



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1347

ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Spoto

MATERIA: Scienza delle Costruzioni II + Eserc., Prof.Ferro

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

METODO DEGLI SPOSTAMENTI

(E' la base del Calcolo Automatico)

LUN. 30/9
LEZIONE 9
(FERRO)

Strutture iperstatiche \Rightarrow Equaz. cardinali della Statica (trascurando il materiale di cui e' fatta la struttura)

Strutture iperstatiche \Rightarrow NON SONO SUFFICIENTI EQUAZIONI CARDINALI DELLA Statica (devo tenere conto del materiale)

Il Metodo degli Spostamenti e' il Duale del metodo delle forze

Entrambi associano al sistema dato un altro sistema riducibile ma:

metodo delle forze

metodo degli Spostamenti

Elimino vincoli fino ad avere una struttura composta di travi iperstatiche.

Tra le $2^{(v-g)}$ soluzioni equilibrate (staticamente ammissibili) scelgo l'UNICA che rispetti anche la conseguenza

$V-g \equiv$ grado di indeterminazione statica (o iperstatica)

INCOGNITE: $V-g$ reazioni vincolari iperstatiche

Le determino tramite $V-g$ Equaz. di conseguenza (cinematiche)

N.B. IN RESULTA:

$$V-g = e - i$$

- $V \equiv$ grado di vincoli
- $g \equiv$ Gde
- $e \equiv$ grado di libertà
- $i \equiv$ grado di iperstaticita'

e e' difficile da trovare e lo trova tramite i metodi

AGGIUNGO VINCOLI FINO AD AVERE UNA STRUT. COMPOSTA DI TRAVI PERFETTAMENTE INCASTRATE NEI ESTREMI

Tra le 2^S soluzioni CONGUENTI (cinematicamente ammissibili) scelgo l'UNICA EQUILIBRATA

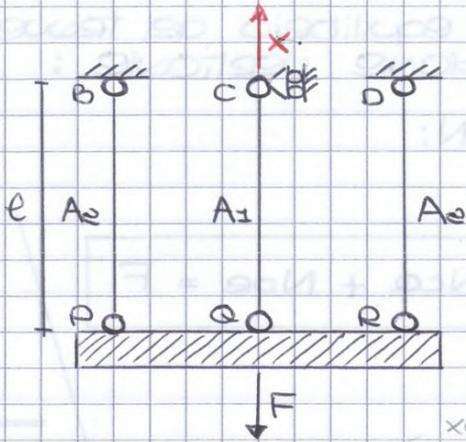
$S \equiv$ grado di indeterminazione cinematica

INCOGNITE: S spostamenti nodali della struttura (param. cinematici)

Le determino tramite S Equaz. di Equilibrio nodali (statiche)

N.B. Si tratta di individuare quell'UNICO insieme di parametri cinematici che, oltre alla conse., implichi anche l'equilibrio

Il PDS consiste nell'imporre alcuni spostamenti o rotazioni, caratteristici del sistema



La struttura è ora staticamente determinata per qualsiasi x

↓
Determino x imponendo la congruenza:

$$v_c = 0$$

x che c si sposta verso l'alto

$$v_c(x) = - \frac{e}{EA_2} \frac{x}{e} - \frac{e}{EA_1} x$$

spostam. punto c per effetto di x ⊗

$$v_c(F) = + \frac{e}{EA_2} \frac{F}{e}$$

(l'uso centrale e scivola mentre le e laterali avranno uno sforzo di trazione pari a F/e)

spostam. punto c per effetto di F

$$v_c(x) + v_c(F) = 0$$

$$v_c = 0$$

⊗ le bielle esterne si comprimono per effetto di x/e della quantità $(e/EA_2) \cdot x/e \dots$

x che il tronchetto si sposta verso il basso

così come il punto c

$$\left(- \frac{e}{2EA_2} - \frac{e}{EA_1} \right) x = - \frac{e}{EA_2} \frac{F}{e}$$

$$x = \frac{F}{2EA_2} \cdot \frac{1}{\frac{A_1 + 2A_2}{2A_1A_2}}$$

$$x = \frac{A_1}{A_1 + 2A_2} \cdot F = N_{ca}$$

sforzo nella biella centrale

dunque per l'equilibrio:

$$N_{bp} = N_{de} = \frac{A_2}{A_1 + 2A_2} F$$

sforzo nelle e bielle laterali

N.B. Si carica maggiormente quella che ha rigidità maggiore (a parità di e ed e) $\rightarrow (> A \rightarrow > K)$

• Risoluzione con metodo degli spostamenti

Impongo: $v_p = v_q = v_r = S$ ←

La struttura è 1 volta cinematicamente indeterminata

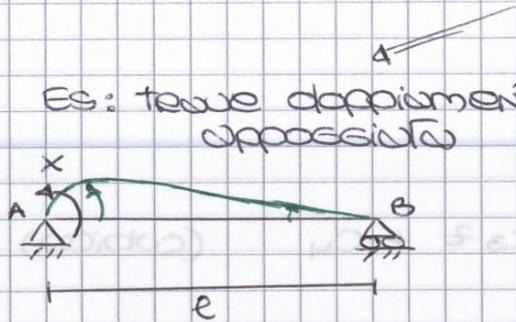
(S = parametro cinematico)

infatti ciascuna biella subisce lo stesso allungamento S essendo inconniervato al traverso che è rigido.

imponendo S : la struttura è cinematicamente determinata, per F

MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA TRAVE \rightarrow Applicazione del metodo degli spostamenti alla riduzione di travi
 Per risolvere travi posso usare:

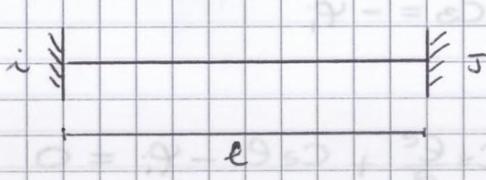
- pw \equiv caso particolare del Metodo delle Forze \rightarrow metodo + lungo mv + completo (sudagio integrale)
- Metodo delle Forze \rightarrow Per scrivere le Equazioni di Congruenza devo conoscere gli spostamenti di schemi elementari isostatici per effetto di forze o momenti



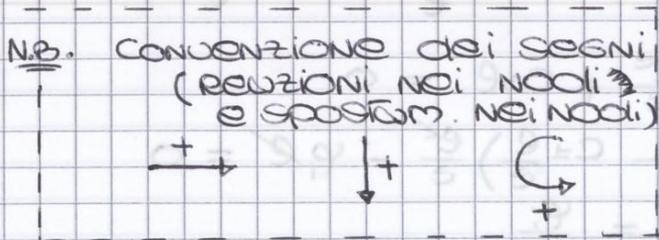
$$\varphi_{AB} = \frac{x e}{3EI}$$

$$\varphi_{BA} = \frac{x e}{6EI}$$

- Metodo degli spostamenti \rightarrow Per scrivere le Equaz. di Equilibrio devo conoscere le reazioni di schemi elementari cinematici determinati per effetto di cedimenti vincolari
- Es: Trave doppiamente incastrata



Per calcolare le reazioni vincolari per effetto di cedimenti vincolari (spostamenti nodali) imposti
 \rightarrow di schemi: ipotizzo spostamento unitario e tutti gli altri Nulli



$$\begin{matrix} \pi_i, T_i, N_i \\ \downarrow \\ \varphi_i, V_i, W_i \end{matrix}$$

Considero 6 schemi:
 $\varphi_i, V_i, W_i, \varphi_j, V_j, W_j$

Sostituisco $C_1, C_2 \longrightarrow$ Trovo $\Pi(z), T(z)$:

$$\Pi(z) = \frac{EI}{e} \varphi_i \left(6 \frac{z}{e} - 4 \right)$$

$$T(z) = \frac{GEI}{e^2} \varphi_i$$

dunque :

$$\Pi_i = \frac{4EI}{e} \varphi_i$$

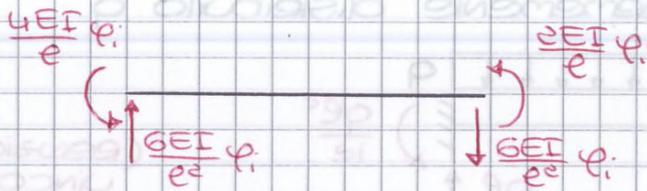
$$T_i = - \frac{GEI}{e^2} \varphi_i$$

$$N_i = 0$$

$$\Pi_s = \frac{2EI}{e} \varphi_i$$

$$T_s = + \frac{GEI}{e^2} \varphi_i$$

$$N_s = 0$$



- Terzo schema : $w_i = 1 \quad \varphi_i = v_i = \varphi_s = v_s = w_s = 0$



$$\Pi_i = T_i = 0$$

$$N_i = \frac{EA}{e} w_i$$

$$\Pi_s = T_s = 0$$

$$N_s = - \frac{EA}{e} w_i$$

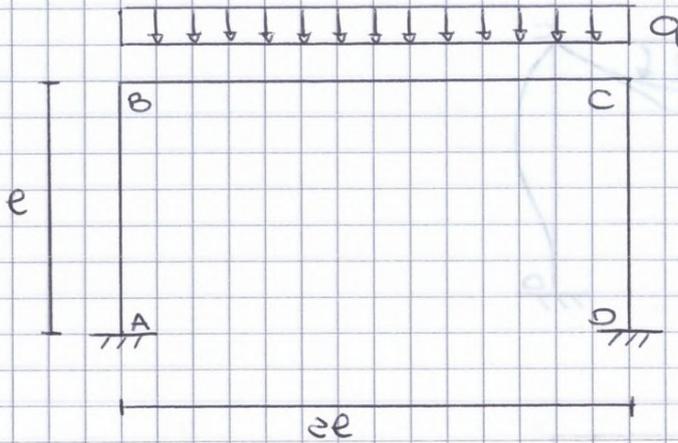
N.B. Gli ultimi 3 schemi sono analoghi ai primi tre

I risultati ottenuti possono essere espressi in forma matriciale espansa :

$$\begin{bmatrix} \Pi_i \\ T_i \\ N_i \\ \Pi_s \\ T_s \\ N_s \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 4/e & -6/e^2 & 0 & 2/e & 6/e^2 & 0 \\ -6/e^2 & 12/e^3 & 0 & -6/e^2 & -12/e^3 & 0 \\ 0 & 0 & A/e & 0 & 0 & -A/e \\ 2/e & -6/e^2 & 0 & 4/e & 6/e^2 & 0 \\ 6/e^2 & -12/e^3 & 0 & 6/e^2 & 12/e^3 & 0 \\ 0 & 0 & -A/e & 0 & 0 & A/e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ v_i \\ w_i \\ \varphi_s \\ v_s \\ w_s \end{bmatrix}$$

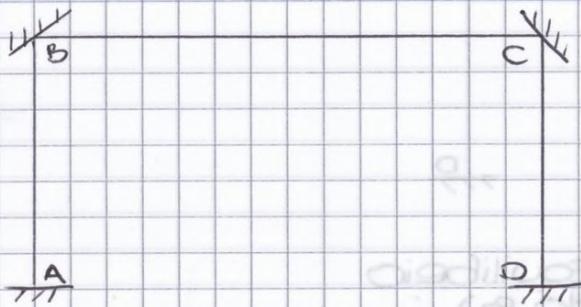
I° schema
II° schema

Esempio: Portale



2 nodi incastri e
2 nodi con 6 GdL
↓
Struttura 6 volte
cinematicamente
indeterminata

Strutt. a nodi bloccati:



~~condizioni cinematiche~~
INCOGNITE
cinematiche:

$$\varphi_B, (r_H)_B, (r_V)_B$$

$$\varphi_C, (r_H)_C, (r_V)_C$$

(H ≡ orizzontale)
(V ≡ verticale)

Semplifico problema:

- Hp: Indeformabilità assiale (nessuna estensione assiale)

$$\implies (r_V)_B = (r_V)_C = 0$$

$$(r_H)_B = (r_H)_C = r_H$$

- Strutt. simmetrica caricata simmetricamente

$$\implies r_H = 0$$

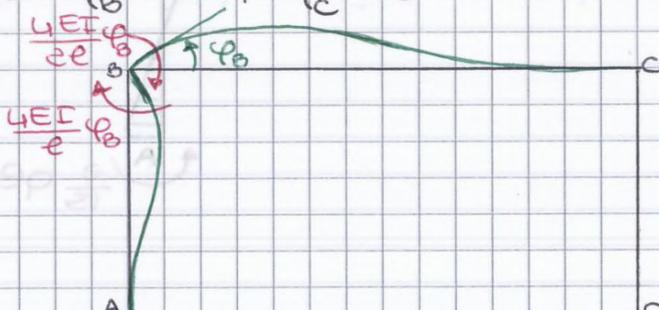
$$\varphi_B = -\varphi_C$$



Struttura 1 volta cinematicamente indeterminata

Unica la strutt. a nodi bloccati e' soggetta ai cedimenti univari incogniti φ_B, φ_C ed ai carichi esterni

Lo schema: $\varphi_B = 1, \varphi_C = 0$



• Trovare BC \mapsto Da $\{Q\} = [K]\{\delta\} + \{F\} \rightarrow N_b, N_c$

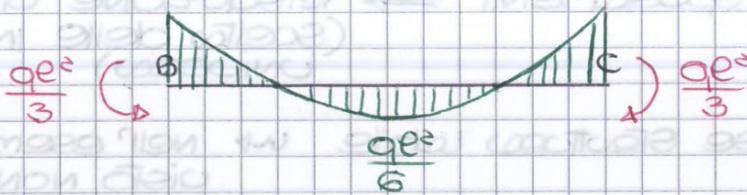
$$N_b = \frac{4EI}{2l} \varphi_b + \frac{2EI}{2l} \varphi_c + \frac{q(2l)^2}{12} = -\frac{1}{15} qe^2 + \frac{q(2l)^2}{12}$$

$$N_c = \frac{2EI}{2l} \varphi_b + \frac{4EI}{2l} \varphi_c - \frac{q(2l)^2}{12} = +\frac{1}{15} qe^2 - \frac{q(2l)^2}{12}$$

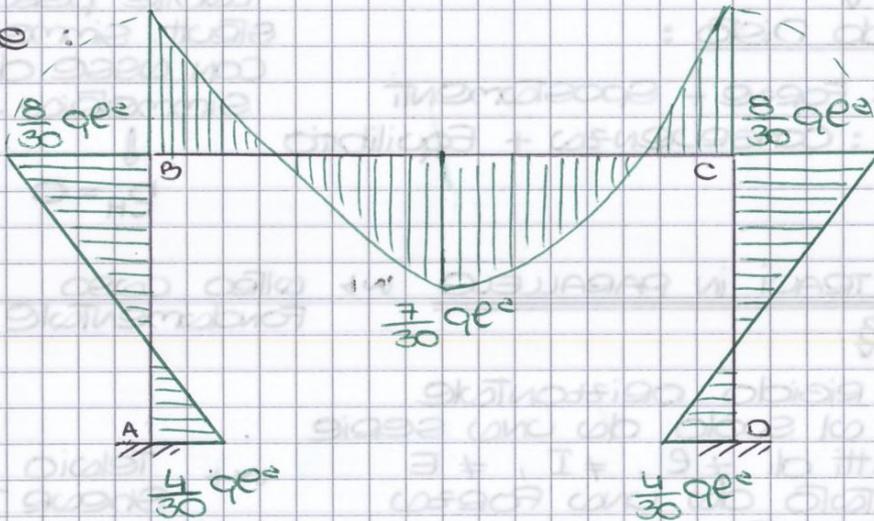
CONTRIBUTO spostam. nodali :



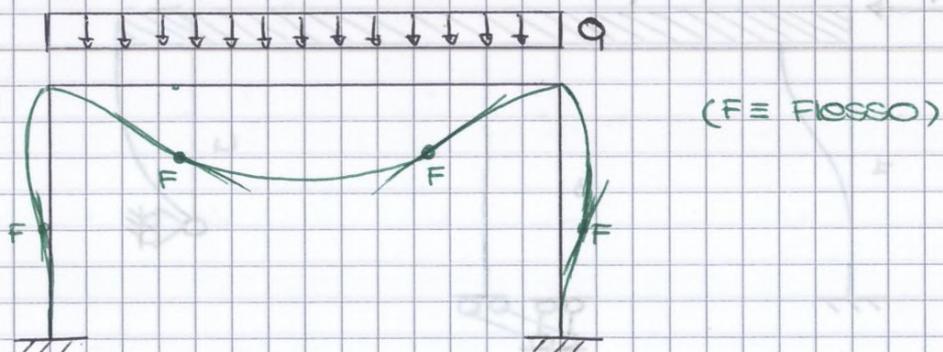
CONTRIBUTO carichi esterni :



Donque :



N.B. Dove $\pi = 0 \rightarrow$ Punti di Flesso della
deformata Elastica



A deformazione avvenuta, il traverso risulterà traslato orizzontalmente della quantità δ , così come le estremità dei piedritti.

