NUMERO: 1351 ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Zito

MATERIA: Tecnica delle Costruzioni, Prof.Carbone

"Puente de la Mujer, Buenos Aires Argentina- Santiago Calatrava"

APPUNTI di TECNICA delle COSTRUZIONI

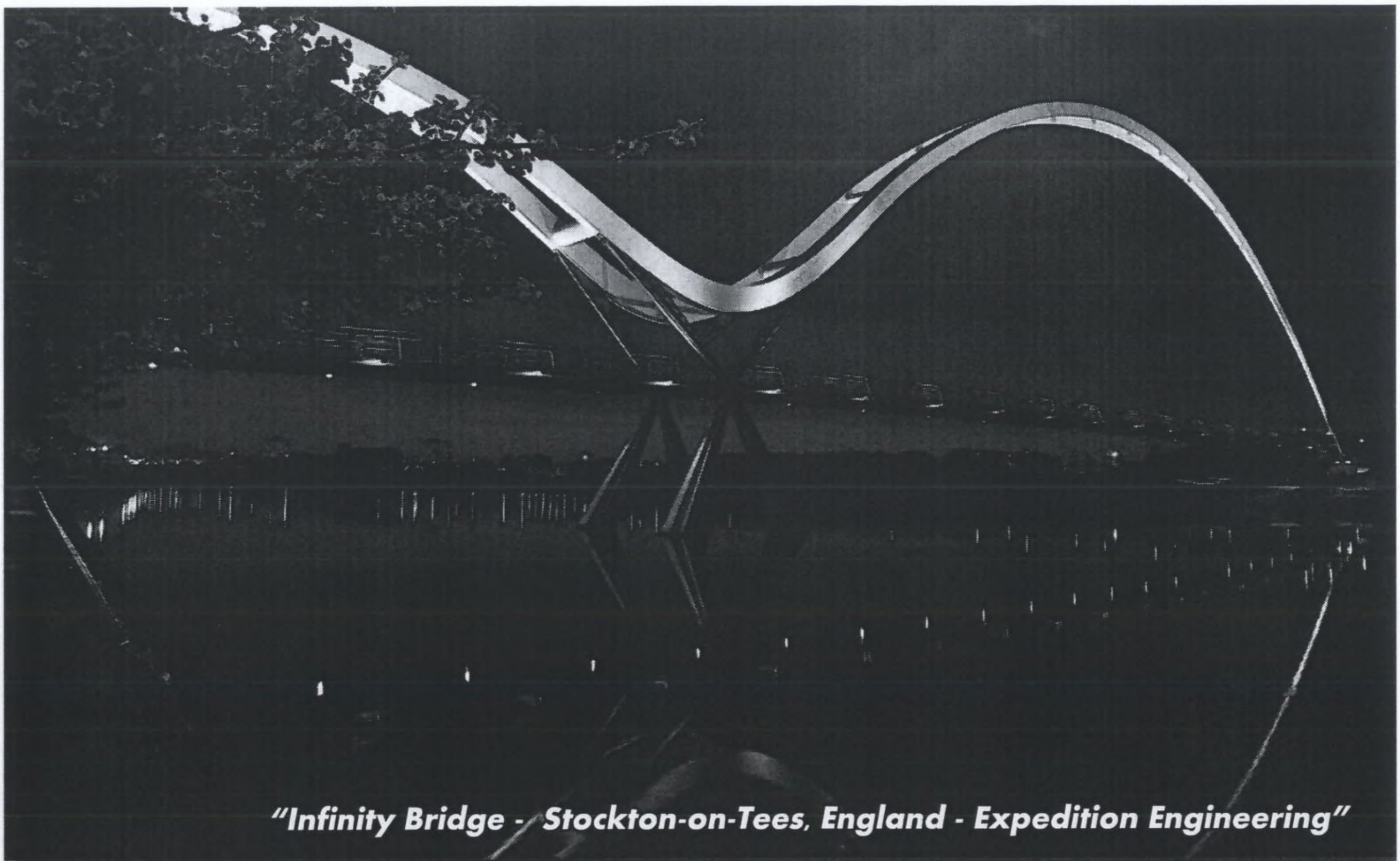
Prof. Ing. Vincenzo Ilario Carbone

facolta' di Ingegneria Edile

III° anno

alessandro zito

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 230



"Infinity Bridge - Stockton-on-Tees, England - Expedition Engineering"

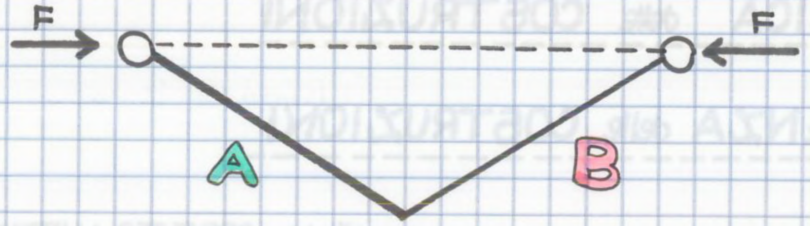
APPUNTI di TECNICA delle COSTRUZIONI

Prof. Ing. Vincenzo Ilario Carbone

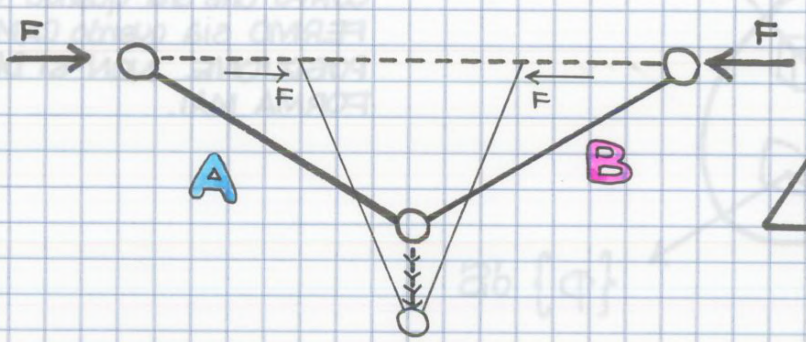
- CAPITOLO 0 -

"Richiami di Scienza delle Costruzioni"

alessandro zito



A, **B** ⟹ sono 2 ASTE che costituiscono un unico CORPO **RIGIDO**



A, **B** ⟹ rappresentano 2 **BIELLE**

⚠ In questo caso il nostro **CORPO NON e' RIGIDO** perche' abbiamo aggiunto uno **SVINCOLAMENTO**

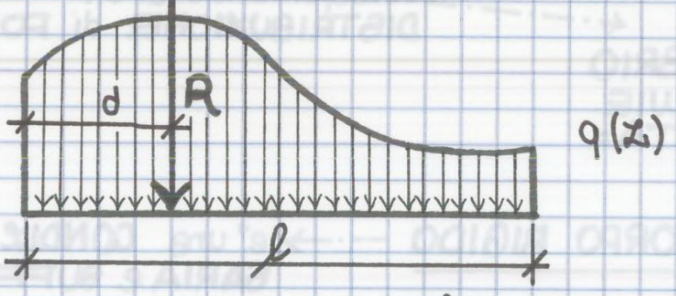
CONDIZIONE NECESSARIA e SUFFICIENTE

Si traduce con le **EQUAZIONI CARDINALI** della **STATICA**.

Sono spesso riferite alla **RISULTANTE** ed al **MOMENTO RISULTANTE**.

DISTRIBUZIONI di FORZE

a. DISTRIBUZIONE di CARICO VARIABILE



$$R = \text{RISULTANTE} = \int_0^{\ell} q(x)\,dx$$

NI APPLICATE SODDISFI le EQUAZIONI CARDINALI della STATICA.

① $\{R\} = \{0\}$ RISULTANTE NULLO

② $\{M(0)\} = \{0\}$ MOMENTO RISULTANTE NULLO

FORZE / MOMENTI ATTIVI = FORZE / MOMENTI REATTIVI

REATTIVI → dovuti ai VINCOLI

$$① \quad \{R\} = \{0\} \Longrightarrow \begin{vmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

COMPONENTI di R

COMPONENTI delle FORZE lungo le DIREZIONI PRINCIPALI.

$$② \quad \{M(0)\} = \{0\} \Longrightarrow = \sum_{i=1}^{m} \{M_i(0)\} + \sum_{i=1}^{n} \left(\{r_i\} \wedge \{F_i\}\right) = \{0\}$$

POLO

i-esimo MOMENTO APPLICATO

ARBITRARIETÀ del POLO ⟶ è permessa dalla CONDIZIONE di ANNULLAMENTO della RISULTANTE.

$$\{R\} = \{0\}$$

Perchè SEMPLIFICAZIONE NOTEVOLE ?

- La RISULTANTE ha SOLO 2 COMPONENTI
- Il MOMENTO SOLO UNA

$$① \ \{R\} = \{0\} \Rightarrow = \begin{vmatrix} R_x \\ R_y \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$② \ \{M_z(O)\} = 0 \Rightarrow = \sum_{i=1}^{m} M_{zi} + \sum_{i=1}^{n} (\{r_i\} \wedge \{F_i\}) = 0$$

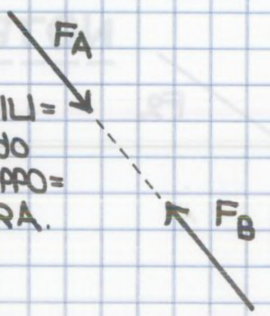
Da EQUAZIONE VETTORIALE diventa EQUAZIONE SCALARE

CASO PIANO
- → 2 EQUAZIONI di EQUILIBRIO alla TRASLAZIONE
- → 1 EQUAZIONE di EQUILIBRIO alla ROTAZIONE rispetto un POLO GENERICO

⚠ se ① e ② sono soddisfatte ⇒ il SISTEMA di FORZE e MOMENTI APPLICATI viene definito EQUILIBRATO o EQUIVALENTE a ZERO

2 SISTEMI di FORZE si dicono essere l'UNO EQUILIBRANTE dell'ALTRO quando la loro SOMMA risulta essere un SISTEMA EQUILIBRATO.

Saranno EQUILIBRATE quando l'una sarà l'OPPOSTO dell'ALTRA.



- **INCAPACI** di esercitare delle **REAZIONI** nella **DIREZIONE** degli **SPOSTAMENTI CONSENTITI**;
- **BILATERALI**: possono esercitare la loro **AZIONE** in uno dei 2 **VERSI POSSIBILI** lungo la corrispondente **DIREZIONE EFFICACE**.

GERARCHIA dei VINCOLI: viene considerata in base al NUMERO dei GRADI di LIBERTA' che i VINCOLI ELIMINANO.

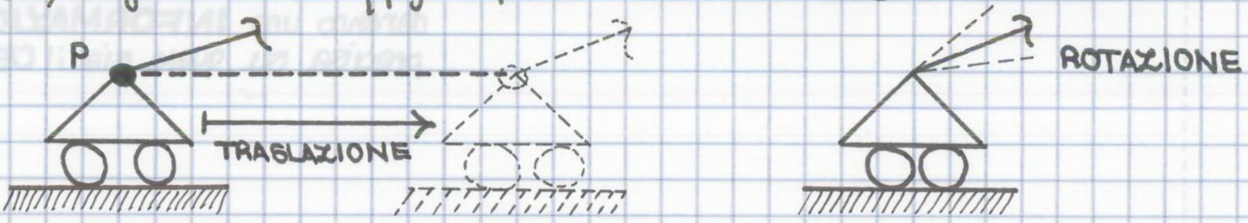
- **VINCOLI SEMPLICI** → ELIMINANO solo un GRADO di LIBERTA' al PUNTO in cui essi sono applicati
  → esprimono una SOLA EQUAZIONE di VINCOLO
  → ad ogni MOVIMENTO IMPEDITO corrisponderà una FORZA / REAZIONE esercitata dal VINCOLO.
- **VINCOLI DOPPI** → ELIMINANO 2 GRADI di LIBERTA' al PUNTO in cui essi sono applicati
  → esprimono 2 EQUAZIONI di VINCOLO
- **VINCOLI TRIPLI** → ELIMINANO 3 GRADI LIBERTA' al PUNTO in cui essi sono applicati.
  → esprimono 3 EQUAZIONI di VINCOLO

CENTRI di ROTAZIONE ASSOLUTA

- **VINCOLI SEMPLICI**: danno solo una INDICAZIONE su dove possa trovarsi, se ∃, il CENTRO di ROTAZIONE ASSOLUTA.
  → definiscono una **RETTA** su cui si trova questo CENTRO di ROTAZIONE ASSOLUTA.

OSSERVAZIONE:

Il PUNTO **P** **NON** può MUOVERSI lungo la RETTA $\{n\}$; lo potrà fare, invece, lungo la RETTA $\{p\}$ e potrà RUOTARE attorno al PUNTO P



DEFINIZIONE CINEMATICA

- $\{d\eta_P\}^T\{n\} = 0$ — La COMPONENTE $d\eta$ del PUNTO P, se PROIETTATA lungo la NORMALE $\{n\}$, dovrà essere UGUALE a ZERO.

SOLO questa è un'EQUAZIONE di VINCOLO.

- $\{d\eta_P\}^T\{p\} \neq 0$ — La COMPONENTE $d\eta$ del PUNTO P proiettata lungo la RETTA $\{p\}$ ⟹ il PRODOTTO SCALARE sarà $\neq 0$ (sono //).

- $\varphi \neq 0$ — È PERMESSA la ROTAZIONE nel PIANO.

Passiamo al **DUALE** ⟹ **DEFINIZIONE STATICA**

- $\{R_P\}^T\{n\} \neq 0$ (1')

È DIVERSA da ZERO perché è NULLO lo SPOSTAMENTO, infatti quest'ultimo viene IMPEDITO.

- $\{R_P\}^T\{p\} = 0$ (2')
- $M_P = 0$ (3')

È UGUALE a ZERO perché NON ci può essere NESSUNA OPPOSIZIONE del VINCOLO in quella DIREZIONE.

Dalle EQUAZIONI (1') e (2') possiamo dedurre che la REAZIONE **R_P** è DIRETTA nella DIREZIONE di $\{n\}$.

Dalla (3') deduciamo che la REAZIONE **R_P** NON solo è DIRETTA nella DIREZIONE di $\{n\}$ ma passa anche per il PUNTO P. Infatti se il **MOMENTO** è NULLO ⟹ anche il **BRACCIO** sarà **NULLO**.

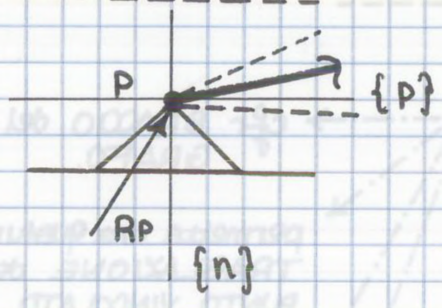
⚠ Il **CENTRO** di **ROTAZIONE ASSOLUTA**, si troverà lungo la RETTA $\{n\}$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 230

a. CERNIERA → ELIMINA 2 GRADI di LIBERTA' (TRASLAZIONI)

↓

IMPONE 2 EQUAZIONI di VINCOLO



Il PUNTO P NON può TRASLARE, NON può MUOVERSI lungo le 2 DIREZIONI PRINCIPALI.

DEFINIZIONE CINEMATICA

- $\{d\eta_P\}^T\{n\} = 0$
- $\{d\eta_P\}^T\{p\} = 0$

EQUAZIONI di VINCOLO

- $\varphi_P \neq 0$

DEFINIZIONE STATICA

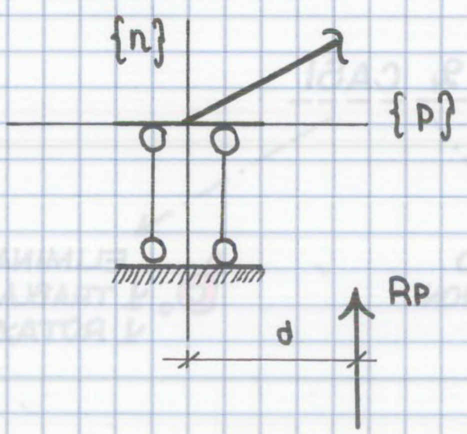
- $\{R_P\}^T\{n\} \neq 0$
- $\{R_P\}^T\{p\} \neq 0$
- $M_P = 0$ → La REAZIONE R_P deve passare per il VINCOLO

⚠ Il CENTRO di ROTAZIONE ASSOLUTA coincide con il PUNTO P.

b. DOPPIO PENDOLO → ELIMINA 2 GRADI di LIBERTA' (TRASLAZIONE + ROTAZIONE)

↓

2 EQUAZIONI di VINCOLO



Il PUNTO P NON subirà alcuno SPOSTAMENTO ⟹ Il CENTRO di ROTAZIONE ASSOLUTA NON può ∃.

