



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1341

ANNO: 2014

# A P P U N T I

STUDENTE: Markov

MATERIA: Fondamenti di Meccanica Strutturale + Eserc.,  
Prof. Goglio

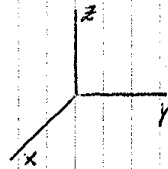
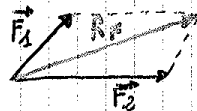
Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

forza [N] vettore  $\begin{cases} \text{modulo} \\ \text{direzione} \\ \text{verso} \end{cases}$

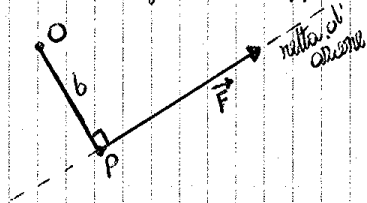
risultante



$R_{Fx} = \sum F_x, R_{Fy} = \sum F_y, R_{Fz} = \sum F_z$

momento di una forza  $\vec{M}_O = (P-O) \wedge \vec{F}$  vettore libero (non applicato)  
 $\uparrow$  polo  $\uparrow$  punto di applicazione

momento di una forza (rappresentazione 3D)



momento risultante

$\vec{R}_{M_O} = \sum_i (\vec{M}_{O_i}; \vec{C}_i) = \sum_i ((P_i - O) \wedge \vec{F}_i; \vec{C}_i)$

$\uparrow$  momenti puri  
 $\uparrow$  dovuto a  $\vec{F}_i$  in  $P_i$

traslazione  $\rightarrow$  variamo il polo O, scegliamo O'

$$\begin{aligned} \vec{R}_{M_{O'}} &= \sum_i ((P_i - O') \wedge \vec{F}_i + \vec{C}_i) = \sum_i (((P_i - O) + (O - O')) \wedge \vec{F}_i + \vec{C}_i) = \sum_i ((P_i - O) \wedge \vec{F}_i + (O - O') \wedge \vec{F}_i + \vec{C}_i) \\ &= \sum_i ((P_i - O) \wedge \vec{F}_i + \vec{C}_i) + (O - O') \wedge \sum_i \vec{F}_i \end{aligned}$$

quindi  $\vec{R}_{M_{O'}} = \vec{R}_{M_O} + (O - O') \wedge \vec{R}_F$

osservazione: se  $\vec{R}_F = \vec{0}$  allora  $\vec{R}_{M_{O'}} = \vec{R}_{M_O} \rightarrow$  e' indifferente il polo scelto

equilibrio alla traslazione:  $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$

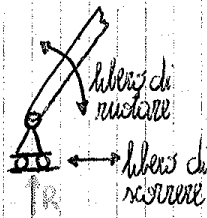
alla rotazione:  $\sum \vec{M}_{O_i} = \vec{0} = \sum ((P_i - O) \wedge \vec{F}_i + \vec{C}_i) = \vec{0}$

nello spazio 3+3 equazioni scalari  
 nel piano 2+1 equazioni scalari

$\uparrow$  eq. alla traslazione  $\uparrow$  eq. alla rotazione

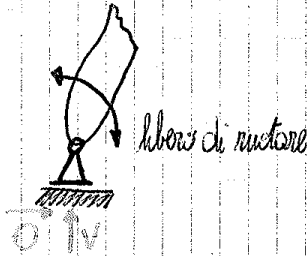
vincoli fondamentali (2D):

① appoggio (carrello)



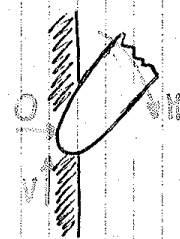
1 reazione, bloccato il movimento trasversale.

② cerniera



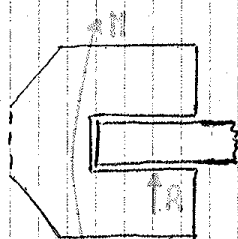
2 reazioni, bloccato il movimento verticale e orizzontale.

③ incastro



3 reazioni, bloccati tutti i movimenti.

④ coppia prismatica



2 reazioni, bloccato il movimento verticale e la rotazione.

reazioni: incognite del problema

grado di iperstaticità (in 2D)

$$h = v - 3m$$

$v$  → numero di reazioni vincolari

$m$  → numero di elementi che compongono il sistema

$$v = 3i + 2(c+b) + a$$

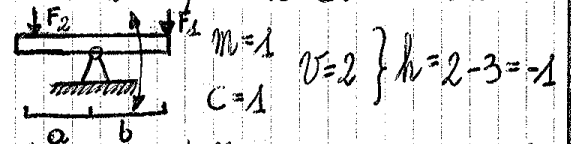
$i$  = incastri

$c$  = cerniere

$b$  = coppie prismatiche

$a$  = appoggi

tre casi:  $h < 0$  SOTTO VINCOLATO: sistema ipostatico o labile (meccanismi) in generale non è possibile l'equilibrio, è tuttavia possibile se i carichi rispettano determinate condizioni.

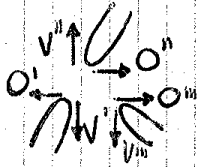
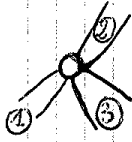


L'equilibrio è possibile se mette delle forze in maniera che i loro prodotti per le distanze dal fulcro siano uguali:  $F_1 a = F_2 b$

-  $h = 0$  ISOSTATICO: tanti vincoli quanti sono necessari all'equilibrio.

-  $h > 0$  IPERSTATICO: non risolvibile con le sole equazioni della statica.

situazione omologa: cerniera multipla (doppia, tripla)



Quando andiamo a vedere le componenti di reazioni esercitate sui vari elementi da queste cerniere, anche in questo caso non posso sfruttare notatamente il principio di azione-reazione. In questi casi devo di nuovo distinguere.  
In generale: gradi della cerniera =  $n \text{ elementi} - 1$

Si possono scrivere in generale 3 equazioni di equilibrio per ogni elemento.

Quali scegliere?

(A) 2 equilibri alla traslazione + 1 equilibrio alla rotazione

(B) 2 " rotazione ( $O_1, O_2$ ) + 1 " traslazione

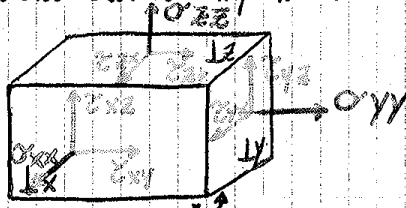
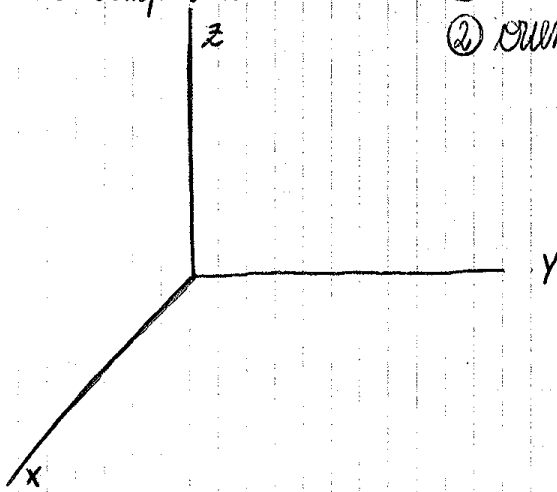
NOTA: una volta scelti i poli, l'equilibrio traslazionale non deve essere scelto lungo la perpendicolare a  $O_1$  e  $O_2$ .

(C) 3 " rotazione ( $O_1, O_2, O_3$  tre poli non allineati)

$\tau$  azione tangenziale non presente nei fluidi (in quiete). Misurata in MPa nella pratica (N/mm<sup>2</sup>)

In un riferimento cartesiano sono necessarie due informazioni per identificare una componente di tensione

- ① orientazione superficiale (normale  $\vec{n}$ )
- ② orientazione della componente

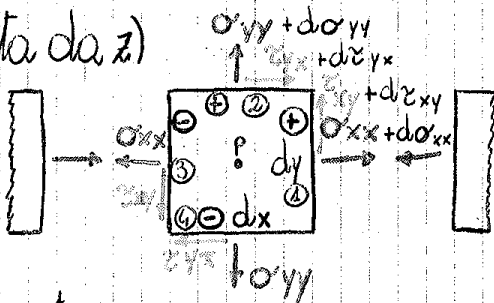
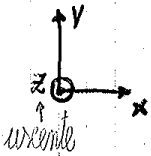


rotazione a 2 pedice  
 identifica superficie  
 identifica componente

3 componenti normali  $\sigma_{xx}$   
 $\sigma_{yy}$   
 $\sigma_{zz}$

6 componenti tangenziali  $\tau_{xy}$   $\tau_{xz}$   $\tau_{yz}$   
 $\tau_{yx}$   $\tau_{zx}$   $\tau_{zy}$

plano xy (vista da z)



faccia positiva:  $\vec{n}$  concorde con l'asse  
 faccia negativa:  $\vec{n}$  discorde  
 $\sigma_i$ ;  $\tau_{ij}$  variabili con continuità, quindi  
 avrà degli incrementi

equilibrio alla rotazione

$$\vec{P}: \underbrace{(\tau_{xy} + d\tau_{xy}) dy dz \frac{dx}{2}}_{①} - \underbrace{(\tau_{yx} + d\tau_{yx}) dx dz \frac{dy}{2}}_{②} + \underbrace{\tau_{xy} dy dz \frac{dx}{2}}_{③} - \underbrace{\tau_{yx} dx dz \frac{dy}{2}}_{④} = 0$$

trascurare i termini infinitesimi

$$2\tau_{xy} - 2\tau_{yx} = 0 \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$dA_x, dA_y, dA_z$  forze negative (normali uscenti discordi rispetto a  $x, y, z$ )

$$\begin{cases} f_{n_x} - \sigma_{xx} n_x - \tau_{xy} n_y - \tau_{xz} n_z = 0 \\ f_{n_y} - \tau_{xy} n_x - \sigma_{yy} n_y - \tau_{yz} n_z = 0 \\ f_{n_z} - \tau_{zx} n_x - \tau_{zy} n_y - \sigma_{zz} n_z = 0 \end{cases}$$

$$\{f\} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

in forma compatta

$$\{f\} = [\sigma] \{n\}$$

↑  
vettore di  
tensione su  
dA

↑  
tensore della  
tensione

↑  
vettore normale  
a dA

$$[\sigma] = [\{f_x\} \{f_y\} \{f_z\}]$$

$[\sigma] \rightarrow$  definisce completamente lo stato di tensione in un punto P.