Per la congruenza si ha dunque:

$$\delta_i = \frac{T_i e_i^3}{c_i E_i I_i} = \delta \quad (*)$$

ove:

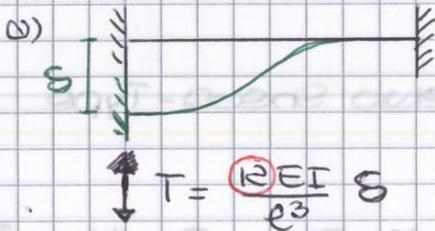
$T_i \equiv$ Torsio trasmessa al traverso dallo i -esimo piedritto

$c_i \equiv$ coefficiente numerico dipendente dal vincolo piedritto - suolo

	piedritto i	c_i
a)	1	12
b)	2	3
c)	3	0
d)	4	3

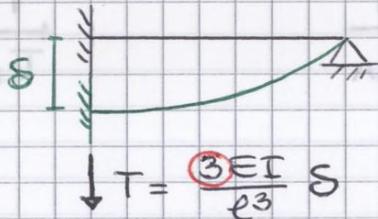
Imposto $\delta_i = \delta$, si è quindi ricavata la reazione iperstatica di Torsio T_i

in particolare:



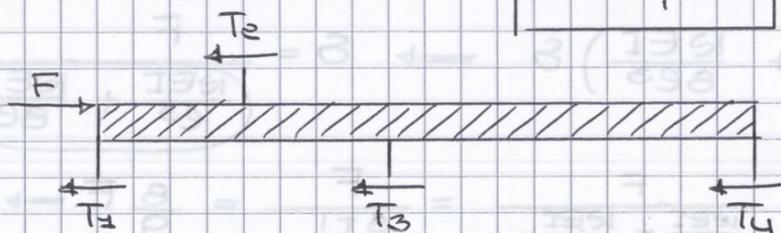
c) $c_3 = 0$ poiché l'asta 3 torsio rigidamente

b) e d)



Equazione risolvete: Equaz. di equilibrio alla tensione orizzontale del traverso:

$$F = \sum_i T_i$$



Sistema equilibrato

⑦

ESERCIZI : METODO DEGLI SPOSTAMENTI

ree. 2/9
LEZIONE 2
(CORRENDO)

Si basa su tale
relazione :

$$\{Q\} = [K]\{\delta\} + \{F\}$$

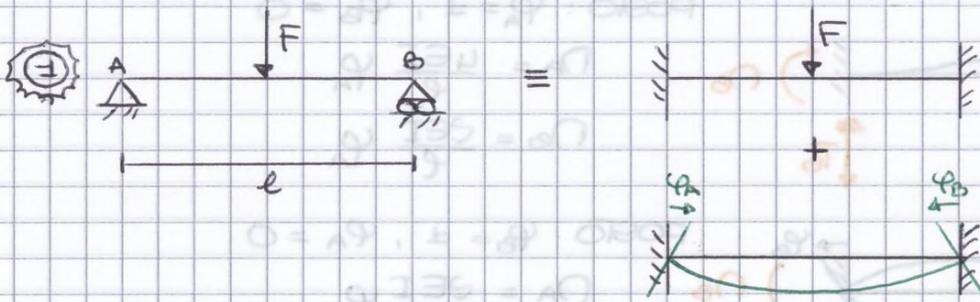
=

$$\{Q\} = [K]\{\delta\} - \{F_{eq}\}$$

N.B. $\{F\} = -\{F_{eq}\}$

$\{F\} \equiv$ Forze che agiscono sulla trave

$\{F_{eq}\} \equiv$ Forze equivalenti nodali



(tutta bloccata con carico applicato)

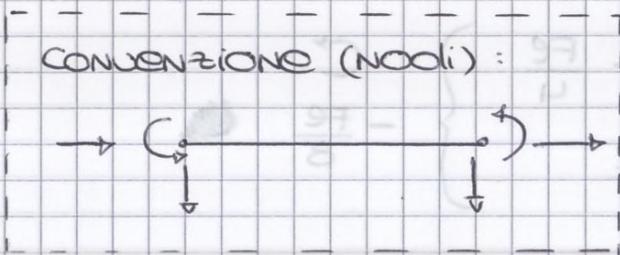
(nei nodi applico spostamenti reali: φ_A, φ_B)

incognite del problema (pneumatici cinematici)

$$\{\delta\}^T = \{ \varphi_A, 0, 0, \varphi_B, 0, 0 \}$$

ma: $\varphi_A = -\varphi_B$

$$\{Q\}^T = \{ T_1, T_2, N_1, T_3, T_4, N_2 \}$$



$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ N_1 \\ T_3 \\ T_4 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{e} \begin{bmatrix} 4 & -6/e & 0 & 2 & 6/e & 0 \\ -6/e & 12/e^2 & 0 & -6/e & -12/e^2 & 0 \\ 0 & 0 & A/I & 0 & 0 & -A/I \\ 2 & -6/e & 0 & 4 & 6/e & 0 \\ 6/e & -12/e^2 & 0 & 6/e & 12/e^2 & 0 \\ 0 & 0 & -A/I & 0 & 0 & A/I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ T_1 \\ N_1 \\ \varphi_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$



Devo determinare il grado di indeterminazione cinematica S :

$$\varphi_1 = \bar{\varphi}$$

$$v_1 = u_1 = 0$$

$$\varphi_2 \text{ incognito } \Rightarrow S = 1$$

$$v_2 = u_2 = 0$$

Determino le incognite spostamento al fine di determinare le reazioni vincolari:

Equazioni che vengono formate dalle eq. di eq.

$$M_1 = \frac{4EI}{e} \bar{\varphi} + \frac{2EI}{e} \varphi_2$$

$$T_1 = -\frac{6EI}{e^2} \bar{\varphi} - \frac{6EI}{e^2} \varphi_2$$

$$N_1 = N_2 = 0$$

$$M_2 = \frac{2EI}{e} \bar{\varphi} + \frac{4EI}{e} \varphi_2 = 0 \quad (*)$$

$\{Q\} = [K] \{S\}$

$$T_2 = \frac{6EI}{e^2} \bar{\varphi} + \frac{6EI}{e^2} \varphi_2$$

$$(*) \Rightarrow \varphi_2 = -\frac{\bar{\varphi}}{e}$$

donque:

$$M_1 = \frac{4EI}{e} \bar{\varphi} - \frac{2EI}{e} \bar{\varphi} = \frac{3EI}{e} \bar{\varphi}$$

$$T_1 = -\frac{6EI}{e^2} \bar{\varphi} + \frac{3EI}{e^2} \bar{\varphi} = -\frac{3EI}{e^2} \bar{\varphi}$$

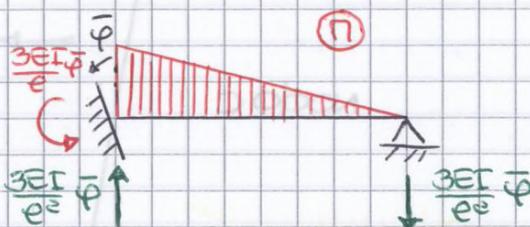
$$T_2 = \frac{6EI}{e^2} \bar{\varphi} - \frac{3EI}{e^2} \bar{\varphi} = \frac{3EI}{e^2} \bar{\varphi}$$

Osservazione: i cedimenti impressi entrano in $\{S\}$

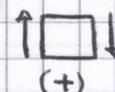
i carichi agenti entrano in $\{F\}$

in tal caso: $\{F\} = \{0\}$

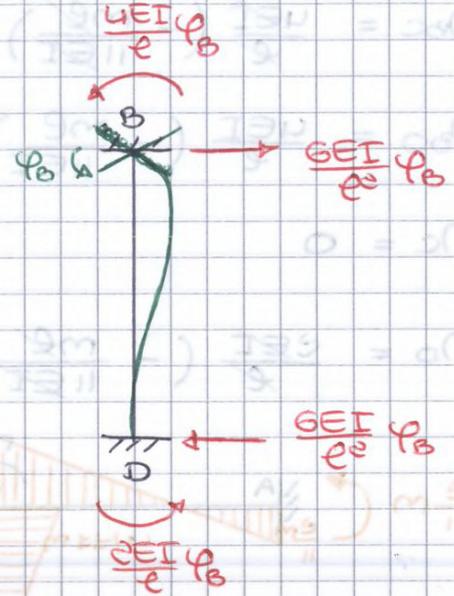
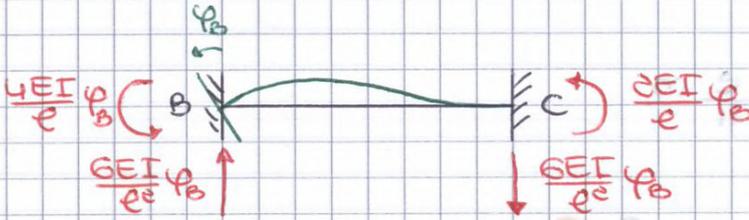
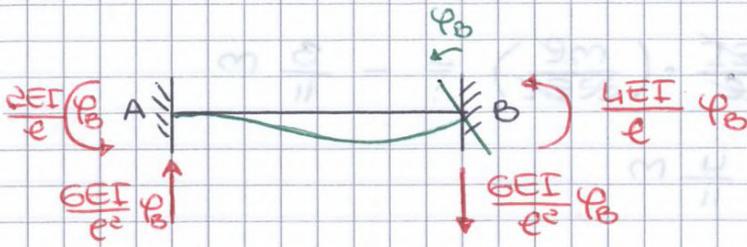
per la concordanza dei segni



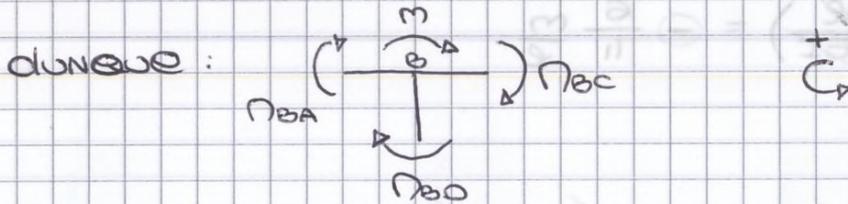
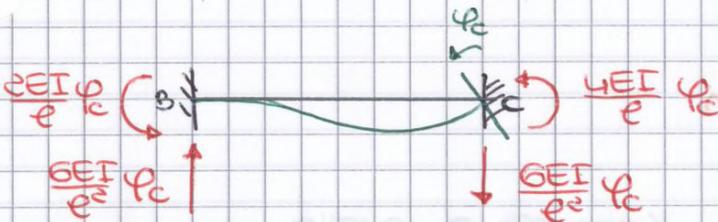
$\oplus \Rightarrow$ SFC.



$$\varphi_B = 1, \varphi_C = 0$$



$$\varphi_C = 1, \varphi_B = 0$$



$$-\frac{4EI}{e} \varphi_B - \frac{2EI}{e} \varphi_B - \frac{4EI}{e} \varphi_B - \frac{2EI}{e} \varphi_C - m = 0 \quad (*)$$



$$-\frac{2EI}{e} \varphi_B - \frac{4EI}{e} \varphi_C = 0 \implies \varphi_C = -\frac{\varphi_B}{2}$$

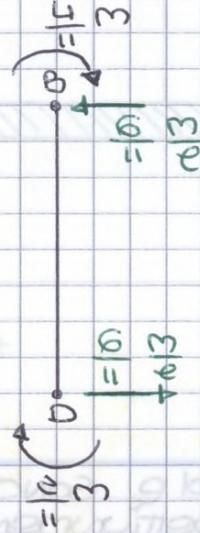
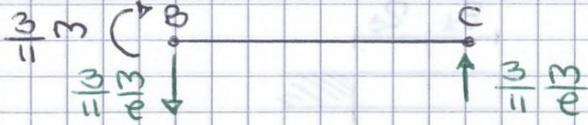
$$(*) \implies -\frac{11EI}{e} \varphi_B = m \implies \boxed{\begin{matrix} \varphi_B = -\frac{me}{11EI} \\ \varphi_C = \frac{me}{22EI} \end{matrix}}$$

Quindi:

$$\Gamma_A = \frac{2EI}{e} \cdot \left(-\frac{me}{11EI}\right) = \ominus \frac{2}{11} m$$

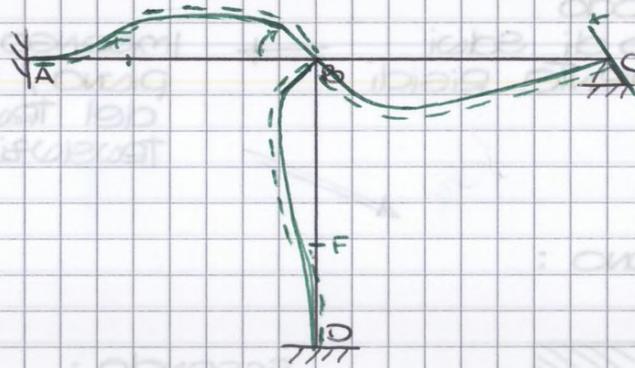
→ (opposto di quelli disegnati negli schemi)

Osservazione : il Tracciato posso trovarlo anche tramite l'equilibrio dei \neq tratti



Tracciato in Deformato :

- I) indico direzione rotazione
- II) individuo flessi $\xrightarrow{(F)}$ dove $\eta=0$
- III) Tracciato deformato e indico fibre tese



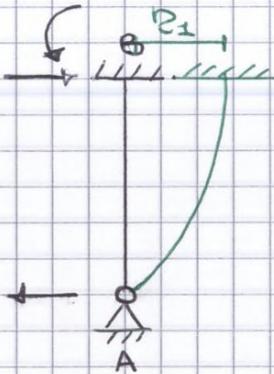
Impongo : $\varrho_e = 1, \varrho_f = 0$



$$T_{1,e} = T_{2,e} = T_{3,e} = \frac{12EI}{e^3} \varrho_e$$

$$N_{1,e} = N_{2,e} = N_{3,e} = \frac{6EI}{e^2} \varrho_e$$

Impongo : $\varrho_f = 1, \varrho_e = 0$



$$T_{1,f} = T_{3,f} = \frac{3EI}{e^3} \varrho_f$$

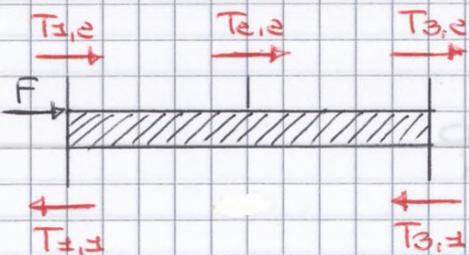
$$N_{1,f} = N_{3,f} = \frac{3EI}{e^2} \varrho_f$$

Quindi : Equazioni di Equilibrio $\implies \varrho_f, \varrho_e$

• II° piano
(vedi ipotizzanti
corretti)

$$eF = 3 \frac{12EI}{e^3} \varrho_e \quad (1)$$

• I° piano
(vedi ipotizzanti
NON corretti)

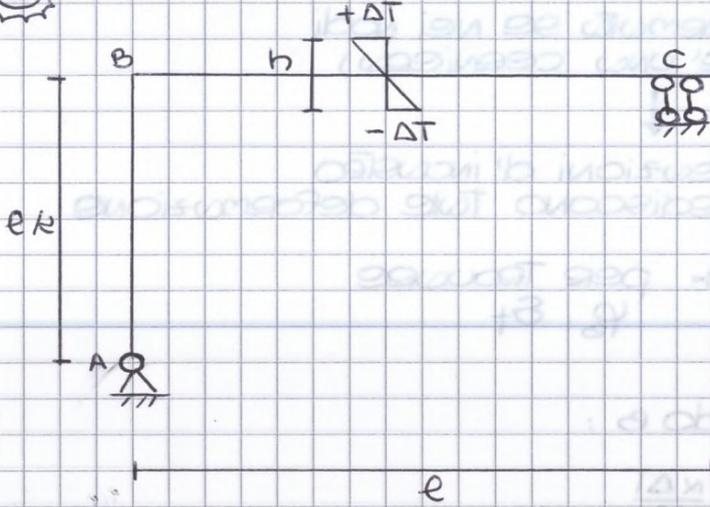
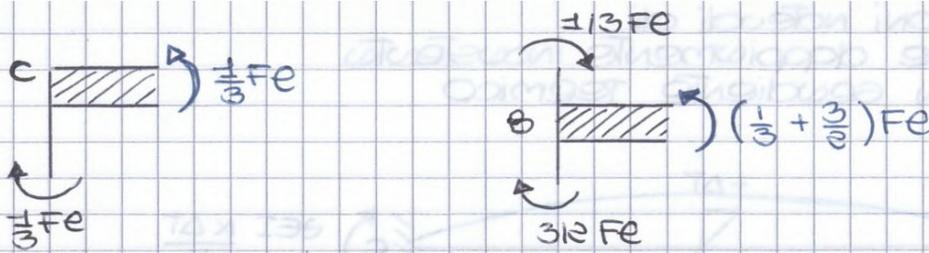


$$F + 3 \frac{12EI}{e^3} \varrho_e = 2 \frac{3EI}{e^3} \varrho_f \quad (2)$$

$$(1) \implies \varrho_e = \frac{1}{18} \frac{Fe^3}{EI}$$

$$(2) \implies F + 3 \frac{12EI}{e^3} \left(\frac{1}{18} \frac{Fe^3}{EI} \right) = 2 \frac{3EI}{e^3} \varrho_f$$

$$\varrho_f = \frac{Fe^3}{21EI}$$



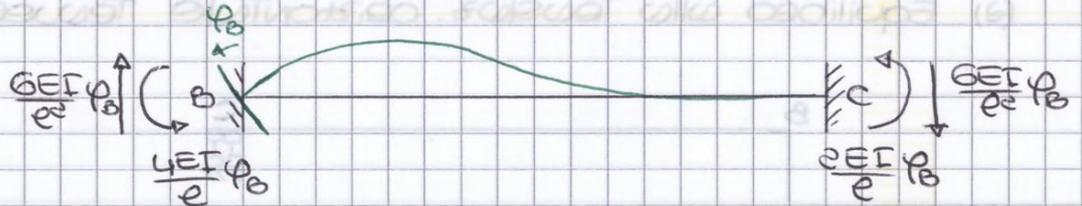
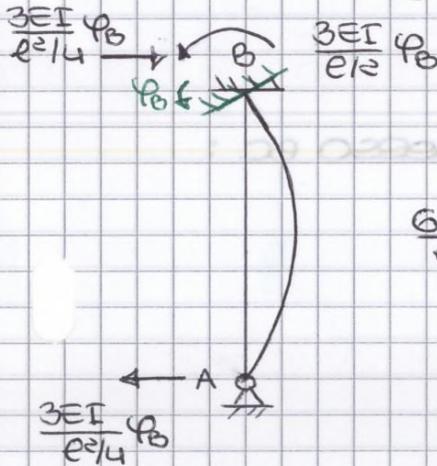
$h \equiv$ spessore trave
(su cui esiste
gradiente)

INCOGNITE
CINEMATICHE:

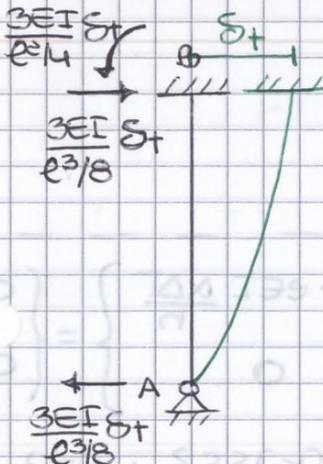
$$\varphi_B, \delta_t$$

($t \equiv$ traverso)

