NUMERO: 1349

ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Tapparo

MATERIA: Fisica I, Prof.Andrianopoli

Mazzoldi - Nigro - Voci (2^ edizione) anche es

Scopo: studio dei costituenti della materia e loro interazioni relazioni

Campo di interesse: particelle subatomiche (10^{-15} m)
vastissimo ammassi galattici (10^{30} m)

Approccio: sperimentale, fondato su metodo scientifico

E' una scienza quantitativa e usa linguaggio matematico x esprimere leggi:
- grandezze fisiche associate a (insiemi di) numeri
- relazioni tra grandezze associate a equazioni matem

FISICA CLASSICA

insieme di fenomeni osservabili a occhio nudo

- OTTICA
- ACUSTICA
- TERMODINAMICA ←
- ELETTRICITA' ←
- MAGNETISMO
- MECCANICA ←
  - GRAVITAZIONE
  - FLUIDI

...

ELETTROMAGNETISMO

MECCANICA STATISTICA

Varie branche in relazione tra loro
Studio a inizio XV sec

FISICA MODERNA XX sec

Condizioni estreme → natura estremamente ≠
- scale di grandezza piccole ($\lesssim 10^{-10}$ m)
  - MECCANICA QUANTISTICA (laser)
- velocità molto alte ($\gtrsim c = 3 \times 10^8$ m/s) → velocità limite, insuperabile
  - RELATIVITA' SPECIALE (centrali nucleari, radioterapia)
- MASSE MOLTO GRANDI ($\gtrsim 10^{25}$ kg) massa terra
  - RELATIVITA' GENERALE (GPS)

Man mano che ci si allontana dalle grandezze limite, le correzioni sono minori

COSTITUENTI DI BASE DELLA MATERIA (ai fini del corso)

- ATOMI
  - elettrone (e^-) $m_e \approx 10^{-30}$ kg $q_e < 0$ $q_e = -e$
  - protone (p^+) $m_p \approx 2000\, m_e$ $q_p = +e$
  - neutrone (n) $m_n \approx m_p$ $q_n = 0$

r_{nucleo} : 10^{-15} m
r_{atomo} : 10^{-10} m

$N_A = 6{,}022 \; 10^{23}$

SISTEMA SOLARE
$\sim 10^{10}$ km

10^{-15} m - FISICA - 10^{26} m

INTERAZIONI

istantanee o no ?

azioni a distanza o a contatto ? a distanza
mediate da un CAMPO invisibile, percepito da oggetti fisici carichi rispetto a interazione portata dal campo, oggetto fisico con energia che si propaga nello spazio

es: • mela di Newton "carica" rispetto a campo gravitazionale di cui risente. Essa stessa produce un campo gravitazionale
• cariche all'interno di un campo elettrico

BUONA UNITÀ DI MISURA

- determinate con massima precisione
- facilmente riproducibile
- non variabili nel tempo

L: metro (m)
M: chilogrammo (kg)
t: secondo (s)

MKS → SISTEMA INTERNAZIONALE
(cgs: cm, g, s altro sistema)

le misure <u>NON SONO MAI</u> precise infinitamente.

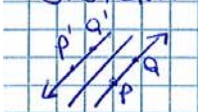
ERRORI SISTEMATICI
dovuti agli strumenti, sempre costanti (misuro sempre un po' di più o un po' di meno)

ERRORI CASUALI
influenzano la misura casualmente (posso misurare un po' di più o un po' di meno, dipende da ≠ fattori)

⇝ esercitazioni

grandezze scalari: numero + unità misura
vettoriali: hanno una <u>direzione</u>

SISTEMA DI COORDINATE



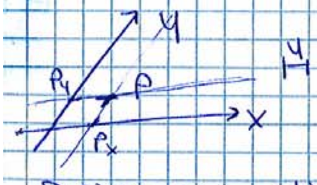
direzione: insieme di rette parallele a una retta data (fascio di rette //)

verso: posso scegliere una relazione d'ordine x i punti della retta. P precede Q, Q segue P
posso avere 2 versi per la stessa retta.
P' segue Q', Q' precede P'

$(O, x, u) \rightarrow$ origine, verso, unità di misura → sistema di coordinate 1 Dimensionale

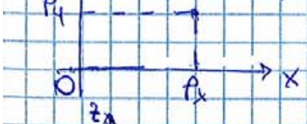
$x_1 = |OP_1| = 2u$
$x'_2 = -|OP_2|$
↳ verso

$x \in \mathbb{R} = \pm |OP|$ + se segue O, − se precede O, rispetto a verso dell'asse

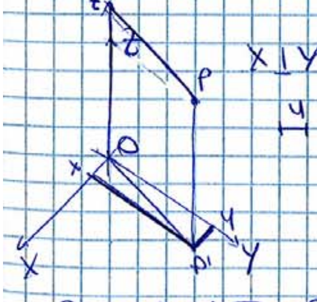


$P \Leftrightarrow (x, y)$ Sistema di coordinate NON cartesiano
(O, x, y, u)

Sistema di coordinate cartesiano ortogonale $x \perp y$ nel piano



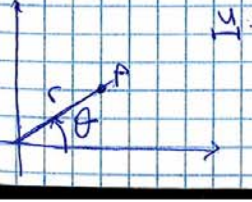
(O, x, y, u)
$P \Leftrightarrow (x, y)$



$x \perp y \perp z$ (O, x, y, z, u)

$P \Leftrightarrow (x, y, z)$

COORDINATE POLARI (2D)



$r = |OP|$
$\theta =$

$P \Leftrightarrow (x, y)$
$P \Leftrightarrow (r, \theta)$

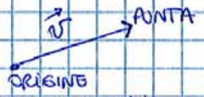
$$\begin{cases} 0 \leq r < \infty \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

GRANDEZZE

- scalari → identificate completamente da un numero (massa, temperatura), possono variare,
- vettoriali   dipendono dal punto in cui sono misurate $T(x, y, t)$

↳ identificate da un numero + una direzione + un verso = <u>3</u> numeri

$|\vec v|$ { INTENSITÀ   è data dal modulo (norma)
DIREZIONE
VERSO
identificano un vettore



$|v| =$ lunghezza di $\vec v$

Vettori liberi: possono essere spostati nello spazio purché mantengono I D V

Vettori applicati: per essere definiti richiedono un'informazione in più: punto di applicazione

vettori liberi (posso sommarli)

Forze, velocità, spostamento sono vettori

OPERAZIONI TRA GRANDEZZE

- VETTORE · SCALARE $a\cdot\vec v$ $a \in \mathbb{R}$ $\vec v$ vettore $a > 0$
  ↳ stessa direzione e verso di $\vec v$, ma lunghezza $a|\vec v|$

  $a\cdot\vec v$ $a \in \mathbb{R}$ $\vec v$ vettore $a < 0$
  ↳ stessa direzione, verso opposto, lunghezza $a|\vec v|$

$a = -1$ $(-1)\vec v = -\vec v$

$[\Delta\vec r] = [L]$ $[\vec v] = [L\cdot t^{-1}]$ $[m] = [M]$

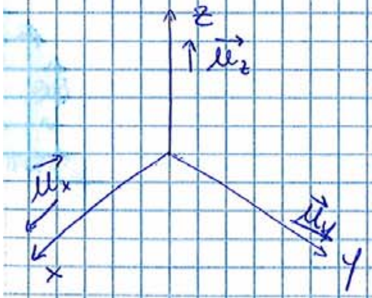
$\vec p = m\vec v$ $[\vec p] = [M L t^{-1}]$

VERSORI: vettori di modulo 1. $\vec u : |\vec u| = 1$

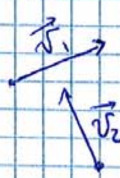
$\vec v \rightarrow \vec u_{\vec v} = \frac{\vec v}{|\vec v|}$ adimensionale

$|\vec u_{\vec v}| = \frac{1}{\cancel{|\vec v|}}\cdot\cancel{|\vec v|} = 1$

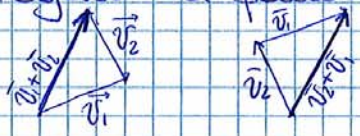
$\vec v = |\vec v|\cdot\vec u_{\vec v}$



- SOMMA DI VETTORI (LIBERI)



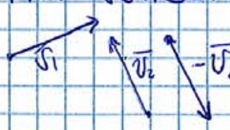
regola del parallelogramma



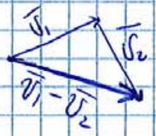
$\vec v_1 + \vec v_2 = \vec v_2 + \vec v_1$
proprietà COMMUTATIVA

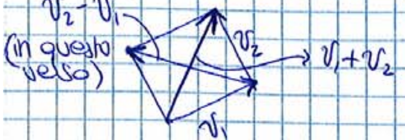
- DIFFERENZA TRA VETTORI

$\vec v_1 + (-\vec v_2)$

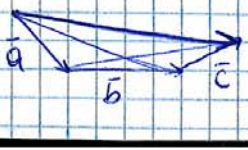


⇒





- SOMMA DI TRE VETTORI $\vec a + \vec b + \vec c = \vec a + (\vec b + \vec c) = (\vec a + \vec b) + \vec c$



Somma di n vettori

origine = origine a_1
punta = punta a_n
$\sum_{i=1}^{n} \vec a_i$

$\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z$ $\begin{cases} \bar{u}_x \bar{u}_x = \bar{u}_y \bar{u}_y = \bar{u}_z \bar{u}_z = 1 \\ u_x u_y = u_x u_z = u_z u_y = 0 \end{cases}$

prodotto tra versori/vettori ⊥ = 0 ↗

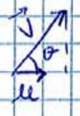
PRODOTTO SCALARE LEGATO A CONCETTO DI PROIEZIONE

$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}|(|\vec{w}| \cos\theta)$

↳ proiezione di $\vec{w}$ lungo l'asse indicato da $\vec{v}$

$= |\vec{w}|(|\vec{v}| \cos\theta)$

↳ proiezione di $\vec{v}$ lungo l'asse individuato da $\vec{w}$



$v \cdot u = |\vec{v}||\vec{u}| \cos\theta = |\vec{v}| \cos\theta$ proiezione vettore $\vec{v}$ lungo l'asse identificato dal versore $\vec{u}$

x es: $\vec{v}_x = \vec{v} \cdot \vec{u}_x$
$\vec{v}_y = \vec{v}_y \cdot \vec{u}_y$
$\vec{v}_z = \vec{v}_z \cdot \vec{u}_z$

Semplificazione teorema Carnot di prima

$|\vec{v} - \vec{w}|^2 = (\vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{v}\vec{v} + \vec{w}\vec{w} - 2\vec{v}\vec{w}$
$= |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2|\vec{v}||\vec{w}| \cos\theta$

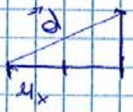
$\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z$

$|\vec{v}| = \sqrt{(v_x u_x + v_y u_y + v_z u_z) \cdot (v_x u_x + v_y u_y + v_z u_z)}$

$\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$ → modulo di un vettore

NB $v_x u_x \cdot v_x u_x = v_x^2$
$v_x u_x \cdot v_{y_z} u_{y_z} = 0$
sono ⊥

Applicazione nel piano



$\vec{d} = (2u_x + u_y)$ m
$|\vec{d}| = \sqrt{2^2 + 1^2}$ m $= \sqrt{5}$ m

RAPPRESENTAZIONE MATRICIALE

$\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_z \vec{u}_z + v_y \vec{u}_y$

$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ vettore riga

$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ vettore colonna

$\vec{u}_x = \overbrace{(1, 0, 0)}^{\text{componenti}}$
$\vec{u}_y = (0, 1, 0)$
$\vec{u}_z = (0, 0, 1)$

$\begin{cases} \vec{v} = v_x u_x + v_y u_y + v_z u_z \\ \vec{w} = w_x u_x + w_y u_y + w_z u_z \end{cases}$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$ (i prodotti misti si cancellano)

$\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$
$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = (v_x, v_y, v_z) \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$ prodotto matriciale

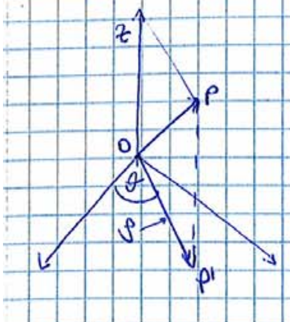
$d\vec{l} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + r\,\mathrm{sen}\theta\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi$

$u_r = \mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\,\vec{u}_x + \mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi\,\vec{u}_y + \cos\theta\,\vec{u}_z$

$u_\theta = \cos\varphi\cos\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{u}_y - \mathrm{sen}\,\theta\,\vec{u}_z$

$u_\varphi = -\mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{u}_x + \cos\varphi\,\vec{u}_y$ proiezione su piano xy (= in 2 dimensioni)

- coordinate cilindriche



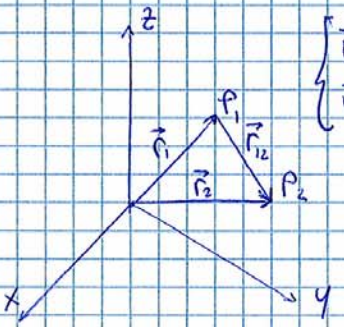
$\rho = |\vec{OP'}|$

θ

z

$$\begin{cases} u_\rho = \mathrm{sen}\,\theta\,u_y + \cos\theta\,u_x \\ u_\theta = -\mathrm{sen}\,\theta\,u_x + \cos\theta\,u_y \\ u_z = \end{cases}$$

VETTORE POSIZIONE RELATIVA



$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{OP}_1 \\ \vec{r}_2 = \vec{OP}_2 \end{cases} \qquad \boxed{\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1} \text{ VPR}$$

$OP_1 = (x_1, y_1, z_1)$

$OP_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$\vec{r}_{12} = (x_2 - x_1)\,\vec{u}_x + (y_2 - y_1)\,\vec{u}_y + (z_2 - z_1)\,\vec{u}_z$

$|\vec{r}_{12}| = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$

PRODOTTO VETTORIALE

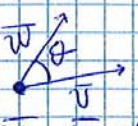
indicato con × ^

$\vec{v}, \vec{w}$ $\quad \vec{v} \times \vec{w}$ è un vettore (≠ da prodotto scalare!)

DIREZIONE: è ⊥ al piano identificato dai 2 vettori $(\bar{v}, \bar{w})$

LUNGHEZZA/MODULO: è $= |\bar{w}||\bar{v}|\,\mathrm{sen}\,\theta$

VERSO: regola mano dx: indice × 1° vettore $(\bar{v})$, medio × 2° v$(\bar{w})$
o vite destrogena → 1° vettore "avvolto" verso 2° vettore



$\bar{v} \times \bar{w}$ verso uscente $\quad \bar{w} \times \bar{v}$ verso entrante

1) $\bar{w} \times \bar{v} \neq \bar{v} \times \bar{w}$ è non commutativo $\quad \bar{w} \times \bar{v} = -\bar{v} \times \bar{w}$
cambia il verso!

2) $\bar{w} \times \bar{w} = 0$
se $\bar{v} // \bar{w} \Rightarrow \bar{v} \times \bar{w} = 0$

3) $\vec{v}_1 \times (a\vec{v}_2) = a\,\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (a\vec{v}_1) \times \vec{v}_2$ commuta col prodotto ordinario

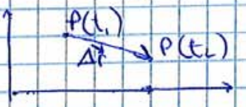
4) $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \times \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_3 + \vec{v}_2 \times \vec{v}_3$ prop distributiva $\overset{\text{somma}}{\text{rispetto}}$ al prodotto

$|\bar{v} \times \bar{w}| = |\bar{v}||\bar{w}|\,\mathrm{sen}\,\theta$ Area parallelogramma ABCD

MOTO DI UN PUNTO MATERIALE (PARTICELLA)

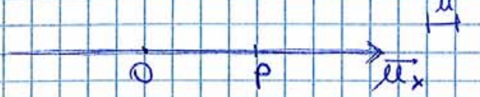
Con lo scorrere del tempo il p. materiale $P(t)$ descriverà una curva nello spazio chiamata traiettoria

Vettore spostamento: $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$



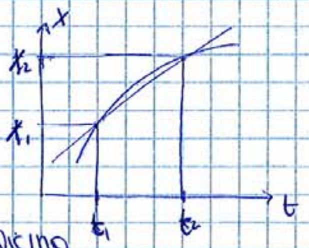
MOTO RETTILINEO (1D)

In questo caso la traiettoria è una retta (linea)



$x = f(t)$ $\boxed{x = x(t)}$ ... legge oraria del moto
posizione in funzione del tempo

t_1, t_2 : $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ spostamento



Def VELOCITÀ MEDIA

$$v_{media} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \qquad \begin{array}{l} x_1 = x(t_1) \\ x_2 = x(t_2) \end{array}$$

avvicinando $t_2 \to t_1$ la velocità media si avvicina a tangente in t_1 = caratteristica del moto all'istante t_1
↳ velocità istantanea

$$v(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t)$$ limite di un rapporto incrementale = derivata (rispetto al tempo)

$[v] = [L t^{-1}]$ derivata prima del vettore posizione rispetto al tempo
$\quad \overset{\shortparallel}{m/s}$ (SI)

OCCHIO: legge oraria ≠ traiettoria

posso considerare v = costante su dx

Operativamente: $v(t)$ si misura individuando 2 posizioni vicinissime (x e $x + dx$) e misurando l'intervallo di tempo dt che le separa (una velocità realmente istantanea non esiste!)

dx e dt considerate come quantità <u>infinitesime</u>

$x(t)$

$$x(t+dt) = x(t) + \underset{\downarrow}{\dot{x}(t)}\,dt + o(dt^2) \longleftrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^3)$$

dt infinitesimo

Taylor al 1° ordine

$f \to x \quad x_0 \to t \quad x - x_0 \to dt \quad x \to t + dt \quad f' \to \dot{x} = \frac{dx}{dt}$

$$\begin{aligned} dx &= x(t+dt) - x(t) \\ &= \dot{x}(t)\,dt \\ &= v(t)\,dt \end{aligned}$$ sviluppo in serie di Taylor ≠ da $v(t) = \frac{dx}{dt}$ (derivata)

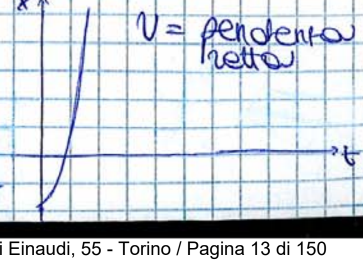
1) $x(t) = v_0(t - t_0) + x(t_0)$ moto uniforme

$v(t) = \dot{x}(t) = v_0$

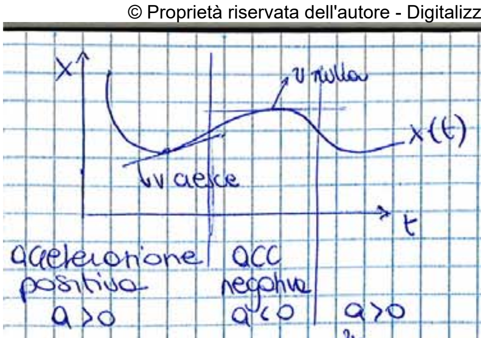
2) $x(t) = (3t^2 - 2)\,m$ v_{media} tra $t_1 = 2\,sec$, $t_2 = 3\,sec$ $v_{istantanea}$ in t_1

$$v_{media} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{25\,m - 10\,m}{1\,sec} = 15\,m/s$$

