



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1344

ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Petrocelli

MATERIA: Scienze delle Costruzioni, Prof.Valente

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Domande orali di Scienza delle Costruzioni per Edili (01cfo, aa dal 2009 al 2011). Titolare Prof. Valente. I paragrafi fanno riferimento ai Volumi 1 e 2 del testo del Prof. Carpinteri (Pitagora Editrice). Esaurita la risposta ad una domanda, si puo' passare alla successiva. Per ogni domanda e' necessaria almeno una figura, al fine di introdurre i simboli che vengono usati.

1. La cinematica e la statica dei sistemi di travi, capitolo 3 e 4
 - (a) Il due teoremi delle catene cinematiche. Un esempio di applicazione per calcolare le reazioni vincolari interne ed esterne nelle strutture isostatiche mediante il PLV.
2. Analisi della deformazione, paragrafi dal 7.1 al 7.5
 - (a) Definizione analitica del tensore delle deformazioni
 - (b) Significato fisico di deformazione (incluso il moto rigido)
 - (c) Significato fisico della sola deformazione (escluso il moto rigido)
 - (d) Variazione delle componenti del tensore delle deformazioni al variare del sistema di riferimento
 - (e) Cosa sono le deformazioni principali e come si trovano ?
3. Analisi della tensione, paragrafi dal 7.6 al 7.9
 - (a) Definizione del tensore delle tensioni $[\sigma]$
 - (b) Dimostrare che il tensore precedente e' simmetrico
 - (c) Come variano le componenti al variare del sistema di riferimento ?
 - (d) Cosa sono le tensioni principali e come si trovano ?
 - (e) Dimostrazione delle regole di costruzione dei cerchi di Mohr per lo stato tensionale piano
 - (f) Cosa si intende per tensore idrostatico e deviatorico ?
4. Il solido elastico, capitolo 8
 - (a) Equazioni indefinite di equilibrio nel volume per il continuo 3D
 - (b) Equazioni di equilibrio sulla superficie per il continuo 3D
 - (c) Dualita' statico-cinematica
 - (d) Il principio dei lavori virtuali (senza la dimostrazione)
 - (e) Definizione del comportamento elastico
 - (f) Il potenziale elastico ed il potenziale elastico complementare
 - (g) La matrice Hessiana del potenziale elastico
 - (h) Significato fisico della condizione di definitezza positiva della suddetta matrice Hessiana e sue conseguenze.
 - (i) Formulazione del problema elastico lineare attraverso l'operatore di Lamé'
 - (j) Il principio di sovrapposizione degli effetti
 - (k) Il teorema di unicità della soluzione
 - (l) Il teorema di Clapeyron
 - (m) Il teorema di Betti
 - (n) L'ipotesi di isotropia nell'ambito del comportamento elastico lineare
 - (o) Quali sono le condizioni che devono essere soddisfatte dal modulo di Young e dal rapporto di Poisson affinché la suddetta matrice Hessiana sia definita positiva ?
 - (p) La distinzione tra materiali duttili e fragili
 - (q) Descrivere la contrazione trasversale plastica o strizione, l'incrudimento negativo e l'energia di frattura.
 - (r) Possibili modalita' di controllo delle prove di laboratorio in condizioni di trazione diretta
 - (s) Definire la tensione ideale o tensione equivalente
 - (t) Il criterio di Tresca o della massima tensione tangenziale. Cosa si intende per tensione tangenziale nel piano o fuori piano ? Cosa si intende per esagono di Tresca ?
 - (u) Il criterio di Mohr-Coulomb per i materiali fragili

FACOLTÀ di INGEGNERIA EDILE

Anno Accademico 2013-2014

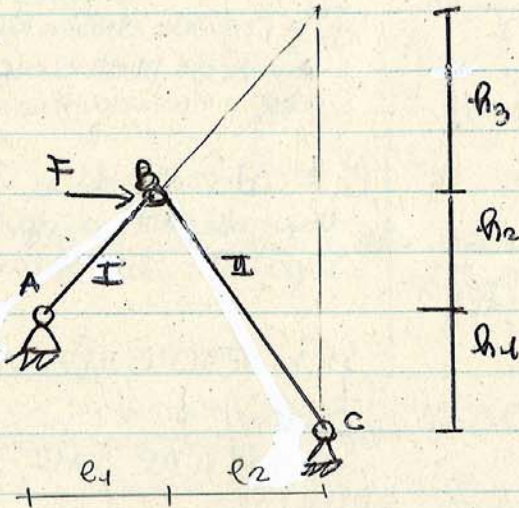
Corso di SCIENZA delle COSTRUZIONI

Docente: Prof. Ing. Silvio Valente

Domande Esame Orale.

Esempio:

P.L.V.: è in grado di calcolare 1 sola reazione per volta.
 Si consideri il cavalletto in figura soggetto alla forza F orizzontale.
 • Si vuole trovare la reazione orizzontale interna H_c esercitata dalla cerniera interna C.

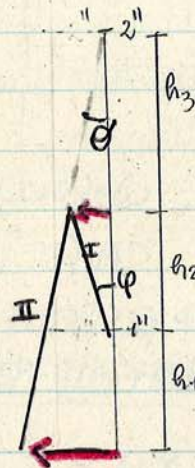
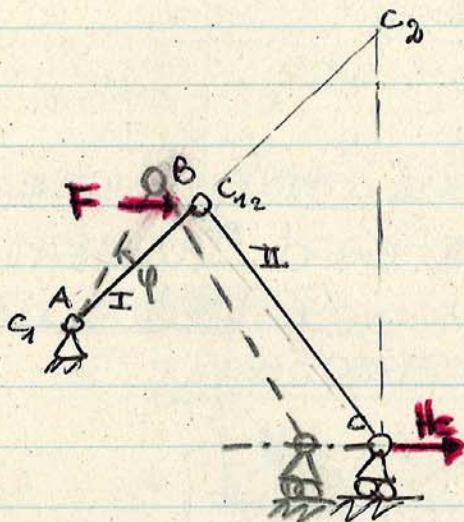


• Egoismo uno SVINCOLAMENTO in modo tale che H_c possa compiere lavoro.

⇒ Trasfermo la CERNIERA C in CAPPILLO a spostamento orizzontale.

• Forza orizz. H_c supporta verso destra.

• H_c reso da struttura LABILE!



• V_A e H_A non compiono lavoro perché la cerniera è fissa!

• V_C non compie L. perché la sua rotta d'azione è \perp allo spostamento.

• H_B e V_B compiono lavoro = e opposti sulle aste I e II.

RESTANO:

• F che si sposta della quantità $\delta \cdot h_3$.

• H_c che si sposta " " $\delta \cdot (h_3 + h_2 + h_1)$.

• F e H_c subiscono spostamenti = e CONTRARI, al contrario

⇒ SONNO NEGATIVI:

Lavoro = $-F \cdot \delta h_3 - H_c \cdot \delta (h_3 + h_2 + h_1) = 0$

⇒ $H_c = - \frac{F \cdot h_3}{(h_3 + h_2 + h_1)}$

→ H_c risulta NEGATIVO perché ha verso opposto rispetto a quello ipotizzato!

Se g è sufficientemente regolare (continua, con derivate continue)
 $\Rightarrow g$ sviluppabile in serie di Taylor, fino ai 1° termini.

$$\left. \begin{aligned} u_a &= u_p + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_p dz \\ v_a &= v_p + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_p dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p dy + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_p dz \\ w_a &= w_p + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_p dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_p dy + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_p dz \end{aligned} \right\} \text{in termini "compatti":}$$

$$\Rightarrow \{n_a\} = \{n_p\} + [J_p] \cdot \{dr\}$$

$[J_p] \equiv$ matrice Jacobiana delle variabili dipendenti u, v, w rispetto alle variabili indipendenti x, y, z .

2 CASI:

• CASO di SEMPLICE ROTAZIONE (esclusa deformazione)

$\Rightarrow [J_p]$ corrisponde alla semplice mat. $[\varphi_p]$ di rotazione:

$$[\varphi_p] = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ANTISIMMETRICA}$$

• CASO GENERICO:

$\Rightarrow [J_p]$ rappresentata da ROTAZIONE e DEFORMAZIONE

$$\Rightarrow [J_p] = [\varphi_p] + [E_p]$$

è una matrice QUADRATA \Rightarrow è la SOMMA di una mat. SIMMETRICA e di una ANTISIMMETRICA.

$$[J_p] = \frac{1}{2} ([J_p] - [J_p]^T) + \frac{1}{2} ([J_p] + [J_p]^T)$$

rappresentiamo: \downarrow
 mat. antisimmetrica $\rightarrow [\varphi_p]$

\downarrow
 mat. simmetrica $[E_p]$

\Rightarrow POSSO SCRIVERE:
 come:

$$\left. \begin{aligned} \{n_a\} &= \{n_p\} + [J_p] \cdot \{dr\} \\ \{n_a\} &= \{n_p\} + [\varphi_p] \{dr\} + [E_p] \cdot \{dr\} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

2.6) Significato fisico di deformazione (incluso moto rigido)

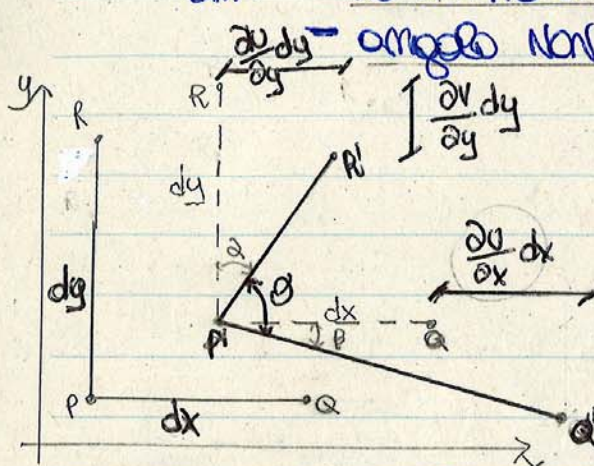
- Considero 2 segmenti \perp : \overline{PQ} e \overline{PR} di lunghezze arbitrarie, $k \in \mathbb{R}$ e \perp corpo mobile posizione iniziale e nuova configurazione indeformata.

- Scelgo i tensori x, y, z , con assi x e y \parallel ai \overline{PQ} e \overline{PR} .

- POSIZIONE FINALE del corpo: $\overline{P'Q'}$ e $\overline{P'R'}$ sui segmenti trasformati;

con: - ROTOTRASLATI; - con lunghezze \neq delle iniziali;

con: - angolo non è \perp di 90° !



MOTO RIGIDO + DEFORMAZIONE

• SEGMENTI ROTOTRASLATI e DISTORTI.

Prezando in considerazione $[\mathcal{J}_p]$, k prende in " $[\mathcal{E}_p]$ che $[\mathcal{E}_p]$

$[\mathcal{J}_p]$

PUNTO Q. PUNTO di PARTENZA: EQUAZIONE:

$$\{r_Q\} = \{r_P\} + [\mathcal{E}_p] \{dr\} + [\mathcal{E}_p] \{dr\}$$

\Rightarrow so che: $\{r_Q\} = \begin{Bmatrix} u_Q \\ v_Q \\ w_Q \end{Bmatrix}$; $\{r_P\} = \begin{Bmatrix} u_P \\ v_P \\ w_P \end{Bmatrix}$; $\{dr\} = \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$ e poi esplicito le mat. $[\mathcal{E}_p]$ e $[\mathcal{E}_p]$

Sviluppando i calcoli si ottiene:

$$u_Q = u_P + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx;$$

$$u_R = u_P + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy;$$

$$v_Q = v_P + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx;$$

$$v_R = v_P + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) dy;$$

$$w_Q = w_P + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) dx;$$

$$w_R = w_P + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) dy;$$

↑ PER PUNTO Q \Rightarrow rispetto a $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_P$

↑ PUNTO R \Rightarrow rispetto $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_P$

- DILATAZIONE SPECIFICA (lineare) lungo le direzioni dei assi.

lungo direz. asse x:
$$\frac{(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x$$

così per assi y, z .
Sostituisco u e x con v e y .
 w e z .

- SCORRIMENTI ANGOLARI; $\begin{Bmatrix} \gamma_{xy} = \gamma_{yx}; \gamma_{xz} = \gamma_{zx}; \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \end{Bmatrix}$ con le direzioni k gli angoli retti subiscono la deformazione angolare.

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta\right) = \alpha - \beta = \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dy} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dx} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{yx} = \gamma_{xy}$$

θ = angolo formato ai deformazione avvenuta.

$\gamma_{\alpha} \approx \alpha$ xke con spostamenti piccoli! per $\alpha \ll 1$

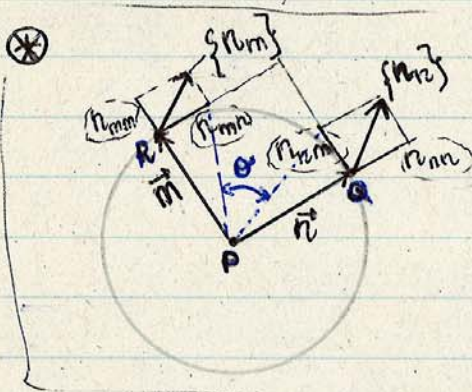
2d) Variazione delle componenti del tensore delle deformazioni al variare del SIST. di RIF.