DEFINIZIONE CINEMATICA

- $\{d\eta_P\}^T\{n\} = 0$
- $\{d\eta_P\}^T\{p\} = 0$
- $\varphi = 0$

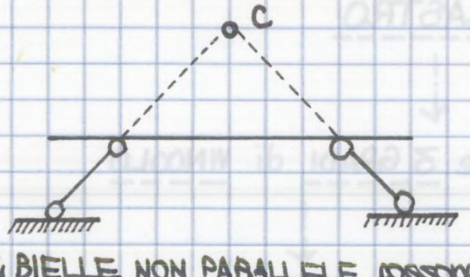
DEFINIZIONE STATICA

- $\{R_P\}^T\{n\} \neq 0$
- $\{R_P\}^T\{p\} \neq 0$
- $M_P \neq 0$

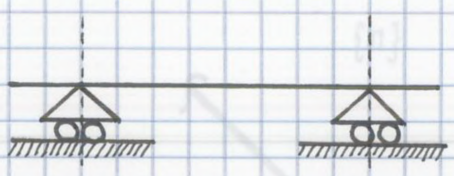
3 PARAMETRI
- MODULO $\{R_P\}$
- BRACCIO d ⟹ DISTANZA tra il PUNTO P e il PUNTO di APPLICAZIONE della FORZA
- ANGOLO α ⟹ INCLINAZIONE che ne definisce la DIREZIONE

⚠ Ciascun VINCOLO REAGISCE con una SOLA FORZA!!!!!!!!!

VINCOLI DOPPI o TRIPLI ⟶ possono essere ottenuti attraverso la SOMMA di VINCOLI SEMPLICI.

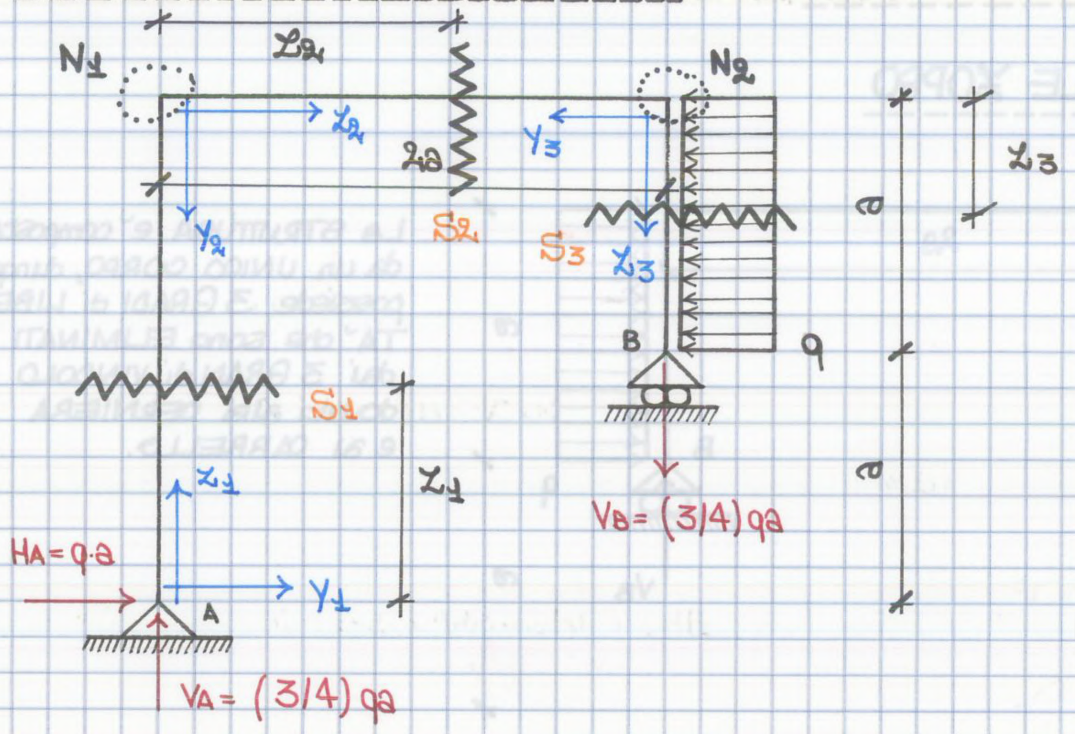


2 BIELLE NON PARALLELE possono costituire una CERNIERA IDEALE C, dove C si ottiene attraverso l'INTERSEZIONE degli ASSI delle BIELLE.



Possono SIMULARE un DOPPIO PENDOLO. ⟹ ammettono la TRASLAZIONE ma NON la ROTAZIONE.

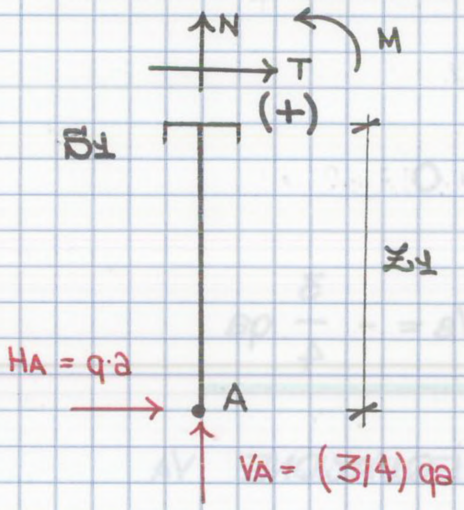
SCHEMA delle FORZE AGENTI



2^a OPERAZIONE ⟹ TRACCIAMENTO dei DIAGRAMMI delle CARATTERISTICHE della SOLLECITAZIONE

⟹ ⚠ Dobbiamo indicare un SISTEMA di RIFERIMENTO ∀ ELEMENTO che entra in gioco!!!

- **STUDIO SEZIONE S_1** $\quad 0 \le z_1 \le 2a$



$\overset{+}{\rightarrow}$) $+H_A + T = 0$

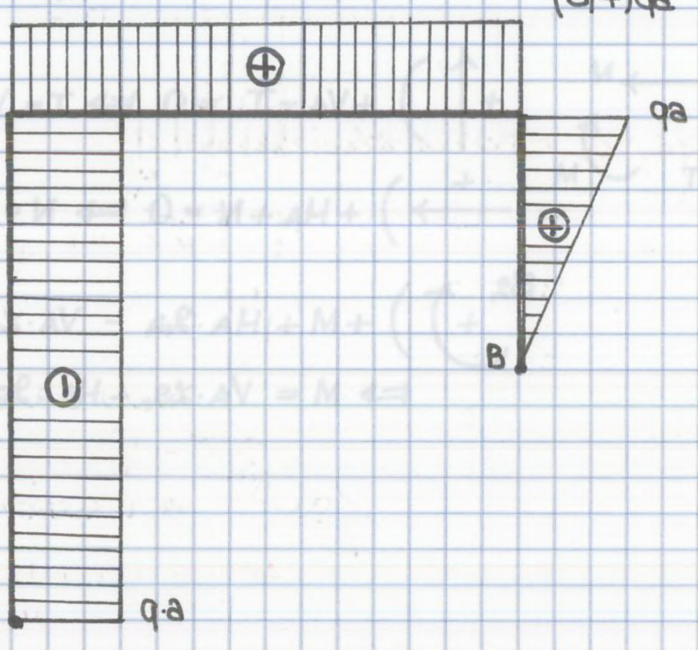
⟹ $T = -H_A$

$+\uparrow$) $+V_A + N = 0$ ⟹ $N = -V_A$

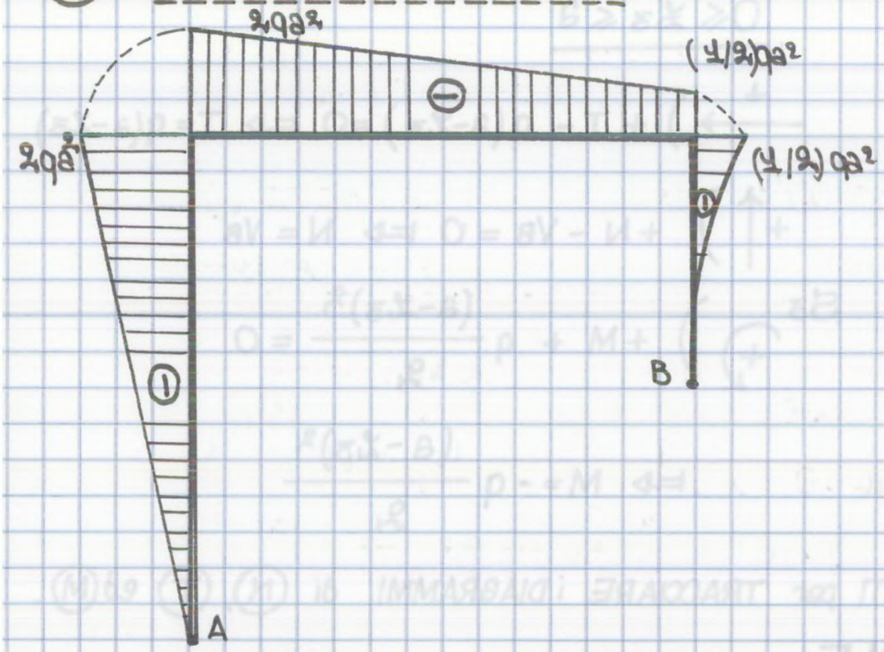
S_1 $\circlearrowleft +$) $+H_A \cdot z_1 + M = 0$ ⟹ $M = -H_A \cdot z_1$

MOMENTO ha ANDAMENTO LINEARE ⟹ $\dfrac{dM}{dz} = T$

(T) : SFORZO di TAGLIO

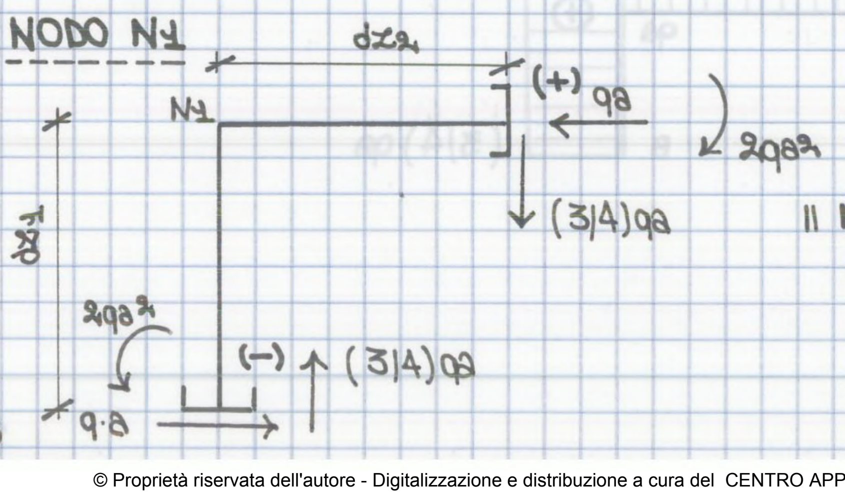


(M) : MOMENTO FLETTENTE



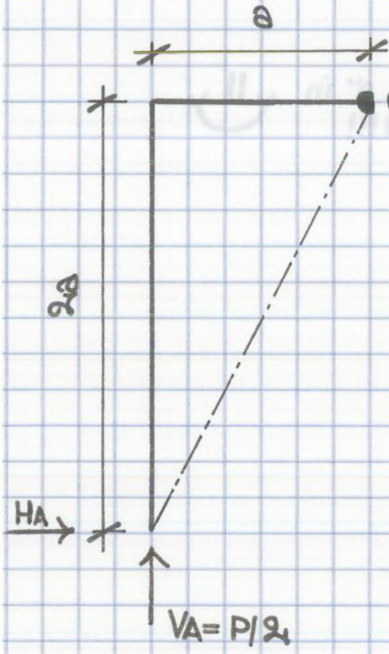
Per **VERIFICARE** che i **CALCOLI** siano **GIUSTI** bisogna effettuare lo **STUDIO** dell' **EQUILIBRIO** dei **NODI**.

NODO N1



Il **NODO N1** e' in **EQUILIBRIO**!!!

Per determinare le REAZIONI H_A e H_B devo prendere in esame le EQUAZIONI AUSILIARIE ⟹ Divido la STRUTTURA in 2 CORPI RIGIDI



ELEMENTO INCERNIERATO alle 2 ESTREMITA' + NON CARICATO ⟹ La RISULTANTE avrà per DIREZIONE la CONGIUNGENTE tra le 2 CERNIERE

$$C \circlearrowleft + \Big) \quad +H_A \cdot 2a - V_A \cdot a = 0$$

$$+H_A = V_A/2$$

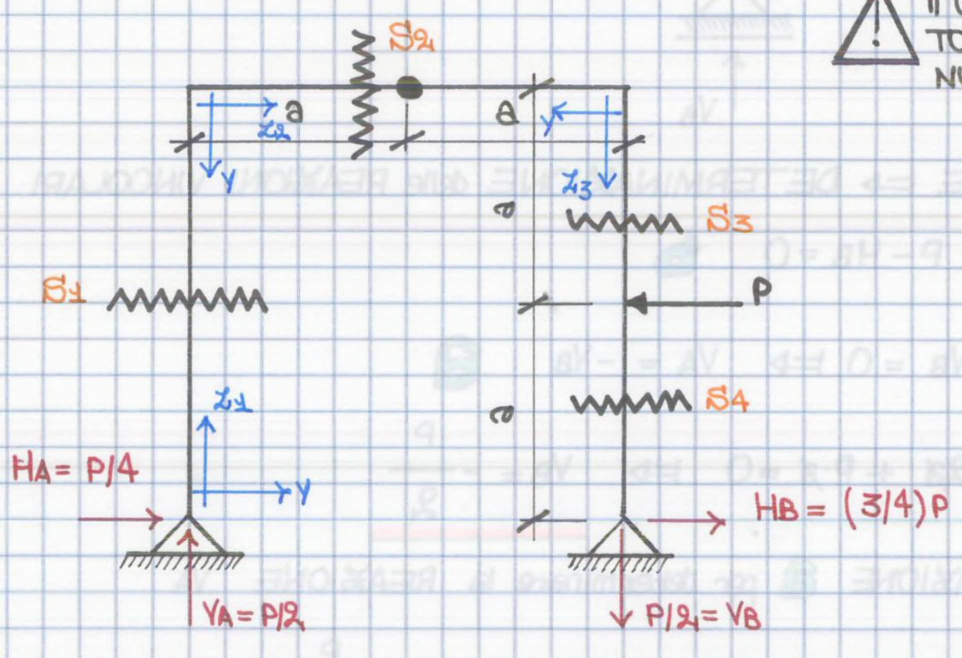
$$H_A = +\frac{P}{4}$$

Dall' EQUAZIONE b determiniamo la REAZIONE VINCOLARE H_B:

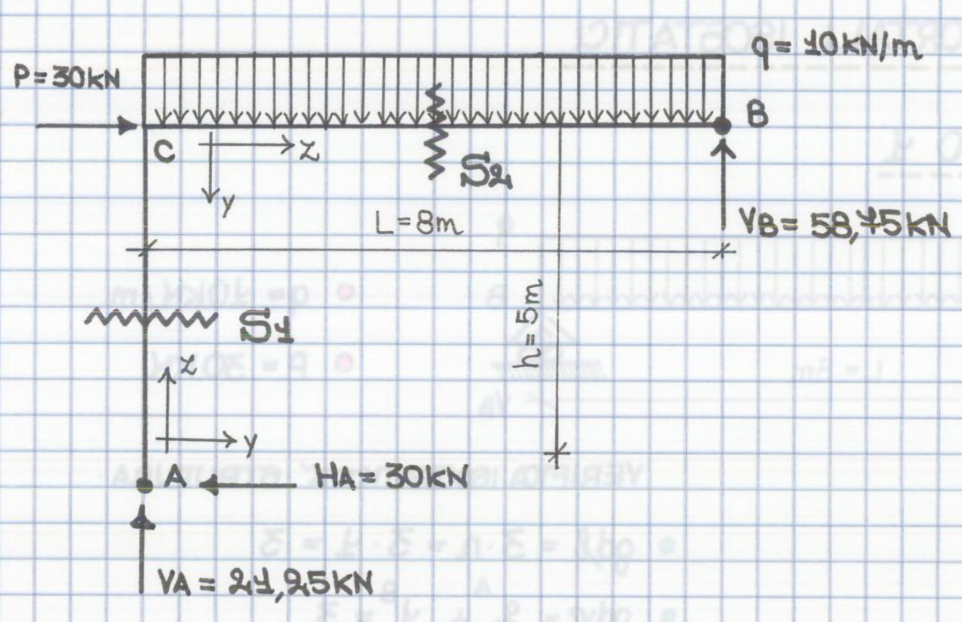
$$\xrightarrow{+}\Big) \quad +H_A - H_B - P = 0 \quad \Longrightarrow \quad H_B = H_A - P$$

$$H_B = \frac{P}{4} - P = -\frac{3}{4}P$$

SCHEMA delle FORZE AGENTI

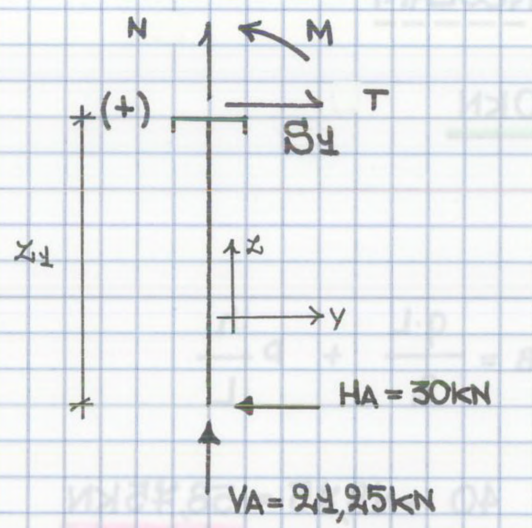


⚠ Il CARICO P CONCENTRATO mi genera DISCONTINUITA'.



b. DIAGRAMMI delle CARATTERISTICHE di SOLLECITAZIONE

STUDIO SEZIONE S_1 $\quad 0 \leq z_1 \leq h = 5{,}00m$



$\xrightarrow{+})$ $+T - H_A = 0 \Rightarrow T = 30kN$

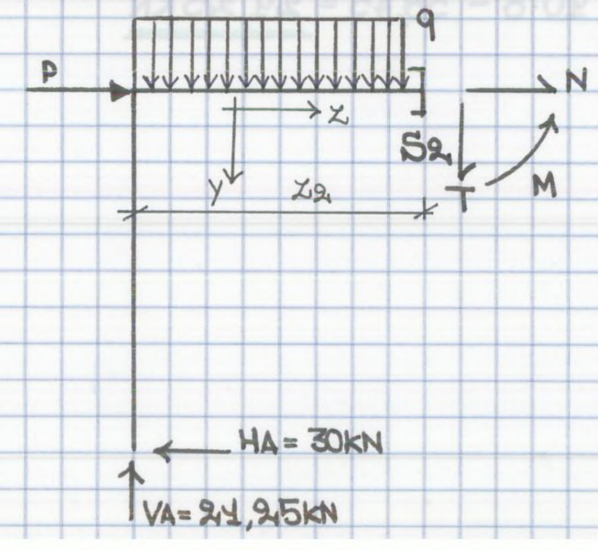
$+\uparrow)$ $+V_A + N = 0 \Rightarrow N = -V_A$

$\Rightarrow N = -21{,}25kN$

$\circlearrowleft +)$ $+M - H_A \cdot z_1 = 0 \Rightarrow M = H_A \cdot z_1$

$\Rightarrow M = 30 \cdot z_1$ Il MOMENTO FLETTENTE VARIA LINEARMENTE!!!