$v_{ist} = \dot{x}(t) = 6t\ m/s$, $v(t_1) = 12\ m/s$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad v(t_2) = 18\ m/s$



v = pendenza retta



$[a] = [L\, t^{-2}]$

dt molto piccolo

$dv = a(t)\, dt$

$v(t+dt) = v(t)$ al 1° ordine di sviluppo in serie di Taylor

Nota $a(t)$ $\int_{v_0}^{v_f} dv = \int_{t_0}^{t_f} a(t)\, dt$

$= v(t_f) - v(t_0)$

$v(t_f) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} a(t)\, dt$ posso conoscere la legge oraria in ogni istante

Nota $a(t)\ \forall t$, $v(t_0)$, $x(t_0) \Longrightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} v(t_0)\, dt$

$= x(t_0) + v(t_0)(t_f - t_0) + \int_{t}^{t_f} \left[\int_{t_0}^{t} a(t)\, dt\right] dt$

$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ $\quad v(t) = x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt$

$a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{x}$ $\quad a(t) = v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} a(t)\, dt$

Nota l'accelerazione $a(t)\ \forall t$ e note 2 condizioni iniziali:

$$\begin{cases} a(t) \Longrightarrow x(t)\ \forall t \\ x(t_0),\ v(t_0) \end{cases}$$

- $a(x) = a(x(t))$ accelerazione in funzione del tempo (della posizione) (relazione utile)

$\Downarrow$

$v = \frac{dx}{dt}$ $\quad dv = a\, dt \Longrightarrow v\, dv = a \frac{dx}{dt} \cdot dt$

sviluppo di Taylor 1° ordine

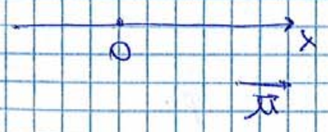
- se $a(t) = a(x(t))$ cambio di variabili da t a x

$x = x(t)$ $\quad dx = \frac{dx}{dt} dt$

$t_0 \to x_0 = x(t_0)$
$t \to x = x(t)$

$\int_{v_0}^{v} v\, dv = \int_{t_0}^{t} a \frac{dx}{dt}\, dt$

$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \int_{x_0}^{x} a(x)\, dx$ integrale nella variabile posizione x, non c'è più dipendenza dal tempo



x, v, a sono quantità vettoriali

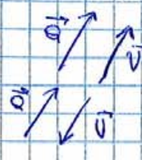
$\vec{x}(t) = x(t)\, \vec{u}$

$\vec{v}(t) = v(t)\, \vec{u}$

$\vec{a}(t) = a(t)\, \vec{u}$

Se verso di $\vec{a}$ concorde a verso $\vec{v}$ = moto accelerato

" " " " discorde " " " " decelerato



MOTO SMORZATO

$a = -kv$ $\quad \dot{v} = -kv$ eq. differenziale del 1° ordine

$$\frac{dv}{dt} = -kv \rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int -k\, dt$$

$$\log\left(\frac{v}{v_0}\right) = -k(t-t_0)$$

$$v = v_0 e^{-k(t-t_0)}$$

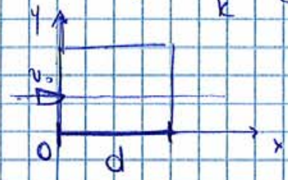
moto caratteristico dell' attrito viscoso

es: proiettile conficcato in corpo di legno

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 e^{-k(t-t_0)} dt$$

$$= x_0 + \left(-\frac{1}{k}\right) e^{-k(t-t_0)} \cdot v_0 \Big]_{t_0}^{t}$$

$$= x_0 + \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-k(t-t_0)}\right)$$



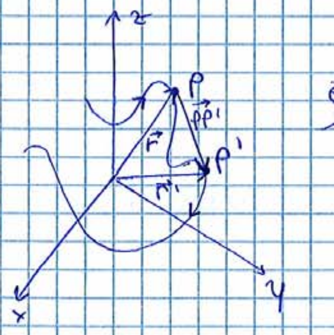
$t_0 = 0$
$x_0 = 0$ $\quad x(t) = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$

la velocità diminuisce esponenzialmente
se il proiettile si ferma nel blocco
ipotizzo lunghezza blocco che permette
al tempo di tendere a ∞
non vuol dire che il tempo aumenta
la velocità si smorza

$v(d) = 0$

$$\begin{cases} t \to \infty \\ v \to 0 \\ a \to 0 \\ x \to \frac{v_0}{k} \end{cases}$$

MOTO CURVILINEO



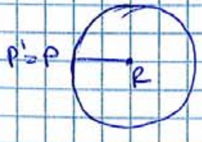
$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$\downarrow$

è una funzione del punto nel tempo
le sue coordinate sono in funzione del tempo

Nell' istante $t' > t$ il punto si è spostato in $P' = P(t')$
ha percorso un tratto di arco $\widehat{PP'}$
$\Delta s = \widehat{PP'}$, però lo spostamento sarà sempre $\underset{\overrightarrow{PP'}}{\Delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}}$

$\widehat{PP'} \neq \overrightarrow{PP'}$ scalare ≠ vettoriale
distanza percorsa ≠ vettore spostamento

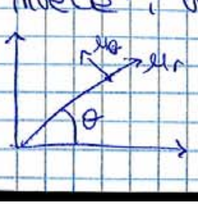


$\widehat{PP'} = 2\pi R \qquad \overrightarrow{PP'} = 0$

Def velocità media $\quad \vec{v}_{media} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right)$

Def velocità (istantanea) $\quad \vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \qquad \vec{v} = \dot{x}u_x + \dot{y}u_y + \dot{z}u_z$

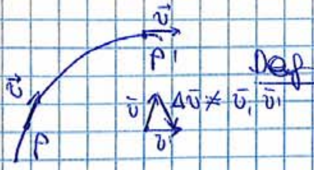
serve un sistema di coordinate ≡ coordinate cartesiane / assi fissi
u_x u_y, u_z sono fissi e non dipendono dal tempo (costanti)
invece i versori delle coordinate polari seguono il punto



$\vec{u}_r(\theta(t))$

$u_\theta(\theta,(t))$

ACCELERAZIONE NEL MOTO CURVILINEO



Def accelerazione media $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

Def accelerazione (istantanea) $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

Direzione $\vec{a}$ = quella in cui varia $\vec{v}$ (diretta verso il centro della circonf.)

$\vec{a}$ è un vettore che non è né // né ⊥ alla traiettoria (in generale)

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ $\quad \vec{a} = \frac{d}{dt}\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$

- Noto $\vec{a}(t)$ e $v(t_0) \xRightarrow{\text{conosco}} v(t)$

→ $\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt$

$d\vec{v} = \vec{a}\,dt$

- Noto $v(t)\ \forall t$ e $\vec{r}(t_0) \xRightarrow{\text{conosco}} r(t)$

→ $\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\,dt$

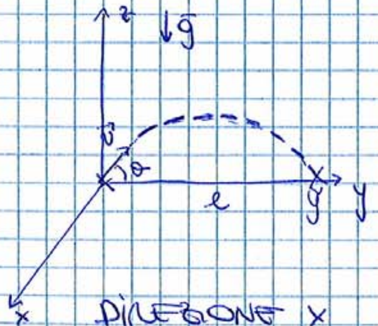
Un vettore ci definisce 3 direzioni ≠ nello spazio ≡ 3 gradi di libertà
n gradi di libertà: n possibili direzioni ≠ di movimento nello spazio
⟹ condizioni iniziali per integrare il moto in 3 dimensioni (spazio) sono = 2n = 6

MOTO CURVILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$$\begin{cases} \vec{a}(t) = \text{cost} \\ \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}\,dt = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0) \\ \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2 = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,dt \end{cases}$$

Moto con ac. costante → avviene nel piano
per questo moto $\vec{v} \in$ piano $(\vec{v}_0, \vec{a})$, $\vec{r}$ giace sul piano // al piano definito da $\vec{v}$ che contiene il punto $\vec{r}_0$

MOTO DEI PROIETTILI



$$\begin{bmatrix} \vec{v}_0 = (\overset{x}{0}, \overset{y}{v_0 \cos\theta}, \overset{z}{v_0 \,\text{sen}\theta}) \\ \vec{a} = -g\,\vec{u}_z \quad t_0 = 0 \end{bmatrix}$$

$\vec{r}_0 = \vec{0}$ (in questo sistema = origine)

$\vec{r}(t)$?

$a_x = 0$ studio moto componente x componente

DIREZIONE x

- $a_x = 0 \rightarrow v_x = v_{0x} = 0 \rightarrow x(t) = x_0 = 0$

Il moto avviene nel piano yz, la direzione x non è interessata

DIREZIONE y

- $a_y = 0 \rightarrow v_y = v_{0y} = v_0\cos\theta \rightarrow y(t) = \int \overbrace{v_0\cos\theta}^{\text{costante}}\,dt = (v_0\cos\theta)t$

DIREZIONE z

- $a_x = -g \rightarrow v_z = v_{0z} - gt = v_0\,\text{sen}\theta - gt$
$\rightarrow z(t) = (v_{0z})t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_0\,\text{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$

$$\boxed{\vec{r}(t): \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = (v_0\cos\theta)t \\ z(t) = (v_0\,\text{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}}$$
↓
legge oraria del moto

Conosco $\vec{r}_T$ ad ogni istante

Descrizione intrinseca del moto nel piano, $\vec{u}_T$, $\vec{u}_N$

- $\vec{v} = v\,\vec{u}_T$
- $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\vec{u}_T}{dt}$

$\boxed{\frac{d\vec{u}_T}{dt} \perp \vec{u}_T}$ → direzione NORMALE, ⊥ a $\vec{u}_T$ e diretto verso il centro di curvatura

Dim $\vec{a}(x) = b(x)\vec{c}(x)$

$$\frac{d\vec{a}}{dx} = b\frac{d\vec{c}}{dx} + \frac{db}{dx}\vec{c}$$

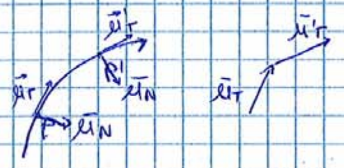
$\vec{c} = (c_x, c_y)$

$\vec{a} = (a_x, a_y)$

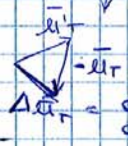
$$\begin{cases} a_x = b c_x \\ a_y = b c_y \end{cases}$$

$$\frac{da_x}{dx} = \frac{db}{dx}c_x + b\frac{dc_x}{dx}$$

$$\frac{da_y}{dx} = \frac{db}{dx}c_y + b\frac{dc_x}{dx}$$



$$\frac{\Delta\vec{u}_T}{\Delta t} = \frac{\vec{u}_T' - \vec{u}_T}{\Delta t}$$



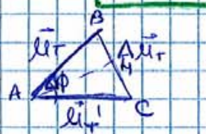
= diretto verso interno della curva

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{u}_T}{\Delta t} = \lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta\phi\to 0}}\left(\frac{\Delta\vec{u}_T}{\Delta\phi}\right)\left(\frac{\Delta\phi}{\Delta t}\right)$$

$\Delta\vec{u}_T(t) = \Delta\vec{u}_T(\phi(t))$

$$\frac{\Delta\vec{u}_T}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{u}_T}{\Delta\phi}\,\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$ rapporto incrementale

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{u}_T}{\Delta\phi}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \boxed{\vec{u}_N\frac{d\phi}{dt}}$$



$AB = AC = 1$

$BC = BH + HC = 2BH$

$BH = \text{sen}\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$ $BC = 2\,\text{sen}\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$

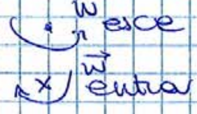
$$\left|\frac{\Delta\vec{u}_T}{\Delta\phi}\right| = \frac{2\,\text{sen}\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}{\Delta\phi}$$

$$\left|\frac{d\vec{u}_T}{d\phi}\right|$$

$$\lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{\Delta\vec{u}_T}{\Delta\phi} = \lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{\text{sen}\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}{\frac{\Delta\phi}{2}} = 1$$

derivata del vettore tangente è un versore = $\vec{u}_N$ versore normale

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \vec{u}_N\frac{d\phi}{dt}$$ → modulo che varia in base all'angolo corrispondente detto anche velocità angolare ≡ ω
In questo caso è uno scalare ma è definibile anche come vettore



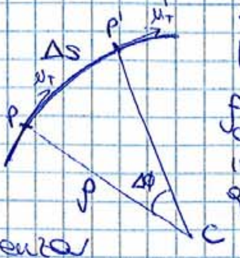
$\vec{w}$: $|\vec{w}| = w$
direz $\vec{w}$ = perpendicolare al piano del moto
verso regola mano dx

$P(s(t))$

$\phi(s(t))$

$$\boxed{\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\phi}{ds}} = \boxed{\frac{v}{\rho}}$$

$\frac{ds}{dt} = v$ velocità scalare



$P' \sim P$
↳ $CP' \sim CP = \rho$
ρ = raggio della circonferenza che in (un intorno di) quel punto approssima meglio la traiettoria tra P e P'

$\boxed{\Delta s \simeq \rho\,\Delta\phi}$ spostamento lungo l'arco di circonferenza che approssima la traiettoria

$\rho = \frac{\Delta s}{\Delta\phi}$ $\rho = \lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta\phi\to 0}}\frac{\Delta s}{\Delta\phi} = \frac{ds}{d\phi}$ $\Longrightarrow \frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{v}{\rho}\vec{u}_N$

acc. tangenziale

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_N}$$ acc. centripeta, acc. normale

Moto circolare. $\vec{a}$ in termini di $\vec{r}, \vec{v}, \vec{w}$

$$\left[\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{w}}{dt} \times \vec{r} + \vec{w} \times \underset{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\vec{v}}\right.$$ derivata del prodotto

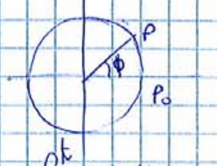
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{w} \times \vec{r}$$ NON è COMMUTATIVA

Per moto circolare uniforme $\frac{d\vec{w}}{dt} = 0$

$$\vec{a} = \vec{w} \times \vec{v} = \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) = w^2 R\, \vec{u}_N$$ come visto prima

ESEMPIO MCU

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(w_0 t) \\ y(t) = R\,\text{sen}(w_0 t) \end{cases}$$ $P(t=0) = P_0 = (R,0)$



$x(t) = R\cos\phi \Rightarrow \phi = w_0 t$ $\left(\int_{\phi_0}^{\phi} d\phi = \int_{t_0}^{t} w_0\, dt \rightarrow \phi_f - \overset{0}{\phi_0} = w_0(t - \overset{0}{t_0})\right)$ $\phi = w_0 t$

Determinare traiettoria, velocità, accelerazione w_0, R costanti
ho la legge oraria

$$\begin{cases} x^2(t) + y^2(t) = R^2\cos^2(w_0 t) + R^2\,\text{sen}^2(w_0 t) = R^2 \\ x^2 + y^2 = R^2 \text{ eq. di una circonferenza} \end{cases}$$

NB $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\text{sen}\alpha$

$\vec{v} = (v_x, v_y)$ $v_x = \frac{dx}{dt} = -R w_0\,\text{sen}(w_0 t) = R w_0 \cos(w_0 t + \frac{\pi}{2})$

$v_y = \frac{dy}{dt} = w_0 R\cos(w_0 t) = R w_0\,\text{sen}(w_0 t + \frac{\pi}{2})$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dots} = w_0 R$

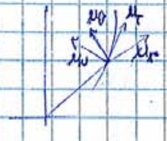
$\vec{r} = (x,y)$ $\vec{v} \perp \vec{r} \Rightarrow \vec{v} \parallel \vec{u}_T$ $|\vec{r}| = R$
↳ perpendicolare a direzione radiale

$\vec{a}(t)$: $a_x = \frac{dv_x}{dt} = -R w_0^2 \cos(w_0 t)$

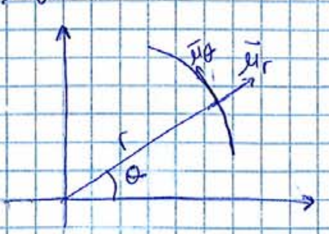
$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -R w_0^2\,\text{sen}(w_0 t)$ MC UNIF $\alpha = 0$

$\vec{a} = -w_0^2 \vec{r} = w_0^2 R\, \vec{u}_N$ $a_T = 0$ $\vec{a} = a_n \vec{u}_n$
direzione radiale opposta a direzione normale

MOTO PIANO IN COORDINATE POLARI $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$



Per moti vari generali: $\begin{cases} \vec{u}_r \neq -\vec{u}_N \\ \vec{u}_\theta \neq \vec{u}_T \end{cases}$



- $\boxed{\vec{r}(t) = r(t)\, \vec{u}_r(t)}$ $\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \vec{u}_\theta \cdot w$
- $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \boxed{\underset{v_{\text{radiale}}}{\dot{r}\vec{u}_r} + \underset{v_\theta \text{ trasversa}}{r\overset{\dot\theta = \frac{d\theta}{dt}}{w}\vec{u}_\theta}}$

ricordo $\begin{cases} \vec{u}_r(\theta) = \cos\theta\,\vec{u}_x + \text{sen}\theta\,\vec{u}_y = -\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \\ u_\theta = -\text{sen}\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \end{cases}$

$\vec{u}_r(\theta(t))$
$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \vec{u}_\theta w$

- $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right] + \left[(\dot{r}\dot\theta + r\ddot\theta)\vec{u}_\theta + r\dot\theta\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right]$

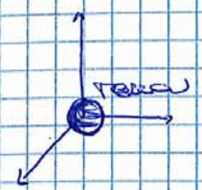
$\frac{du_r}{dt} = \underset{\vec{u}_\theta \cdot w}{\vec{u}_\theta\dot\theta}$ $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{du_\theta}{d\theta}\dot\theta = \underset{w\vec{u}_r}{-\dot\theta\vec{u}_r}$

MOTI RELATIVI

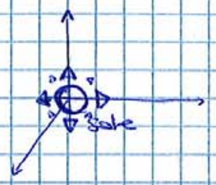
Si possono scegliere diversi osservatori, in genere si prende quello che descrive in modo più semplice il moto

Esempio per eccellenza: moto della Terra

SISTEMA TOLEMAICO
teoria epicicli



SISTEMA COPERNICANO

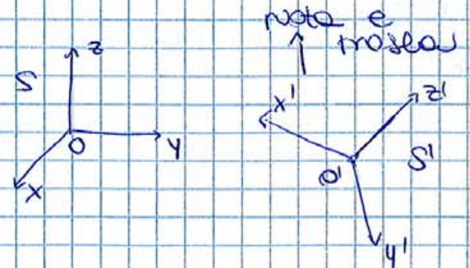


$S:(O, x, y, z, t)$

$S':(O', x', y', z', t')$

O in quiete

O' in moto con velocità $\vec{v}_{O'}$ rispetto a O

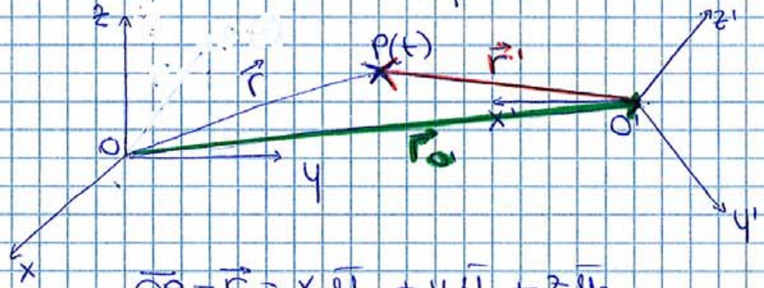


Fisica classica: il tempo è assoluto: i cronometri possono essere asincroni ma gli intervalli di tempo misurati sono uguali.