$\{f\} \rightarrow$  definisce lo stato di tensione sulla faccia  $\perp \vec{n}$  normale per P.

$[\sigma]$ : 3x3 simmetrica.  
sulla diagonale principale  $\sigma$   
fuori dalla diagonale  $\tau$   
6 termini diversi

Osservazione: in generale  $\{f\}$  non parallelo a  $\{n\}$ . Esistono però casi speciali in cui lo sono:

$$[A] \{v\} = \lambda \{v\}$$

$\lambda$  autovalore

$\{v\}$  autovettore

$$[\sigma] \{v\} = \lambda \{v\}$$

$$([\sigma] - \lambda [I]) \{v\} = 0$$

sistema lineare omogeneo

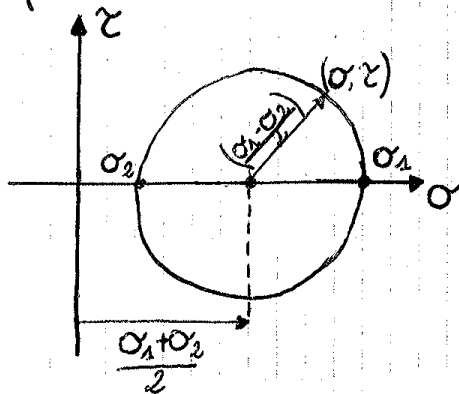
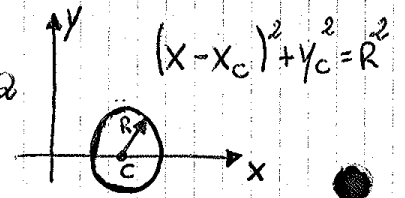
soluzioni non banali se  $|[\sigma] - \lambda [I]| = 0$

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$[\sigma]$  reale, simmetrica  $\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  reali  
 $\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}$  ortogonali

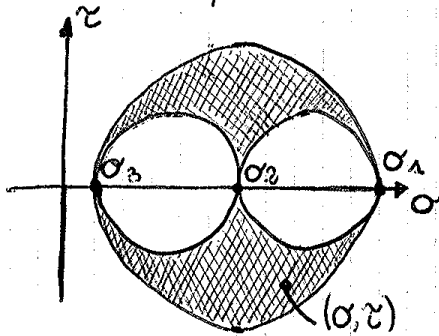
$$\begin{cases} \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \cos^2 2\alpha \\ \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \sin^2 2\alpha \end{cases}$$

identifichiamo una circonferenza



cerchio di Mohr

Abbiamo complessivamente 3 cerchi (uno per ogni asse rispetto al quale si ruota)



$\sigma_2$  non è sempre al centro

per un piano genericamente inclinato (non del fascio di piani orientati come  $p_1, p_2$ )

$\sigma, \tau$  sta all'interno del cerchio  $(\sigma_1, \sigma_3)$

all'esterno dei cerchi  $(\sigma_1, \sigma_2)$  e  $(\sigma_2, \sigma_3)$

→ su nessun piano agisce una  $\sigma > \sigma_1$

su nessun piano agisce una  $\sigma < \sigma_3$

su nessun piano agisce una  $|\tau| > \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

costruzione diretta dei cerchi (senza risolvere  $[\sigma] \{v\} = \lambda \{v\}$ ) è possibile se:

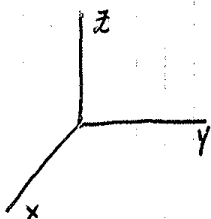
- è noto una direzione principale e la relativa  $\sigma$ ;

- sono note  $\sigma, \tau$  su due piani  $\perp$  fra loro e appartenenti al fascio che ha per asse la direzione principale nota.

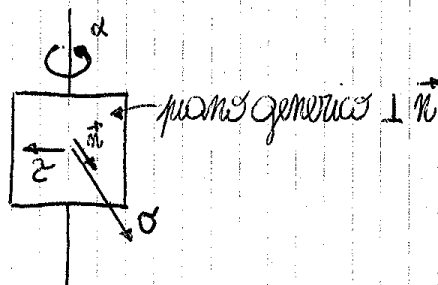
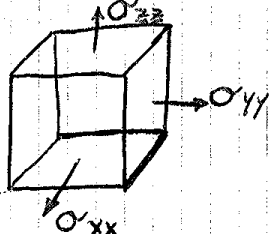
sono necessarie entrambe le condizioni

es. z principale

$\sigma_{zz} = \sigma_c$  nome principale



$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

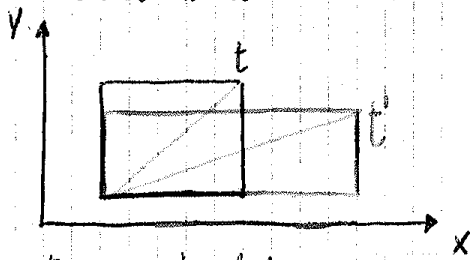


piano generico  $\perp n$



meto deformativo

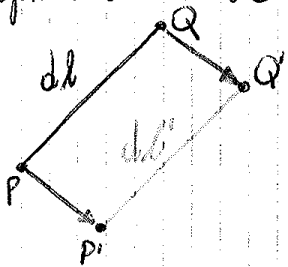
dilatazione



le orientazioni dei lati non variano,  
variano le lunghezze

direzione: diagonali

definizione della dilatazione



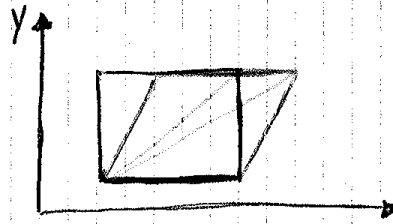
$$u = l' - l$$

$$\frac{l' - l}{l} = \frac{u}{l}$$



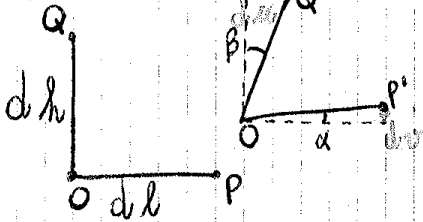
pono in termini  
infinitesimi

scorrimento



le orientazioni dei lati variano,  
non variano le lunghezze.

definizione dello scorrimento



spostamenti piccoli  
(rispetto alle dimensioni  
dell'oggetto)

$$\alpha \approx \frac{du}{dl}$$

$$\beta \approx \frac{dv}{dh}$$

$$\gamma = \alpha + \beta$$

$$\gamma = \frac{du}{dl} + \frac{dv}{dh}$$

$$du = dl' - dl$$

$$\frac{dl' - dl}{dl} \frac{du}{dl} = \epsilon$$

- variazione relativa lunghezza
- valore puntuale

NOTA:  $\epsilon, \gamma$  numeri puri  
(adimensionati)

$$[J] = \frac{1}{2} [J] + \frac{1}{2} [J] + \frac{1}{2} [J]^T - \frac{1}{2} [J]^T$$

$$[E] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

matrice simmetrica 3x3

diagonale: dilatazioni  
fuori diagonale: scorrimenti 1/2

tenore della deformazione, le componenti sono indicate così  
oppure

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \epsilon_{yy} & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

la parte rimanente è la relazione rigida

$$\frac{1}{2} [J] - \frac{1}{2} [J]^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix} = [\Omega]$$

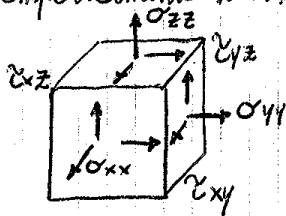
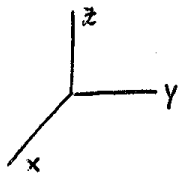
matrice antisimmetrica 3x3

distinzione

$$\{du\} = [J] \{dx\} \text{ include la rotazione rigida}$$

$$\{du\} = [E] \{dx\} \text{ esclude la rotazione rigida, da considerare soltanto la deformazione}$$

Per descrivere il comportamento elastico del materiale (in sé)



applichiamo componenti di tensione (separatamente, poi simultaneamente)  
rileviamo le componenti di deformazione che si producono

ad esempio soltanto  $\sigma_{xx}$

ovvero  $\epsilon_{xx}$  di  $\sigma_{xx}$

$\epsilon_{yy}$  di  $\sigma_{yy}$

$\epsilon_{zz}$  di  $\sigma_{zz}$

$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx}$

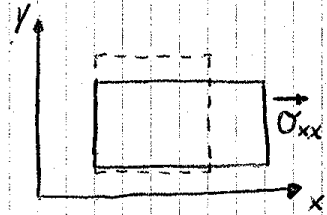
nono uguali oparie all'istropise

$\epsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx}$

$\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx}$

E: modulo elastico (normale), modulo di Young

$\nu$ : coefficiente di contrazione trasversale, coefficiente di Poisson



$[E] = \frac{\text{FORZA}}{\text{AREA}} = \text{MPa}$

nei metalli  $E: 10^4 - 10^5 \text{ MPa}$   
 $\nu \approx 0,3$

ora soltanto  $\tau_{xy}$



$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = 0$

$\gamma_{xy} \propto \tau_{xy}$

$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$

G: modulo elastico (tangenziale)

$[G] = \frac{\text{FORZA}}{\text{AREA}} = \text{MPa}$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Per sovrapposizione effetti

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} \sigma_{zz} + \alpha(T-T_0) \\ \epsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} + \frac{1}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} \sigma_{zz} + \alpha(T-T_0) \\ \epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy} + \frac{1}{E} \sigma_{zz} + \alpha(T-T_0) \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \\ \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \end{cases}$$

