NUMERO: 1346 ANNO: 2014

A P P U N T I

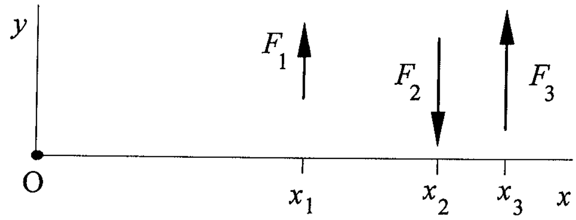
STUDENTE: Schiraldi

MATERIA: Fondamenti di Meccanica Strutturale + Temi + Eserc., Prof.Goglio

FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE
Anno accademico 2012/2013 - Esercitazione n° 1

<u>Nota:</u> *le risposte relative alle reazioni vincolari sono date soltanto in modulo in quanto il segno dipende dal verso convenzionale scelto dallo studente.*

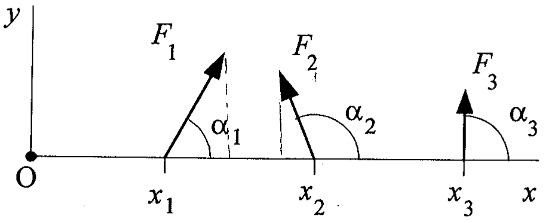
1) Sostituire il sistema di forze schematizzato in figura con la sola risultante opportunamente applicata.



Dati:
F_1 = 500 N, F_2 = 800 N, F_3 = 1000 N;
x_1 = 5 m, x_2 = 7 m, x_3 = 8 m.

[R_F = 700 N, ξ = 7 m (misurata da O)]

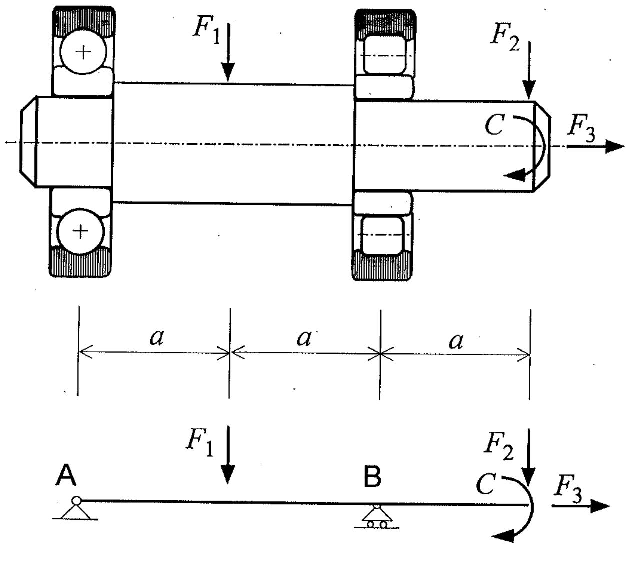
2) Per il sistema di forze schematizzato in figura, calcolare la risultante e determinare la retta d'azione su cui applicarla ai fini dell'equivalenza.



α_1 = 60°, α_2 = 135°, α_3 = 90°.

Dati:
F_1 = 100 N, F_2 = 200 N, F_3 = 50 N;
x_1 = 2 m, x_2 = 3 m, x_3 = 4 m;
$y_1 = y_2 = y_3$ = 0 m;

[R_F = 293 N, α = 108° (misurato da x), ξ = 2.72 m (misurata da O)]



3) L'albero mostrato in figura è vincolato da un cuscinetto a sfere (assimilabile a una cerniera) e da un cuscinetto a rulli (assimilabile a un carrello). Calcolare le reazioni vincolari.

Dati:
C = 60 kN·mm,
F_1 = 2 kN,
F_2 = 1 kN,
F_3 = 0.5 kN,
a = 80 mm.

[$|O_A| = F_3$ = 0.5 kN, $|V_A| = \left|\frac{F_1}{2} - \frac{F_2}{2} - \frac{C}{2a}\right|$ = 0.125 kN, $|R_B| = \frac{F_1}{2} + \frac{3F_2}{2} + \frac{C}{2a}$ = 2.875 kN]

FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE
Anno accademico 2012/2013 - Esercitazione n° 2

Nota: nelle risposte i valori delle tensioni sono arrotondati all'unità.

1) Dato il tensore della tensione $\sigma_{xx} = 250$ MPa, $\sigma_{yy} = 310$ MPa, $\sigma_{zz} = -180$ MPa, $\tau_{xy} = -90$ MPa, $\tau_{xz} = 110$ MPa, $\tau_{yz} = 0$ MPa, trovare il modulo del vettore della tensione (f), la componente normale (σ), la componente tangenziale (τ) agenti sui piani individuati dai seguenti versori:

a) $\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}$; b) $\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix}$; c) $\begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix}$; d) $\begin{Bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{Bmatrix}$

[a) 288, 250, 142; b) 323, 310, 90; c) 211, -180, 110; d) 205, 140, 150 (valori in MPa)]

2) Per i seguenti stati di tensione in un punto di un solido (valori in MPa):

a) $\sigma_{xx} = 120$, $\sigma_{yy} = 240$, $\sigma_{zz} = 408$, $\tau_{xy} = -150$, $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = 0$;

b) $\sigma_{xx} = 0$, $\sigma_{yy} = 0$, $\sigma_{zz} = 150$, $\tau_{xy} = 0$, $\tau_{xz} = 50$, $\tau_{yz} = 0$;

c) $\sigma_{xx} = 40$, $\sigma_{yy} = 350$, $\sigma_{zz} = 170$, $\tau_{xy} = 0$, $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = -100$;

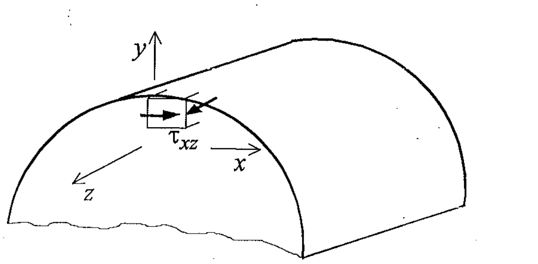
utilizzando i cerchi di Mohr determinare tensioni e direzioni principali e la massima tensione tangenziale.

[a): $\sigma_1 = 408$ MPa, $\sigma_2 = 342$ MPa, $\sigma_3 = 18$ MPa, $\alpha(p_2 \wedge x) = 56°$, $\tau_{max} = 195$ MPa;

b): $\sigma_1 = 165$ MPa, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -15$ MPa, $\alpha(p_1 \wedge z) = -17°$, $\tau_{max} = 90$ MPa;

[c): $\sigma_1 = 395$ MPa, $\sigma_2 = 126$ MPa, $\sigma_3 = 40$ MPa, $\alpha(p_1 \wedge y) = 24°$, $\tau_{max} = 177$ MPa]

3) Un punto della sezione di un albero di trasmissione è sollecitato dalla sola componente di tensione $\tau_{xz} = 180$ MPa. Disegnare i cerchi di Mohr per calcolare le tensioni principali e l'angolo tra la terna principale $p_1p_2p_3$ e quella xyz.



[$\sigma_1 = 180$ MPa, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -180$ MPa; $\alpha(p_1 \wedge z) = -45°$]

A) Spiegare perché le componenti di tensione vengono assunte talvolta concordi, talvolta discordi rispetto agli assi corrispondenti.

B) Per ottenere la relazione $\{f\} = [\sigma]\{n\}$ si ricorre a un tetraedro (di Cauchy). Perché deve essere inifinitesimo? Perché non si considera un elemento parallelepipedo?

C) È sempre possibile trovare tensioni e direzioni principali? Motivare.

D) Esaminando il tensore della tensione, da cosa si riconosce se un asse è direzione principale?

E) Tra quali limiti varia la tensione tangenziale in un punto, al variare dell'orientazione della superficie su cui la si considera?

F) Perché l'angolo (al centro) che identifica le direzioni nel cerchio di Mohr è doppio rispetto a quello nello spazio fisico?

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 96

FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE
Anno accademico 2012/2013 - Esercitazione n° 3

1) Per il campo di spostamenti elastici, espressi nel riferimento xyz dalle relazioni

$$u = Ax, \qquad v = By, \qquad w = 0,$$

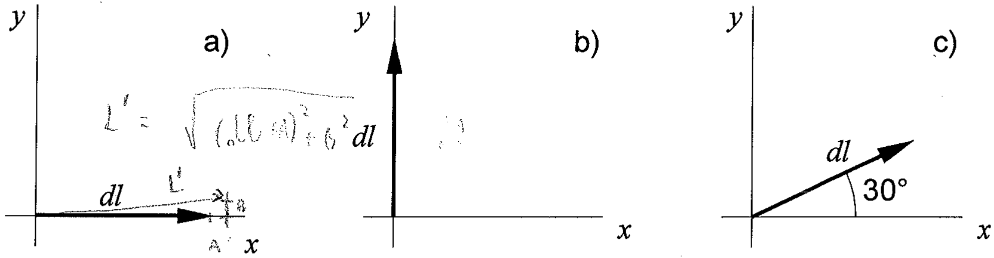
in cui $A = 1 \cdot 10^{-3}$ e $B = -0.5 \cdot 10^{-3}$:

a) calcolare gli spostamenti dell'estremo di un segmento di lunghezza dl orientato come l'asse x;

b) calcolare gli spostamenti dell'estremo di un segmento di lunghezza dl orientato come l'asse y;

c) calcolare gli spostamenti dell'estremo di un segmento di lunghezza dl inclinato di +30° sull'asse x.

Verificare se il sistema di riferimento xyz è principale per le deformazioni.



[a) $du = 1.0 \cdot 10^{-3}\, dl$, $dv = dw = 0$; b) $du = 0$, $dv = -0.5 \cdot 10^{-3}\, dl$, $dw = 0$;
c) $du = 8.66 \cdot 10^{-4}\, dl$, $dv = -2.50 \cdot 10^{-4}\, dl$, $dw = 0$; sì]

2) Dato il tensore della tensione: $\sigma_{xx} = 280$ N/mm², $\sigma_{yy} = 320$ N/mm², $\sigma_{zz} = -160$ N/mm², $\tau_{xy} = -120$ N/mm², $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$:

a) calcolare tutte le componenti del tensore della deformazione (materiale: alluminio, $E = 6.8 \cdot 10^4$ N/mm², $\nu = 0.31$);

b) trovare le tensioni e le deformazioni principali;

c) calcolare l'energia potenziale elastica per unità di volume η, verificando che il risultato è lo stesso sia operando sulle componenti xyz sia su quelle principali.

[a) $\varepsilon_{xx} = 3.388 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_{yy} = 4.159 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_{zz} = -5.089 \cdot 10^{-3}$, $\gamma_{xy} = -4.624 \cdot 10^{-3}$;
b) $\varepsilon_1 = 6.117 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_2 = 1.430 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_3 = -5.089 \cdot 10^{-3}$, $\alpha(p_1 \wedge x) = 49.7°$;
c) $\eta = 1.82$ MJ/m³]

3) In un punto soggetto a condizioni di tensione piana ($\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$) sono stati misurati i valori delle deformazioni: $\varepsilon_{xx} = 2.10 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_{yy} = -4.60 \cdot 10^{-4}$, $\gamma_{xy} = -1.80 \cdot 10^{-3}$. Le costanti elastiche del materiale (acciaio) sono $E = 2.06 \cdot 10^5$ N/mm², $\nu = 0.29$. Determinare:

a) le componenti di tensione σ_{xx}, σ_{yy}, τ_{xy};

b) la componente di deformazione ε_{zz}.

[a) $\sigma_{xx} = 17$ MPa, $\sigma_{yy} = -90$ MPa, $\tau_{xy} = -144$ MPa; b) $\varepsilon_{zz} = 1.02 \cdot 10^{-4}$]

A) Spiegare perché il tensore di deformazione non risente del moto rigido.

B) Qual è la differenza tra i prodotti $[J]\{dX\}$ e $[\varepsilon]\{dX\}$?

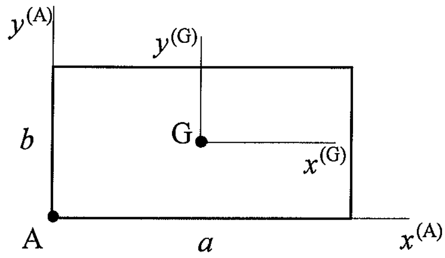
C) In generale, un segmento orientato di un angolo qualsiasi rispetto a un asse principale di deformazione è soggetto a scorrimento o no? Perché?

D) Quanti sono i parametri indipendenti che legano tensioni e deformazioni in un materiale elastico isotropo?

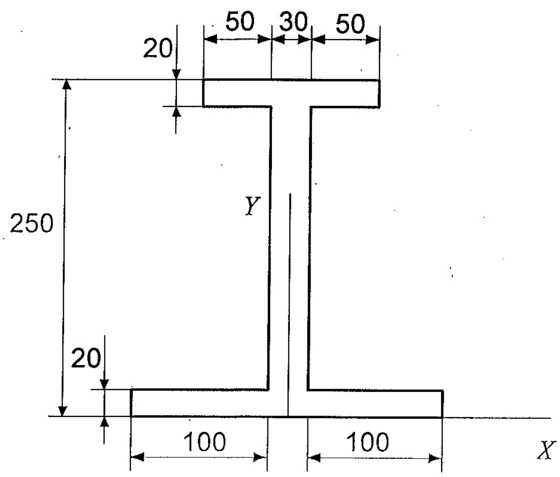
E) In stato di tensione piana, quanti cerchi di Mohr delle tensioni passano per l'origine del diagramma $\sigma\tau$?

FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE
Anno accademico 2012/2013 - Esercitazione n° 5

1) Per una sezione rettangolare di lati $a = 20$ mm e $b = 10$ mm:
   a) considerando i riferimenti con origine nel baricentro G, determinare quello principale $p_1^{(G)}p_2^{(G)}$ e valutare i relativi momenti d'inerzia;
   b) considerando i riferimenti con origine in A, determinare quello principale $p_1^{(A)}p_2^{(A)}$ e valutare i relativi momenti d'inerzia.

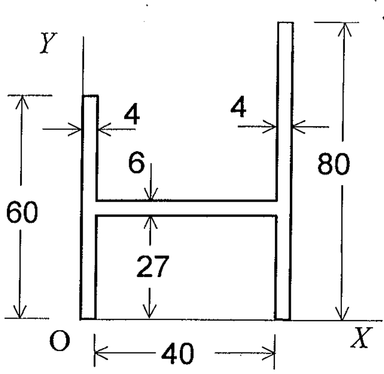


[$\alpha(p_1^{(G)} \wedge x^{(G)}) = 90°$, $J_1^{(G)} = 0.667 \cdot 10^4$ mm^4, $J_2^{(G)} = 0.167 \cdot 10^4$ mm^4,
$\alpha(p_1^{(A)} \wedge x^{(A)}) = 67.5°$, $J_1^{(A)} = 3.081 \cdot 10^4$ mm^4, $J_2^{(A)} = 0.253 \cdot 10^4$ mm^4]



2) Valutare la posizione del baricentro G per la sezione a I indicata in figura, successivamente calcolare i momenti d'inerzia nel riferimento baricentrico xy avente assi paralleli a XY. Il riferimento xy è principale?

[$Y_G = 108$ mm, $X_G = 0$ mm;
$J_{xx} = 11.47 \cdot 10^7$ mm^4, $J_{yy} = 2.44 \cdot 10^7$ mm^4]



3) Per la sezione schematizzata in figura, determinare:
   a) la posizione del baricentro G;
   b) i momenti d'inerzia e centrifugo rispetto al riferimento Gxy avente assi paralleli a OXY;
   c) l'orientazione del riferimento centrale principale e i momenti d'inerzia principali.

[$X_G = 26.3$ mm, $Y_G = 34.0$ mm;
$J_{xx} = 2.63 \cdot 10^5$ mm^4, $J_{yy} = 3.00 \cdot 10^5$ mm^4, $J_{xy} = 0.63 \cdot 10^5$ mm^4;
$J_1 = 3.47 \cdot 10^5$ mm^4, $J_2 = 2.15 \cdot 10^5$ mm^4, $\alpha(p_1 \wedge x) = 53.2°$]

FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE
Anno accademico 2012/2013 - Esercitazione n° 6

1) La sezione di un albero di trasmissione in 41Cr4, avente diametro interno $d = 10$ mm e diametro esterno $D = 40$ mm, è soggetta al momento flettente $M_f = 750$ kNmm e alla forza normale $N = 170$ kN. Tracciare il diagramma della tensione normale σ_{zz} agente sulla sezione e calcolare il coefficiente di sicurezza rispetto allo snervamento per il punto più sollecitato ($R_{p0,2} = 540$ MPa).