$\boxed{t'=t}$ cronometri sincronizzati ←

Nella realtà il tempo non è assoluto

Superato da relatività speciale



$\overline{OP} = \vec{r} = x\bar{u}_x + y\bar{u}_y + z\bar{u}_z$

$\overline{O'P} = \vec{r}' = x'\bar{u}_{x'} + y'\bar{u}_{y'} + z'\bar{u}_{z'}$ ruota e trasla

$\overline{OO'} = \vec{r}_{O'} = x_{O'}\bar{u}_x + y_{O'}\bar{u}_y + z_{O'}\bar{u}_z$ → descritto rispetto a sistema in quiete, trasla

$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{O'}$ (vedi disegno)

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt}$

In un dato sistema di riferimento gli assi cartesiani sono fissi:

$\frac{d\vec{u}_x}{dt} = 0 \; ; \; \frac{d\vec{u}_y}{dt} = 0 \; ; \; \frac{d\vec{u}_z}{dt} = 0$

$\vec{u}_{x'}(t) \quad \vec{u}_{y'}(t) \quad \vec{u}_{z'}(t)$

$\vec{u}_{i'} : \vec{u}_{1'} = \vec{u}_{x'} \quad \vec{u}_{2'} = \vec{u}_{y'} \quad \vec{u}_{3'} = \vec{u}_{z'} \qquad \vec{u}_{i'} = \vec{u}_{i'}(\theta(t))$

$v = \frac{dr'}{dt} + \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt}$

$$\frac{dr'}{dt} = \underbrace{\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\vec{u}_{z'}}_{v' = \text{velocità misurata nel SdRf } O'} + \underbrace{x'\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\vec{u}_{z'}}{dt}}_{\text{perché gli assi non sono fissi}}$$

da prima: $\frac{d\vec{u}(\theta(t))}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}$
$\quad \frac{d\theta}{dt} \frac{du_i}{d\theta}$

$\boxed{\frac{d\vec{u}_i}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}_i} \qquad \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} = \omega \times \vec{u}_{x'}$

TRASFORMAZIONI Galileo: trasformazioni tra SRI e SRf e tra sistemi in moto relativo traslatorio uniforme

- $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_{0'}$ $\quad \begin{cases} x'(t) = x(t) - x_{0'}(t) = x(t) - v_{0'x}\, t \\ y'(t) = y(t) - y_{0'}(t) = y(t) - v_{0'y}\, t \\ z'(t) = z(t) - z_{0'}(t) = z(t) - v_{0'z}\, t \end{cases}$

$\vec{v}_{0'} = \text{cost}$

$\vec{r}_{0'} = \vec{v}_{0'}\, t$

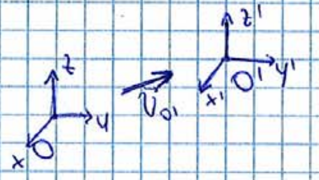
Se $\vec{v}_{0'} = v_{0'}\, \vec{u}_x$ $\quad \begin{cases} x'(t) = x(t) - v_{0'x}\, t \\ y'(t) = y(t) \\ z'(t) = z(t \end{cases}$

orientato su asse x

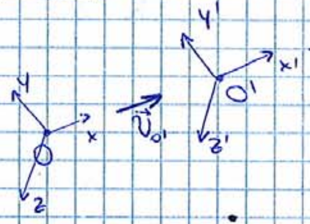
- $v' = \vec{v} - \vec{v}_{0'}$ $\quad \begin{cases} v'_x = v_x - v_{0'} \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases}$ $\qquad \vec{a}\,' = \begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases} = \vec{a}$

- $\boxed{\vec{a}\,' = \vec{a}}$

moto traslatorio uniforme $v_{0'}$ = costante



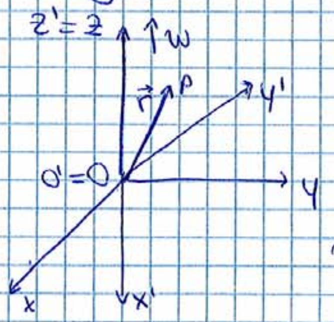
oppure

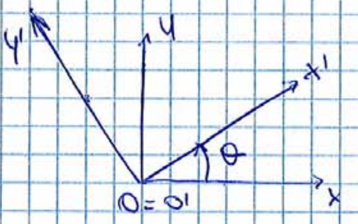


MOTO RELATIVO ROTATORIO

$\vec{w}$ = costante

le origini dei 2 SRf coincidono $O = O'$





O' ruota con w cost di un angolo θ (S')

O è fermo (S)

$\vec{OP} = \vec{r} = \vec{r}\,' = \vec{O'P}$

perché le origini coincidono

$\vec{r} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z \rightarrow S$

$\vec{r}\,' = x'\,\vec{u}_x + y'\,\vec{u}_y + z'\,\vec{u}_z \rightarrow S'$

in qst caso $z = z'$

$x \neq x' \quad y \neq y' \quad z \neq z'$ $\overset{\text{in generale}}{\uparrow}$ MA $\vec{r} = \vec{r}\,'$

Componenti ≠ che descrivono lo stesso vettore

$\left(w = \dfrac{d\theta}{dt} = \text{costante} \right)$

$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{w} \times \vec{r}\,'$ → velocità nel sistema in [illegible] moto

NO $\vec{v}_{0'}$ perché non trasla

$= \vec{v}\,' + \vec{w} \times \vec{r}$

$\vec{a} = \underset{\text{acc del sistema in moto}}{\vec{a}\,'} + \underbrace{\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})}_{\text{acc centripeta}} + \underbrace{2\vec{w} \times \vec{v}\,'}_{\text{acc. Coriolis}} + \underbrace{\dfrac{dw}{dt} \times \vec{r}\,'}_{\text{acc. angolare? = 0 perché } w = \text{cost}}$

$\vec{v}' = -\vec{w} \times \vec{r}$

$\vec{a} = 0$

$-2w \times v' = -2\vec{w} \times (-\vec{w} \times \vec{r})$

$= 2\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})$

$a' = \vec{a} - \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) - 2\vec{w} \times \vec{v}'$

$= 0 - \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) + 2\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})$ acc. Coriolis serve per far "tornare le cose"

Quest'ultimo e si adatta alla terra

MOTO RELATIVO ALLA TERRA NO SRI

T_{riv} = 1 anno = $3,16 \times 10^7$ sec

↳ $w_{riv} = 1,99 \times 10^{7}$ rad/s

T_{rot} = 1 giorno = $8,64 \times 10^4$ sec

↳ $w_{rot} = 7,29 \times 10^{-5}$ rad/s V. rotazione angolare

NON è UN SIST. di RIF INERZIALE perché ruota su se stessa

$w_{riv} << w_{rot}$ arrivo da $\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{w} \times \vec{v}' + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})$

S' terra

S SRI

$$\boxed{\vec{a}' = \vec{a} \underbrace{- 2\vec{w} \times \vec{v}'}_{\substack{\text{acc Coriolis} \\ \vec{a}_{co}}} \underbrace{- \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})}_{\substack{\text{dal nostro punto di vista è un acc. centrifuga} \\ \vec{a}_{cf} \text{ (verso esterno)}}}}$$

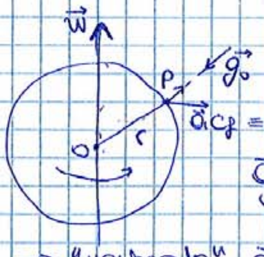
$\vec{g}' = \vec{a}'$ acc di gravità

$\vec{g}_0 = \vec{a}$ acc in un SRI

Consideriamo $\vec{v}' = 0$

acc cf devia verso sud

$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{w} \times \vec{v}' + \vec{w}(\vec{w} \times \vec{r})$



$\vec{a}_{cf} = -\vec{w}(\vec{w} \times \vec{r})$

se $\vec{v}' \neq 0$ c'è anche Coriolis!

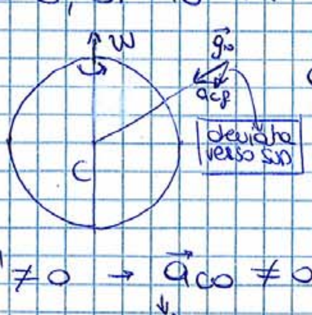
$\vec{g}' \neq \vec{g}_0 + \vec{a}_{cf}$

⇒ "verticale" è deviato rispetto a $-\vec{u}_r$

Prendiamo il punto di vista della terra

se la terra fosse ferma $\Rightarrow \vec{g}' = \vec{g}_0 - 2\vec{w} \times \underset{v=0}{\vec{v}'} \underbrace{- w \times (w \times r)}_{\vec{a} \text{ centrifuga rispetto a terra}}$

$R = 6,37 \cdot 10^6$ m → $\vec{a}_{cf} = 3,39 \times 10^{-2}$ m/s² molto minore dell acc di gravità



a_{cf} nel nostro emisfero devia verso sud la direzione della verticale

effetto di a_{cf}! al PN a_{cf} = 9,8321 effetto nullo

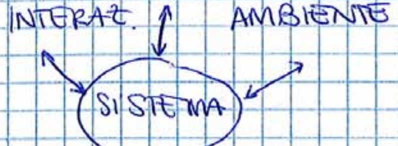
all'EQ a_{cf} = 9,7799 " massimo

- $\vec{v}' \neq 0 \rightarrow \vec{a}_{co} \neq 0$ $\quad \vec{a}_{co} = -2\vec{w} \times \vec{v}'$

Influenza effetti metereologici (cicloni e anticicloni)
Data particella in moto con velocità $\vec{v}'$ su un piano orizzontale solidale con la terra a_{co} provoca una deviazione da traiettoria rettilinea verso dx nel nostro emisfero, verso sx nell'altro emisfero

Acqua del rubinetto che ingorga verso dx (se la terra fosse ferma andrebbe giù e basta)

DINAMICA



Sistema fisico in interazione con altri sistemi o con l'ambiente

INTERAZIONE → parola chiave

Si cercano di capire le cause del moto.

L'esperienza ci insegna che il moto di un corpo è il risultato delle sue interazioni con gli altri corpi
↳ **FORZE** ⇒ variazione dello stato di moto dei corpi
vettori applicati

Newton (1642 - 1727) anticipato da Galileo (1564 - 1642)

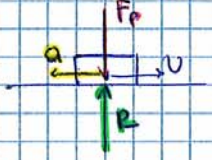
DEF un corpo è libero quando non è soggetto a interazioni
È idealizzazione

Sotto quali condizioni ha senso?
1) sistema isolato: interazioni con ambiente esterno trascurabili
è molto lontano da altre particelle
2) " in equilibrio: interazioni si compensano producendo una risultante nulla

Come sono legate le forze allo stato di moto?
Prima di Galileo si riteneva che forze producessero movimento
$F \Rightarrow \vec{v} \neq 0$ NO → confutato con metodo scientifico

- Consideriamo un corpo su un piano orizzontale: viene impressa una forza che lo mette in moto, poi si arresta il moto

Forze che agiscono sul corpo in moto dopo la spinta:
- F_p, reazione vincolare, attrito



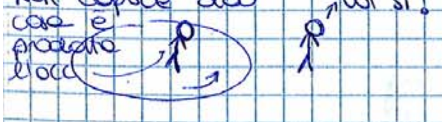
Il corpo non è in equilibrio, bisogna eliminare l'attrito ⇒ il corpo resta in moto con v = costante

Forze determinano ACCELERAZIONE $\boxed{\vec{F} \propto \vec{a}}$

PRINCIPIO DI INERZIA (1^ legge di Newton)

Ogni corpo persiste nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme a meno che non intervengono forze esterne a modificare tale stato.
↳ Particella libera ⇒ $\vec{v}$ costante

Per quali sistemi di riferimento vale il principio di inerzia?
Solo per i SR Inerziali (in quiete o in moto relativo traslatorio uniforme) o SR liberi (NON soggetti a forze)



S inerziali ≠ sono legati dalle trasformazioni di Galileo vedi sistemi applicati
⇓
misurano tutti le stesse accelerazioni!

$F \propto a$ fissiamo unità di misura della forza u_F = quella forza che causa un'accelerazione di 1 m/s² su un dato corpo A
Esprimo tutte le altre forze su A

$u_F \to 1\ m/s^2 \quad k u_F = k\ m/s^2$ su A

$F_1 = 3 u_F \vec{u}_x = 3 m/s^2 \ \vec{a}_1$
$F_2 = 4 u_F \vec{u}_y = 4 m/s^2 \ \vec{a}_2$

- Le forze si sommano come vettori
L'acc risultante di F_1 e F_2 è data dalla somma vettoriale delle 2 accelerazioni $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ $\quad \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad |F| = \sqrt{|F_1|^2 + |F_2|^2} = 5 u_F = 5 m/s^2 \ \vec{a}$

per sistema a massa variabile l'espressione corretta per esprimere la 2^ legge di Newton è $\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$
(x es auto che "perde" carburante)

per sistemi relativistici in cui la v è prossima a quella della luce

$$v \leq c \Rightarrow m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

3^ legge di Newton (principio di AZIONE e REAZIONE)

In natura le forze si manifestano sempre in azioni reciproche
⟹ interazioni tra corpi

Quando A esercita una forza su B anche B esercita una forza su A, uguale ed opposta x quanto riguarda intensità e direzione

Se ho 2 forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2$

$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ il sistema è libero

▶ vale solo se le 2 forze sono applicate nello stesso punto

le forze sono applicate nei centri di massa dei rispettivi corpi.

3^ l N ≡ le forze vanno pensate come reciproche interazioni tra i corpi coinvolti
≠
Invece [2 o più forze sono in equilibrio quando la loro risultante sullo stesso corpo è NULLA

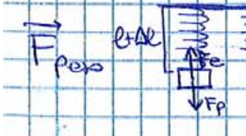
la 3^ legge di (N) NON dice che le forze si equilibrano
OCCHIO!

Def operativa di Forza:

misura dinamica: $\vec{F} = m\vec{a}$

" statica: per misurare $\vec{F}$ che agisce su corpo, esercito sul corpo A un'altra forza F' nota (che possiamo variare in modo controllato) fino a realizzare una situazione di equilibrio (accelerazione nulla)

$M_A\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}' = 0$ Nota $F' \Rightarrow$ misuro F
DINAMOMETRI (bilancia a molla)



→ l = lunghezza di riposo

Quando è deformata esercita una forza di richiamo
$\vec{F}_e = -k\vec{\Delta l}$

Come si misurano le forze? F = m·a

Misura dinamica attraverso la massa, misuro $\vec{a} \Rightarrow F$

Misura statica: fatta all'equilibrio ⟹ $\vec{F} + \vec{F}_{nota} = 0$
ricavo intensità, verso e direzione da F_{nota}

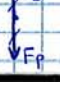
si usa il DINAMOMETRO composto da:

* MOLLA IDEALE ≡ · ha massa trascurabile rispetto alle grandezze in gioco nell'esperimento
· è perfettamente elastica (torna a posizione iniziale dopo essere stata deformata

f_0: posizione iniziale
f: posizione finale Δf = allungamento

scala graduata

Nella posit. di equilibrio



la molla esercita una forza di richiamo elastico su M

$\boxed{F = -k\Delta l}$

$\sum \vec{F}_i = M\vec{a}$

Somma delle forze che agiscono sul corpo determinano $\vec{a}$

$\vec{F}_p + \vec{F} + \vec{N} = M\vec{a}$

$$\begin{cases} \vec{F} = F u_x \\ \vec{N} = N u_y \\ \vec{F}_p = Mg \,\text{sen}\alpha\, u_x - Mg\cos\alpha\, u_y \end{cases}$$

2^ LN $\begin{cases} x = -Mg\,\text{sen}\alpha + F = Ma_x \\ y = -Mg\cos\alpha + N = Ma_y = 0 \end{cases}$ perché $\boxed{\vec{a} = a\vec{u}_x}$

Condizione imposta = moto uniforme → $\boxed{a = 0}$

$$\begin{cases} N = Mg\cos\alpha \\ F = Mg\,\text{sen}\alpha \end{cases}$$ → per moto uniforme

- Quanto vale F tale che il corpo salga con un'accelerazione nota? $a = a_0 \neq 0$

$\underline{F = M(a_0 + g\,\text{sen}\alpha)}$

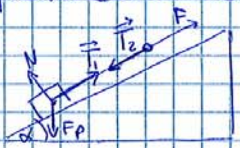
- Cosa succede se ad un certo istante l'intensità della forza è = 0

⇒ $\boxed{a = -g\,\text{sen}\alpha}$ moto accelerato negativamente, verso opposto a "normalità"

$\overset{\|}{\dfrac{d^2x}{dt^2}} \Rightarrow x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2} g\,\text{sen}\alpha\,(t - t_0)^2$

Componente ⊥ al moto è compensata da N
" ∥ " " è l'unica che contribuisce

• Supponiamo ora M tirato da $\vec{F}$ attraverso filo inestensibile
↓
non deformabile: accelerazione = in ogni punto del filo



FILO IDEALE
1° filo inestensibile
• massa trascurabile rispetto alle altre masse in gioco

T_2 si oppone al moto

- Filo in equilibrio $\xleftarrow{T_s}\circ\xrightarrow{T_d}$ $\boxed{T_d + T_s = 0}$ in eq.

- Se il filo è accelerato $\xleftarrow{T_s}\circ\xrightarrow{T_d}$ $\boxed{T_d + T_s = M_{filo}\vec{a}} = \overset{0}{\downarrow}$

• Filo ideale $|T_s| = |T_d| = T$ la tensione T è = in ogni punto
↳ $T_1 = T_2 = T$

Sulla massa $F_p + N + T_1 = ma$

Sull'anello $T_2 + F = 0 \Longrightarrow T_2 = -F$

$\vec{T}_1 = -\vec{T}_2 = \vec{T} = \vec{F}$

La forza non è applicata sulla massa, solo un po' più in là

$T_1 = F \Longrightarrow \underline{F_p + N + F = ma}$
↳ caso analogo a prima

$-1) + 2)\quad (m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a$

$$\boxed{a = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) g}$$

• Non conosco direzione moto, faccio un'ipotesi (diagrammi)
se $a > 0$ → ipotesi di lavoro riguardo a direzione moto è corretta
se $a < 0$ → il moto è nell'altro verso

Sostituisco in un'eq (la 1ª, qui)

$$T = m_1(g - a) = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2}(m_1 + m_2 - m_1 + m_2)$$

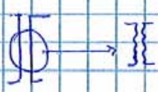
$$\boxed{T = 2\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g}$$

FORZE DI ATTRITO

• ATTRITO RADENTE

Ho un piano scabro → oppone resistenza a scorrimento corpo

attrito: dato dai interazioni elettrostatiche tra i due corpi
(i corpi non sono mai veramente a contatto



A livello microscopico il contatto tra 2 superfici è in zone 10^4 volte più piccole a causa delle irregolarità c'è contatto tra le "punte" → legami chimici/elettrostat.