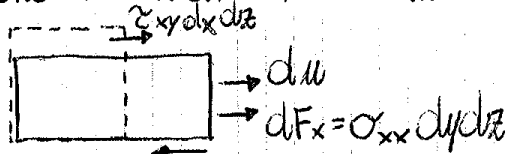
legge elastica (di Hooke)

aggiungo un termine legato alla temperatura

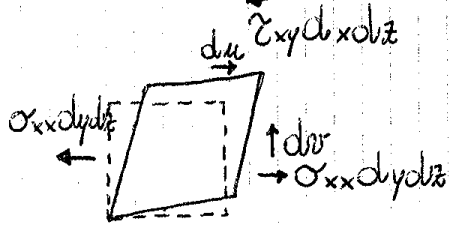
$\alpha$ : coeff. di dilatazione termica (lineare)  
 $[\alpha] = 1/K$

e agiscono simultaneamente tutte le  $\sigma_x$  le  $\tau$

ta:



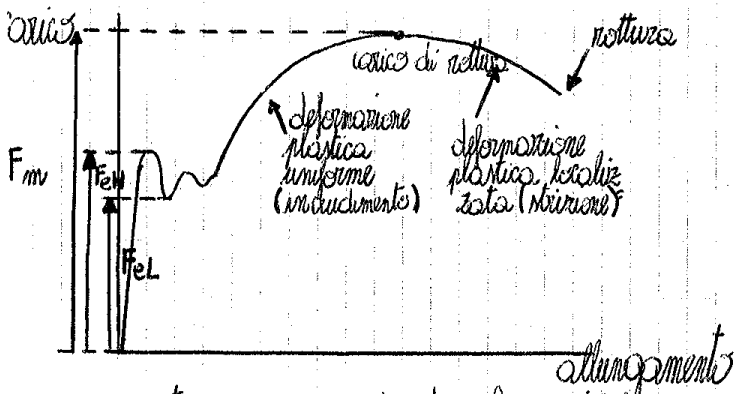
$\tau_{xy}$  non compie lavoro con  $du$   
prodotto da  $\sigma_{xx}$



$\sigma_{xx}$  non compie lavoro con  $du$   
prodotto da  $\tau_{xy}$

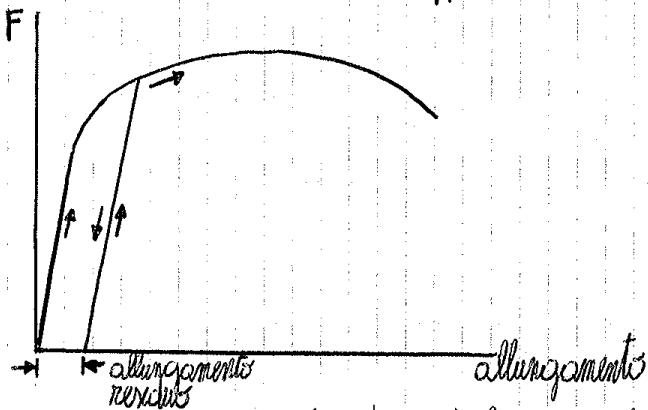
insieme: 
$$dE = \frac{1}{2} \left[ \sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \epsilon_{yy} + \sigma_{zz} \epsilon_{zz} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz} \right]$$

materiali duttili (con e senza incrudimento)



incrudimento: superiore ( $F_{eH}$ ) ed inferiore ( $F_{eL}$ )  
 plasticizzazione uniforme: incrudimento, picco ( $F_m$ )

materiali duttili (rimozione e riapplicazione del carico)



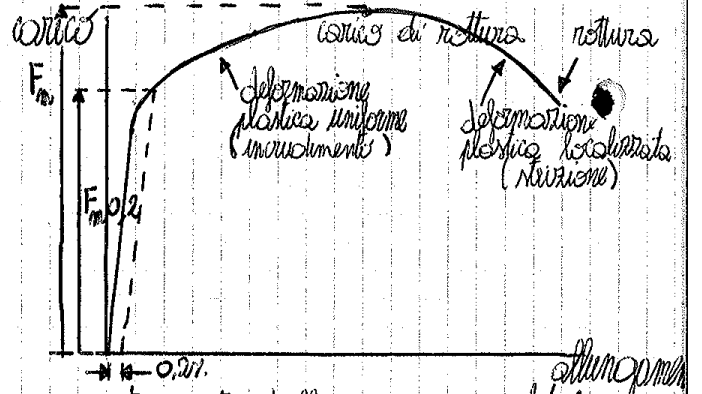
se il carico viene rimosso durante la fase plastica:  
 - tratto relativo all'elasticità lineare e parallelo al tratto elastico

se il carico viene riapplicato:  
 - stesso segmento fino al livello massimo di carico raggiunto in precedenza  
 - successivamente, ripresa della curva relativa alla fase plastica, come se lo scarico non fosse avvenuto

controindicazioni all'impiego dei materiali fragili: - assenza di "riserva di resistenza" in caso di sovraccarico accidentale

- impossibilità di subire le deformazioni plastiche derivate ad operazioni tecnologiche

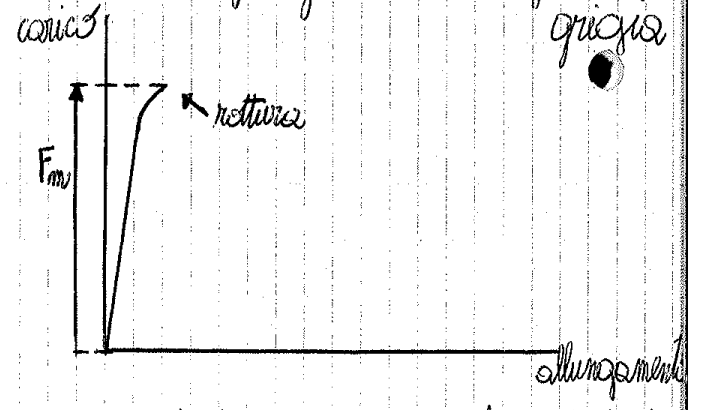
materiali duttili (con e senza incrudimento)



restamento dalla proporzionalità ( $F_{p0.2}$ )  
 plasticizzazione uniforme: incrudimento, picco

materiali fragili

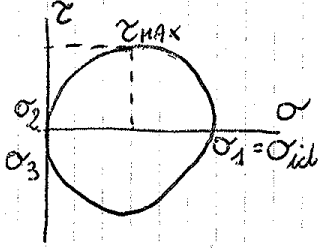
es. ghisa  
 grigio



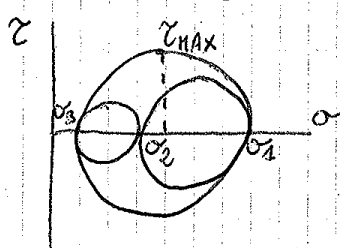
plasticizzazione assente o molto limitata, immediata rottura

assenza di strizione

monodimensionale

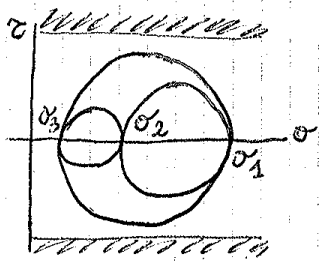


tridimensionale



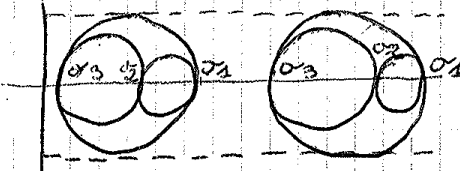
cedimento quando  $zeta_{MAX}$  raggiunge valore limite

$$\sigma_{id} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$



osservazioni:

- $\sigma_2$  non influisce
- i valori  $\sigma_1, \sigma_3$  non contano, è la distanza che conta.



aggiungendo una costante, (la continua applicazione di tensioni costanti su materiali duttili nel corso del tempo, frattura e non plasticizzazione)

ipotesi alternativa per materiali duttili

deformazione plastica quando l'energia di distorsione raggiunge un valore limite (del materiale).

basata sull'energia di distorsione  
Energia potenziale elastica  $E = \frac{1}{2}(\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3)$  è la somma di due contributi:  
- energia corrispondente alla variazione di volume,  
- energia corrispondente alla variazione di forma.  
L'energia di distorsione è questo secondo contributo

$$\sigma_{id} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

tutte le  $\sigma$  considerate  
incroci, contano solo le differenze tra le tensioni

IPOTESI

- materiali fragili
- materiali duttili

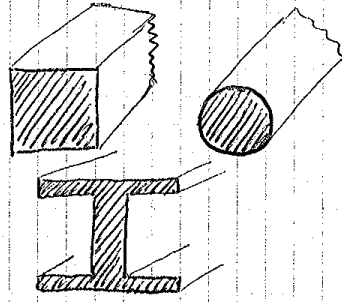
$$\sigma_{id} = \sigma_1$$

$$\sigma_{id} = \sigma_1 - \sigma_3$$

oppure  $\sigma_{id} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$

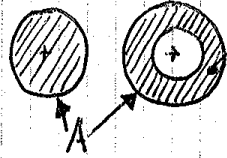
# geometria delle aree

metico: sezione degli elementi strutturali (travi, ecc) di varie forme



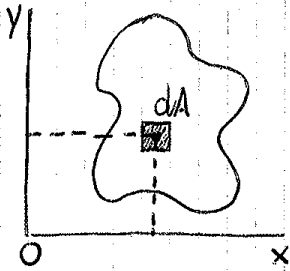
tenuti in conto da parametri geometrici approssi

prima osservazione: a pari area



materiale più lontano dal centro

la coordinata che compare (x,y) è alle prime potenze



$$\text{Area } A = \int_A dA$$

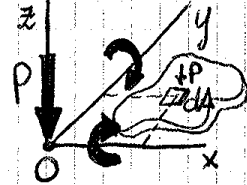
momenti di primo ordine = momenti statici

$$S_x = \int_A y dA$$

$$S_y = \int_A x dA$$

fermano la posizione del baricentro

spiegazione



• forza soggetta a peso distribuito P

• vogliamo applicare il peso totale sull'asse centrale

-) riduzione a 0

-)  $\xi = R_{H0}/R_F$  \*

$$\text{risultante } P = \int_A p dA = pA$$

momento risultante: componem

ti  $M_x, M_y$

$$M_x = \int_A y p dA = p \int_A y dA = p S_y$$

$$M_y = \int_A x p dA = p \int_A x dA = p S_x$$

$$* \frac{p S_x}{p A} = y_G$$

$$\frac{p S_y}{p A} = x_G$$

baricentro

momenti di secondo ordine = momenti di inerzia e centrifughi

$$J_{xx} = \int_A y^2 dA \quad J_{yy} = \int_A x^2 dA$$

$$J_{xy} = \int_A xy dA$$

momento della quantità di moto

$$\{K\} = [J] \{\omega\}$$

↑ (battere) velocità angolare  
↑ (battere) momento  
↑ (battere) tensori di inerzia  
↓ di massa

distinzione → area (invece di massa)

