON } x(t): I \to \mathbb{R}$$

SI DICE CURVA SE TUTTE LE $x_i(t)$ SONO CONTINUE.
(HA LIMITE $L = (l_1, l_2 \dots l_n)$ PER $t \to t_0$ SE PER OGNI i $x_i(t)$ HA LIMITE l_i)

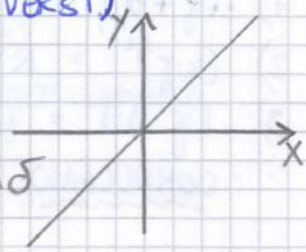
SE L'INTERVALLO DI DEFINIZIONE I ($I \subseteq \mathbb{R}$)
- APERTO $\to$ γ É UNA CURVA
- CHIUSO E LIMITATO $\to$ $I \in [a, b]$ CON $a < b$
  γ É UN ARCO DI CURVA DI ESTREMI $\gamma(a), \gamma(b)$

$\mathrm{Im}(\gamma)$ = IMMAGINE DI γ SI DICE SOSTEGNO DI γ.

! UNO STESSO SOSTEGNO PUÒ ESSERE IMMAGINE DI 2 FUNZIONI DIVERSE (CIOÉ PUÒ ESSERE PARAMETRIZZATO IN MODI DIVERSI)

ES $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\quad \gamma(t) = (t, t)$
$\delta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\quad \delta(u) = (u^3, u^3)$

$\begin{cases} x = u^3 \\ y = u^3 \end{cases}$ $\quad x = y \to \mathrm{Im}\,\gamma = \mathrm{Im}\,\delta$



$\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ CONTINUA SI DICE SEMPLICE SE É INIETTIVA

UN ARCO DI CURVA É CHIUSO SE $\gamma(a) = \gamma(b)$ $\to$ MA NON É UNA CURVA CHIUSA

... ARCO CHIUSO E SEMPLICE $\to$ SE γ É INIETTIVA SU TUTTO (a, b)
(CIOÉ SE $\gamma(a) = \gamma(b)$ É L'UNICO PUNTO DI SOSTEGNO CHE É IMMAGINE DI 2 VALORI DIVERSI DEL PARAMETRO)

$\downarrow$

$\forall t_0 \neq t_1 \in [a, b]$, $\gamma(t_0) \neq \gamma(t_1)$

UNA CURVA $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ SI DICE PIANA SE ESISTE UN PIANO IN $\mathbb{R}^3$ CHE CONTIENE $\mathrm{Im}(\gamma)$.

IN GENERALE DATO $\pi: ax + by + cz + d = 0$ CERCO EVENTUALI a, b, c, d TALI CHE LE COMPONENTI DELLA CURVA SODDISFINO L'EQUAZIONE
$ax + by + cz + d = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

FUNZIONE
- INIETTIVA $\quad \exists t_0 \neq t_1 \mid \gamma(t_1) \neq \gamma(t_0)$ $\quad \gamma$ 
- NON INIETTIVA $\quad \exists t_0 \neq t_1 \mid \delta(t_0) = \delta(t_1)$ $\quad \delta$ 

DATA $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ REGOLARE, SIA $t_0 \in I$ SI DICE VETTORE TANGENTE A (IMMAGINE) $\gamma(t)$ IN $\gamma(t_0)$ IL VETTORE $\gamma'(t_0)$.
(SE CONSIDERO VERSORE $\to \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma(t_0)\|}$)

LA RETTA r: $\boxed{\sigma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t-t_0)}$ É LA RETTA TANGENTE A $\gamma(t)$ IN $\gamma(t_0)$.