IMPONGO: $\varphi_B, \delta_t = 0$



IMPONGO: $\delta_t, \varphi_B = 0$



$$(a) \Rightarrow \varphi_b = - \frac{24EI}{e^3} \delta_t \cdot \left(\frac{e^2}{12EI} \right) = - e \frac{\delta_t}{e}$$

$$(f) \Rightarrow - \frac{20EI}{e^2} \delta_t + \frac{12EI}{e^2} \delta_t = 2EI \frac{\alpha \Delta T}{h}$$

$$\delta_t = - \frac{1}{4} \frac{\alpha \Delta T e^2}{h}$$

$$\varphi_b = \frac{1}{2} \frac{\alpha \Delta T e}{h}$$

TROVO LE REAZIONI VINCOLARI :

$$D_A = 0 \quad (\text{CERNIERA})$$

$$D_{BA} = 3EI \frac{\alpha \Delta T}{h} - 3EI \frac{\alpha \Delta T}{h} = 0$$

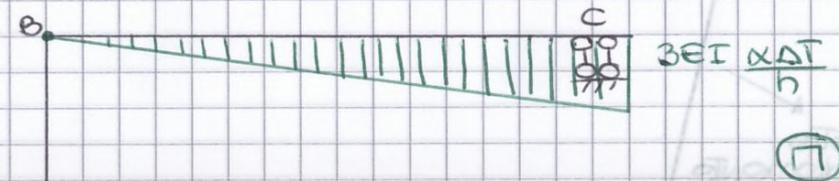
$$D_{BC} = 2EI \frac{\alpha \Delta T}{h} - 2EI \frac{\alpha \Delta T}{h} = 0$$

$$D_C = EI \frac{\alpha \Delta T}{h} + 2EI \frac{\alpha \Delta T}{h} = 3EI \frac{\alpha \Delta T}{h}$$

$$T_A = T_B = 0 \quad (\text{perché asta BA scorre})$$

$$T_{ec} = T_c = 3EI \frac{\alpha \Delta T}{he}$$

→ ASTA BA
è scorrevole



TELAJI (STRUTTURE IPERSTATICHE)

LUN. 7/10
LEZIONE 4
(FOSSO)

Telajo = sistema di travi a molti gradi di iperstaticità

Telajo piano = telajo caricato nel proprio piano

METODO DEI TELAJI

→ Costruisco la Reticolare Associata R.A. (bielle)

desendo la struttura (spost. e rotazioni nodali su

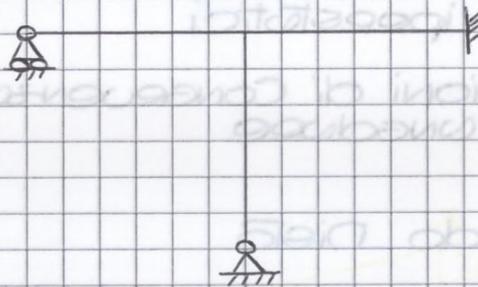
si ottiene inserendo un cerniero in tutti i Nodi - incastro

- nodi
- vincoli

R.A.	TELAJO	METODO
ISOSTATICA IPERSTATICA	n nodi fissi	metodo delle forze
labile	n nodi mobili	metodo misto

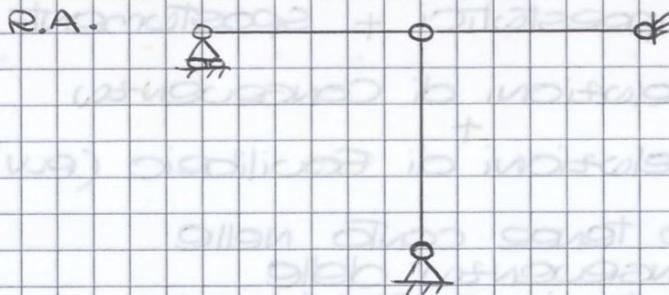
Esempi:

⊕ Telajo n nodi fissi



$g = 3$
 $V = 1 + 2 + 3 = 6$

⇓
iperstatico ($V > g$)



$g = 9$
 $V = 1 + 2 + 2 + 4 = 9$

⇓
isostatico

⇓
Telajo n nodi fissi

Siv: $n \equiv$ Grado di iperstaticità

$e \equiv$ Grado di libertà

METODO FISTO	
INCOGNITE	EQUAZIONI
$n+e$ momenti nei nodi - INCOSTANTE	$n+e$ EQUAZ. di CONGRUENZA UNESURE
$+e$ COORDINATE GENERALIZZATE	$+e$ EQUAZIONI di EQUILIBRIO
$n+2e$	$n+2e$

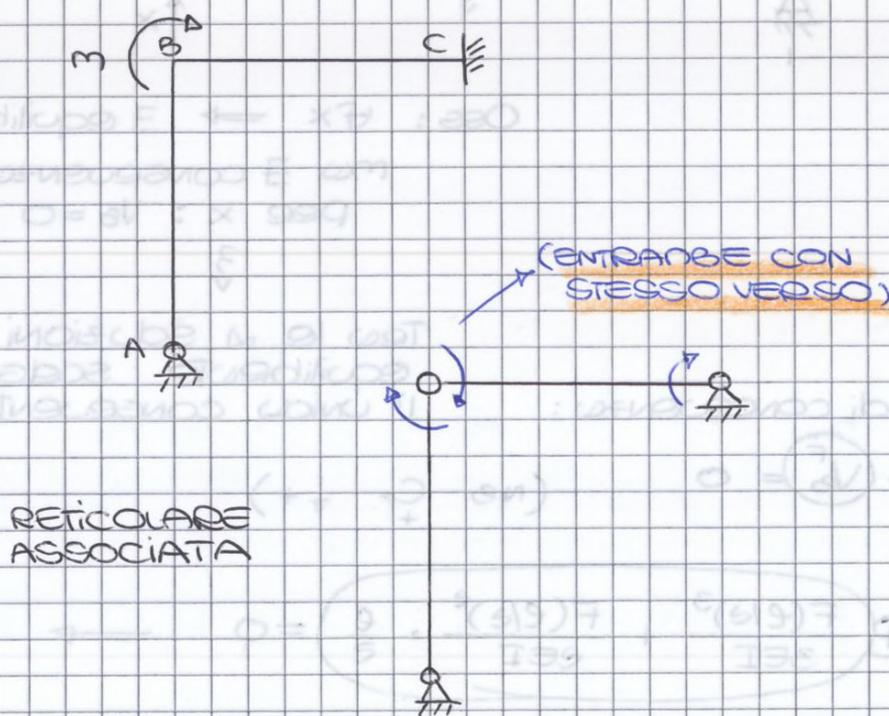
(*) Ricorriamo al PV per scrivere Equaz. di Equilibrio:

Consideriamo \rightarrow UN sist. forte (S.F.) reale
 \rightarrow UN sist. spost. (S.S.) virtuale
 "CINEMATISMO" (spost. rigido)

PV: $L_{v,EST} = L_{v,INT}$ (spostum. rigido)

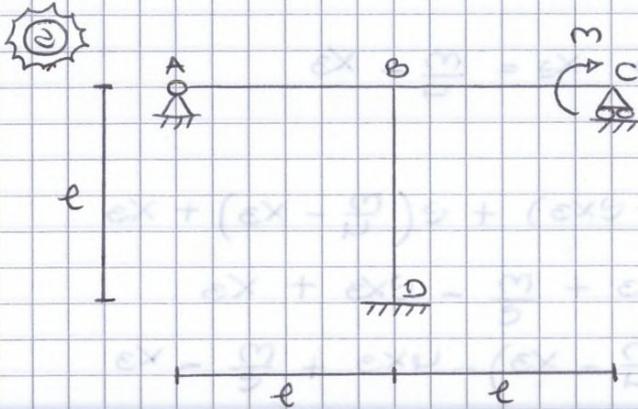
H_p : piccoli spostamenti

OSSERVAZIONE: Coppia concentrata



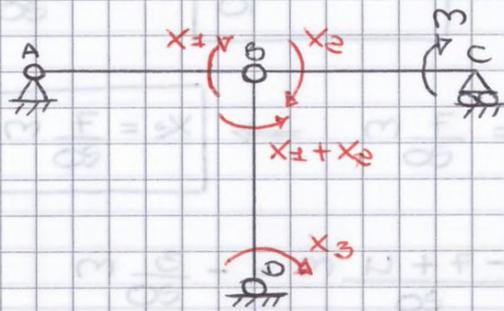
$$\Rightarrow -\frac{x_1 e^3}{3EI} + \frac{F e^3}{2EI} + \frac{F e^3}{6EI} = 0$$

$$x = 3F \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{6} \right) = 3F \frac{2+3}{48} = \frac{5}{16} F$$



$\begin{matrix} C=3 \\ V=6 \end{matrix} \Rightarrow 3 \text{ volte iperstatica}$

Reticolare associata:



$\begin{matrix} C=9 \\ V=9 \end{matrix} \Rightarrow \text{isostatica (Telvio o Nodi Fissi)}$

condizioni interne: $e(n-f)$

numero delle forze (pues)

Oss. (conservazione dei momenti nel nodo i)

$$\sum x_i = \begin{cases} 0 & \text{se nodo scuro} \\ m & \text{se nodo caricato} \end{cases}$$

3 Equazioni di CONGRUENZA:

1) $\varphi_{BA} = \varphi_{BC}$

2) $\varphi_{BA} = \varphi_{BD}$

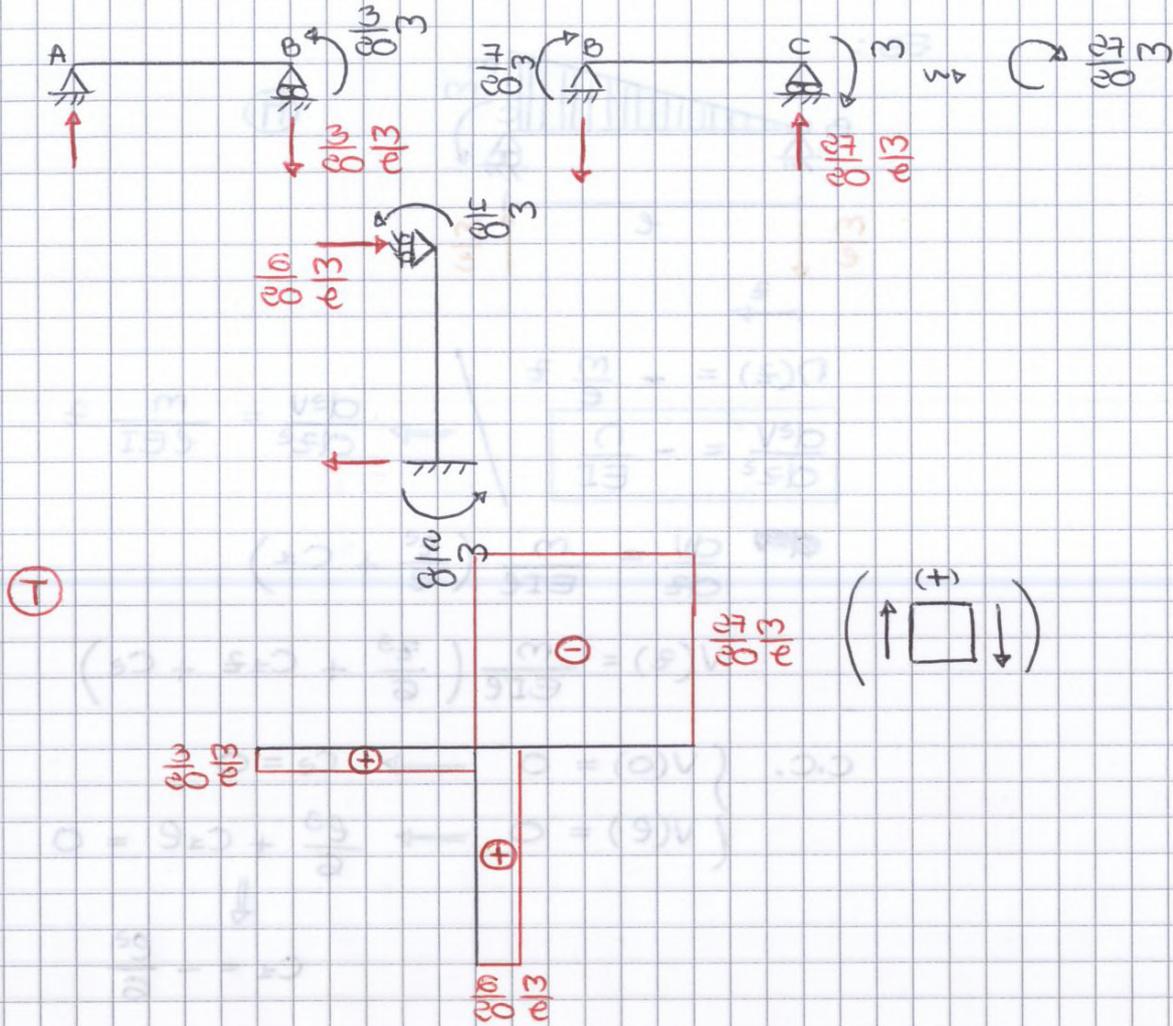
3) $\varphi_D = 0$

1)
$$-\frac{x_1 e}{3EI} = -\frac{x_2 e}{3EI} + \frac{m e}{6EI}$$

2)
$$-\frac{x_1 e}{3EI} = \frac{(x_1 + x_2) e}{3EI} + \frac{x_3 e}{6EI}$$

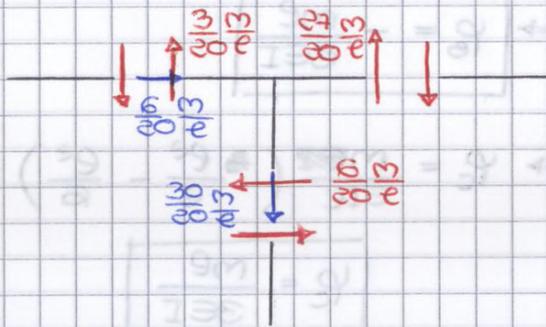
3)
$$-\frac{x_3 e}{3EI} - \frac{(x_1 + x_2) e}{6EI} = 0$$

$T = 10$

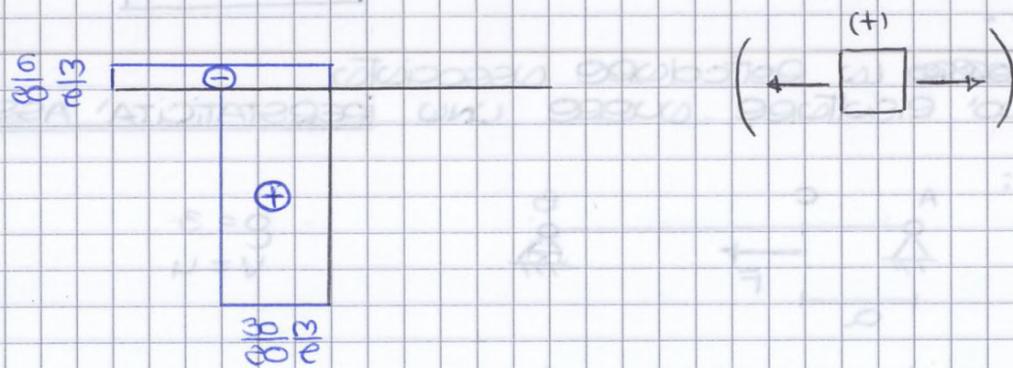


$N = 10$

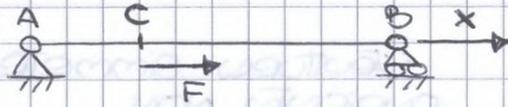
Equilibrio nodo B:



(2)



(18)



Equaz. di Convergenza:

$\mathcal{D}_B = 0$ (sostanz. orizzontale nullo)

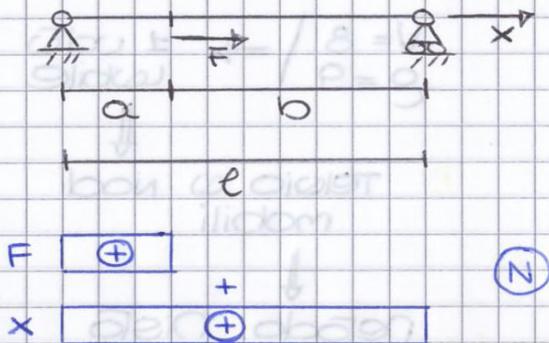
$$\mathcal{D}_B = \mathcal{D}_B^F + \mathcal{D}_B^x = 0$$

Ricordiamo:

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA} \quad \text{deform. assiale}$$

$$\frac{Fa}{EA} + \frac{x e}{EA} = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{x = -\frac{Fa}{e}}$$

essendo:



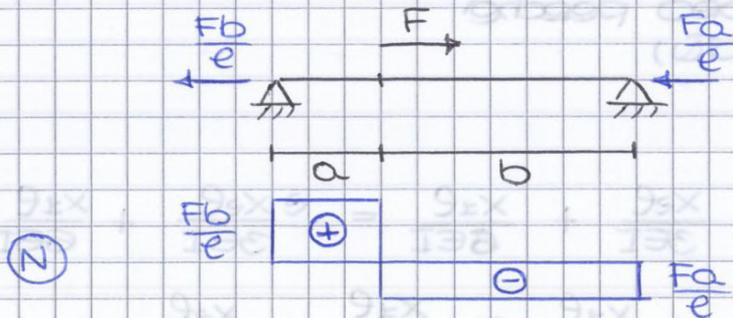
Quindi:



$$x_A + \frac{Fa}{e} = F \quad \longrightarrow \quad x_A = F - \frac{Fa}{e} = \frac{F}{e}(e-a) = \frac{Fb}{e}$$

$$\boxed{x_A = \frac{Fb}{e}} \quad \text{ur Come ci aspettavamo}$$

Quindi:



$$\rightarrow -\frac{2e}{3EI} (x_e - Fe) - \frac{2x_e e}{3EI} + (x_e - Fe) \frac{e}{6EI} = \frac{x_e e}{6EI}$$

$$x_e \left(-\frac{2e}{3EI} - \frac{2e}{3EI} + \frac{e}{6EI} - \frac{e}{6EI} \right) = -\frac{2Fe^2}{3EI} + \frac{Fe^2}{6EI}$$

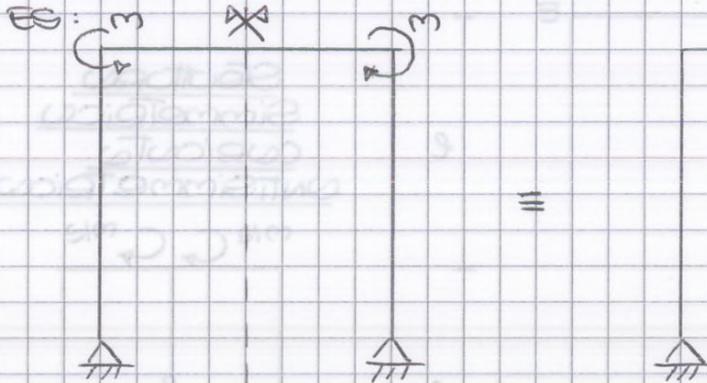
$$x_e = -\frac{3}{4} \cdot F \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3} \right) = -\frac{3}{4} F \left(\frac{1-4}{8} \right) = -\frac{1}{8} F(-3)$$