Considero una sfera ϵ -esima di raggio UNITARIO con centro imp. VERSORE \vec{n} (modulo = 1) individuato sulla superficie della sfera.

$\{n_{\alpha}\} = \{n_{\alpha 0}\} + [E_{\alpha}] \{dr\} + [E_{\alpha}] \{dr\}$. Entrano le COMPONENTI della ROTOTRASLAZIONE.

→ VETTORE SPOSTAMENTO del PUNTO Q:
(depositato dalle componenti di rototraslazione.)

$\{n_n\} = [E] \cdot \{n\}$
↳ VERSORE UNITARIO.



• PROIEZIONE dello spostamento $\{n_n\}$ sulla direzione n :
 $n_{nn} = \{n\}^T \cdot [E] \cdot \{n\}$
- su una generica direzione m (individuata da un punto R sulla sfera):

$n_{nm} = \{m\}^T \cdot [E] \cdot \{n\}$

→ VETTORE SPOSTAMENTO del PUNTO R (---)

$\{n_m\} = [E] \cdot \{m\}$

PROIEZIONE dello spostamento $\{n_m\}$ sulla direzione m :

$\{n_{mm}\} = \{m\}^T [E] \{m\}$

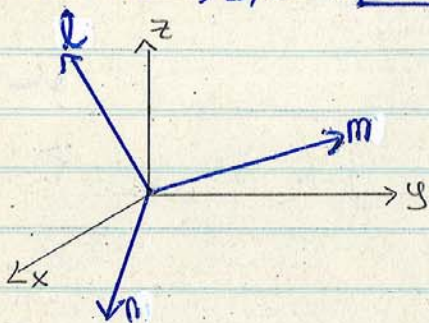
- lungo la direzione n :

$\{n_{mn}\} = \{n\}^T [E] \{m\}$

• Esplicitando i due prodotti matriciali: $\{n\}^T [E] \{n\}$ e $\{n\}^T [E] \{m\}$ si dimostra che $n_{nm} = n_{mn}$ (LEGGE di RECIPROCA per le proiezioni del vettore spostamenti)

→ ricordarlo: "e re a' pro" sia con n_{nm} che n_{mn}

• Se considero 3 direzioni \perp tra loro: n, m, e ruotate rispetto al S.R. $x, y, z \rightarrow$ ottengo così:



MATRICE $[E^*]$ nel RIFERIMENTO
RUOTATO n, m, e ; dove \odot sta per ROTAZIONE

$$[E^*] = \begin{matrix} & n & m & e \\ \begin{matrix} n \\ m \\ e \end{matrix} & \begin{vmatrix} E_n & \frac{1}{2}\gamma_{nm} & \frac{1}{2}\gamma_{ne} \\ \frac{1}{2}\gamma_{nm} & E_m & \frac{1}{2}\gamma_{me} \\ \frac{1}{2}\gamma_{ne} & \frac{1}{2}\gamma_{me} & E_e \end{vmatrix} \end{matrix}$$

E in base alla relazione precedentemente ottenuta: $(E_n = \{n\}^T [E] \{n\})$
 $[E^*]$ può essere scritta così:

$$[E^*] = \begin{vmatrix} \{n\}^T [E] \{n\} & \{n\}^T [E] \{m\} & \{n\}^T [E] \{e\} \\ \{m\}^T [E] \{n\} & \{m\}^T [E] \{m\} & \{m\}^T [E] \{e\} \\ \{e\}^T [E] \{n\} & \{e\}^T [E] \{m\} & \{e\}^T [E] \{e\} \end{vmatrix} =$$

MAT. COLONNA • SCALARE • MAT. RIGA.

$$= \begin{bmatrix} \{n\}^T \\ \{m\}^T \\ \{e\}^T \end{bmatrix} \cdot [E] \cdot \begin{bmatrix} \{n\} \\ \{m\} \\ \{e\} \end{bmatrix}$$

sembrava: cost. • 1×3 , MA in realtà

TUTTE LE MAT. SONO QUADRATE 3×3

in forma + "compatta"
 \Rightarrow così si può scrivere così:

$$[E^*] = [N] [E] [N]^T$$

1 grandezza k si trasforma così si chiama TENSORE

dove $[N] =$ MAT. ortogonale,
rappresenta la ROTAZIONE che passa
dal sistema x, y, z al sist. n, m, e .

$$[N] = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ m_x & m_y & m_z \\ e_x & e_y & e_z \end{bmatrix}$$

$$[E^*] = \text{MATRICE delle DEFORMAZIONI} \Rightarrow \text{TENSORE}$$

DEFORMAZIONE e INERZIA: grandezze fisiche descritte in termini tensoriali!

⊗ LA MATRICE K RAPPRESENTA LA DEFORMAZIONE
DEVE ESSERE SIMMETRICA!!!

Da questa condizione si ha 1 equazione di 3° grado nell'incognita (ϵ_n) :

$$\epsilon_n^3 - J_I \epsilon_n^2 - J_{II} \epsilon_n - J_{III} = 0$$

dove i coefficienti J_I, J_{II}, J_{III} sono INVARIANTI SCALARI della DEFORMAZIONE, essendo costanti al variare della forma di riferimento.

• $J_I = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$

• $J_{II} = - \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \epsilon_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{vmatrix}$

• $J_{III} = \det([E])$

Da questa eq. otengo/trovo $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \rightarrow$ detti AUTONALORI del problema
- sono num. REALI; essendo il tensore $[E]$ simmetrico.
- RAPPRESENTANO le DILATAZIONI PRINCIPALI

Questa eq. ammette 3 radici/risultati $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, in modo tale che

l'eq. $([E] - [I] \epsilon_n) \{n\} = 0$ ammette 3 \neq soluzioni: $\{n_1\}, \{n_2\}, \{n_3\}$
 \rightarrow dette AUTOVETTORI del problema.

si hanno 3 casi: $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3 \Rightarrow$ si hanno mutuamente ortogonali e
RAPPRESENTANO le 3 DIREZIONI PRINCIPALI

① $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3 \Rightarrow$ 3 DIREZIONI PRINCIPALI mutuamente ortogonali

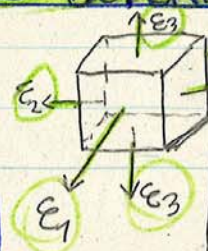
② $\epsilon_1 = \epsilon_2 \neq \epsilon_3 \Rightarrow$ DIREZIONE $\{n_3\}$ è PRINCIPALE assieme alle ∞^2 DIREZIONI ad esso \perp

③ $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 \Rightarrow$ le ∞^3 DIREZIONI sono tutte principali.

IL TENSORE delle DEFORMAZIONI nel SIST. di RIF. PRINC. è DIAGONALE!

$$[E] = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

ESSENDO NULLI GLI SCORRIMENTI ANGOLARI!



\Rightarrow INVARIANTI ESPRESSIBILI in funz. delle dilatazioni princ.: $J_I = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$
 $J_{II} = -\epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon_1 \epsilon_3 - \epsilon_2 \epsilon_3$; $J_{III} = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3$.

Il cubo si è deformato in modo tale che le DILATAZIONI!
(1) i lati \parallel alle direzioni $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ sono rimasti \parallel alle direzioni $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ e sono rimasti \perp tra loro.
 \rightarrow Gli angoli \perp sono rimasti tali dopo la deformazione.
PIANTA del cubo:

Noti il VETTORE di POSIZIONE $\{r\}$
 il VETTORE $\{n\} \perp$ all'AREOLA $dA \Rightarrow$ si può definire il VETTORE TENSIONE $\{t\}$

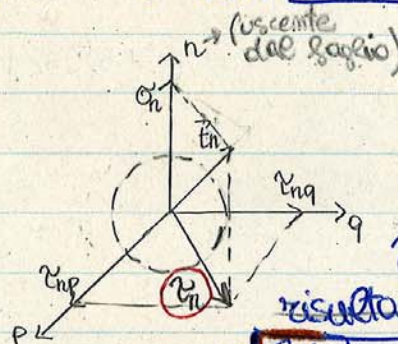
$$\{t\} = \{t(\{r\}, \{n\})\} = \{t_n\}$$

le sue COMPONENTI possono essere scritte in funzione di 2 sistemi:

1° SIST. di RIF. generico esterno (x, y, z)

$$\{t_n\} = t_{n_x} \cdot \hat{i} + t_{n_y} \cdot \hat{j} + t_{n_z} \cdot \hat{k}$$

2° SIST. di RIF. LOCALE (con 1° asse coincidente con la normale all'areola dA , e gli altri 2 giacenti sul piano di sezione)



$\vec{n}, \vec{p}, \vec{q}$ VETTORI della TERNA LOCALE

$n_n =$ COMPONENTE NORMALE

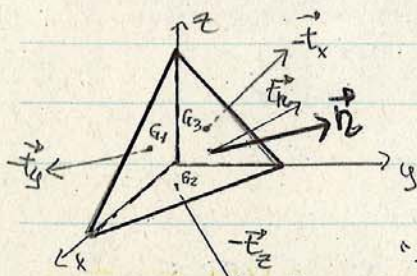
$n_{nq}, n_{np} =$ TANGENZIALI sugli assi p, q .
 risultante di n_{nq} e n_{np} sul piano secante: COMPONENTI TANGENZIALI TOTALI (n_t)

$$\Rightarrow \{t_n\} = n_n \cdot \vec{n} + n_{np} \cdot \vec{p} + n_{nq} \cdot \vec{q}$$

LE TOTALI (n_t)

$$n_t = \sqrt{n_{np}^2 + n_{nq}^2}$$

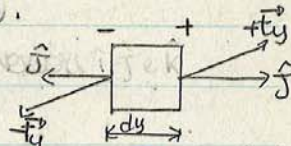
DETERMINO IL TENSORE:



considero un tetraedro costruito con 3
 spaccie // ai piani principali (agli assi) del S.R.
 e la faccia obliqua \perp al VETTORE $\{n\}$.

$G_1, G_2, G_3 \rightarrow$ BARICENTRI dei triangoli.

" " x_k e t_x, t_y, t_z NON sono correlati, cm:
 i vettori \hat{i}, \hat{j} e \hat{k} (positivi)



TETRAEDRO di CAUCHEY

sottoposto all'azione dei vettori tensione $\{t_x\}, \{t_y\}, \{t_z\}, \{t_n\}$
 $\{f\} \rightarrow$ forza di volume \rightarrow TRASCURABILE!

$$\{t_x\}, \{t_y\}, \{t_z\}, \{t_n\}$$

Faccio l' EQUILIBRIO alla TRASLAZIONE

la somma delle tensioni
 moltiplicate per le relative
 superfici deve essere NULLA!

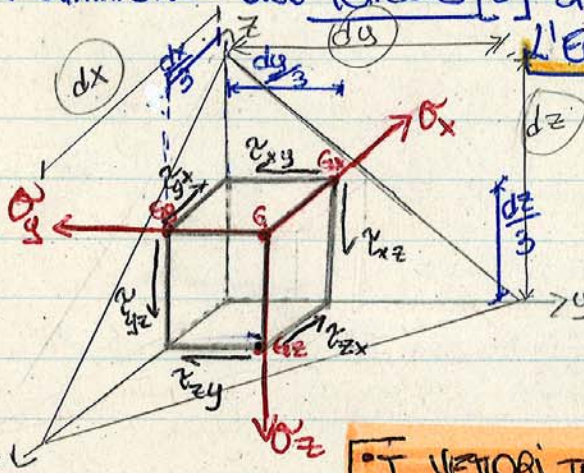
$$\{t_n\} dA_n - \{t_x\} dA_x - \{t_y\} dA_y - \{t_z\} dA_z = 0$$

x_k e s_m Desimili!

$dA_k \rightarrow$ AREOLE delle FACCE COORDINATE del PIANO

3b.) Dimostrare che il tensore precedente è simmetrico

La simmetria del tensore $[\sigma]$ si dimostra considerando



L'equilibrio alla ROTAZIONE del tetraedro

- Proietta G di dV su $d-n_x, d-n_y, d-n_z$.
- Tali proiezioni sono a loro volta BARICENTRI TRI di tali AREE (G_x, G_y, G_z) .
- Considero gli assi k proprio origine in G e direzioni $G G_x, G G_y, G G_z$.

• I VETTORI TENSIONE \rightarrow sono applicati ai TALI BARICENTRI (G_x, G_y, G_z) .

ANALIZZO caso $G G_x$:

Componenti spaziali della tensione: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ \rightarrow presentano BRACCIO NULO rispetto all'asse $G G_x$.