STUDIO SEZIONE S_2 $\quad 0 \leq z_2 \leq L = 8{,}00m$



$\xrightarrow{+})$ $+N + \cancel{P} - \cancel{H_A} = 0 \Rightarrow N = 0$

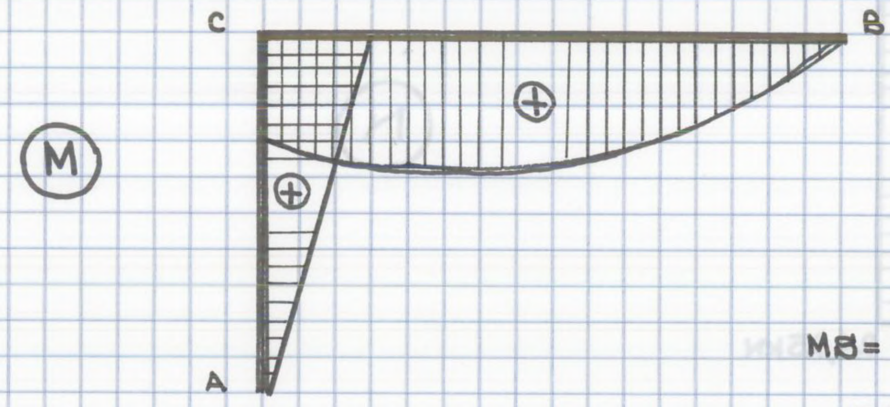
$+\uparrow)$ $+V_A - q \cdot z_2 - T = 0$

$T = V_A - q \cdot z_2 = 21{,}25 - 10 \cdot z_2$

$\circlearrowleft +)$ $+M - V_A \cdot z_2 - H_A \cdot h + q \cdot z_2 \cdot \frac{z_2}{2}$

$= 0$

DIAGRAMMA del MOMENTO FLETTENTE



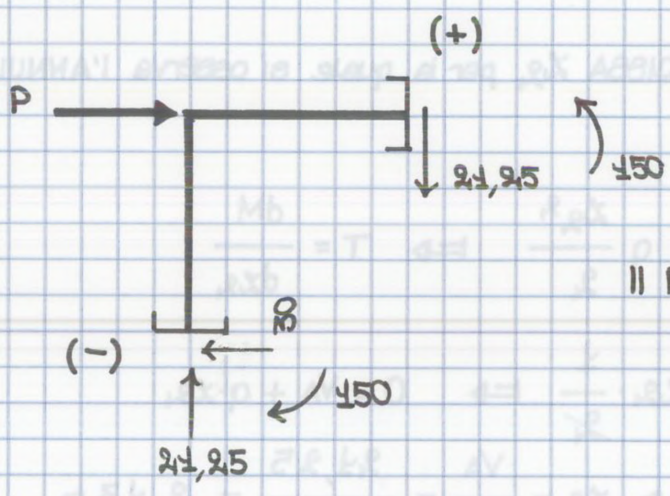
$M_C = 30 \cdot z_1 =$
$= 30 \cdot h = 30 \cdot 5 =$
$= 150 \, kN \cdot m$

$M_B = V_A z_2 + H_A \cdot h - q \cdot \dfrac{z_2^2}{2} =$
$= 21{,}25 \cdot 2{,}13 +$
$+ 30 \cdot 5 +$
$- 10 \cdot (2{,}13)^2 \cdot 1/2 =$
$= 172{,}60 \, kN \cdot m$

$M_B = 21{,}25 \cdot 8 + 30 \cdot 5 - 10 \cdot \dfrac{8^2}{2} =$
$= 0{,}00 \, kN \cdot m$

STUDIO EQUILIBRIO NODI

NODO C



Il NODO C e' in EQUILIBRIO !!!!!!

24

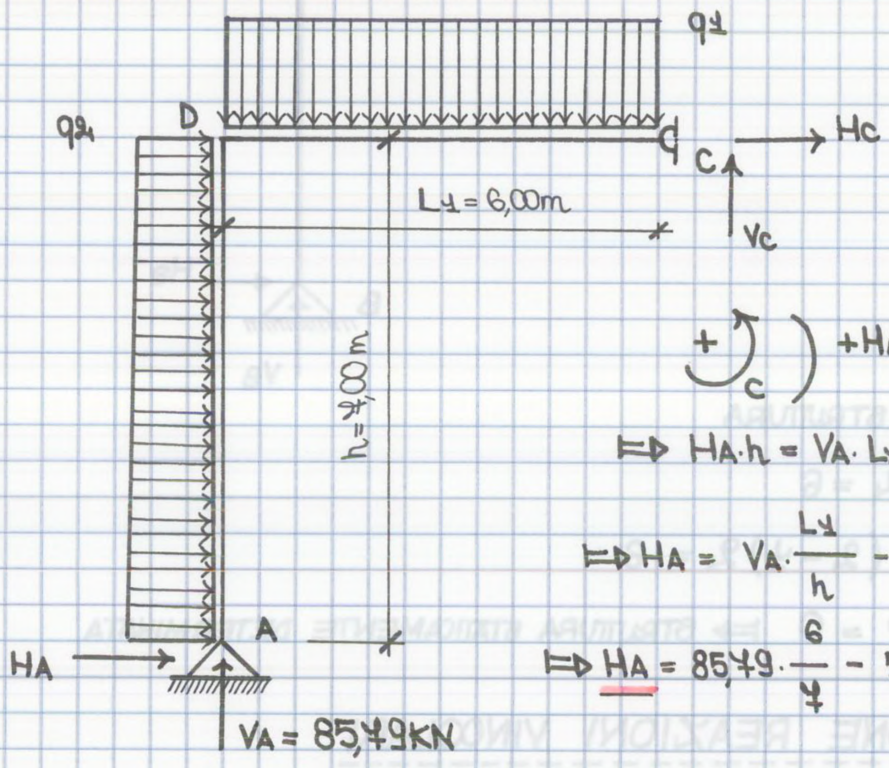
$$+\uparrow) \quad +V_A + V_B - q_1(L_1+L_2) = 0$$

$$\Rightarrow V_A = q_1(L_1+L_2) - V_B$$

$$\Rightarrow \underline{V_A} = 16 \cdot 12 - 106{,}21 = \underline{85{,}79\,KN}$$

⚠ Per la DEFINIZIONE delle REAZIONI VINCOLARI H_A ed H_B dobbiamo fare utilizzo delle EQUAZIONI AUSILIARIE

- Considero la STRUTTURA ADC



$$+\circlearrowleft_C) \quad +H_A \cdot h - V_A \cdot L_1 + q_2 \cdot \frac{h^2}{2} + q_1 \frac{L_1^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow H_A \cdot h = V_A \cdot L_1 - q_2 \frac{h^2}{2} - q_1 \cdot \frac{L_1^2}{2}$$

$$\Rightarrow H_A = V_A \cdot \frac{L_1}{h} - q_2 \frac{h}{2} - q_1 \cdot \frac{L_1^2}{2h}$$

$$\Rightarrow \underline{H_A} = 85{,}79 \cdot \frac{6}{7} - 5 \frac{7}{2} - 16 \cdot \frac{6^2}{27} = \underline{14{,}90\,KN}$$

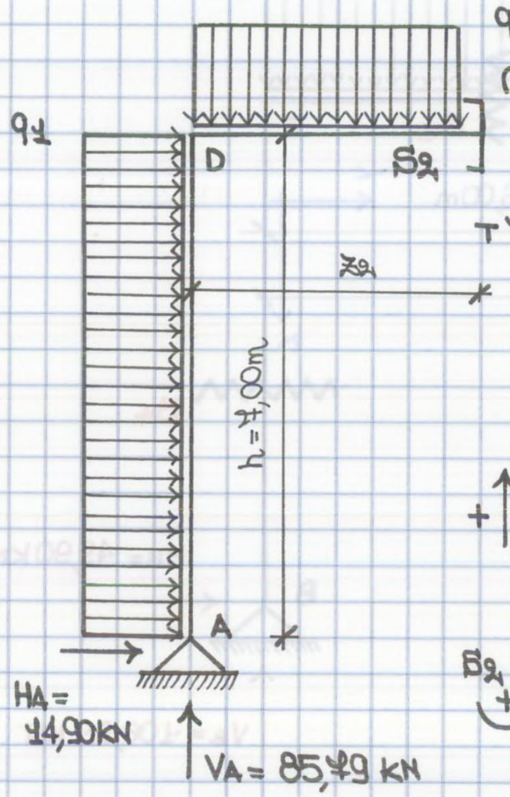
$\Rightarrow$ Riprendo l'EQUAZIONE GLOBALE dell'EQUILIBRIO **A** :

$$\xrightarrow{+}) \quad +H_A + q_2 \cdot h - H_B = 0$$

$$\Rightarrow \underline{H_B} = H_A + q_2 \cdot h \Rightarrow H_B = 14{,}90 + 5 \cdot 7 = \underline{49{,}90\,KN}$$

STUDIO SEZIONE S2

$0 \leq z_2 \leq L_1 + L_2$



$\xrightarrow{+}$) $+N + H_A + q_1 \cdot h = 0$

$\Rightarrow N = -H_A - q_1 \cdot h$

$+\uparrow$) $+V_A - q_2 \cdot z_2 - T = 0$

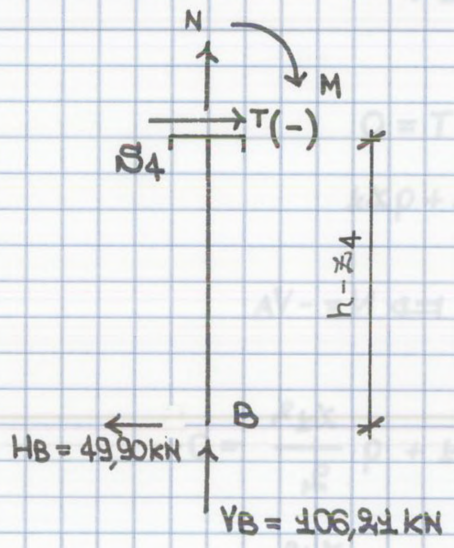
$\Rightarrow T = V_A - q_2 \cdot z_2$

S_2 $\circlearrowright +$) $+H_A \cdot h + q_1 \cdot \frac{h^2}{2} - V_A \cdot z_2 + q_2 \frac{z_2^2}{2} + M = 0$

$M = +V_A \cdot z_2 - H_A \cdot h - q_1 \cdot \frac{h^2}{2} - q_2 \frac{z_2^2}{2}$

STUDIO SEZIONE S4

$0 \leq z_4 \leq h$



$\xrightarrow{+}$) $-H_B + T = 0 \Rightarrow T = H_B$

$+\uparrow$) $+V_B + N = 0 \Rightarrow N = -V_B$

S_4 $+\circlearrowright$) $-M - H_B(h - z_4) = 0$

$\Rightarrow M = -H_B(h - z_4)$

DIAGRAMMA dello SFORZO di TAGLIO

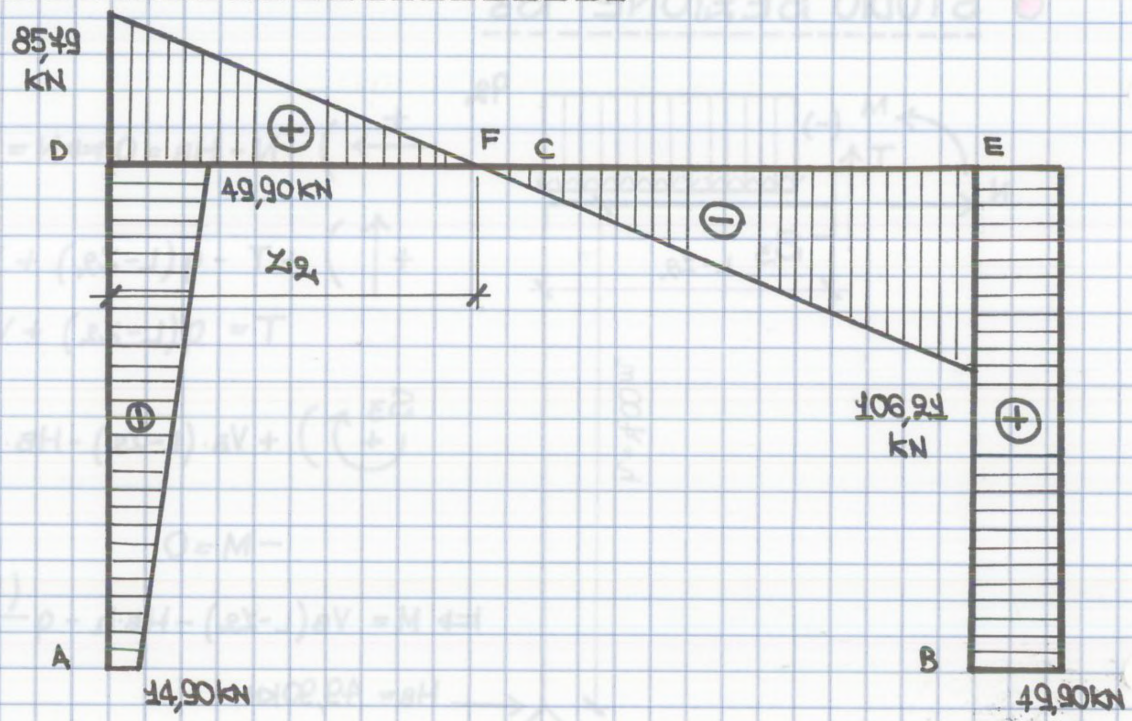
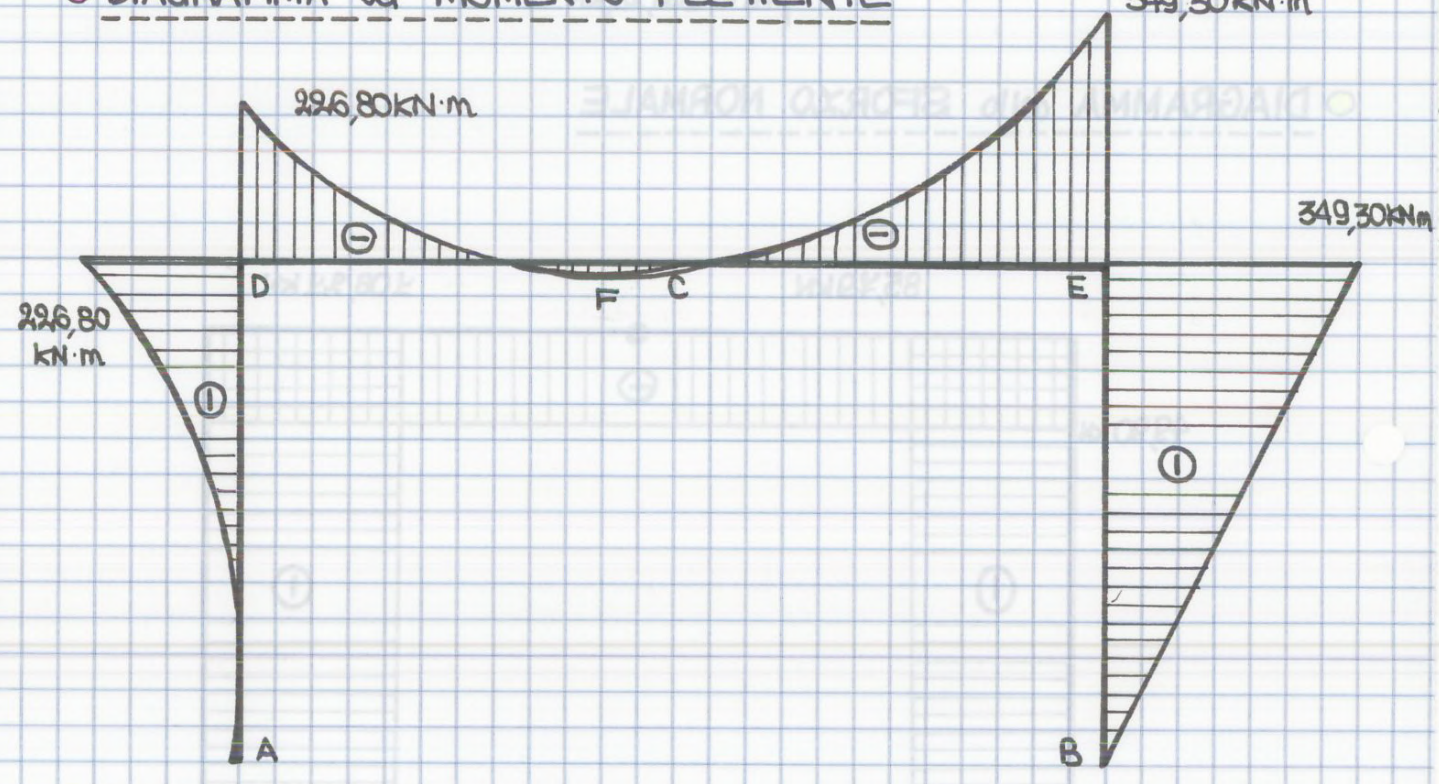
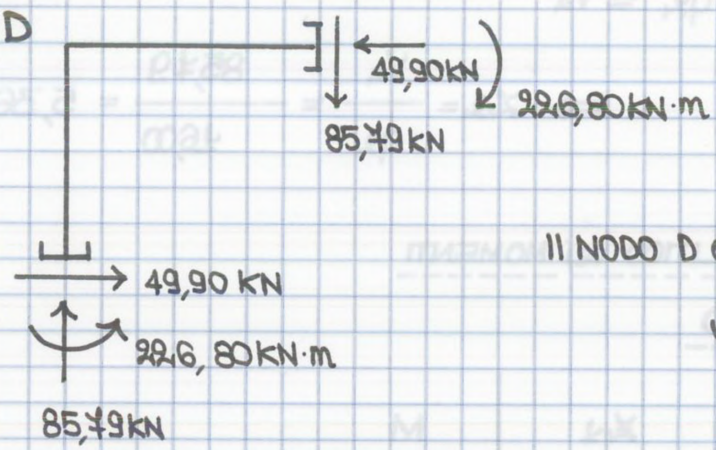