2D invece di 3D

calcoliamo

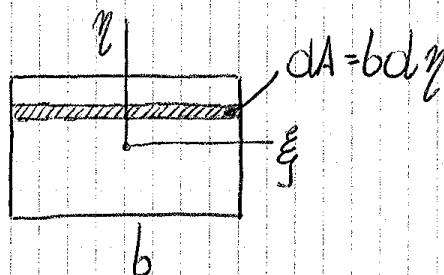
$$A = \sum_i A_i \quad S_x = \sum_i y_i A_i \quad S_y = \sum_i x_i A_i \quad J_{xx} = \sum_i (y_i^2 A_i + \underbrace{J_{\xi\xi\xi i}}_{\text{momento locale}})$$

$$J_{yy} = \sum_i (x_i^2 A_i + \underbrace{J_{\eta\eta\eta i}}_{\text{momento locale}})$$

$$J_{xy} = \sum_i (x_i y_i A_i + J_{\xi\eta\xi i})$$

esempio di momento di inerzia locale

$$J_{\xi\xi\xi} = \int_A \eta^2 dA = b \int_{-h/2}^{h/2} \eta^2 d\eta = b \left( \frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right) = bh^3/12$$



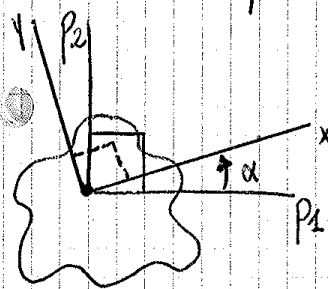
analogamente  $J_{\eta\eta\eta} = hb^3/12$   $J_{\eta\xi\xi} = 0$

relazione degli assi

Abbiamo già visto che  $J_{xx}, J_{yy}$  e  $J_{xy}$  sono coefficienti del tensore d'inerzia  $[J] = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{xy} & J_{yy} \end{bmatrix}$   
 Simmetrico 2x2, reale.

$J_{xx}, J_{yy} > 0$   $J_{xy} \geq 0$  (= 0 se rif. principale)

trovando assi principali  $p_1, p_2$   $[J] = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}$  esistono sempre  $J_1, J_2 > 0$  (autovalori)  
 $p_1, p_2$  ortogonali (autovettori)



$$\begin{cases} x = p_1 \cos \alpha + p_2 \sin \alpha \\ y = -p_1 \sin \alpha + p_2 \cos \alpha \end{cases}$$

$$J_{xx} = \int_A y^2 dA = \int_A (-p_1 \sin \alpha + p_2 \cos \alpha)^2 dA = \sin^2 \alpha \int_A p_1^2 dA + \cos^2 \alpha \int_A p_2^2 dA - 2 \cos \alpha \sin \alpha \int_A p_1 p_2 dA$$

$$= J_2 \cos^2 \alpha + J_1 \sin^2 \alpha$$

$\int_A p_1 p_2 dA = 0$   $p_1, p_2$  principi  
 $\int_A p_1^2 dA = J_2$   $\int_A p_2^2 dA = J_1$

$$J_{yy} = \int_A x^2 dA = \int_A (p_1 \cos \alpha + p_2 \sin \alpha)^2 dA = \cos^2 \alpha \int_A p_1^2 dA + \sin^2 \alpha \int_A p_2^2 dA + 2 \cos \alpha \sin \alpha \int_A p_1 p_2 dA$$

$$= J_1 \sin^2 \alpha + J_2 \cos^2 \alpha$$

$$J_{xy} = \int_A xy dA = \int_A (p_1 \cos \alpha + p_2 \sin \alpha)(-p_1 \sin \alpha + p_2 \cos \alpha) dA = -\cos \alpha \sin \alpha \int_A p_1^2 dA + \cos \alpha \sin \alpha \int_A p_2^2 dA +$$

$$\cos^2 \alpha \int_A p_1 p_2 dA - \sin^2 \alpha \int_A p_1 p_2 dA$$

$\int_A p_1 p_2 dA = 0$

$$J_{xy} = (J_1 - J_2) \cos \alpha \sin \alpha$$



procedura per la determinazione del riferimento centrale principale

- Decidere la suddivisione più conveniente 

- Adottare un riferimento globale  $OXY$  in cui esprimere le coordinate del baricentro  $G_i$

- Adottare i riferimenti locali ( $\xi_i, \eta_i$ ) baricentrici

- Calcolare i momenti statici  $S_x, S_y$  e la posizione del baricentro  $X_G, Y_G$

- Adottare un nuovo riferimento globale baricentrico  $Gxy$ , in quest'ultimo ricordare le coordinate dei baricentri  $G_i$

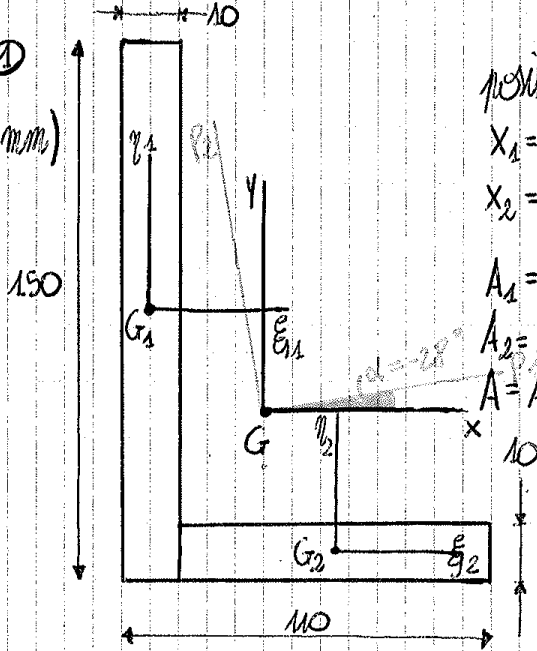
$$x_i = X_i - X_G; y_i = Y_i - Y_G$$

- Calcolare  $J_{xx}, J_{yy}, J_{xy}$

- Con i cerchi di Mohr, trovare  $J_1, J_2$  e  $\alpha$

esercitazione 5

esempio 1  
(misure in mm)



posizioni baricentri

$$X_1 = 5 \text{ mm} \quad Y_1 = 75 \text{ mm}$$

$$X_2 = 60 \text{ mm} \quad Y_2 = 5 \text{ mm}$$

$$A_1 = 150 \cdot 10 = 1500 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = 100 \cdot 10 = 1000 \text{ mm}^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 2500 \text{ mm}^2$$

momenti statici

$$S_x = y_1 A_1 + y_2 A_2 = 75 \cdot 1500 + 5 \cdot 1000 = 1,175 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

$$S_y = x_1 A_1 + x_2 A_2 = 5 \cdot 1500 + 60 \cdot 1000 = 6,75 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

$$X_G = \frac{S_y}{A} = \frac{6,75 \cdot 10^4}{2,5 \cdot 10^3} = 27 \text{ mm}$$

$$Y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{1,175 \cdot 10^5}{2,5 \cdot 10^3} = 47 \text{ mm}$$

coordinate dei baricentri  $i$ -esimi nel riferimento  $Gxy$ :

$$x_i = X_i - X_G \quad \begin{cases} x_1 = 5 - 27 = -22 \text{ mm} \\ x_2 = 60 - 27 = 33 \text{ mm} \end{cases}$$

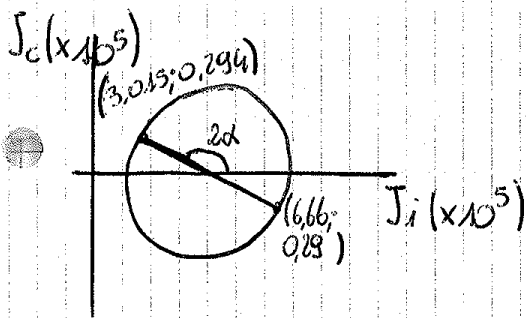
$$y_i = Y_i - Y_G \quad \begin{cases} y_1 = 75 - 47 = 28 \text{ mm} \\ y_2 = 5 - 47 = -42 \text{ mm} \end{cases}$$

calcolo di  $[J]$  nel riferimento  $Gxy$

$$J_{xx} = y_1^2 A_1 + J_{\xi_1 \xi_1} + y_2^2 A_2 + J_{\xi_2 \xi_2} = 28^2 \cdot 1500 + \frac{150^3 \cdot 10}{12} + 42^2 \cdot 1000 + \frac{10^3 \cdot 100}{12} = 5,761 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_{yy} = x_1^2 A_1 + J_{\eta_1 \eta_1} + x_2^2 A_2 + J_{\eta_2 \eta_2} = 22^2 \cdot 1500 + \frac{10^3 \cdot 150}{12} + 33^2 \cdot 1000 + \frac{100^3 \cdot 10}{12} = 2,661 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_{xy} = x_1 y_1 A_1 + J_{\xi_1 \eta_1} + x_2 y_2 A_2 + J_{\xi_2 \eta_2} = -22 \cdot 28 \cdot 1500 + 33 \cdot (-42) \cdot 1000 = -2,310 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$



$$J_{1,2} = \left[ \frac{3,015 + 6,670}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{3,015 - 6,670}{2} \right)^2 + 0,294^2} \right] \cdot 10^5$$

$$J_1 = 6,634 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 \quad J_2 = 2,332 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$|\tan 2\alpha| = \left| \frac{2J_{xy}}{J_{xx} - J_{yy}} \right| = \left| \frac{2 \cdot 0,294}{3,015 - 6,670} \right| = 0,159$$

$$\begin{matrix} J_{xy} > 0 \\ J_{xx} < J_{yy} \end{matrix} \Rightarrow 45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \rightarrow \alpha = 85^\circ$$