\Rightarrow UNICHE 2 COMPONENTI k CONTRIBUISCONO ALLA ROTAZIONE

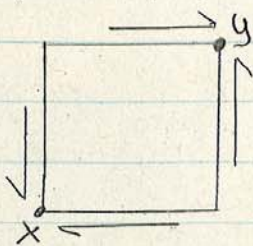
sono: τ_{yz} e τ_{zy}

$$\Rightarrow G G_x \uparrow + \tau_{yz} \cdot d-n_y \cdot \frac{dy}{3} - \tau_{zy} \cdot d-n_z \cdot \frac{dz}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} d-n_y \cdot dy = \frac{1}{3} d-n_z \cdot dz = dV \rightarrow \text{volume del tetraedro.}$$

$$\Rightarrow \tau_{yz} = \tau_{zy} \Rightarrow [\sigma] \text{ SIMMETRICA!}$$

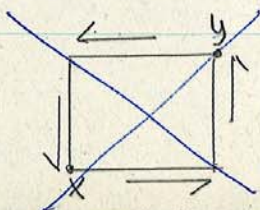
\hookrightarrow x RECIPROCAITÀ dello τ .



Dato 1 spigolo, τ possono essere ENTRANTI o USCENTI.

$x, y \rightarrow$ spigoli.

OK!!!



CONDIZIONE NOLL!

in qsto modo il solido si metterebbe a ROTARE!!!

$$\Rightarrow [\sigma^*] = \begin{bmatrix} \{n\} \\ \{m\} \\ \{l\} \end{bmatrix} \cdot [\sigma] \cdot \begin{bmatrix} \{n\} & \{m\} & \{l\} \end{bmatrix}$$

SON TUTTE MATRICI 3x3.

LEGGE di TRASFORMAZIONE;

$$[\sigma^*] = [N] [\sigma] [N]^T$$

↳ MAT. ORTOGONALE → rappresentata da rotazione
 k si ha per passare dal sist. di rif. x,y,z
 a quello n,m,l.

$$[N] = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ m_x & m_y & m_z \\ l_x & l_y & l_z \end{bmatrix}$$

$[\sigma]$ = TENSORE delle TENSIONI o degli SFORZI.
 TENSIONE = grandezza fisica di natura tensoriale.

$$J_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z ; J_{II} = - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} ;$$

$$J_{III} = \det([\sigma])$$

L'eq. ammette 3 soluzioni: $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ dette AUTOVALORI del probl.

Im modo tale che l'eq. iniziale ammette 3 soluzioni: $\{n_1\}, \{n_2\}, \{n_3\}$ dette AUTOVETTORI del probl.

- AUTOVALORI $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$:

- SONO REALI, essendo il tensore $[\sigma]$ SIMMETRICO.
- RAPPRESENTANO le 3 TENSIONI PRINCIPALI.

- AUTOVETTORI:

- sono mutuamente ortogonali e rappresentano le 3 DIREZIONI PRINCIPALI

(1° CASO) PRINCIPALI se gli AUTOVALORI son tutti distinti.

(2° CASO) se 2 AUTOVALORI coincidono: $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3 \Rightarrow \exists$ una direzione e 2 giaciture principali, tra loro \perp .

(3° CASO) se $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \Rightarrow$ tutte le DIREZIONI son PRINCIPALI!

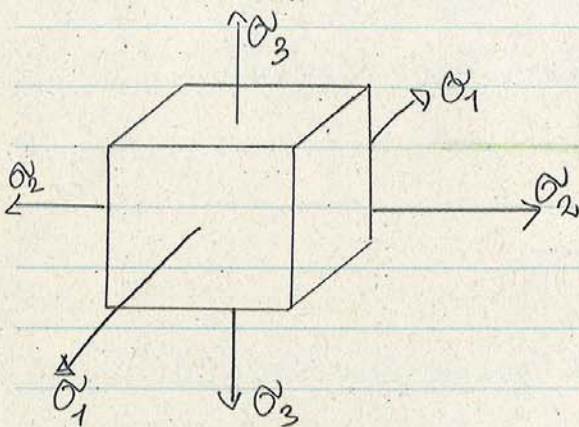
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

IL TENSORE degli SFORZI
nel SIST. PRINC. è DIAGONALE!

$$J_I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$J_{II} = (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)$$

$$J_{III} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$



⇒ si ottengono 3 soluzioni: $\sigma_n = 0 \rightarrow$ RISULTATO NOTO $\rightarrow \sigma_3 = 0$

⇒ eq. detrita: $\sigma_n^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_n + (\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0$

⇒ fornisce le 2 TENSIONI PRINCIPALI $\neq 0$:

⇒ risultato: $\sigma_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = \frac{-(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4(\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2)}}{2} = \frac{-(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2}$

⇒ $\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$

* trovare le DIREZIONI PRINCIPALI DI INERZIA, considero le TENSIONI rispetto al 1° SIST. di REF. ROTATO:

$$[\sigma^*] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

ANNULLANDO τ_{xy}^* si ha:

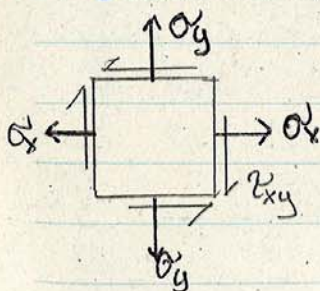
$$\tau_{xy}^* = \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} \cos 2\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

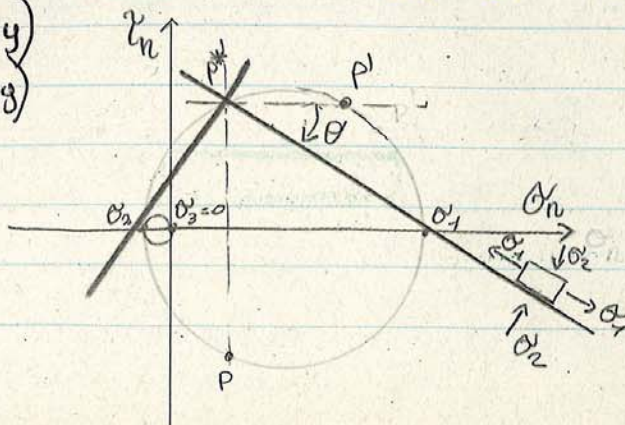
ricavo θ :

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}\right) \quad \text{con } -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$$

angolo di cui deve ruotare il S.R. xy per raggiungere gli principali



$P(\sigma_x, \tau_{xy})$
 $P'(\sigma_y, -\tau_{xy})$

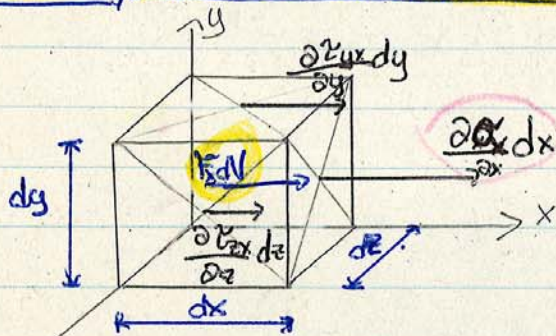


4) Il solido elastico.

4a) Equazioni indefinite di equilibrio nel volume per il continuo 3D.

Consideriamo un parallelepipedo con i lati // agli assi coordinati, di lunghezze dx, dy, dz .

Sulle facce opposte del // agiscono componenti di tensione tra loro = e meno di un incremento massimo \Rightarrow le componenti = e opposte si annullano.



$$\sigma_x \leftarrow \quad \rightarrow \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

Equilibrio: $\rightarrow -\sigma_x + \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$

EQUILIBRIO LUNGO DIREZIONE X:

$$\rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx (dy \cdot dz) + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz (dx \cdot dy) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy (dx \cdot dz) + f_x (dx \cdot dy \cdot dz) = 0$$

OSSERVIAMO:

• Gli incrementi di TENSIONE si moltiplicano per le AREE elementari su cui esse agiscono.

• La Forza di volume è moltiplicata per il volume // su cui agisce.

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \uparrow \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \swarrow \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{EQUAZIONI} \\ \text{INDEFINITE} \\ \text{DELL'EQUILIBRIO.} \end{array}$$

N.B. τ_{zx} \rightarrow z: indica la GIACITURA
x: // la DIREZIONE.

4c.) Dualità statico-cinematica.

Esprimiamo in forme matriciale i sistemi di equazioni differenziali che governano la congruenza e l'equilibrio.

Questi 2 sistemi hanno strutture formali connesse tra loro.

CONGRUENZA → si deve considerare la DEFORMAZIONE → espressa da un vettore $\{\epsilon\}$ delle deformazioni.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 3} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_{3 \times 1}$$

ESPRESSIONE "COMPATTA":

$$\{\epsilon\} = [D] \cdot \{u\}$$

EQUAZIONI CINEMATICHE

EQUILIBRIO: si devono considerare le EQUAZ. INDEFINITE dell'equilibrio in forma matriciale (e con le componenti delle tensioni ordinate nel veicolo delle "t.")

diventano righe → colonne → righe ← TRASPOSTA → scrivo con il suo

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

FORMA "COMPATTA":

$$[D]^T \{0\} + \{f\} = \{0\}$$

EQUAZIONI STATICHE

L'operatore differenziale, statico, è il TRASPOSTO di quello CINEMATICO.

$$\Rightarrow [D]_{\text{STATICO}} = [D]_{\text{CINEMATICO}}^T$$

problema interconnessione tra i 2 operatori matriciali.

ANALOGIA MECCANICA DEI CORPI ELASTICI e MECC. DEI CORPI DEFORMABILI.

MATRICE STATICA = TRASPOSTA della
CINEMATICA

19.) DEFINIZIONE del comportamento elastico

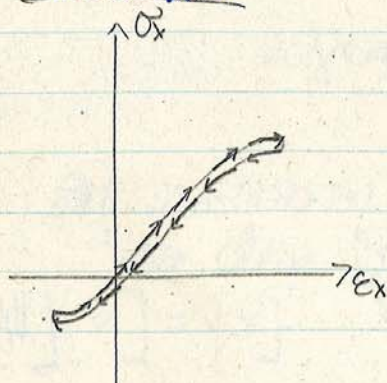
Un corpo deformabile è ELASTICO, quando la sua ENERGIA di DEFORMAZIONE (cioè il lavoro eseguito dall'esterno per portarlo in un certo STATO TENSIONALE $\{\sigma\}$ o in un certo STATO DEFORMATIVO $\{\epsilon\}$), NON dipende dal processo di carico (cioè dagli eventi precedenti), ma solo dallo STATO ^{INIZIALE o} FINALE. \Rightarrow

\Rightarrow L'EN. di DEFORMAZIONE è in questo caso una FUNZ. di STATO!

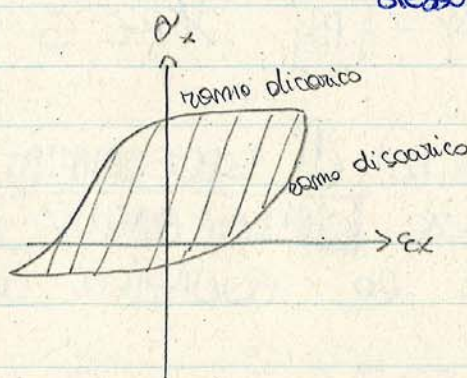
\Rightarrow L'elasticità può quindi essere considerata la proprietà di un materiale di deformarsi sotto l'azione di un stato di sollecitazione IMPOSTA, ma di riaccomplire poi la sua forma originale al cessare della causa di sollecitazione.

Il lavoro di DEFORMAZIONE è rappresentato dal POTENZIALE ELASTICO Φ , coincide con l'area sottesa dalla curva $\sigma(\epsilon)$, scaricando completamente il corpo non vi è DISTRIBUZIONE di ENERGIA e l'ENERGIA ELASTICA IMMAGAZZINATA viene TOTALMENTE RESTITUITA.

COMPORTAMENTO ELASTICO



COMPORTAM. ELASTICO



Non è comp. elastico
xè quando torna
indietro non fa lo
stesso percorso.

$\Rightarrow d\epsilon_e = d\epsilon_i \rightarrow$ ENTRAMBE, FUNZ. di STATO,
 lo sarà anche l'INTEGRANDO di $d\epsilon_i$: definito cm:

$$d\Phi = \{\sigma\}^T \cdot \{d\epsilon\} \quad \forall d\epsilon \in \mathbb{R}^6$$

\Rightarrow la funzione: $\Phi = \Phi(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$
 è una FUNZ. di STATO. è detta: **POTENZIALE ELASTICO**

Da Φ è possibile dedurre le **COMPONENTI DI TENSIONE** mediante
 derivate parziali. \Rightarrow deriv. Φ :

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_x} d\epsilon_x + \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_y} d\epsilon_y + \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_z} d\epsilon_z + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xy}} d\gamma_{xy} + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xz}} d\gamma_{xz} + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{yz}} d\gamma_{yz}$$

definito cm "DIFFERENZIALE DEL POTENZIALE ELASTICO".
 dalla precedente: $d\Phi = \{\sigma\}^T \cdot \{d\epsilon\} \Rightarrow \sigma = \frac{d\Phi}{d\epsilon} \Rightarrow$ posso sostituire e ho trovato
LE COMPONENTI DI TENSIONE:

$$\sigma_x = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_x}; \quad \sigma_y = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_y}; \quad \sigma_z = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_z}; \quad \tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xy}}; \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xz}}; \quad \tau_{yz} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{yz}}$$

CASO di SOLLECITAZIONE UNIASSIALE lungo x , sia Φ che σ_x sono
 funz. della sola DILATAZIONE ϵ_x .

$$\boxed{\Phi = \Phi(\epsilon_x) \Rightarrow \sigma_x = \sigma_x(\epsilon_x) !}$$

Consideriamo ora il **LAVORO VIRTUALE INFINITESIMO**:

$$d\Psi = \{\delta\sigma\}^T \cdot \{\epsilon\}$$

Il differenziale $d\Psi$ è una FUNZ. di STATO $\Rightarrow \Psi$ è anche ψ !