DIAGRAMMA del MOMENTO FLETTENTE



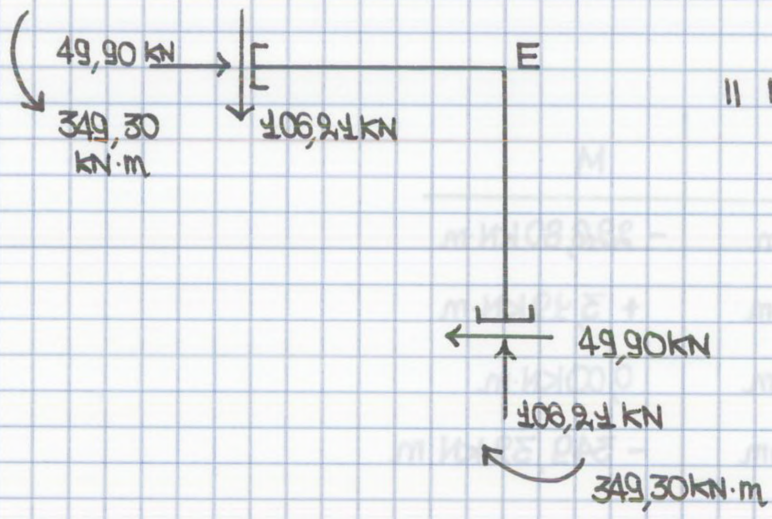
C. STUDIO EQUILIBRIO dei NODI

NODO 1



Il NODO D e' in EQUILIBRIO!!!!!

NODO 2



Il NODO E e' in EQUILIBRIO!!!!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 230

Riprendo EQUAZIONE di EQUILIBRIO VERTICALE:

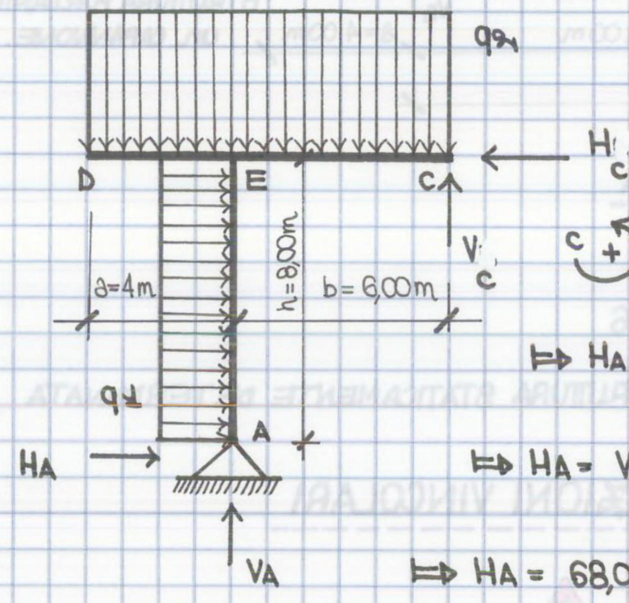
$$+\uparrow\Big)\ +V_A - q_2(L+2a) + V_B = 0$$

$$\Rightarrow V_A = q_2(L+2a) - V_B$$

$$\Rightarrow V_A = 6{,}00(16{,}00 + 2\cdot 4{,}00) - 76{,}00 = 68{,}00\ \text{KN}$$

⚠ Per la DEFINIZIONE delle REAZIONI VINCOLARI H_A ed H_B dobbiamo fare uso delle EQUAZIONI AUSILIARIE.

● CONSIDERO la parte di STRUTTURA ADEC



$$C\ \circlearrowleft\!+\Big)\ +H_A\cdot h - V_A\cdot b + q_1\frac{h^2}{2} + q_2\frac{(a+b)^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow H_A\cdot h = V_A\cdot b - q_1\cdot\frac{h^2}{2} - q_2\cdot\frac{(a+b)^2}{2}$$

$$\Rightarrow H_A = V_A\cdot\frac{b}{h} - q_1\frac{h}{2} - q_2\frac{(a+b)^2}{2h}$$

$$\Rightarrow H_A = 68{,}00\cdot\frac{6{,}00}{8{,}00} - 2{,}00\,\frac{8{,}00}{2} - 6{,}00\cdot\frac{10{,}00^2}{2\cdot 8} =$$

$$\Rightarrow H_A = 51{,}00 - 8{,}00 - 37{,}5 = 5{,}50\ \text{KN}$$

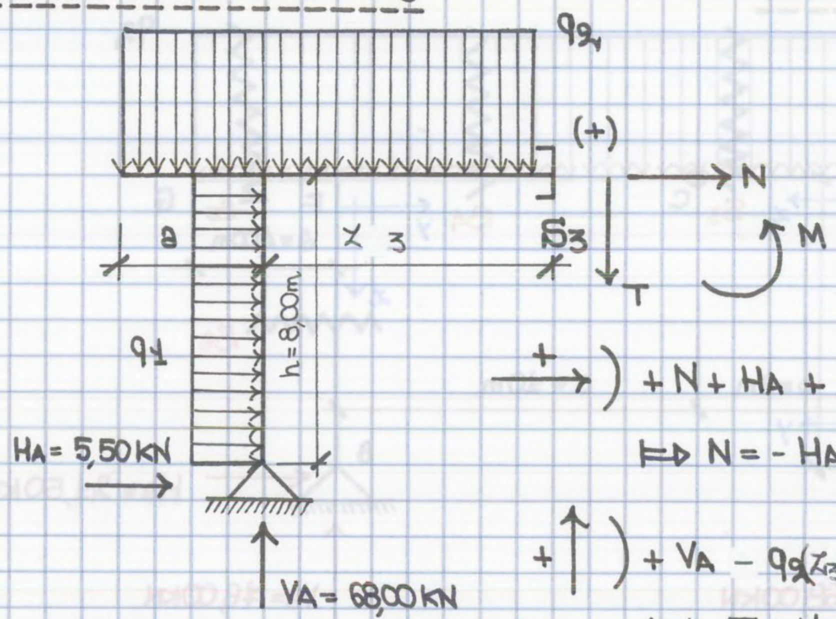
$\Rightarrow$ Riprendo l'EQUAZIONE GLOBALE dell'EQUILIBRIO **A**

$$\xrightarrow{+}\Big)\ +H_A + q_1\cdot h - H_B = 0$$

$$\Rightarrow H_B = H_A + q_1\cdot h$$

$$\Rightarrow H_B = 5{,}50 + 2\cdot 8{,}00 = 21{,}50\ \text{KN}$$

STUDIO SEZIONE S_3



$$\xrightarrow{+}\Big)\ +N + H_A + q_1 \cdot h = 0$$

$$\Rightarrow N = -H_A - q_1 \cdot h$$

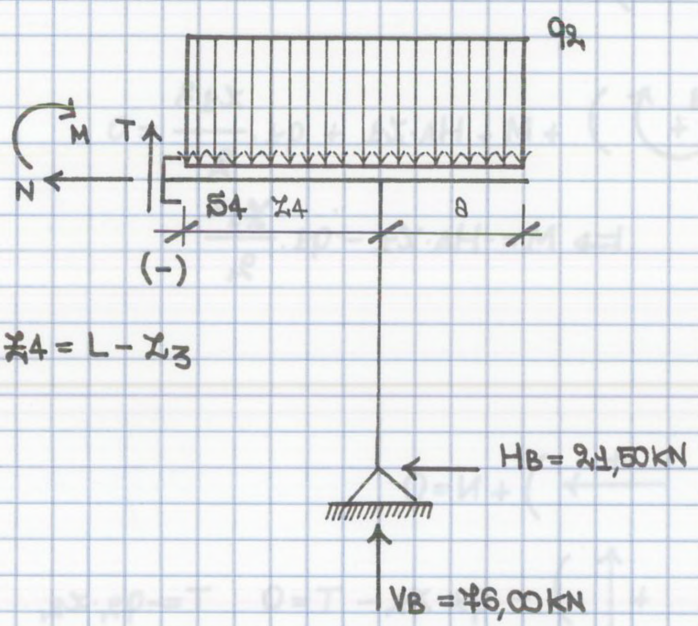
$$+\uparrow\Big)\ +V_A - q_2(z_3 + a) - T = 0$$

$$\Rightarrow T = V_A - q_2(z_3 + a)$$

$$S_3\ \overset{+}{\circlearrowleft}\Big)\ -V_A \cdot z_3 + H_A \cdot h + q_1 \cdot \frac{h^2}{2} + q_2 \frac{(a+z_3)^2}{2} + M = 0$$

$$\Rightarrow M = V_A \cdot z_3 - H_A \cdot h - q_1 \frac{h^2}{2} - q_2 \frac{(a+z_3)^2}{2}$$

STUDIO SEZIONE S_4



$z_4 = L - z_3$

$$\xrightarrow{+}\Big)\ -N - H_B = 0 \qquad N = -H_B$$

$$+\uparrow\Big)\ +V_B - q_2(a + z_4) = 0$$

$$V_B = q_2(a + z_4) = 0$$

$$\overset{+}{\circlearrowleft}\Big)\ -M + V_B \cdot z_4 - q_2 \frac{(a+z_4)^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow M = V_B \cdot z_4 - q_2 \frac{(a+z_4)^2}{2} - H_B \cdot h$$

DIAGRAMMA dello SFORZO di TAGLIO

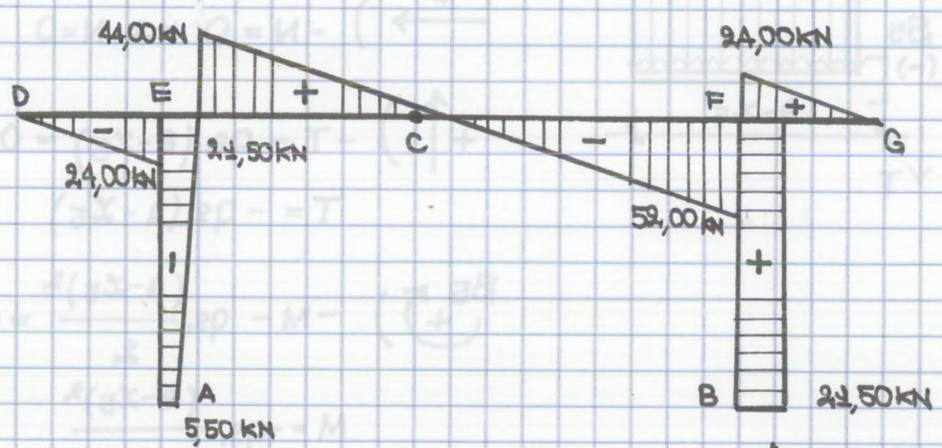
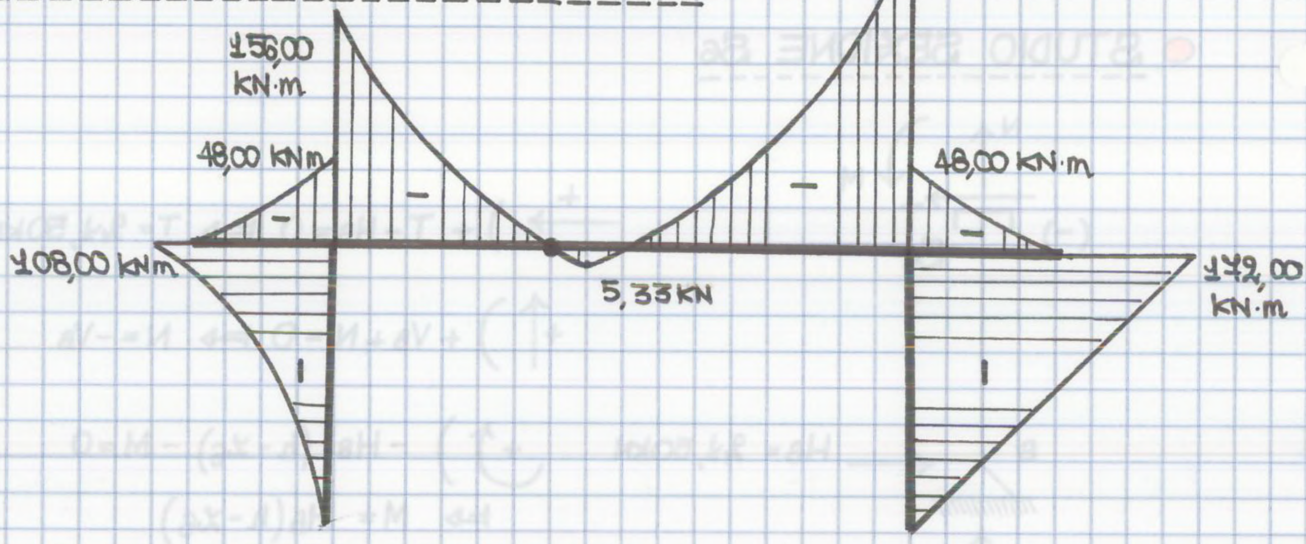


DIAGRAMMA del MOMENTO FLETTENTE



DETERMINAZIONE ASCISSA z_3 di ANNULLAMENTO del TAGLIO

$$T = V_A - q_2(z_3 + a) \implies 0 = V_A - q_2 z_3 - q_2 \cdot a$$

$$\implies q_2 \cdot z_3 = V_A - q_2 \cdot a$$

$$\implies z_3 = \frac{V_A}{q_2} - a = \frac{68{,}00}{6{,}00} - 4{,}00 = 7{,}33\,m$$

STUDIO DELLE TRAVATURE RETICOLARI

TRAVATURA RETICOLARE → STRUTTURA costituita da un **INSIEME** di **ASTE RIGIDE RETTILINEE**

ASTE: sono COLLEGATE tra loro in punti detti **NODI**

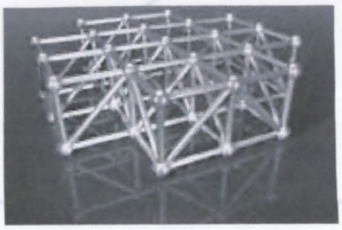
In **OGNI NODO** le **ASTE** possono essere collegate in modo **RIGIDO**, mediante **INCASTRI**, oppure fra loro **ARTICOLATE** con **CERNIERE**.