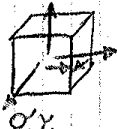
Esistono casi in cui una o più delle sens forme unificate, per queste  $A, J_{xx}, J_{yy}, J_{xy}$  sono tabellate

## Solida di Saint Venant

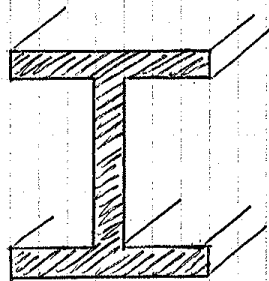
- ipotesi per la formulazione
- caratteristiche di sollecitazione
- procedura per ottenere la formula di calcolo delle tensioni

### CAMBAMENTO DI

#### SCALA



punto



struttura

per formulare la teoria di Saint Venant è necessario conoscere le caratteristiche delle sollecitazioni (M, F nella sezione)

### FORMULAZIONE DEL

#### PROBLEMA

elementi strutturali

Soluzione analitica (formula) per tensioni, deformazioni, spostamenti:

Monodimensionali

due dimensioni  $\ll$  delle rimanenti  
• Teoria dei travi, alberi delle macchine

Bidimensionali

una dimensione  $\ll$  delle rimanenti due  
• piastre, gusci

• Solida di Saint Venant (1797-1886)

- impostazione e soluzione rigorosa del problema del solido prismatico sotto di vari tipi di sollecitazione (trazione, flessione, torsione, taglio)

### IPOTESI DI

#### PARTENZA

1) geometria

a) cilindro ottenuto per traslazione di una figura piana in direzione della propria normale

b) l'estensione in tale direzione è molto maggiore delle dimensioni nel piano della figura geometrica

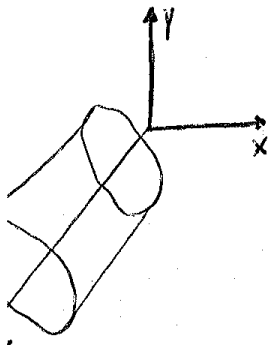
2) carichi e vincoli

• applicati solo in corrispondenza delle basi

3) materiale

elastico lineare, omogeneo e isotropo

## Solido di St. Venant



- modello matematico per elementi strutturali monodimensionali (travi, ecc)
- fornisce le formule per il calcolo di tensioni, deformazioni, spostamenti

## Principio di St. Venant

- la modalità con cui i carichi (vincoli) sono applicati alle basi del solido dipende dal caso in esame.
- la distribuzione (campo) locale delle tensioni dipende dalle modalità di applicazione del carico (vincolo).

MA

- A distanza assiale dalla base ( $\approx$  dimensione trasversale della sezione) la situazione si regolarizza
- la distribuzione della tensione è quella prevista dal solido di St. Venant e dipende solo da  $R_H$  e  $R_F$

requenza importante

tutte le deviazioni dalle ipotesi causano perturbazioni locali delle soluzioni di St. Venant  
 Nella maggior parte dell'estensione del solido le soluzioni sono applicabili

effetti di maggior

## PROCEDURA PER STABILIRE LE FORMULE CHE FORNISCONO LE TENSIONI:

- Si assume un campo di spostamenti  $(u, v, w)$
- Si ricavano le deformazioni  $(\epsilon, \gamma)$  come derivate dagli spostamenti
- Si ottengono le tensioni  $(\sigma, \tau)$  mediante la legge elastica
- Si ottengono le caratteristiche di sollecitazione (forze, momenti interni) come equoordinati statici.

APPLICABILE AI CASI DI:

- comportamento estensionale (trazione - compressione)
- flessionale
- torsionale (valido solo per elementi a sezione circolare)

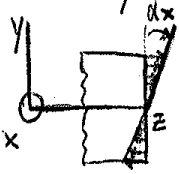
o, trattazione approssimata per i casi di sezione di sezioni non circolari (parete rettilinea)



# comportamento flessionale

Per iniziare, consideriamo separatamente la flessione nei piani  $zy, zx$

piano  $zy$



1) spostamento: la sezione ruota intorno a  $x$ , assumendo

$w = \alpha_x y$  piano  
nodo:  $\alpha_x = \alpha_x(z)$

2) deformazioni  $\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$

$\epsilon_{zz} = \frac{d\alpha_x}{dz} y = k_x y$   $k_x$  è la curvatura dell'asse del solido

3) tensioni  $\epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu}{E} \frac{\sigma_{xx}}{\epsilon_0} - \frac{\nu}{E} \frac{\sigma_{yy}}{\epsilon_0}$

$\sigma_{zz} = E \epsilon_{zz} = E k_x y$

nodo:  $\epsilon_{zz}, \sigma_{zz}$  non costanti

4) caratteristiche di sollecitazione

$N = \int_A \sigma_{zz} dA = E k_x \int_A y dA = 0$

$\int_A y dA = S_x = 0$   
 giusta dall'origine  
 integrale perché  
 momento statico

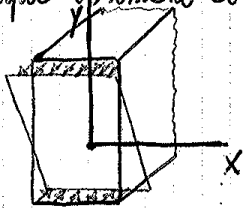
$M_x = \int_A \sigma_{zz} y dA = E k_x \int_A y^2 dA = E k_x J_{xx}$

$M_y = \int_A \sigma_{zz} x dA = -E k_x \int_A x y dA = 0$

$J_{xy} = 0$

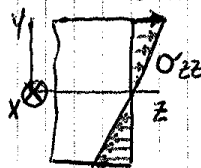
Assumendo  $xy$  principale d'inerzia

esempio: sezione a forma rettangolare



$k_x = M_x / E J_{xx} \rightarrow \sigma_{zz} = \frac{M_x}{J_{xx}} \cdot y$

visto laterale



formula per la tensione

notare che: - la sezione ruota intorno a  $x$

- solo la componente  $M_x \neq 0$

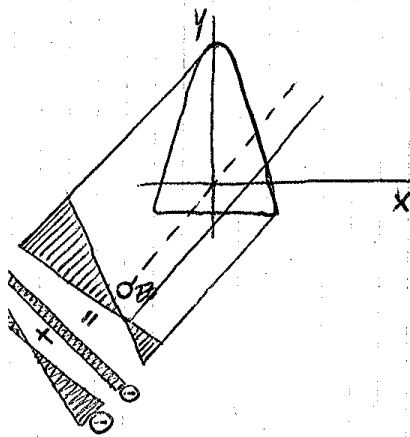
- sull'asse  $x$   $\sigma_{zz} = 0 \Rightarrow$  ASSE NEUTRO

questa situazione è detta FLESSIONE RETTA

# comportamento estensionale e flessionale

$$\sigma_{zz} = N/A + \frac{M_x}{J_{xx}} y - \frac{M_y}{J_{yy}} x$$

relazione generale che tiene conto di tutti gli effetti



# comportamento torsionale

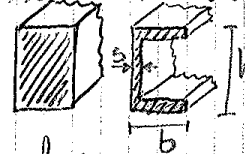
effetto del momento interno  $\sigma_z$  ( $\sigma$  come  $\parallel z$ )

due situazioni: 1) sezioni circolari



- soluzione tratta in forma chiusa
- procedimento simile a quello usato per il comportamento estensionale e flessionale

2) sezioni non circolari

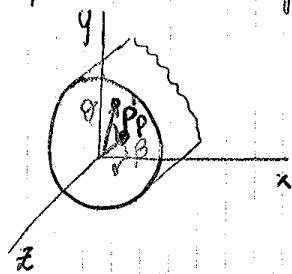


- soluzione non esprimibile in forma chiusa (si usano le serie)
- soluzioni approssimate nel caso della parete sottile

# sezione circolare

momenti  $\rightarrow$  ② deformazioni  $\rightarrow$  ③ tensioni  $\rightarrow$  ④ caratteristiche di sollecitazione

mediante l'equivalenza statica



premesse: riferimento  $xyz$  e  $r\beta z$

$$\text{relazioni } \begin{cases} x = r \cos \beta \\ y = r \sin \beta \end{cases}$$

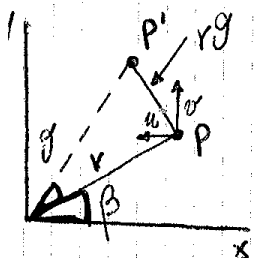
$P$  e  $P'$  sono due istanti di tempo diversi

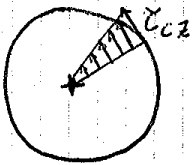
$\theta$  "piccolo"  $\rightarrow$  spostamenti  $v, u$  linearizzati

$$\begin{cases} u = -\theta r \sin \beta = -\theta y \\ v = \theta r \cos \beta = \theta x \end{cases}$$

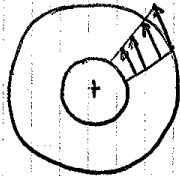
Ipotesi cinematica: la sezione ruota intorno ad  $O$  restando piana.

di un angolo  $\theta$





sezione  
piena



sezione  
cava

$$\frac{d}{2} \leq r \leq \frac{D}{2}$$

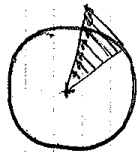
$J_p$ : pieno-vuoto

momento torzionale  
circolare  
sezione retta piena  
torione  $\theta$



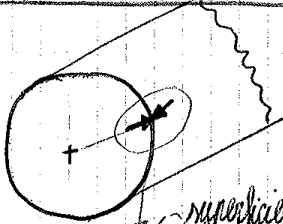
$$\theta = -\gamma_y ; \psi = \gamma_x$$

rotazione: diretta circolarmente



$$\tau_{cz} = \frac{M_z \cdot r}{J_p}$$

rotazione nulla condizionali al centro  $z_{cz}$

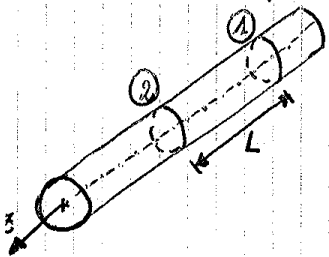


superficie laterale  
cilindrica  $\rightarrow$  scarica  
rotazione  
retta

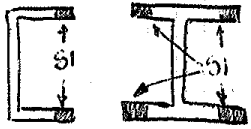
- non può esistere una  $\tau$  rivolta (nella sezione retta) radialmente.
- in generale, non può esistere una  $\tau$  che attraversa il centro

rotazione nel gradiente di torione  $\theta' = d\theta/dz = M_z/GJ_p$

$$\theta_2 - \theta_1 = \int_0^L M_z/GJ_p dz = M_z/GJ_p L$$



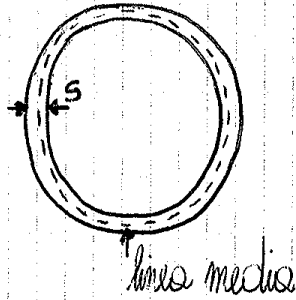
1<sup>a</sup> correzione 0,35 si applica per ogni estremo libero