↓

$$x_e = \frac{3}{8} Fe$$

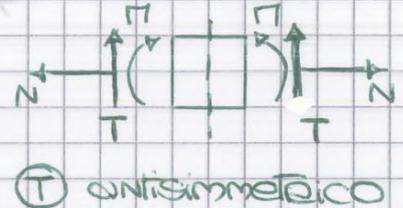
(importante!) Osservazione: Strutture Simmetriche

- caricate simmetricamente

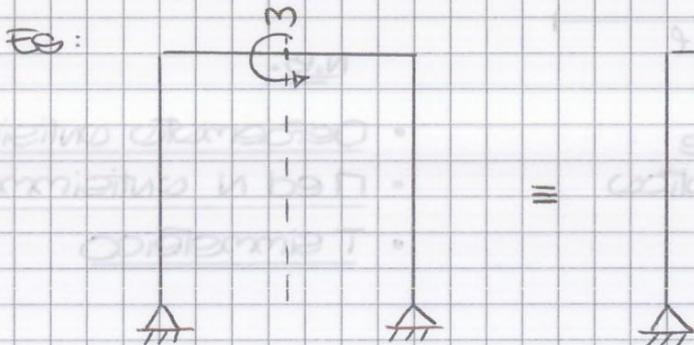


$\begin{cases} M, N \neq 0 \\ T = 0 \end{cases} \Rightarrow$ spostamento \perp asse di simmetria e rotazione NON ammessi

Nella sez. di simmetria:

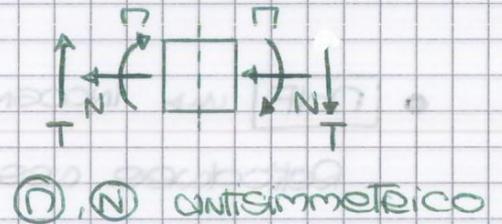


- caricate antisimmetricamente

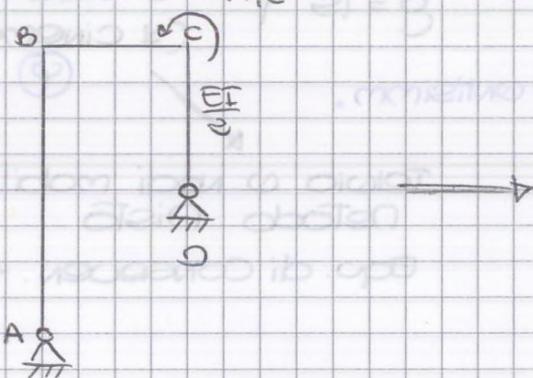


$\begin{cases} M = N = 0 \\ T \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ spostam. lungo l'asse di simmetria NON ammesso

Nella sez. di simmetria:



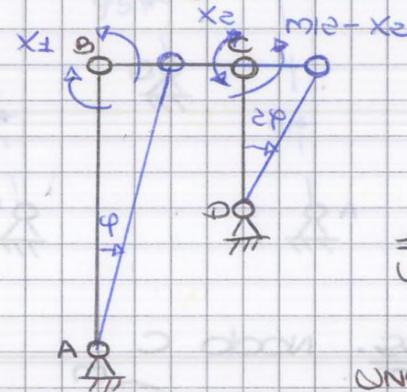
III) caso: No studio motu':



N.B. Dimezzo l'inezio (NON fisicamente il pilastro)

sempre hp: indeformabilità assiale

Pericolose associate:



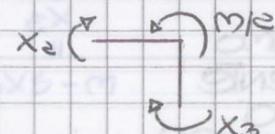
$U = 3$
 $\rho = 1$

\pm uolo uibile

anche in tal caso, nasce \pm cinematismo:

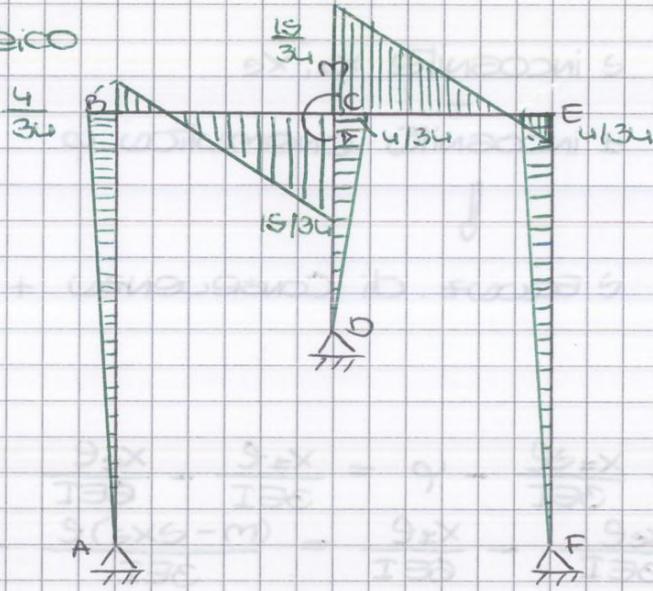
Ⓢ

oss: nodo c



$m/2 = x_2 + x_3$
 $x_3 = m/2 - x_2$

$\Pi = \frac{1}{3}$
antisimmetrico



$$x_3 = 3 - 2x_2 = 3 - 2 \frac{15}{34} = \frac{4}{34} \text{ m}$$

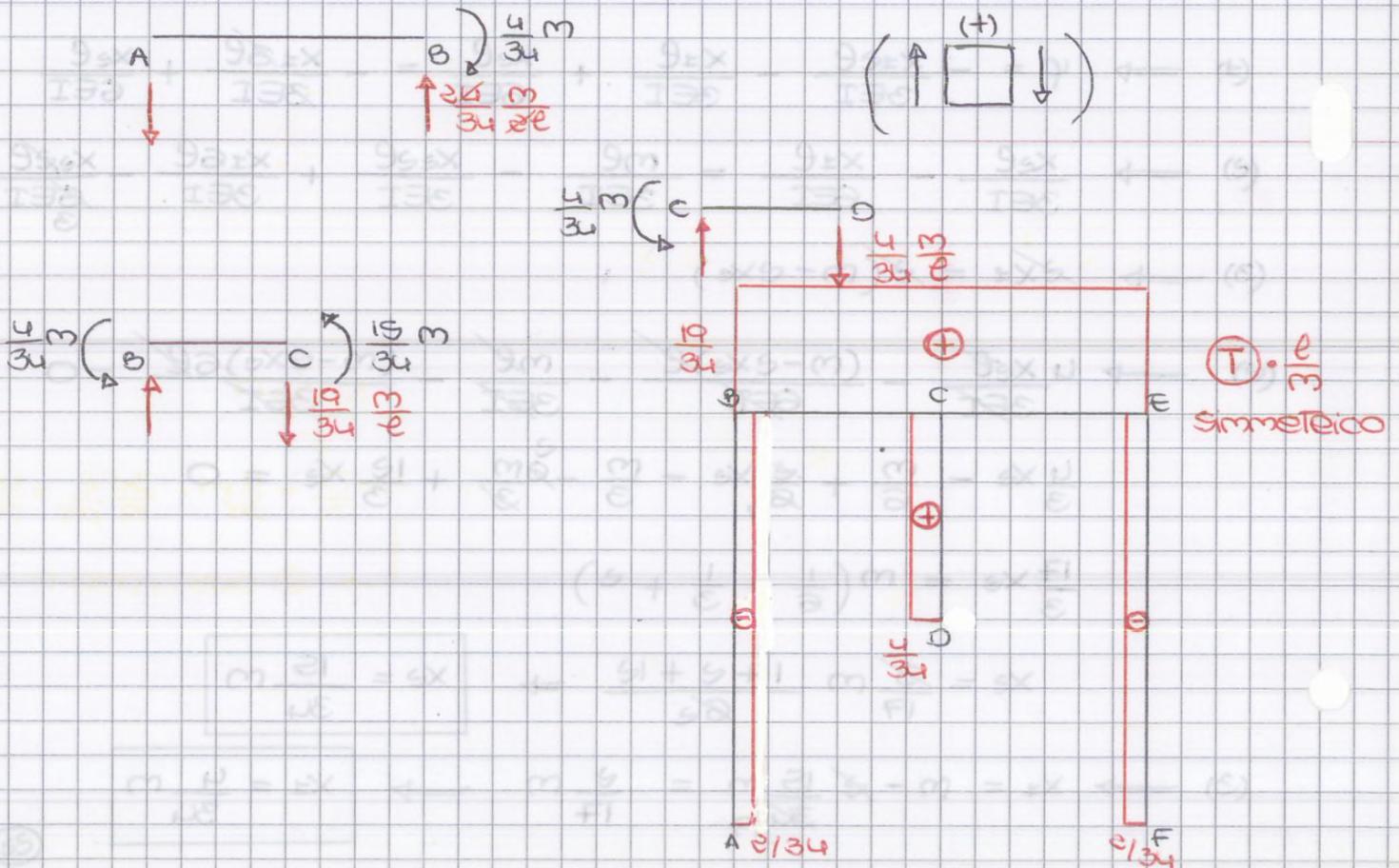
Calcolo φ :

$$\varphi = \frac{x_2 e}{6EI} - \frac{x_1 e}{EI} = \frac{15}{34} \frac{me}{6EI} - \frac{4}{34} \frac{me}{EI} =$$

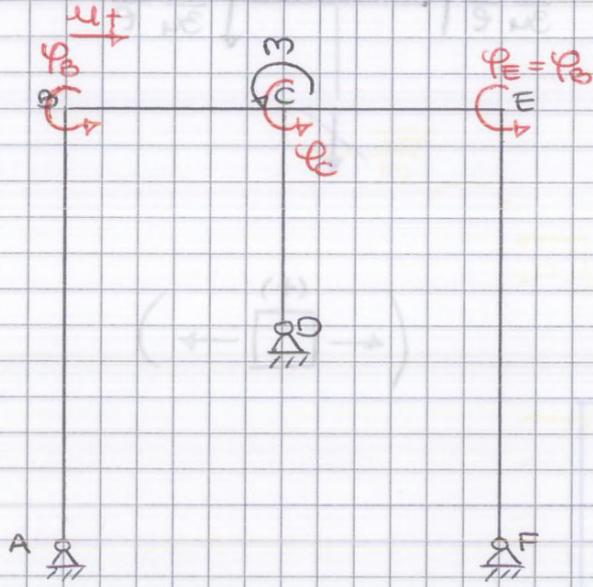
$$= \frac{me}{EI} \left(\frac{15}{68} - \frac{4}{34} \right) = - \frac{3}{68} \frac{me}{EI}$$

→ punto del verso opposto a quello ipotizzato

$T = ?$



• **NDs** \Rightarrow INCOGNITE: spostamenti
(Equaz. risolutive: Equilibrio)

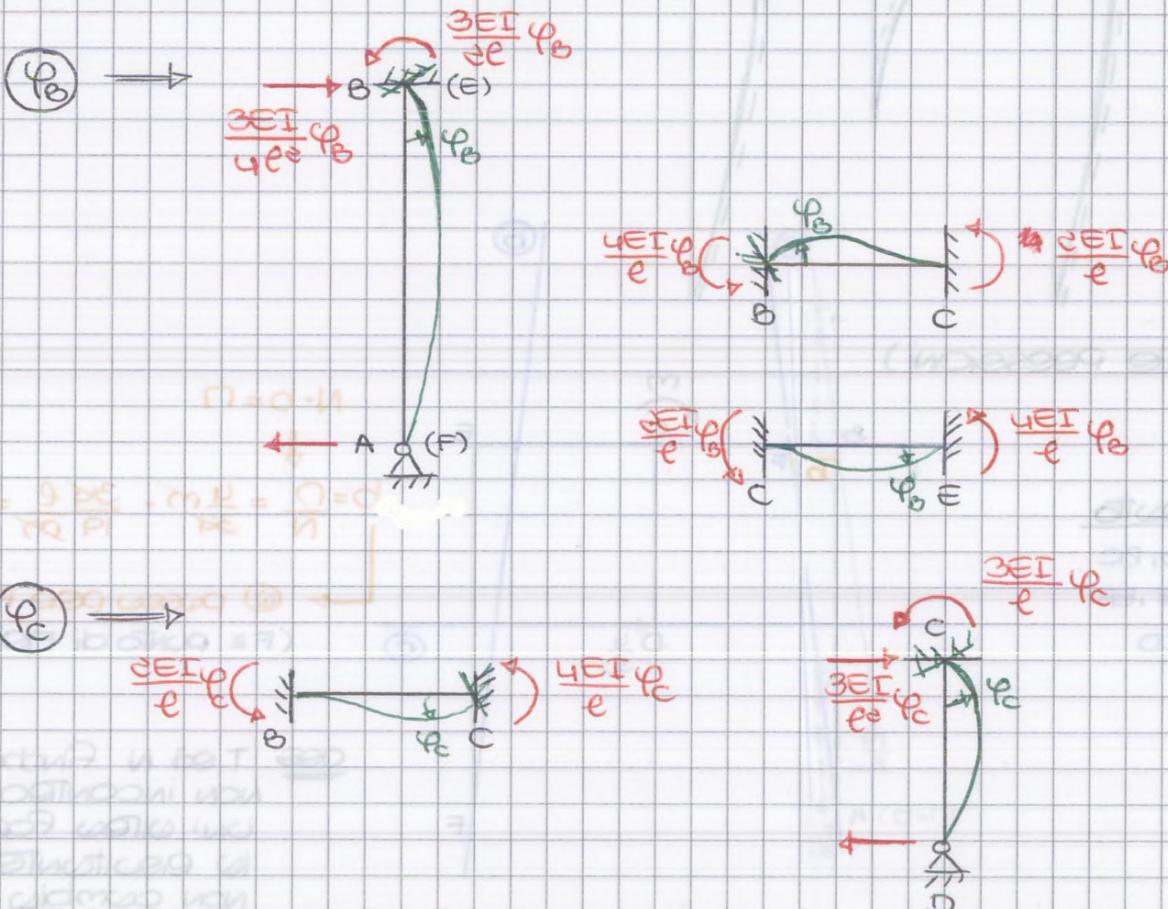


INCOGNITE: $\varphi_B, \varphi_C, u+$
spostam. trasverso
(Ho: positivi)

ND. IN GENERALE:

NDs \Rightarrow e' meglio avere tanti incastri:
+ lo spost. e' vincolato \rightarrow - INCOGNITE

NDf \Rightarrow e' meglio avere tante cerniere:
- INCOGNITE



$$\begin{cases} 1) \frac{11}{e} \varphi_B + 2 \varphi_C + \frac{3}{4e} \mu_t = 0 \\ 2) 4 \varphi_B + 11 \varphi_C + \frac{3}{e} \mu_t = \frac{me}{EI} \\ 3) \frac{3}{e} \varphi_B + 3 \varphi_C + \frac{518}{4e} \mu_t = 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} 1) &\Rightarrow \varphi_C = -\frac{11}{4} \varphi_B - \frac{3}{8e} \mu_t \\ 3) &\Rightarrow \varphi_B = -2 \varphi_C - \frac{5}{2e} \mu_t \end{aligned} \quad \Rightarrow *$$

$$\Rightarrow \varphi_B = -2 \left(-\frac{11}{4} \varphi_B - \frac{3}{8e} \mu_t \right) - \frac{5}{2e} \mu_t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_B - \frac{11}{2} \varphi_B = \frac{3}{4e} \mu_t - \frac{5}{2e} \mu_t$$

$$\varphi_B = -\frac{2}{9} \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{2} \right) \frac{\mu_t}{e} = \frac{7}{18} \frac{\mu_t}{e}$$

$$2) \frac{11}{4} \cdot \frac{7}{18} \frac{\mu_t}{e} + 11 \left(-\frac{11}{4} \varphi_B - \frac{3}{8} \frac{\mu_t}{e} \right) + 3 \frac{\mu_t}{e} = \frac{me}{EI}$$

$$\frac{14}{9} \frac{\mu_t}{e} - \frac{33}{8} \frac{\mu_t}{e} + 3 \frac{\mu_t}{e} - \frac{121}{4} \cdot \frac{7}{18} \frac{\mu_t}{e} = \frac{me}{EI}$$

$$\left(\frac{14}{9} - \frac{33}{8} + 3 - \frac{847}{72} \right) \frac{\mu_t}{e} = \frac{me^2}{EI}$$

$$\frac{112 - 297 + 216 - 847}{72} \mu_t = \frac{me^2}{EI}$$

$$-\frac{816}{72} \mu_t = \frac{me^2}{EI} \quad \Rightarrow \quad \mu_t = -\frac{3me^2}{34EI}$$

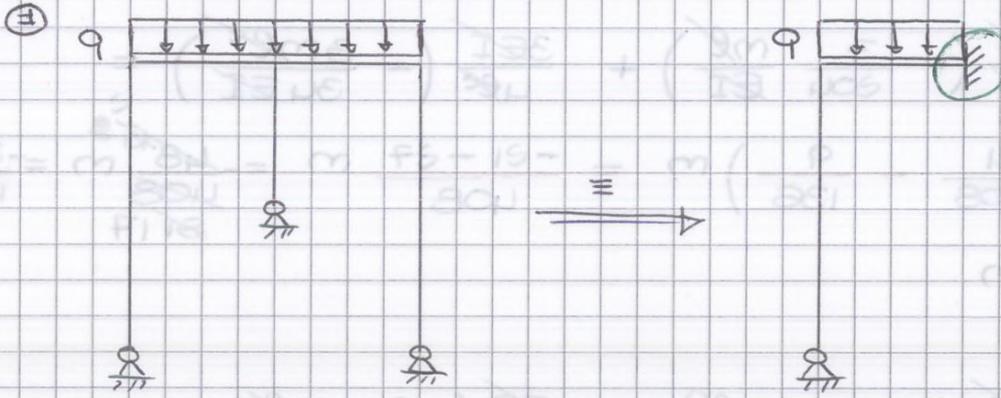
$$\varphi_B = -\frac{7}{180} \cdot \frac{3}{34} \frac{me^2}{EI} = -\frac{7}{204} \frac{me}{EI}$$

$$\varphi_B = -\frac{7}{204} \frac{me}{EI}$$

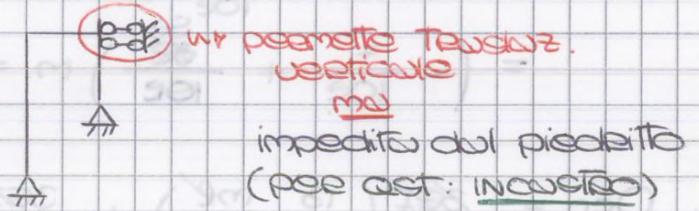
$$\varphi_C = \left[-\frac{11}{4} \left(-\frac{7}{204} \right) - \frac{3}{8} \left(-\frac{3}{34} \right) \right] \frac{me}{EI} =$$

$$= \left[\frac{77}{816} + \frac{9}{272} \right] \frac{me}{EI} = \frac{77 + 27}{816} \frac{me}{EI} = \frac{104}{816} \frac{me}{EI} \rightarrow$$