[2]

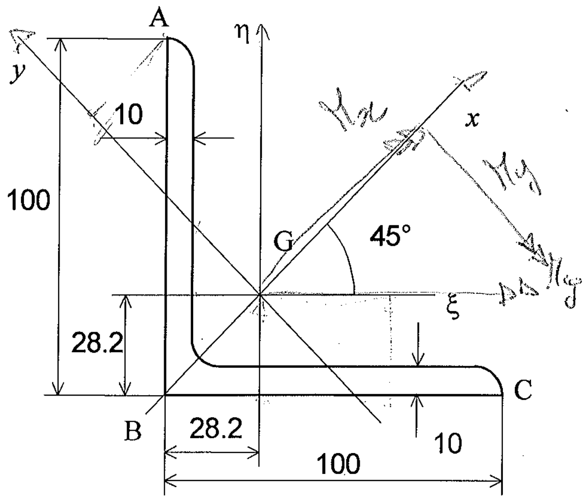
2) La sezione di un laminato a **L** a lati uguali 100×10 (UNI 5783) mostrata a fianco è soggetta al momento flettente M_ξ. Determinare:

a) l'orientazione dell'asse neutro;
b) le tensioni σ_{zz} nei punti A, B, C.

Tracciare il diagramma delle tensioni, posizionandolo sulla figura.

Dati:

$A = 1.92 \cdot 10^3$ mm^2,
$J_{\xi\xi} = J_{\eta\eta} = 1.77 \cdot 10^6$ mm^4,
$J_{\xi\eta} = -1.04 \cdot 10^6$ mm^4,
$J_{xx} = J_1 = 2.80 \cdot 10^6$ mm^4,
$J_{yy} = J_2 = 0.73 \cdot 10^6$ mm^4,
$M_\xi = 2.50 \cdot 10^6$ Nmm.

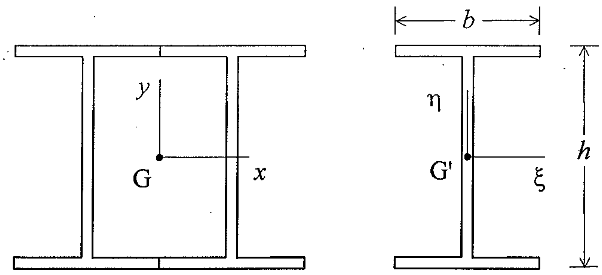


[$\psi = -75.4°$; $\sigma_{zz}^A = 119$ N/mm^2, $\sigma_{zz}^B = -97$ N/mm^2, $\sigma_{zz}^C = 30$ N/mm^2]

3) La sezione illustrata in figura è formata da due profili a **I** tipo IPE 120 (UNI 5398) accostati lateralmente:

a) calcolare i momenti d'inerzia della sezione nel riferimento generale Gxy (notare che esso è principale d'inerzia);
b) sulla sezione agiscono contemporaneamente la forza normale $N = 8.0 \cdot 10^4$ N e i momenti flettenti $M_x = 5.3 \cdot 10^6$ Nmm e $M_y = 2.5 \cdot 10^6$ Nmm, calcolare l'inclinazione dell'asse neutro rispetto all'asse x e la tensione σ_{zz} nel punto più sollecitato.

Dati IPE 120 (riferim. G'ξη):
$h = 120$ mm,
$b = 64$ mm,
$A = 1.32 \cdot 10^3$ mm^2,
$J_{\xi\xi} = 3.18 \cdot 10^6$ mm^4,
$J_{\eta\eta} = 2.77 \cdot 10^5$ mm^4.

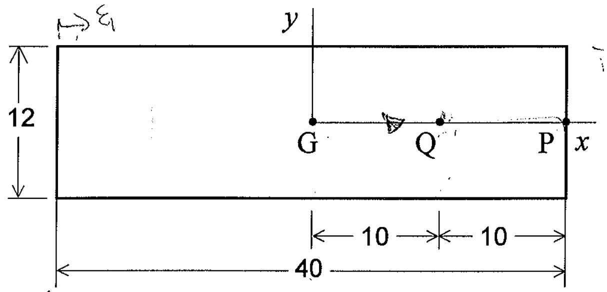


[$J_{xx} = 6.36 \cdot 10^6$ mm^4, $J_{yy} = 3.26 \cdot 10^6$ mm^4; $\psi = 43°$, $\sigma_{zz,\max} = 129$ MPa]

A) Quali caratteristiche di sollecitazione equivalgono staticamente alla tensione assiale σ_{zz}?
B) Perché nella flessione (piani zy o zx) si ha spostamento assiale dei punti della sezione?
C) Perché per avere tensione di sola trazione (o compressione) la forza normale deve passare per il baricentro della sezione?
D) Mostrare che la flessione è retta se il momento agisce intorno a un asse principale d'inerzia.

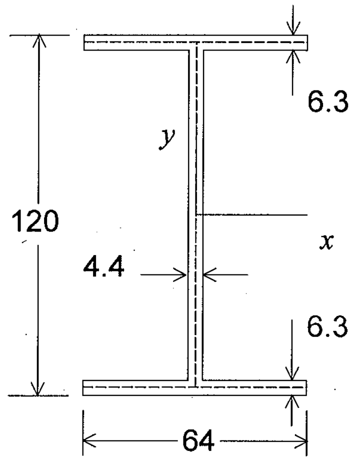
FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE
Anno accademico 2012/2013 - Esercitazione n° 8

1) Una sezione rettangolare di lati a=12 mm e b=40 mm, è soggetta al momento flettente M_y=–4.50·10^5 Nmm e al taglio T_x=1.3·10^4 N. Calcolare le tensioni σ_{zz} e τ_{xz} e la tensione ideale (ipotesi della massima tensione tangenziale) nei punti P, Q, G. Quale punto è il più sollecitato?



[P: σ_{zz} = 141 N/mm^2, τ_{xz} = 0, σ_{id} = 141 N/mm^2;
Q: σ_{zz} = 70 N/mm^2, τ_{xz} = 30 N/mm^2, σ_{id} = 92 N/mm^2;
G: σ_{zz} = 0, τ_{xz} = 41 N/mm^2, σ_{id} = 82 N/mm^2]

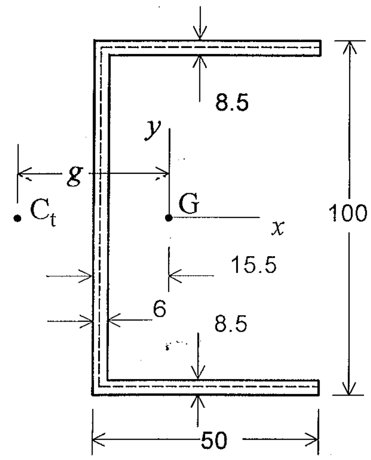
2) La figura mostra la sezione di un profilato IPE 120 UNI 5398 realizzato in acciaio S235 (tensione limite 235 N/mm^2) soggetta al momento flettente M_x = 6.5·10^6 Nmm e al taglio T_y = 2.8·10^4 N. Determinare il coefficiente di sicurezza per il punto più sollecitato.
Dati:
A=1.32·10^3 mm^2,
J_{xx}=J_1=3.18·10^6 mm^4,
J_{yy}=J_2=2.77·10^5 mm^4.



[$C_S \approx$ 1.9]

3) Per la sezione di un profilato a **U** 100 UNI 5680 mostrata in figura e sottoposta al taglio T_y = 1.00·10^4 N, valutare:
a) la posizione del centro di taglio C_t;
b) le massime tensioni causate dal taglio nell'anima e nelle piattabande;
c) le tensioni aggiuntive di torsione che si producono nell'anima e nelle piattabande se T_y è applicato nel baricentro G.

Dati: A=1.35·10^3 mm^2,
J_{xx}=J_1=2.05·10^6 mm^4,
J_{yy}=J_2=2.91·10^5 mm^4.



[g=31.7 mm; taglio: $\tau_{an.}$=20 N/mm^2, $\tau_{piatt.}$=10 N/mm^2;
torsione: $\tau_{an.}$=77 N/mm^2, $\tau_{piatt.}$=109 N/mm^2]

A) Spiegare perché in caso di momento flettente non costante lungo l'asse del solido di St. Venant il taglio deve essere non nullo.

B) Nello studio delle tensioni di taglio i momenti d'inerzia J_{xx}, J_{yy} e quelli statici S_x^*, S_y^* si riferiscono alla stessa area?

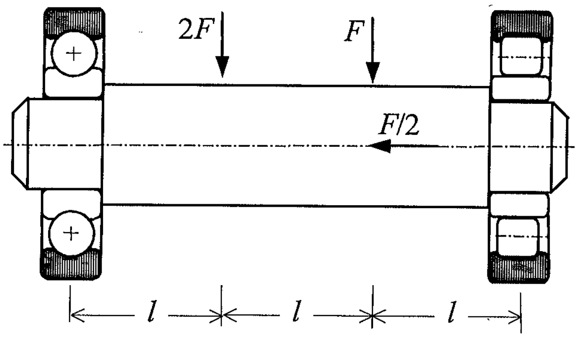
C) Considerando una sezione rettangolare soggetta a taglio verticale, perché in corrispondenza dei bordi inferiore e superiore la tensione τ si deve annullare?

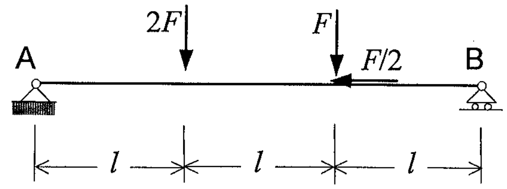
D) Che effetto si produce se la forza di taglio non viene applicata nel centro di taglio?

FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE
Anno accademico 2012/2013 - Esercitazione n° 10

Per ciascuna delle strutture mostrate negli schemi seguenti:
a) verificare che le condizioni di vincolo sono isostatiche e calcolare le reazioni vincolari;
b) determinare l'andamento delle caratteristiche di sollecitazione (forza normale, taglio, momento flettente) e tracciarne i diagrammi.

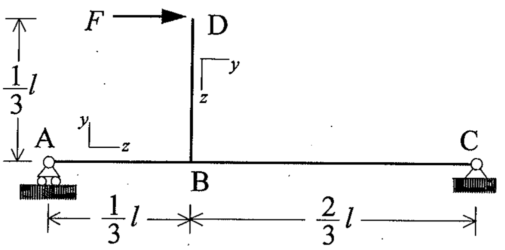
1)





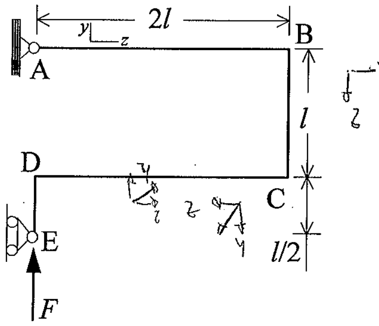
$|O_A| = F/2$, $|V_A| = 5F/3$, $|R_B| = 4F/3$

2)



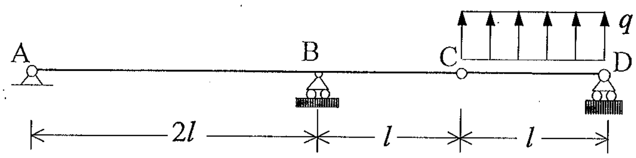
$[|O_C| = F,\ |R_A| = |V_C| = \frac{1}{3}F]$

3)



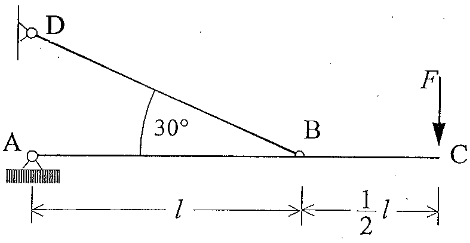
$[\,|V_A| = F,$
$|O_A| = 0,$
$|R_E| = 0]$

4)



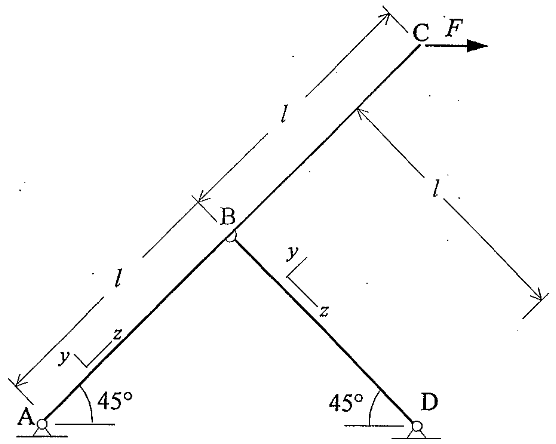
$[|V_A| = \frac{1}{4}ql,\ |O_A| = |O_C| = 0,$
$|R_B| = \frac{3}{4}ql,\ |V_C| = |R_D| = \frac{1}{2}ql]$

5)



$[|O_A| = |O_B| = |O_D| = \frac{3\sqrt{3}}{2}F,$
$|V_A| = \frac{1}{2}F,\ |V_B| = |V_D| = \frac{3}{2}F]$

6)



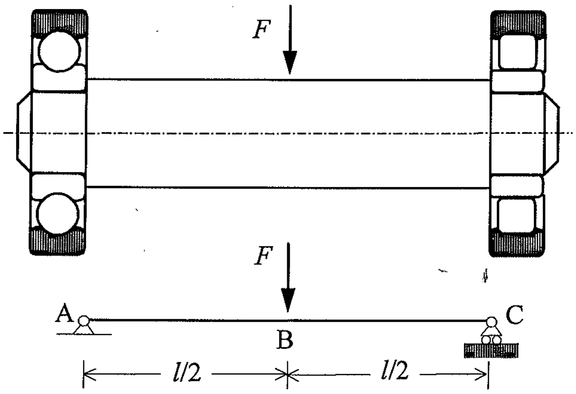
$[\,|O_A| = 0,\ |V_A| = F,\ |O_B| = |V_B| = F,\ |O_D| = |V_D| = F]$

Diagrammi sul retro

A) In quali casi si ha discontinuità del diagramma di momento flettente? E di quello di taglio?
B) Dove si annulla necessariamente il momento flettente?
C) Quando ci si deve attendere diagramma parabolico del momento flettente? Come è in tali casi l'andamento del taglio?
D) Per strutture con gomiti a 90°, in corrispondenza di essi che cosa si nota nei diagrammi?

FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE
Anno accademico 2012/2013 - Esercitazione n° 11

1) Un albero a sezione circolare di diametro d e sopportato alle estremità da cuscinetti è soggetto a una forza trasversale F applicata in mezzeria. Dopo aver calcolato le reazioni vincolari determinare:
   a) l'andamento delle caratteristiche di sollecitazione (tracciare i relativi diagrammi), il momento flettente massimo e la massima tensione di flessione;
   b) la linea elastica dell'albero e la freccia della sezione soggetta al maggior abbassamento.

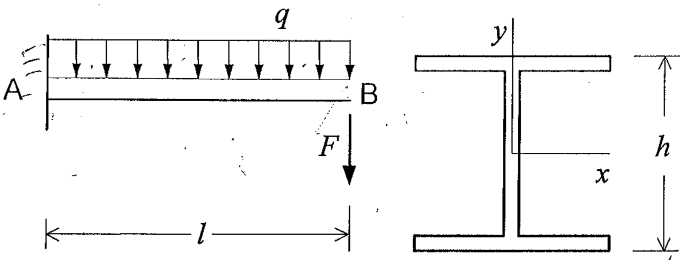


cuscinetto spostato in B

Dati:
l = 300 mm,
d = 20 mm,
E = 2.06·10^5 N/mm^2,
F = 1500 N.