19) La matrice Hessiana del potenziale elastico.

Per dimostrarla bisogna considerare la FUNZIONE POTENZIALE ELASTICO Φ .
 Φ sarà sviluppata in SERIE di TAYLOR nell'INTORNO
dell'ORIGINE, \rightarrow cioè NELL'INTORNO dello STATO INDEFORMATO

• Se le deformazioni sono sufficientemente piccole \Rightarrow è possibile limitarsi
 alla derivata di 2° ORDINE. Se ci mettiamo nell'intorno di zero
 $\Rightarrow |\epsilon_i| \ll 1$

è possibile trascurare i termini di 3° grado!

• Valore che la funz. assume in prossimità dell'origine è una costante
 ARBITRARIA $\rightarrow K$ si può assumere NULLA: $\Phi(0) = 0$

• COEFFICIENTI dei TERMINI del 1° ORDINE sono NULLI che rappresentano
 le TENSIONI nello STATO INDEFORMATO.

\rightarrow le derivate di $\Phi \rightarrow$ sono le TENSIONI!

• Sviluppo in serie di Taylor: *NON è ϵ_x ! né è*

$$\Phi(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{yz}) = \Phi(0) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_x}\right)_0 \epsilon_x + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_y}\right)_0 \epsilon_y + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_z}\right)_0 \epsilon_z + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xy}}\right)_0 \gamma_{xy} +$$

è la derivata 2°!

$$+ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xz}}\right)_0 \gamma_{xz} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{yz}}\right)_0 \gamma_{yz} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_x^2}\right)_0 \epsilon_x^2 + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_y^2}\right)_0 \epsilon_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{yz}^2}\right)_0 \gamma_{yz}^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_y}\right)_0 \epsilon_x \epsilon_y + \dots + 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{xz} \partial \gamma_{yz}}\right)_0 \gamma_{xz} \gamma_{yz} \right]$$

nell'intorno dell'origine 0!

\rightarrow si può riassumere in forma quadratica
 con ~~2~~ coefficienti nella **MAT. HESSIANA**

$[H] =$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_x^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_y}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_x \partial \gamma_{yz}}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_y \partial \epsilon_x}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_y^2}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_y \partial \gamma_{yz}}\right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{yz} \partial \epsilon_x}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{yz} \partial \epsilon_y}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{yz}^2}\right)_0 \end{bmatrix}$$

è SIMMETRICA!
 cioè le derivate miste
 sm = !

4 P.) Significato fisico della condizione di definiteness positiva della mat. HESSIANA e sue conseguenze.

↳ STATO INGEBORNATO deve RAPPRESENTARE un MINIMO ASSOLUTO di Φ
 e NON SOLO un PUNTO STAZIONARIO! (in base alle derivate prime parziali di Φ rispetto a $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \dots$)

→ MATRICE HESSIANA deve essere DEFINITA POSITIVA!

→ Condizioni: ^{il suo} determinante deve essere > 0

• e il " dei suoi minori principali (< princ.) $> 0!$

• la POSITIVITÀ di $[H]$ implica l'INVERTIBILITÀ di $[H]$!

→ essendo: $\{\sigma\} = [H] \{\epsilon\}$

$$\Rightarrow \boxed{\{\epsilon\} = [H^{-1}] \{\sigma\}}$$

legano linearmente i vettori della TENSIONE e della DEFORMAZIONE

→ CONNESSIONE TRA STATICA e CINEMATICA!

Inoltre RICORDA che:

$$\Rightarrow \boxed{d\Phi + d\Psi = d(\{\sigma\}^T \cdot \{\epsilon\})}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi + \Psi = \{\sigma\}^T \cdot \{\epsilon\} = \sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}}$$

Σ di Φ e Ψ è sempre =! anche nei casi non lineari al proprio scalare tra $\{\sigma\}$ e $\{\epsilon\}$.

• CASO LINEARE:

$$\Phi = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T \cdot \{\sigma\}$$

$$\rightarrow [H] \{\epsilon\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi = \Psi = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\epsilon\}}$$

→ IL POTENZIALE ELASTICO COMPLEMENTARE:

$$\Psi = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \cdot \{\epsilon\} \Rightarrow \boxed{\Psi = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [H^{-1}] \{\sigma\}}$$

$$[H^{-1}] \{\sigma\}$$

$\Psi =$ forma quadratica delle componenti di TENSIONE.

$$[L]\{n\} = -\{F\}$$

4d) (x STATICA)

• Richiamo le **CONDIZIONI di contorno**: $[N]^T \{o\} = \{P\}$
 e suppongo K venga su + certa porzione S_p della **SUPERFICIE ESTERNA** del corpo
 e K sulla porzione **COMPLEMENTARE** S_n venga imposto un **campo convergente di spostamenti** $\{n_0\}$.

$$\Rightarrow [N]^T \{o\} = \{P\}$$

$$\Leftrightarrow [H] \{e\} = [o] \{n\}$$

$$\boxed{[N]^T \cdot [H] \cdot [o] \{n\} = \{P\}}$$

qes vale su S_p
 e su S_n vi è $\{n_0\}$

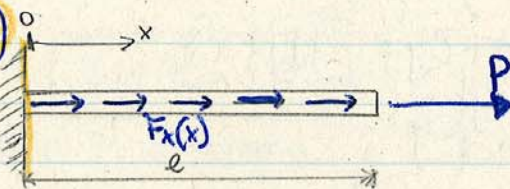
⇒ Ho 3 EQUAZIONI:

⇒ 3 INCOGNITE, 3 Eq. di EQUILIBRIO.

$$\begin{cases} \bullet [L]\{n\} = -\{F\} & \forall P \in V \\ \bullet [N]^T [H] [o] \{n\} = \{P\} & \forall P \in S_p \\ \bullet \text{ " " " } \{n\} = \{n_0\} & \forall P \in S_n \end{cases}$$

cedimenti
 al contorno.

Esempio:



CORPO **UNIDIMENSIONALE** ELASTICO LINEARE,
 fissato ad un estremo e dall'altro
 sottoposto a **TIRAZIONE** e sottoposto
 ad una **DISTRIBUZIONE di FORZE**
 ASSIALI $F_x(x)$.

3x-1 ven. spostamento

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Eq. cinematiche
 deformez.

$$\{e\} = [o] \{n\} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

TENSIONE $\rightarrow \sigma$ è **PROPORZIONALE** alla **DEFORMAZIONE** $\rightarrow \epsilon$ mezzo di **1 COSTANTE**
 di **proporzionalità**: rappresentata da $[E] \rightarrow$ **MODULO ELASTICO**
 o di **YOUNG**.

$$\sigma \propto E \cdot \epsilon$$

$$\{o\} = \begin{Bmatrix} E \cdot \frac{du}{dx} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Una volta individuato il campo degli
 spostamenti $\{n\}$, ho determinato
 il **CAMPO DEFORMATIVO** $\{e\}$ e **TENSIONE**
 NALE $\{o\}$

(e) \uparrow $\{$ di sollecitazioni. genera

15) Il principio di sovrapposizione degli effetti.

• Se un sistema di sollecitazioni genera un campo di spostamenti

$$\{u_a\} \{p_a\} \{n_a\} \quad \{u_b\}$$

e quindi campi deformativi $\{e_a\}$ e tensionali $\{\sigma_a\}$

e se un altro sistema di sollecitazioni $\{F_b\} \{p_b\} \{n_b\}$ genera i campi $\{u_b\} \{e_b\} \{\sigma_b\}$

→ UN SISTEMA DI SOLLECITAZIONI $\{F_a\} + \{F_b\}$, $\{p_a\} + \{p_b\}$, $\{n_a\} + \{n_b\}$

genera CAMPI DI SPOSTAMENTO, DEFORMATIVI e TENSIONALI, che sono le Σ dei precedenti:

$$\{u_a\} + \{u_b\}, \{e_a\} + \{e_b\}, \{\sigma_a\} + \{\sigma_b\}.$$

42.) Il teorema di Betti

• Considero un corpo linearmente elastico soggetto a forze di vol. $\{F\}$ e a forze di Surf. $\{p\}$. \Rightarrow si genererà un campo di spostamenti $\{r\}$.
 $\{r\} \Rightarrow$ CAMPO DI SPOSTAMENTO che si genera al termine del processo di carico, K porta le forze esterne da 0 ai valori dati.

• applico il P.L.V.:

$$\int_V \{F\}^T \{r\} dV + \int_S \{p\}^T \{r\} dS = \int_V \{o\}^T \{e\} dV$$

VALIDA se si considerano i CAMPI FINALI STATICAMENTE e CINETICAMENTE AMMISSIBILI!
 moltiplica ambo i membri per $\frac{1}{2}$

$$\left[\frac{1}{2} \int_V \{F\}^T \{r\} dV + \frac{1}{2} \int_S \{p\}^T \{r\} dS = \int_V \frac{1}{2} \{o\}^T \{e\} dV \right]$$

$$= \int_V \Phi dV$$

LAVORO DI DEFORMAZIONE

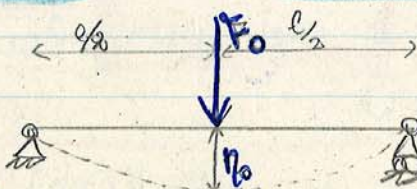
ingatti: $\Phi = \Psi = \frac{1}{2} \{e\}^T \{o\} = \frac{1}{2} \{o\}^T \{e\}$

potenziale immagazzinato nell'elemento di vol. \Rightarrow E, K si riferisce al corp.

• CORPO LINEARMENTE ELASTICO:

L'eq. \int esprime il fatto che il LAVORO DI DEFORMAZIONE compiuto dalle FORZE ESTERNE (per portare il corpo dallo STATO INDEFORMATO INIZIALE allo STATO DEFORMATO FINALE) è pari alla metà del LAVORO che tali forze compirebbero se presentassero il loro valore FINALE (F_0) durante tutto il processo di carico.

Esempio: TRAVE LINEARMENTE ELASTICA



TRAVE sottoposta a $\rightarrow F$ concentrata in un punto, in modo da non indurre dei fenomeni dinamici.

sotto l'azione della F (del carico), l'abbassamento in mezzo varia da 0 a l_0 .

4m.) Il TH. di Betti.

Posto con il principio di sovrapposizione degli effetti nella elasticità lineare vale solo per gli spostamenti, deformazioni e tensioni e NON è applicabile al lavoro di deformazione.

... consideriamo un corpo elastico lineare e sottoponiamolo a 1° processo di carico QUASI-STATICO (molto lento) così k le F. FINALI applicate siano $\{F_a\}$ $\{P_a\}$ e il LAV. di DEFORMAZ. compiuto sia L_a

ed proseguo poi il processo di carico con l'APPLICAZIONE QUASI-STATICA di un 2° SIST. di forze $\{F_b\}$ $\{P_b\}$. il LAVORO compiuto da esse è L_b

L_{ab} LAVORO MUTUO → il LAVORO di TRASCINAMENTO delle FORZE $\{F_a\}$ $\{P_a\}$ per gli spostamenti $\{n_b\}$.

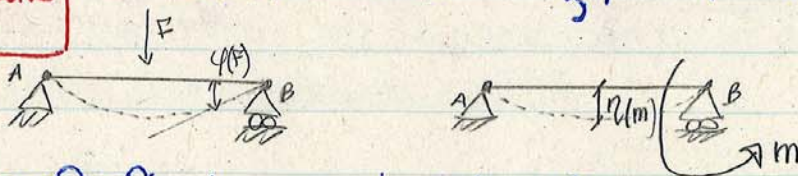
⇒ $L_{(a+b)} = L_a + L_b + L_{ab}$ ⇒ NON È APPLICABILE IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI!

$$L_a = \frac{1}{2} \int_V \{F_a\}^T \{n_a\} dV + \frac{1}{2} \int_S \{P_a\}^T \{n_a\} dS$$

$$L_b = \frac{1}{2} \int_V \{F_b\}^T \{n_b\} dV + \frac{1}{2} \int_S \{P_b\}^T \{n_b\} dS$$

$$L_{ab} = \int_V \{F_a\}^T \{n_b\} dV + \int_S \{P_a\}^T \{n_b\} dS$$

1. NON c'è xkè
2. le FORZE SONO COSTANTI!



• si calcoli $L_{(b+a)} = L_b + L_a + L_{ba}$

$$L_{ba} = \int_V \{F_b\}^T \{n_a\} dV + \int_S \{P_b\}^T \{n_a\} dS \rightarrow$$

(12) L'ipotesi di isotropia mod' ammette dal comportamento elastico anisotro.

campo

HP: CAMPO DEFORMABILE, ISOTROPO e LINEARMENTE ELASTICO

Le proprietà meccaniche sm = im
tutte le direzioni uscenti dal punto P.