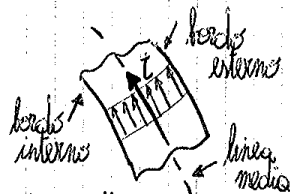
Tensioni di picco i-esime  
 $\tau_{picco-i} = \pm \frac{M_t}{J_t} \cdot s_i$

sezione completa  
 rettangolo i-esime

origine, rettile chiusa  
 possibilità di eseguire un percorso che  
 ritorna al punto di partenza senza inversioni  
 di circuito  
 spessore  $s$  piccolo, non necessariamente costante  
 approssimazioni al contorno  $\Rightarrow \tau$  rivelle ovunque come  
 a linea media



inutile distinguere  $\tau_{xz}$  o  $\tau_{yz}$   
 definiamo il flusso attraverso la membrana  
 $t = \int_s \tau ds$

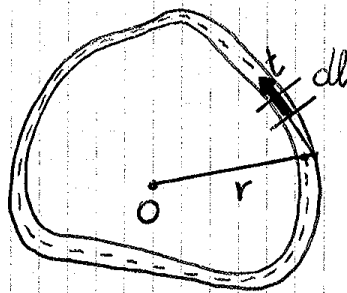


analogo alla portata di un liquido in movimento attraverso  $s$   
 liquido incompressibile (liquido) e pareti impermeabili  
 • portata (volumetrica) costante  
 nel caso della torsione  $t = \text{costante}$

determinazione di  $t$

$\oint_l t dl = 0$  come un poligono delle forze

FORZA DI TAGLIO  
 NULLA



ogni tratto elementare  
 soggetto a forza  $t dl$

momento torcente  $M_t$

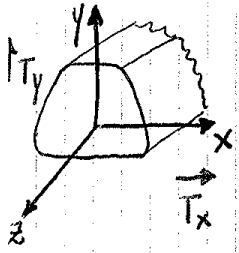
$M_t = \oint_l r t dl = t \oint_l r dl = 2t \oint_l r d\Omega = 2t \Omega$

area racchiusa  
 dalla linea media

$t = M_t / 2 \Omega$  e anche  $\tau = t / s$   
 $= M_t / 2 \Omega s$



tensioni derivate alle forze di taglio

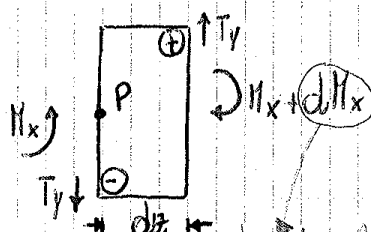
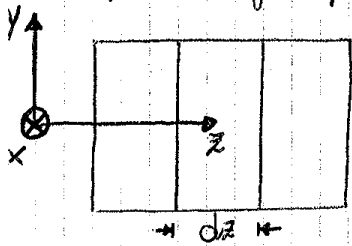


Studio approssimato basato sull'equilibrio  
 → formule per  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$

$$T_x = \int_A \tau_{xz} dA \quad T_y = \int_A \tau_{yz} dA$$

studio separatamente piano zy ( $T_y$ ), piano zx ( $T_x$ )

piano zy taglio  $T_y$

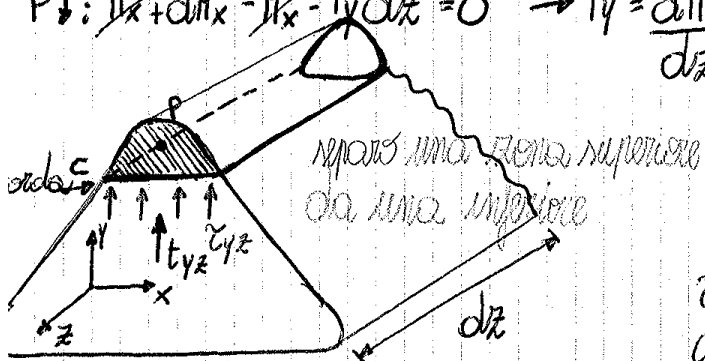


Ipotesi di Saint Venant  
 no carichi lungo il retto  
 $T_y \rightarrow$  costante  
 $M_x \rightarrow$  variabile

7. alla rotazione

$$P) : M_x + dM_x - M_x - T_y dz = 0 \rightarrow T_y = \frac{dM_x}{dz}$$

il taglio è la derivata del momento

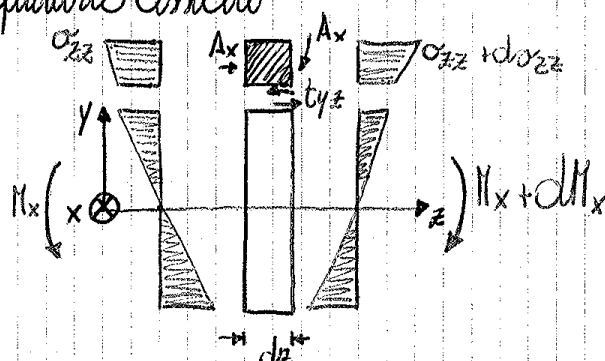
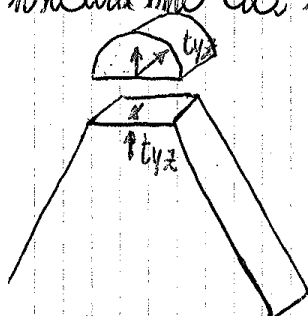


$A^*$  zona della sezione A al di sopra della corda C.  
 $\tau_{yz} \rightarrow$  tensioni entranti nella  $A^*$  al livello della corda

definiamo il flusso  $t_{yz}$

$$t_{yz} = \int_C \tau_{yz} dx \rightarrow \text{vettore che agisce e supporta tutte le } \tau_{yz}$$

consideriamo ora un equilibrio parziale della zona  $A^* x dz$  equilibrio assiale



setto delle  $\sigma_{zz}$   
 setto di  $t_{yz}$

$$\tau_{zz} = \frac{M_x}{J_{xx}} y \rightarrow d\sigma_{zz} = \frac{dM_x}{dz} \cdot \frac{1}{J_{xx}} \cdot y = \frac{T_y}{J_{xx}} y dz$$

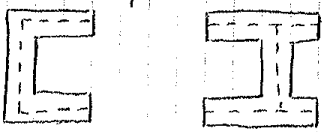
Tensioni causate dalle forze di taglio  $T_x, T_y$

Il taglio è la derivata del momento ( $d/dz$ ) ~~momento~~

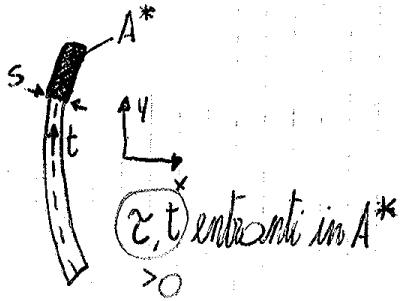
$$T_y = \frac{dM_x}{dz} \quad T_x = -\frac{dM_y}{dz}$$

Il flusso della  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{xz}$  è:  $t_{xz} = \frac{T_x}{J_{yy}} S_y^*$  e  $t_{yz} = \frac{T_y}{J_{xx}} S_x^*$  con  $S_x^*$  e  $S_y^*$  momenti statici della zona  $A^*$

sezioni a parete sottile



→ considero una generica sezione a parete sottile



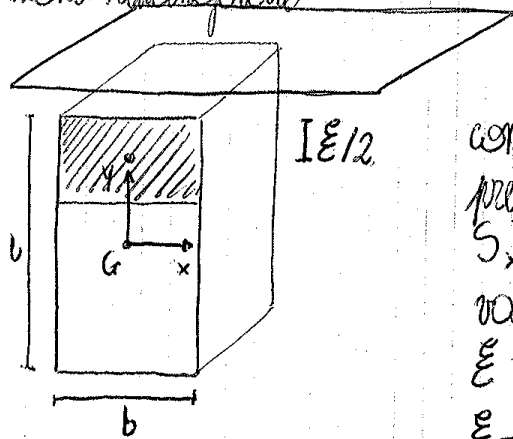
Condizioni al contorno:

- $\tau$  parallele ai bordi
- $\tau$  orientate come la linea media
- $\tau$  costanti in  $s$

$\tau = t/s = \text{flusso / spessore}$

$$\tau = \frac{T_y S_x^*}{J_{xx} s} + \frac{T_x S_y^*}{J_{yy} s}$$

sezione rettangolare



taglio  $T_y, a \gg b$

come esprimere  $S_x^*$ ?

prendo il punto baricentrico di  $A^*$

$$S_x^* = b \int (\frac{a}{2} - \xi) d\xi \quad \text{variazione parabolica}$$

valori notevoli:

$$\xi = 0 \rightarrow S_x^* = 0$$

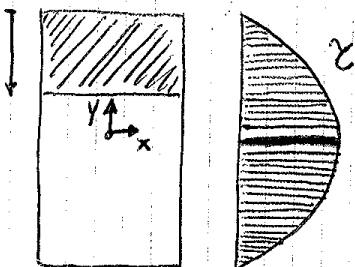
$$\xi = a/2 \rightarrow S_x^* = b(a/2) (a/2 - a/4) = \frac{ba^2}{8}$$

$$\xi = a \rightarrow S_x^* = b(a/2) (a/2 - a/2) = 0$$

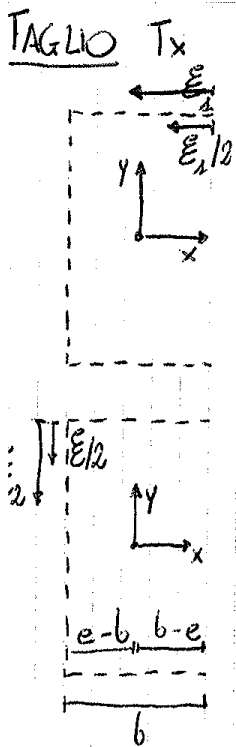
ho il massimo in  $\xi = a/2$

$$\rightarrow \tau_{MAX} = \frac{T_y S_{xMAX}^*}{J_{xx} s} = \frac{T_y (ba^2/8)}{(ba^3/12) \cdot b} = \frac{3 T_y}{2 ab} = \frac{3 T_y}{2 A}$$

quando  $\xi > a$  il contributo di area che si aggiunge ha valore negativo



→ infatti quando  $\xi = a \rightarrow$  la parte negativa annulla tutta quella positiva e  $S_x^* = 0$