A livello macroscopico c'è una forza che si oppone al moto ma non è proporzionale a estensione corpo (le "punte" sono molto meno voluminose della superficie ma è collegata a forza che spinge un corpo sulla superficie dell'altro → N

Forza in direzione del moto ma con verso opposto che NON dipende da area superficie di contatto da velocità, ma dipende dal modulo della forza ⊥ al piano che tiene premuto il corpo al piano

$|\overline{F}_{ar}| = \mu |\vec{N}|$ $\quad \mu$ = coeff. attrito dipende dal tipo di superfici
$\downarrow$
adimensionale

Sperimentalmente ∃ 2 diversi coefficienti di attrito μ per ogni coppia di materiali: $\mu_{statico}$, $\mu_{dinamico}$

$\boxed{\mu_s > \mu_d}$ ci vuole più forza per staccare i due corpi piuttosto che per mantenere il corpo

$F_s = \mu_s N$ dà la forza minima necessaria per porre in moto relativo corpo e superficie, inizialmente in quiete

$\overline{F} < \overline{F}_s$ il corpo rimane fermo

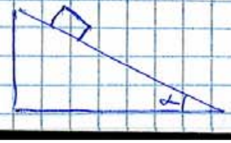
$\overline{F} > \overline{F}_s$ il corpo si mette in moto ⇒ F vince legami molecolari

Iniziato il moto l'attrito è minore ⇒ per mantenere il corpo in moto uniforme $(a = 0)$ è sufficiente $|\vec{F}_d| = |\vec{F}|$ $\quad |\vec{F}_d| = \mu_d |\vec{N}| < F_s$

se $|\vec{F}| = |\vec{F}_d|$ ⇒ moto uniforme
se $|\vec{F}| = F_s|$ ⇒ " accelerato

$F_d = -\mu_d |\vec{N}| \overline{u}$ $\quad F_d$ agisce lungo la dir. del moto, in verso opposto (-)

$\overline{v} = v\overline{u}$



Cos'è v_0'? $v_0' = v_0 - \frac{mg}{k\eta}$

$$\boxed{v(t) = \frac{mg}{k\eta} + \left(v_0 - \frac{mg}{k\eta}\right) e^{-\frac{k\eta}{m} t}}$$

Col passare del tempo la velocità diminuisce per componente esponenziale. In seguito essa diventerà trascurabile

$$mg - \boxed{k\eta v} = m\frac{dv}{dt}$$

↳ man mano che il corpo acquista velocità questo contributo rallenta il moto.

Quando $mg = k\eta v$ il moto diventerà uniforme con velocità LIMITE (quando l'esponenziale è eliminato perché all'infinito tende a 0)

$$v_L = \frac{mg}{k\eta}$$

$$v_L = mg - k\eta v = m\frac{dv}{dt} \rightarrow 0 \text{ moto uniforme}$$

$$mg - k\eta v_L = 0$$

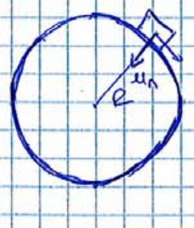
Calcolare velocità limite per una goccia di pioggia sferica del diametro di 0,5 mm e $\rho_{H_2O} = 10^3 kg/m^3$ = densità

$M_g = \rho_{H_2O} V_g$ $\eta = 1,81 \times 10^{-5} \frac{N \cdot s}{kg\, m}$ $k = 6\pi R$

$v_L = \frac{mg}{k\eta} = 7,5$ m/s

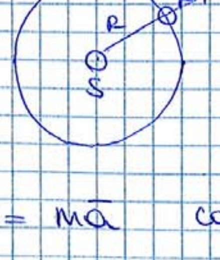
$m \rightarrow m - m_{fluido\ spostato}$ (meccanica dei fluidi)

FORZA CENTRIPETA



Un treno si muove lungo una rotaia circolare, se non ci fosse la reazione vincolare, il corpo partirebbe lungo la tangente

$\bar{N} = N \bar{u}_n$ agisce in maniera CENTRIPETA!



Pianeta che ruota attorno al sole

$\bar{F} = -\frac{m_S * m_P}{R^2} G \bar{u}_r$

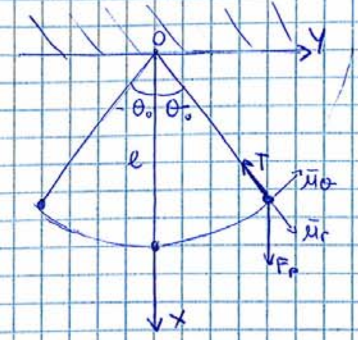
In entrambi i casi gli oggetti si muovono di moto circolare uniforme quindi la forza è di tipo centripeto quindi diretta verso il centro (lungo il versore normale u_n)

$\bar{F} = m\bar{a}$ con $\bar{a} = \frac{v^2}{r}\bar{u}_n$

oppure $\rho = r$, raggio di curvatura

$|F|$ = costante forza che cambia direzione (sempre verso il centro), ma con modulo costante

IL PENDOLO SEMPLICE



Massa attaccata lungo un filo IDEALE lungo ℓ

Supponiamo non ci sono attriti (radente nel punto in cui è agganciato e viscoso dell'aria)

- Moto circolare NON uniforme

Si usano coordinate cartesiane e polari

la tensione del filo costringe m a muoversi lungo una circonferenza → ha funzione centripeta

$$-\theta_0 \le \theta(t) \le \theta_0$$

$$\begin{cases} \bar{T} = -T\bar{u}_r \\ \bar{F}_p = mg\bar{u}_x = mg\cos\theta\,\bar{u}_r - mg\,\mathrm{sen}\theta\,\bar{u}_\theta \end{cases}$$

2LN

$\vec{F}_p + \vec{T} = m\vec{a}$ $\quad a =$ componente centripeta + componente trasversa

$a = a_r\bar{u}_r + a_\theta\bar{u}_\theta \qquad$ qui $r = \ell$

- $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ • $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ acc. in coord. polari

$\underline{a_r} = -r\dot{\theta}^2 = \underline{-\ell\dot{\theta}^2} \quad \underline{a_\theta} = r\ddot{\theta} + \cancel{2\dot{r}\dot{\theta}} = \underline{\ell\ddot{\theta}}$

$$\begin{matrix} u_r = \\ u_\theta = \end{matrix}\begin{cases} -T + mg\cos\theta = -\ell\dot{\theta}^2 m & ① \\ -mg\,\mathrm{sen}\theta = \ell\ddot{\theta} m & ② \end{cases}$$

① $T = mg\cos\theta + \ell\dot{\theta}^2 m = \boxed{\underbrace{mg\cos\theta}_{\text{reazione vincolare}} + \ell\omega^2 m}$ } contributo centripeto

reazione vincolare } bilancia contenuto forza peso

② $-mg\,\mathrm{sen}\theta = \ell\ddot{\theta}\cancel{m}$ $\quad \boxed{\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{g}{\ell}\,\mathrm{sen}\theta}$ Si risolve in modo numerico, troppo difficile in modo analitico

x piccole oscillazioni ricordo Taylor $\mathrm{sen}x = x \ldots$

$\boxed{\mathrm{sen}\theta \sim \theta} \implies \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{g}{\ell}\theta \qquad \theta_0 \le 10°$

$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$

$\omega^2 = \dfrac{g}{\ell}$

Sostituzione
$\boxed{\begin{matrix} x \to \theta \\ \omega_0 \to \sqrt{\frac{g}{\ell}} \end{matrix}}$ ↗ eq. differenziale del 2° ordine dell'oscillatore armonico

$$\begin{cases} \theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) \\ \dot{\theta}(t) = -A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \phi)\,\omega_0 \\ \ddot{\theta}(t) = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \phi) = -\omega_0^2\theta \end{cases}$$

per fissare A e ϕ (costanti) devo usare le condizioni iniziali del problema

$t_0 = 0 \quad \theta(t_0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(t_0) = 0$

$\theta(0) = A\cos(\phi) = \theta_0 \qquad \theta(0) \to \boxed{\theta_0 = A}$

$\dot{\theta}(0) = -A\,\mathrm{sen}(\phi)\,\omega_0 = 0 \qquad$ ↑ A NON può essere $= 0$, idem $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$, $\phi = 0$ o $\boxed{\phi = \pi}$

$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t)$

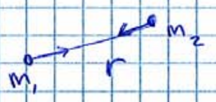
NON dipende da massa e ampiezza oscillazione ma da ℓ e g
x piccoli θ e corpi NON estesi \ oscillazioni ISOCRONE

periodo di oscillazione $\equiv T$. $\quad \theta\left(\frac{T}{2}\right) = -\theta_0$ (dopo 1/2 periodo è nella posizione opposta)

$\cancel{\theta_0}\cos\left(\omega\frac{T}{2}\right) = -\cancel{\theta_0} \rightarrow \cos\left(\omega_0\frac{T}{2}\right) = -1 \quad \omega_0\frac{T}{2} = \pi \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$

INTERAZIONE GRAVITAZIONALE

$$\boxed{F = -G \frac{m_1 m_2}{R_2} \bar{u}_r}$$



è sempre attrattiva

G = costante di gravitazione universale : $\boxed{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}}$

↓ vale x tutte le coppie di corpi

Qui le masse in gioco sono masse gravitazionali, cioè **m** è la carica dell'interazione gravitazionale

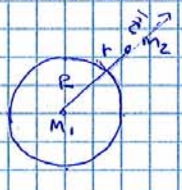
↳ NON ha niente a che vedere con INERZIA!

m_G = massa gravitazionale
m_I = " inerziale ↳ 2° LN

] È un dato sperimentale che $\boxed{m_I = m_G}$ massa pesata su bilancia

NON è un'affermazione ovvia che $m_I = m_G$ → Einstein parte da lì per formulare legge della relatività generale

Consideriamo $m_1 = M_{terra}$, $r \lll R_T$



$$\overline{F_G} = -G \frac{M_T m_c}{R_T^2} \bar{u}_r$$

$$= -m_c \left(\frac{G M_T}{R_T^2} \right) \bar{u}_r$$

$$= -m_c \left(\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \frac{N m^2}{kg^2} \cdot kg}{(6{,}37 \cdot 10^6)^2 m^2} \right) \bar{u}_r$$

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N m^2}{kg^2}$
$R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m
$M_T = 5{,}98 \; 10^{24}$ kg

F → $\frac{1}{r^2}$ interazione diventa sempre + piccola man mano che ci allontaniamo

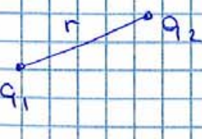
$$= -m_c \frac{6{,}26}{6{,}37} \cdot 10^1 = -m_c \, 0{,}98 \cdot 10 = -9{,}8 \, m_c \frac{N}{kg} = \boxed{9{,}8 \frac{m}{s^2}}$$

g

acc. di gravità, è un'approssimazione

FORZA ELETTROSTATICA

$$\boxed{\overline{F_{es}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \bar{u}_r}$$ Forza di Coulomb



relativamente simile a forza gravitazionale

$\boxed{\varepsilon_0 = 8{,}8 \times 10^{-12} \; C^2/Nm^2}$ → costante dielettrica

$\frac{1}{4\pi\varepsilon} \gg G$ (per unità di carica)

↳ è 10^{36} volte più intensa

le cariche, però, possono essere di 2 tipi > 0 o < 0

- stesso segno $\boxed{q_1 q_2 > 0}$ interazione repulsiva
- segno opposto $\boxed{q_1 q_2 < 0}$ " attrattiva (come interazione gravitaz.)

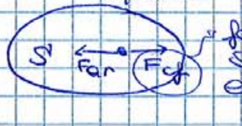
Noi sentiamo di più la f. gravitazionale perché è sempre attrattiva e non è mai compensata/equilibrata

La forza elettrostatica è poco sentita perché, nella generalità, i corpi sono neutri/le cariche sono equilibrate

per S' : a' = 0   vede il corpo su piattaforma fermo $m\vec{a}' = 0$
MA percepisce che sul corpo agisce una forza che tende a farlo schizzare fuori, bilanciata da F di attrito

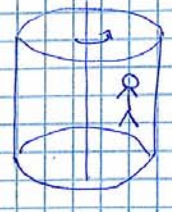
$m\vec{a}' = 0 = \underset{m a_{cp}}{\underset{\parallel}{\vec{F}_{ar}}} + \vec{F}_{in} \Rightarrow \vec{F}_{in} = - m a'_{cp}$
= F centrifuga

Equilibrio tra 2 forze

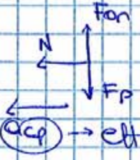


forza non spiegabile con effetto centrifugo

ES



S:
Sul corpo agiscono



$|F_{ar}| \propto |N|$
Far bilancia Fp
→ effetto delle forze

S'

il corpo è in equilibrio tra N e Fcf (non spiegabile)

CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO (importantissimo)

- $\vec{P} = m\vec{v}$ $\bar{P}$ cost per particella libera 1^ LN
- $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ 2^ LN

sistema composto da 2 particelle di masse m_1 ed m_2 con velocità v_1 e v_2 che interagiscono tra loro

$P_1 = m_1 v_1$ $P_2 = m_2 v_2$ Supponiamo che la sola forza che agisce su m_1 sia dovuta solo a m_2. Idem per m_2
$\vec{F}_{21}$

3^ LN: dice che su m_2 agisce una forza dovuta a m_1: $\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$
va da 1 a 2   va da 2 a 1

2^ LN $\begin{cases} \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{P}_1}{dt} \\ \vec{F}_{12} = \frac{d\vec{P}_2}{dt} \end{cases}$

Se sommo 1) e 2)

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) = \vec{F}_{21} + \overset{-\vec{F}_{21}}{\overset{\parallel}{\vec{F}_{12}}} = 0$$

⟹ in questo caso $P_1 + P_2$ è una costante del moto $= \vec{P}$

$\vec{P}$ = quantità di moto totale del sistema
ipotizzato che agisca solo la forza di mutua interazione tra le 2 masse
Le forze che agiscono tra i costituenti del sistema si chiamano forze interne (agiscono sempre in coppia)

Questo tipo di sistema su cui agiscono solo forze interne, si chiama SISTEMA ISOLATO

Per un SISTEMA ISOLATO la quantità di moto totale $P_1 + P_2 + P_3 + \dots P_n$ è conservata (n = numero di particelle che compongono sistema)
costante → $\frac{d}{dt}(P_1 + \dots P_n) = 0$

FORZE ESTERNE: forze non dovute a mutue interazioni tra i costituenti del sistema
dipende da cosa intendiamo per sistema!

ES mela che cade a terra

Sistema terra + mela: agisce f. gravitazionale (data dalla mutua interazione tra i 2: f. gravitazionale "creata" da entrambi i corpi, in verso opposto

$F_{MT} = -F_{TM}$

$\vec{F}_{TM} = -G \frac{M_T m_M}{r_{TM}} \vec{u}_{TM} = m_M \vec{a}_M$

$F_{MT} = -G \frac{m_M M_T}{r_{TM}} \vec{u}_{MT} = M_T \vec{a}_T$

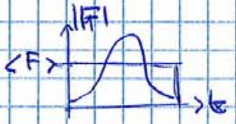
PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE della $\vec{p}$ totale per sistema isolato è stato verificato sperimentalmente in <u>tutti</u> i processi fisici
↳ utile per calcoli

TEOREMA DELL' IMPULSO

Impulso $\boxed{\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt}$

↳ è interessante studiarlo se la forza è dipendente dal tempo e non dalla posizione oppure se l'interazione tra 2 particelle avviene in un intervallo di tempo infinitesimale.

$$\frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt}{\underset{\overset{\parallel}{\Delta t}}{t_2 - t_1}} = \text{valor medio dell'impulso} = \langle \vec{F} \rangle_{t_1 t_2} \Delta t$$



$$\vec{I} = \vec{P}(t_2) - \vec{P}(t_1) = \Delta P$$

$$\boxed{\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{P}}{\cancel{dt}} \cancel{dt} = \vec{P}\,(t_2 - t_1)} \quad \boxed{/\!/ \int_{\vec{P}(t_1)}^{\vec{P}(t_2)} dP}$$

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dP_x}{dt}\, dt = \int_{P_x(t_1)}^{P_x(t_2)} dP_x = P_x(t_2) - P_x(t_1)$$

cambio variabili $t \to P_x(t)$

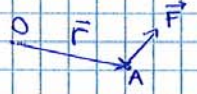
$P_x = P_x(t) \qquad dP_x = \frac{dP_x}{dt}\, dt$

$$\underbrace{\Delta P}_{\text{impulso}} = \underbrace{\bar{F} \Delta t}_{\text{impulso}} \qquad \bar{F} = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

↳ uso teorema media integrale

MONENTO DI UNA FORZA (<u>solo</u> vettori (forze) applicati)

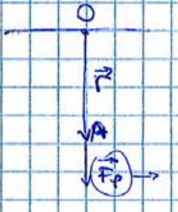
$M_0(\vec{V}) = \vec{OA} \times \vec{V}$



$M_0(\vec{F}) = \boxed{\vec{\tau}_0 = \vec{r} \times \vec{F}}$

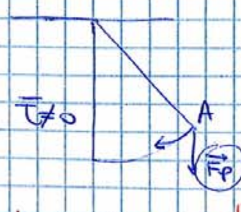
momento: dice qual è la capacità di F di far ruotare il corpo attorno ad O

ⓔⓢ pendolo



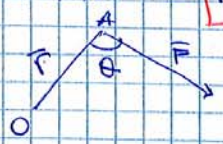
↗ è nella stessa direzione di $\bar{r} = \bar{OA}$

$\vec{F_p}$ → F_p non è efficace × far ruotare A



$\vec{F_p}$ → ha la capacità di far ruotare il corpo

$|\tau| = r \times F = \boxed{r |F| \operatorname{sen}\theta} \qquad [\tau] = [t][F] = [LMLt^{-2}] = [L^2 M t^{-2}]$



se r e F giacciono sui x, y

$\bar{r} = x\, \bar{u}_x + y\, \bar{u}_y$

$\bar{F} = F_x\, \bar{u}_x + F_y\, \bar{u}_y$

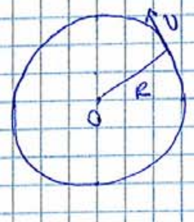
$$\tau = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ x & y & \overset{0}{\cancel{z}} \\ F_x & F_y & \overset{0}{\cancel{F_z}} \end{vmatrix} \quad \text{regola del determinante} \longrightarrow \boxed{\tau = (x F_y - y F_x)\, \bar{u}_z}$$

Forza centrale produce acc. radiale $\vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{a} = a_r \vec{u}_r$

$a_r = \left[\frac{d^2r}{dt} - \underbrace{r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}_{\text{acc. centripeta} \,=\, \omega^2 r\, u_N}\right] u_r$ in coordinate polari,

Forze centripete, producono acc. centripeta, sono centrali.



moto circolare uniforme ω = cost r = cost m istesso

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

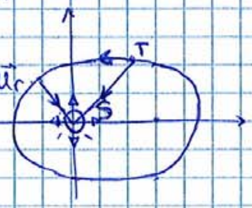
$L = m[\vec{r} \times \underset{\parallel}{(\vec{\omega} \times \vec{r})}]$ $\vec{r} \times \vec{p}^{\,= m\vec{v}}$

$= mR^2\omega\,(+\vec{u}_z)$

- ES: moto sotto azione di interazione gravitazionale

se prendiamo come polo la posizione di uno dei due corpi

$F_{TS} = -G\frac{M_T M_S}{r^2} u_r$

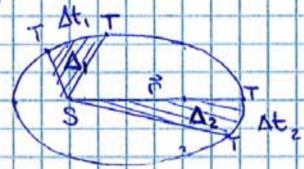


Il Sole occupa uno dei due fuochi della traiettoria ellittica della terra

$M = r \times P = m\, r \times v$

Il momento angolare è costante, il vettore TS punta sempre verso il Sole

Altra proprietà importante: 2ª legge di Keplero legata a mom. angolare costante



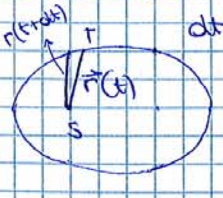
[Il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali

La velocità areolare della terra intorno al sole è costante

$\Delta_1 = \Delta_2$ $\Delta t_1 = \Delta t_2$

V. areolare ≡ area spazzata dal raggio vettore $\vec{r}$ nell'unità di tempo

Dimostrazione



dt piccolo

spazio percorso in dt con velocità $\vec{v}$

$d\vec{r} = \vec{v}dt$ $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

dA = area spazzata da $\vec{r}$ in dt

$dA = \frac{1}{2}|r \times dr| = \frac{1}{2}|r \times \vec{v}|\,dt$ → ci dà area compresa tra due vettori

$v_A = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2m}|\vec{L}|$ → è costante

$\vec{L} \to m\vec{r} \times \vec{v}$

V areolare ≡ area spazzata in dt
NON spazio percorso in dt, occhio!