*

POTENZIALE ELASTICO COMPLEMENTARE

DIREZIONI PREFERENZIALI ⇒ ψ dipende dai valori delle 3 TENSIONI PRINCIPALI e NON dall'orientamento del sist. princ. di rif!

⇒ $\psi = \psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ - FORMA SCALARICA delle componenti di tensione.

$$\Rightarrow \psi = \frac{1}{2E} \left\{ (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \right\}$$

dove $\frac{1}{2E}$ → moltiplica i quadrati delle tensioni ; $-\frac{\nu}{E}$ moltiplica i prodotti tra le tensioni

° Richiamando l'HP di isotropia → i coeff. possono da 2 a 3.
Esprimendo ψ in funz. degli INVARIANTI SCALARI si ha:

$$\psi = \frac{1}{2E} \left\{ J_I^2 + 2J_{II}(1+\nu) \right\}$$

$$J_I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \Rightarrow (\text{traccia}) = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$J_{II} = -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 = - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_x & - \\ - & \sigma_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_y & - \\ - & \sigma_z \end{vmatrix}$$

sostituisco gli INVARIANTI generici per una qualsiasi direzione:

$$\Rightarrow \psi = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

POTENZIALE ELASTICO COMPLEMENTARE nel caso di ELASTICITÀ LINEARE e ISOTROPIA

$$\text{dove } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

G = MODULO ELASTICO TANGENZIALE.

quando las dom. primo x: HP di ISOTROPIA!

40. Quali sono le condizioni K devono essere soddisfatte dal modulo di Young e dal rapporto di Poisson affinché $[H]$ sia positiva?

MATRICE HESSIANA: è + MAT. definita positiva! (lo stato INSTABILIZZATO deve rappresentare + MINIMO ASSOLUTO del LAURO di DEFORMAZIONE);
Anche la sua INVERSA deve essere DEFINITA POSITIVA!

con l'HP. di **ISOTROPIA!**. considero la **LEGGE COSTITUTIVA ELASTICA:**

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{cases} = [H] \begin{cases} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{cases} = [H^{-1}] \begin{cases} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & & & \\ & & & \frac{1}{G} & & \\ & & & & \frac{1}{G} & \\ & & & & & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}$$

• Il suo determinante e i det. dei minori principali, devono essere > 0 !

$\Rightarrow \frac{1}{E} > 0 \Rightarrow G > 0$; $\frac{1}{E} > 0 \rightarrow E = \text{rigidezza del MATERIALI} = \text{MODULO DI YOUNG.}$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow \text{dato che } \frac{1}{G} > 0 \Rightarrow 1+\nu > 0 \Rightarrow \nu > -1$

$G = \text{MODULO ELASTICO TANGENZIALE.}$

\Rightarrow Esempio impone che:

$$\frac{1}{E} \begin{vmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{vmatrix}$$

det | > 0 \Rightarrow

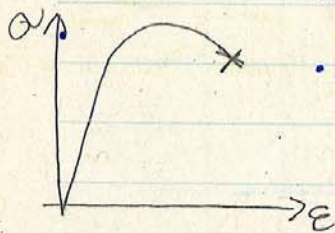
4P.) La distinzione tra materiali duttili e fragili.

MATERIALI DA COSTRUZIONE, vengono catalogati in funz. dell'andamento della curva $\sigma(\epsilon)$ in 2 CATEGORIE:

- DUTILI
- FRAGILI.

MATERIALI DUTILI:

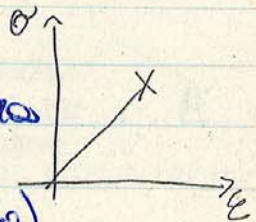
- mostrano comportamenti non lineari nel diagramma $\sigma(\epsilon)$, prima di pervenire alla rottura;
- RESISTENZA A TRAZIONE / || A COMPRESSIONE] \rightarrow il rapporto tende all'unita'
- LOS DUTILITA' dipende da:
 - TEMPERATURA AMBIENTALE
 - DIMENSIONE DELL'ELEMENTO STRUTTURALE
- Presentano cattivo comportamento a compressione e un buon " a trazione.



• Dopo il tratto rettilineo (DEFORMAZIONE ELASTICA) subiscono || PLASTICA

MATERIALI FRAGILI

- Si rompono in modo improvvisabile (quasi per risposta elastica-lineare)
- RESISTENZA A TRAZIONE / || A COMPRESSIONE : di molto inferiore ($10^{-1} - 10^{-2}$)
- (tali materiali son i CERAMICI, con il cemento)



LE DIFFERENZE DI COMPORTAMENTO dipendono x la > parte dei meccanismi microscopici di DANNEGGIAMENTO e di FRATTURA.

nei materiali da costruzione si hanno meccanismi \neq ! es!

• LEGHE METALLICHE: si verificano degli scorrimenti tra i piani atomici e cristallini \rightarrow danno luogo ad un comportamento di tipo PLASTICO DUTILE \rightarrow Notevoli deformazioni permanenti.

• CALCESTRUZZI e ROCCE: microfessure tra i componenti granulari e la matrice possono estendersi e formare 1 fessura macroscopica che separa improvvisamente le 2 parti.
PROCESSO di FESSURAZIONE \rightarrow produce 1 comportamento di tipo FRAGILE.

- Bisogni: - corpi soggetti a STATO TENSIONALE UNIASSIALE. Come si vuole fare? LA VERIFICA DI RESISTENZA
- TENSIONE AMMISSIBILE \rightarrow criteri di resistenza
 - PROVE IN LABORATORIO su uniballini \rightarrow ESIGENZA:

1.5) Definire la TENSIONE IDEALE o EQUIVALENTE

1) Nel caso di corpi soggetti a STATO TENSIONALE UNIASSIALE \rightarrow come Fomi e plasticità, \rightarrow la VERIFICA DI RESISTENZA è IMMEDIATA se si conoscono

- la TENSIONE di ESERCIZIO e
- la RESISTENZA A SNERVAMENTO o A ROTURA.

2) x i MATERIALI DUTILI \rightarrow NON si ha crisi del MATERIALE (cioè SNERVAMENTO) quando VALE la RELAZIONE: $-\sigma_p < \sigma < \sigma_p$

σ_p \equiv tensione di SNERVAMENTO \rightarrow possiede \equiv lo stesso valore in compressione e in trazione.

3) MATERIALI FRAGILI \rightarrow hanno comportamenti in compressione \neq da quello in TRAZIONE. la crisi del materiale è EVITATA se è VERIFICATA:

$$-\sigma_c < \sigma < \sigma_{tz}$$

σ_c \equiv RESISTENZA ULTIMA in COMPRESSIONE.

• se si forma + fessura \rightarrow la trazione \rightarrow si innesca in compress. \rightarrow si rinfonda.

Nella realtà le grandezze (cmi dimensionali del corpo, Forze applicate) in NOTE in modo approssimato.

- la TENSIONE AMMISSIBILE, per consentire le condizioni di sicurezza, è rappresentata da una frazione della resistenza massima del materiale.

garantisce per CRITERI DI RESISTENZA:

x MAT. DUTILI: $-\frac{\sigma_p}{S} < \sigma < \frac{\sigma_p}{S}$
 (con $S=1,5$)

x " FRAGILI: $-\frac{\sigma_c}{S} < \sigma < \frac{\sigma_{tz}}{S}$
 con ($S \geq 6$)

(che hanno meccanismi di danneggiamento + instabili.)

con ($S > 1$)

parametro detto COEFFICIENTE di SICUREZZA.

(\rightarrow è S e + è alta la sicurezza)

• Aumento S \Rightarrow ridurre la Tensione e vado al laboratorio dove il materiale ha comportamento lineare.

44.) Il criterio di Tresca

Considera le TENSIONI TANGENZIALI responsabili dello smembramento che subisce il materiale quando è soggetto ad 1 stato tensionale triassiale! → rappresentazione sul piano di MOHR.

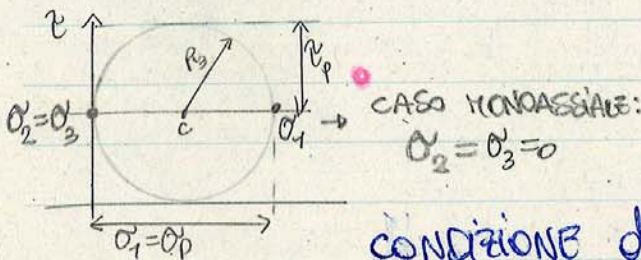
LA TENSIONE TANGENZIALE MASSIMA τ_{max} : è = alla META delle DIFFERENZE tra le TENSIONI principali estreme.

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \} < \tau_p \rightarrow = \frac{1}{2} \sigma_p$$

è il raggio max. dei 3 cerchi di MOHR dalla CONDIZIONE DI SNERVAMENTO UNIASIALE si ottiene:

$$\tau_p = \frac{1}{2} \sigma_p$$

TENSIONE TANGENZIALE DI SNERVAMENTO



CONDIZIONE DI TRESCA: $\tau_{max} < \tau_p$

$$\Rightarrow \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \} < \sigma_p$$

TENSIONE EQUIVALENTE DI TRESCA

• Sul piano di MOHR $\tau_{max} < \tau_p$ → è rappresentata da una striscia ∞ delimitata dalle 2 rette // all'ass. $\tau = \pm \tau_p$.

• CASO PIANO: $\sigma_3 = 0$ → $\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2| \} < \sigma_p$
 ⇨ DISEQUAZIONE!

soluzioni:

- $|\sigma_1| < \sigma_p$
- $|\sigma_2| < \sigma_p$
- $|\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_p$

⇒ a. e b. in sul piano $\sigma_1 - \sigma_2$.

40) Il criterio di MOHR-COULOMB x i mat. FRAGILI;

Non considero una tensione tangenziale di crisi costante e indipendente dallo stato tensionale, (MA) propone un LIMITE τ_c funz. della corrispondente tensione normale (σ)

τ_c è la τ di tangenza rispetto ai cerchi assiali!

$$\tau < \tau_c - u\sigma$$

τ_c = coesione del materiale
 u = coeff. di attrito interno.

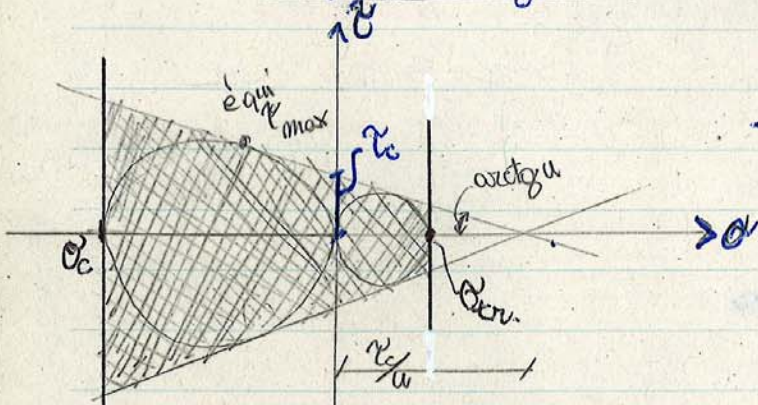
Resistenza \uparrow (aumenta) all'aumentare della compressione normale, \rightarrow così che il

DOMINIO di RESISTENZA è rappresentato da τ striscia K si allarga nel senso delle σ negative.

\rightarrow si taglia il DOM. con 2 rette verticali (\rightarrow rappresentiamo gli stati di crisi UNIASSIALI di trazione e compress.)