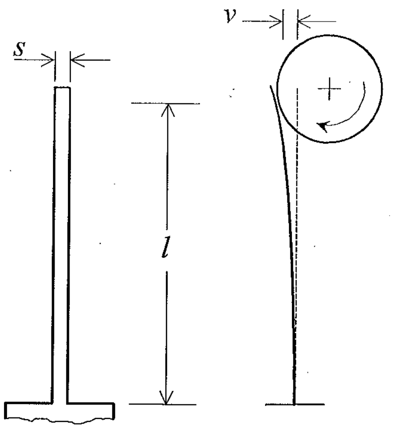
[$M_x^B = -Fl/4$ = -1.13·10^5 Nmm,
σ_{zz}^B = 144 N/mm^2;
$v^B = -Fl^3/48EJ_{xx} \approx$ -0.5 mm]

2) Un profilato UNI HE 100 B, montato orizzontalmente, è incastrato all'estremo A e soggetto all'altro estremo B ad una forza trasversale F:
   a) tenendo conto anche dell'effetto del peso proprio q, calcolare il valore di F che provoca un abbassamento dell'estremo B di 2 mm;
   b) calcolare la massima tensione di flessione nell'elemento.



Dati:
l = 1500 mm, J_{xx} = 4.50·10^6 mm^4,
h = 100 mm, E = 2.06·10^5 N/mm^2,
q = 0.2 N/mm.

[$v_q^B = -\dfrac{ql^4}{8EJ_{xx}} \approx$ -0.1 mm, $v_F^B = -\dfrac{Fl^3}{3EJ_{xx}}$,
F = 1570 N; σ_{zz}^A = 29 N/mm^2]



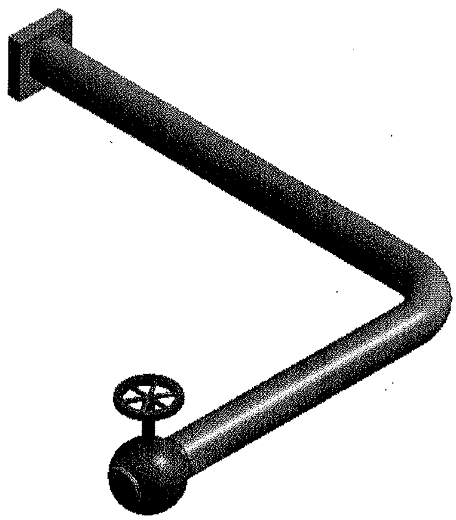
3) Un contatto strisciante è costituito da una lamina in rame (E = 1.18·10^5 N/mm^2) montata a mensola, di lunghezza (dalla radice al punto di contatto) l = 40 mm, avente sezione rettangolare di larghezza b = 5 mm e spessore s = 0.5 mm. La freccia v imposta al punto di contatto è pari a 1 mm; calcolare la forza scambiata al contatto e la massima tensione di flessione.

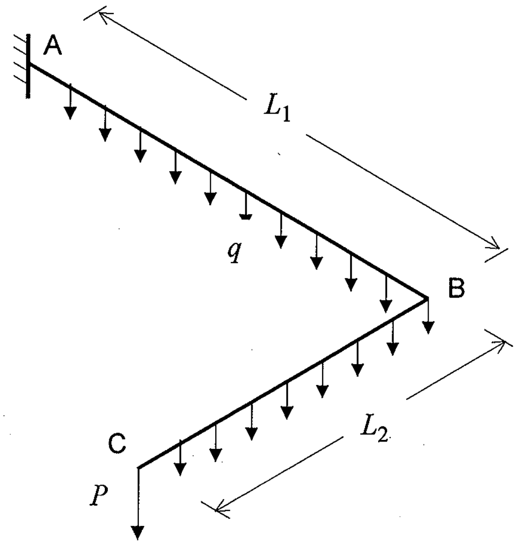
[0.29 N, 55 N/mm^2]

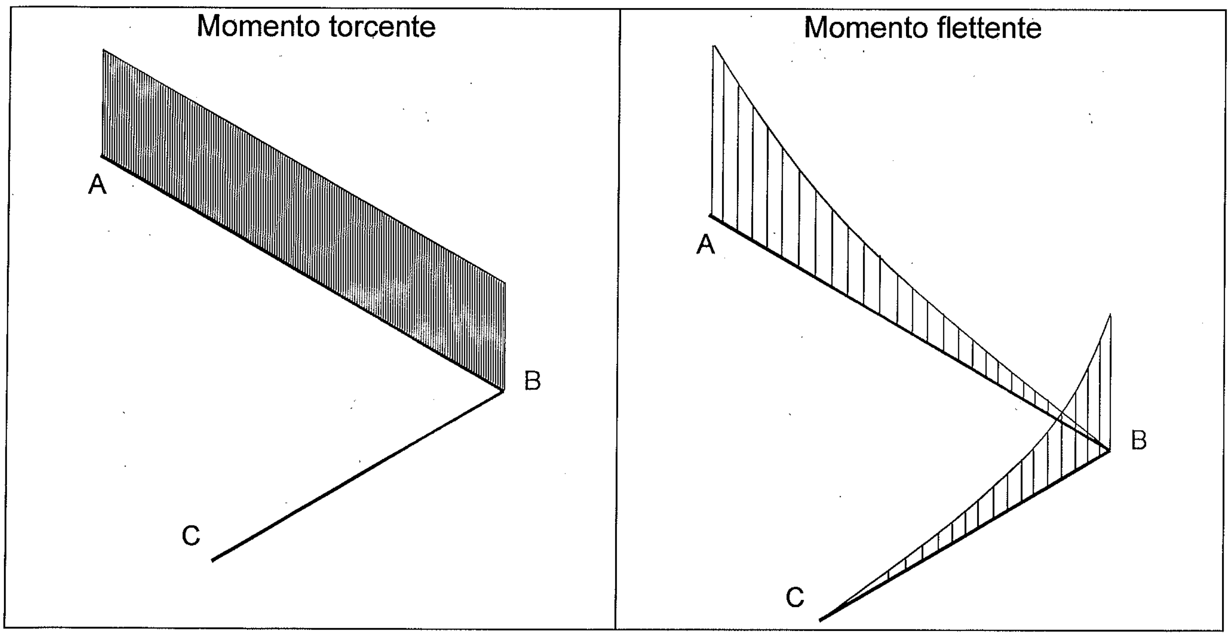
A) Spiegare perché la curvatura locale in una trave è proporzionale al momento flettente.
B) Di cosa tiene conto il fattore di taglio χ?
C) Nella flessione di un elemento "snello" prevale la deformazione per flessione o per taglio?
D) Come si determinano le costanti di integrazione dell'equazione della linea elastica?

2) La tubazione mostrata in figura, incastrata nella sezione A, è soggetta al peso proprio q (distribuito) e a quello P (concentrato) della saracinesca presente nella sezione C, come mostrato dallo schema statico. Si chiede di:
   a) in forma letterale, calcolare le reazioni vincolari in A, valutare l'andamento di tutte le caratteristiche di sollecitazione nei tratti AB e BC tracciandone i diagrammi;
   b) in base ai dati numerici forniti di seguito, calcolare le tensioni di flessione e torsione in A.

   Dati: $L_1 = 3600$ mm, $L_2 = 2400$ mm, $D_e = 200$ mm, $D_i = 180$ mm,
   $P = 600$ N, $q = 0.75$ N/mm.

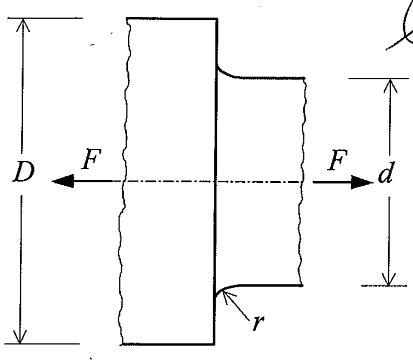






[a) $|M_{fA}| = |\, P\, L_1 + q\, L_1 L_2 + q L_1^2/2 \,|$; $|M_{tA}| = |\, PL_2 + qL_2^2/2 \,|$; $|V_A| = |\, P + q(L_1+L_2) \,|$
$M_{tB} = PL_2 + qL_2^2/2$; $M_{fB} = PL_2 + qL_2^2/2$;
b) tensioni in A: $\sigma_{max} = 50$ MPa; $\tau_{max} = 6.8$ MPa]

FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE
Anno accademico 2012/2013 - Esercitazione n° 14

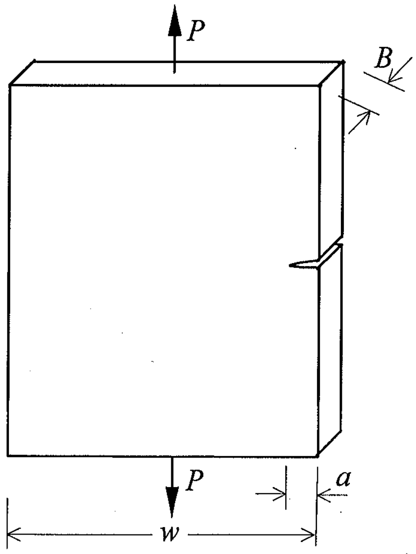


1) Il particolare rappresentato in figura è sollecitato da una forza di trazione statica F = 100 kN. Determinato il fattore di concentrazione della tensione, stabilire la tensione limite richiesta al materiale per ottenere coefficiente di sicurezza C_S nei casi di:
a) materiale fragile (C_S = 3);
b) materiale duttile (C_S = 1.5).
Dati: D = 60 mm, d = 40 mm, r = 4 mm.

[K_t = 2; a) R_m = 480 MPa; b) R_{eH} = 120 MPa]

2) Una lastra rettangolare di spessore B è larga w = 100 mm ed è sollecitata a trazione statica da un carico P = 400 kN; è presente una cricca laterale (Y = 1.99) di lunghezza a = 6 mm. Calcolare il valore dello spessore B affinché la lastra resista sia a snervamento (coefficiente di sicurezza minimo 1.5) sia a rottura per propagazione della cricca (coefficiente di sicurezza minimo 3).
Dati materiale (acciaio maraging 250): $R_{p0,2}$ = 1700 MPa, K_{Ic} = 75 MPa $\sqrt{m}$.

[$B \approx 25$ mm]

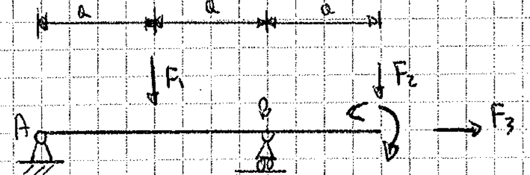


3) Si esegue una prova su un elemento prismatico (w = 500 mm, B = 20 mm) che presenta una cricca centrale passante ($Y = \sqrt{\pi}$) di lunghezza $2a$ = 50 mm, il cedimento avviene al carico P = 1.35 MN. Sapendo che la tensione di snervamento del materiale è $R_{p0,2}$ = 480 MPa, dire se si è trattato di cedimento per propagazione di cricca e trovare l'eventuale tenacità a frattura.

[σ_{eff} = 150 MPa, K_{Ic} = 38 MPa $\sqrt{m}$]

A) Spiegare la definizione del "fattore di concentrazione della tensione" per gli intagli. p. 122
B) Da quali fattori dipende K_t? Come se ne ottengono i valori per la soluzione dei casi pratici?
C) Perché nei casi di elementi contenenti cricche la verifica in termini di tensione non è possibile?
D) In che senso il "fattore di intensità della tensione" rappresenta il campo di tensione di fronte alla cricca?
E) Quale proprietà del materiale esprime la "tenacità a frattura"? Perché è influenzata dallo spessore?

(3)



$C = 60\ KN\,mm$

$F_1 = 2KN$

$F_2 = 1KN$

$F_3 = 0{,}5\ KN$

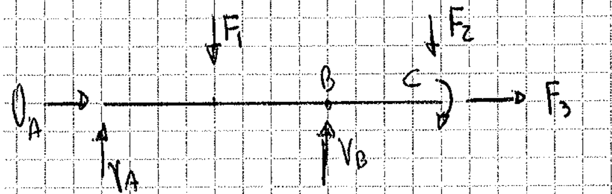
$a = 80\ mm$

1) grado di iperstaticità

$h = v - 3m \qquad h = 0 \rightarrow$ sistema isostatico

$v = 3i + 2(c+b) + a = 3$

2) Diagramma di corpo libero



3) equazioni di equilibrio

$\cancel{\rightarrow : O_A + F_3 = 0}$

$\cancel{\curvearrowright : V_A 3a + V_B a - F_1 2a + \frac{C}{a} = 0}$

$\cancel{\uparrow : V_A + V_B - F_1 - F_2 = 0}$

$$\cancel{\begin{cases} O_A = -F_3 \\ V_A = \frac{2F_1}{3} - \frac{C}{3a} - \frac{V_B}{3} \\ \frac{2}{3}F_1 + \frac{V_B}{3} - F_1 - \frac{C}{3a} - F_2 + V_B = 0 \end{cases}}$$

$$\cancel{\begin{cases} O_A = -0{,}5\ KN \\ \\ \frac{4}{3}V_B = F_1 + F_2 + \frac{C}{3a} - \frac{2}{3}F_1 = \end{cases}}$$

$\rightarrow : O_A = -F_3$

$\uparrow : V_A + V_B - F_1 - F_2 = 0$

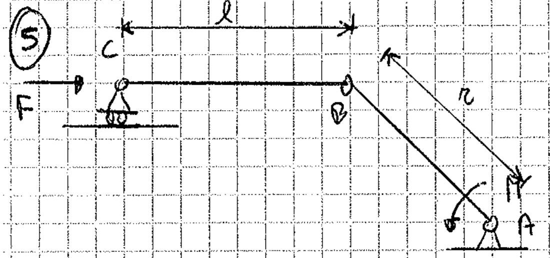
$\overset{\curvearrowright}{A} : C + F_1 a + \frac{F_2}{2} 3a - V_B 2a = 0$

$$\begin{cases} O_A = -F_3 \\ V_A = F_1 + F_2 - V_B \\ V_B = \frac{C}{2a} + \frac{F_1}{2} + \frac{F_2\,3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} O_A = -0{,}5\,KN \\ V_A = F_1 + F_2 - \frac{C}{2a} - \frac{F_1}{2} - \frac{3F_2}{2} \\ V_B = \frac{C}{2a} + \frac{F_1}{2} + \frac{3}{2}F_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} O_A = -0{,}5\ KN \\ V_A = \frac{F_1}{2} - \frac{1}{2}F_2 - \frac{C}{2a} = 0{,}125\ KN \\ V_B = \frac{F_1}{2} + \frac{3}{2}F_2 + \frac{C}{2a} = 2{,}875\ KN \end{cases}$$

(5)



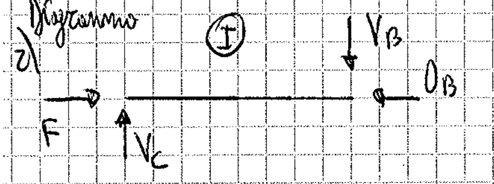
1) grado di iperstaticità $h = v - 3m$

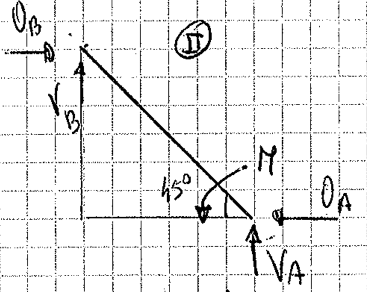
$m = 2$

$v = 3i + 2(c+b) + a = 2(2) + 1 = 5$

$h = 5 - 3 \cdot 2 = 6 - 1 \rightarrow$ ipostatico

2) Diagramma





$\rightarrow$: $O_B = F$ $\quad O_B = F$

$\uparrow$: $V_C - V_B = 0 \quad V_C = 0$

C: $-V_B l = 0 \rightarrow V_B = 0$

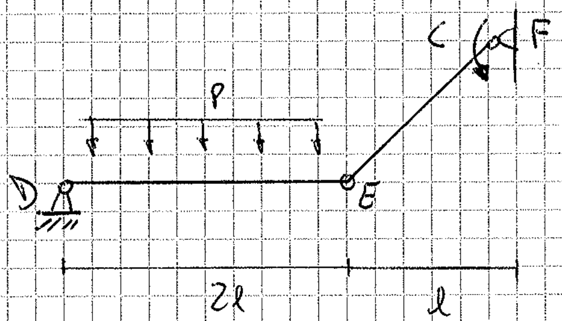
$\rightarrow$: $O_B = O_A = F$

$\uparrow$: $V_A - V_B = 0 \Rightarrow V_A = 0$

B: $M + O_A\, r \sin 45°$

$M = -F r \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

(6)