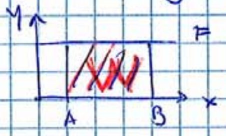
$\vec{L}$ è costante per 3° caso
$\vec{L}$ è una forza centrale
// a $\vec{r}$

le forze di attuto si oppongono al moto ⇒ producono $W<0$
ECCEZIONE : attrito statico NON produce spostamento ⇒ $W=0$

c) Analisi dimensionale $[W] = [F][L] = [ML^2t^{-2}]$
Nel SI si misura in Joule ⇒ $1J = 1 N \cdot m$

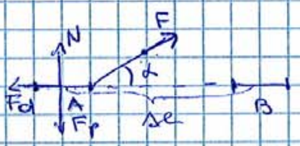
d) $\vec{F}$ = risultante di più forze che agiscono su un certo corpo $= \sum_i \vec{F}_i$
$W = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta l = \sum_i W_i$ somma dei lavori corrispondenti alle singole F

e) in un grafico $F(x)$



W è l'area sottesa da F tra A e B

(ES) Bambino tira una slitta con una fune ideale, inclinata di un angolo α dal piano orizzontale
Tra slitta e piano c'è attrito radente $\mu_d \neq 0$
Calcolare il lavoro fatto dal bambino per spostare la slitta di $\Delta l\, u_x$ se la slitta si muove di moto uniforme
v_{slitta} = costante



$W = \vec{F}\Delta l = F \Delta l \cdot \cos\alpha$

$N + F_p + F + F_d = 0$ a è nulla perché v è costante

fune ideale = è come se F fosse applicata sulla slitta

devo trovare $\vec{F}$: $\begin{cases} F\,\text{sen}\alpha + F_p + \vec{N} = 0 \\ F\cos\alpha - F_d = 0 \end{cases}$ $F_p, N \perp \Delta l$

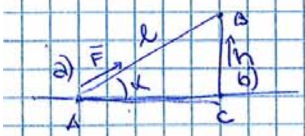
- $F_d = -\mu_d N u_x = -\mu_d(mg - F\,\text{sen}\alpha)\bar{u}_x$
- $F_p = -mg\, u_y$
- $N = N u_y \Rightarrow N = (mg - F\,\text{sen}\alpha)\bar{u}_y$

$F = \dfrac{\mu_d N}{\cos\alpha} =$

$F = \dfrac{\mu_d mg}{\cos\alpha + \mu_d\,\text{sen}\alpha}$

$W = F \cdot \Delta l \cos\alpha = \dfrac{\mu_d\, mg}{1 + \mu_d \tan\alpha} \cdot \Delta l$

Un blocco di massa m deve essere sollevato da terra a altezza BC "h" con v = cost



$h = l \cdot \text{sen}\alpha$ Calcolare W di F (costante)
a) per spostarlo lungo un piano inclinato
b) " " " BC
supponiamo non ci siano attriti

a) $L = \vec{F} \cdot \Delta l =$
2LN $F = mg\,\text{sen}\alpha$ $W = L = mg\,\text{sen}\alpha \cdot l$
b) 2LN $F = mg$ $W = mgh = mgl\,\text{sen}\alpha$
W in a) è = a W in b)
Suppore ora $\mu_d \neq 0$ lungo l

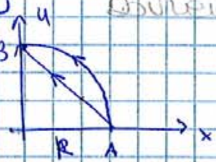
a) $F - mg\,\text{sen}\alpha - \mu_d N = 0$
$N = mg\cos\alpha$
$F = mg(\text{sen}\alpha + \mu_d\cos\alpha)$
$W = mg(\text{sen}\alpha + \mu_d\cos\alpha)l$

1 11 21 1211 111221

in funzione dello spostamento! Dovrei usare $x^2+y^2=R^2$

ES ① P ∈ a circonferenza

$$\begin{cases} x(\theta) = R\cos\theta \\ y(\theta) = R\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$



$A(R,0) \quad B(0,R)$

$$\underbrace{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}_{\text{descritto } \overset{\frown}{AB}}$$

② retta A → B

$y(x) = R - x$

$$\begin{cases} y(s) = s \\ x(s) = -s + R \end{cases} \qquad 0 \leq s \leq R \;\; \hookrightarrow A \to B$$

DEVO CONOSCERE L'EQ PARAMETRICA DELLA TRAIETTORIA

se conosco i punti della traiettoria (ovvero la curva)
$P(s)$, $s_i \leq s \leq s_f$ $\quad \mathcal{C}(A \to B)$

$$P \in \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases} \Longrightarrow d\vec{r} \begin{cases} dx = \frac{dx}{ds}\,ds \\ dy = \frac{dy}{ds}\,ds \end{cases}$$

$$\boxed{W_{\mathcal{C}(A\to B)} = \int_{\mathcal{C}(A\to B)} \left[\vec{F}(P(s)) \cdot d\vec{r}(s)\right]}$$

F calcolato lungo traiettoria s — $d\vec{r}$ calcolato lungo la traiettoria s ⟶ punti P(s) caratterizzati dalla traiettoria

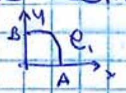
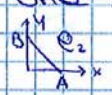
$\vec{F}(\vec{r}) = F_x(x,y)\,\bar{u}_x + F_y(x,y)\,\bar{u}_y$

$d\vec{r} = dx\,\bar{u}_x + dy\,\bar{u}_y$

$d\vec{r}(s) = \frac{dx}{ds}\,ds\,\bar{u}_x + \frac{dy}{ds}\,ds\,\bar{u}_y$ spostamento, NON generico, lungo s

$\vec{F}(\vec{r}(s)) = F_x\left[x(s), y(s)\right]\vec{u}_x + F_y\left[x(s), y(s)\right]\vec{u}_y$ F dipende da x e y in dipendenza da s

$$\boxed{\begin{aligned} W &= \int_{\mathcal{C}(A\to B)} F_x(s)\,dx(s) + F_y(s)\,dy(s) \\ &= \int_{s_i}^{s_f} \left(F_x(s)\frac{dx}{ds} + F_y(s)\frac{dy}{ds}\right) ds \end{aligned}}$$

ES Calcolare il lavoro compiuto da una forza $\vec{F} = (-ky, kx)$ lungo le curve $\mathcal{C}_1(A,B)$  e $\mathcal{C}_2(AB)$ 

① $\vec{F}(\vec{r}) = -ky\,\bar{u}_x + kx\,\bar{u}_y$

$\left.\begin{aligned} x &= R\cos\theta \\ y &= R\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}\right\}$ curva parametrizzata

$\bar{F}(\bar{r}(\theta)) = -kR\,\mathrm{sen}\,\theta\,\bar{u}_x + kR\cos\theta\,\bar{u}_y$

$$d\vec{r}(\theta) = \begin{cases} dx = \frac{dx}{d\theta}\,d\theta = -R\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta \\ dy = \frac{dy}{d\theta}\,d\theta = R\cos\theta\,d\theta \end{cases}$$

$F(y(s)) = -ks \qquad \frac{dx}{ds} = -k$

$F(x(s)) = k(R-s) \qquad \frac{dy}{ds} = -k$

$\bar{F}(\bar{r}(\theta))\,d\bar{r}(\theta) = -kR\,\mathrm{sen}\,\theta\,(-R\,\mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta + kR\cos\theta\,(R\cos\theta)\,d\theta$

$$W_{\mathcal{C}(AB)} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} kR^2(\underbrace{\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta}_{1})\,d\theta = kR^2\,\frac{\pi}{2}$$

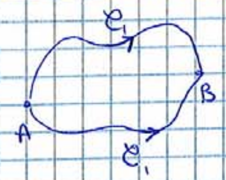
$\left[-ks(-k) + k(R-s)(-k)\right]$

$\left[k^2 s - k^2(R-s)\right]ds$

$k^2 s - k^2 R + k^2 s \quad k^2 s(2 - k^2 R)$

Calcolo $\mathcal{C}_2$ → W lungo $\mathcal{C}_2 \neq \mathcal{C}_1 = kR^2$

lavoro = semplificazione



$W_{e_1} \neq W_{e_2}$

TEOREMA DELL' ENERGIA CINETICA (DELLE FORZE VIVE)

E cinetica

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}} \qquad [E_k] = [kg][M^2 \cdot t^{-2}] = [J]$$

$W_{e(AB)}$ compiuto dalla risultante delle forze sul sistema soddisfa

$$W_{e(A,B)} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

Dim
$$\begin{cases} \vec{F} = \Sigma \vec{F}_i = m\vec{a} = m\frac{d\bar{v}}{dt} \\ d\vec{r} = \vec{v}\, dt \end{cases}$$

$$W_{e(A,B)} = \int_e \vec{F} d\vec{r} = \int_{e_1} m \frac{dv}{dt} \cdot v\, dt = \int \frac{1}{2} m \frac{d}{dt}(v \cdot v)\, dt$$

$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \bar{v} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\bar{v} \cdot \bar{v})$

$$= \frac{1}{2} m \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt}(v \cdot v)\, dt$$

$\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$ velocità scalare al quadrato

$$= \frac{1}{2} m \int_{t_A}^{t_B} \frac{dv^2}{dt}\, dt$$

Cambio variabili di integrazione $t \to v^2(t)$

$dv^2 = \frac{dv^2}{dt} dt$

$$= \frac{1}{2} m \int_{v_A^2}^{v_B^2} dv^2 =$$

$\frac{d}{dt}(\bar{v} \cdot \bar{v}) = \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \frac{d\bar{v}}{dt} = 2 \bar{v} \cdot \frac{d\bar{v}}{dt}$

$$\boxed{W_{e(A,B)} = \underbrace{\frac{1}{2} m v_B^2}_{E_{kB}} - \underbrace{\frac{1}{2} m v_A^2}_{E_{kA}}}$$

NB: per moto circolare uniforme $\boxed{a_T = 0} = \frac{dv}{dt} \Rightarrow E_k$ costante

T ha direzione ⊥ a direzione moto $\longrightarrow \boxed{W \overset{\Downarrow}{=} 0}$

ES Calcolare il lavoro su una palla da baseball di massa m. Se viene lanciata con velocità v

$$W = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$v_i = 0$ (velocità prima del lancio) $\qquad W = \frac{1}{2} m v^2$

$v_f = v$ (" subito dopo lancio)

NB 1) Se $\Delta E_k > 0 \Rightarrow W > 0$ la particella ha aumentato la velocità, lavoro produttivo

2) Se $\Delta E_k < 0 \Rightarrow W < 0$ lavoro resistente

NB Un corpo ha immagazzinato una certa quantità di energia. Questo teorema insegna che ogni corpo in movimento possiede, accumulata nel moto, una certa quantità di energia

NB ΔE_k è uguale al lavoro complessivo fatto dalla risultante delle forze sul sistema

$\boxed{E_k = \frac{p^2}{2m}}$ (p = quantità di moto totale del sistema)

NB Il teorema dell E_k vale per tutti i S.rif anche non inerziali, perché tra le forze agenti si includono anche le forze apparenti

FORZE CONSERVATIVE

Forze per cui il lavoro non dipende dal cammino percorso ma solo dagli estremi

$$\boxed{W_{e(A,B)}} = \int_{e(A,B)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \boxed{\vec{F}\cdot \int_{e(AB)} d\vec{r}}$$

F costanti!

$\vec{F} = F\vec{u}_x$

$\vec{F}\cdot d\vec{r} = F\,dx$

$$W = F(x_B - x_A) = Fx_B - Fx_A = \vec{F}\vec{r}_B - \vec{F}\vec{r}_A$$

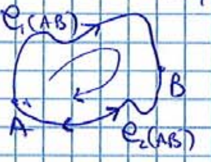
- per forza peso $W_{e(AB)}(\vec{F}_P) = \int -mg\vec{u}_y\,(dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y) = -mg\int_{y_A}^{y_B} dy = \boxed{mg(y_A - y_B)}$

  $F_P = -mg\vec{u}_y$

- per forza elastica $W_{e(x_1,x_2)} = \boxed{\frac{1}{2}k\,(x_1 - l_0)^2 - \frac{1}{2}k\,(x_2 - l_0)^2}$
- per il pendolo semplice $W_{e(\theta_1,\theta_2)} = \boxed{mgl(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)}$

Tutte e 3 dipendono dagli estremi! → F conservative

Chiamiamo forze conservative quelle $\vec{F}$ tali che il lavoro compiuto da F per spostare un corpo da A a B dipende solo dalla posizione A, B e NON dal cammino



$$W_{e_1(AB)} = W_{e_2(A,B)}$$

$$W_{e_1(AB)} = -W_{e_2(BA)} \Longrightarrow W_{e(AA)} = e_1(AB) + e_2(BA) = 0$$

$$\boxed{W_{e_1(AB)} + W_{e_2(BA)} = 0}$$

$$\boxed{W_e = \oint \vec{F}\,d\vec{r} = 0}$$ CIRCUITAZIONE

lavoro lungo un cammino chiuso

Forze NON conservative = Forze dissipative

- Forze che dipendono da velocità (→ sempre in direzione del cammino percorso)

  → Forze d'attrito $F_{viscoso} = -k\eta v$

  F_d è sempre nella DIREZIONE del moto, (quindi dipende da velocità)
  ↓
  si oppone

  $F_d \propto \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

- $F(x,y) = (F_x, F_y)$

$$\boxed{\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \Longleftrightarrow \text{è conservativa}}$$

$$\left\{ \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x},\ \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \right\}$$

FORZE CENTRALI

Sono conservative, dipendono solo dal raggio in direzione radiale

$\vec{F} = F(r)\vec{u_r}$

$W = \int_{C(AB)} F(r)\vec{u_r} \cdot d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} F(r)\, d\vec{r}$

$dr = dr u_r + r d\theta u_\theta + r \operatorname{sen}\theta\, d\varphi\, u_\varphi$ coord. polari sferiche

$\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\vec{u_r}$ $K = G m m_2$

$= -\frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0}$

$W = \frac{K}{r}\Big|_A^B = \frac{K}{r_B} - \frac{K}{r_A} \implies E_p(r) = -\frac{K}{r} + C$

se $E_p(r \to \infty) = 0 \implies C = 0$

utile x velocità di fuga:

A: $r_A = R_{TERRA}$ $v_A = ?$

velocità di fuga: v con cui deve essere lanciato x sfuggire dall'attrazione terrestre

$\implies$ B: $v_B = 0$ $r_B = \infty$ velocità nulla a distanza ∞ da terra

$E_p = -G\frac{m M_T}{r}$; $E_K = \frac{m}{2}v^2$

$E = -\frac{\cancel{m} M_T}{R_T}G + \frac{1}{2}\cancel{m}v_A^2 = -\underbrace{\left(G\frac{m M_T}{\infty}\right)}_{0} + 0$

$v_A = \sqrt{2\frac{M_T G}{R_T}}$

Se sul sistema agiscono forze conservative e NON conservative:

$\vec{F_C} = \sum_i \vec{F}_{i\,cons}$ $F_{nc} = \sum_\alpha F_{\alpha\, ncons}$

$W_e = \int_e (F_c \cdot d\vec{r}) + \int_e (F_{nc} \cdot d\vec{r})$ $W_e = W_e^c + W_e^{n.c} =$

$W_e^c = E_p^c(\vec{r_i}) - E_p^c(r_f) = E_{Kf} - E_{Ki}$

$\implies W_e = E_p^c(i) - E_p^c(f) + W^{nc} = E_{Kf} - E_{Ki}$

$W_e^{nc} = \underbrace{[E_{Kf} + E_p(f)]}_{\substack{E_{mec}\ totale \\ nello\ stato\ finale}} - \underbrace{[E_{Ki} + E_p(i)]}_{\substack{E_{mec}\ totale\ iniziale \\ nello\ stato}}$

Nella maggioranza dei casi è negativo → F dissipative!