\Rightarrow si ottiene \rightarrow **DOMINIO TRAPEZIO**

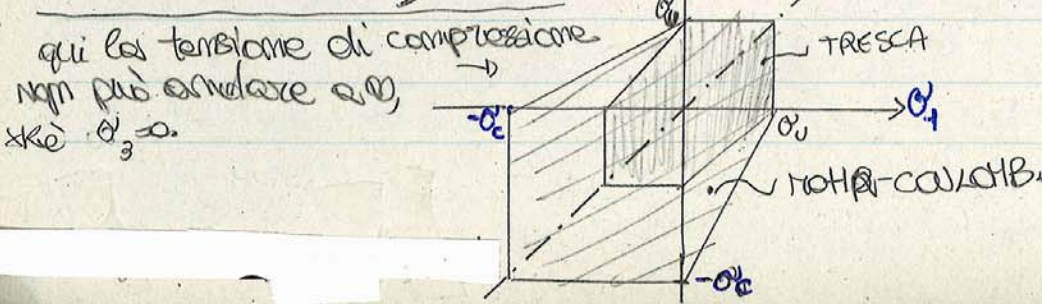
riproduce gli dati di crisi nei mat. FRAGILI; (als., roccie, ferre)



da questa parte non è limitato, invece l'esagono è ∞ x ∞ lo considero su $\sigma_3 = 0$

\rightarrow Sul piano $\sigma_1 - \sigma_2$ delle tensioni principali, il dominio di MOHR-COULOMB è rappresentato da un ESAGONO SIMMETRICO rispetto all'asse bisettrice del 1° e 3° quadrante.

esso si riduce a quello di TRESCA per $u=0$ (attrito interno NULO)



$$J_{II} = -\frac{1}{9} [(3\sigma_1 - 3\sigma) (3\sigma_2 - 3\sigma) + \dots] =$$

esistitisco σ :

$$= -\frac{1}{9} \left[\left(3\sigma_1 - 3 \cdot \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right) \left(3\sigma_2 - 3 \cdot \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right) + \dots \right] =$$

$$= -\frac{1}{9} \left[(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3) + \dots \right] =$$

MINORE 1-2.

$$\Downarrow$$

	$2\sigma_1$	$-\sigma_2$	$-\sigma_3$
$2\sigma_2$	$4\sigma_1\sigma_2$	$-2\sigma_2^2$	$-2\sigma_2\sigma_3$
$-\sigma_1$	$-2\sigma_1^2$	$+\sigma_1\sigma_2$	$+\sigma_1\sigma_3$
$-\sigma_3$	$-2\sigma_1\sigma_3$	$+\sigma_2\sigma_3$	$+\sigma_3^2$

$$\Rightarrow J_{II} = -\frac{1}{9} \left[(-2\sigma_1^2 - 2\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 5\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3) + \dots \right]$$

MINORE 1-2

	σ_1^2	σ_2^2	σ_3^2	$\sigma_1\sigma_2$	$\sigma_1\sigma_3$	$\sigma_2\sigma_3$
min(1+2)	-2	-2	1	5	-1	-1
"(1+3)	-2	1	-2	-1	5	-1
"(2+3)	1	-2	-2	-1	-1	5

$$\Sigma \quad -3 \quad -3 \quad -3 \quad 3 \quad 3 \quad 3$$

Da 18 termini si passa a 6!

$$\Rightarrow J_{II} = \frac{1}{3} \left[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \right]$$

→ sostituisco il valore di J_{II} d

EN. di DISTORSIONE:

ovvero $\Phi_d = \frac{1+\nu}{E} J_{II}$

$$\Phi_d = \frac{1+\nu}{3E} \cdot \left[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \right]$$

CRISI UNIASSIALE $\Rightarrow \sigma_2 = \sigma_3 = 0!$

ENERGIA di DISTORSIONE ASSUMI il valore limite:

$$\Phi_d = \frac{1+\nu}{3E} \cdot \sigma_p^2$$

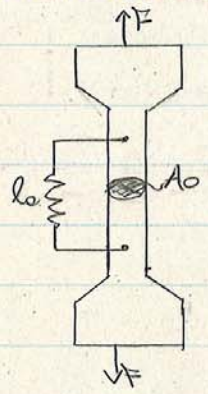
→ **CONDIZIONE di VON MISES**:

$$\Phi_d < \Phi_{dP}$$

(FORMULAZIONE IN 3D) →

49) desidero ^{trasversale} bas compressione plastica o strazione, l'incremento negativo e l'em. di frattura.

Loi proprio di TRAZIONE UNIASIALE viene espletta utilizzando un provino di MATERIALI DUTILI. (es. Acciaio).



FORZA PROVINO: si forma di classifica in modo tale che la rottura non avenga nelle zone TERMINALI di AMMORZAMENTO alla MACCHINA di PROVA.

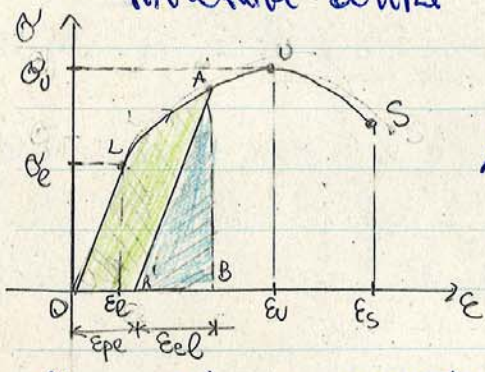
A_0 = area della sezione TRASVERSALE MEIANA, nel momento iniziale.
 l_0 = distanza iniziale tra i sensori.
 " misurato da un dispositivo elettronico.

$\sigma = \frac{F}{A_0}$ = tensione nominale.

$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ = dilatazione convenzionale

A 2° del tipo di materiale si può avere un tipo di comportamento.

MATERIALI DUTILI

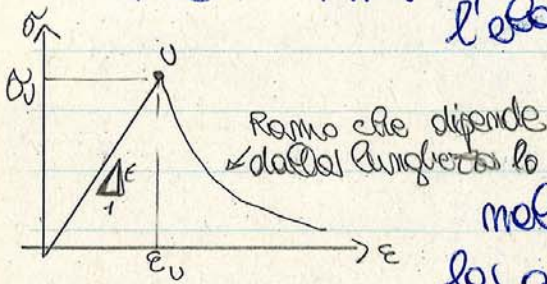


OL → deformazione elastica (lineare)
 LA → inizio smorzamento (NON =)

AA' → scaricando il provino si evidenziano le DEFORMAZIONI PERMANENTI (ϵ_{pe}); parte dell'ENERGIA è restituata, altra è DISSIPATA.

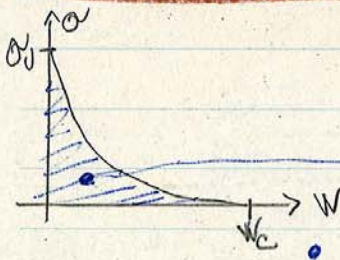
AA' → carico nuovamente il provino, si ripercorre elasticamente il tratto AA' // OL . In A il provino si smorza di nuovo a una tensione $\sigma > \sigma_e$. (la DEFORMAZIONE PLASTICA continua)
 AU → incremento di tensione continua si diminuisce, giacché non si annulla nel punto U . Se il PROCESSO di CARICA MENTE è provato dalla forza esterna F , il provino si rompe, poiché F NON può ulteriormente aumentare. →

MATERIALI FRAGILI: → Non vi è deformazione plastica dopo l'elastico, ^{ma} al rompersi in U.



L'Em. non è dissipata uniformemente nell'unità di volume, ma su 1 BANDA LOCALIZZATA la quale diventa in seguito una FESSURA (lo stesso avviene nei mat. duttili in fase stazionario).

• un materiale una volta caratterizzato è rappresentato dal diagramma $\sigma'(w)$, K rappresenta la TENSIONE TRASMESSA attraverso la FESSURA, in funz. della APERTURA (lunghezza) della FESSURA stessa.



σ'_0 = tensione trasmessa attraverso la fessura, in funz. dell'apertura w.

• l'AREA SOTTO LA CURVA $\sigma'(w)$ rappresenta l'EM. DISSIPATA SULLA SUPERFICIE UNITARIA DI FRATTURA.

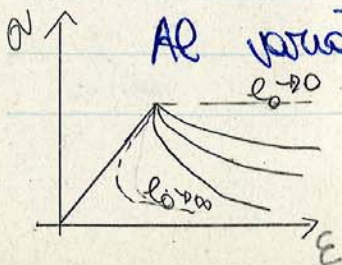
EM. DI FRATTURA: γ_{ic}

$$\gamma_{ic} = \int_0^{w_c} \sigma'(w) dw$$

→ EM. dissipata nella creazione di 1 FESSURA (crepa)

• EM. dissipata sulla SUPERFICIE TOT. della FESSURA:
 $\gamma_{ic} \cdot A_0$

PIANO $\sigma-\epsilon$: transizione descritta da 1 solo tratto elastico lineare e da 1 ventaglio di Rami (SOFTENING)



CONDIZIONI di EQUITAZIONE al CONFINO SUPER. LATERALE:

$$\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \rightarrow 0$$

$n_z = 0$

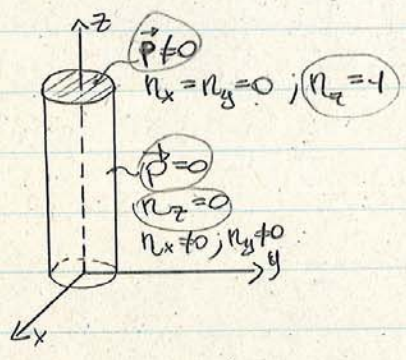
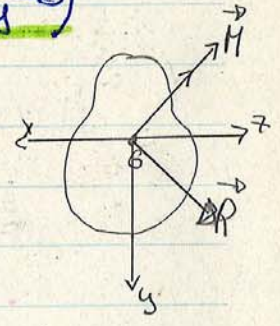
$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x \cdot n_x + \tau_{yx} \cdot n_y = 0 \\ \tau_{xy} \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y = 0 \\ \tau_{xz} \cdot n_x + \tau_{yz} \cdot n_y = 0 \end{cases}$$

[NON HO p_x, p_y, p_z (FORZE di SUPERFICIE) super. sup. LATERALE!]

condizione di EQUITAZIONE sulle BASI ($n_x=0; n_y=0$)

$$\Rightarrow \begin{cases} p_x = \tau_{zx} \cdot n_z \\ p_y = \tau_{zy} \cdot n_z \\ p_z = \sigma_z \cdot n_z \end{cases} \Rightarrow \text{super. BASI} \Rightarrow \begin{cases} p_x = \tau_{zx} \\ p_y = \tau_{zy} \\ p_z = \sigma_z \end{cases}$$

$n_z = -1$



5b

Rispetto al prob. elastico non si considerano le forze di volume e gli spostamenti imposti sul contorno.

Le forze si suppongono solo di superficie e agenti esclusivamente sulle basi.

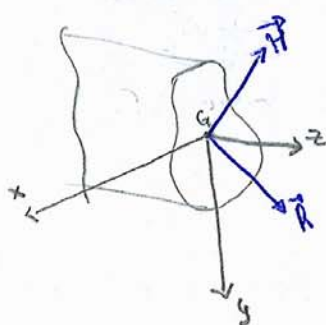
Essendo il prob. di Saint Venant un caso particolare del prob. elastico, le equazioni K governano il problema sin le stesse, ovvero quelle statiche, cinematiche e costitutive.

Le eq. di Equivalenza al contorno sulla sup. laterale, con $n_z = 0$, sm:

$$\begin{cases} \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y = 0 \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = 0 \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0 \end{cases}$$

mentre le eq. sulle basi, con $n_x = 0$ e $n_y = 0$, e $n_z = 1$, sm:

$$\begin{cases} \tau_{zx} n_z = p_x \\ \tau_{zy} n_z = p_y \\ \sigma_z n_z = p_z \end{cases}$$



si ha l'enunciato:

"A sufficiente distanza dalle basi, lo stato deformativo e tensionale dipende soltanto dalle risultanti $\{R\}$ delle forze agenti sulle basi e dal momento risultante $\{M\}$ delle forze rispetto al baricentro della base considerata".

con tale enunciato le condizioni di Equivalenza sulle basi possono essere GLOBALI e non puntuali.

$$\int_A \{t_z\} dA = \int_A \{p\} dA = \{R\} \quad \text{Equilibrio delle FORZE}$$

$$\int_A \{r\} \wedge \{t_z\} dA = \int_A \{r\} \wedge \{p\} dA = \{M\} \quad \text{di MOMENTI.} \quad \rightarrow$$

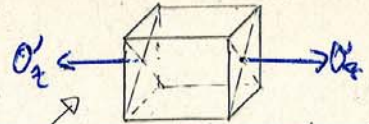
(*) I campi deformativo e tensionale son approssimativamente gli stessi a distanze dalle basi superiori all'altezza h .

In entrambi i casi la zona di cui parla il principio è quella a distanza h dalla base, (dove la base è' altezza h).

~~Quando la sezione è sottile la distanza di smorzamento può risultare~~

Imponendo uno dei 2 SIST. di FORZE e applicando il principio di SOPRAPPOSIZIONE degli EFFETTI, si ottengono 2 SIST. AUTOEQUILIBRANTI AGENTI SULLE BASI, i quali generano 1 CAMPO DEFORMATIVO e TENSIONALE APPROSSIMATIVAMENTE NULLO.

Lo smorzamento del disturbo creato dai SIST. AUTOEQUILIBRANTI di FORZE, avviene a distanza dalle basi circa ... della dimensione max. della sezione, quando la sezione è COMPATTA e di FORMA REGOLARE. Quando invece la h è sottile, la distanza di smorzamento può risultare di gran lunga + traballante!



Ed.) Il caso dello sforzo normale centrato (tensioni, deformazioni e lavoro)

• Forza $N_z // a z$, agente sul BARICENTRO delle basi.