1) grado di iperstaticità $h = v - 3m$

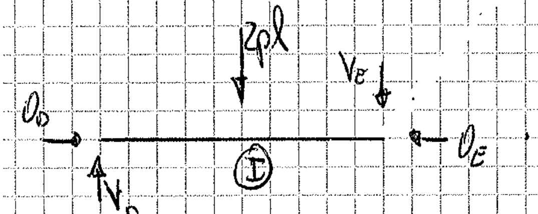
$m = 2$

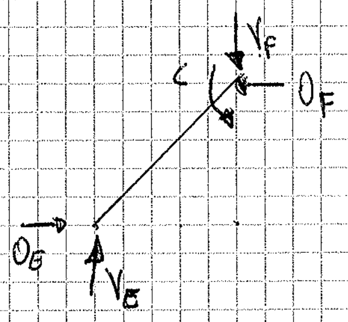
$v = 3i + 2(c+b) + a = 6$

$h = 0 \rightarrow$ isostatico

$p =$

2) Diagramma di corpo libero





$\uparrow$: $V_D + V_E - 2pl = 0$

$\rightarrow$ $O_D = O_E$

D: $V_E 2l + 2pl^2 = 0$

$V_E = -pl$

$V_D = pl$

$\uparrow$: $V_E - V_F = 0 \quad V_F = -pl$

$\rightarrow$: $O_E = O_F$

F: $V_E \cdot l - C - O_E l = 0$

$-pl^2 - C - O_E l = 0 \quad O_E = -\frac{C}{l} - pl$

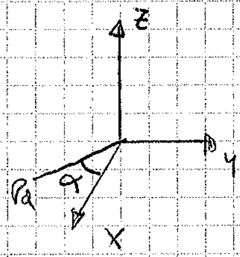
E) In generale non è possibile l'equilibrio; tranne nel particolare caso in cui agiscano oltre forze in maniera tale che i loro prodotti per la distanza dal fulcro siano uguali ($F_1 a = F_2 b$) con a e b le ~~distanze~~ rispettive distanze dal fulcro

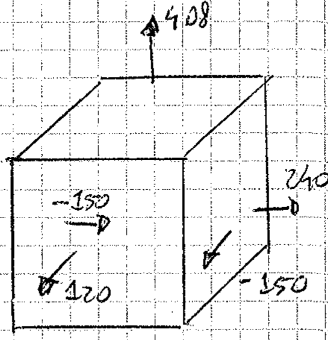
F) Una cerniera interna non caricata presenta due sole incognite, perché in ognuna delle due parti della struttura su cui sono esercitate la reazione orizzontale e la reazione verticale, la cerniera determina reazioni uguali ed opposte per il principio di azione e reazione.

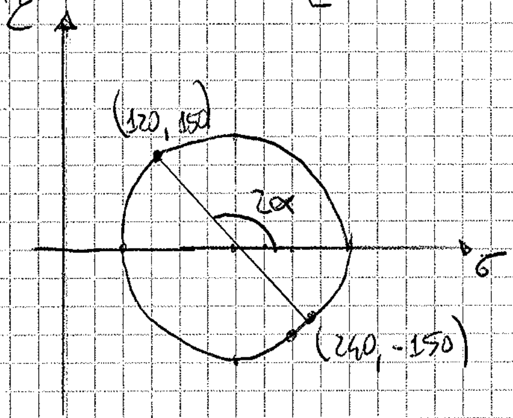
2 a)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 120 & -150 & 0 \\ -150 & 240 & 0 \\ 0 & 0 & 408 \end{bmatrix}$$

z principale z = pc







$\tau_{xy} < 0$ e $\sigma_{xx} < \sigma_{yy}$

$\sigma_{zz} = 408 = \sigma_c$

$$\sigma_{a,b} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} =$$

$$= \frac{120+240}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{120-240}{2}\right)^2 + 150^2} = 180 \pm 161,56 =$$

$\sigma_a = 18,44 = 18$ Mpa

$\sigma_b = 341,56 = 342$ Mpa

$\sigma_1 = 408$ Mpa $\sigma_2 = 342$ Mpa $\sigma_3 = 18$ Mpa → Tensioni principali

$$|\tan 2\alpha| = \left|\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}\right| = \left|\frac{-2 \cdot 150}{120-240}\right| = 2,5 \qquad 2\alpha = 68,19 \Rightarrow \alpha = 34,095$$

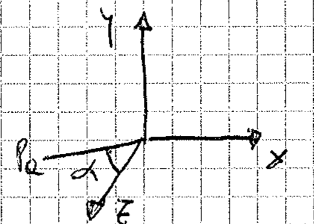
$\alpha^* = 90 - \alpha = 56°$

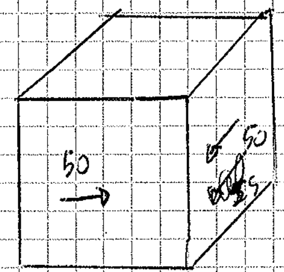
$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{408-18}{2} = 195$ Mpa

b)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 00 \\ 50 & 0 & 150 \end{bmatrix}$$

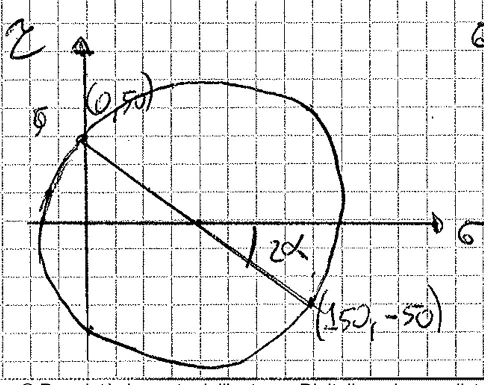
y → principale





$\sigma_{yy} = 0 = \sigma_c$

$\tau_{xz} > 0$ e $\sigma_{zz} > \sigma_{xx}$



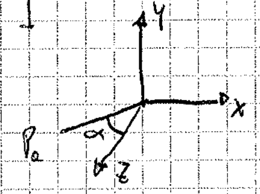
$$\sigma_{a,b} = \frac{\sigma_{zz}+\sigma_{xx}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{zz}-\sigma_{xx}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} =$$

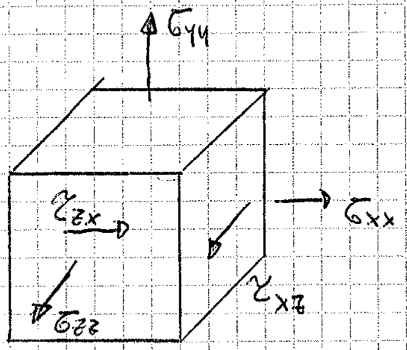
$$= \frac{150+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{150}{2}\right)^2 + 50^2} = 75 \pm 90 \begin{cases} -15 \\ 165 \end{cases}$$

tensioni principali:

(3)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 180 \\ 0 & 0 & 0 \\ 180 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





y → principale

$\sigma_{yy} = \sigma_c$

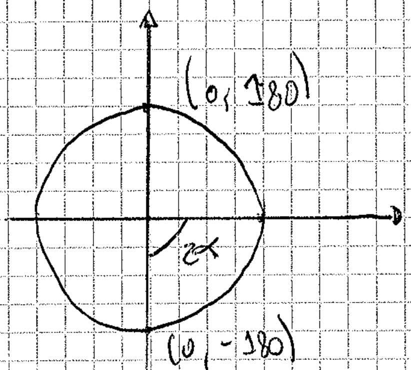
calcolo $\sigma_{a,b}$ ⇒ $\sigma_{a,b} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{zz}}{2}\right) + \tau_{xz}^2} = \pm\sqrt{180^2} = \pm 180$ Mpa

tensioni principali

$\sigma_1 = 180$ Mpa $\quad \sigma_2 = 0$ Mpa $\quad \sigma_3 = -180$ Mpa

$$|\tan 2\alpha| = \left|\frac{2\tau_{xz}}{\sigma_{xx}-\sigma_{zz}}\right| = \infty \Rightarrow 2\alpha = 90 \quad \alpha = 45^\circ \quad \alpha^* = -45^\circ$$

$\tau_{xz} > 0$



(A) Il segno delle componenti di tensione rappresenta una diversa situazione fisica a seconda che sia positivo o negativo. In caso di segno positivo delle componenti normali (σ_{ij}) si tratta di trazione, mentre si tratta di compressione quando il segno è negativo. Per le componenti tangenziali (τ_{ij}) il segno negativo è solo una convenzione che indica che la sollecitazione ha verso opposto rispetto a quello rappresentato

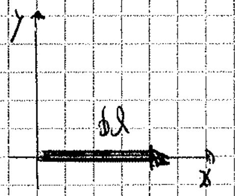
(B) Il tetraedo deve essere infinitesimo in modo da poter passare dalle forze alle tensioni attraverso $\lim_{\Delta A \to 0} \frac{F}{\Delta A}$. Inoltre si sceglie un tetraedo piuttosto che un parallelepipedo per poter considerare una faccia con versore normale diverso da uno degli assi coordinati ed esprimere in funzione di essi il vettore delle tensioni $\{f\} = [\sigma]\{n\}$

Esercitazione 3

$A = 1 \cdot 10^{-3}$ $\quad B = -0{,}5 \cdot 10^{3}$

① a) $u = Ax$
$v = By$
$w = 0$

$$U = \begin{Bmatrix} 1 \cdot 10^{-3} x \\ -0{,}5 \cdot 10^{-3} y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

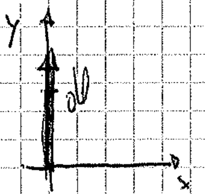


$$A' = A + U = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$B' = B + \vec{U} = \begin{Bmatrix} dl \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A\,dl \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dl\,(1+A) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

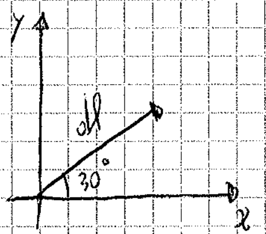
$$dU = \begin{Bmatrix} A\,dl \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10^{-3}\,dl \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b)



$$dU = \begin{Bmatrix} Ax \\ By \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ By \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0{,}5 \cdot 10^{-3}\,dl \\ 0 \end{Bmatrix}$$

c)



$$d\vec{U} = \begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A\,dx \\ B\,dy \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A\,dl\cos 30° \\ B\,dl\sin 30° \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8{,}66 \cdot 10^{-4}\,dl \\ -2{,}50 \cdot 10^{-4}\,dl \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{dU\} = [\varepsilon]\,dX = \begin{Bmatrix} du \\ dv \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} du = \varepsilon_{xx}dx + \varepsilon_{xy}dy + \varepsilon_{zz}dz \Rightarrow \\ dv = \varepsilon_{xy}dx + \varepsilon_{yy}dy + \varepsilon_{yz}dz \Rightarrow \\ 0 = \varepsilon_{zx}dx + \varepsilon_{zy}dy + \varepsilon_{zz}dz \Rightarrow \end{array}$$

$\rightarrow \varepsilon_{xx} = A \quad \varepsilon_{xy} = 0 \quad \varepsilon_{xz} = 0$
$\rightarrow \varepsilon_{yy} = B \quad \varepsilon_{yx} = 0 \quad \varepsilon_{yz} = 0$
$\rightarrow \varepsilon_{zz} = 0 \quad \varepsilon_{zx} = 0 \quad \varepsilon_{yz} = 0$

$$\Rightarrow [\varepsilon] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x, y, z \text{ è principali}$$

c) η operando su xyz $\quad \eta = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \cancel{\tau_{xz}\gamma_{xz}} + \cancel{\tau_{yz}\gamma_{yz}}\right)$ $=0$ $=0$

$= 1,824 \text{ J}$

η operando sulle componenti principali $\quad \eta = \frac{1}{2}\left(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3\right) = 1,823$

---

(3) tensione piano $(\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0)$

$\varepsilon_{xx} = 2,10 \cdot 10^{-4} \quad \varepsilon_{yy} = -4,60 \cdot 10^{-4} \quad \gamma_{xy} = -1,80 \cdot 10^{-3} \quad E = 2,06 \cdot 10^{5}\ N/mm^2$

$\nu = 0,29$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 2,10 & -18 & 0 \\ -18 & -4,60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

a)

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right) = 17,22 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right) = -89,76 \text{ Mpa}$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = 143,72 \text{ Mpa}$$

$$\hookrightarrow G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 7,98 \cdot 10^{4} \text{ Mpa}$$

b) $\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right) = 1,02 \cdot 10^{-4}$

(A) Il contributo della traslazione si trova quando si semplifica l'espressione

$d\vec{x}' + \cancel{\vec{0}} = d\vec{x} + \cancel{\vec{0}} + d\vec{U}$

(B) $[J]\{dx\} \rightarrow$ include sia i contributi di rotazione rigida che quelli di dilatazione e scorrimento

$[\varepsilon]\{dx\} \rightarrow$ rappresenta solo i contributi di dilatazione e scorrimenti

Esercitazione 4

(1) sezione rettangolare 4×10mm

acciaio Sxxx

$F_{eH} = 12\,kN$ $F_m = 17{,}6\,kN$ $L_u = 45\,mm$

calcolare R_{eH}, R_m e A e individuare il materiale

$R_{eH} = F_{eH}/S_0$ $S_0 = 4\times10 = 40\,mm^2$

$R_{eH} = \dfrac{12\cdot10^3\,N}{40\,mm} = 300\ Mpa$

$R_m = F_m/S_0 = \dfrac{17{,}6\cdot10^3}{40} = 440\ Mpa$

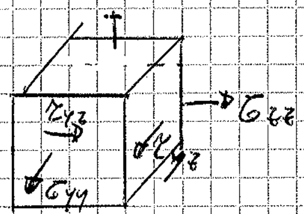
$A = \dfrac{100(L_u - L_0)}{L_0} = \cancel{\dfrac{100(45-40)}{40}} =$ $L_0 = 5{,}65\sqrt{S_0} = 5{,}65\sqrt{40} = 35{,}75\ mm$

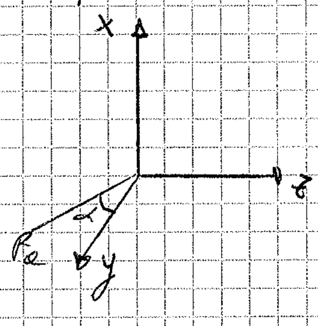
$A = \dfrac{100\,(45-35{,}75)}{35{,}75} = 25{,}87\%$

materiale ACCIAIO S275 (da tabella pg 42)

(2) materiale fragile

a) $[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 35 \\ 0 & 35 & 80 \end{bmatrix}$ x → dir principale σ_{xx} = tensione principale





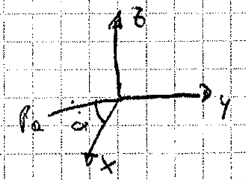
$\sigma_{a,b} = \dfrac{\sigma_{yy}+\sigma_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_{yy}-\sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2} = \dfrac{120+80}{2} \pm \sqrt{20^2+35^2} = 100 \pm 40{,}3$ → $140{,}3\ Mpa$ / $59{,}7\ Mpa$

$\cancel{\sigma_1 = \ldots}$ $\sigma_2 = 22\ Mpa$ $\sigma_3 = 0\ Mpa$

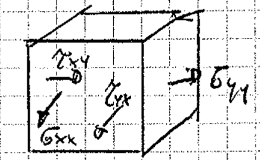
$\sigma_1 = 140{,}3\ Mpa$ $\sigma_2 = 59{,}7\ Mpa$ $\sigma_3 = 0\ Mpa$

17 materiale duttile

$$\sigma = [\sigma] = \begin{bmatrix} 110 & -150 & 0 \\ -150 & -140 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ z dir. principale



$C_s = 1,5$



$$\sigma_{a,b} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} =$$

$$= \frac{110-140}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{110+140}{2}\right)^2 + 150^2} = -15 \pm 195 \begin{cases} -210 \text{ MPa} \\ 180 \text{ MPa} \end{cases}$$

$\sigma_1 = 180$ MPa $\quad \sigma_2 = 0$ MPa $\quad \sigma_3 = -210$ MPa

• ipotesi Max τ

$\cancel{\sigma_{id} = \sigma_1 = 180 \text{ MPa}}$ $\quad \sigma_{id} = \sigma_1 - \sigma_3 = 180 + 210 = 390$ MPa

$\cancel{R_{eH} = C_s \cdot \sigma_{id} = 1,5 \cdot 180 =}$ $\quad R_{eH} = \sigma_{id} \cdot C_s = 585$ MPa

• ipotesi ~~max~~ energia di distorsione

$$\sigma_{id} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(180)^2 + (390)^2 + 210^2} =$$

$= 338$ MPa

$R_{eH} = \sigma_{id} \cdot C_s = 507,12$ MPa

A) No, perché l'estensimetro viene applicato direttamente sulla provetta

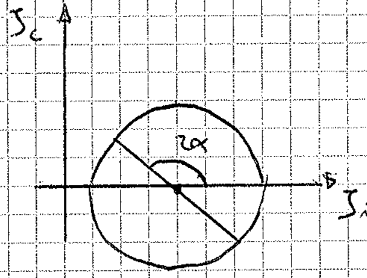
B) No, risente solo della ~~futura~~ deformazione ~~plastica~~ plastica. ~~Da~~ A seconda del valore dell'allungamento dopo rottura è possibile stabilire di che tipo di materiale si tratta: se $A > 10\%$ → materiali duttili
se $A < 5\%$ → materiali fragili

C)

D) L'ipotesi di massima τ è più cautelativa perché dal confronto grafico si deduce che la curva limite corrispondente alla massima τ è completamente inscritta in quella corrispondente all'energia di distorsione.