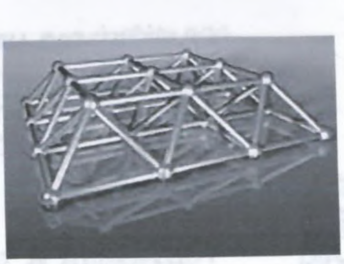
possono essere REALIZZATE:

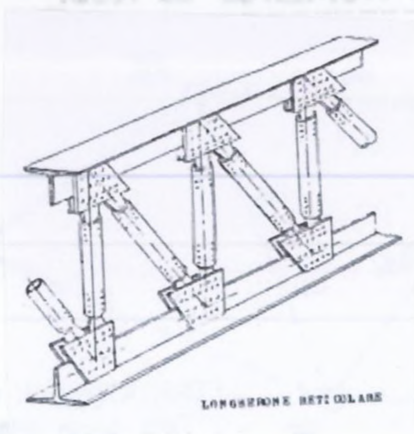
- in **LEGNO**
- in **FERRO**
- in **CONGLOMERATO CEMENTIZIO ARMATO**

possono essere:

- **SPAZIALI**: quando i **NODI** sono DISTRIBUITI nello **SPAZIO** (NON GIACCIONO TUTTI nello STESSO PIANO).
- **PIANE**: quando i **NODI** e le **ASTE** giacciono tutti nello **STESSO PIANO**.







LONGHERONE RETICOLARE

SISTEMA TRIANGOLARE → può essere collegato tramite un **QUARTO NODO** a **DUE ASTE**

Si osserva che per ogni **NODO** in **PIU'** rispetto ai **3 INIZIALI**, occorrono come **MINIMO** un numero di **ASTE DOPPIO** rispetto ai **NODI AGGIUNTI**

⚠ **OBIETTIVO:** ottenere una **STRUTTURA INDEFORMABILE**

Riepilogando:

- **TRAVATURA TRIANGOLARE:** ASTE $a = 3$, NODI $n = 3$;
- **AGGIUNTA QUARTO NODO:** ASTE $a = 5$, NODI $n = 4$
- **AGGIUNTA QUINTO NODO:** ASTE $a = 7$, NODI $n = 5$

CONCLUSIONE:

In termini generali per i **NODI AGGIUNTI** oltre ai **PRIMI TRE**, ossia $(n-3)$; occorre un **NUMERO** di **ASTE DOPPIO** rispetto ai **NODI AGGIUNTI**, ossia $2(n-3)$.

NUMERO TOTALE delle **ASTE OCCORRENTI:**

$$\boxed{a_{TOT} = 3 + 2(n-3)}$$

Sviluppando i **CALCOLI:**

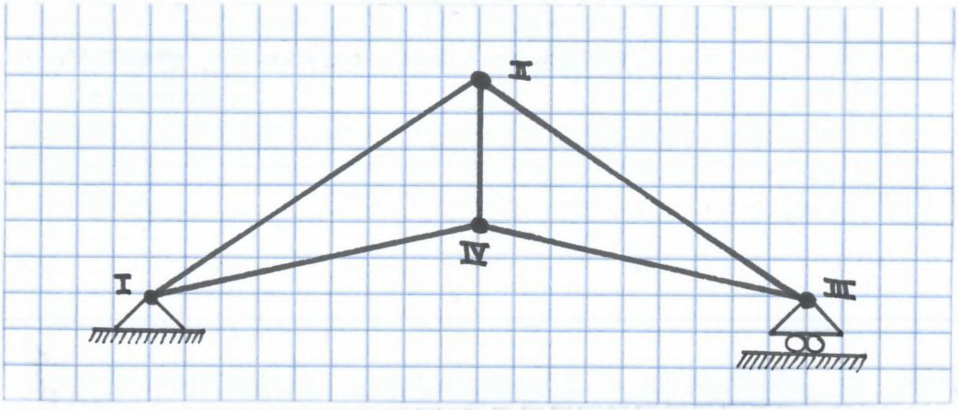
$$a_{TOT} = 3 + 2n - 6 \Rightarrow \boxed{a_{TOT} = 2n - 3}$$

Una **TRAVATURA RETICOLARE** e' **INDEFORMABILE** quando e' verificata la **RELAZIONE**; di cui sopra.

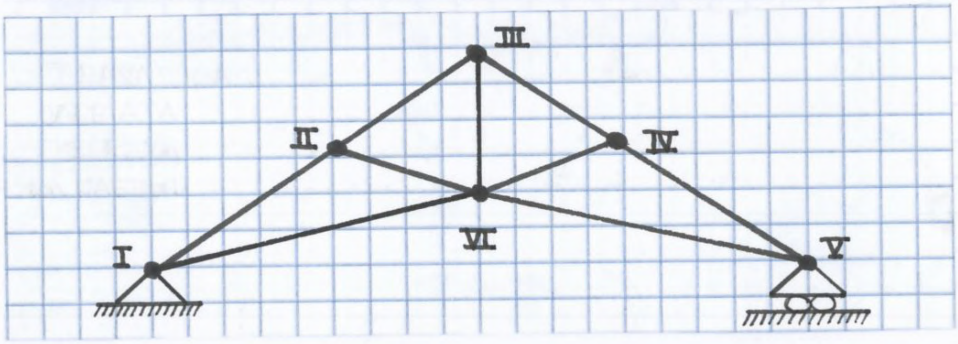
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 230

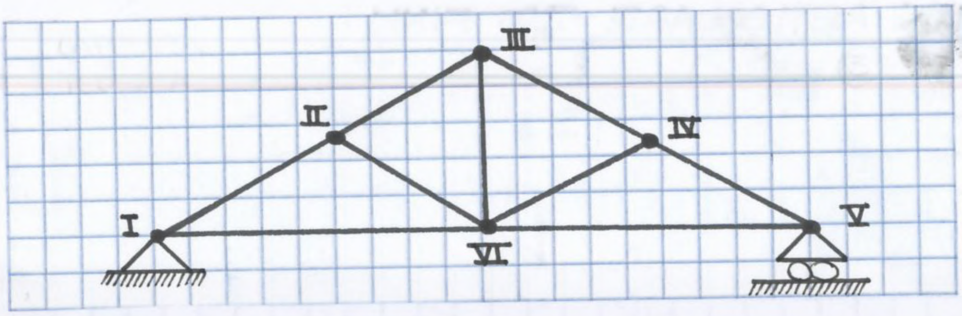
ESEMPI di TRAVATURE RETICOLARI

TRAVATURA a CAPRIATA SEMPLICE con MONACO

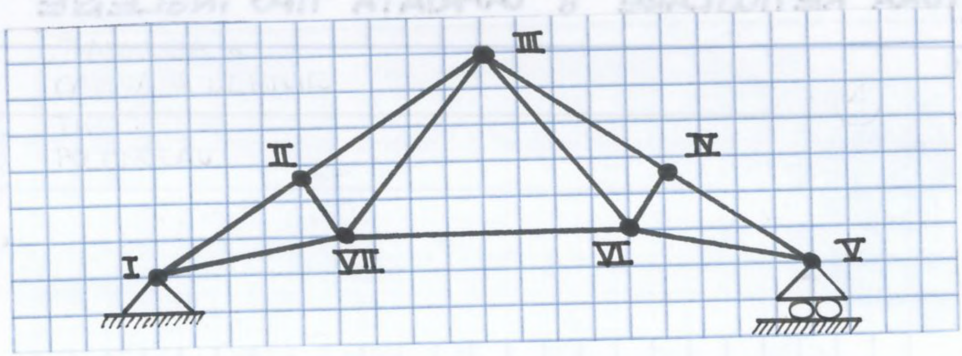


TRAVATURA a CAPRIATA TEDESCA con SAETTONI

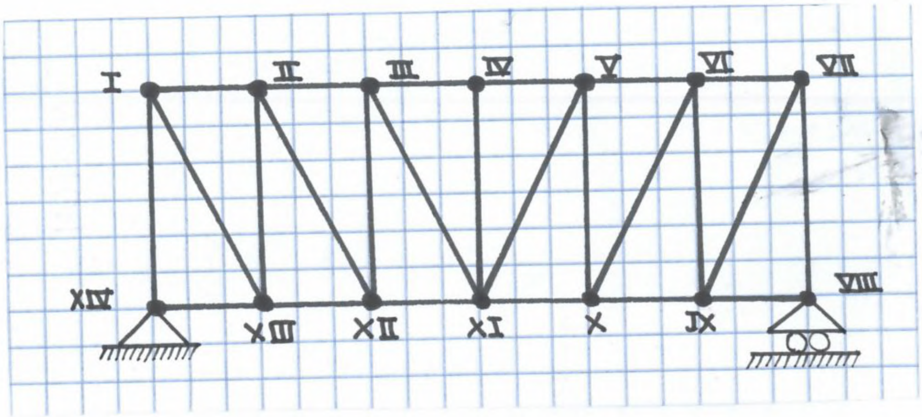




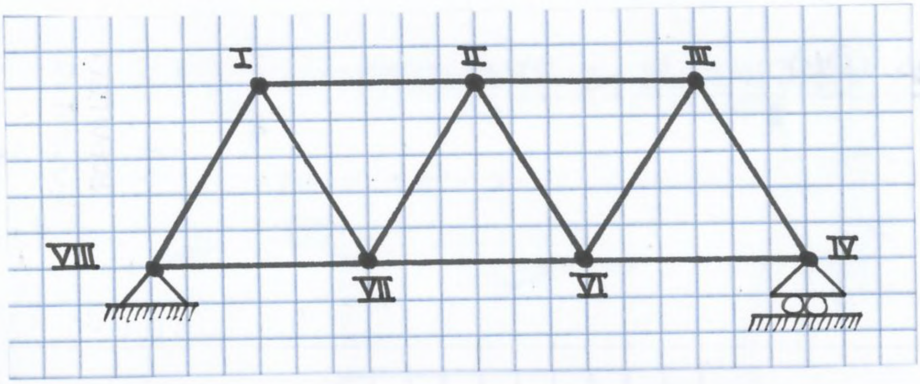
TRAVATURA a CAPRIATA SEMPLICE TIPO POLONCEAU



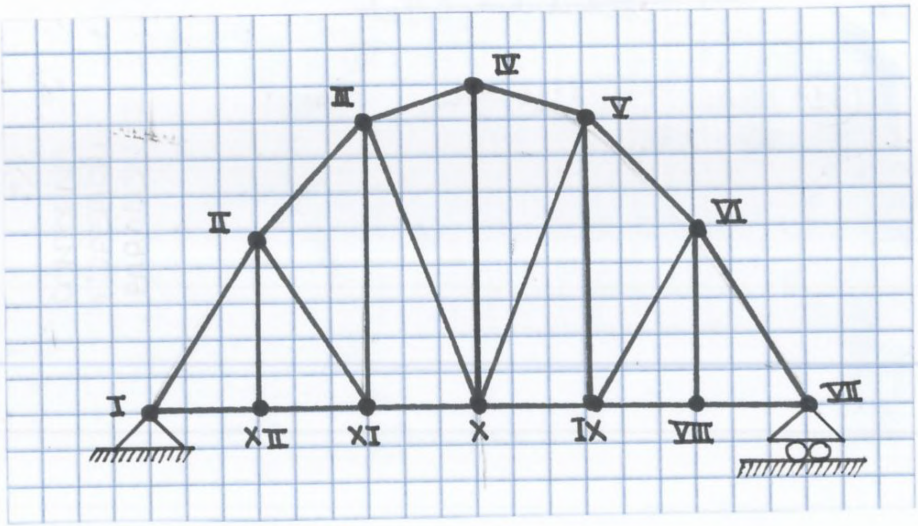
TRAVATURA RETICOLARE TIPO MOHNIE



TRAVATURA RETICOLARE a CORRENTI PARALLELI



TRAVATURA RETICOLARE a CONTORNO SUPERIORE PARABOLICO



IPOTESI SEMPLIFICATIVE

Le **ASTE** si considerano **INCERNIERATE** ai **NODI**, con **RESISTENZA** di **ATTRITO NULLA** nelle **CERNIERE**.

Vengono **TRASCURATE** le **DEFORMAZIONI ELASTICHE**, che le **ASTE** subiscono per **EFFETTO** dei **CARICHI ESTERNI**.

Le **ASTE** sono tutte contenute nel medesimo **PIANO** al quale appartengono anche i **CARICHI GRAVANTI** sulla **STRUTTURA**.

NON si tiene conto del **PESO PROPRIO** dell'**ASTA**, in quanto il **MOMENTO** che esso determina ha un **VALORE** praticamente **TRASCURABILE** rispetto a quello dello **SFORZO NORMALE**.

i **CARICHI ESTERNI** si considerano come **FORZE CONCENTRATE** che sono applicate solo nei **NODI**, per cui le ASTE risultano **SCARICHE**

Le **ASTE** sono sollecitate **UNICAMENTE** a **SFORZO NORMALE**

se di **COMPRESSIONE** → **ASTA** definita **PUNTONE**

se di **TRAZIONE** → **ASTA** definita **TIRANTE**

Puo' capitare, anche se **RARAMENTE**, questa **IPOTESI NON** risulti verificata essendo le **ASTE CARICATE DIRETTAMENTE**.

in tali casi e' **SUFFICIENTE** scomporre la **RISULTANTE** dei **CARICHI** agenti su un' **ASTA** secondo DUE COMPONENTI PARALLELE a tale RISULTANTE e agenti sui NODI ESTREMI della stessa ASTA.

METODO ANALITICO dell' EQUILIBRIO dei NODI

OGNI NODO e' in **EQUILIBRIO** quando sono **VERIFICATE** le seguenti **CONDIZIONI**

⚠ Per il CALCOLO delle REAZIONI VINCOLARI vengono applicate le EQUAZIONI CARDINALI della STATICA, considerando la DISTRIBUZIONE dei CARICHI ESTERNI che si applicano sulla TRAVATURA.

$\Sigma P_x = 0$

$\Sigma P_y = 0$

devono contenere le COMPONENTI ORIZZONTALI e VERTICALI delle FORZE ESTERNE e degli SFORZI NOTI ed INCOGNITI nelle ASTE che concorrono nel NODO CONSIDERATO.

OSSERVAZIONE: essendo DUE le EQUAZIONI DISPONIBILI, gli SFORZI INCOGNITI dovranno essere anch'essi al MASSIMO DUE.

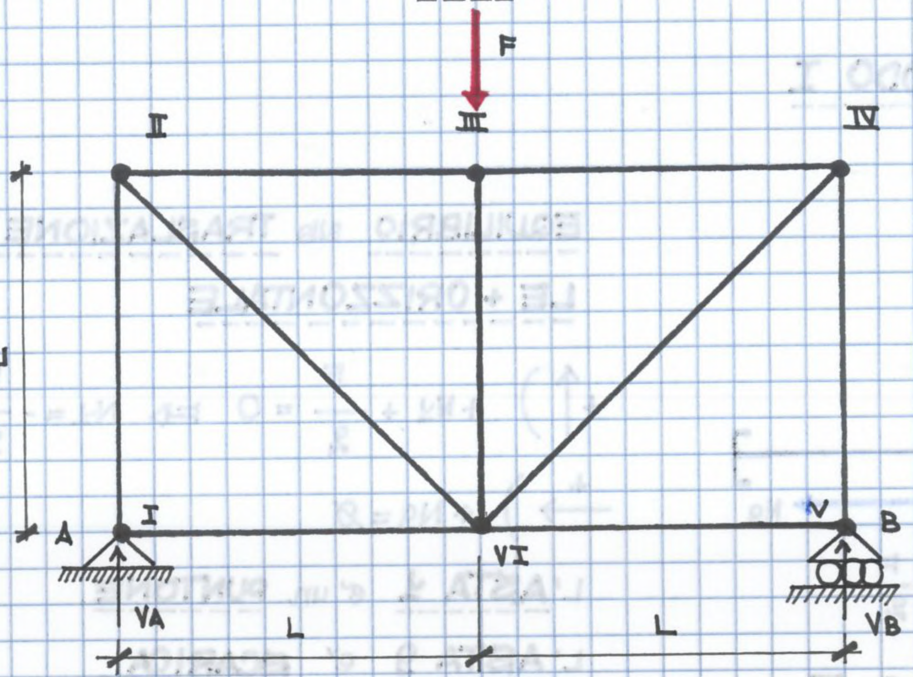
Tali SFORZI verranno considerati INIZIALMENTE di **TRAZIONE**.

RISULTATO EQUAZIONE

POSITIVO: l' **ASTA** e' un **TIRANTE**

NEGATIVO: l' **ASTA** e' un **PUNTONE**

ESERCIZIO RETICOLARI → METODO dell' EQUILIBRIO ai NODI



VERIFICA ISOSTATICITA' TRAVATURA

$GDL = 3 \cdot n = 3 \cdot 9 = 27$

$GDV = 2+1 + (2-1)2 + (3-1)\cdot 2 + (3-1)\cdot 2 + (3-1)\cdot 2 + (2-1)\cdot 2 +$
$+ (5-1)\cdot 2 = 3+2+4+4+4+2+8 = 27$

$GDL_R = \emptyset \Rightarrow$ La **RETICOLARE** e' **ISOSTATICA**

OSSERVAZIONE:

La **TRAVATURA** e' **SIMMETRICA** e **SIMMETRICAMENTE CARICATA**

$\Rightarrow$ Le **REAZIONI VINCOLARI** saranno **UGUALI** fra loro.

$\Rightarrow$ Posso risolvere **META' STRUTTURA**.