Ala superiore:  $S_y^* = s_1 \epsilon_1 (b - e - \frac{\epsilon_1 h}{2})$

$\epsilon_1 = 0 \rightarrow S_y^* = 0$

$\epsilon_1 = b - e \rightarrow S_y^* = \frac{s_1 (b - e)^2}{2}$

$\epsilon_1 = b \rightarrow S_y^* = s_1 b (\frac{b}{2} - e)$

$\rightarrow r = \frac{T_x s_1 (b - e)^2}{S_{yy} s_1 h}$

Anima:  $S_y^* = s_1 b (\frac{b}{2} - e) - s_2 \epsilon_2 e$

$\epsilon_2 = 0 \rightarrow S_y^* = s_1 b (\frac{b}{2} - e)$

$\epsilon_2 = h/2 \rightarrow S_y^* = s_1 b (\frac{b}{2} - e) - s_2 \frac{h}{2} e = 0$

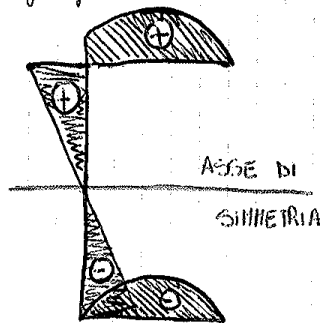
$\epsilon_2 = h \rightarrow S_y^* = s_1 b (\frac{b}{2} - e) - s_2 h e = s_1 b (\frac{b}{2} - e)$

Ala inferiore:  $S_y^* = -s_1 b (\frac{b}{2} - e) - \epsilon_3 s_1 (e - \frac{\epsilon_3 h}{2})$

$\epsilon_3 = 0 \rightarrow S_y^* = -s_1 b (\frac{b}{2} - e)$

$\epsilon_3 = e \rightarrow S_y^* = -s_1 b (\frac{b}{2} - e) - e s_1 (\frac{e}{2}) = -s_1 b (\frac{b}{2} - e) - \frac{e^2 s_1}{2}$   
 $= -\frac{s_1}{2} (b^2 - 2be + e^2) = \frac{s_1}{2} (b - e)^2$

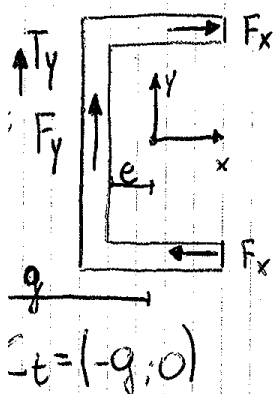
grafico totale scarica



in quale punto passano le forze di taglio?

direzione

caso  $T_y$



$$\begin{cases} F_x = \frac{1}{2} \frac{T_y}{2} \frac{b h}{2} b s_1 = \frac{T_y b^2 h s_1}{4 J_{xx}} \\ F_y = T_y \end{cases}$$

TENSIONE PICCO      AREA

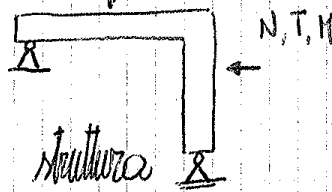
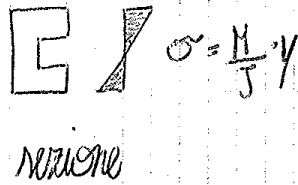
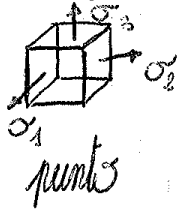
riduzione a G  $\rightarrow R_{NG} = F_y + F_x h$

$$R_{NG} = T_y e + \frac{T_y b^2 h s_1}{4 J_{xx}}$$

$$R_F = T_y$$

$C_t$  zona di taglio. Se  $T_x$  e  $T_y$  agiscono fuori da  $C_t \rightarrow$  TORSIONE  
 $C_t$  è anche il centro di torsione

Struttura: determinazione delle reazioni e dei loro diagrammi



rispetto al solido di St. Venant  
 (ricchi e vincoli fuori dalle basi (estremità))

• calcoliamo  $\sigma, \tau$  nelle sezioni generiche utilizzando le relazioni viste

• approssimazioni  $\rightarrow$  tensioni aggiuntive, meno secondarie

• variazioni di sezione  $\rightarrow$  "convezioni"

procedimento per determinare  $N, T, H$   
 generalizzazione del procedimento usato per le reazioni

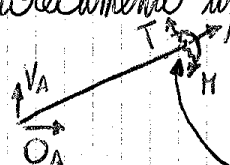
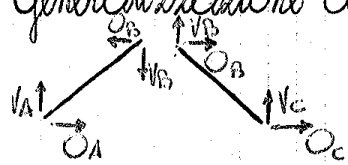
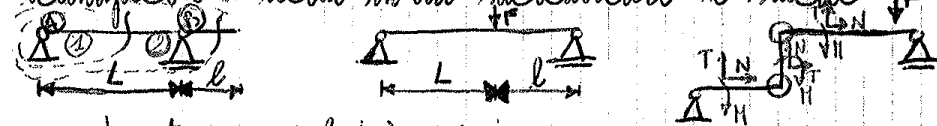


diagramma di corpo libero  
 (intersezioni generiche, non necessariamente nei vincoli)

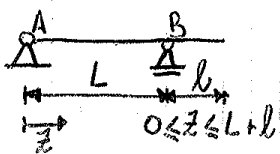
passi successivi

• supponiamo di conoscere le reazioni vincolari

• identificare i tratti in cui suddividere lo studio



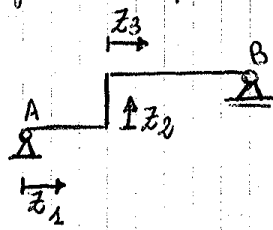
• coordinata assiale ( $z$ )  $\leftarrow$  unica definita su ogni tratto separatamente



1° tratto  $0 \leq z \leq L$  2° tratto  $L \leq z \leq L+l$

$\vec{z}_1$   $0 \leq z_1 \leq L$  nel 1° tratto

$\vec{z}_2$   $0 \leq z_2 \leq l$  nel 2° tratto

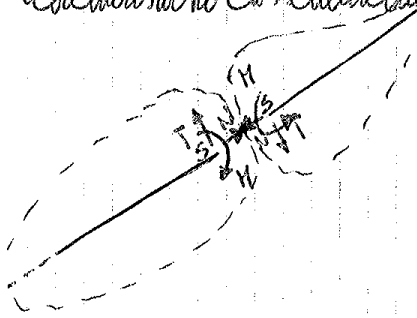


cambio di coordinata praticamente indispensabile!

uso della coordinata assiale  
 definire bracci del momento flettente

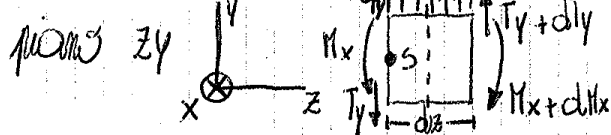
• carichi distribuiti

# caratteristiche di sollecitazione e diagrammi



- 3 equilibri: - trasl. assiale  $\rightarrow N$   
 - trasl. trasversale  $\rightarrow T$   
 - rotazione (pols)  $\rightarrow M$

in presenza di carichi distribuiti

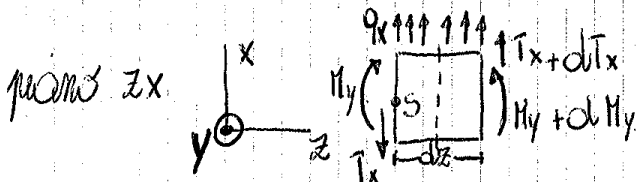


$$\uparrow: T_y + dT_y - T_y + q_y dz = 0 \quad \boxed{\frac{dT_y}{dz} = -q_y}$$

$$\circlearrowleft: M_x + dM_x - M_x - (T_y + dT_y) dz - q_y dz \frac{dz}{2} = 0$$

$$\boxed{\frac{dM_x}{dz} = T_y}$$

inf. ordine superiore



$$\uparrow: T_x + dT_x - T_x + q_x dz = 0 \quad \boxed{\frac{dT_x}{dz} = -q_x}$$

$$\circlearrowleft: M_y + dM_y - M_y + (T_x + dT_x) dz + q_x dz \frac{dz}{2} = 0$$

$$\boxed{\frac{dM_y}{dz} = T_x}$$

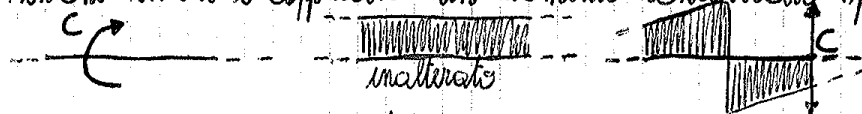
inf. ord. sup

## proprietà dei diagrammi

- tratti non sovrapposti a carichi distribuiti  
 $T$  costante  $M$  lineare
- tratti sovrapposti a carichi distribuiti  
 $T$  lineare  $M$  parabolico
- sezioni in cui è presente una forza concentrata (F) trasversale



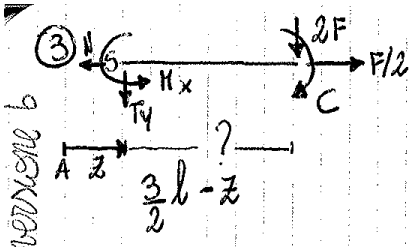
- sezioni in cui è applicato un momento concentrato (puls)