E) La tensione limite è il valore oltre il quale si verifica il cedimento del materiale che varia a seconda del tipo di materiale; ~~per~~ la tensione ammissibile invece è quel valore di tensione che in un calcolo di progetto, quando la condizione di resistenza è utilizzata per stabilire un parametro della struttura è pari a $\sigma_{am} = \sigma_{lim} / C_s$.

$$J_{1/2} = \frac{J_{xx}+J_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{xx}-J_{yy}}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} = (1{,}667 \pm 1{,}41)\cdot 10^4 = \begin{cases} 3{,}081\cdot 10^4\ mm^4 \\ 0{,}253\ mm^4 \end{cases}$$

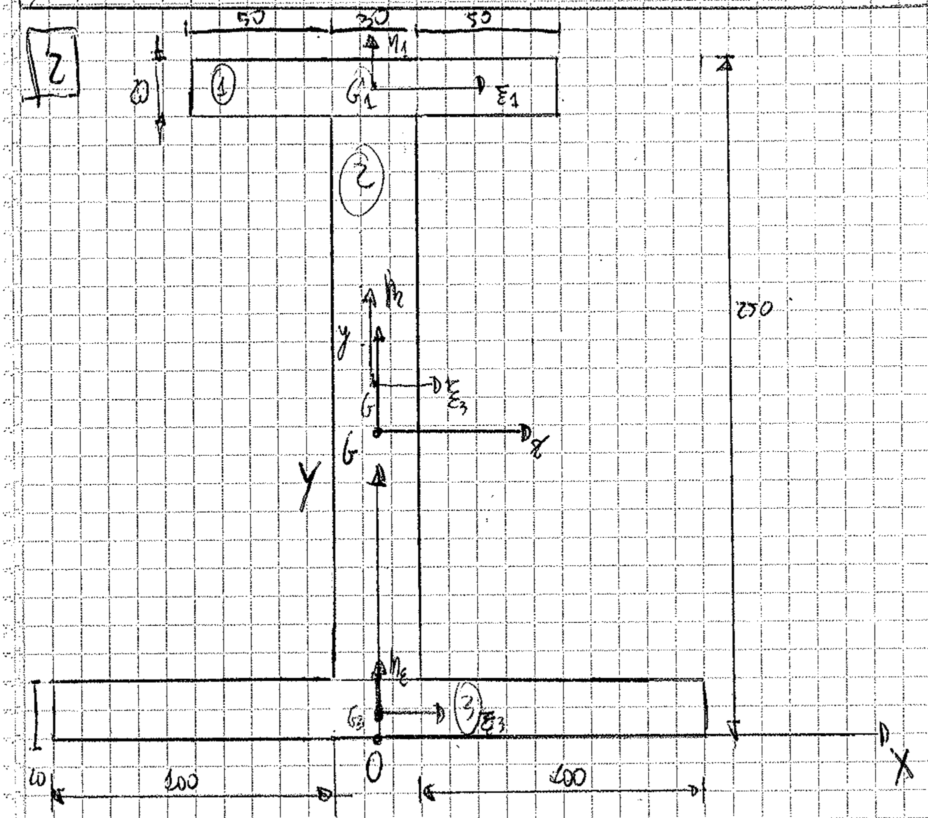


$$|\tan 2\alpha| = \left|\frac{2J_{xy}}{J_{xx}-J_{yy}}\right| = 1 \Rightarrow \alpha^* = \frac{45^\circ}{2} = 22{,}5^\circ$$

$$45^\circ \le \alpha \le 90^\circ$$

$$\alpha = 90 - \alpha^* = 67{,}5^\circ$$

2



- Coordinate dei baricentri i-esimi rispetto OXY

$X_1 = 0\ mm \quad Y_1 = 240\ mm$

$X_2 = 0\ mm \quad Y_2 = 125\ mm$

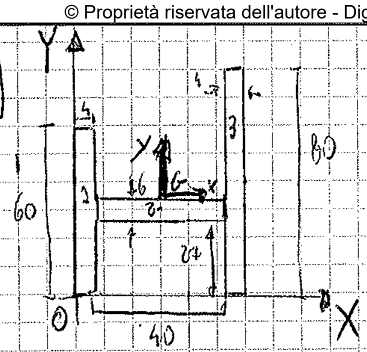
$X_3 = 0\ mm \quad Y_3 = 10\ mm$

- Aree

$A_1 = 20\cdot 130 = 2600\ mm^2 \quad A_2 = 30\cdot 210 = 6300\ mm^2 \quad A_3 = \cancel{4600\ mm^2}\ 230\cdot 20 = 4600\ mm^2$

$A_T = 1{,}35\times 10^4\ mm^2$

3



- Coordinate baricentri i-esimi rispetto a OXY

$X_1 = 2$ mm $\quad Y_1 = 30$ mm

$X_2 = 24$ mm $\quad Y_2 = 30$ mm

$X_3 = 46$ mm $\quad Y_3 = 40$ mm

- Aree

$A_1 = 4 \cdot 60 = 240\ mm^2 \quad A_2 = 6 \cdot 40 = 240\ mm^2 \quad A_3 = 80 \cdot 4 = 320\ mm^2$

$A = A_1 + A_2 + A_3 = 800\ mm^2$

- Momenti Statici S_x, S_y

$$S_x = \sum(y_i A_i) = y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 = 30 \cdot 240 + 30 \cdot 240 + 40 \cdot 320 = 2{,}720 \cdot 10^4\ mm^3$$

$$S_y = \sum(x_i A_i) = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 = 2 \cdot 240 + 24 \cdot 240 + 46 \cdot 320 = 2{,}096 \cdot 10^4\ mm^3$$

- Coordinate baricentro di tutta la figura

$$X_G = \frac{S_y}{A} = \frac{2{,}096 \cdot 10^4}{800} = 26{,}3\ mm \qquad Y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{2{,}720 \cdot 10^4}{800} = 34\ mm \quad \rightarrow a)$$

- Nuove Coordinate baricentri i-esimi nel sistema baricentrico

1: $\begin{cases} x_1 = 2 - 26{,}3 = -24{,}3 \\ y_1 = 30 - 34 = -4\ mm \end{cases}$ $\qquad$ 2: $\begin{cases} x_2 = 24 - 26{,}3 = -2{,}3\ mm \\ y_2 = 30 - 34 = -4\ mm \end{cases}$

3: $\begin{cases} x_3 = 46 - 26{,}3 = 19{,}7\ mm \\ y_3 = 40 - 34 = 6\ mm \end{cases}$

- Momenti di secondo ordine J_{xx}, J_{yy}, J_{xy} $\rightarrow b)$

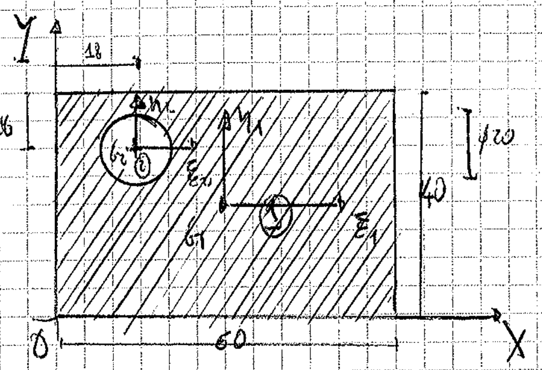
$$J_{xx} = \sum(y_i^2 A_i + J_{\xi_i \xi_i}) = (-4)^2 \cdot 240 + \frac{4 \cdot 60^3}{12} + (-4)^2 \cdot 240 + \frac{40 \cdot 6^3}{12} + 6^2 \cdot 320 + \frac{4 \cdot 80^3}{12} =$$

$$= 2{,}623 \cdot 10^5\ mm^4$$

$$J_{yy} = \sum(x_i^2 A_i + J_{\eta_i \eta_i}) = (-24{,}3)^2 \cdot 240 + \frac{60 \cdot 4^3}{12} + (-2{,}3)^2 \cdot 240 + \frac{6 \cdot 40^3}{12} + 320 \cdot (19{,}7)^2 + \frac{80 \cdot 4^3}{12}$$

$$= 3{,}000 \cdot 10^5\ mm^4$$

4)



• Coordinate baricentri i-esimi rispetto a OXY

$X_1 = 30$ mm $\quad Y_1 = 20$ mm

$X_2 = 18$ mm $\quad Y_2 = 24$ mm

• Aree

$A_1 = 60 \cdot 40 = 2400$ mm^2

$A_2 = \pi 10^2 = 100\pi = 314$ mm^2

$A = A_1 - A_2 = 2086$ mm^2

• Momenti statici S_x, S_y

$$S_x = \sum (y_i A_i) = 20 \cdot 2400 - 24 \cdot 314 = 4{,}046 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

$$S_y = \sum (x_i A_i) = 30 \cdot 2400 - 18 \cdot 314 = 6{,}634 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

• Coordinate baricentro di tutta la figura

$$X_G = \frac{S_y}{A} = \frac{6{,}634 \cdot 10^4}{2086} = 31{,}7 \text{ mm} \qquad Y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{4{,}046 \cdot 10^4}{2086} = 19{,}4 \text{ mm} \rightarrow a)$$

• Coordinate baricentri i-esimi nel sistema baricentrico

(1) $\begin{cases} x_1 = 30 - 31{,}7 = -1{,}7 \text{ mm} \\ y_1 = 20 - 19{,}4 = 0{,}6 \text{ mm} \end{cases}$ $\qquad$ (2) $\begin{cases} x_2 = 18 - 31{,}7 = -13{,}7 \text{ mm} \\ y_2 = 24 - 19{,}4 = 4{,}6 \text{ mm} \end{cases}$

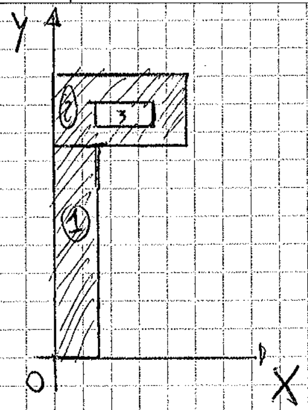
• Momenti di II ordine

$$J_{xx} = \sum (y_i^2 A_i + J_{\xi_i\xi_i}) = (0{,}6)^2 \cdot 2400 + \frac{60 \cdot 40^3}{12} - (4{,}6)^2 \cdot 314 - \frac{\pi \cdot 20^4}{64} = 3{,}063 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$J_{yy} = \sum (x_i^2 A_i + J_{\eta\eta}) = (-1{,}7)^2 \cdot 2400 + \frac{40 \cdot 60^3}{12} - (-13{,}7)^2 \cdot 314 - \frac{\pi \cdot 20^4}{64} = 6{,}601 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 \quad b)$$

$$J_{xy} = \sum (x_i y_i A_i + J_{\eta_i\xi_i}) = (-1{,}7)(0{,}6) \cdot 2400 - (4{,}6)(-13{,}7) \cdot 314 = 0{,}173 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

5



- Coordinate baricentri i-esimi rispetto a OXY

$X_1 = 4\ mm \quad Y_1 = 19\ mm$

$X_2 = 17\ mm \quad Y_2 = 49\ mm$

$X_3 = 17\ mm \quad Y_3 = 49\ mm$

- Aree

$A_1 = 8 \times 38 = 304\ mm^2 \quad A_2 = 22 \cdot 34 = 748\ mm^2$

$A_3 = 18 \cdot 10 = 180\ mm^2$

$A = A_1 + A_2 - A_3 = 872\ mm^2$

- Momenti statici

$S_x = \sum y_i A_i = \cancel{X_1} A_1 + \cancel{X_2} A_2 - Y_3 A_3 = 19 \cdot 304 + 49 \cdot 748 - 49 \cdot 180 = 3{,}36 \cdot 10^4\ mm^3$

$S_y = \sum x_i A_i = X_1 A_1 + A_2 x_2 - X_3 A_3 = 4 \cdot 304 + 17 \cdot 748 - 17 \cdot 180 = 1{,}0870 \cdot 10^4\ mm^3$

- Coordinate baricentro rispetto a OXY

$X_G = \frac{S_y}{A} = 12{,}5\ mm \qquad Y_G = \frac{S_x}{A} = 38{,}5\ mm \qquad$ a) ←

- Coordinate baricentri i-esimi rispetto a G-XY

① $\begin{cases} x_1 = 4 - 12{,}5 = -8{,}5\ mm \\ y_1 = 19 - 38{,}5 = -19{,}5\ mm \end{cases}$ ② $\begin{cases} x_2 = 17 - 12{,}5 = 4{,}5\ mm \\ y_2 = 49 - 38{,}5 = 10{,}5\ mm \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x_3 = 4{,}5\ mm \\ y_3 = 10{,}5\ mm \end{cases}$

- Momenti di II ordine b) ←

$$J_{xx} = \sum \left(y_i^2 A_i + J_{\xi_i \xi_i} \right) = (-19{,}5)^2 \cdot 304 + \frac{8 \cdot 38^3}{12} + (10{,}5)^2 \cdot 748 + \frac{22 \cdot 34^3}{12} - (10{,}5)^2 \cdot 180 - \frac{10 \cdot 18^3}{12} =$$

$$= 2{,}44 \cdot 10^5\ mm^4$$

$$J_{yy} = \sum \left(x_i^2 A_i + J_{\eta_i \eta_i} \right) = (-8{,}5)^2 \cdot 304 + \frac{38 \cdot 8^3}{12} + (4{,}5)^2 \cdot 748 + \frac{34^3 \cdot 22}{12} - (4{,}5)^2 \cdot 180 - \frac{18^3 \cdot 10}{12} =$$

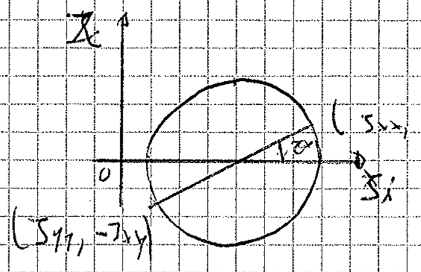
$$= 1{,}022 \cdot 10^5\ mm^4$$

$$J_{xy} = \sum \left(x_i y_i A_i + J_{\eta_i \xi_i} \right) = (8{,}5 \cdot 19{,}5 \cdot 304) + (4{,}5 \cdot 10{,}5 \cdot 748) - (4{,}5 \cdot 10{,}5 \cdot 180) =$$

$$= 0{,}772 \cdot 10^5\ mm^4$$

- Riferimento centrale principale e momenti principali

$J_{xy} > 0 \quad J_{xx} > J_{yy} \quad 0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$