RIASSUMENDO

- X sistemi sottoposti a forze generiche vale: $W_{e(A,B)} = E_{KB} - E_{KA}$ (Dim 2LN) fotografa l'effetto della forza che che produce il lavoro ⇒ varia $|\vec{v}|$)

a) X forze conservative: $W_{e_1(AB)} = W_{e_2(A-B)}$

$\oint_{e(A-A)} F d\vec{r} = 0$

b) $\exists\, E_p(\vec{r}) : W_{e(AB)} = E_p(\vec{r_A}) - E_p(\vec{r_B})$

Considerando ① e ② ⇒ $\exists\, E_{mec} = E_p + E_K$ costante per forze CONSERVATIVE

NB $\left\{\begin{array}{l}\vec{F} = F_x u_x + F_y u_y + F_z u_z \\ d\vec{r} = dx\, u_x + dy\, u_y + dz\, u_z\end{array}\right\}$

$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dE_p$

$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$; $F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$; $F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$

$\hookrightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$

ⒺⓈ $E_p = \alpha x^2 y$

$\frac{\partial E_p}{\partial x} = 2\alpha x y$ $\quad \frac{\partial E_p}{\partial y} = \alpha x^2$ $\quad \frac{\partial E_p}{\partial z} = 0$ → non dipende da z → varia solo su piano xy

$\Rightarrow F = -2\alpha x y\, \vec{u_x} - \alpha x^2\, \vec{u_y}$

Data Epot posso conoscere forza; attenzione! Epot è uno scalare e F è un vettore ma posso ricavare vettore dalla variazione dello scalare nelle 3 direzioni dello spazio

In coordinate polari

$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u_\theta}$ NON lo dimostra MA dobbiamo ricordarlo per forze centrali

se $E_p(r) \Rightarrow \vec{F}(r, \theta) = F_r \vec{u_r}$ $\Rightarrow$ è centrale, non dipende da θ

$\frac{\partial E_p}{\partial r} = -F_r \neq 0$ $\quad \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0$ $\quad F_\theta = 0$

ⒺⓈ $E_p = -\frac{K}{r}$ $\Rightarrow F = -\frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{u_r}$

$= -\frac{K}{r^2} \vec{u_r}$

Ep potrebbe essere $= -\frac{K}{r} + C$ → la derivata è sempre $= -\frac{K}{r^2}$

↳ è sempre definita a meno di una costante arbitraria

TUTTO ciò ↑ vale <u>SOLO</u> per forze conservative

X forze <u>NON</u> conservative

$W_{e(AB)}(F_{nc}) = E_{JB} - E_{JA}$ dimostrata altra volta

---

le interazioni fondamentali sono forze conservative!

⇒ concetto di F non conservative corrisponde all'impossibilità di seguire uno per uno i moti delle particelle elementari che compongono il sistema → moti complessi attorno alle particelle

↓

Indicano che a livello macroscopico l'energia meccanica può essere convertita in altre forme di energia → ad es termica

Conoscere le costanti del moto rende più semplice ricavare la traiettoria di una particella:

a) particella libera ⇒ $\bar{p}$ = costante, E costante $\quad E = E_K = \frac{p^2}{2m}$

$\vec{p} = m\vec{v} = m v \vec{u}$

$\frac{dx}{dt} = v = \frac{p}{m} \rightarrow x(t) = \frac{p}{m} t + x(0)$

Torniamo alla relazione $F = -\vec{\nabla} E_p$ x forze conservative:

$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ $\quad F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$ $\quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$ $\quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial E_p}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial E_p}{\partial y} = -\frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}}$$

altra volta

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

Verifichiamo per $E_p = \alpha x^2 y$

$\frac{\partial E_{px}}{\partial x} = -F_x = -2xy\alpha$ $\qquad F_y = -\alpha x^2$

$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -2\alpha x$ $\qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\alpha \cdot 2 \cdot x$

Se il lavoro dipende dal cammino → Forza NON conservativa

per $F = (-ky, kx)$

$F_x = -ky \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = -k$

$\neq$

$F_y = kx \Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} = k$

MOTO IN 2D SOTTO AZIONE FORZE CENTRALI ⇒ si conserva E, L

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) \\ L = mr^2\frac{d\theta}{dt} \end{cases}$$ costanti nel moto

$\hookrightarrow v = \omega r \quad L = rp$

$\bar{r} = r\bar{u}_r$

$\frac{du_r}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = u_\theta \cdot \frac{d\theta}{dt}$

$$v = \frac{dr}{dt}\bar{u}_r + r\frac{d\bar{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\bar{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta$$

$$v^2 = v \cdot v = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$= \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \cancel{r^2}\frac{L^2}{m^2 r^{\cancel{4}2}} \qquad L = mr^2\frac{d\theta}{dt} \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$$

energia cinetica di rotazione, contributo che ha la particella x ruotare = ENERGIA POTENZIALE centrifuga

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \underbrace{\frac{L}{2mr^2} + E_p}_{E_p \text{ efficace}}$$

perché consideriamo come un termine di E potenziale, la Forza è

$$F = -\frac{dE_{pcf}}{\partial r}u_r = +\frac{L}{mr^3}\vec{u_r} \text{ centrif}$$

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + E_{p\,eff}(r)$$

NON corrisponde ad una forza che agisce sul sistema, ma ad una forza apparente corrispondente a sistema in rotazione

Infatti E_{pcf} è un contributo in E_k, è E_k di rotazione

$$E_p(r) + E_{pcf}(r) = E_p^{eff}(r)$$

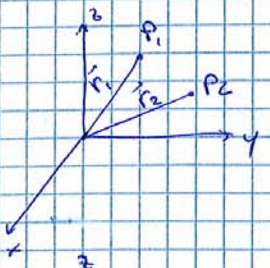
$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + E_p^{eff}(r)$$

DINAMICA DEI SISTEMI DI PARTICELLE

L'evoluzione di un sistema di particelle si può sempre decomporre nel moto del centro di massa e nel moto relativo tra i costituenti del sistema.

CENTRO DI MASSA

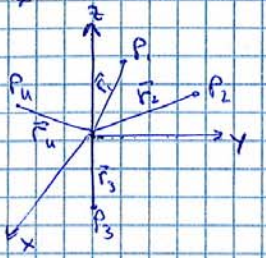
Cons. un sistema di 2 particelle



$(m_1 \vec{r}_1)$ $(m_2 \vec{r}_2)$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r} + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$$ posizione del centro di massa

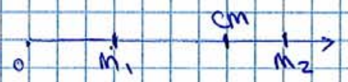
Per un sistema composto da tante particelle $(m_i \vec{r}_i)$; $i = 1 \dots n$



$$\boxed{r_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + \dots m_n\vec{r}_n}{m_1 + \dots m_n}}$$

$$\boxed{M = \sum_{i=1}^{n} m_i \rightarrow \vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}(m_i\vec{r}_i)}$$

ES

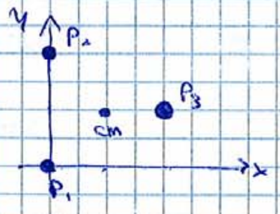


$\begin{cases} m_1 = 1\,kg \\ x_1 = 1\,m \end{cases}$ $\begin{cases} m_2 = 2\,kg \\ x_2 = 3\,m \end{cases}$

$$r_{cm} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1+m_2} = \frac{1+6}{3} = \frac{7}{3}\,\frac{\cancel{kg}\cdot m}{\cancel{kg}} = 2{,}33\,m$$

il cm è spostato più vicino alla massa più grande

ES 3 particelle nel piano



$\begin{cases} m_1 = 1{,}5\,kg \\ r_1 = (0,0)\,m \end{cases}$ $\begin{cases} m_2 = 1{,}5\,kg \\ r_2 = (0,2)\,m \end{cases}$ $\begin{cases} m_3 = 3\,kg \\ r_3 = (2,1)\,m \end{cases}$

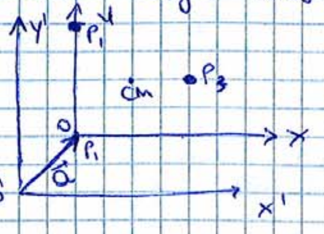
$$M = m_1 + m_2 + m_3 = 6\,kg$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{6kg}\cdot\left[1{,}5kg\cdot(0,0)m + 1{,}5kg(0,2)m + 3kg(2,1)m\right]$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{\cancel{6kg}}\left[(\cancel{6},\cancel{6})\cancel{kg}\cdot m\right] = (1,1)\,m$$

CENTRO DI MASSA

Dato un $\overset{S}{\text{SRf}}$ consideriamo un altro $\overset{S'}{\text{Srf.}}$ traslato di un certo vettore $\vec{a}$ rispetto a S



$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}}$$

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_i + \vec{a} \quad \forall i = 1 \dots n$$

$$\vec{r}'_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{r}_i + \vec{a})$$

$$\vec{r}'_{cm} = \vec{r}_{cm} + \frac{1}{\cancel{M}}\overbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i}^{\cancel{M}}\vec{a} = \boxed{\vec{r}_{cm} + \vec{a}}$$ la posizione di ogni punto risulterà traslata di $\vec{a}$

$$|\vec{r}'_i - \vec{r}'_{cm}| = |r_i + \cancel{\vec{a}} - (r_{cm} + \cancel{\vec{a}})| = |\vec{r}_i - \vec{r}_{cm}|$$ la posizione delle particelle dal cm NON dipende dal SRf!

Moto del CM x sistema (m_i, r_i) $i = 1 \dots n$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i = \boxed{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \frac{\vec{P}}{M}}$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i = \boxed{M\vec{v}_{cm}}$$

Il sistema di particelle si muove con la velocità del centro di massa

Sistema di riferimento del CM!
ha origine in r_{cm} ⇒ in questo SRf il CM è in quiete ⇒ $\boxed{\vec{P}=0}$
E' un SRf I SOLO SE è ISOLATO, in caso contrario non è inerziale

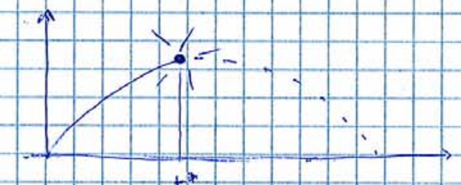
Su un sistema agiscono forze esterne $\vec{F}^{ext}$ e interne $\vec{F}^{int}_{ij}$

$$F^{int}_{ij} = -F^{int}_{ji} \longrightarrow \boxed{\sum_{part} F_i^{int} = 0} \qquad \boxed{F^{ext} = \sum_i F_i^{ext}}$$

che agisce da i a j
" " j a i

$$\boxed{F^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}} = M\vec{a}_{cm}$$ legge Newton applicata a centro massa

ES



bomba che esplode.
fino a t* il CM coincide con bomba, dopo il cm continua a muoversi seguendo il suo moto sotto l'unica F^{ext} del sistema $(F_p = mg)$

NB la causa dell'esplosione è da ricercare in una F^{int} → il cm non ne risente

MOTO RELATIVO DEI COSTITUENTI

Consideriamo un sistema isolato di 2 particelle (m_1, r_1) $(m_2\ r_2)$

- Su m_1: $\vec{F}_{12} = m_1 \frac{dv}{dt}$
- Su m_2: $\vec{F}_{21} = m_2 \frac{dv}{dt}$

$\boxed{\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}}$ x 3^ LN → coppia di azione e reazione

Vogliamo studiare moto relativo della particella 1 rispetto a particella 2

POSIZIONE RELATIVA: posizione della $part_2$ rispetto a $part_1$

- $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$
- $\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$
- $\vec{a}_{12} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\overset{= -F_{12}}{\vec{F}_{21}}}{m_2} = \boxed{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12} \qquad \overset{\text{acc. relativa}}{\vec{a}_{12}} = \frac{\vec{F}_{12}}{\mu}}$

Def μ = massa ridotta del sistema

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \qquad \boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$$

- Se $m_1 = m_2 = m$ ⇒ $\mu = \frac{m}{2}$
- Se $m_1 >>>> m_2$ → $\mu \simeq \frac{m_1 m_2}{m_1} \simeq m_2$ è circa = alla massa della particella più leggera
  m_1 → m_2 trascurabile

$$\boxed{\vec{F}_{12} = \mu\vec{a}_{12}}$$

$\vec{p}_1' = \underbrace{\frac{m_1 m_2}{M}}_{\mu} \cdot \overset{\vec{v}_1}{\vec{v}_{12}} = \mu \vec{v}_{12}$ → v. relativa delle 2 particelle

In questo SRif $\boxed{\vec{p}_1' = -\vec{p}_2'}$

$\vec{p}_2' = -\frac{m_2 m_1}{M}\overset{\vec{v}_2}{\vec{v}_{12}} = -\mu \vec{v}_{12}$

$\vec{P} = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = 0$

perché il cm è fermo in questo SRif

$\boxed{F_{12}^{int} = Ma = \mu \vec{a}_{12} = \frac{d\vec{p}_1'}{dt}}$

In generale NON è un sistema di rif inerziale

Sulla particella i-esima agirà una $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}$

$\sum_i \vec{F}_i^{int} = 0 \quad \sum_i F^{ext} = Ma_{cm}$

$\vec{F}_i' = \vec{F}_i - M\vec{a}_{cm}$ ↗ su particella

$\sum F_i = \underbrace{\sum_i F_i^{int}}_{0} + \sum_i F_i^{ext} - M\vec{a}_{cm}$

$= M\vec{a}_{cm} - \underbrace{M\vec{a}_{cm}}_{\text{F inerziali apparenti}} = 0$

Se includo F inerziali capisco che non è un SRif I

E_k^{int} nel SRf del cm

$E_k^{int} = \frac{1}{2} m(v_1')^2 + \frac{1}{2} m(v_2')^2$ $\quad v_1'$ e v_2' velocità nel SRf del cm

$|\vec{v}_1'| = \frac{m_2}{M} v_{12} = \frac{m_2}{M} \frac{|\vec{p}_1'|}{\mu} = \frac{\cancel{m_2}\,\cancel{M}}{\cancel{M}\,\cancel{m_2}\, m_1} |\vec{p}_1'| = \frac{|\vec{p}_1'|}{m_1}$

$|\vec{v}_2'| = \frac{|\vec{p}_2'|}{m_2}$ → tanto p_1' e p_2' sono = in modulo (opposti in verso)

$E_k^{int} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} = \frac{(p_1')^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{(p_1')^2}{2\mu} = \frac{1}{2}\mu(v_{12})^2$

Nel SRI (laboratorio)

$E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_{cm}$

$v_1^2 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = (\vec{v}_1' + \vec{v}_{cm})(\vec{v}_1' + \vec{v}_{cm}) = (v_1')^2 + (v_{cm})^2 + 2\vec{v}_{cm}\cdot\vec{v}_1'$

$v_2^2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = (\vec{v}_2' + \vec{v}_{cm})(\vec{v}_2' + \vec{v}_{cm}) = v_2'^2 + v_{cm}^2 + 2\vec{v}_{cm}\cdot\vec{v}_2'$

$E_k = \frac{1}{2} m_1 (v_1'^2 + v_{cm}^2 + 2\vec{v}_{cm}\cdot\vec{v}_1') + \frac{1}{2} m_2 (v_2'^2 + v_{cm}^2 + 2\vec{v}_{cm}\cdot\vec{v}_2')$

$E_k^{int} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{cm}^2 + \underbrace{(v_1' m_1 + v_2' m_2)}_{(p' + p^2) = 0} \cdot \vec{v}_{cm}$ perché $p' = -p^2$

⇒ Trovo che E_k lab è

$\boxed{E_k = E_k^{int} + \frac{1}{2} M v_{cm}^2} + \cancel{p' v_{cm}} \to 0$

$E_k = E_k$ interna + E_k centro di massa = Teorema di König × l'energia

sistema decomposto nel moto del cm e nel moto interno

X urto anaelastico definisco

$\boxed{Q = Ek^{OUT} - Ek^{in}}$

se $Q > 0$ → urto esotermico → aumento di T del sistema

se $Q < 0$ → " endotermico → ha assorbito energia

Urto tra 2 particelle 1D

$\boxed{p_1^{in} + p_2^{in} = p_1^{out} + p_2^{out}}$ vincolo cinematico 2 incognite 1 eq
1 info da esperimento

Se urto è elastico $\boxed{Ek^{in} = Ek^{out}}$ 2° vincolo cinematico 0 info, ho tutto

Urto tra particelle 2D

$$\begin{cases} p_{1x}^{in} + p_{2x}^{in} = p_{1x}^{out} + p_{2x}^{out} \\ p_{1y}^{in} + p_{2y}^{in} = p_{1y}^{out} + p_{2y}^{out} \end{cases}$$

4 incognite e 2 eq → 2 info dall esperimento

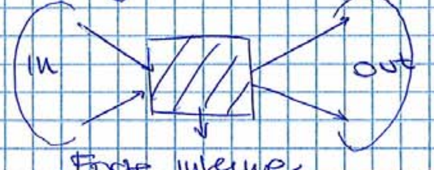
Se ho urto elastico → 3^ eq. cinematica $\boxed{Ek^{in} = Ek^{out}}$ → 1 info da esperim

URTI: si conserva la quantità di moto totale del sistema

⇒ conosco lo stato iniziale del sistema (m_i, v_i^{in})

↓

voglio conoscere lo stato finale $(m_\alpha, v_\alpha^{out})$



Forze interne impulsive

① urti elastici $E_k^{in} = E_k^{out}$ d-1 parametri da determinare
Si conserva E meccanica

② urti anaelastici: $Q = E_k^{out} - E_k^{in} \neq 0$ d parametri da determinare

↳ a) urti completamente anaelastici: dopo l'urto le particelle proseguono appiccicate

↓

problema completamente determinato da vincoli cinematici

VINCOLI CINEMATICI

$\boxed{\sum_i \vec{p}_i^{\,in} = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha^{\,out}}$

se l'urto avviene in d-dimensioni ho 2xd incognite (se ho 2 particelle prima e dopo) p_1^{out}, p_2^{out}

$p^{in} = p^{out}$ d equazioni

se urto elastico, $\boxed{E_k^{in} = E_k^{out}}$ 1 eq in più

$\boxed{d = 1}$ $(m_1, v_1^{in}, v_1^{out}), (m_2, v_2^{in}, v_2^{out})$

urto elastico: $\begin{cases} m_1 v_1^{in} + m_2 v_2^{in} = m_1 v_1^{out} + m_2 v_2^{out} \\ \frac{1}{2} m_1 (v_1^{in})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2^{in})^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1^{out})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2^{out})^2 \end{cases}$

vincoli cinematici
2 eq. e 2 incognite

$$\begin{cases} m_1 v_1^{in} - m_1 v_1^{out} = m_2 v_2^{out} - m_2 v_2^{in} \\ m_1 (v_1^{in})^2 - m_1 (v_1^{out})^2 = m_2 (v_2^{out})^2 - m_2 (v_2^{in})^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_1 (v_1^{in} - v_1^{out}) = m_2 (v_2^{out} - v_2^{in}) \\ m_1 (v_1^{in\,2} - v_1^{out\,2}) = m_2 (v_2^{out\,2} - v_2^{in\,2}) \end{cases}$$

→

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\left[2v_1^{in} v_2^{in} - (v_1^{in})^2 - (v_2^{n})^2\right]$$

Urto completamente anaelastico

$$\boxed{Q = -\frac{1}{2}\mu(v_1-v_2)^2 < 0}$$ endotermico

URTO in 2 dimensioni v_1^{out}, v_2^{out} $(v_{1x}^{out}, v_{1y}^{out}), (v_{2x}^{out}, v_{2y}^{out})$

a) urto completamente anaelastico

$\boxed{\vec{p}^{in} = \vec{p}^{out}}$ sempre

$$m_1\vec{v}_1^{in} + \vec{v}_2^{in} m_2 = m_2\vec{v}_2^{out} + m_1\vec{v}_1^{out}$$

$$\vec{v}_1^{out} = \vec{v}_2^{out} = \vec{v}_{cm}^{out}$$

$$v_{out} = \frac{m_1\vec{v}_1^{in} + m_2\vec{v}_2^{in}}{m_1+m_2}$$

b) urto (parzialmente anaelastico)