TAYLOR AL 1° ORDINE

VETTORE INFINITESIMO PER $t \to t_0$

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t-t_0) + o(t-t_0)$$

$\Rightarrow$ LA RETTA TANGENTE É LA RETTA CHE MEGLIO APPROSSIMA LA CURVA AL 1° ORDINE

$$r: \begin{cases} x_1 = x_1(t_0) + x_1'(t_0)(t-t_0) \\ x_2 = x_2(t_0) + x_2'(t_0)(t-t_0) \\ x_n = x_n(t_0) + x_n'(t_0)(t-t_0) \end{cases}$$

OSS LA RETTA TANGENTE AL SOSTEGNO DI UNA CURVA NON DIPENDE DALLA PARAMETRIZZAZIONE (PURCHÉ CURVA SIA REGOLARE)
MA MODULO/ VERSO DEL VETTORE tg $\to$ DIPENDONO DA PARAMETRIZZAZIONE

LUNGHEZZA DI UN ARCO REGOLARE $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$$\boxed{L_{(\gamma,a,b)} = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt}$$

! SE LA CURVA É REGOLARE A TRATTI, LA LUNGHEZZA DELL'ARCO É LA SOMMA DELLE LUNGHEZZE DEGLI ARCHI REGOLARI IN CUI SI PUÒ SPEZZARE LA CURVA.

DATO $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ REGOLARE SI DICE ASCISSA CURVILINEA DI ORIGINE $\gamma(t_0)$ LA FUNZIONE

$$\boxed{L_{(\gamma,t_0,t)} = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau = s(t)}$$

$\Rightarrow s(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \frac{ds}{dt} = \|\gamma(\tau)\| > 0$ DATO CHE É UNA NORMA

s É $\to$ MONOTONA CRESCENTE
$\to$ (TEORICAMENTE) INVERTIBILE
$\to \exists\, t = t(s) \to$ POSSO ESPRIMERE $\boxed{\gamma(t) = \gamma(t(s))}$

UNA PARAMETRIZZAZIONE (t) SI DICE INTRINSECA QUANDO $\|\gamma'(t)\| = 1$
LA PARAMETRIZZAZIONE RISPETTO A s É INTRINSECA:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\gamma}{ds} \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| \Rightarrow \left\| \frac{d\gamma}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}$$

DATA $\gamma : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ARCO DI CURVA REGOLARE SI DEFINISCE INTEGRALE CURVILINEO (O DI LINEA)

$$\boxed{\int_\gamma F ds = \int_a^b F(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt}$$ CON F CONTINUA

$F(\gamma(t))$ È FUNZIONE COMPOSTA $F \circ \gamma$

CASO PARTICOLARE SE $F(x,y) = 1 \quad \forall (x,y) \in A$
OTTENGO LA LUNGHEZZA DELL'ARCO

$$\int_\gamma F ds = \int_a^b 1 \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt = L(\gamma, a, b)$$

METODO PER INTEGRALE CURVILINEO

1. CALCOLO $\|\gamma'(t)\|$
2. SOSTITUISCO $\gamma(t)$ IN F (PER COMPONENTI)
3. CALCOLO L'INTEGRALE $\int_\gamma F ds = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad \mathrm{dom} f = A$, P_0 PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI A

f É CONTINUA IN P_0

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$$

PER CONTROLLARE SE f CONTINUA VALGONO I TEOREMI DELL' ALGEBRA DEI LIMITI

SONO CONTINUE:

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ COORDINATE, DEFINITE DA $f_i(P) = f(x, \dots x_n) = x_i$ $\quad \forall i = 1, 2 \dots n$

- LE FUNZIONI POLINOMIALI $f(x,y) = x^2 + xy$
- LE FUNZIONI RAZIONALI
- LE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE, ESPONENZIALI
- LE FUNZIONI COMPOSTE DI FUNZIONI CONTINUE

DATA $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $P_0 \in \mathrm{dom} f \to \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}$

$$\to \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}$$

SI DICE DERIVATA PARZIALE PRIMA DI f IN P_0 RISPETTO A x (RISPETTO A y)

! LASCIO VARIARE UNA SOLA VARIABILE, LE ALTRE RIMANGONO COSTANTI.

f SI DICE DERIVABILE IN P_0 SE IN P_0 CI SONO TUTTE LE DERIVATE PARZIALI PRIME.