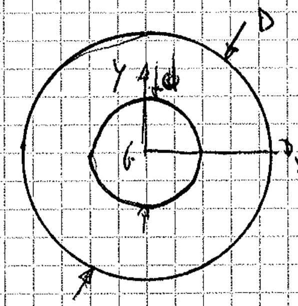


$$J_{1/2} = \frac{J_{xx}+J_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{xx}-J_{yy}}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} = (1{,}73 \pm 1{,}04)\cdot 10^5 \begin{cases} J_1 = 2{,}78\cdot 10^5\ mm^4 \\ J_2 = 0{,}68\cdot 10^5\ mm^4 \end{cases}$$

$$|\tan 2\alpha^*| = \left|\frac{2J_{xy}}{J_{xx}-J_{yy}}\right| = \left|\frac{2\cdot 0{,}77\cdot \cancel{10^5}}{(2{,}44-1{,}02)\cdot \cancel{10^5}}\right| = 1{,}08 \Rightarrow \alpha^* = 23{,}66^\circ = \alpha$$

Esercitazione 6

1



$D = 40\,mm \quad d = 10\,mm$

$M_y = 750\,KNmm$

$N = 170\,KN$

$R_{p0,2} = 540\,Mpa$

in questo caso $J_{xx} = J_{yy}$ → flessione retta → flessione intorno a y

$$J_{yy} = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64}(40^4 - 10^4) = 1{,}25 \cdot 10^5\ mm^4$$

$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A} + - \frac{M_y}{J_{yy}} x \qquad A = \pi\left(\frac{D^2}{2} - \frac{d^2}{2}\right) = \pi(20^2 - 5^2) = 1178\ mm^2$$

$$\sigma_{zz} = \frac{170 \cdot 10^3}{1178} - \frac{750 \cdot 10^3}{1{,}25 \cdot 10^5}\left(\pm \frac{40}{2}\right) = \begin{cases} 24{,}31\ N/mm^2 \\ 264{,}31\ N/mm^2 \end{cases}$$

asse neutro: $\sigma_{zz} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{N}{A} - \frac{M_y}{J_{yy}} x = 0 \Rightarrow x = \frac{N}{A} \cdot \frac{J_{yy}}{M_x} = 106{,}11\ mm$$

$\sigma_1 = \sigma_{zz} = \sigma_{id}$

$$C_s = \frac{R_{p02}}{\sigma_{id}} = \frac{540}{264{,}31} = 2{,}04$$

$$A: \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -28,2 \\ 71,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28,2 \frac{\sqrt{2}}{2} + 71,8 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 28,2 \frac{\sqrt{2}}{2} + 71,8 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30,82 \\ 70,71 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{zz}^{A} = \frac{M_x}{J_{xx}} \cancel{x_A} - \frac{M_y}{J_{yy}} x_A = \frac{1,76 \cdot 10^6}{2,80 \cdot 10^6} \cdot \overset{70,71}{\cancel{30,82}} + \frac{1,76 \cdot 10^6}{0,73 \cdot 10^6} \cdot \overset{30,82}{\cancel{70,71}} = 118,75 \ N/mm^2$$

$$B: \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -28,2 \\ -28,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40,3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{zz}{}_B^{+} = \frac{M_x}{J_{xx}} x_B - \frac{M_y}{J_{yy}} x_B = -37,16 \ N/mm^2$$

$$C: \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 71,8 \\ -28,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30,82 \\ -70,71 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{zz}^{C} = \frac{M_x}{J_{xx}} y_C - \frac{M_x}{J_{yy}} x_C = 23,85 \ N/mm^2$$

il punto più sollecitato è P

$P(-64, 60)$

$$\sigma_{zz}^{P} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_{xx}} y_P - \frac{M_y}{J_{yy}} x_P = \frac{8 \cdot 10^4}{2 \cdot 3{,}32 \cdot 10^3} + \frac{5{,}3 \cdot 10^6}{6{,}36 \cdot 10^6} \cdot 60 + \frac{3{,}5 \cdot 10^6}{3{,}26 \cdot 10^6} \cdot 64 = 128{,}3 \, MPa$$

A le caratteristiche di sollecitazione che equivalgono staticamente alla tensione assiale σ_{zz} sono 3: • la forza NORMALE $N = \int_A \sigma_{zz} dA$

• momento flettente intorno ad x $M_x = \int_A \sigma_{xx} y \, dA$

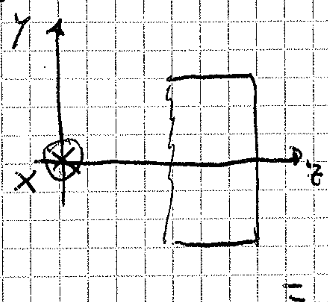
• momento flettente intorno ad y $M_y = -\int_A \sigma_{zz} x \, dA$

A seconda di quante e di quali caratteristiche di sollecitazione agiscono ci possono essere diversi casi: • estensione / compressione → solo N
• flessione nel piano zy → solo M_x
• flessione nel piano zx → solo M_y
• flessione combinata → M_x ed M_y
• estensione e flessione → N, M_x e M_y

B Nella flessione la sezione ruota di un angolo α_x e lo spostamento assiale dei punti della sezione segue la legge $w = \alpha y$ ($w = \alpha x$ nel piano xz).

C Per avere solo compressione (o trazione) la forza normale deve essere passante per il baricentro perché se non passasse per il baricentro si manifesterebbero dei momenti intorno all'asse x o all'asse y e non saremmo più nella condizione di sola compressione (o trazione)

D Consideriamo una sezione nel piano zy con xy sistema centrale principale della sezione



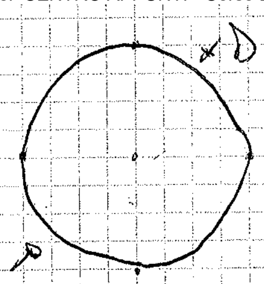
ammettiamo che la sezione ruoti di un angolo α_x intorno all'asse x rimanendo piana, lo spostamento assiale $w = \alpha_x y$

la dilatazione corrispondente è $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{d\alpha_x}{dz} y =$

$= K_x y$ con K_x = curvatura del solido

dalla legge di Hooke si ricava $\sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz} = EK_x y$

Esercitazione 17



1 $D = 35\ mm$

$N = 50\ kN$

$M_t = 400\ kN\,mm$

$R_m = 300\ N/mm^2$

Calcolare a) tensioni

b) tracciare i cerchi di Mohr per il centro e per il punto più esterno

c) C_s nel punto più sollecitato

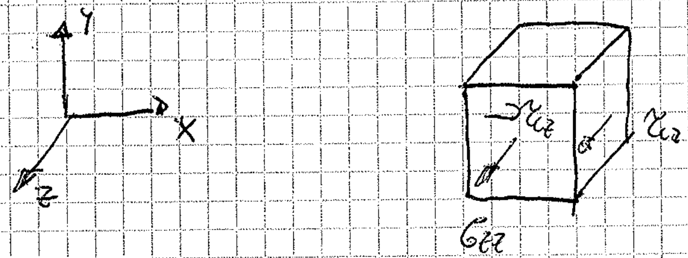
a) $A = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi = 962,11\ mm^2$

$$\sigma_{zz}^N = \frac{N}{A} = \frac{50 \cdot 10^3}{962,11} = 51,97\ MPa$$

$$\tau_{cz} = \frac{M_t}{J_p} \cdot \frac{D}{2} \qquad J_p = \frac{\pi D^4}{32} = 1,47 \cdot 10^5\ mm^4$$

$$\Rightarrow \tau_{cz} = \frac{M_t}{J_p} \frac{D}{2} = \frac{400 \cdot 10^3}{1,47 \cdot 10^5} \cdot \frac{35}{2} = 47,51\ MPa$$

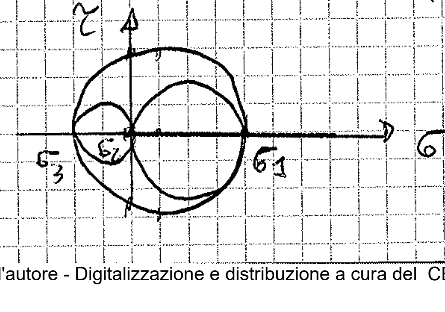
b)



$\sigma_{yy} = 0 \Rightarrow$ principale $\qquad \sigma_{xx} = 0$

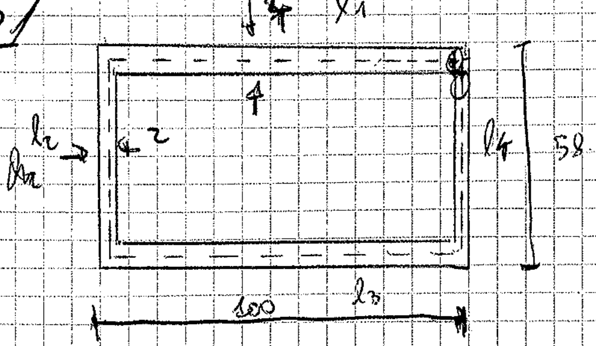
$$\sigma_{ab} = \frac{\sigma_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \tau_{cz}^2} = \frac{52}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{52}{2}\right)^2 + 48^2} = \begin{cases} 80,6\ MPa \\ -28,6\ MPa \end{cases}$$

$\sigma_1 = 80,6\ MPa \qquad \sigma_2 = 0\ MPa \qquad \sigma_3 = -28,6\ MPa$



3/

CASO ~~...~~



$l_1 = 98\ mm \quad s_1 = 4\ mm$

$l_2 = 54\ mm \quad s_2 = 3\ mm$

$l_3 = 98\ mm \quad s_3 = 4\ mm$

$l_4 = 52\ mm \quad s_4 = 2\ mm$

a) $J_{t_1} = \frac{1}{3}(l_1 - 0{,}3\, s_1)\, s_1^3 = 2086{,}4\ mm^4 \qquad M_t = 2{,}0 \cdot 10^5\ Nmm$

$J_{t_2} = \frac{1}{3}\, l_2\, s_2^3 = 144\ mm^4$

$J_{t_3} = \frac{1}{3}\, l_3\, s_3^3 = 2090{,}7\ mm^4$

$J_{t_4} = \frac{1}{3}(l_4 - 0{,}3 \cdot s_4)\, s_4^3 = 137{,}06$

$J_t = \sum_{i=1}^{4} J_{t_i} = 4{,}458 \cdot 10^3\ mm^4$

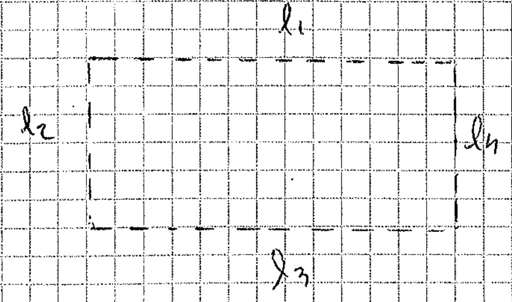
b) $\tau_1 = \frac{M_t}{J_t}\, s_1 = 179{,}37\ MPa$ ~~...~~

$\tau_1 = \tau_3$

$\tau_2 = \frac{M_t}{J_t}\, s_2 = 89{,}69\ MPa \qquad \tau_2 = \tau_2$

$\tau_{MAX} = \tau_1$

CASO SALDATO



$l_1 = l_3 = 98\ mm$

$l_2 = l_4 = 54\ mm$

C | Perchè nelle sezioni sottili a parete chiusa è possibile una trattazione approssimata basata su un'analogia con l'~~idrodinamica~~ idrodinamica; infatti è possibile definire il flusso $t = \int_s \tau \, ds$ che è il flusso della tensione τ attraverso una corda di spessore s. (vedi pg 70)

D

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 96

$$[\sigma^P] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 141 \end{bmatrix} \qquad \sigma_2 = 0$$

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{zz}}{2}\right)^2} = \sigma_{zz} = 141 \text{ MPa} \qquad \sigma_1 = \sigma_{id}$$

$$[\sigma^Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 70 \end{bmatrix} \qquad \sigma_2 = 0$$

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = 35 \pm \sqrt{35^2 + 30^2} = \begin{cases} \sigma_1 = 81,08 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = -11,08 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\sigma_{id} = 81,08 \text{ MPa} \qquad \sigma_{id} = \sigma_1 - \sigma_3 = 81 + 11 = 92 \text{ MPa}$$

$$[\sigma^G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 41 \\ 0 & 0 & 0 \\ 41 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_2 = 0$$

$$\sigma_{1,3} = 0 \pm 41 \begin{cases} \sigma_1 = 41 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = 41 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{41^2} = 41$$

$$\sigma_{id} = \sigma_1 - \sigma_3 = 82 \text{ MPa}$$

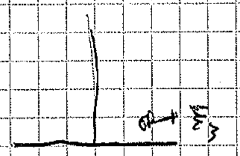
$\rightarrow S^*_{x,2} = 1{,}133 \cdot 10^4 + 4{,}4\, \xi_2 \left(\frac{113{,}7}{2} + \frac{\xi_2}{2} \right) \rightarrow$ andamento parabolico

$$\tau_2 = \frac{T_y S^*_{x,2}}{J_{xx}\, s_2} = \frac{2{,}8 \cdot 10^4 \cdot}{3{,}18 \cdot 10^6 \cdot 4{,}4} \left[1{,}133 \cdot 10^4 + 4{,}4\, \xi_2 \left(\frac{113{,}7}{2} - \frac{\xi_2}{2} \right) \right] =$$

$$= 2{,}001 \cdot 10^{-3} \left[1{,}133 \cdot 10^4 + 4{,}4\, \xi_2 \left(\frac{113{,}7}{2} - \frac{\xi_2}{2} \right) \right] = 22{,}67 + 8{,}80 \cdot 10^{-3} \left(\frac{113{,}7}{2} - \frac{\xi_2}{2} \right) \xi_2$$

- $\xi_2 = 0 \Rightarrow \tau_2 = 22{,}67\ N/mm^2$
- $\xi_2 = \frac{a}{2} \Rightarrow \tau_2 = 22{,}67 + 8{,}80 \cdot 10^{-3} \left(\frac{113{,}7}{2} - \frac{113{,}7}{4} \right) \frac{113{,}7}{2} = 36{,}9\ N/mm^2$
- $\xi_2 = a \Rightarrow \tau_2 = 22{,}67 + 8{,}80 \cdot 10^{-3} \left(\frac{113{,}7}{2} - \frac{113{,}7}{2} \right) \cdot 113{,}7 = 22{,}67\ N/mm^2$

$\tau_2 > 0 \rightarrow$ verso di τ concorde a quello di ξ_2



TRATTO 3 $\quad 0 \le \xi_3 \le \frac{b}{2}$

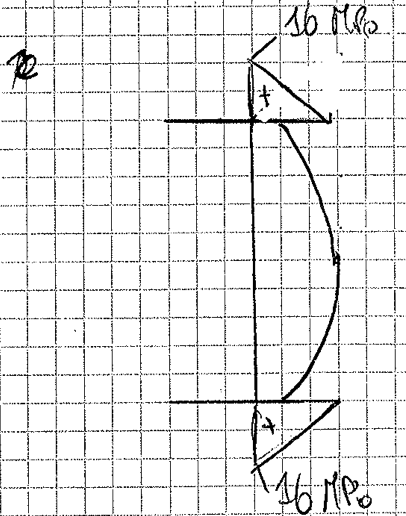
$S^*_{x,3} = \frac{b}{2} s_1 \frac{a}{2} - \xi_3 s_1 \frac{a}{2} \rightarrow$ andamento lineare

$$\tau_3 = \frac{T_y S^*_{x,3}}{J_{xx}\, s_1} = \frac{2{,}8 \cdot 10^4}{3{,}18 \cdot 10^6\, 6{,}23} \cdot \left(1{,}133 \cdot 10^4 - \xi_3\, 358{,}15 \right) =$$

$= 16 - 0{,}500\, \xi_3$

$\xi_3 = 0 = 16$

$\xi_3 = \frac{b}{2} = -16\ N/mm^2$



3

$T_y = 1{,}00 \cdot 10^4\,N$

$e = 17{,}5\ mm$

$s_1 = 8{,}5\ mm$

$s_2 = 6\ mm$

$b = 47\ mm$

$h = 91{,}5\ mm$

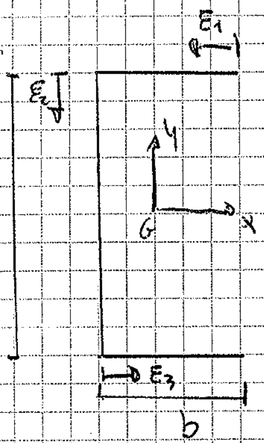
a) $g = e + \dfrac{b^2 h^2 s_1}{4 J_{xx}} = \boxed{31{,}67}$ → POSIZIONE CENTRO DI TAGLIO