(importante)
Osservazione: Strutture simmetriche caricate simmetricamente

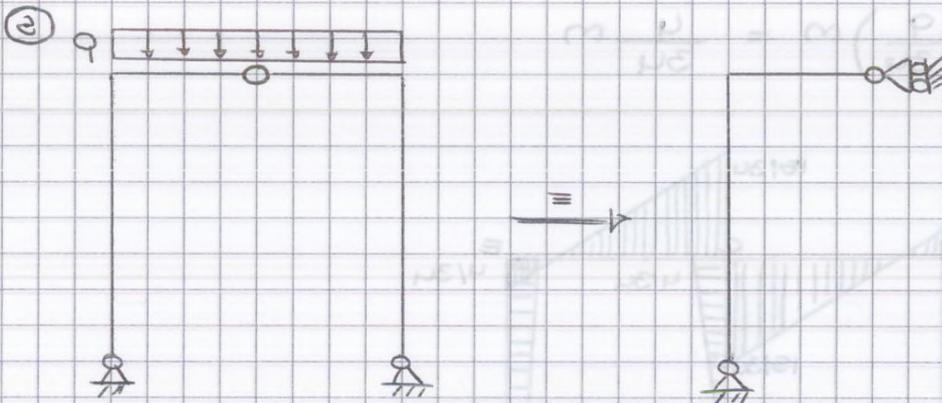


N.B. Per simmetriche:



per permette trasl. verticale
ma

impedito dal piedritto
 (per ast. incurvato)



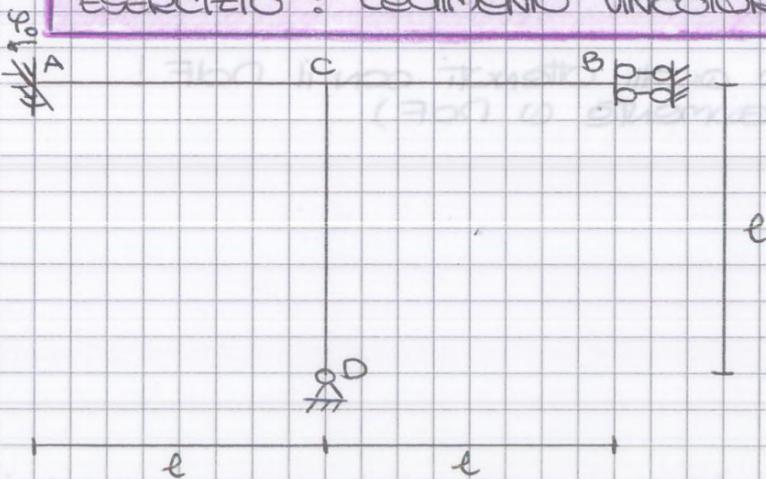
N.B.


 (permette trasl. vert.)


 (permette rotazione)


 (permette trasl. vert. + rotazione)

Esercizio: cedimento vincolare



Giu. 10/10
lezione 6
 (Corredo)

$$V=7 \quad g=3 \quad \rightarrow \quad 7-3=4$$

4 vincoli iperstatici

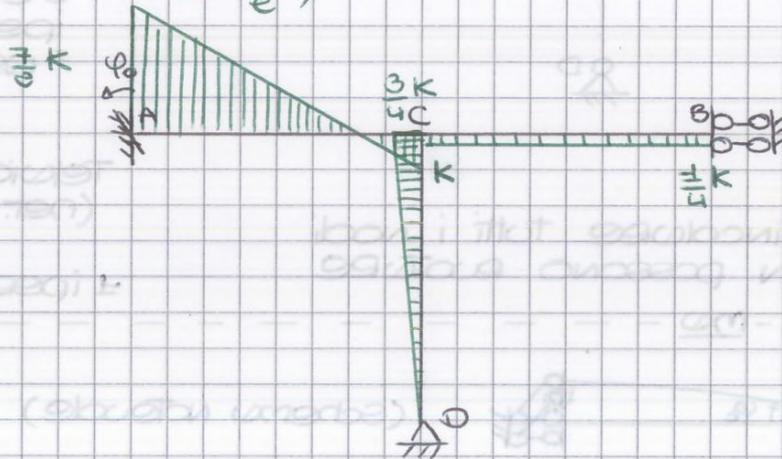
$$\rightarrow \left(\frac{14}{3} - \frac{e}{3} \right) x_3 = \varphi_0 \frac{EI}{e}$$

$$\frac{14}{3} x_3 = \varphi_0 \frac{EI}{e} \rightarrow \boxed{x_3 = \frac{1}{4} \varphi_0 \frac{EI}{e}}$$

$$\boxed{x_2 = - \varphi_0 \frac{EI}{e}}$$

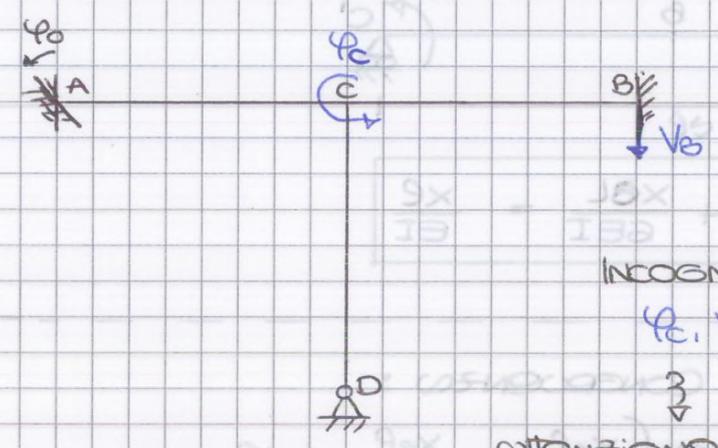
$$\boxed{x_1 = \frac{7}{e} \varphi_0 \frac{EI}{e}}$$

① (posso: $\kappa = \varphi_0 \frac{EI}{e}$)



$$x_2 + x_3 = \left(-1 + \frac{1}{4} \right) \varphi_0 \frac{EI}{e} = -\frac{3}{4} \kappa$$

nds

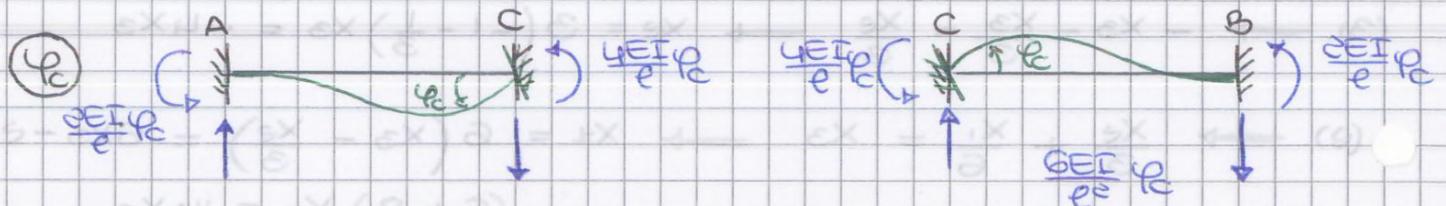


INCOGNITE: ③
 φ_0, V_B (parametri cinematici)

ATTENZIONE: φ_0 IN A
 MU' E' NOTO!

2 Equaz. di Equilibrio:

- Rotaz. in C \rightarrow \mathcal{M} in C
- Traslaz. vert. in B \rightarrow T in B



$$\varphi_c = - \frac{\frac{2}{e}}{\frac{1}{\frac{3}{4}e}} \varphi_0 e \Rightarrow \boxed{\varphi_c = -\frac{1}{4} \varphi_0}$$

(opposto rispetto a quello ipotizzato)

$$M_{AC} = \frac{2EI}{e} \left(-\frac{1}{4} \varphi_0\right) + \frac{4EI}{e} \varphi_0 = \left(-\frac{1}{2} + 4\right) \varphi_0 \frac{EI}{e} = \frac{7}{2} \frac{EI}{e} \varphi_0$$

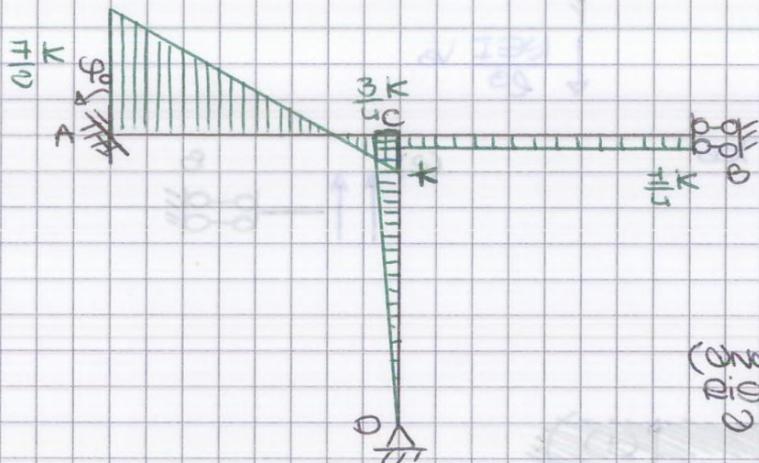
$$M_{CA} = \frac{4EI}{e} \left(-\frac{1}{4} \varphi_0\right) + \frac{2EI}{e} \varphi_0 = \varphi_0 \frac{EI}{e}$$

$$M_{CB} = \frac{4EI}{e} \left(-\frac{1}{4} \varphi_0\right) + \frac{3EI}{e^2} \left(\frac{1}{8} \varphi_0 e\right) = \left(-1 + \frac{3}{4}\right) \varphi_0 \frac{EI}{e} = -\frac{1}{4} \varphi_0 \frac{EI}{e} = -M_{BC}$$

$$M_{CO} = \frac{3EI}{e} \left(-\frac{1}{4} \varphi_0\right) = -\frac{3}{4} \varphi_0 \frac{EI}{e}$$

$$M_D = 0$$

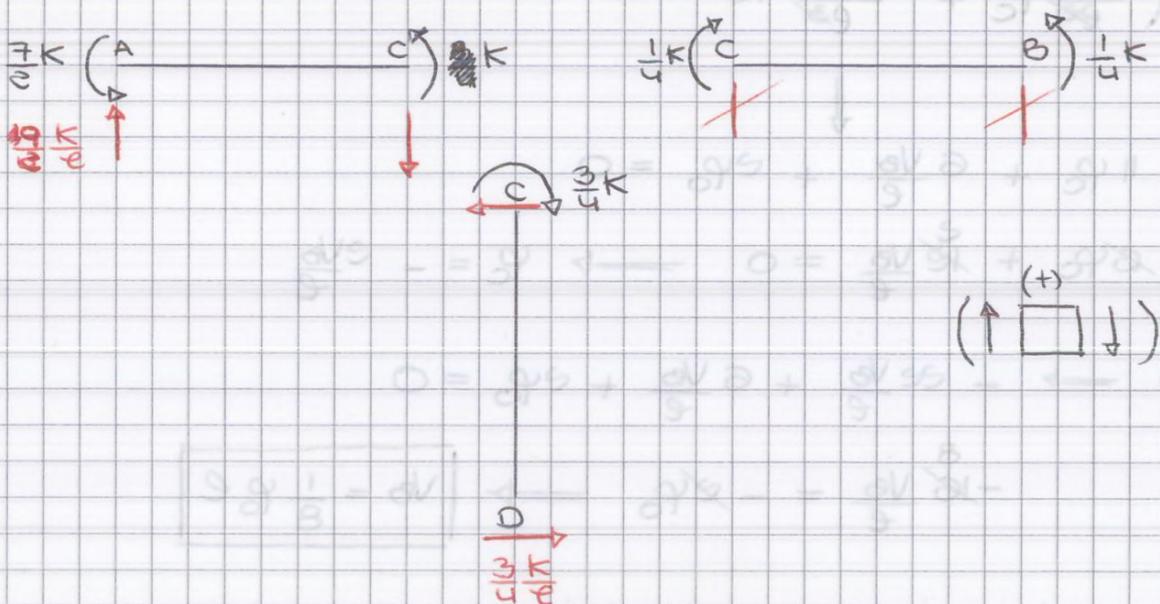
⊕
 POSO:
 $(K = \frac{40EI}{e})$



(Analoghi risultati a PDF)

Da qui in poi, si procede in modo analogo con i nodi:

$$T = 1/2$$

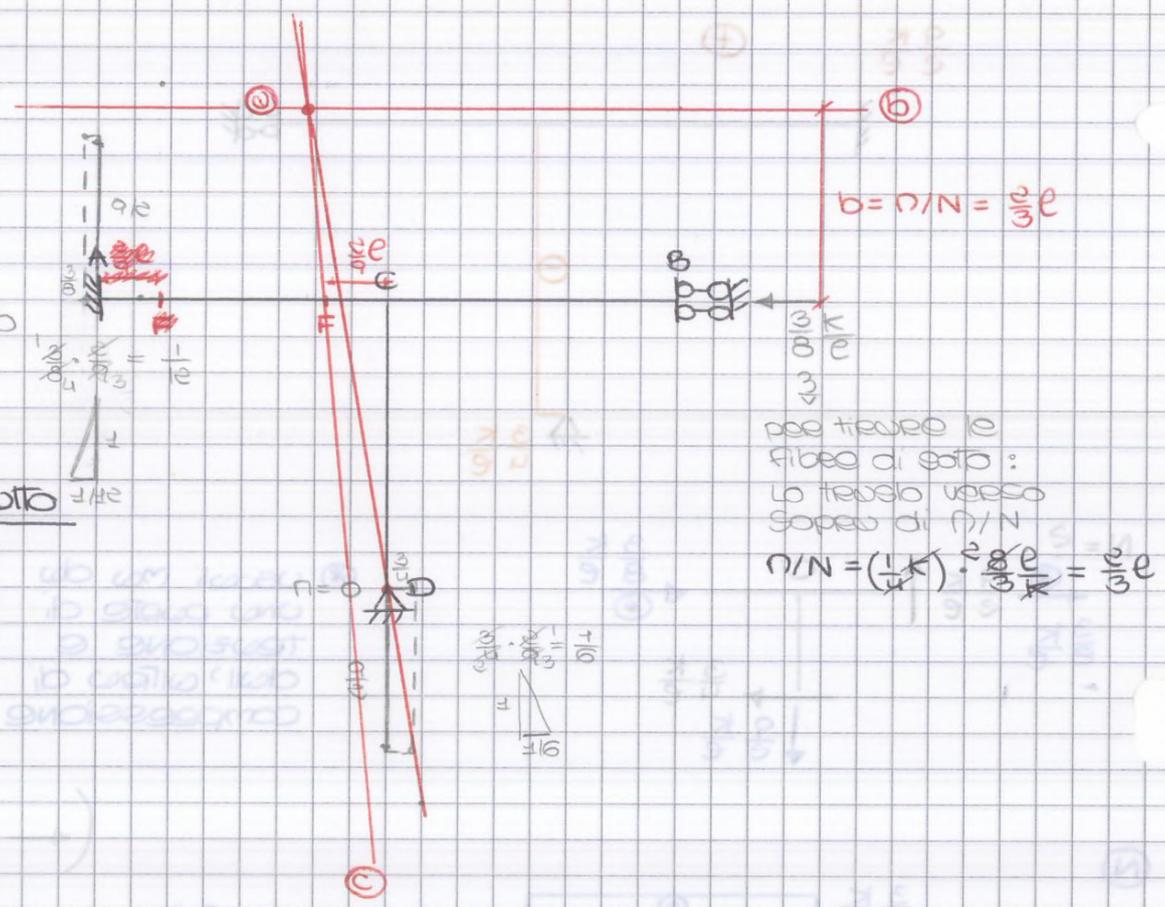


cdp :

(a) possono
 dare $n=0$
 (PUNTO di
 FLESSO) e
 per equilibrio
 (b), (c), (d)
 possono
 tutte per
 un punto di
 INCONTRO

cdp	teoria
(a)	CD
(b)	CB
(c)	AC

pendenza
> di b



- La prima cosa da fare è determinare il risultante delle forze esterne (donde passare da 3 forze a 1 unica forza esterna) e successivamente determinare le reazioni vincolari per via grafica.



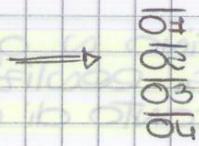
1. Per ricavare la risultante R , costruisco il poligono delle forze (vedi dietro)

N.B. Il sistema di forze può essere ridotto ad 1 unica forza R applicata sull'asse centrale del sistema di forze stesso



Per determinare l'asse centrale del sistema di forze esterne:

- Fisso un polo arbitrario O e traccio i raggi proiettanti che uniscono O con i vertici delle forze F_1, F_2, F_3



- Fisso un altro polo arbitrario O' :

- per O' traccio la // al raggio proiettante $\overline{O'F_1}$ (chiamiamo 1' il punto di intersezione tra tale retta e la retta d'azione di F_1)
- per 1' traccio la // al raggio proiettante $\overline{O'F_2}$ (chiamiamo 2' il punto di intersezione tra tale retta e la retta d'azione di F_2)
- per 2' traccio la // al raggio proiettante $\overline{O'F_3}$ (chiamiamo 3' il punto di intersezione tra tale retta e la retta d'azione di F_3)
- per 3' traccio la // al raggio proiettante $\overline{O'F_1}$



determiniamo il punto di intersezione tra il 1° raggio (quello passante per O') e quest'ultimo



Tale punto, si dimostra essere un punto dell'asse centrale del sistema (da tale punto traccio l'asse che è // a R)

2. Ricavo le reazioni vincolari R_A, R_B per via grafica

N.B. 3 forze (R_A, R_B, R) per essere in equilibrio devono passare per lo stesso punto

Conosciamo di R_A la retta d'azione dovendo questa passare per A ed essere \perp al piano di scorrimento

↳ Dunque la retta d'azione di R_B dovrà passare per P_3 .