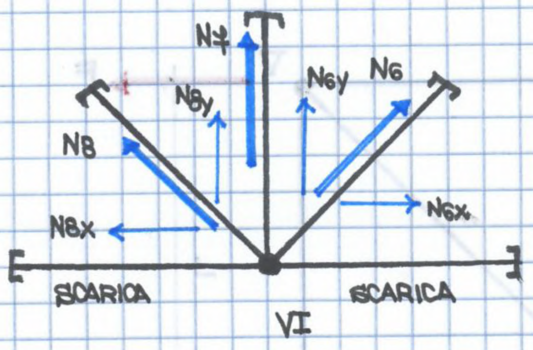
CALCOLO delle REAZIONI VINCOLARI

$\circlearrowleft +) \quad + V_A \cdot 2L - F \cdot L = 0 \Rightarrow V_A = + \frac{F \cdot L}{2 \cdot L} = + \frac{F}{2}$

$+\uparrow) \quad + V_A + F + V_B = 0 \Rightarrow V_B = F - V_A \Rightarrow V_B = F - \frac{F}{2} = + \frac{F}{2}$

$\xrightarrow{+}) \quad + H_A = 0$

ANALISI NODO 6



EQUILIBRIO alla TRASLAZIONE VERTICALE + ORIZZONTALE

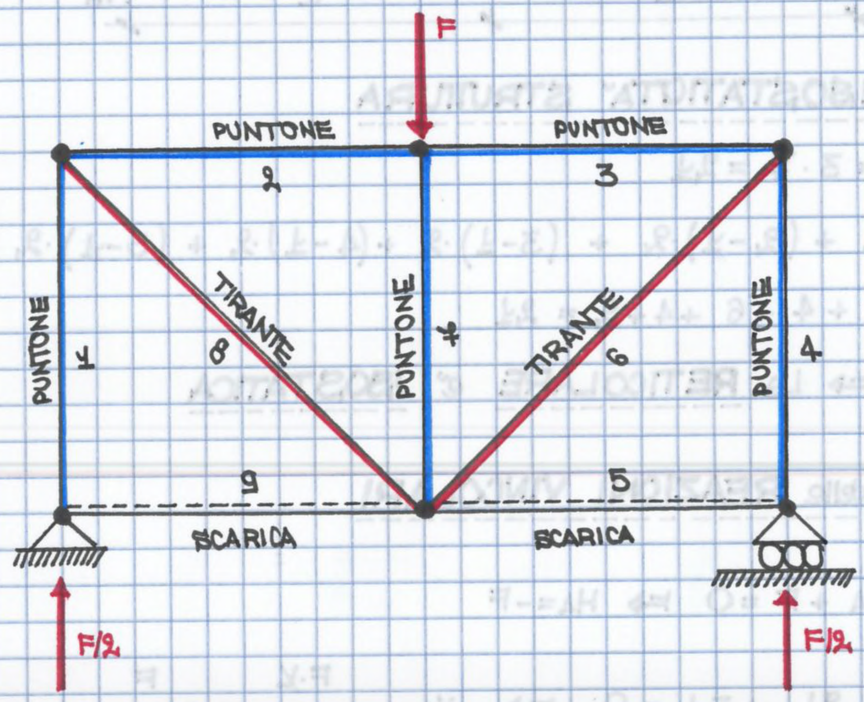
$\xrightarrow{+}\Big)\ +N_{6x} - N_{8x} = 0$

$N_{6x} = N_{8x} = \dfrac{F}{2}$

$+\uparrow\Big)\ +N_{8y} + N_7 + N_{6y} = 0$

$\Rightarrow N_7 = -N_{8y} - N_{6y} = -F$

SCHEMA DISTRIBUZIONE SFORZI



RIEPILOGO degli SFORZI nelle ASTE

ASTA 1 $\Rightarrow$ PUNTONE $\Rightarrow$ $N_1 = -(F/2)$

ASTA 2 $\Rightarrow$ PUNTONE $\Rightarrow$ $N_2 = -(F/2)$

ASTA 3 $\Rightarrow$ PUNTONE $\Rightarrow$ $N_3 = -(F/2)$

ASTA 4 $\Rightarrow$ PUNTONE $\Rightarrow$ $N_4 = -(F/2)$

ASTA 5 $\Rightarrow$ SCARICA

ASTA 6 $\Rightarrow$ TIRANTE $\Rightarrow$ $N_6 = +(\sqrt{2}F/2)$

ASTA 7 $\Rightarrow$ PUNTONE $\Rightarrow$ $N_7 = -F$

ASTA 8 $\Rightarrow$ TIRANTE $\Rightarrow$ $N_8 = +(\sqrt{2}F/2)$

ASTA 9 $\Rightarrow$ SCARICA

$$\Rightarrow N4y = +\frac{F}{2}$$

$$N4y = N4x = +\frac{F}{2} \Rightarrow N4 = \frac{\sqrt{2}F}{2}$$

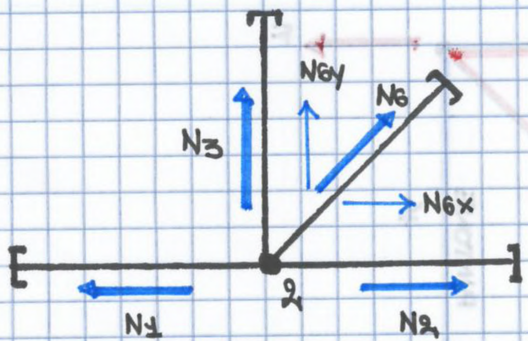
$$\xrightarrow{+}) \; +N1 + N4x - HA = 0$$

$$\Rightarrow N1 = HA - N4x = F - \frac{F}{2} = \frac{F}{2}$$

L'ASTA 1 e' un TIRANTE

L'ASTA 4 e' un TIRANTE

ANALISI NODO II



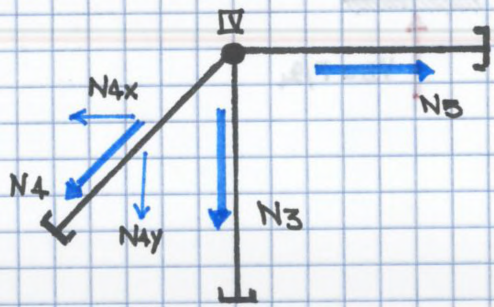
EQUILIBRIO alla TRASLAZIONE VERTICALE + ORIZZONTALE

$$\xrightarrow{+}) \; -N1 + N6x + N2 = 0$$

$$+\uparrow) \; +N3 + N6y = 0$$

4 INCOGNITE in DUE EQUAZIONI !!!

ANALISI NODO IV



EQUILIBRIO alla TRASLAZIONE VERTICALE + ORIZZONTALE

$$\xrightarrow{+}) \; +N5 - N4x = 0 \Rightarrow N5 = N4x = \frac{F}{2}$$

$$+\uparrow) \; -N4y - N3 = 0 \Rightarrow N3 = -N4y$$

$$\Rightarrow N3 = -\frac{F}{2}$$

L'ASTA 3 e' un PUNTONE

Ritorno al NODO II (N3 e' di COMPRESSIONE $\Rightarrow$ CAMBIA SEGNO)

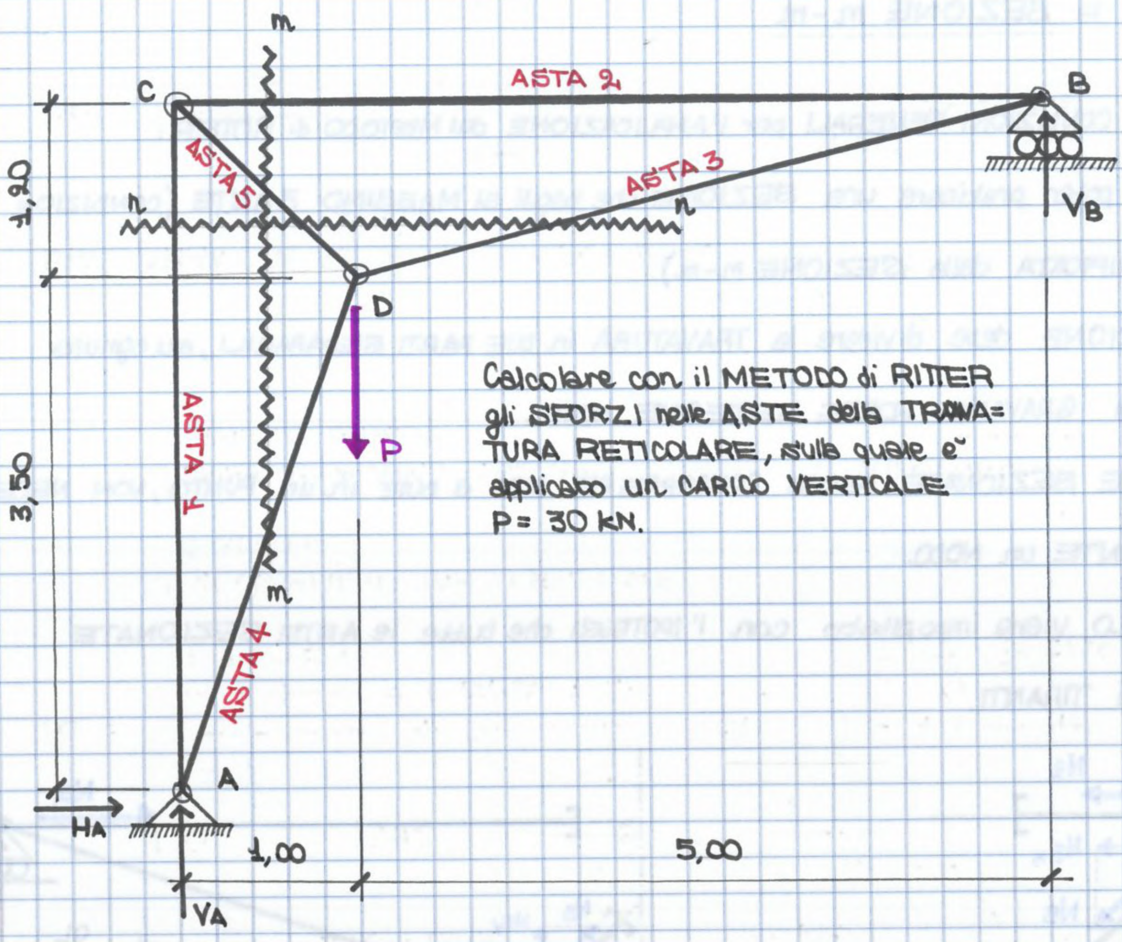
$$+\uparrow) \; +N6y - N3 = 0 \Rightarrow N6y = +N3 = +\frac{F}{2}$$

$$N6y = N6x = \frac{F}{2} \Rightarrow N6 = \frac{\sqrt{2}F}{2}$$

$$\xrightarrow{+}) \; -N1 + N6x + N2 = 0 \Rightarrow N2 = N1 - N6x = \frac{F}{2} - \frac{F}{2} = \varnothing$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 230

ESERCIZIO RETICOLARE → METODO di RITTER



Calcolare con il METODO di RITTER gli SFORZI nelle ASTE della TRAVATURA RETICOLARE, sulla quale e' applicato un CARICO VERTICALE P = 30 KN.

CALCOLO delle REAZIONI VINCOLARI con APPLICAZIONE delle EQUAZIONI CARDINALI della STATICA

$\xrightarrow{+}\Big)\ + H_A = 0$

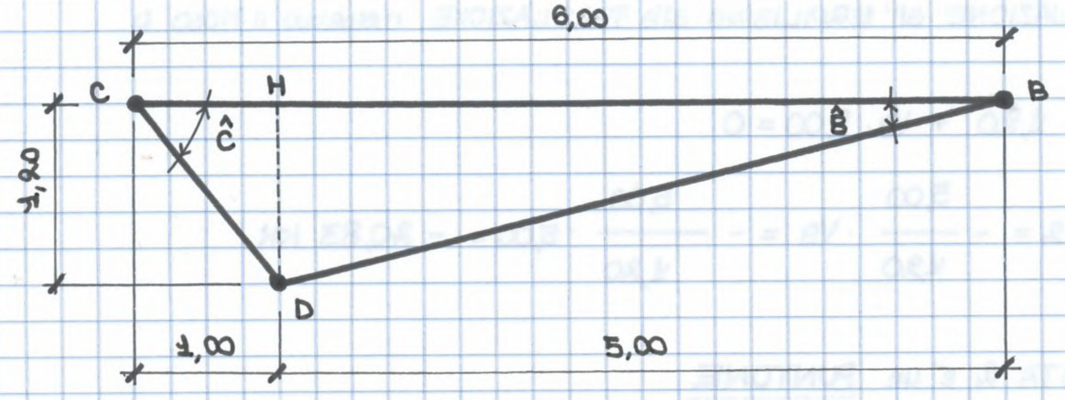
$+\uparrow\Big)\ + V_A - P + V_B = 0$

$\circlearrowright^{+}\Big)\ + V_A \cdot 6{,}00 - P \cdot 5{,}00 = 0 \Rightarrow 6 V_A = 5P \Rightarrow V_A = \frac{5}{6} P$

$\Rightarrow V_A = (5/6) \cdot 30 \Rightarrow V_A = 25{,}00\ KN$

$+\uparrow\Big)\ + V_B = P - V_A \Rightarrow V_B = 30 - 25{,}00 = 5{,}00\ KN$

CONSIDERAZIONI GEOMETRICHE della TRAVATURA ⟶ TRIANGOLO $B\hat{C}D$



AREA A_{BCD} TRIANGOLO $B\hat{C}D$ $\Rightarrow A_{BCD} = \frac{1}{2}\,\overline{BC}\cdot\overline{DH} = \frac{1}{2}(6{,}00)(1{,}20) = 3{,}60\ m^2$

TRIANGOLO $C\hat{H}D$

$CD = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HD}^2} = \sqrt{1{,}00^2 + 1{,}20^2} = 1{,}56\ m$

TRIANGOLO $B\hat{H}D$

$BD = \sqrt{\overline{BH}^2 + \overline{HD}^2} = \sqrt{5{,}00^2 + 1{,}20^2} = 5{,}14\ m$

CALCOLO ANGOLO $\hat{C}$ e $\hat{D}$

$$A_{BCD} = \frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CD}\cdot \operatorname{sen}\hat{C} \Rightarrow \hat{C} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{2A_{BCD}}{\overline{BC}\cdot\overline{CD}}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{2\cdot 3{,}60}{6{,}00\cdot 1{,}56}\right) =$$

$$\Rightarrow \hat{C} = \operatorname{arcsen}\frac{7{,}20}{9{,}36} = 50°{,}2849$$ espresso nel SISTEMA SESSADECIMALE

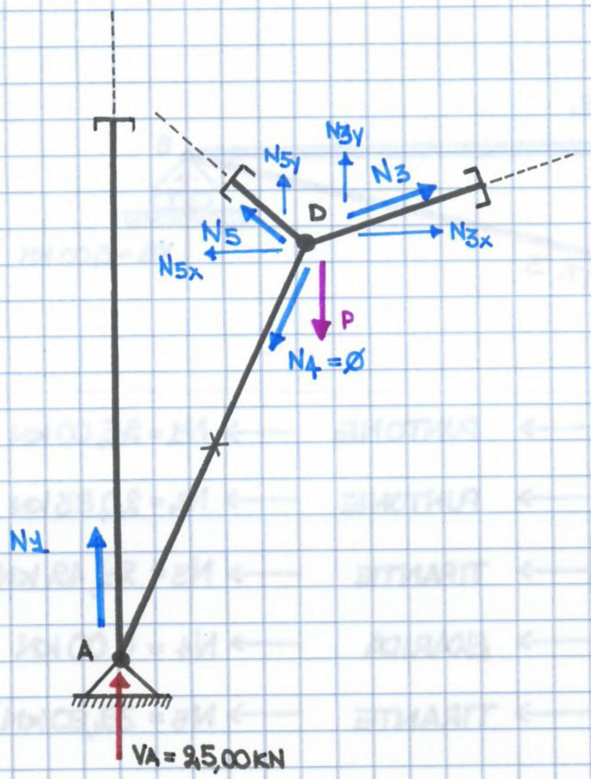
$$A_{BCD} = \frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{BD}\cdot \operatorname{sen}\hat{B} \Rightarrow \hat{B} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{2A_{BCD}}{\overline{BC}\cdot\overline{BD}}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{2\cdot 3{,}60}{6{,}00\cdot 5{,}14}\right) =$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \operatorname{arcsen}\frac{7{,}20}{30{,}84} = 13°{,}5010$$ espresso nel SISTEMA SESSADECIMALE

PARTE SEPARABILE 1 ⟶ Definisco gli SFORZI N4 e N5

PARTE SEPARABILE 2 ⟶ Definisco gli SFORZI N2

Considero la **SEZIONE n-n**

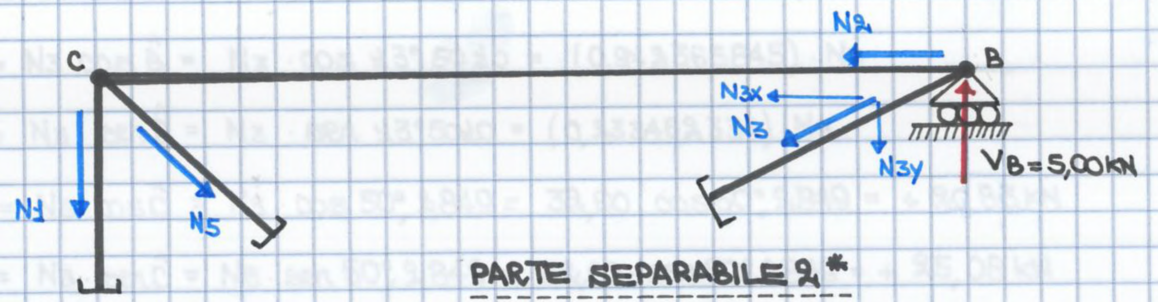


PARTE SEPARABILE 1*

Scrivo un' EQUAZIONE all'EQUILIBRIO alla ROTAZIONE rispetto il NODO D

$$\circlearrowleft +) \quad -N_1 \cdot 1{,}00 - V_A \cdot 1{,}00 = 0 \implies N_1 = -V_A = -25{,}00\,KN$$