Lo sforzo normale (N_z) essendo \perp alla superficie su cui agisce ed essendo $//$ all'asse $z \Rightarrow$ provoca la formazione di TENSIONI NON tangenziali, ma NORMALI $\rightarrow \sigma_z$

$\Rightarrow \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$; $\sigma_z \neq 0 = \text{costante} = c.$

$\Rightarrow \int_A \sigma_z dA = N \Rightarrow \int_A c dA = N \Rightarrow N = c \cdot A \Rightarrow \sigma_z = \frac{N}{A}$

LE EQUAZ. COSTITUTIVE ELASTICHE permettono il CAMPO DEFORMATIVO

$\rightarrow \{\epsilon\} = [H^{-1}] \{\sigma\}$

IPOTESI dell'ISOTROPIA del CAMPO.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & \frac{1}{E} & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{N}{A} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ricavo le deformazioni tramite le leggi x i solidi elastici

$\Rightarrow \epsilon_x = \epsilon_y = -\frac{\nu}{E} \cdot \frac{N}{A} = -\nu \cdot \frac{N}{EA} = -\nu \cdot \epsilon_z$

$\epsilon_z = \frac{1}{E} \cdot \frac{N}{A} = \frac{N}{EA}$

$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \epsilon_x = \epsilon_y = -\frac{\nu N}{EA} \rightarrow \text{DIREZIONI TRASVERSALI} \\ \epsilon_z = \frac{N}{EA} \rightarrow \text{DIREZIONE ASSIALE} \\ \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \rightarrow \text{SCORRIMENTI ANGOLARI NULLI!} \end{cases}$

• con SFORZO NORMALE $[N > 0] \rightarrow$ DILATAZIONE UNIFORME \rightarrow lungo l'asse z ; e CONTRAZIONI ugualtra loro nelle direzioni TRASVERSALI ($\rightarrow \epsilon_x, \epsilon_y < 0$ lungo x e y);
• e SCORRIMENTI ANGOLARI NULLI! \rightarrow DISEGNO!

5e.) Il caso della flessione retta (flessioni, deformazioni e lavoro...)

Si ipotizzi un campo tensionale UNIASSIALE σ_z , con σ_z variabile LINEARMENTE lungo la sezione trasversale della...

Anche la flessione retta, con lo sforzo normale centrato, provoca la formazione esclusivamente di tensioni lungo l'asse z: σ_z .

In questo caso NON sono costanti, ma espresse in funz. lineare.

$$\sigma_z \neq 0; \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_z = ax + by + c.$$

con a, b, c = costanti determinabili per mezzo delle condizioni al contorno.

Le CONDIZIONI al contorno sono:

$$(a) \int_A \sigma_z dA = N = 0 \quad (c) \int_A \tau_{zy} dA = T_y = 0 \quad (e) \int_A \sigma_z \cdot x dA = -M_y = 0$$

$$(b) \int_A \tau_{zx} dA = T_x = 0 \quad (d) \int_A \sigma_z \cdot y dA = M_x \neq 0 \quad (f) \int_A (\tau_{zy} \cdot x - \tau_{zx} \cdot y) dA = M_z = 0$$

Le condizioni b, c, f sono IDENTICAMENTE SODDISFATTE

Le condizioni a, d, e forniscono le costanti: $a, b, c \Rightarrow$ SVILUPPIAMO aste n.

In sist. xy è BARICENTRICO

$$a. \int_A \sigma_z dA = N = 0 \Rightarrow \int_A (ax + by + c) dA \Rightarrow \int_A ax dA + \int_A by dA + \int_A c dA =$$

$$= a \cdot S_y + b \cdot S_x + c \cdot A = 0 \Rightarrow \text{DATO CHE IL SIST. } x, y \text{ È BARICENTRICO} \\ \Rightarrow S_x = S_y = 0 \text{ e } \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

$$e. \int_A (ax + by) x dA = 0 \Rightarrow \int_A ax^2 dA + \int_A bxy dA = 0$$

$$\Rightarrow a I_{yy} + b I_{xy} = 0 \Rightarrow I_{xy} = 0 \text{ x'è il sist. } xy \text{ È BARICENTRICO} \\ \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

$$\Rightarrow a = 0; c = 0; b \neq 0.$$

$$d. \int_A (by) \cdot y dA = M_x \Rightarrow b \cdot I_{xx} = M_x \Rightarrow b = \frac{M_x}{I_{xx}} \Rightarrow \boxed{\sigma_z = \frac{M_x}{I_{xx}} \cdot y}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{1}{E I_x} M_x x$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = -\frac{1}{E I_x} M_x z$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial z} = 0$$

⇒ Integrazo lungo x:

$$\Rightarrow v_0 = \frac{1}{E I_x} M_x \frac{x^2}{2} + v_1(x, z) \rightarrow \text{applico a } v_1: \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = -\frac{1}{E I_x} M_x z$$

e integro lungo z:

$$\Rightarrow v_1 = -\frac{M_x}{E I_x} \cdot \frac{z^2}{2} + v_2(x, z)$$

⇒ Ho come spostamenti:
(gli scatti primari)

$$u = -\frac{1}{E I_x} M_x y \cdot x + u_0(y, z)$$

$$v = -\frac{1}{E I_x} M_x \frac{y^2}{2} + \frac{1}{E I_x} M_x \frac{x^2}{2} + \left(-\frac{M_x}{E I_x} \frac{z^2}{2}\right) + v_2(x, z) =$$

$$-\frac{M_x}{2 E I_x} (z^2 - (y^2 - x^2)) + v_2(x, z)$$

$$w = \frac{M_x}{E I_x} y \cdot z + w_0(x, y)$$

↳ Come si muovono i punti sull'asse?

$P(0,0,\bar{z})$

$$u_p = 0$$

$$v_p = -\frac{M_x}{2 E I_x} \bar{z}^2$$

$$w_p = 0$$

$$\rightarrow P(0,0,\bar{z}) \rightarrow P'(0, v_p, \bar{z})$$



Valle il principio delle sezioni PIANE, x cui ogni sezione trasversale ruota rigidamente dell'angolo φ_x attorno all'asse x, che è la direzione y della quantità v_p . Ogni sezione trasversale a def. arbitraria rimane l all'asse deformato.

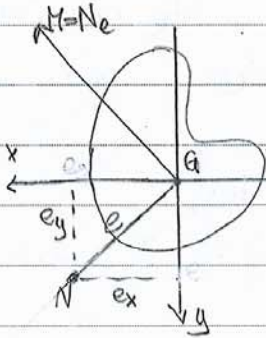
Le sezioni rimangono l
(all'asse che è φ_x)

5g.) Il caso composto di sforzo normale eccentrico. + Regione del modello.

La sollecitazione di sforzo normale eccentrico si ha quando lo sforzo normale è applicato in un punto \neq dal BARICENTRO.
La distanza del punto di applicazione dal baricentro è detta ECCENTRICITÀ.

è costituita da una FORZA UNIASSIALE N , avente ECCENTRICITÀ (e_y) rispetto all'asse x ed

\Rightarrow " e_x " " " y .
" $e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}$ rispetto all'asse baricentrico



FORZA EQUIVALENTE allo STATO di SOLLECITAZIONE EUSTAZIARIA \rightarrow costituito dallo SFORZO NORMALE CENTRATO N , e dalle FLESSIONI PURE:

$$M_x = N \cdot e_y$$

$$M_y = -N \cdot e_x \rightarrow \text{dalla regola della mano dx.}$$

Σ dei campi TENSIONALI UNIASSIALI che competono allo SFORZO NORMALE ECCENTRICO:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot x$$

sostituendo M_x e M_y :

$$\Rightarrow \sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e_y}{I_x} \cdot y + \frac{N \cdot e_x}{I_y} \cdot x$$

esprimo i momenti d'inerzia (I_x e I_y) con prodotto tra i RAGGI CENTRALI di INERZIA e l'AREA della sezione:

$$\Rightarrow \sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e_y}{\rho_x^2 \cdot A} y + \frac{N \cdot e_x}{\rho_y^2 \cdot A} x \rightarrow$$

Al variare delle eccentricità e_x, e_y si evidenziano 3 casi:

1) Se $e_x = e_y = 0 \rightarrow$ SFORZO NORMALE CENTRATO.
 L'asse neutro degenera nella retta impropria.

2a) Se $e_x \neq 0 \rightarrow$ SFORZO NORMALE + FLESSIONE RETTA.
 L'asse neutro è // all'asse x :
 $M_x \neq 0; M_y = -N e_x = 0 \Rightarrow \sigma_z = 0 \Rightarrow 1 + \frac{N e_x}{\rho_x^2} \cdot y = 0 \Rightarrow y = -\frac{\rho_x^2}{e_x}$

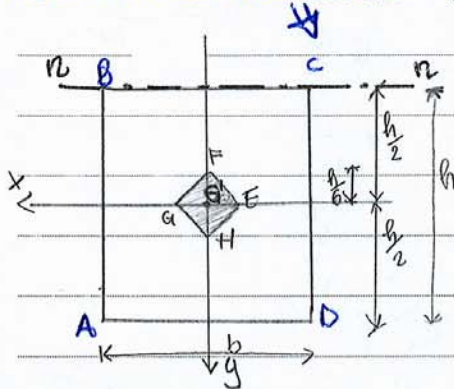
2b) Se $e_y \neq 0 \rightarrow$ SFORZO NORMALE + FLESSIONE RETTA.
 L'asse neutro è // all'asse y :
 $M_y \neq 0; M_x = 0$
 $\sigma_z = 0 \Rightarrow \sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N e_y}{\rho_y^2} \cdot x + \frac{M_x}{\rho_x^2} \cdot y = 0 \Rightarrow \frac{e_y}{\rho_y^2} \cdot x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\rho_y^2}{e_y}$

3° CASO: FLESSIONE DEVIATA (58.) \rightarrow

REGIONE DI NOCCIOLIO:

NOCCIOLIO CENTRALE D'INERZIA: Area entro la quale deve cadere N , affinché A.N. non intersechi la sezione della trave.

° Per la sezione rettangolare si assume l'A.N. coincidente con la retta di E dal lato BC .



$n-n$ coincide con BC

$\Rightarrow e_x = 0 \Rightarrow n-n: y = -\frac{\rho_x^2}{e_y}$

$\rho_x^2 = \frac{I_{x_G x_G}}{A} = \frac{\frac{1}{12} b h^3}{b h} = \frac{h^2}{12}$

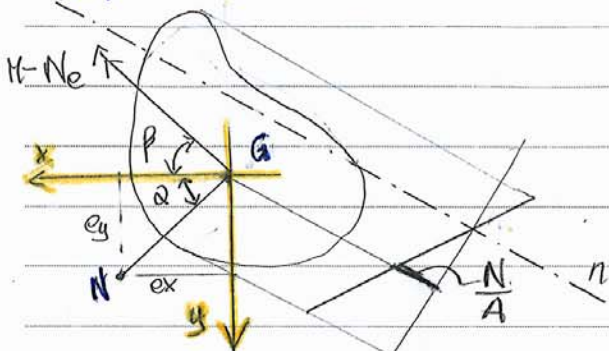
essendo $I_{x_G x_G} = \frac{1}{12} b h^3$ ($I_{x_G x_G} = \rho_x^2 \cdot A$)

\rightarrow da $y = -\frac{\rho_x^2}{e_y}$ si ha: $e_y = -\frac{\rho_x^2}{y}$

$y = -\frac{h}{2}$: DISTANZA $n-n$; BARICENTRO.

$e_y = +\frac{\frac{h^2}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{h}{6} \Rightarrow$

50) IL CASO COMPOSTO DI FLESSIONE DEVIATA.



Alle variate di e_x, e_y si possono osservare 3 casi. Uno tra questi è il caso di FLESSIONE DEVIATA.

3° caso: $\frac{e_y}{e_x} = \tan \alpha; e_x \rightarrow \infty; e_y \rightarrow \infty \Rightarrow$ FLESSIONE DEVIATA

in cui l'eq. generale è:

$$\frac{y}{p_x} \tan \alpha + \frac{x}{p_y} = 0$$

Rappresenta una retta BARICENTRICA.

- Presenta delle sole FLESSIONI RETTE M_x e M_y .
- A.N. è BARICENTRICO (ma non è \perp a A.S., in generale).

• L'ASSE DI SOLLECITAZIONE (A.S.) è la retta NG che ha equaz.: $y = x \tan \alpha$

• se $p_x = p_y \Rightarrow$ A.N. \perp A.S. e l'A.N. passa per il BARICENTRO
 $\Rightarrow \underline{I_x = I_y} \rightarrow$ si parla della: SEZIONE GIROSCOPICA

l'A.N. si muove //mente all'asse di pressione.