SE f DERIVABILE IN P_0 SI DICE GRADIENTE DI f IN P_0 IL VETTORE

$$\boxed{\mathrm{grad}_{P_0} f \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\right) = \nabla_{P_0} f} \qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

LA FUNZIONE GRADIENTE È LA FUNZIONE $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ DEFINITA DA

$$\boxed{\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)}$$

← VETTORE CHE HA COME COMPONENTI LE DERIVATE PARZIALI

CAMPO VETTORIALE

DERIVATA PARZIALE DI 2° ORDINE → QUANDO LA DERIVATA PRIMA È DERIVABILE:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$$

! UNA FUNZIONE A 2 VARIABILI HA 4 DERIVATE PARZIALI SECONDE

LE

MATRICE HESSIANA → $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

2x2 SE $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
3x3 SE $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

IN GENERALE PER $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad H_f = (h_{ij}), \quad h_{ij} = f_{x_i x_j}$

TEOREMA DI SCHWARTZ $\boxed{f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}}$ CON $i \neq j$, QUANDO $f \in C^2$

SE $f \in C^2$ IN UN INTORNO DI $P_0 \in \mathrm{dom} f$ SI PUO' SCRIVERE

$$\boxed{f(P) = \underbrace{f(P_0) + \nabla_{P_0} f (P-P_0)}_{\text{PIANO tg}} + \frac{1}{2}(P-P_0) \cdot H_{P_0} f (P-P_0) + o(\|P-P_0\|^2)}$$

QUADRICA (PARABOLOIDE)

SVILUPPO DI TAYLOR AL 2° ORDINE

DNE

P_0 SI DICE **STAZIONARIO** PER $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ SE $\boxed{\nabla_{P_0} f = \vec{0}}$

SE $\nabla_{P_0} f \neq \vec{0}$ $\quad P_0$ È REGOLARE

IL PUNTO P_0 È DI ESTREMO PER f SE È MASSIMO O MINIMO

SE $f(P) \geq f(P_0)$ ($\leq$) $\quad \forall P \in \mathrm{dom} f \quad P_0$ = MINIMO ASSOLUTO (MASSIMO)

SE $f(P) \geq f(P_0) \quad \forall P \in U(P_0, r) \quad P_0$ = MINIMO RELATIVO (MASSIMO)

PER DETERMINARE TIPO DI PUNTO STAZIONARIO

$$f(P) - f(P_0) = \overset{\text{FORMA QUADRATICA}}{f_q} + o(\|P-P_0\|^2) \quad \text{IN SVILUPPO DI TAYLOR}$$

$$f(P) - f(P_0) \geq 0 \iff f_q \text{ DEFINITA POSITIVA}$$

SE $H_{P_0} f$:
- DEFINITA POSITIVA → P_0 MINIMO
- DEFINITA NEGATIVA → P_0 MASSIMO
- NON DEFINITA → P_0 DI SELLA

FUNZIONI A PIÙ VARIABILI A VALORI VETTORIALI

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ → $m = 1$ ($f(x_1 \dots x_n)$ CAPITOLO PRECEDENTE)
→ $n = 1$ CURVE
→ APPLICAZIONI LINEARI

IN GENERALE $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ É DATA DA

$$f(x_1, x_2, \dots x_m) = (f_1(x_1, x_2, \dots x_n), f_2(x_1, x_2 \dots x_m) \dots f_m(x_1, x_2 \dots x_m))$$

COMPONENTI $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

f CONTINUA IN $P_0 \in \text{dom} f$ SE $\forall i = 1, 2 \dots m$ f_i É CONTINUA IN P_0
f DIFFERENZIABILE IN $P_0 \in \text{dom} f$ SE $\forall i = 1, 2, \dots m$ f_i É DIFFERENZIABILE
SE f É DIFFERENZIABILE IN P_0, OGNI FUNZIONE COMPONENTE f_i HA GRADIENTE $\nabla_{P_0} f_i$

! BISOGNA STUDIARE f_i COMPONENTI.