$C_t(-31{,}67\,,\,0)$

b)

b)

linea media:



TRATTO 1

$0 \le \xi_1 \le b$

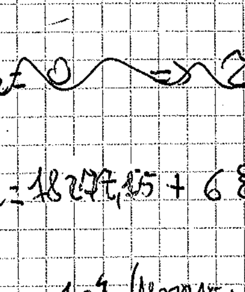
$$S^*_{x,1} = \xi_1 s_1 \frac{h}{2}$$

$$\tau_1 = \frac{T_y S^*_{x,1}}{s_1 J_{xx}} = \frac{1 \cdot 10^4 \cdot \xi_1 \cancel{8{,}5} \cdot \frac{91{,}5}{2}}{\cancel{8{,}5} \cdot 2{,}05 \cdot 10^6} =$$

$$= 0{,}223\,\xi_1$$

- $\xi_1 = 0 \Rightarrow \tau_1 = 0\ MPa$
- $\xi_1 = b \Rightarrow \tau_1 = 0{,}223\,b = \boxed{10{,}5\ MPa}$

TRATTO 2



$0 \le \xi_2 \le h$

$$S^*_{x,2} = b s_1 \frac{h}{2} + \xi_2 s_2 \left(\frac{h}{2} - \frac{\xi_2}{2}\right)$$

$$+ 6\,\xi_2 \left(\frac{h}{2} - \frac{\xi}{2}\right)$$

$$\tau_2 = \frac{T_y S^*_{x,2}}{s_2 J_{xx}} = \cancel{\frac{1{,}0 \cdot 10^4 \cdot \left[10{,}5 + 6\xi_2\left(h/2 - \xi_2/2\right)\right]}{6 \cdot 2{,}05 \cdot 10^6}} =$$

~~$\xi_2 = 0 \Rightarrow \tau_2 =$~~

$$S^*_{x,2} = 18277{,}15 + 6\,\xi_2 \frac{h}{2} - 6\,\frac{\xi^2}{2} \Rightarrow 18277{,}15 + 274{,}5\,\xi - 3\,\xi^2$$

$$\tau_2 = \frac{10^4 \cdot (18277{,}15 + 274{,}5\,\xi - 3\,\xi^2)}{2{,}08 \cdot 10^5 \cdot 6} =$$

$\xi_2 = 0 \Rightarrow \tau_2 = 14{,}64\ MPa$

$\boxed{\xi_2 = \frac{h}{2} \Rightarrow \tau_2 = 19{,}68\ MPa}$

$\boxed{1}$

$R = 120\ \Omega$

$k = 2{,}1$

1/4 ponte

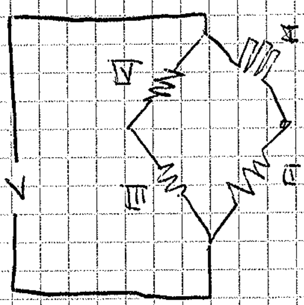
$V = 5V$

$E = 2{,}06 \cdot 10^{5}$ MPa

$T = 85°C$

$\varepsilon_a = -17 + 1{,}7\,T - 5{,}1 \cdot 10^{-2}\,T^2 + 2{,}4 \cdot 10^{-4}\,T^3$ (μm/m)

$U = 3{,}65$ mV $= 3{,}65 \cdot 10^{-3}$ V



$\varepsilon_a(85) = -110\ \frac{\mu m}{m}$

$U = \frac{Vk}{4}(\varepsilon + \varepsilon_a) \Rightarrow \varepsilon + \varepsilon_a = \frac{4U}{Vk} \Rightarrow \varepsilon = \frac{4U}{Vk} - \varepsilon_a$

$\cancel{U = \frac{Vk}{4}\varepsilon + \varepsilon_a \frac{Vk}{4} \Rightarrow \varepsilon = \left(U - \varepsilon_a \frac{Vk}{4}\right)\frac{4}{Vk} =}$

$= \cancel{62 \cdot 10}\ 1{,}5 \cdot 10^{-3}$

$\sigma = \varepsilon E = 309$ MPa

3

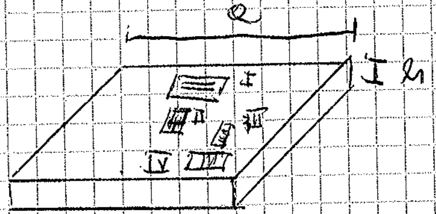
$K=2$

$E=2{,}06\cdot10^5\ N/mm^2$

$\nu=0{,}28$

$R_{p0,2}=1200\ N/mm^2$

$V=5V$



$a=10\ m$

$b=0{,}5\ m$

gli estensimetri devono essere disposti ortogonalmente

$$U=\frac{VK}{4}\left(\varepsilon_I-\varepsilon_{II}+\varepsilon_{III}-\varepsilon_{IV}\right)=\frac{VK}{4}\sum\varepsilon$$

$$\sum\varepsilon=2(1+\nu)\varepsilon$$

trazione: $\sigma=\frac{F}{A}=\frac{F}{a\cdot b}$

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}=\frac{F}{a\cdot b\,E}$$

$$U=\frac{VK}{4}\cdot2(1+\nu)\varepsilon=\frac{5\cdot2\cdot2(1+0{,}28)}{4}\cdot\frac{F}{0{,}5\cdot10\cdot2{,}06\cdot10^5}=$$

$$=6{,}26\cdot10^{-6}\,F\ mV$$

4

$E=2{,}06\cdot10^5\ N/mm^2$

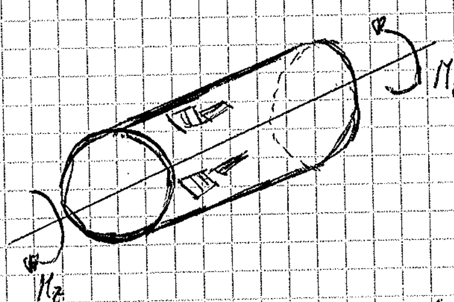
$\nu=0{,}28$

$D=50\ mm$

$R=350\ \Omega$

$K=2$

$V=10\ V$



$$U=\frac{VK}{4}\left(\varepsilon_I-\varepsilon_{II}+\varepsilon_{III}-\varepsilon_{IV}\right)=\frac{VK}{4}\sum\varepsilon=\frac{VK}{4}2(1+\nu)\varepsilon$$

$$\varepsilon=\sqrt{\varepsilon_{xx}^2+\varepsilon_{yy}^2}=\sqrt{\frac{1}{E^2}\left(\sigma_{xx}^2+\sigma_{yy}^2\right)}=\frac{1}{E}\sqrt{\sigma_{xx}^2+\sigma_{yy}^2}=\frac{1}{E}\sigma_0=$$

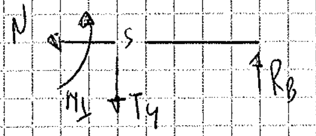
forse le provoca il momento torcente M_t

$$=\frac{1}{E}\frac{M_z}{J_p}D\qquad J_p=\frac{\pi D^4}{32}$$

$$\Rightarrow\ \varepsilon=\frac{M_z}{E}\cdot\frac{32}{\pi\cdot D^3}=\frac{32M_z}{\pi E D^3}$$

$$U=4\frac{VK}{4}2(1+\nu)\frac{32M_z}{\pi E D^3}=\frac{16(1+0{,}28)\cdot10\cdot2\ M_z}{50^3\cdot\pi\cdot2{,}06\cdot10^5}=5\cdot10^{-8}M_z$$

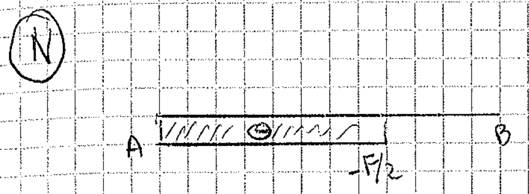
TRATTO 3 ~~$l \le z \le \frac{3}{2}l$~~ $0 \le z \le l$

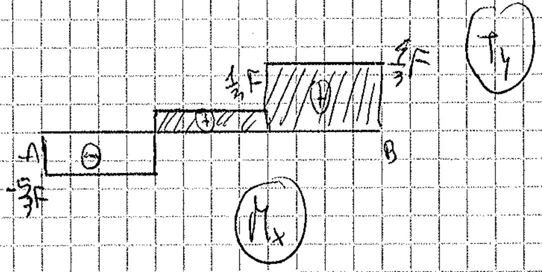


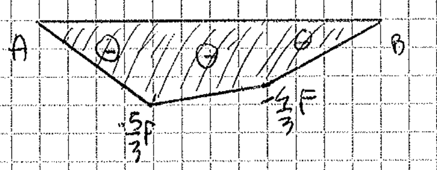
$\rightarrow$: $N = 0$

$\uparrow$: $T_y = R_B = \frac{4}{3}F$

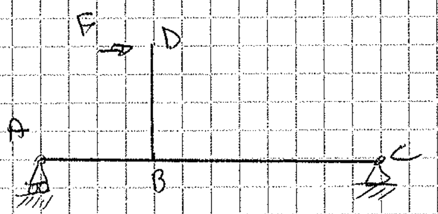
$S\curvearrowleft$: $M_x = -R_B z$ $\begin{cases} z = 0 \rightarrow M_x = 0 \\ z = l \rightarrow M_x = -\frac{4}{3}Fl \end{cases}$

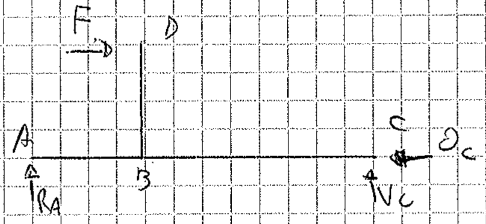






2





Reazioni vincolari : $\uparrow$: $R_A + V_C = 0$ $V_C = \frac{1}{3}F$

$\rightarrow$: $F = O_C$ $O_C = F$

$C\curvearrowleft$: $R_A l + F\frac{1}{3}l = 0$ $R_A = -\frac{1}{3}F$

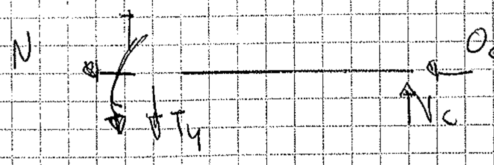
TRATTO AB $0 < z < \frac{1}{3}l$

$\uparrow$: $T_y + R_A = 0$ $T_y = \frac{1}{3}F$

$\rightarrow$: $N = 0$

$S\curvearrowleft$: $M_x = -R_A z =$ $\begin{cases} z = 0 \quad M_x = 0 \\ z = \frac{1}{3}l \quad M_x = \frac{Fl}{9} \end{cases}$

TRATTO CB $\quad 0 \leq z \leq \frac{2}{3}l$



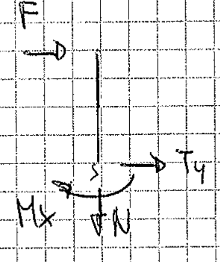
$\uparrow: \; T_y = V_c = \frac{1}{3}F$

$\rightarrow N = -O_c = -F$

$\circlearrowleft S: \; M_x + V_c\, z = 0 \; \begin{cases} M_x = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} Fl = -\frac{2}{9} Fl & z = \frac{2}{3}l \\ M_x = 0 & \text{con } z = 0 \end{cases}$

TRATTO DB

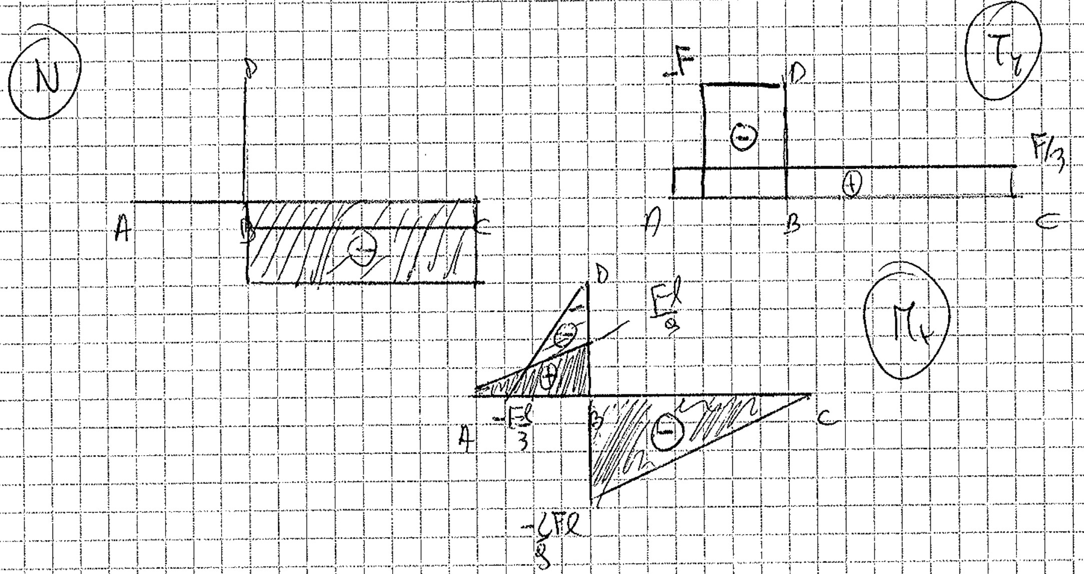
$0 \leq z \leq \frac{1}{3}l$

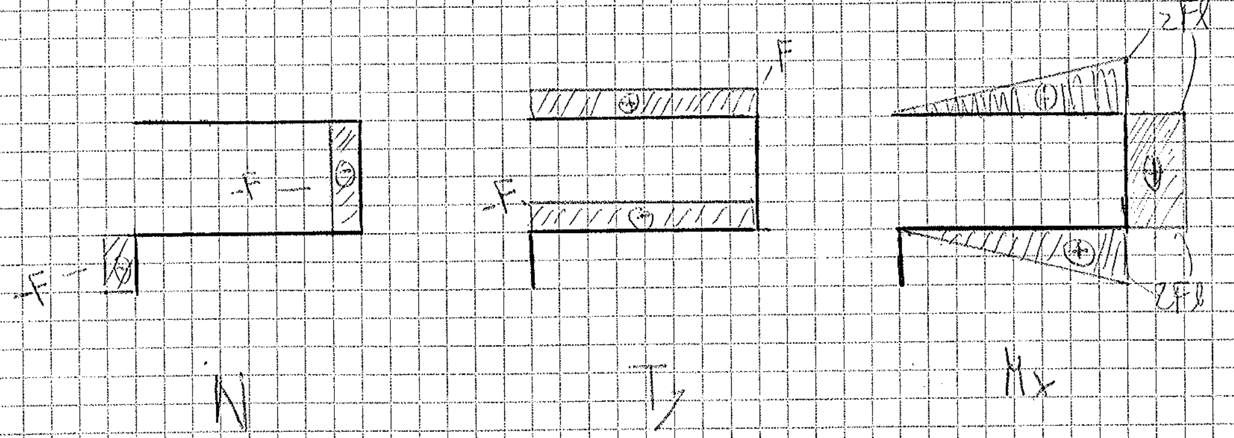


$\uparrow \; N = 0$

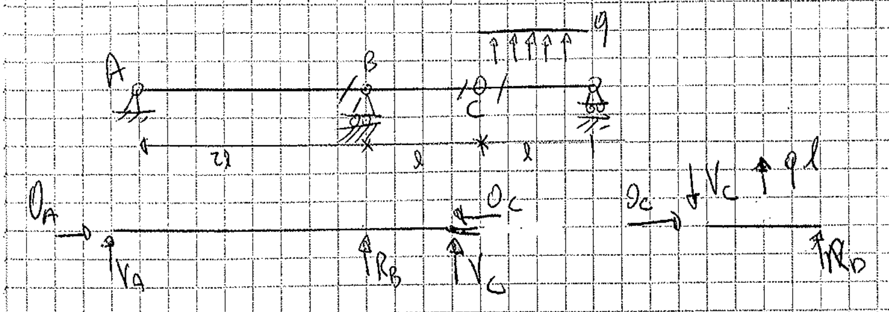
$\rightarrow \; T_y = -F$

$S \circlearrowleft : \; M_x = -Fz \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \rightarrow M_x = 0 \\ z = \frac{1}{3}l \rightarrow M_x = -\frac{Fl}{3} \end{cases}$