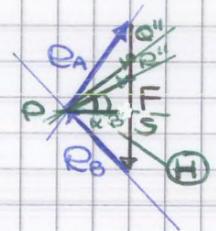
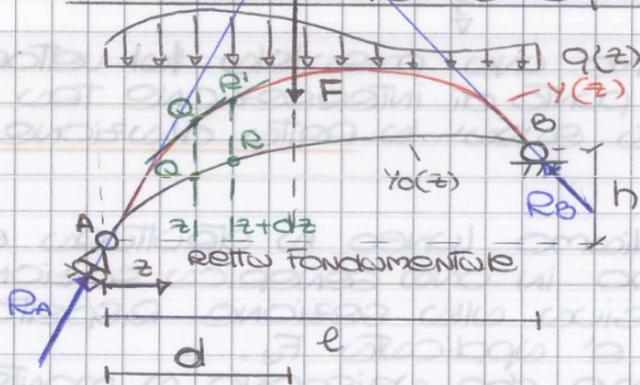
In tal modo abbiamo ottenuto la Cdp che nel caso in esame è una spezzata che passa per A, P_1, P_2, P_3, B

↳ "inviluppo delle rette d'azione delle successive risultanti"

N.B. Nel caso di forze concentrate in caso delle pressioni sopra una spezzata: POLIGONO FUNICOLARE

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLA Cdp PER CARICHI DISTRIBUITI EQUIVERSI

⊙ Esempio: Struttura analoga all'Esempio ③ ma soggetta ad un sistema continuo di forze equiverse $q(z)$



Sia: $y_0(z) \equiv$ distanza dell'asse dell'arco dalla retta fondamentale (funzione che definisce la trave)

per integrazione si può ricavare sia

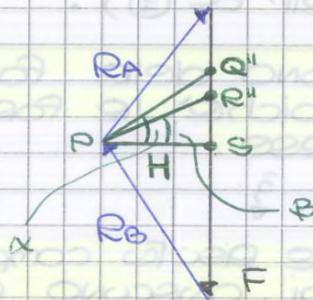
$$F = \int_0^l q(z) dz \quad \text{Risultante delle forze}$$

così come il suo braccio di rispetto alla retta $z=0$:

$$Fd = \int_0^l q(z) z dz \quad \implies d$$

In tal modo si è ricavato l'asse centrale del sistema di forze che sarà sicuramente verticale e avrà una distanza d di rispetto ad A .

Recapitolando:
(zoom)



$$q''e'' = q(z) dz$$

(incremento di carico distribuito)

Da considerazioni geometriche possiamo scrivere:

$$q''e'' = q''s - R''s = H(t_{\alpha x} - t_{\alpha B}) = -H(y'(e) - y'(a))$$

(metto un -
in fattore comune)

essendo: $t_{\alpha x}$ e $t_{\alpha B}$ le tangenti alla cdp rispettivamente in Q' ed P'

3
 dunque $t_{\alpha x}$ e $t_{\alpha B}$ rappresentano lo derivata prima della cdp calcolata in Q ed P rispetto a z ($y'(Q)$ e $y'(P)$)

per la proprietà transitiva:

$$q(z) dz = -H(y'(e) - y'(a))$$

$$\Downarrow y'(e) - y'(a) = dy' \quad \text{(sostituendo alla differenza il differenziale)}$$

$$q(z) dz = -H dy'$$

$$\Downarrow \frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{q(z)}{H}$$

Equazione differenziale della cdp per carichi distribuiti equiesesi

Equaz. differenziale del 2° ordine

$$\Downarrow \text{Impongo e c.c. : } \begin{cases} y(z=0) = 0 \\ y(z=l) = h \end{cases}$$

N.B.
 ovvero la cdp passerà per i vincoli estremi A e B (essendo questi il carrello e il capriero)

Inoltre:
 N.B. la cdp dovrà essere tangente in A e B alle relative reazioni esterne

↳ (infatti le prime risultanti parziali che si incontrano percorrendo la struttura da sx o da dx sono rispettivamente

$\rightarrow \boxed{\frac{d^2n}{dz^2} = -q(z)}$ per travi rettilinee

Osservazioni:

- Se l'arco ha esattamente n forme della cdp ($y=y_0$)

\Downarrow
 $n=0$ \neq punto dell'arco

Trav sezione e sezione
 verrebbe trasmessa
 solo compressione

\rightarrow

Situazione che
 si tende a
 realizzare con
 materiali non
 resistenti a
 trazione
 (Es: murature)

- Invertendo tutte le forze agenti sull'arco
 (e quindi anche le reazioni R_A, R_B)

\Downarrow
 Reazioni interne
 solo di trazione

\Downarrow

questo è il
 caso di funi
 (catenarie)

\Downarrow

Cdp invertita

N.B.

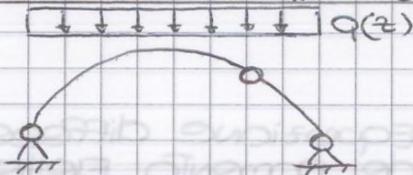
Una fune di
 lunghezza pari
 a quella della cdp,
 si disporrebbe secondo
 la configurazione di
 tale curva, non potendo
 sopportare altri sforzi
 se non quelli di trazione.
 ($n=0$)

\rightarrow

Fune
 \equiv
 Cdp

DETERMINAZIONE Cdp per strutture elementari

- Arco parabolico a 3 cerniere

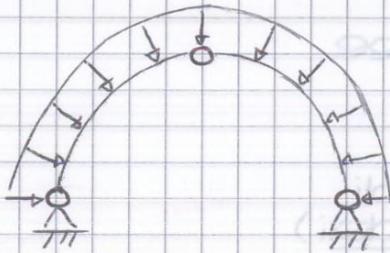


$q(z) = \text{cost} \rightarrow$ Cdp parabolica

La cdp deve
 passare per
 le 3 cerniere
 ($n=0$)

\rightarrow Per 3 punti
 passano \neq e \neq solo
 parabole:
 $y=y_0 \rightarrow$

● Arco semicircolare a 3 cerniere → soggetto a un carico distribuito radiale costante q



cdp \equiv asse dell'arco

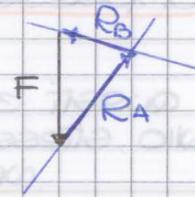
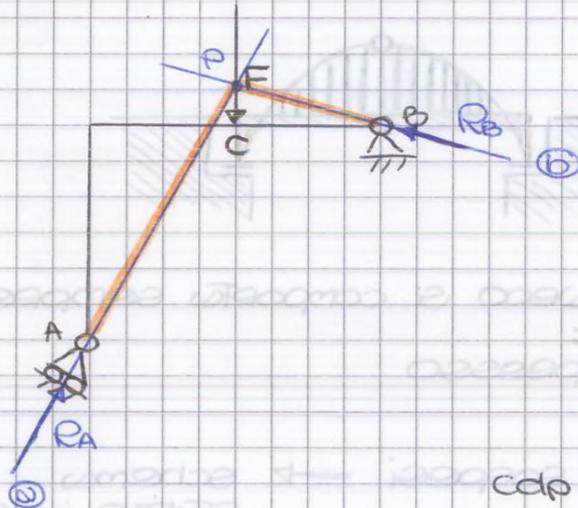
↓
 struttura soggetta in ogni sezione solo a sforzo normale di compressione
 ($T = M = 0$)

oss se il carico distribuito verticale è costante per unità di lunghezza dell'arco (e non di luce)

↓
 cdp non più esattamente parabolico ma bensì assume una forma detta "catenaria"

☀ ESEMPI APPLICATIVI

① Tenue ad L soggetta a F

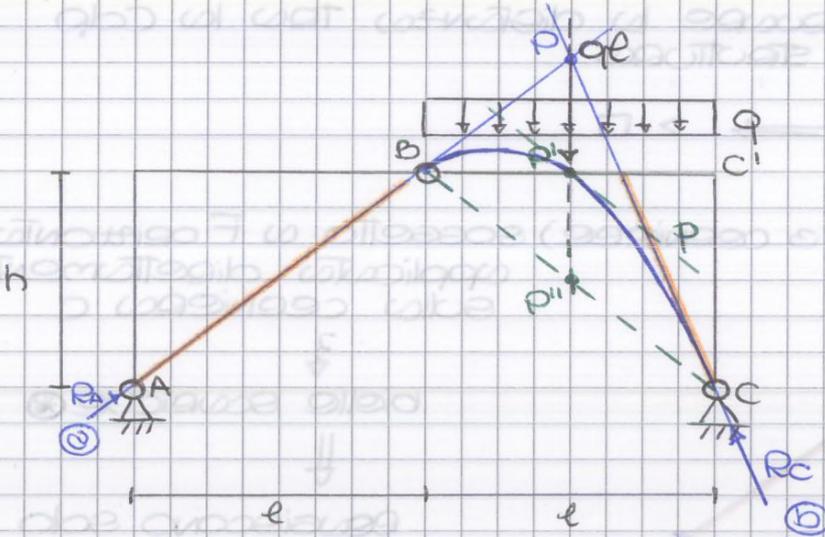


cdp	teutto
③	AC
⑥	CB

(la cdp coincide con la spartita APB)

osservo:
 la cdp è costituita dalla retta d'azione di R_A per tutti i punti compresi tra A e C (punto di applicazione della forza) e dalla retta d'azione di R_B per tutti i punti compresi tra B e C.

⑤ Portale a 3 cerniere soggetto a q



1°) Teuto AB sovraco:

la retta d'azione di R_A passerà per A e B

2°) $P \equiv$ punto d'incontro tra R_A e q

per P passerà la retta d'azione di R_C

3°) ① per AB

② per CC'

(se non ci fosse q , otterremmo come Cdp lo spezzato APC)

per EC'

→

Cdp parabola (parabola ad asse verticale)

→ costruiremo la parabola (come visto per n) per un grafico

Tale parabola passa per le cerniere B e C ($n=0$) e ammette in quei punti come tangenti le rette d'azione R_A ed R_C

⇓

Per facilitare la costruzione grafica si individueremo un terzo punto con la relativa tangente:

- Tracciamo la fondamentale ec

- individuiamo su:

$P'' \equiv$ intersezione della verticale per P con la fondamentale

- individuiamo:

$P' \equiv$ punto medio di PP''

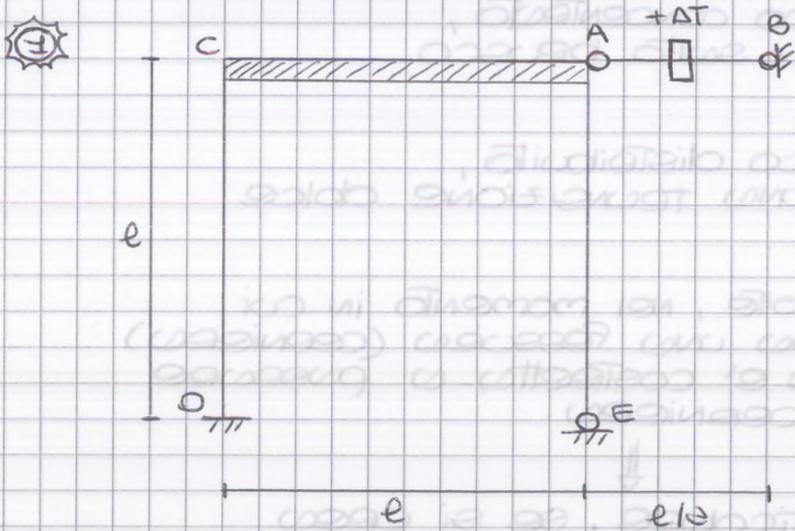
e per P' tracciamo la // alla fondamentale (p)

Si dimostra che la parabola passerà per P' e avrà come tangente p



Esercizi: NDS

16/10
LEZIONE 8
(CORSUO)



Tenore shear type
 (+)
 beam subjected to distribution
 TEMPERA
 COSTANTE
 (beam compressed)

Caso 1): H_p : indeformabilità assiale
 della biella AB

↗ (se non
 specificato,
 è sottinteso
 tale H_p)

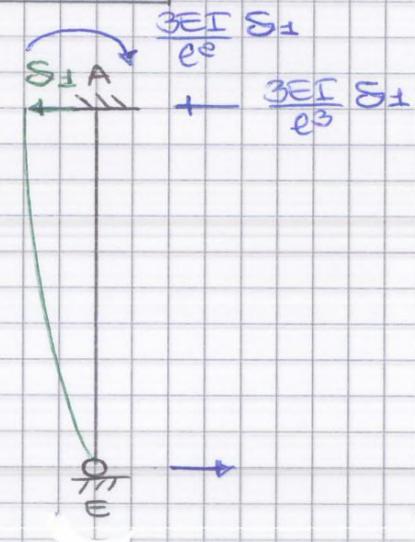
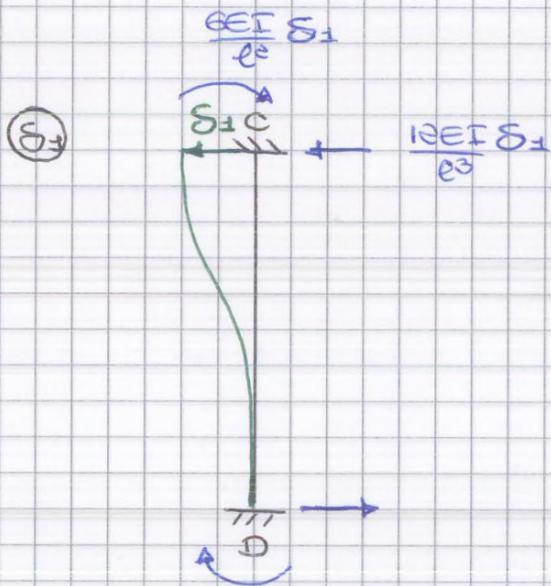
Incongnite cinematiche: δ_1, φ_1 ↗ uso lo schema:

NO INCOGNITE:
 Problema banale

è noto:
 $\delta_1 = \delta_2$
 ||

Allungamento
 dovuto a ΔT

$$\delta_1 = \alpha \Delta T \frac{e}{\epsilon}$$

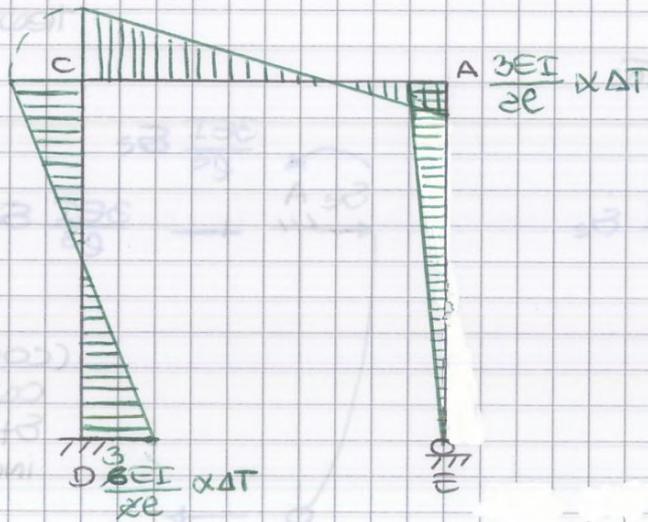


$$\epsilon_e = \frac{Ae^3 \alpha \Delta T}{15 \left(I + \frac{2Ae^2}{15} \right)} > 0$$

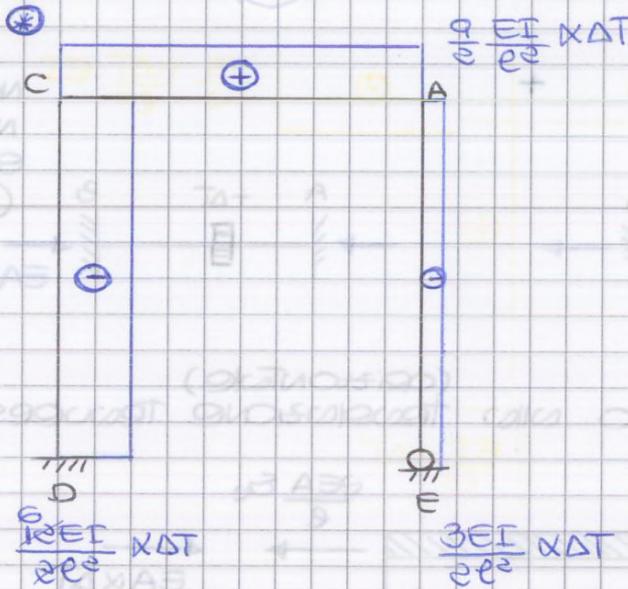
Quindi: Trovo i Diagrammi delle Sollecitazioni

Caso \neq

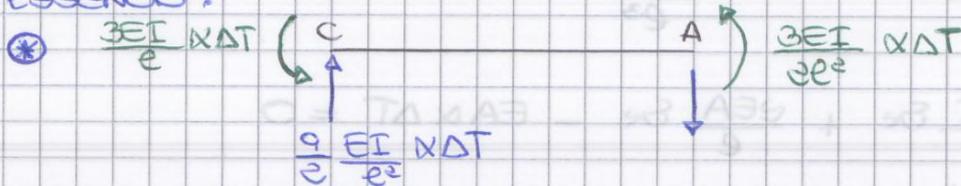
(M)



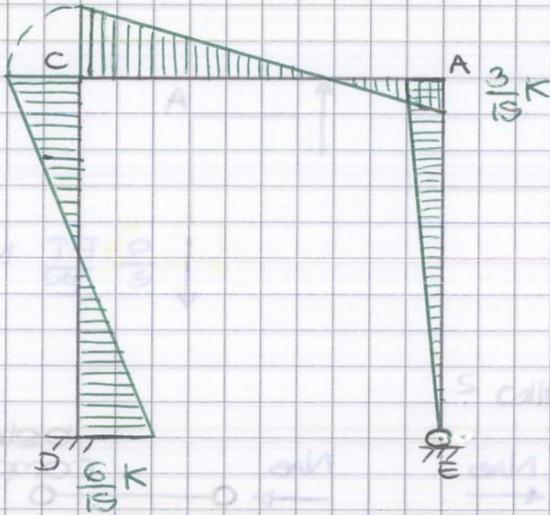
(T)



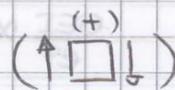
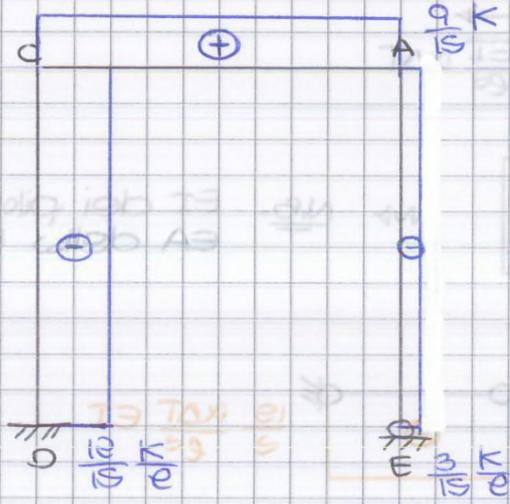
Essendo:



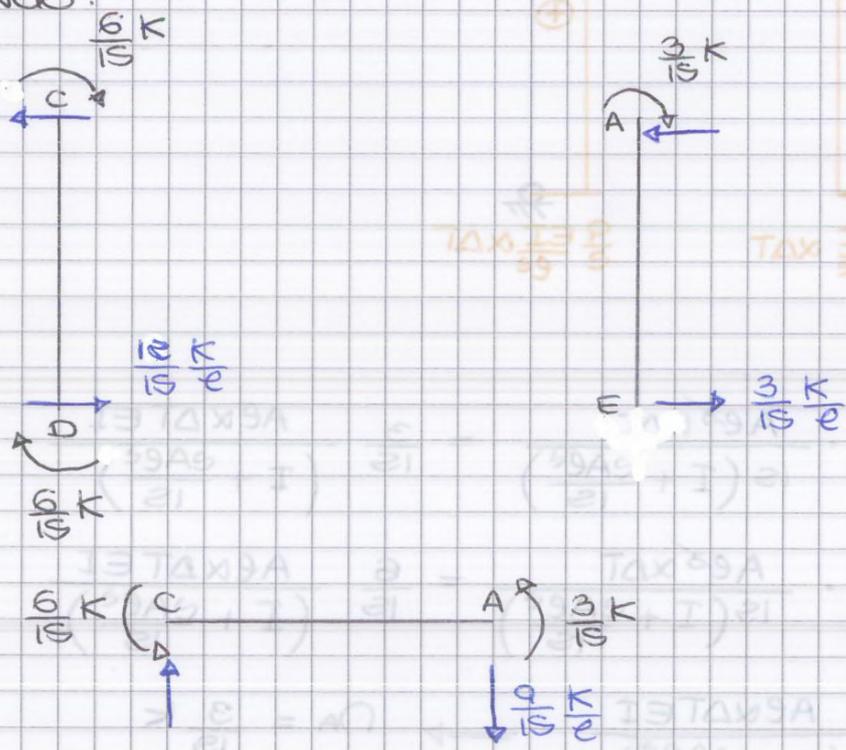
Π



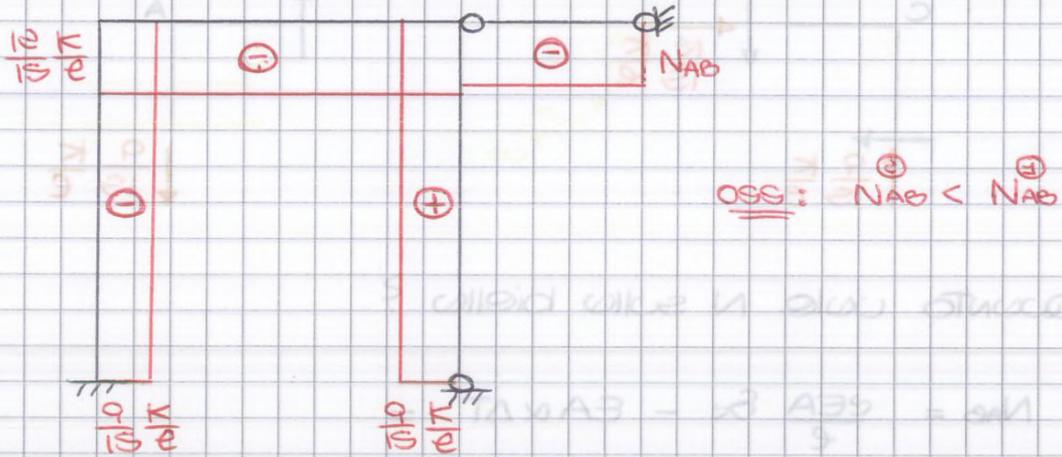
Τ



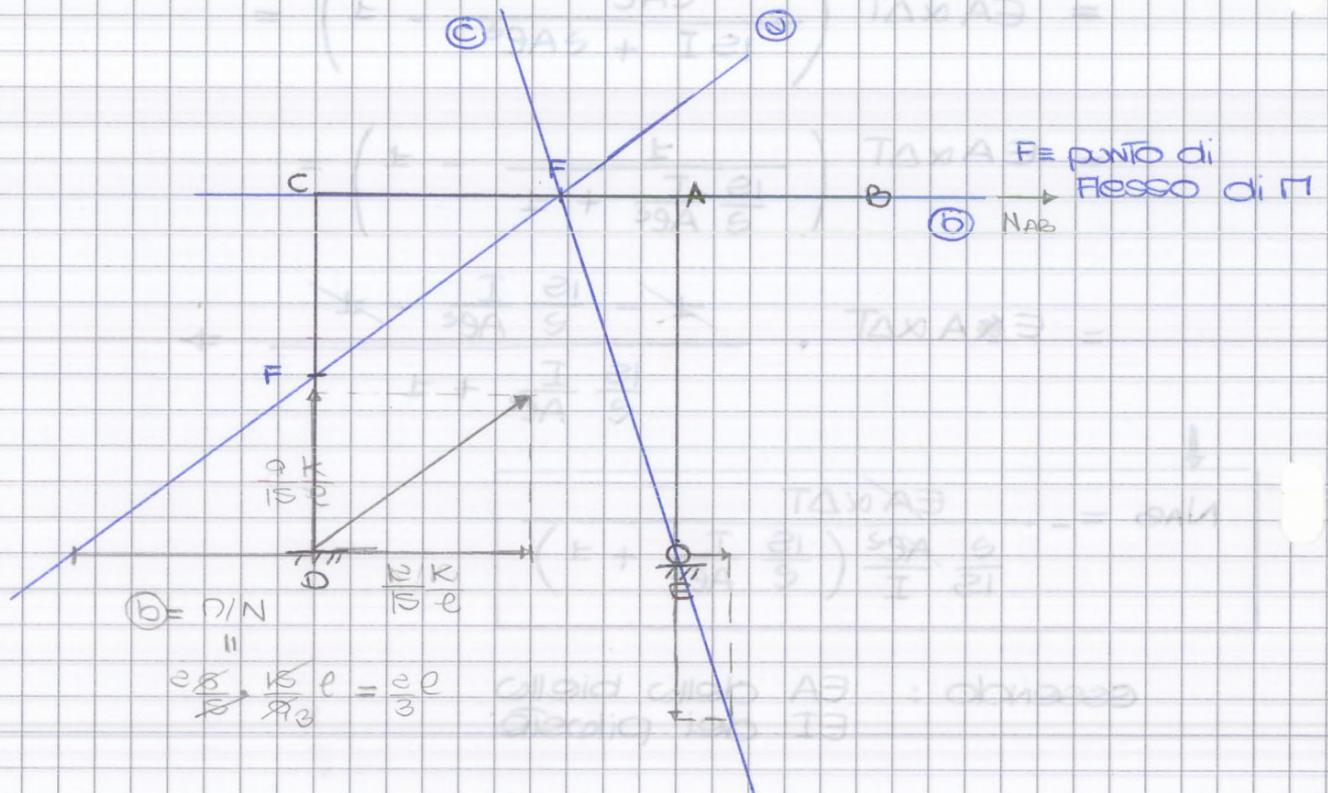
ESSENDO:



(2)



Cdp (usante per i 2 casi)

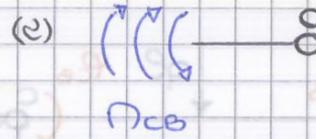
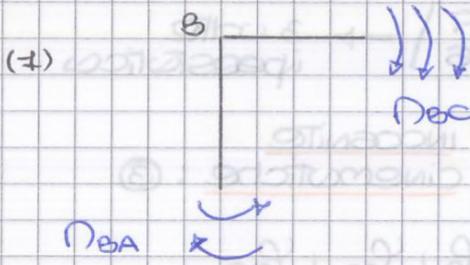


Cdp	travetto
(a)	DCA
(b)	AB \rightarrow soggetto solo a N
(c)	AE

(passo per E ($\tau=0$)
e per F (punto di
intersezione tra (a) e (b)))

N.B. Le 3 rette
devono
incontrarsi
in un punto

3 Equaz. di Equilibrio :



$$\begin{aligned} (1) & \left\{ \begin{aligned} \frac{qe^2}{12} - \frac{4EI}{e} \varphi_B - \frac{qe^2}{8} - \frac{4EI}{e} \varphi_B - \frac{2EI}{e} \varphi_{CB} &= 0 \\ \frac{qe^2}{8} - \frac{2EI}{e} \varphi_B - \frac{4EI}{e} \varphi_{CB} &= 0 \end{aligned} \right. \\ (2) & \left\{ \begin{aligned} \frac{qe^2}{8} - \frac{2EI}{e} \varphi_B - \frac{4EI}{e} \varphi_{CB} &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$(3) \quad \frac{4EI}{e} \varphi_{CD} = 0 \longrightarrow \varphi_{CD} = 0 \longrightarrow \text{CO NODI: } \begin{aligned} T &= 0 \\ \downarrow \\ M &= 0 \end{aligned}$$

Rimane un sistema di 2 equazioni in 2 incognite :

$$\begin{aligned} (1) & \left\{ \begin{aligned} \frac{e-3}{24} qe^2 - \frac{8EI}{e} \varphi_B - \frac{2EI}{e} \varphi_{CB} &= 0 \\ \frac{qe^2}{8} - \frac{2EI}{e} \varphi_B - \frac{4EI}{e} \varphi_{CB} &= 0 \end{aligned} \right. \\ (2) & \left\{ \begin{aligned} \frac{qe^2}{8} - \frac{2EI}{e} \varphi_B - \frac{4EI}{e} \varphi_{CB} &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$(2) \longrightarrow \varphi_B = \frac{e}{2EI} \left(\frac{qe^2}{8} - \frac{4EI}{e} \varphi_{CB} \right)$$

$$(1) \longrightarrow -\frac{qe^2}{24} - \frac{8EI}{e} \cdot \frac{e}{2EI} \left(\frac{qe^2}{8} - \frac{4EI}{e} \varphi_{CB} \right) - \frac{2EI}{e} \varphi_{CB} = 0$$

$$\left(\frac{16EI}{e} - \frac{2EI}{e} \right) \varphi_{CB} = \frac{qe^2}{24} + \frac{qe^2}{e}$$

$$\frac{14EI}{e} \varphi_{CB} = \frac{13}{24} qe^2$$

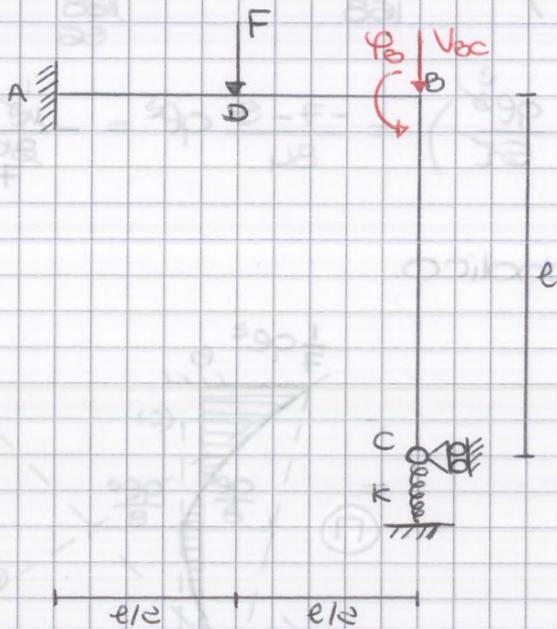
$$\varphi_{CB} = \frac{13}{336} \frac{qe^3}{EI} > 0$$

$$\varphi_B = \frac{qe^3}{16EI} - 2 \cdot \frac{13}{336} \cdot \frac{qe^3}{EI} = \frac{21-26}{336} \frac{qe^3}{EI}$$

$$\varphi_B = -\frac{5}{336} \frac{qe^3}{EI} < 0$$

Esercizio: CEDIMENTO ELASTICO

TER. 6/11
LEZIONE 17
(CORSO)

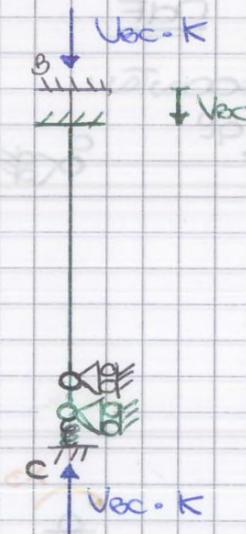
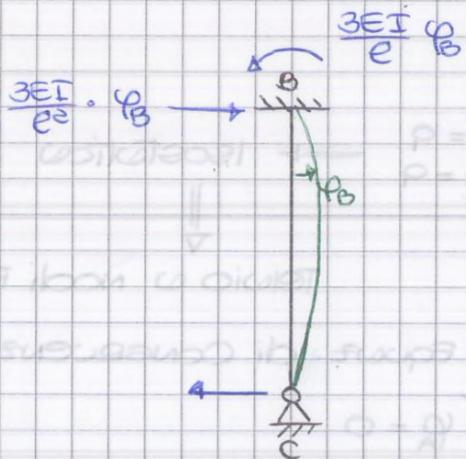
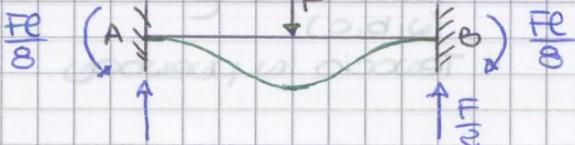
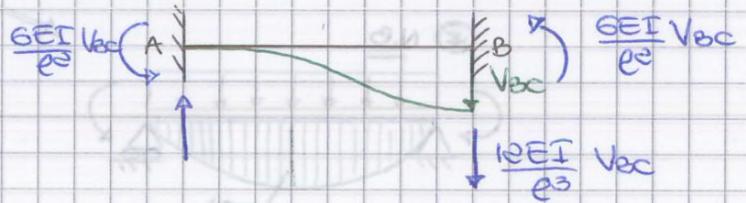
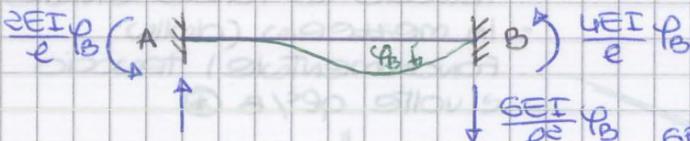


$GdE = 3$
 $GdN = 5$ \rightarrow @ uote iperstatiche

ndS: è incoante
 P_B, V_{BC}
sistem. piedritto

Equaz. di Equilibrio:

- Equil. alla ROTAZIONE INTORNO B
- Equil. alla TRASLAZIONE piedritto BC



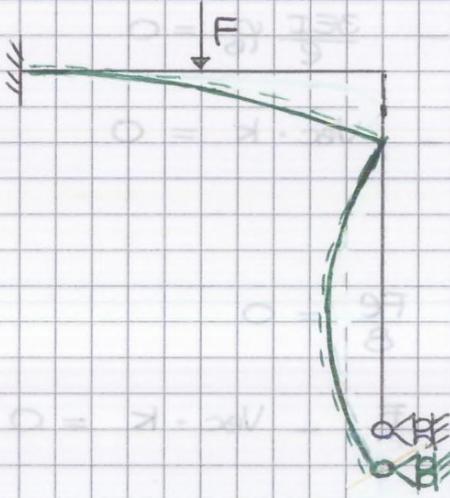
$\dim K = \left[\frac{F}{e} \right]$

N.B. $\{F\} = [K] \{S\}$

- cedimenti unelastici finiscono in $\{S\}$
- cedimenti elastici finiscono in $[K]$ (reazioni elastiche)

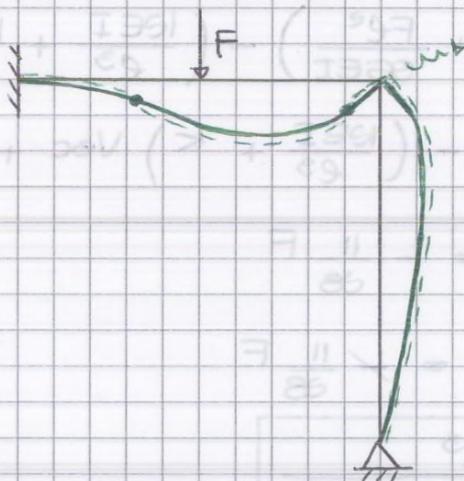
• Se $K=0$ (non c'è la molla) \longrightarrow
$$\begin{cases} V_{ec} = \frac{11}{192} \frac{FE^3}{EI} \\ \varphi_B = -\frac{1}{32} \frac{FE^2}{EI} \end{cases}$$

Deformata Qualitativa:



• Se $K \rightarrow \infty$ \longrightarrow
$$\begin{cases} V_{ec} = 0 \\ \varphi_B = \frac{FE^2}{56EI} \end{cases}$$

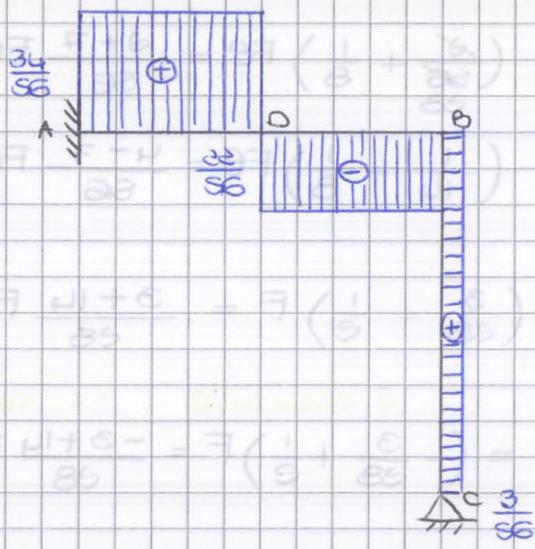
Deformata Qualitativa:



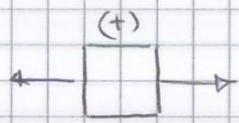
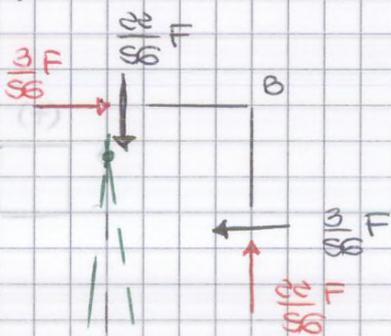
N.B. E' ovvio che le fibre tese sono d'alto stesso lato

calcoliamo le sollecitazioni nello Hp. $K \rightarrow \infty$:

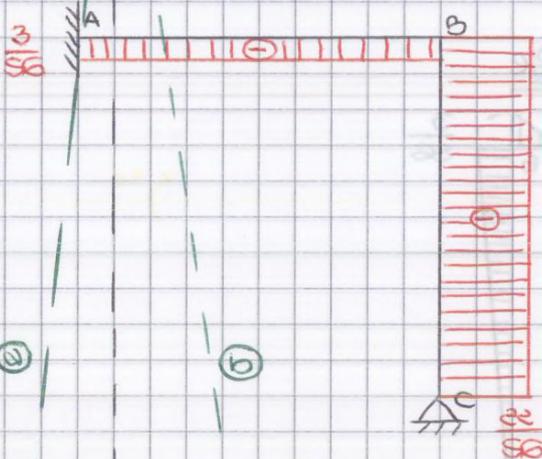
$\frac{T}{T}$



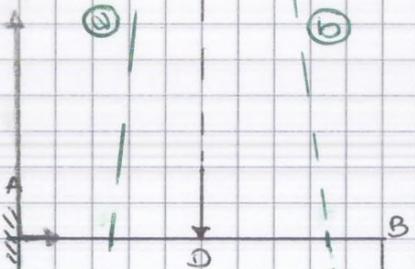
Travo $N = 2$



$\frac{T}{2}$

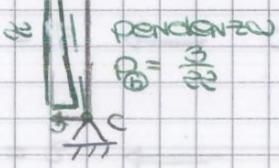


$\frac{C_d P}{2}$



$b = 3e$

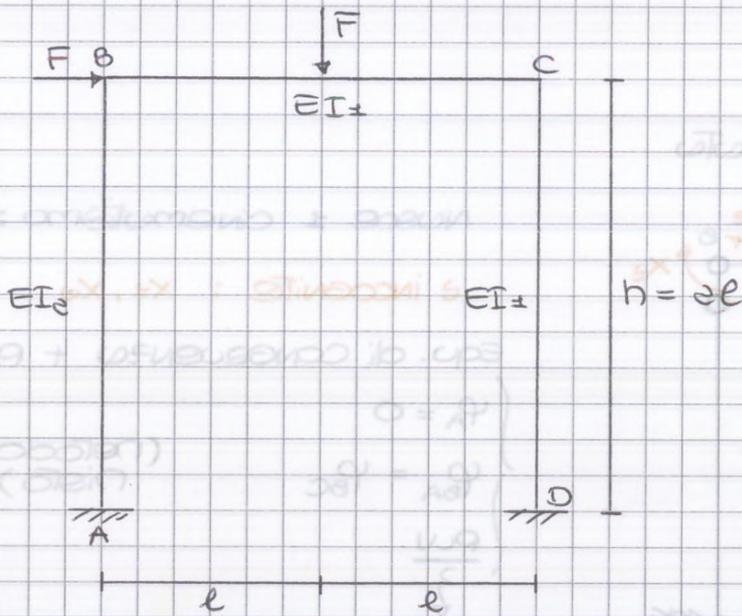
$\frac{C_d P}{3}$



$\frac{C_d P}{2}$ | tratto
AO
BC

ESERCIZIO : TELVIO CON $\neq EI$

DEE. 27/11
LEZIONE 26 A
(copiando)



Esib:
 $EI_2 = 4EI_1$

3 volte iperstatico

POSTO : $2e = h$

$EI_1 = EI \rightarrow EI_2 = 4EI$

• INDS :



③ INCOGNITE :

$\varphi_B, \varphi_C, \varphi_D$

3 Equazioni di Equilibrio:

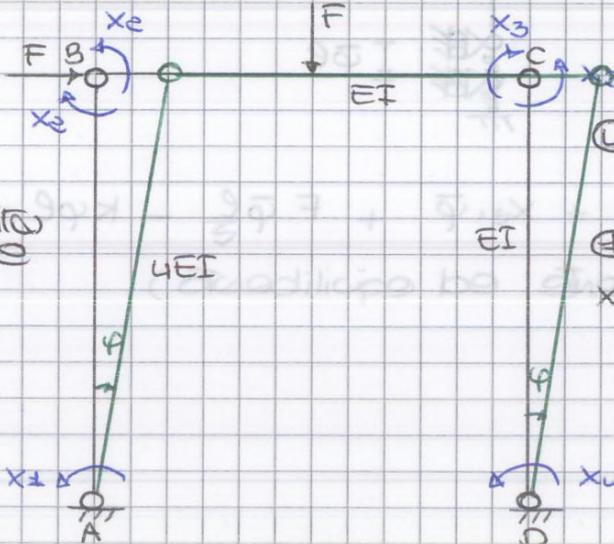
- 2 Equil. alla rotazione
- 1 Equil. alla traslazione

• INDF :

Reticolato associato

$V=8$
 $C=9 \Rightarrow 3$ volte mobile

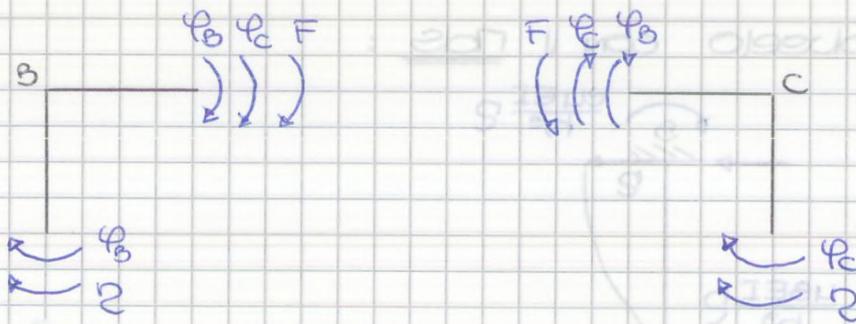
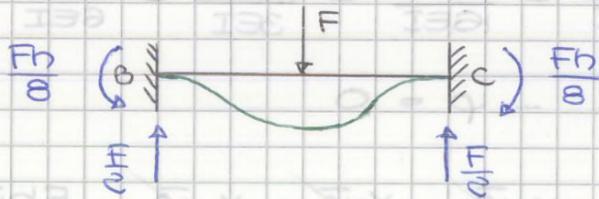
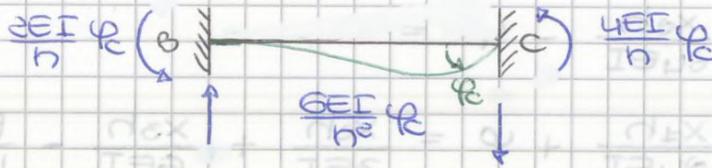
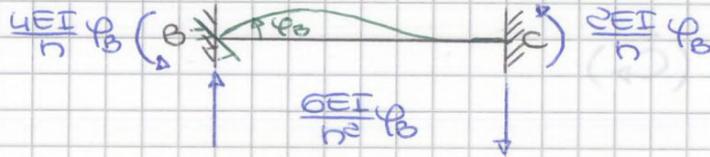
Telvio a nodi spostabili (Metodo Disto)



④ INCOGNITE statiche

+ ④ CINEMATICO :
 $x_1, x_2, x_3, x_4, \varphi$

4 Equ. di CONGRUENZA \rightarrow UN SOLUZIONE + RW



$$\begin{cases} \text{1)} & \frac{16EI}{5} \theta_B + \frac{4EI}{5} \theta_C + \frac{4EI}{5} \theta_B + \frac{2EI}{5} \theta_C + \frac{F}{5} = 0 \\ \text{2)} & \frac{4EI}{5} \theta_C + \frac{6EI}{5} \theta_C + \frac{2EI}{5} \theta_B + \frac{4EI}{5} \theta_C - \frac{F}{5} = 0 \\ \text{3)} & \frac{4EI}{5} \theta_B + \frac{4EI}{h^3} \theta + \frac{6EI}{5} \theta_C + \frac{12EI}{5^3} \theta - F = 0 \end{cases}$$

\Downarrow moltiplico per $\frac{5}{2EI}$ (1) e (2)
 e per $\frac{h^3}{6EI}$ (3)

$$\varphi_b = - \frac{159}{3072} \frac{Fh^2}{EI}$$

$$\begin{aligned}
 (*) \implies \varphi_c &= -10 \left(- \frac{159}{3072} \frac{Fh^2}{EI} \right) - 12 \cdot \frac{113}{3072} \frac{Fh^2}{EI} - \frac{Fh^2}{16EI} = \\
 &= \left(\frac{1590}{3072} - \frac{1356}{3072} - \frac{1}{16} \right) \frac{Fh^2}{EI} = \\
 &= \left(\frac{1590}{3072} - \frac{1356}{3072} - \frac{192}{3072} \right) \frac{Fh^2}{EI} = \\
 &= \frac{2}{3072} \frac{Fh^2}{EI}
 \end{aligned}$$

$$\varphi_c = \frac{2}{3072} \frac{Fh^2}{EI}$$

Calcolo Π :

$$\begin{aligned}
 \Pi_A &= \frac{8EI}{h} \cdot \left(- \frac{159}{3072} \frac{Fh^2}{EI} \right) + \frac{24EI}{h^2} \cdot \frac{113}{3072} \frac{Fh^3}{EI} = \\
 &= \frac{-1240 + 2712}{3072} Fh = \frac{1472}{3072} Fh
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_{bA} &= \frac{16EI}{h} \cdot \left(- \frac{159}{3072} \frac{Fh^2}{EI} \right) + \frac{24EI}{h^2} \cdot \frac{113}{3072} \frac{Fh^3}{EI} = \\
 &= \frac{-2480 + 2712}{3072} Fh = \frac{232}{3072} Fh
 \end{aligned}$$

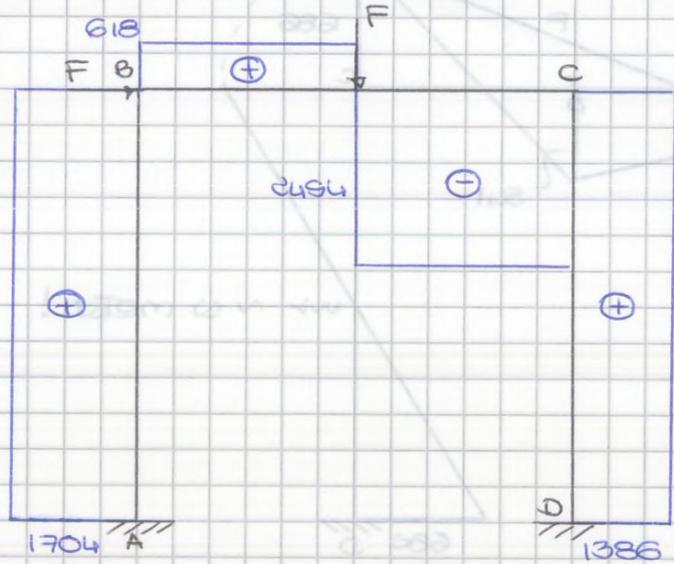
Verifica:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{bc} &= \frac{4EI}{h} \cdot \left(- \frac{159}{3072} \frac{Fh^2}{EI} \right) + \frac{6EI}{h} \cdot \left(\frac{2}{3072} \frac{Fh^2}{EI} \right) + \frac{Fh}{8} = \\
 &= \frac{-630 + 4 + 384}{3072} Fh = - \frac{232}{3072} Fh \quad \text{OK!} \\
 &\quad (\Pi_{bA} = \Pi_{bc})
 \end{aligned}$$

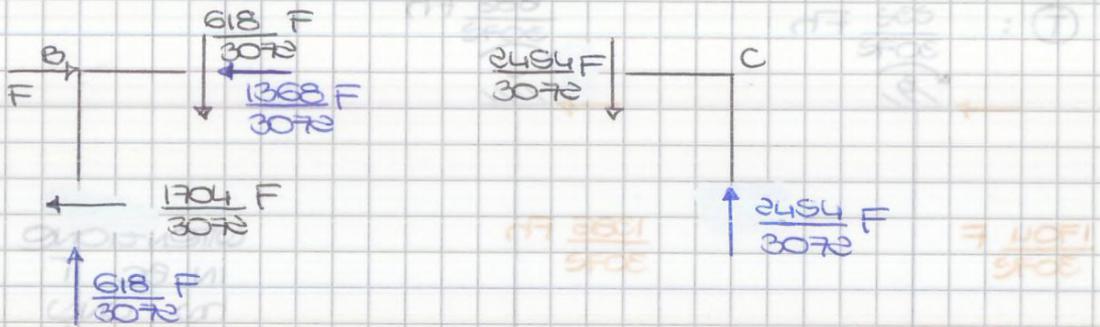
$$\begin{aligned}
 \Pi_{cd} &= \frac{4EI}{h} \cdot \frac{2}{3072} \frac{Fh^2}{EI} + \frac{6EI}{h^2} \cdot \frac{113}{3072} \frac{Fh^3}{EI} = \\
 &= \frac{8 + 678}{3072} Fh = \frac{686}{3072} Fh = \Pi_{cb}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_0 &= \frac{2EI}{h} \cdot \frac{2}{3072} \frac{Fh^2}{EI} + \frac{6EI}{h^2} \cdot \frac{113}{3072} \frac{Fh^3}{EI} = \\
 &= \frac{682}{3072} Fh
 \end{aligned}$$

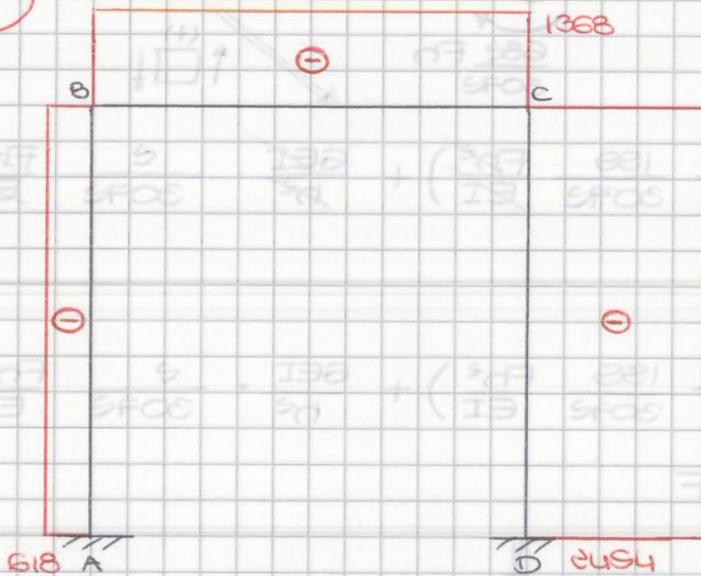
$\frac{T}{F} \cdot 3072$



$N = 2 \rightarrow$ Equilibrio dei nodi



$\frac{N}{F} \cdot 3072$



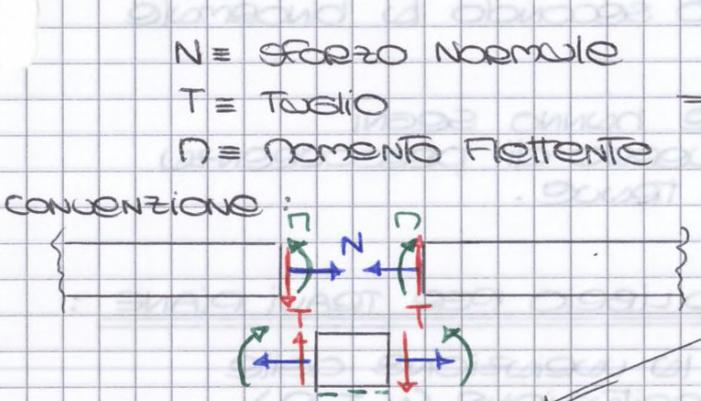
LUN. 14/10
LEZIONE 7A
(FERRO)

TRAVI AD ASSE CURVILINEO
 (CASO GENERALE)

(CASO PARTICOLARE: TRAVI AD ASSE RETTILINEO) \rightarrow Raggio di curvatura $r \rightarrow \infty$

CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE INTERNA (relative alla sez. di una trave) \equiv Reazioni interne elementari trasmesse dalla stessa sezione

- Trave Piana (Linea d'asse contenuta nel piano): Problema 2D (Trave nel piano)
- Caratteristiche della sollecitazione $\rightarrow N, T, M$



$N \equiv$ sforzo Normale
 $T \equiv$ Taglio
 $M \equiv$ Momento Flettente

$N > 0$ (tensione)
 $T > 0$ se fa ruotare in senso orario il tronco di trave su cui agisce

N.B. N è l'unico indipendente dall'assolutore

per M non usiamo segno: riportiamo il diagramma dalla parte delle fibre tese \rightarrow cioè è utile per i nativi:
 - costruzione deformata
 - definizione Armatura ($M_r > M$)

- Trave ad asse sghembo: Problema 3D (Trave nello spazio)

- Caratteristiche della sollecitazione $\rightarrow N, T_x, T_y, M_x, M_y, M_z$

$M_z \equiv$ momento torcente
 $M_x, M_y \equiv$ momento flettente

N.B. In tal caso, devo fissare un verso di percorrenza all'asse della trave e, per ciascuna sezione, una terna di riferimento intrinseca costituita dalla tangente, dalla normale e dalla binormale

Per H_g: Tale concio è soggetto a:

- $p(s) ds$ m^a carico distribuito tangenziale
- $q(s) ds$ m^a carico distribuito normale
- $m(s) ds$ m^a momento distribuito

dalle che:

- alle caratteristiche N, T, D all'estremità a monte
- alle caratteristiche incrementate all'estre. a valle

oss: ds/e \equiv unido compreso tra la radiale mediana e le sezioni terminali \equiv
 \equiv unido compreso tra la tangente mediana e le tangenti estreme

1) Equazione di Equilibrio alla tensione nella direzione della ~~radiale~~ tangente mediana:

$$p ds - N \cos \frac{ds}{e} + T \sin \frac{ds}{e} + (N + dN) \cos \frac{ds}{e} + (T + dT) \sin \frac{ds}{e} = 0$$

2) Equazione di Equilibrio alla tensione nella direzione della radiale mediana:

$$q ds - N \sin \frac{ds}{e} - T \cos \frac{ds}{e} - (N + dN) \sin \frac{ds}{e} + (T + dT) \cos \frac{ds}{e} = 0$$

Per H_g: $\boxed{ds \rightarrow 0}$ (infinitesimo) \rightarrow $\boxed{\sin ds \approx ds}$
 $\boxed{\cos ds \approx 1}$

$$1) p ds + T \frac{ds}{e} + dN + T \frac{ds}{e} + dT \frac{ds}{e} = 0$$

$$2) q ds - N \frac{ds}{e} - N \frac{ds}{e} - dN \frac{ds}{e} + dT = 0$$

$$\begin{cases} 1) p ds + T ds + dN = 0 \\ 2) q ds - N ds + dT = 0 \end{cases}$$

\downarrow divido per ds