⚠ L'ASTA 1 e' un **PUNTONE**



PARTE SEPARABILE 2*

Scrivo un' EQUAZIONE all'EQUILIBRIO alla ROTAZIONE rispetto il NODO C

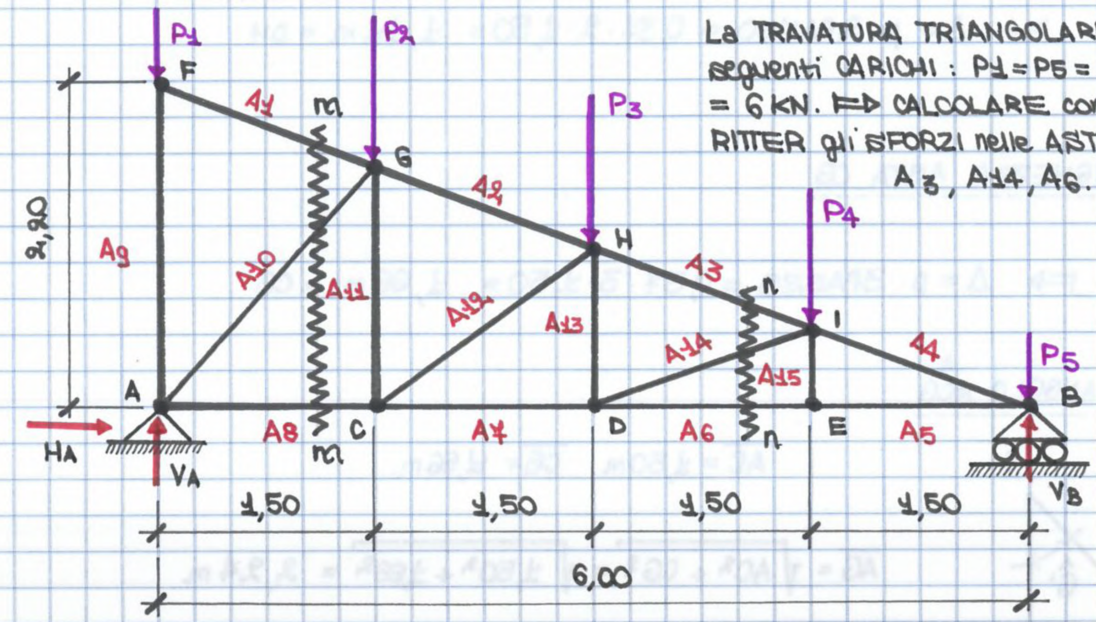
$$\circlearrowleft +) \quad + V_B \cdot (5{,}00 + 1{,}00) - N_{3y} \cdot (5{,}00 + 1{,}00) = 0$$

$$N_{3y} = V_B \implies N_{3y} = 5{,}00\,KN$$

$$N_3 \cdot \operatorname{sen} \hat{B} = N_{3y} \implies N_3 = \frac{N_{3y}}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{5{,}00}{\operatorname{sen} 13°{,}5010} = 21{,}42\,KN$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 230

ESERCIZIO RETICOLARI → METODO di RITTER



La TRAVATURA TRIANGOLARE e' GRAVATA dai seguenti CARICHI: $P_1 = P_5 = 3$ KN; $P_2 = P_3 = P_4 = 6$ KN. ⟹ CALCOLARE con il METODO di RITTER gli SFORZI nelle ASTE A_1, A_{10}, A_8 e A_3, A_{14}, A_6.

CALCOLO delle REAZIONI VINCOLARI con APPLICAZIONE delle EQUAZIONI CARDINALI della STATICA

$$\overset{+}{\rightarrow}\Big)\quad +H_A = 0$$

$$+\uparrow\Big)\quad +V_A - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_5 + V_B = 0$$

$$+\circlearrowleft\Big)\quad +V_B \cdot 6{,}00 - P_5 \cdot 6{,}00 - P_4 \cdot 4{,}50 - P_3 \cdot 3{,}00 - P_2 \cdot 1{,}50 = 0$$

$$\Rightarrow 6 \cdot V_B = P_5 \cdot 6{,}00 + P_4\,(4{,}50 + 3{,}00 + 1{,}50)$$

$$\Rightarrow V_B = 3{,}00 + 6{,}00 \cdot \frac{9{,}00}{6{,}00} = 12{,}00 \text{ KN}$$

$$+\uparrow\Big)\quad V_A = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 - V_B = 3{,}00 + 6{,}00 \cdot 3 + 3{,}00 - 12{,}00 = 12{,}00 \text{ KN}$$

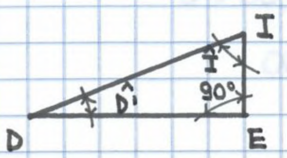
CONSIDERAZIONI GEOMETRICHE

PENDENZA p ⟹ $p = \dfrac{\Delta}{L} = \dfrac{2{,}20}{6{,}00} = 0{,}37\ [-] \Rightarrow 37\%$

CALCOLO LUNGHEZZA ASTA EI

$$p = \frac{\Delta}{\text{PASSO}} \Rightarrow \Delta = p \cdot \text{PASSO} = 0{,}37 \cdot 1{,}50 = 0{,}55 \text{ m} = EI$$

Considero TRIANGOLO $\overset{\Delta}{DEI}$



$$\overline{ED} = 1{,}50\,m \qquad \overline{EI} = 0{,}55\,m$$

$$\overline{DI} = \sqrt{\overline{ED}^2 + \overline{EI}^2} = \sqrt{1{,}50^2 + 0{,}55^2} = 1{,}60\,m$$

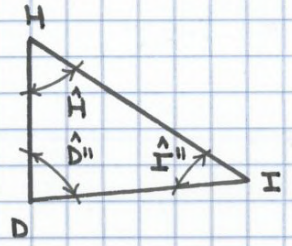
$$\frac{\operatorname{sen}\hat{D}'}{\overline{EI}} = \frac{\operatorname{sen}90°}{\overline{DI}} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{D}' = \frac{\overline{EI}}{\overline{DI}}$$

$$\Rightarrow \hat{D}' = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\overline{EI}}{\overline{DI}}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{0{,}55}{1{,}60}\right) = 20°{,}1055$$

$$\hat{I}' = 90° - \hat{D}' = 90° - 20°{,}1055 = 69°{,}8945$$

Considero TRIANGOLO $\overset{\Delta}{DHI}$

$$\hat{D}'' = 90° - \hat{D}' = 90° - 20°{,}1055 = 69°{,}8945$$



$$IH = \text{TEOREMA di CARNOT} = \sqrt{DH^2 + DI^2 - 2DH \cdot DI \cdot \cos\hat{D}''} =$$

$$= \sqrt{1{,}11^2 + 1{,}60^2 - 2 \cdot 1{,}11 \cdot 1{,}60 \cdot \cos 69°{,}8945} = 1{,}60\,m$$

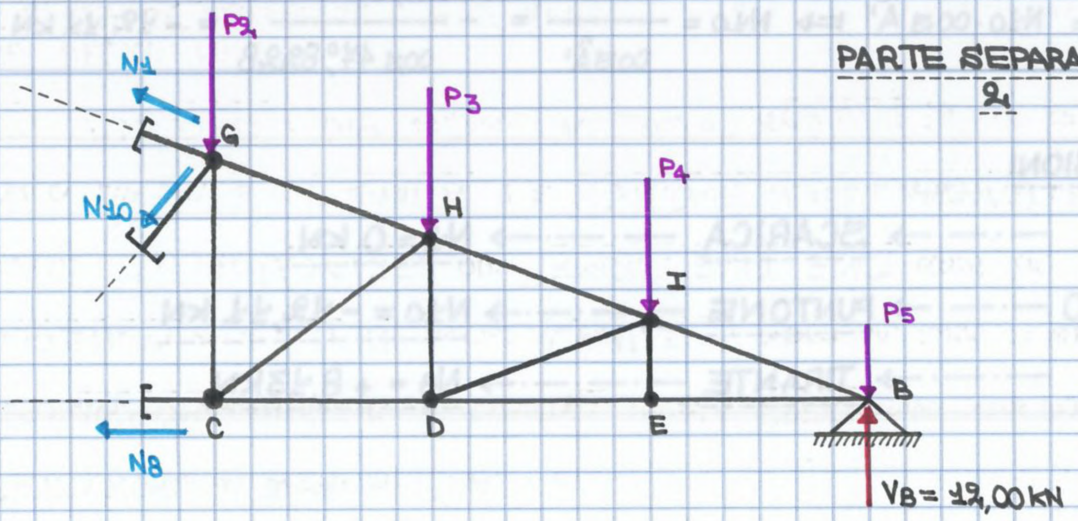
$$\frac{\operatorname{sen}\hat{H}'}{DI} = \frac{\operatorname{sen}\hat{D}''}{IH} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{H}' = \frac{DI \cdot \operatorname{sen}\hat{D}''}{IH} =$$

$$\Rightarrow \hat{H}' = \operatorname{arcsen}\left(\frac{DI \cdot \operatorname{sen}\hat{D}''}{IH}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1{,}60 \cdot \operatorname{sen}69°{,}8945}{1{,}60}\right) = 69°{,}8945$$

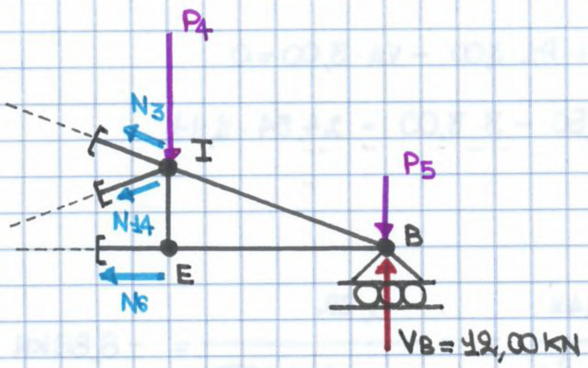
$$\hat{I}'' = 180° - (\hat{H}' + \hat{D}'') = 180° - (69°{,}8945 \cdot 2) = 40°{,}2110$$

Considero la **SEZIONE m - m**

PARTE SEPARABILE 2



Considero la **SEZIONE n-n**



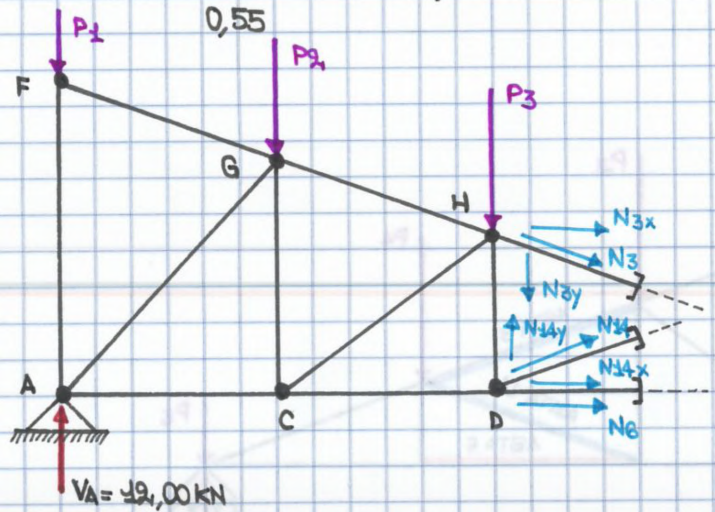
PARTE SEPARABILE 2*

Scrivo un' EQUAZIONE all' EQUILIBRIO alla ROTAZIONE rispetto il NODO I

$$(+)\quad + N_6 \cdot EI + P_5 \cdot 1{,}50 - V_B \cdot 1{,}50 = 0$$

$$\Rightarrow \; 0{,}55 \cdot N_6 = 1{,}50 \cdot V_B - P_5 \cdot 1{,}50 \;\Rightarrow\; 0{,}55 N_6 = 12{,}00 \cdot 1{,}50 - 3 \cdot 1{,}50$$

$$\Rightarrow \; N_6 = \frac{13{,}50}{0{,}55} = + 24{,}54 \text{ KN}$$



Scrivo un' EQUAZIONE all' EQUILIBRIO alla ROTAZIONE rispetto il NODO D

$$(+)\quad + N_{3x} \cdot DH - P_2 \cdot 1{,}50 - P_1 \cdot 3{,}00 + V_A \cdot 3{,}00 = 0$$

$$1{,}11 \cdot N_{3x} = 6 \cdot 1{,}50 + 3 \cdot 3{,}00 - 12{,}00 \cdot 3{,}00$$

$$N_{3x} = - \frac{18{,}00}{1{,}11} = - 16{,}21 \text{ KN}$$

$$N_{3x} = N_3 \cdot \operatorname{sen} \hat{H}' \Rightarrow N_3 = \frac{N_{3x}}{\operatorname{sen} \hat{H}'} = - \frac{16{,}21}{\operatorname{sen} 69{,}8945°} = - 17{,}26 \text{ KN}$$

"Ponte della Ferrovia - Gerusalemme, Israele - Santiago Calatrava"

APPUNTI di TECNICA delle COSTRUZIONI

Prof. Ing. Vincenzo Ilario Carbone

- CAPITOLO 2 -

"Integrazione della Linea Elastica"

alessandro zito

L'EQUAZIONE 3 puo' essere scritta come:

$$\frac{\Delta dz}{dz} = \frac{y}{\rho} = \varepsilon_z$$

La DEFORMAZIONE ε_z e' legata alle TENSIONE σ_z attraverso il MODULO di ELASTICITA' NORMALE E:

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z = E \cdot \frac{y}{\rho} \quad (4)$$

FLESSIONE RETTA → DISTRIBUZIONE delle TENSIONI mediante la **FORMULA** di **NAVIER**

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_{xx}} \cdot y \quad (5)$$

EGUAGLIAMO l'EQUAZIONE (4) con la (5):

$$\Rightarrow \frac{M_x}{I_{xx}} \cdot y = E \cdot \frac{y}{\rho} \quad \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_{xx}}$$

$\frac{1}{\rho}$: **CURVATURA** → e' vincolata al MOMENTO FLETTENTE e al PRODOTTO $E \cdot I$ definito **RIGIDEZZA FLESSIONALE**.

CFR: **GEOMETRIA DIFFERENZIALE** ⇒ La CURVATURA in un PUNTO di una LINEA di EQUAZIONE $y = y(z)$ in COORDINATE y, z risulta:

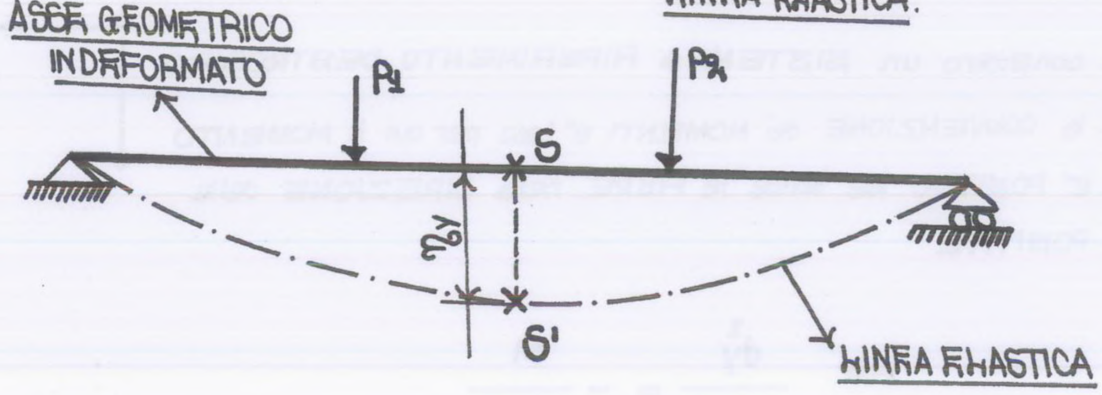
$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2y}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}$$

SEGNO e' DIPENDENTE dall'ORIENTAMENTO del SISTEMA di RIFERIMENTO z, y

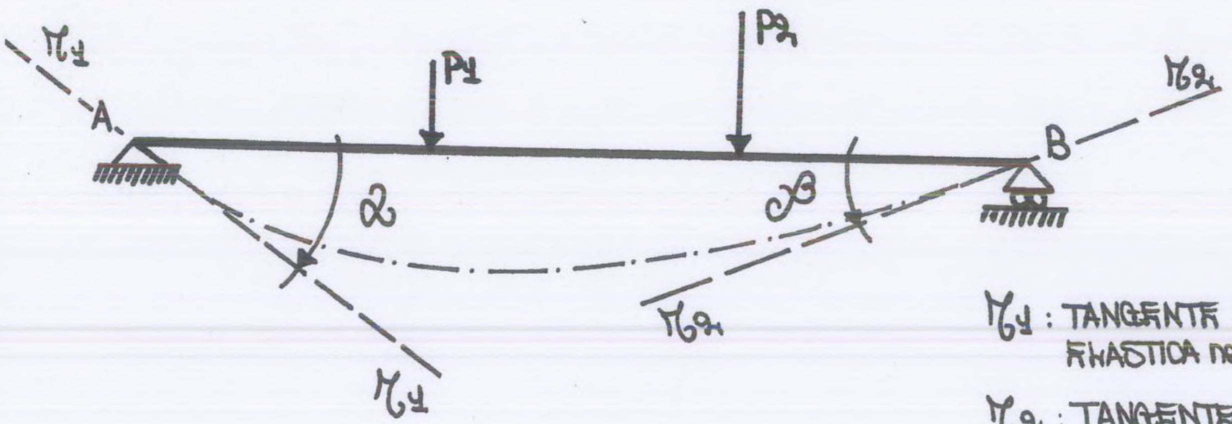
TRAVI → ENTITA' degli SPOSTAMENTI y e' PICCOLA di fronte alla LUCE ⇒ le INCLINAZIONI (dy/dz) risulteranno TRASCURABILI di fronte l'UNITA'.