4



Reazioni vincolari: (I) →: $O_A = O_C$

↑: $V_C + V_A + R_B = 0$

C: $V_A 3\cancel{l} + R_B \cancel{l} = 0$

$R_B = -3V_A$

$\frac{ql}{2} + V_A - 3V_A = 0 \qquad V_A = \frac{ql}{4}$

(II) → $O_C = 0$

↑: $R_D - V_C + ql = 0 \Rightarrow -\frac{ql}{2} + ql = V_C \Rightarrow V_C = \frac{ql}{2}$

C: $R_D \cancel{l} + q\frac{l^{\cancel{2}}}{2} = 0 \Rightarrow R_D = -\frac{ql}{2}$

$O_C = O_A = 0$

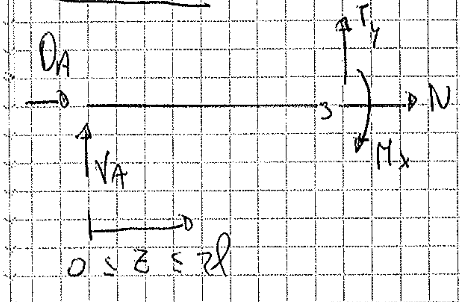
$R_D = -\frac{ql}{2}$

$V_C = \frac{ql}{2}$

$V_A = \frac{ql}{4}$

$R_B = -\frac{3}{4}ql$

TRATTO AB

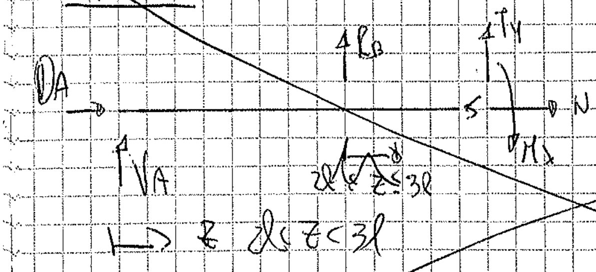


↑: $T_y = -V_A = -\frac{ql}{4}$

→: $N = -O_A = 0$

↻: $M_x = -V_A z$; $z = 0 \Rightarrow M_x = 0$; $z = 2l \Rightarrow M_x = -\frac{ql}{4}\cdot 2l = -\frac{ql^2}{2}$

TRATTO BC



↑: $V_A + R_B + T_y = 0$

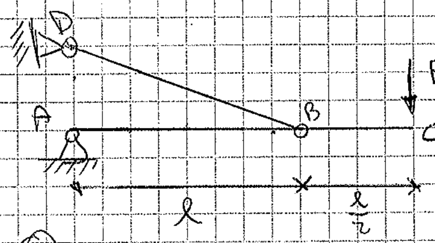
→: $N = -O_A = 0$

↻: $M_x + V_A z + R_B(z - 2l) = 0$

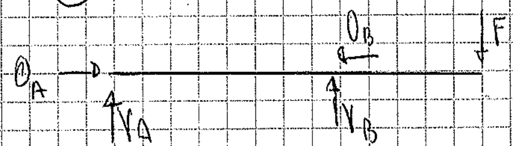
$T_y = -V_A - R_B = -\frac{ql}{4} + \frac{ql}{2} = \frac{ql}{4}$

$M_x = -V_A z - R_B(z-2l) = -\frac{ql}{4}z + \frac{ql}{2}(z-2l)$; $z = 2l \Rightarrow M_x = -\frac{ql}{4}\cdot 2l = -\frac{ql^3}{2}$; $z = 3l \Rightarrow -\frac{3}{4}ql^2 + \frac{ql^2}{2} = \frac{1}{4}ql^2$

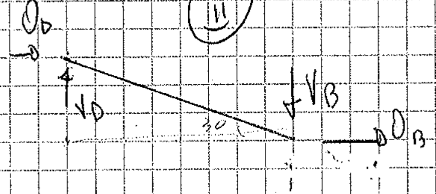
5



I



II



I

$$\uparrow: V_A + V_B = F$$

$$\rightarrow: O_A = O_B$$

$$\overset{\curvearrowright}{A}: F\,\tfrac{3}{2}\cancel{\ell} - V_B \cancel{\ell} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_A = -\tfrac{1}{2} F \\ O_A = O_B \\ V_B = \tfrac{3}{2} F \end{cases}$$

II

$$\uparrow: V_D = V_B = \tfrac{3}{2} F$$

$$\rightarrow: O_B = -O_D$$

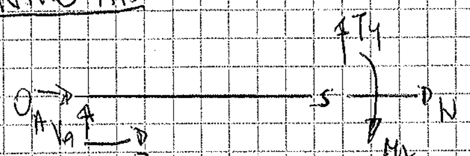
$$\overset{\curvearrowright}{B}: V_D \ell + O_D\, \mathrm{tg}\,30\,\ell = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_D = \tfrac{3}{2} F \\ O_B = -\tfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\tfrac{3}{2}F\cancel{\ell}}{\mathrm{tg}\,30\,\cancel{\ell}} = O_D \Rightarrow -\tfrac{3\sqrt{3}}{2} F \end{cases}$$

$$V_A = -\tfrac{1}{2} F \qquad O_A = O_B = \tfrac{3\sqrt{3}}{2} F$$

$$O_D = -\tfrac{3\sqrt{3}}{2} F \qquad V_D = V_B = \tfrac{3}{2} F$$

TRATTO AB



$0 \le z \le \ell$

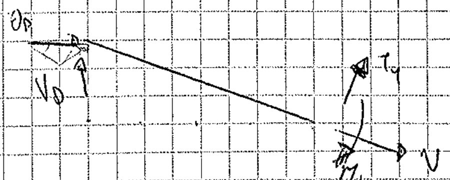
$$\uparrow: T_y = -V_A = \tfrac{1}{2} F$$

$$\rightarrow: N = -O_A = -\tfrac{3\sqrt{3}}{2} F$$

$$\overset{\curvearrowright}{z}: M_x = -V_A z \quad \begin{cases} z = 0 \rightarrow M_x = 0 \\ z = \ell \rightarrow M_x = \tfrac{1}{2} F \ell \end{cases}$$

TRATTO DB

DB → asta ⇒ M_x e T_y nulli ⇒ solo forza normale



$$N = +O_D \cos 30^\circ + V_D \sin 30^\circ = \tfrac{9}{4} F + \tfrac{3}{4} F = 3F$$

Eserc Teoria

(A) Il diagramma del momento presenta una discontinuità in corrispondenza di una coppia concentrata, mentre ~~per~~ il diagramma di taglio presenta discontinuità in corrispondenza di una forza trasversale concentrata (la discontinuità è pari al valore della forza applicata). In questo stesso punto il momento cambia pendenza

(B) Il ~~momento~~ il momento flettente si annulla in corrispondenza degli appoggi di estremità e delle cerniere.

(C) Il momento flettente ha andamento parabolico nelle zone in cui agiscono carichi trasversali uniformemente distribuiti. In questo caso il diagramma del taglio è lineare

(D) In corrispondenza di giunti a 90° forza normale e taglio si scambiano i valori

TRATTO AB

$$M_x = -\frac{F}{2} z$$

b) $$\varphi_x = \int \frac{M_x}{EJ_{xx}} dz = \frac{F}{2EJ_{xx}} \left(-\frac{z^2}{2} \right) + C_0$$

$$v = -\int \varphi_x dz = -\int \left(\frac{-Fz^2}{4EJ_{xx}} + C_0 \right) dz = \frac{F}{12EJ_{xx}} z^3 - C_0 z + C_1$$

condizione di vincolo: spostamento nullo

$$v_A(0) = C_1 = 0$$

$$v_B(l) = \frac{F}{12EJ_{xx}} l^3 - C_0 l + \underbrace{C_1}_{=0} = 0$$

$$C_0 = \frac{F}{12EJ_{xx}} l^2 = 6{,}55 \cdot 10^{-3}$$

$$v(z) = \frac{F}{12EJ_{xx}} z^3 - 6{,}55 \cdot 10^{-3} \cdot z$$

$$v_B\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{F\left(\frac{l}{2}\right)^3}{12EJ_{xx}} - 6{,}55 \cdot 10^{-3} \frac{l}{2} = -0{,}78 \text{ mm}$$

$$Z = -\frac{ql^4}{8EJ_{xx}} - \frac{Fl^3}{EJ_{xx}} \Rightarrow$$

$$F = \frac{2EJ_{xx} + \frac{1}{8}ql^4}{-\frac{1}{3}l^3} = -1760{,}5\ N$$

Teoria

A) Perché l'effetto del momento flettente è di ruotare le sezioni, curvando di conseguenza la linea d'asse dell'elemento.

B) Il fattore di taglio χ tiene conto complessivamente della distribuzione di tensione e deformazione nella sezione ~~(?)~~ e quindi dipende dalla geometria di quest'ultima.

C) Per elementi "snelli", cioè di estensione assiale sufficientemente maggiore delle dimensioni trasversali ~~(?)~~ prevale l'effetto del momento flettente e quello del taglio è trascurabile.

D) Le costanti di integrazione nella equazione della linea elastica si ricavano ponendo v e α uguale a zero in caso di vincolo, oppure se il momento è discontinuo si impone le ~~(?)~~ condizioni di continuità.

Teoria esercitazione 13

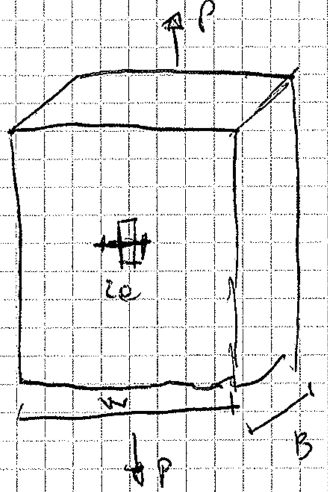
A) ~~Le aste~~ Gli elementi sono dipinto aste perché hanno agli estremi due cerniere. ~~Le~~ Le aste non sono ~~soggette~~ sollecitate né da taglio né da momento flettente, solo da forza normale

B) In una cerniera multipla le reazioni incognite sono più di due perché essa congiunge più di due aste, e quindi oltre alle incognite per le reazioni di traslazione orizzontale e verticale ci sono anche le forze normali delle varie aste incernierate

C) È legato al materiale dal Modulo di Young e alla ~~snella~~ ~~snella~~ snellezza $\lambda = \frac{l_0}{\rho_{min}}$, ma non dipende dal limite di resistenza

D) ~~Attesa di P dalla zero~~ La freccia è ~~aumenta~~ approssimativamente e aumenta in modo non lineare al crescere di P dallo zero e tende a infinito per $P \to P_{cr}$.

3



$Y = \sqrt{\pi}$

$W = 500$ mm

$B = 200$ mm

$2a = 50$ mm

$P = 1,35$ MN $= 1,35 \cdot 10^6$ N

$R_{p(0,2)} = 480$ MPa

Controlliamo se si tratta di cedimento per snervamento

$$\sigma_{nd} = \frac{P}{A_{net}} = \frac{P}{B(W-2a)} = 150 \text{ MPa}$$

poiché $\sigma_{lim} = 480$ MPa il cedimento è avvenuto per prop. della cricca

$K_I = K_{IC}$

$K_I = \sqrt{a}\, Y \sigma_n$

$$\sigma_n = \frac{P}{A} = \frac{P}{W \cdot B} = 135 \text{ MPa}$$

$$K_I = \sqrt{\pi} \cdot 135 \cdot \sqrt{25 \cdot 10^{-3}\, m} = 38 \text{ MPa}\sqrt{m}$$

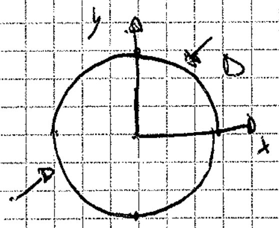
ESEMPIO 1

$D = 18$ mm

$M_z = 30 \cdot 10^3$ N mm

$F = 12 \cdot 10^3$ N mm

(1)



$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_{xx}} y$$

$$A = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \pi \cdot 9^2 = 254,46 \text{ mm}^2$$

$$J_{xx} = \frac{\pi}{64}\left(D^4\right) = \frac{\pi}{64} \cdot 18^4 = 5,153 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

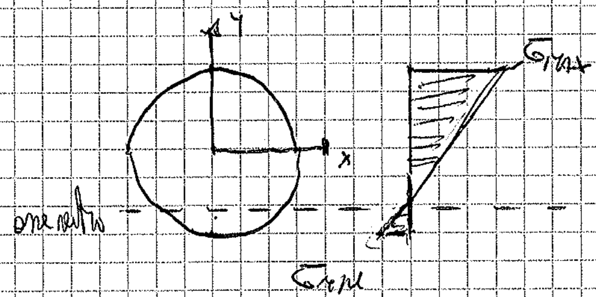
$$\sigma_{zz}^{max} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_{xx}}\left(\frac{D}{2}\right) = \frac{12 \cdot 10^3}{254,47} + \frac{30 \cdot 10^3}{5,153 \cdot 10^3}\left(\frac{18}{2}\right) = 99,55 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{zz}^{min} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_{xx}}\left(-\frac{D}{2}\right) = \frac{12 \cdot 10^3}{254,49} + \frac{30 \cdot 10^3}{5,153 \cdot 10^3}\left(-\frac{18}{2}\right) = -5,23 \text{ MPa}$$

asse neutro: $\sigma_{zz} = 0 \Rightarrow \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_{xx}} y = 0 \Rightarrow y = -\frac{N}{A} \cdot \frac{J_{xx}}{M_x} =$

$$= y = -\frac{12 \cdot 10^3}{254,46} \cdot \frac{5,153 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^3} = -8,099$$

$\tan \psi = 0 \Rightarrow \psi = 0$



Coordinate baricentri i-esimi nel sistema baricentrico G-x'y'

$$G_1 \begin{cases} x'_1 = x_1 - x_G = 12{,}5 - 17{,}8 = -5{,}3 \text{ mm} \\ y'_1 = y_1 - x_G = 50 - 32{,}17 = 17{,}83 \text{ mm} \end{cases}$$

$$G_2 : \begin{cases} x'_2 = x_2 - x_G = 25 - 17{,}8 = 7{,}2 \text{ mm} \\ y'_2 = y_2 - x_G = 12{,}5 - 32{,}17 = -19{,}67 \text{ mm} \end{cases}$$

$$G_3 : \begin{cases} x'_3 = x_3 - x_G = 38 - 17{,}8 = 20{,}2 \text{ mm} \\ y'_3 = y_3 - y_G = 12 - 32{,}17 = -20{,}17 \text{ mm} \end{cases}$$

Momenti d'inerzia

$$J_{xx} = \sum\left(y'^2_i A_i + J_{\xi_i\xi_i}\right) = \left[(17{,}83)^2 \cdot 1250 + \frac{25 \cdot 50^3}{12}\right] + \left[(-19{,}67)^2 \cdot 1250 + \frac{50 \cdot 25^3}{12}\right] +$$

$$- \left[(-20{,}17)^2 \cdot 113 + \frac{\pi}{64} \cdot 12^4\right] = 1{,}158 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

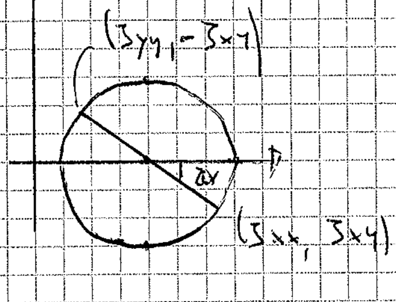
$$J_{yy} = \sum\left(x'^2_i A_i + J_{\eta_i\eta_i}\right) = \left[(-5{,}3)^2 \cdot 1250 + \frac{50 \cdot 25^3}{12}\right] + \left[(7{,}2)^2 \cdot 1250 + \frac{25 \cdot 50^3}{12}\right] - \left[(20{,}2)^2 \cdot 113 + \frac{\pi}{64} 12^4\right]$$

$$= 0{,}38 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_{xy} = \sum\left(x'_i y'_i A_i + J_{\eta_i\xi_i}\right) = \left[(-5{,}3) \cdot (17{,}83) + (7{,}2) \cdot (-19{,}67)\right] \cdot 1250 + (20{,}2)(20{,}17) \cdot 113$$

$$= -0{,}239 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Orientazione riferimento principale e Cerchio di Mohr



$J_{xx} > J_{yy}$ e $J_{xy} < 0$

$-45° \leq \alpha \leq 0$