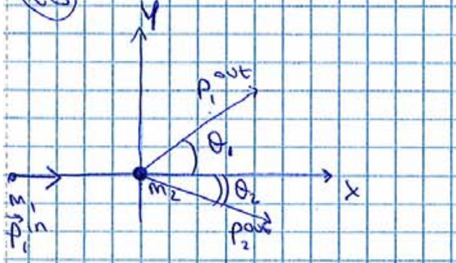
$P = cost \Rightarrow 2\ eq \Rightarrow$ rimangono 2 incognite da determinare con esperimento

c) urto elastico

$$\begin{cases} P = cost \\ E_k^{in} = E_k^{out} \end{cases} \Rightarrow 3\ eq \Rightarrow$$ 1 incognita non fissata da vincoli cinematici

urti comprendono: decadimento radioattivo, esplosioni, urti nucleari

ⓔⓢ



m_2 ferma nell'origine
m_1 in moto con $\vec{p}_1^{in}$ cost

URTO ELASTICO

Conservazione $\vec{p} \rightarrow$
Conservazione $E_k \rightarrow$

$$\begin{cases} p_1^{in} = p_1^{out} + p_2^{out} \\ \frac{(p_1^{in})^2}{2m_1} = \frac{(p_1^{out})^2}{2m_1} + \frac{(p_2^{out})^2}{2m_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x.\ p_1^{in} = |p_1^{out}|\cos\theta_1 + |p_2^{out}|\cos\theta_2 \\ y.\ 0 = |p_1^{out}|\operatorname{sen}\theta_1 + |p_2^{out}|\operatorname{sen}\theta_2 \\ \frac{(p_1^{in})^2}{\cancel{2}m_1} = \frac{(p_1^{out})^2}{\cancel{2}m_1} + \frac{(p_2^{out})^2}{\cancel{2}m_2} \end{cases}$$

θ_1, θ_1 p_1^{out}, p_2^{out} incognite
1 rimane inespressa

Consideriamo caso particolare $m_1 = m_2 = m$

$$\begin{cases} \vec{p}^{in} = \vec{p}_1^{out} + \vec{p}_2^{out} & ① \\ (p_1^{in})^2 = (p_1^{out})^2 + (p_2^{out})^2 & ② \end{cases}$$

quadro di ① $\rightarrow$ $\vec{p}_1^{in}\vec{p}_1^{in} = (\vec{p}_1^{out} + \vec{p}_2^{out})(\vec{p}_1^{out} + \vec{p}_2^{out})$

$$(p_1^{in})^2 = (p_1^{out})^2 + (p_2^{out})^2 + 2\vec{p}_1^{out}\cdot\vec{p}_2^{out}$$

confronto con ② $\Rightarrow$ $\vec{p}_1^{out}\cdot\vec{p}_2^{out} = 0$ $\rightarrow$ $\underset{\neq 0}{|p_1^{out}|}\,\underset{\neq 0}{|p_2^{out}|}\cos(\theta_1+\theta_2) = 0$

$$\Longrightarrow \boxed{\text{se } m_1 = m_2,\ \theta_1+\theta_2 = \frac{\pi}{2}}$$

$\Updownarrow$

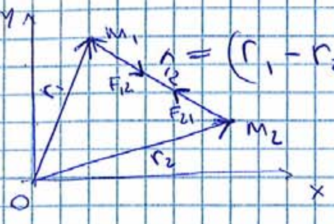
$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$

Su m_1 agiscono $\vec{F}_{12}^{\,int} + \vec{F}_1^{\,ext}$

" m_2 " $\vec{F}_{21}^{\,int} + \vec{F}_2^{\,ext}$

↳ dovute a mutue interazioni tra le 2 particelle $\boxed{\vec{F}_{12}^{\,int} = -\vec{F}_{21}^{\,int} = \vec{F}_{12}}$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\tau}_1 &= \vec{r}_1 \times \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_1^{\,ext}\right)\\ \vec{\tau}_2 &= \vec{r}_2 \times \left(\underset{\vec{F}_{21}}{\underset{\parallel}{-\vec{F}_{12}}} + \vec{F}_2^{\,ext}\right)\end{aligned}}$$



Def $\boxed{\vec{L} \equiv \vec{L}_1 + \vec{L}_2}$ momento angolare tot

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt} = \boxed{\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2}$$

$$= \underbrace{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12}}_{} + \boxed{\vec{r}_1 \times \vec{F}_1^{\,ext} + \vec{r}_2 \vec{F}_2^{\,ext}}$$

$\boxed{0=}$ contributo della F interna $\vec{F}_{12} \parallel \vec{r}_{12}$

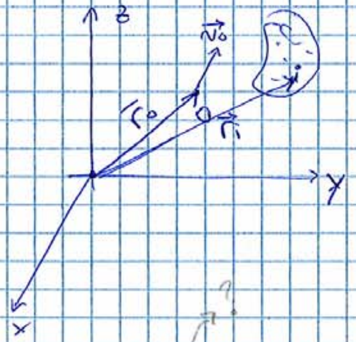
! F int agiscono lungo
• la congiungente di m_1 e m_2

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{\,ext} = \vec{\tau}_1^{\,ext} + \vec{\tau}_2^{\,ext}$$ contribuiscono solo i momenti delle forze esterne

Risultato da generalizzare a sistema di n particelle

Detto $\begin{cases}\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i \\ \vec{\tau}^{\,ext} = \sum_{i=1}^{n} \tau_i^{\,ext}\end{cases} \Longrightarrow \boxed{\tau^{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$

• Se il polo non è in quiete ma è in moto con $\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0}$
e non coincide con origine del SRif



$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^{n} \underline{(\vec{r}_i - \vec{r}_0)} \times m_i \vec{v}_i$$ mom. meccanico rispetto a O

$$\begin{cases}\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}\\ \vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt}\end{cases}$$

$$F_i^{\,ext} + \cancel{\Sigma F_{ij}^{\,int}} = m_i \frac{dv_i}{dt}$$ → non contributo a τ

?

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum_i (\vec{v}_i - \vec{v}_0) \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \underbrace{(\vec{r}_i - \vec{r}_0)}_{r_{i0}} \times m_i \frac{dv_i}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = -\vec{v}_0 \times \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i}_{M\vec{v}_{cm}} + \sum_i \vec{r}_{i0} \times \vec{F}_i^{\,ext}$$

$$= \underline{\underline{-\vec{v}_0 \times M\vec{v}_{cm}}} + \vec{\tau}_0^{\,ext}$$ analisi dimensionale ok

τ_{cm} ↳ componente extra se il polo si muove
se prendo il SRif del polo queste comp. non c'è
→ $V_{polo} = v_0 = 0$

• Teorema di König per $\vec{L}$:

Dato sistema di 2 particelle (m_i, r_i) $i = 1, 2$

SRif centro di massa:

$\boxed{\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}}$ $\quad \vec{r}_{12} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ = in qualsiasi SRif

Per sistemi di particelle

- $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \qquad M = \sum_{i=1}^{n} m_i$
- $\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$
- $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i$

Nel SR del CM

- $r_i' = r_i - r_{cm}$ l'orientazione degli assi è la stessa del sistema laboratorio mentre il centro non è più O ma il CM

Relazioni cinematiche

SR lab

- $\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$
- $\vec{L} = \vec{L}_{cm} + \vec{r}_{cm} \times \vec{P}$
- $E_k = E_k^{int} + E_k^{mc} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2$
- $\vec{\tau}^{ext} = \sum_i \vec{\tau}_i^{ext}$

  $= \tau_{cm}^{ext} + \vec{r}_{cm} \times \vec{F}^{ext}$

SR cm

- $\vec{P}' = 0 \quad (\vec{v}_{cm}' = 0)$
- $\vec{L}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{P}_i$
- $E_k^{int} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(P_i')^2}{2m_i}$
- $\tau_{cm}^{ext} = \sum_{i=1}^{n} \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext})$

Relazioni dinamiche

$$\begin{cases} \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ext} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{ext} & \text{1ª eq. cardinale} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{ext} & \text{2ª eq. cardinale} \end{cases}$$

Se sul sistema agiscono forze conservative

- $U = E_k + E_p^{int} \Longrightarrow W^{ext} = \Delta U \quad [E_{k}f + E_p^{int}f] - [E_k i + E_p^{int} i]$

$\downarrow$ energia propria del sistema, vale solo se le F^{int} sono conservative

se $F^{ext} = 0$ (sist. isolato) $\curvearrowright$ urti

$\hookrightarrow \vec{p}$ costante

- $\tau^{ext} = 0$ (forze centrali esterne) $\vec{r} \times \vec{F}^{ext} = 0$
  - a) $r=0$
  - b) $F=0$
  - c) forze centrali

$\hookrightarrow \vec{L}$ costante del moto

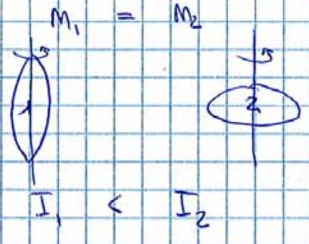
Forze conservative $\Longrightarrow \boxed{E_{mec} = \text{costante}}$

Def $I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2$ MOMENTO DI INERZIA del C.R

$\boxed{L_z = I_z \omega} \longleftrightarrow \vec{p} = m\vec{v}$

A parità di massa

perché la distanza dal centro del C1 è < rispetto alla distanza dal centro di C2



Infinite particelle

$m_i \to dm(\vec{r}) = \rho(x,y,z)\,dV$ elemento infinitesimo di massa che dipende dal punto ($m = \rho V$)

$R_i \to R(\vec{r}) = R(x,y,z)$

$$\boxed{I = \iiint_V R^2(\vec{r})\,\rho(\vec{r})\,dV}$$

↳ integrale esteso al volume

$= \iiint R^2(x,y,z)\,dm(x,y,z)$

$L_z = I_z \omega \to$ COMPONENTE z ! → [Il mom. d'inerzia dipende da asse considerato!

$\vec{L}$ non è legato a ω in modo semplice, in generale

Anche se $\frac{dL}{dt} = \tau$

- Si può dimostrare che ∀ corpo ∃ almeno 3 direzioni mutuamente ortogonali per le quali $\vec{L}$ è ∥ a $\vec{\omega}$ (cioè all'asse di rotazione)

ASSI PRINCIPALI DI INERZIA ↳ è più semplice

↓

passano tutti per il cm del corpo

I corrispondenti momenti di inerzia si chiamano anche momenti principali di inerzia

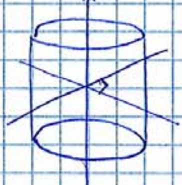
I_1, I_2, I_3

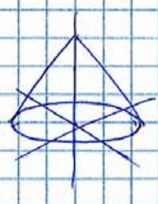
Se l'asse di rotazione è principale $\vec{L} = I\vec{\omega}$?

Per asse rotazione non principale ($\vec{\omega}$ ∥ sempre ad asse rotazione)

$\vec{L}$ NON è ∥ a $\vec{\omega}$

Quando il corpo è omogeneo (ρ costante) e possiede qualche simmetria ⇒ assi principali coincidono con assi di simmetria





X rotazione del C.R attorno a un asse principale

$\begin{cases} \vec{L} = I\vec{\omega} \\ \vec{p} = m\vec{v} \end{cases}$ ($I \Updownarrow m$)

$I\vec{\omega}$ → inerzia data dal mom. inerzia

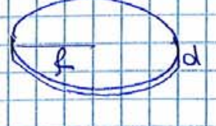
m ↳ inerzia data dalla massa

Corpi particolari:

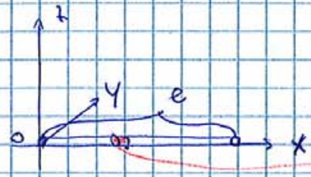
Una o più dimensioni del corpo rigido sono molto più sottili rispetto alle altre

① sbarra sottile $S << l^2$ trascuriamo sezione

② disco sottile $d << R$



① sbarra sottile e omogenea



$V = l \cdot S$, M

$\frac{M}{lS} = \rho$

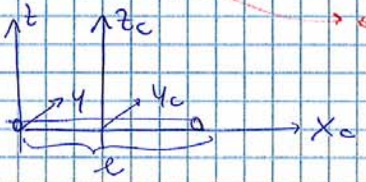
$R^2 = x^2 + \cancel{y^2}$ perché ruota attorno ove z però non ho spessore y

$dV = Sdx$ → volume infinitesimo

$$I_z = \rho \int_V R^2 dV = \rho \int_V x^2 dx\, S = \rho S \int_0^l x^2 dx = \rho S \frac{l^3}{3} = \frac{M \cancel{S}}{\cancel{l} \cancel{S}} \frac{\cancel{l^3}^{2}}{3} = \frac{M l^2}{3}$$

$0 \leq x \leq l$

Calcolo I_{zc} (ruota sempre attorno a z) → del c. massa



ⓐ integro $-\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2}$

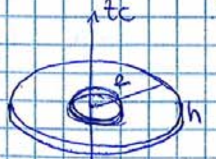
$$I_{zc} = \int_{-l/2}^{l/2} \rho R^2 dV = \int_{-l/2}^{l/2} \rho S x^2 dx = \rho S \left.\frac{x^3}{3}\right]_{-l/2}^{l/2}$$

$$I_{zc} = \frac{M \cancel{S}}{\cancel{S} \cancel{l}\, 3} \left[\frac{\cancel{l^3}^{2}}{8} + \frac{\cancel{l^3}^{2}}{8} \right] = \frac{M l^2}{12}$$ mom inerzia minore perché i punti sono più vicini all'asse

ⓑ Uso Steiner

$$I_{zc} = I_z - M \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{M l^3}{3} - M \frac{l^2}{4} = \frac{M l^2}{12}$$

② disco omogeneo sottile, I rispetto a z_c



$h << R$ coordinate polari o cilindriche

$x_c y_c$ — $x_c y_c z_c$

$$I_c = \rho \int R^2 dV$$

$dV = h\, 2\pi r\, dr$ anello a distanza r dal centro di spessore dr e altezza h

$0 \leq r \leq R$

$R^2 = x^2 + y^2 = r^2$

- esistono 3 assi principali chiamati assi di inerzia / se la rotazione è intorno a uno di loro
⇒ $\vec{L} = I\vec{\omega}$
  - passano per il CM del corpo

EQUAZIONI DEL MOTO ROTATORIO DI UN CORPO RIGIDO

Vari casi

① asse di rotazione ha un punto fisso in un SR inerziale
⇒ $\tau^{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

a) z è principale
b) z non è principale

② z non ha punti fissi in un SRif inerziale
⇒ $\cancel{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$ ⇒ $\vec{\tau}^{ext}_{CM} = \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt}$ calcolato rispetto al centro di massa
unico punto fisso

① **a)** z principale

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = \boxed{\frac{dI}{dt}\vec{\omega} + I\frac{d\vec{\omega}}{dt}} \rightarrow \vec{\alpha} \text{ acc. angolare}$$

$\frac{dI}{dt} \neq 0$ · perché il corpo non è davvero rigido
· perché cambia asse di rotazione

se $\frac{dI}{dt} = 0$ $\boxed{\vec{\tau}^{ext} = I\vec{\alpha}}$ analoga a 2^ legge Newton e 2^ eq. cardinale $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$

Analogie tra moto rotatorio e traslatorio di un corpo

$\vec{\omega}$	$\vec{v}$
$\vec{\alpha}$	$\vec{a}$
I	m
$\vec{\tau}$	$\vec{F}$
$\vec{L}$	$\vec{p}$

NB $\boxed{\vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \vec{\tau}^{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$ → danno soluzione ai problemi sul corpo rigido

e se non agiscono F^{ext}?
$\vec{\tau}^{ext} = 0$ → $\vec{L}$ è una costante ⇒ $I\omega$ è costante
⇒ un CR continua a ruotare con la stessa v. angolare ω se non è sottoposto a momenti esterni cioè se $\frac{dI}{dt} = 0$

ES ballerina e pattinatore (All'aumentare del mom. di inerzia diminuisce la v. angolare e vice)

b) z non è principale ⇒ $\vec{L_z} = I\vec{\omega}$ se $dI/dt = 0$
$\tau_z^{ext} = \frac{d}{dt}(I\omega)$ Stesso ragionamento di prima rispetto asse z e sua componente

Energia cinetica di rotazione per C.R

$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ (x sistema di particelle)

$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \omega r_i \operatorname{sen}\theta_i = |\vec{v}_i| \rightarrow \omega R_i$ $= r_i \operatorname{sen}\theta_i$ → distanza da asse

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_i m_i R_i^2 \omega_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i R_i^2 = \boxed{\frac{1}{2} \omega^2 I}$$

PER MOTO di ROTO - TRASLAZIONE

$$\boxed{E_k = \underset{\downarrow}{E_k^{int}} + \frac{1}{2} M v_{cm}^2}$$ (x sistema di particelle) Teorema di König

E cin. interna → calcolata rispetto al CM

x corpo rigido $E_k^{int} = \boxed{\frac{1}{2} \omega^2 I_c}$ → rotazione con asse che passa per il CM

ENERGIA MECCANICA DI CR

$\boxed{W_{ext} = E_{kf} - E_{ki}}$

$\boxed{E_p^{int} = \text{COSTANTE} \times CR \rightarrow \text{NON ci sono moti relativi}}$ NON compiono lavoro

Se le F^{ext} sono conservative

$W_{ext} = E_{pi}^{ext} - E_{pf}^{ext}$

⇓

$$E_{pi}^{ext} - E_{pf}^{ext} = E_{kf} - E_{ki} + \underbrace{E_{pi}^{int} - E_{pf}^{int}}_{0}$$

$E = E_p^{ext} + E_p^{int} + E_k$ è costante

$\boxed{E_{p\,i}^{int} = E_{pf}^{int}}$ → anche se non ha ruolo, aggiungo una costante

$$\boxed{E = \overbrace{\frac{1}{2} m \underset{\downarrow\, E_k^{ext}}{v_{cm}^2} + \frac{1}{2} I \underset{\downarrow\, E_k^{int}}{\omega^2}}^{E_k} + E_p}$$ sarà costante durante il moto

per un corpo rigido che cade sotto l'azione della F_p

$$E = (\underset{0}{E_p^{int}}) + \frac{1}{2} M \underset{\downarrow\, E_k\ ext}{v_{cm}^2} + \frac{1}{2} I \underset{\downarrow\, E_k\ int\ \text{rotazionale}}{\omega^2} + Mgz$$ → E pot legata a F_p

POTENZA

Per pura rotazione → il lavoro infinitesimo è = a

$dW^{ext} = d\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right) = I\omega \cdot d\omega$