SI DICE MATRICE JACOBIANA DI f IN P_0

$$\boxed{J_{P_0} f = \begin{pmatrix} \nabla_{P_0} f_1 \\ \nabla_{P_0} f_2 \\ \vdots \\ \nabla_{P_0} f_m \end{pmatrix}} \in \mathbb{R}^{m, n}$$

m: N° DI f_i — n: N° DI INCOGNITE DI f_i

SI DICE DIFFERENZIALE $d_{P_0} f$ L'APPLICAZIONE LINEARE ASSOCIATA A $J_{P_0} f$.
LA MATRICE JACOBIANA HA COME RIGHE I GRADIENTI DELLE FUNZIONI COMPONENTI DI f

$$JF = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

SUPERFICIE IN FORMA PARAMETRICA → É UNA FUNZIONE $F(u, v): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
CON $F(u, v) = (x, y, z)$
DOVE $(x, y, z) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ AL VARIARE DI (u, v)

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

→ EQUAZIONI PARAMETRICHE DI S, IMMAGINE (O SOSTEGNO) DI F

ES: $f(x, y, z) = (2\cos u, 3\operatorname{sen} u, v)$

$\begin{cases} x = 2\cos u_0 \\ y = 3\operatorname{sen} u_0 \\ z = v \end{cases}$ retta $\parallel (0, 0, 1)$

$\begin{cases} x = 2\cos u \\ y = 3\operatorname{sen} u \end{cases}$ ellisse in $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $S = \operatorname{Im} F(u,v)$, $Q_0 = F(P_0)$ PUNTO DI REGOLARITÀ

SI DICE VERSORE NORMALE A S IN Q_0

$$\boxed{\vec{n} = \operatorname{vers}(F_u \wedge F_v)_{P_0} = \frac{(F_u \wedge F_v)_{P_0}}{\| (F_u(u_0,v_0) \wedge F_v(u_0,v_0)) \|}}$$

TEOREMA $G \circ F$ É DIFFERENZIABILE IN P_0 E $d_{P_0}(G \circ F) = dG_{F(P_0)} \cdot d_{P_0} F$

CIOÉ SE

$$\boxed{J_{P_0}(G \circ F) = J_{F(P_0)} G \cdot J_{(P_0)} F}$$

CASI PARTICOLARI SE $n=1$ γ É UN ARCO DI CURVA

$\gamma(t) = (x_1(t), \dots x_n(t))$

$f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$P_0 = \gamma(t_0)$

ALLORA $F(t) = f(\gamma(t))$ É DERIVABILE IN t

E RISULTA

$$\boxed{F'(t_0) = \operatorname{grad}_{P_0} f \cdot \gamma'(t_0)} \leftarrow \text{REGOLA DELLA CATENA}$$

PER TROVARE PIANO tg TE

$$t_0 \in \mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{G} \mathbb{R}$$

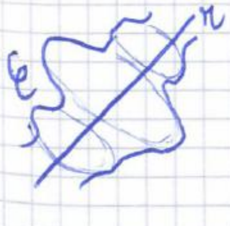
$G \circ \gamma$

CONSIDERO L'INSIEME DI LIVELLO K DELLA FUNZIONE G

$L_K = \{ P \in \operatorname{dom} f \mid f(P) = k \}$ INSIEME DI LIVELLO K

il VETTORE $\operatorname{grad}_{P_0} f$ É ORTOGONALE AI VETTORI TANGENTI A TUTTE LE CURVE CONTENUTE IN S E PASSANTI PER P_0.

SUPERFICI DI ROTAZIONE → SI OTTENGONO DALLA ROTAZIONE DELLA CURVA ATTORNO A UNA RETTA DETTA RETTA DI ROTAZIONE



$$\mathcal{C} = \begin{cases} x = x(t) \\ y = 0 \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotazione di θ in punti di $\mathcal{C}$

$$M \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t)\cos\theta \\ x(t)\sin\theta \\ \dots \end{pmatrix} \text{ ottengo } S = \begin{cases} x = x(t)\cos\theta \\ y = x(t)\sin\theta \\ z = z(t) \end{cases}$$