DEFINIZIONI:

η_y → FRECCIA ELASTICA / ABBASSAMENTO → rappresentata dalla DISTANZA η_y tra un PUNTO generico $S \in$ all'ASSE GEOMETRICO INDEFORMATO e la corrispondente POSIZIONE di S', che il punto presenta sulla LINEA ELASTICA.



φ → ROTAZIONE → rappresentata dall'angolo che la TANGENTE GEOMETRICA alla LINEA ELASTICA in un suo PUNTO forma con l'ASSE GEOMETRICO INDEFORMATO della TRAVE



r_1 : TANGENTE alla LINEA ELASTICA nel punto A.

r_2 : TANGENTE alla LINEA ELASTICA nel punto B.

α : ROTAZIONE φ in A

β : ROTAZIONE φ in B

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 230

CONVENZIONI di SEGNO:

SPOSTAMENTI VERTICALI η ---→ POSITIVI se sono diretti secondo il VERSO POSITIVO dei rispettivi ASSI

SPOSTAMENTI ORIZZONTALI ξ ---→ POSITIVI se sono diretti secondo il VERSO POSITIVO dei rispettivi ASSI

ROTAZIONI φ ---→ POSITIVE se ORARIE

MOMENTI FLETTENTI M ---→ POSITIVI se tendono le FIBRE nella DIREZIONE delle y POSITIVE

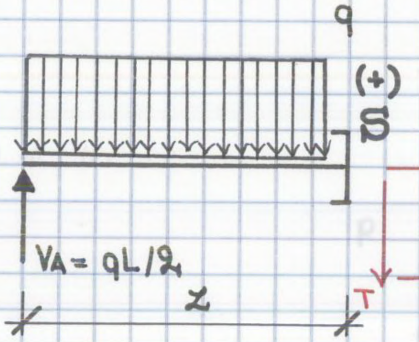
TAGLIO T ---→ POSITIVO se diretto nella DIREZIONE POSITIVA delle y con riferimento alla FACCIA POSITIVA (ASSE z USCENTE).

REAZIONI R ---→ POSITIVE se dirette verso l'ALTO.

CARICHI ORIZZONTALI ---→ POSITIVI se agenti secondo il VERSO POSITIVO dell'ASSE z.

CARICHI VERTICALI ---→ POSITIVI se agenti secondo il VERSO POSITIVO dell'ASSE Y.

MOMENTI CONCENTRATI (COPPIE) ---→ POSITIVI se agenti sulle TRAVI in SENSO ORARIO.



$$S \circlearrowright (+)) \; +M + q \cdot \frac{x^2}{2} - V_A \cdot x = 0$$

$$\Rightarrow M = q\frac{Lx}{2} - q\frac{x^2}{2}$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE della LINEA ELASTICA

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M}{E \cdot J}$$

v : SPOSTAMENTO VERTICALE
E : MODULO ELASTICO di YOUNG
J : MOMENTO d'INERZIA della SEZIONE rispetto l'ASSE secondo il quale la TRAVE si INFLETTE.

PRODOTTO $E \cdot J$ definito come RIGIDEZZA FLESSIONALE

$$\Rightarrow \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{1}{E \cdot J}\left(qL\frac{x}{2} - q\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow = +\frac{qx^2}{2EJ} - \frac{qLx}{2EJ}$$

La INTEGRO rispetto x definendo $(dv/dx) \equiv$ ROTAZIONE

● ROTAZIONE

$$\frac{dv}{dx} = \frac{q}{2E \cdot J}\left(\int x^2\,dx - L\int x\,dx\right) = \frac{q}{2EJ}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{Lx^2}{2}\right) + C_1$$

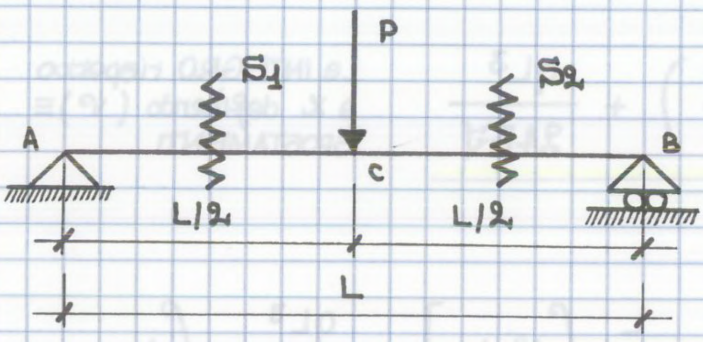
$C_1 \equiv$ COSTANTE di INTEGRAZIONE $\Rightarrow$ La determino imponendo la ROTAZIONE UGUALE a ZERO. Il punto ove si osserva ROTAZIONE NULLA è il PUNTO di MEZZERIA della CAMPATA $\Rightarrow$ il DIAGRAMMA dei MOMENTI presenta in MEZZERIA un PUNTO a TANGENZA ORIZZONTALE.

$$x = L/2 \Rightarrow dv/dx = 0$$

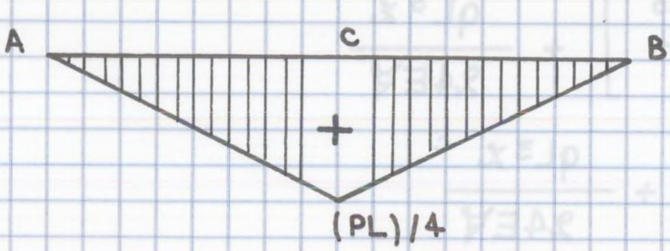
$$\Rightarrow 0 = \frac{q}{2E \cdot J}\left(\frac{L^3}{24} - \frac{L^3}{8}\right) + C_1$$

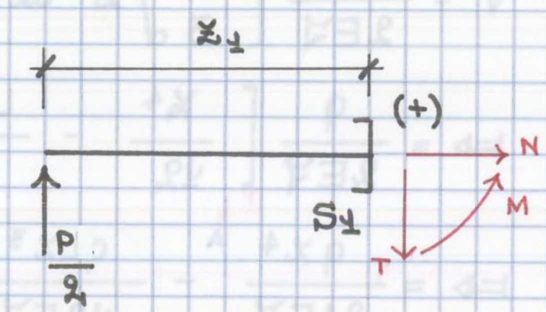
$$\Rightarrow 0 = \frac{q}{2E \cdot J}\left(\frac{L^3}{24} - \frac{3L^3}{24}\right) + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{qL^3}{24E \cdot J}$$

CASO 2



La STRUTTURA è SIMMETRICA e SIMMETRICAMENTE CARICATA. Dunque il DIAGRAMMA dei MOMENTI è SIMMETRICO, la LINEA ELASTICA ha ANDAMENTO SIMMETRICO, il DIAGRAMMA degli ABBASSAMENTI è SIMMETRICO, il DIAGRAMMA delle ROTAZIONI è EMISIMMETRICO. La FRECCIA MAX si evidenzia in MEZZERIA.





$$S_1 \; (+\circlearrowright) \quad + M - \frac{P}{2}\cdot z_1 = 0$$

$$\Rightarrow M = \frac{P}{2}\cdot z_1$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE della LINEA ELASTICA

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M}{E\cdot J}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{P}{2EJ}\cdot z$$

La INTEGRO rispetto z definendo $(dv/dz) \equiv$ ROTAZIONE.

ROTAZIONE

$$\frac{dv}{dz} = -\frac{P}{2EJ}\int z\,dz = -\frac{Pz^2}{4EJ} + C_1$$

$C_1 \equiv$ COSTANTE di INTEGRAZIONE $\Rightarrow$ La determino imponendo la ROTAZIONE UGUALE a ZERO. Il PUNTO ove si osserva la ROTAZIONE NULLA è il PUNTO di MEZZERIA della CAMPATA. $\Rightarrow$ il DIAGRAMMA dei MOMENTI presenta in MEZZERIA un PUNTO a TANGENZA ORIZZONTALE.

$$z = L/2 \Rightarrow (dv/dz) = 0$$

$$0 = -\frac{P\cdot L^2}{2\cdot 8\,EJ} + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{PL^2}{16EJ}$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE della LINEA ELASTICA

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{Me}{E \cdot J}$$

OSSERVAZIONI: La STRUTTURA e' SIMMETRICA e SIMMETRICAMENTE CARICATA. $\Rightarrow$ il DIAGRAMMA dei MOMENTI e' SIMMETRICO, la LINEA ELASTICA ha ANDAMENTO SIMMETRICO, il DIAGRAMMA degli ABBASSAMENTI e' SIMMETRICO, il DIAGRAMMA delle ROTAZIONI e' EMISIMMETRICO. La FRECCIA MAX si verificherà in MEZZERIA.

ROTAZIONE

$$\frac{dv}{dz} = -\frac{Me \cdot z}{E \cdot J} + C_1$$

Per SIMMETRIA STRUTTURA e per SIMMETRIA dal punto di vista del CARICO, in MEZZERIA abbiamo la TANGENZA ORIZZONTALE, dunque per $z = L/2 \Rightarrow (dv/dz) = 0$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{Me \cdot L}{EJ} + C_1 \Rightarrow -\frac{Me\,L}{2EJ} + C_1 = 0$$

$$\Rightarrow C_1 = +\frac{Me \cdot L}{2EJ} \qquad \Rightarrow \frac{dv}{dz} = +\frac{Me \cdot L}{2EJ} - \frac{Me\,z}{EJ}$$

Integro l'EQUAZIONE (dv/dz) rispetto la VARIABILE z per DETERMINARE gli ABBASSAMENTI.

SPOSTAMENTI

$$v = -\frac{Me}{EJ}\int z\,dz + \frac{Me\,L}{2EJ}\int dz = -\frac{Me \cdot z^2}{2EJ} + \frac{Me\,L\,z}{2EJ} + C_2$$

$C_2 \equiv$ COSTANTE di INTEGRAZIONE. La Determino imponendo lo SPOSTAMENTO $v = 0$. Cio' si verifica ai VINCOLI, ove gli SPOSTAMENTI VERTICALI sono NULLI essendo CERNIERA e CARRELLO.

$$z = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

La FRECCIA MAX si osserva in MEZZERIA $(z = L/2)$

$$f_{max} = -\frac{Me \cdot L^2}{8EJ} + \frac{Me \cdot L^2}{4EJ} = \frac{Me\,L^2}{8EJ}$$

TEOREMA di BETTI

Assegnato un CARICO ESTERNO agente su una STRUTTURA ISOSTATICA, il TEOREMA di BETTI consente di determinare gli EFFETTI (SPOSTAMENTO o ROTAZIONE) di tale CARICO in una qualsiasi SEZIONE, noto che sia l'EFFETTO nella SEZIONE di APPLICAZIONE del CARICO ESTERNO prodotto dalla FORZA (GENERALIZZATA) agente nella SEZIONE in cui si vuole determinare l'EFFETTO STESSO.

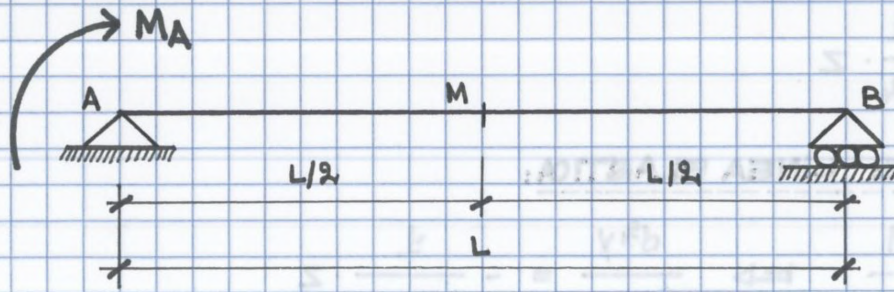
ENUNCIATO:

"IL LAVORO COMPIUTO da un SISTEMA di FORZE A per gli SPOSTAMENTI PRODOTTI da un SISTEMA di FORZE B e' UGUALE al LAVORO COMPIUTO dal SISTEMA di FORZE B per gli SPOSTAMENTI PRODOTTI dal SISTEMA di FORZE A. Sancisce l'UGUAGLIANZA dei LAVORI MUTUI o di TRASCINAMENTO."

$$L_{AB} = L_{BA}$$

ESERCIZIO 1

Determinare mediante il TEOREMA di BETTI lo spostamento verticale η_M della mezzeria della trave appoggiata, caricata dalla coppia M_A sull'appoggio sinistro.



- M_A: CARICO ESTERNO ASSEGNATO sulla STRUTTURA ISOSTATICA
- η_M: SPOSTAMENTO VERTICALE che produce il CARICO ESTERNO M_A in MEZZERIA.

$$\frac{dy}{dz}\bigg|_{(z=L/2)} = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{4E \cdot I} \cdot \frac{L^2}{4} + C_1$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{L^2}{16EI}$$

$\varphi_{A(1)} \Rightarrow$ la determino per $z=0 \Rightarrow \frac{dy}{dz}\bigg|_{(z=0)} = +C_1 = \frac{L^2}{16EI}$

Applico il TEOREMA di BETTI $\Rightarrow$ sancisce l'UGUAGLIANZA dei LAVORI MUTUI

$$\Rightarrow L_{AB} = L_{BA}$$

$$M_A \cdot \varphi_{A(1)} = 1 \cdot \eta_{M(M_A)}$$

$\Rightarrow \eta_{M(M_A)} = M_A \cdot \varphi_{A(1)} \Rightarrow \eta_{M(M_A)} = \frac{M_A \cdot L^2}{16EI}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 230

TEOREMA dei LAVORI VIRTUALI

ENUNCIATO:

" ASSEGNATA una DEFORMAZIONE VIRTUALE (cioè INFINITESIMA, CONGRUENTE e COMPATIBILE con i VINCOLI) ad una STRUTTURA che si trova in EQUILIBRIO; il LAVORO VIRTUALE delle FORZE ESTERNE è UGUALE al LAVORO VIRTUALE di DEFORMAZIONE."

$\overline{P_m}$ → SISTEMA di FORZE ESTERNE

SISTEMA di FORZE ESTERNE → PROVOCHERÀ

SISTEMA di FORZE ESTERNE → agisce su una STRUTTURA

PROVOCHERÀ → REAZIONI VINCOLARI $\overline{R}$

PROVOCHERÀ → CARATTERISTICHE INTERNE della SOLLECITAZIONE

CARATTERISTICHE INTERNE della SOLLECITAZIONE → $\overline{N}$, $\overline{M}$, $\overline{T}$

$\overline{P_m}$ → EQUILIBRATA

agisce su una STRUTTURA → EQUILIBRATA

EQUILIBRATA → provochiamo in essa una DEFORMAZIONE VIRTUALE

provochiamo in essa una DEFORMAZIONE VIRTUALE → TEOREMA dei LAVORI VIRTUALI

TEOREMA dei LAVORI VIRTUALI → LAVORO delle FORZE ESTERNE = LAVORO INTERNO di DEFORMAZIONE

LAVORO VIRTUALE INTERNO → compiuto dalle **CARATTERISTICHE INTERNE** della **SOLLECITAZIONE** che agiscono sul **TRATTO dz**

$$\overline{M} \cdot d\varphi + \overline{N}\Delta dz + \overline{T} \cdot \Delta dn$$

INTEGRAZIONE ESTESA a tutti gli **ELEMENTI** della **STRUTTURA** ci da' il **LAVORO VIRTUALE INTERNO** di **DEFORMAZIONE**.

HP: DEFORMAZIONE VIRTUALE STRUTTURA → provocata da un **SISTEMA** di **CARICHI ESTERNI** + **VARIAZIONE** di **TEMPERATURA**

CONSEGUENZE:

CEDIMENTI δ_R **VINCOLI**

SPOSTAMENTI δ_m **FORZE** P_m

M, N, T → **CARATTERISTICHE INTERNE** dovute allo **STATO VIRTUALE** di **CARICO**

TEMPERATURA

- **VARIA LINEARMENTE** con **ALTEZZA h**
- il suo **VALORE** in corrispondenza della **FIBRA BARICENTRICA** valga t_s
- **DIFFERENZA** di **TEMPERATURA** tra **FIBRA INF.** e quella **SUP.** del **TRATTO ELEMENTARE dz** valga Δt