↓

E_k solo di rotazione

$\Rightarrow P(\text{potenza}) = \frac{dW^{ext}}{dt} = I \omega \frac{d\omega}{dt}$

$\boxed{\vec{\tau}_z = I \frac{d\omega}{dt}}$ (se asse generico) $\frac{dI}{dt} = 0$

Potenza $= \frac{W}{t}$

$F = cost$

$\frac{dW}{dt} = \cancel{\frac{dF}{dt}}^{=0} s + \frac{ds}{dt} \cdot F = F \cdot v \rightarrow P$ istantanea

$\vec{W} = \omega \vec{u}_t$

$\Rightarrow \boxed{\vec{P} = \vec{\tau}_z \vec{\omega} = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}}$

$\vec{P} = F \vec{v}$

Quale interazione causa rotolamento? È la forza di attrito statico

l'attrito permette di "fermare" i punti sulla superficie (in ogni istante O è fermo)

$$\boxed{f_a \leq \mu_s N}$$

ROTO-TRASLAZIONE GENERALE

Se spingo con troppa forza la palla non rotolerà solo ma strisciera perche fa non contrasta più forte

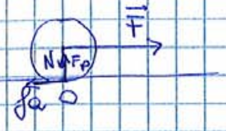
NB cilindro ≠ sfera

cambia solo I

ES: tronchi che scendono a valle

↳ discesa meno ripida → rotolamento
" più " → strisciamento

ES 1



Il cilindro rotola $\vec{F} = F\vec{u}_x$ applicato in cm

Risolviamo eq. cardinali moto x qst sistema pensato come roto-traslazione

N nel punto di contatto tra piano e cilindro, Fp nel cm

1^ eq. cardinale, e^ ⊥ N

$F + N + F_p + f_a = M\vec{a}_{cm}$ forze applicate tutte nel cm

traslazione cm

2^ eq. cardinale

$\Sigma \vec{\tau}_{cm} = I_{cm} \cdot \vec{\alpha}$ → rotazione attorno a cm

① $\sum_i F_i = M\vec{a}_{cm}$

$F + N + F_p + f_a = M\vec{a}_{cm}$

$\vec{f_a} = -f_a \vec{u}_x \quad F_p = -Mg\,u_y \quad \vec{N} = N\,\vec{u}_y \quad \vec{F} = F\vec{u}_x \quad \vec{a} = a_{cm}\vec{u}_x$

$$\begin{cases} F - f_a = M a_{cm} & (x) \\ N = Mg & (y) \end{cases}$$

② Fp ha momento nullo rispetto a CM perché braccio = 0
F " " " " " " " "
N " " " perché // a braccio

fa è applicato in O $\vec{\tau}_{cm} = \vec{r} \times \vec{f_a}$ ove u entrante

momento rispetto a cm $\vec{\tau}_{cm} = I\alpha\vec{u}$

quindi $R \cdot f_a \cdot \vec{u} = I_c \alpha \vec{u}$ mom inerzia rispetto a cm

$$\Longrightarrow \begin{cases} F - f_a = M a_{cm} \\ -R \cdot f_a = -I_c \alpha \end{cases}$$

r×fa rotazione oraria } segni concordi
α<0 " "

rotolamento ⇒ $a_{cm} = R\alpha$ a_{cm} è a rotazionale
$v_{cm} = \omega R$

$$\begin{cases} F - f_a = M a_{cm} \\ R f_a = I_c \dfrac{a_{cm}}{R} \end{cases}$$

NB: $I_c + MR^2 = I_0$

$$\begin{cases} f_a = -M a_{cm} + F \\ R(F - M a_{cm}) = I_c \dfrac{a_{cm}}{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{cm} = \dfrac{R^2 F}{I_c + MR^2} \\ f_a = \dfrac{I_c a_{cm}}{R^2} = \dfrac{I_c \cancel{R^2} F}{(I_c + MR^2)\cancel{R^2}} \end{cases}$$

$$\boxed{f_a = \frac{I_c}{I_0} F} \leq \mu_s Mg$$

$$\boxed{F \leq \frac{I_0}{I_c} \mu_s Mg}$$

CONSERVAZIONE ENERGIA NEL MOTO DI ROTOLAMENTO

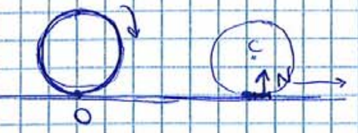
l'attrito statico non compie lavoro perché non produce spostamento

⇒ se la forza motrice è conservativa l'energia meccanica si conserva. Sperimentalmente si osserva che un corpo che rotola (senza strisciare) su un piano orizzontale, dopo un po' si ferma

ATTRITO VOLVENTE → associato al moto di rotolamento

↳ è molto più debole dell'attrito radente $F_{volv} << F_{rad}$

↳ lo trascuriamo



→ Normale spostata nel verso del moto per effetto del fatto che O è una regione di contatto

↳ il fatto che N non passi per il CM implica un momento che si oppone al moto

Piccolo per tutti i materiali

! TUTTI I SISTEMI DI PARTICELLE si risolvono con le 2 eq CARDINALI !

→ traslazione

→ Tutte le F scritte come se agissero nel CM = $M_{cm} \cdot a_{cm}$

→ Momenti che agiscono per rotazioni INTORNO a CM

→ rotazione

- 1^ eq. cardinale $\sum_i \vec{F}_i = M\vec{a}_{cm}$
- 2^ eq. cardinale $\sum \vec{\tau}_c = \frac{d\vec{L}_c}{dt}$ → rispetto a CM o a qualsiasi altro polo

$= I_c\alpha_c$ → per CR

Problemi di statica!

agiscono forze e momenti ma $\left[\begin{array}{l} a_{cm} = 0 \\ \alpha = 0 \end{array}\right.$ → NON c'è movimento

MOTO GIROSCOPICO

Trottola

il mom. ang. c'è ma ha modulo costante

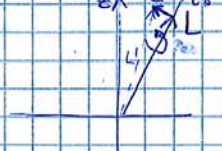
$\frac{d\vec{L}}{dt} \neq 0$ $\frac{d|\vec{L}|}{dt} = 0$ cambia direzione e NON intensità

consideriamo il caso in cui $\vec{L}\cdot\vec{L} = cost$ (perché è costante $|\vec{L}|$)

$$\frac{d|\vec{L}|^2}{dt} = \frac{d}{dt}|\vec{L}\cdot\vec{L}| = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}\cdot\vec{L}) = \frac{d\vec{L}}{dt}\cdot\vec{L} + \vec{L}\cdot\frac{d\vec{L}}{dt} = 2\boxed{\vec{L}\cdot\vec{\tau}} = 0 \qquad \boxed{\vec{L} \perp \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

la risultante dei momenti sul sistema è ⊥ alla direzione del mom. angolare



$d\vec{L} = \vec{\tau}\,dt$ Moto di precessione [L si sposta di dL in direzione τ, nel tempo

Vale anche il viceversa: $\vec{\tau} \perp \vec{L} \Rightarrow |L|$ costante

$\vec{\tau}\cdot\vec{L} = 0 \to \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \to \frac{d\vec{L}}{dt}\cdot\vec{L} = 0$

↳ $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{L}\cdot\vec{L}) = 0$

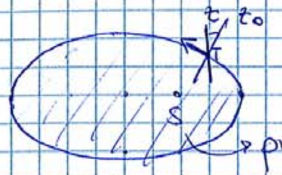
Moto circonf: modulo di v costante ma cambia in ogni momento direzione → acc. centripeta prodotta

Se Ω non trascurabile $\Rightarrow$ NUTAZIONE

oscillazioni anche non meno che ω diminuisce
Nella realtà attrito aria implica diminuzione ω
↳ diventano evidenti le oscillazioni

Nutazione diventa importante se $\Omega \sim \omega$

PRECESSIONE DEGLI EQUINOZI



la terra ha moto di
- rivoluzione intorno a S
- rotazione su se stessa

↳ piano di rivoluzione → piano dell'eclittica

$z_0 \neq z$ $\quad z_0 \rightarrow$ asse rotazione inclinato di θ rispetto a z
↳ asse ⊥ a eclittica

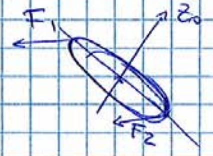
$z \hat{} z_0 = \theta \cong 23° 27'$

T NON è un SRif INERZIALE!

$\Rightarrow$ per studiare rotazione uso come polo il CM $\Rightarrow \vec{\tau}_c = \frac{d\vec{L}_c}{dt}$

Forze su T: interazioni con Sole e altri pianeti e con luna
altri pianeti: trascurabili (o sono troppo leggeri o troppo lontani)

la Terra non è sferica, è schiacciata all'equatore → le forze agenti generano un mom. torcente



$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

F_1 di attrazione è un poco più intensa di F_2 perché punto di applicazione è più vicino

Se la terra fosse sferica non ci sarebbe precessione → NON c'è mom. angolare

$$F_m = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)$$

$$\begin{cases} F_1 = F_m + \Delta F \\ F_2 = F_M - \Delta F \end{cases}$$

→ c'è un momento che tende a "raddrizzare" la Terra generato da queste coppie di forze in modo da riportare $F_1 // F_2$ → mom torcente nullo

MA T ha un momento angolare

T ha $\vec{L} \neq 0 \Rightarrow \vec{\tau} \perp \vec{L}$ genera moto di precessione

$\Omega = 7,2 \times 10^{-12}$ rad/s → 1 giro completo ogni 27.700 anni
↳ precessione

Nutazione
↳ ha periodo di 19 anni

Inclinazione $z_0 \neq z$ è responsabile delle stagioni

- la precessione porterebbe a inversione di stagioni in 13000 anni

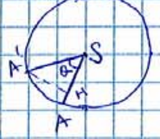
la precessione fa sì che il tempo tale che la Terra torni nella stessa posizione è di 20 minuti più breve ogni anno

Ricaviamo legge gravitazione universale da 3 leggi keplero

r_{12} = cost → ellisse particolare → cerchio

$a = r = b$ semiasse maggiore e minore = a raggio circonferenza

2^ legge: velocità areolare costante → L conservato



$dA = A(S\overset{\Delta}{A'}A)$

dt piccolissimo → $|SA| \simeq |SA'| = r$

$|AA'| \simeq |A'H| \simeq r\, d\theta$

$d\theta = \theta(t)$
$d\theta = \frac{d\theta}{dt} dt$

$dA = \frac{1}{2}|AA'||SA| = \frac{1}{2} r^2 d\theta$
$= \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} dt$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}}$$

2^ legge keplero: $\frac{dA}{dt}$ è costante

$$\boxed{\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{costante}}$$

costante
‖
$|\vec{L}_c| = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt}$ $\quad \vec{r} = \vec{r}_{12}$

$$\boxed{\frac{L_c}{2\mu} = \text{costante}}$$

$L_c = \mu \cdot r \cdot v_T$
$= \mu r \cdot r \frac{d\theta}{dt} = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt}$

⟹ F è una forza centrale perché $\vec{L}$ è costante $\quad \vec{r}_{12} \parallel \vec{F}$

$\tau_c = \frac{dL_c}{dt} = 0$

da 1^ legge keplero $\vec{r}, \vec{v}$ sono in un piano ⟹ $L = \mu \vec{r} \times \vec{v}$ sempre ⊥ al piano

⟹ $\vec{L}$ costante (in direzione e modulo)

⟹ $\vec{F} = F(r)\vec{u}_r$ CENTRALE

L'interazione gravitazionale è una proprietà universale della materia
⟹ F deve essere proporzionale alla quantità di materia di ciascun corpo (1,2) $F \propto m_1$, $F \propto m_2$

$|F(r)| = m_1 m_2 \, f(r)$ → ricavata da 3^ legge keplero

$\vec{F} = F(r)\vec{u}_r = \mu a_{cp}$
$\boxed{= -\mu \frac{v^2}{r} \vec{u}_r}$

forza centrale produce accelerazione cp.
↳ PUNTO FONDAMENTALE

se traiettoria è una circonferenza $v = \omega r = \frac{2\pi}{T} r$

$F(r) = \mu \frac{v^2}{r} = \mu \frac{4\pi^2 r^{3}}{T^2 \cancel{r}}$

3^ legge keplero $T^2 = k r^3$

$F(r) = \mu \frac{4\pi \cancel{r}}{k r^{\cancel{3}\,2}} = \boxed{\frac{\mu 4\pi}{k} \cdot \frac{1}{r^2}}$

Ricapitolando

$\vec{F} = -\frac{4\pi^2 \mu}{k} \frac{1}{r^2} \vec{u}_r = -\frac{4\pi^2}{k} \frac{M_T M_S}{M_S + M_T} \frac{1}{r^2} \vec{u}_r$

$\vec{F} = -\frac{4\pi^2}{k(M_S + M_T)} \frac{M_T M_S}{r^2} \vec{u}_r$

per i pianeti del sistema solare $M_S >>> M_p$ quindi k quasi cost.

k varia a seconda dei corpi considerati

$$\boxed{G = \frac{4\pi^2}{k(M_S + M_T)}}$$

$$\boxed{k = \frac{4\pi^2}{G(M_S + M_T)}}$$

la costante è G

$L = |\vec{L}_c| = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt}$ non riportiamo indici 12 → quantità relative

2 costanti del moto: E, L

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}}$$

$$E = -\frac{\gamma}{r} + \frac{1}{2}\mu r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

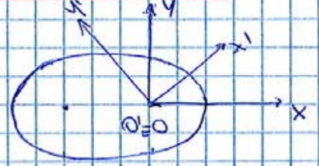
$$\boxed{= -\frac{\gamma}{r} + \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2} + \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}$$

E mec. dipende solo dalla variabile radiale, niente dipende da variabile θ!

Epot efficace $\equiv \boxed{-\frac{\gamma}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}}$ $E_{pot} + E_k(v_T)$

$E = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + E_p^{eff}(r)$ → estensione da sistema di una sola particella $\underset{\text{1 particella}}{\overset{m}{r}} \rightarrow \underset{\text{più particelle (qui 2)}}{\overset{\mu}{r_{12}}}$

Che tipo di moto è?
Moto unidimensionale: particella di massa μ in moto lungo direzione radiale



S' ruota attorno alla terra
S è fermo

$\vec{u}_{x'} = \vec{u}_r$ segue posizione pianeta
$\vec{u}_{y'} = \vec{u}_\theta$
$\vec{u}_{z'} = \vec{u}_z$
} coordinate cilindriche

descrizione = a piattaforma girevole

S' sistema riferimento non inerziale → $S'(x', y', z')$

moto 1D nella variabile $x' > 0$
velocità $v' = \frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r$

Nel SRI → S $\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega}\times\underset{\vec{r}'}{\vec{r}}}$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{a}' + \vec{a}_{coriolis} + a_{cp} \\ a &= a' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \frac{d\omega}{dt}\times r\end{aligned}}$$

[se la v angolare non è costante

Punto di vista di S'

$$\vec{a}' = \vec{a} - \underbrace{2\vec{\omega}\times\vec{v}'}_{\text{coriolis}} \underbrace{- \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{\text{a centrifuga (c'è il −)}} - \vec{\alpha}\times\vec{r}$$

$\mu\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{inerziali}$
$= \vec{F} + F_{coriolis} + F_{centrifuga} - \mu\vec{\alpha}\times\vec{r}$

NB $E_{pot}^{eff} = -\frac{\gamma}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$

- $F = -\frac{\gamma}{r^2}\vec{u}_r$
- $-\frac{\partial E_p^{eff}}{\partial r} = -\frac{\gamma}{r^2} + \frac{L^2}{\mu r^3} = F^{eff}$ // $\mu r \frac{L^2}{\mu^2 r^4} = \frac{L^2}{\mu r^3}$
- $F_{cf} = \mu(-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})) = \mu r \omega^2 \vec{u}_r$ → c'è il − quindi è in direzione radiale

NB: $\omega = \frac{L}{\mu r^2}$

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - E_p^{eff}\right)}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E + \frac{\gamma}{r} - \frac{L^2}{2\mu r^2}\right)}$$

$$E = -\frac{\gamma}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

Cerchiamo le condizioni per cui un valore di r raggiunga un estremo $\Rightarrow \boxed{\frac{dr}{dt} = 0}$ Valore minimo di avvicinamento

" massimo " " per orbite chiuse

$\to v_r = 0$

$\Downarrow$

$$= E + \frac{\gamma}{r} - \frac{L^2}{2\mu r^2} = 0 \quad (*)$$

$$= \frac{E}{r^2}\left[r^2 + \frac{\gamma r}{E} - \frac{L^2}{2\mu E}\right] = 0 \quad \to \frac{\Delta}{4}$$

$\boxed{E \neq 0}$

$$r_{estremo} = -\frac{\gamma}{2E} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4E^2} + \frac{L^2}{2\mu E}}$$

$$= -\frac{\gamma}{2E} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4E^2}\left(1 + \frac{2EL^2}{\mu\gamma^2}\right)}$$

$$= -\frac{\gamma}{2E} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4E^2}\,\varepsilon^2}$$

$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\gamma^2}}}$$

$$\boxed{r_{extr} = -\frac{\gamma}{2E}(1 \pm \varepsilon)}$$

$\boxed{\gamma > 0}$

① $\boxed{E < 0 \Rightarrow \varepsilon < 1}$

$$\Rightarrow r_{min} = -\frac{\gamma}{2E}(1 - \varepsilon)$$

$$r_{max} = -\frac{\gamma}{2E}(1 + \varepsilon)$$

$\Rightarrow$ stato legato

$$\varepsilon_{min} = \sqrt{1 + \frac{2L^2}{\mu\gamma^2}E_p^{eff}(r^*)} = \sqrt{1 + \frac{2L^2}{\cancel{\mu\gamma^2}}\left[-\frac{\mu\gamma^2}{\cancel{2L^2}}\right]} = 0$$

$\to$ NON è E?

$\boxed{\varepsilon \geq 0}$ sia per $\gamma < 0$ e $\gamma > 0$ perché dipende da γ^2

$\forall E, \forall \gamma$

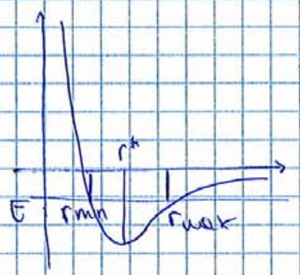
$\Delta E = E_{lib}^{min} - E \to$ energia di legame minima energia fornire a sistema per liberare il sistema

$E_{lib}^{min} = 0$

$\downarrow$

E minima perché non esiste più r_{max}

$\gamma > 0$



② $\boxed{E = 0 \Rightarrow \varepsilon = 1}$

$$(*) \quad \gamma r - \frac{L^2}{2\mu} = 0 \Longrightarrow r_{extr} = \frac{L^2}{2\mu\gamma}$$

moto non più confinato

$$r_{min} = \frac{1}{2} r^*$$

$$\left[\cancel{E} + \frac{\gamma}{r} - \frac{L^2}{2\mu r^2}\right] = 0 \qquad \gamma r - \frac{L^2}{2\mu} = 0$$

$\downarrow$

$dr/dt = 0 \longrightarrow$ sempre condizione imposta all'inizio