• può essere rappresentato dall'eq.:

$$y = -\frac{1}{\tan \alpha} \cdot \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2 x - \frac{p_x}{e_y} \quad (\perp \text{ a A.S.})$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dz} = \frac{1}{2E} \int_A \left(\frac{N^2}{A^2} + \frac{M_x^2}{I_x^2} \cdot y^2 + \frac{M_y^2}{I_y^2} \cdot x^2 + \frac{2NM_x}{AI_x} \cdot y - \frac{2NM_y}{AI_y} \cdot x - \frac{2M_x M_y}{I_x I_y} \cdot xy \right) dA$$

integro \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{dU}{dz} = \frac{1}{2} \left[\frac{N^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} \right] + \frac{1}{E} \left[\frac{NM_x}{AI_x} \cdot \int y dA - \frac{NM_y}{AI_y} \cdot \int x dA - \frac{M_x M_y}{I_x I_y} \int xy dA \right]$$

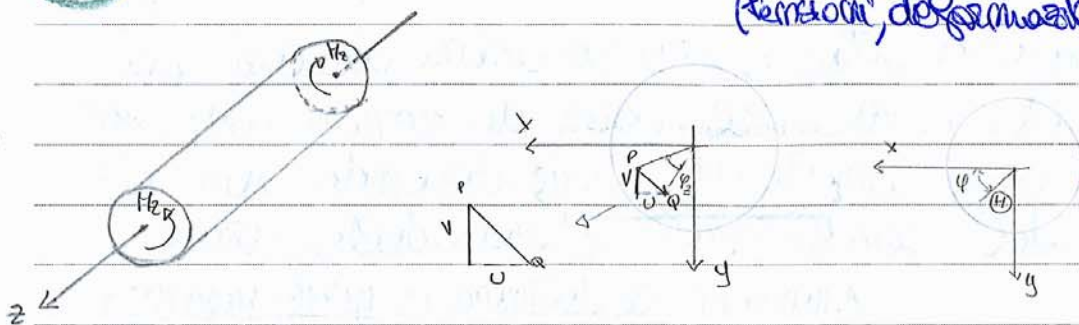
$\{xy = \text{ASSI CENTRALI}\} \Rightarrow$ si annullano i termini statici, così con quello centratura d'INERZIA, e \Rightarrow si annulla la II^a parte dell'eq. 9^a sopra.

$$\Rightarrow \frac{dU}{dz} = \frac{1}{2} \left[\frac{N^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} \right]$$

che prova l'ORTOGONALITÀ ENERGETICA delle 3 CARATTERISTICHE della SOLLECITAZIONE N, M_x, M_y .

I Lavori mutui sono nulli \Rightarrow ORTOGONALITÀ delle FORZE.

55. La TORSIONE delle TRAVE di SEZIONE CIRCOLARE.
(Tensioni, deformazioni, lavoro)



Si consideri una TRAVE di SEZIONE CIRCOLARE, sottoposta alle basi all'azione di 2 MOMENTI TORCENTI M_z , UGUALI e di VERSO OPPOSTO. ~~Si~~ con ipotesi si assuma R ogni sezione trasversale tutti rigidamente intorno all'asse longitudinale (z) restando nel contempo piana. L'HP. riguarda il campo degli spostamenti. \Rightarrow

$$\Rightarrow \begin{cases} u = -\varphi_z \cdot y \\ v = \varphi_z \cdot x \\ w = 0 \end{cases} \quad \text{con } \varphi_z = \text{ANGOLO DI ROTAZIONE INFINITESIMA.} \\ \text{e } \varphi_z = \textcircled{H} \cdot z \quad \text{(omogeneo) } \text{e l'ANGOLO UNITARIO DI TORSIONE.}$$

\Rightarrow sostituisco:
$$\begin{cases} u = -\textcircled{H} z \cdot y \\ v = \textcircled{H} z \cdot x \\ w = 0 \end{cases}$$

~~Da qui ora è possibile calcolare il campo degli spostamenti (u, v, w) e da qui derivando il campo delle DEFORMAZIONI~~

Da tale campo degli spostamenti si può arrivare al campo delle DEFORMAZIONI.

$$\cdot \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \overbrace{(-\textcircled{H} z \cdot y)}^{\text{costante rispetto a } x \Rightarrow = 0} = 0 \quad \cdot \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \overbrace{(\textcircled{H} z \cdot x)}^{\text{cost.}} = 0 \quad \cdot \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\cdot \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = -\textcircled{H} z + \textcircled{H} z = 0 \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \textcircled{-\textcircled{H} y} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = \textcircled{\textcircled{H} x}$$

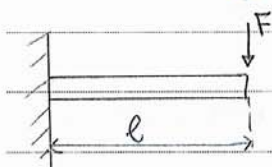
\rightarrow Applicando l'eq. COSTITUTIVA ELASTICA si ottiene il campo delle TENSIONI: $\{ \sigma \} = [H]^{-1} \{ \sigma \} \Rightarrow \{ \sigma \} = [H] \{ \epsilon \}$
 $\tau_{zx} = -G \textcircled{H} y; \tau_{zy} = +G \textcircled{H} x$

5i) L'eq. differenziale della linea elastica. Illustrare con esempio.

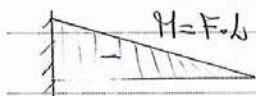
Il solido di S.N. si può estendere a:

- Travi ad asse non rettilineo
- " a sezione variabile
- " caricate sulle sup. laterali.

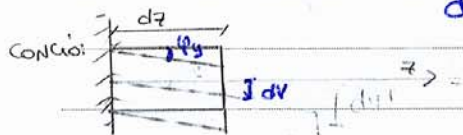
X Le Travi ad asse rettilineo e a sezione simmetrica rispetto all'asse y , sollecitate nel piano di simmetria xoz , è possibile ottenere l'Eq. DIFFERENZIALE della funz. incognita $V(z)$ detta FRECCIA, trascurando i contributi di deformazione dovuti al taglio (poiché x estraneo e nelle parti) con molto inferiori rispetto ai contributi di deformazione dovuti al MOMENTO FLETTENTE)



Considero una trave di lunghezza l , caricata sull'estremità da una forza F concentrata.



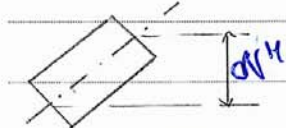
$dV^T = \rho_y \cdot dz \rightarrow$ incrementi di spostamento verticale dovuti al taglio.



$V^T(l) = \rho_y \cdot l$ Abbassamento all'estremità dovuto al taglio



Incremento di spostamento verticale dovuto al momento flettente:



$$dV^M = -\rho_x \cdot dz$$

Derivandolo rispetto a z ottengo:

$$\frac{d^2 V^M}{dz^2} = -\frac{d\rho_x}{dz}$$

Ricordando che $d\rho_x = \frac{dM}{R_x} = \chi_x \cdot dz$ e $\chi_x = \frac{M}{EI_x}$ ottengo:

$$\frac{d^2 V^M}{dz^2} = -\frac{M}{EI_x}$$

dalla quale ricavo l'eq. DIFFERENZIALE della LINEA ELASTICA:

$$\frac{dV}{dz^2} = -\frac{M}{EI_x}$$

PRIMA INTEGRAZIONE rispetto a z: (integrale $\frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{F(l-z)}{EI}$ e d'altro $v'(z)$)

$$v'(z) = \int \frac{F(l-z)}{EI} \cdot dz = \int \frac{Fl}{EI} dz - \int \frac{Fz}{EI} \cdot dz = -\frac{Fz^2}{2EI} + \frac{Flz}{EI} + c_1$$

2° INTEGRAZIONE:

$$v(z) = -\frac{Fz^3}{6EI} + \frac{Flz^2}{2EI} + c_1 z + c_2$$

- c_1 e c_2 sono entrambe NULLE siccome $v(0) = v'(0) = 0$

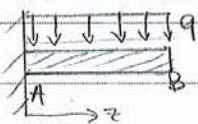
FRECCIA all'ESTREMITÀ B:

$$v(l) = -\frac{Fl^3}{6EI} + \frac{Fl^3}{2EI} = \frac{Fl^3}{3EI}$$

ROTAZIONE all'ESTREMITÀ B:

$$\varphi_B = -v'(l) = +\frac{Fl^2}{2EI} - \frac{Fl^2}{EI} = -\frac{Fl^2}{2EI}$$

ES. ①:



L'eq. diff. sarà:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{q(l-z)}{2EI} \rightarrow l^2 + z^2 - 2lz$$

1° INTEGRAZIONE:

$$v'(z) = \frac{q}{2EI} \left(\frac{z^3}{3} - lz^2 + l^2 z + c_1 \right)$$

$$2^{\circ} \quad v(z) = \frac{q}{2EI} \left(\frac{z^4}{12} - l \frac{z^3}{3} + \frac{l^2 z^2}{2} + c_1 z + c_2 \right)$$

le cost. c_1 e c_2 le trovo dalle eq. al contorno

$$v(0) = v'(0) = 0$$

che mi daranno la FRECCIA e la ROTAZIONE:

$$v_B = \frac{ql^4}{8EI}$$

$$\varphi_B = -\frac{ql^3}{6EI}$$

CAMPO TENSIONALE \rightarrow si ottiene applicando la LEGGE COSTITUTIVA ELASTICA

$$\{\epsilon\} = [H]^{-1} \{\sigma\}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{xz} \Rightarrow \tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} = G \cdot (H) \left[\frac{\partial w}{\partial x} - (y - y_0) \right] \\ \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{yz} \Rightarrow \tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} = G \cdot (H) \left[\frac{\partial w}{\partial y} + (x - x_0) \right] \\ \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

Il campo unitario di torsione si può quindi esprimere in genere così:

$$(H) = \frac{M_z}{G \cdot I_t} \rightarrow \begin{cases} \text{fattore di rigidità torsionale} \leq I_p \\ I_t = \int_A \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial w}{\partial y} - y \frac{\partial w}{\partial x} \right) dA \end{cases}$$

\Rightarrow conoscendo (H) si possono trovare i vettori tensioni:

$$\tau_{xz} = G \cdot \frac{M_z}{I_t} \left[\frac{\partial w}{\partial x} - (y - y_0) \right]$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \frac{M_z}{I_t} \left[\frac{\partial w}{\partial y} + (x - x_0) \right]$$

con le T.H. di CLAUDEYRON trova il LAURO ELEMENTARE di DEFORMAZIONI:

$$dL = \frac{1}{2} M_z \cdot G \cdot (H) dz$$

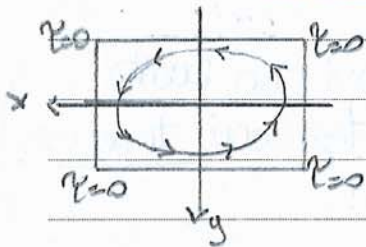
essendo $(H) = \frac{M_z}{G \cdot I_t}$

$$\Rightarrow \text{dunque: } \boxed{\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{I_t}}$$

5m) Cosa si intende per analogia idrodinamica.

L'Analogia Idrodinamica correla il comportamento torsionale di una TRAVE (poco intuitivo) ad un modello + intuitivo: l'ANALOGIA IDRODINAMICA.

L'andamento delle tensioni tangenziali di un cerchio di sezione qualunque viene associato alla velocità di un fluido in rotazione all'interno di una tazzina (recipiente cilindrico) in la stessa sezione trasversale della TRAVE sottoposta alla sollecitazione di torsione.



Conclusione: le linee di flusso delle τ coincidono con le " di velocità del liquido e risulta $\tau_s = 0$ in vicinanza degli spigoli.

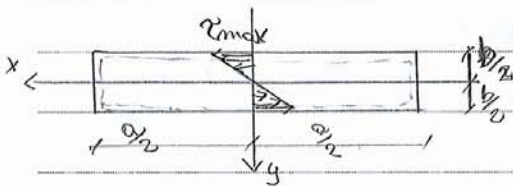
• Vi sono incrementi delle tensioni in prossimità di discontinuità locali della sezione: intagli o fori.

→ tensioni elevate in corrispondenza degli spigoli interni (rientranti) → x ELEVATE CONCENTRAZIONI DI TENSIONI ELEVATE o spreco di MATERIALI → gli spigoli vengono arrotondati.

(Inoltre le linee di flusso del liquido si addensano in corrispondenza degli spigoli rientranti e si diradano in " degli " sporgenti → con conseguente aumento o diminuzione della velocità del fluido.

Andamento completamente \neq delle tensioni tangenziali nei casi di sezioni APERTE o CUISE.

Nel caso di sezioni rettangolari sottili ($a/b \rightarrow \infty$) le linee di spinta del vettore $\{\tau_z\}$ son curve chiuse con estremi // ai lati (\rightarrow) maggiori, tali fatti invertano il loro corso di mediazione. tenimoci cost K il vettore $\{\tau_z\}$ presenta 2 componenti τ_{zx} .



$$\tau_{zx} = -\frac{6Mz}{ab^3} y$$

Essendo per i valori in tabella

relativi ad $\frac{a}{b}$ $\begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow$ si ha:

$$\tau_{max} = \frac{3Mz}{ab^2} \quad e \quad I_t = \frac{1}{8} ab^3$$

e si può scrivere: $\tau_{max} = \frac{Mz}{I_t} b$.