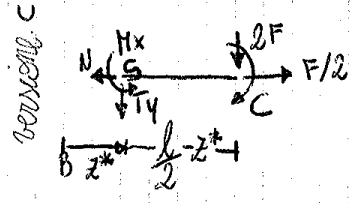
- sezioni in cui è presente una cerniera o appoggio di estremità



Nota: in questi casi  $M \neq 0$

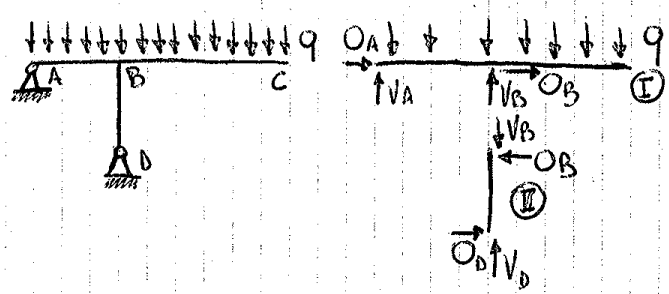


$\leftarrow : N = F/2$   
 $\downarrow : T_y = -2F$   
 $\sum : M_x - 2F\left(\frac{3}{2}l - z\right) - C = 0 \quad M_x = -2Fz + 3Fl + C$

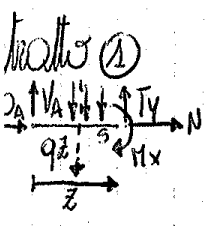


cambia solo l'equil. alla rotazione  
 $\sum : M_x - 2F\left(\frac{l}{2} - z^*\right) - C = 0$   
 $\left\{ \begin{array}{l} z^* = 0 \quad M_x = Fl + C \\ z^* = \frac{l}{2} \quad M_x = C \end{array} \right.$

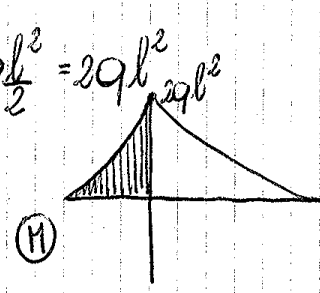
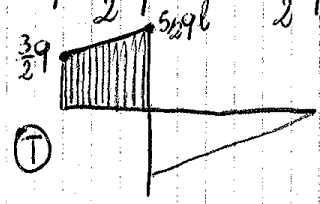
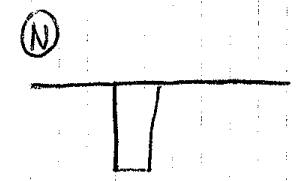
esempio 2 Due elementi, carichi distribuiti



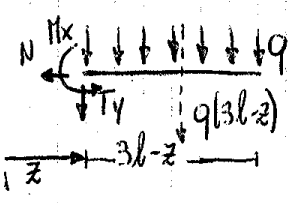
I  $B \downarrow : V_A l + 3ql \frac{l}{2} = 0 \rightarrow V_A = -\frac{3}{2}ql$   
 $A \uparrow : V_B l - 3ql \cdot \frac{3}{2}l = 0 \rightarrow V_B = \frac{9}{2}ql$   
 $\rightarrow : O_A + O_B = 0 \quad O_A = -O_B = 0$   
 II  $\uparrow : V_D - V_B = 0 \quad V_D = V_B = \frac{9}{2}ql$   
 $D \uparrow : O_D l = 0 \quad O_D = 0$   
 $\rightarrow : O_D - O_B = 0 \quad O_D = 0$



$\rightarrow : N + 0 = 0 \quad N = 0$   
 $\uparrow : T_y + V_A - qz = 0 \quad T_y = -V_A + qz = 3ql + qz$   
 $\sum : M_x + V_A z - qz \frac{z}{2} = 0 \quad M_x = \frac{3}{2}qlz + \frac{qz^2}{2}$   
 $\left\{ \begin{array}{l} z=0 \quad T_y = \frac{3}{2}ql \quad M_x = 0 \\ z=l \quad T_y = \frac{5}{2}ql \quad M_x = \frac{3}{2}ql^2 + \frac{ql^2}{2} = 2ql^2 \end{array} \right.$



tratto 2



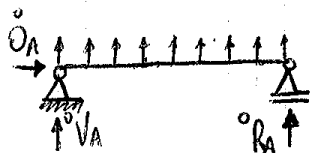
$\leftarrow : N = 0$   
 $\uparrow : T_y + q(3l-z) = 0$   
 $\sum : M_x - q(3l-z)\frac{(3l-z)}{2} = 0$



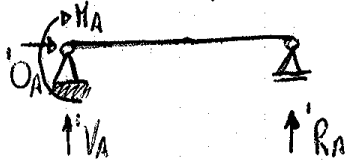




sistema ridotto (cerniera in A) (o)



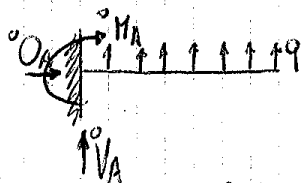
sistema supplementare (1)



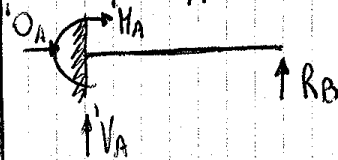
$${}^0\alpha_x^A + {}^1\alpha_x^A = \alpha_x^A = 0$$

rispetto all'incastro

sistema ridotto (eliminato appoggio)



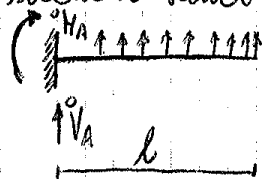
sistema supplementare



$${}^0v_B + {}^1v_B = v_B = 0$$

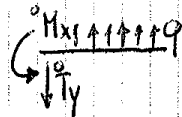
rispetto all'appoggio

seconda scelta



$$\begin{aligned} {}^0V_A &= -ql \\ {}^0H_A &= ql^2/2 \end{aligned}$$

solicitazioni



$$z \quad l-z$$

$$\downarrow T_y - q(l-z) = 0 \rightarrow T_y = q(l-z)$$

$$s) : M_x + q(l-z)^2 = 0$$

$$M_x = -\frac{qz^2}{2} + qlz - \frac{ql^2}{2}$$

linea elastica

$${}^0\alpha_x(z) = \int \frac{{}^0M_x}{EJ_{xx}} dz = -\frac{qz^3}{6EJ_{xx}} + \frac{qlz^2}{2EJ_{xx}} - \frac{ql^2z}{2EJ_{xx}} + C_1$$

$${}^0v(z) = -\int {}^0\alpha_x dz = \frac{qz^4}{24EJ_{xx}} - \frac{qlz^3}{6EJ_{xx}} + \frac{ql^2z^2}{4EJ_{xx}} + C_1z + C_2$$

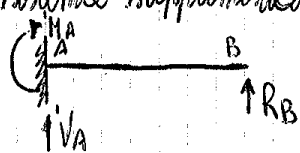
in A (incastro)

$${}^0\alpha_x^A = C_1 = 0$$

$${}^0v^A = C_2 = 0$$

$${}^0v(l) = \frac{ql^4}{8EJ_{xx}}$$

sistema supplementare

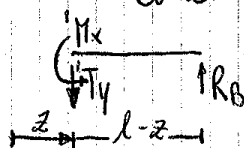


reazioni

$$V_A = -R_B$$

$$H_A = R_B l$$

solicitazioni



$$z \quad l-z$$

$$\downarrow T_y - R_B = 0$$

$$s) : M_x = R_B z - R_B l$$

linea elastica

$${}^1\alpha_x(z) = \int \frac{{}^1M_x}{EJ_{xx}} dz = \frac{R_B z^2}{2EJ_{xx}} - \frac{R_B l z}{EJ_{xx}} + C_1$$

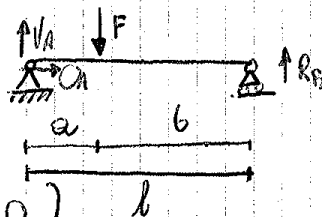
$${}^1v(z) = -\int {}^1\alpha_x dz = -\frac{R_B z^3}{6EJ_{xx}} + \frac{R_B l z^2}{2EJ_{xx}} + C_1 z + C_2$$

# condizioni di vincolo omogenee

• caso isostatico ( $h=0$ )  $N^\circ$  incognite =  $N^\circ$  equazioni  
 ↳ reazioni ↳ equilibri

è sempre risolvibile?

es: un elemento a 3 reazioni { cerniera (2) appoggio (1)



$$\begin{aligned} \uparrow O_A &= 0 \\ + V_A + R_B &= F \\ \uparrow R_B l &= Fa \end{aligned} \quad \begin{aligned} V_A &= Fb/l \\ R_B &= Fa/l \end{aligned}$$

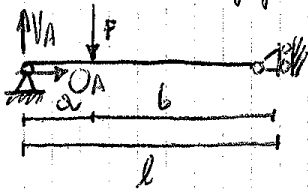
in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} O_A \\ V_A \\ R_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ Fa \end{Bmatrix} \quad \det [I] = l$$

variante

$$\begin{aligned} \rightarrow O_A &= 0 \\ B \uparrow V_A l &= Fb \\ A \uparrow R_B l &= Fa \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} O_A \\ V_A \\ R_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Fb \\ Fa \end{Bmatrix} \quad \det [I] = l^2$$

restiamo l'appoggio di 90°



$$\begin{aligned} \rightarrow O_A - O_B &= 0 \\ \uparrow V_A &= F \\ A \uparrow O &= Fa \end{aligned}$$

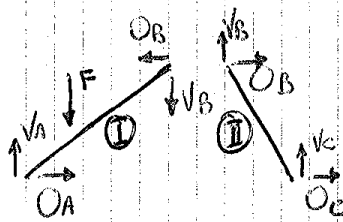
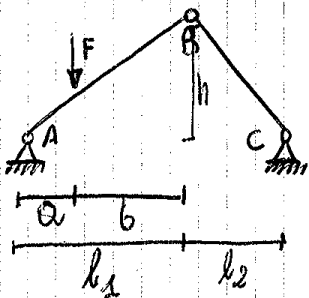
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} O_A \\ V_A \\ O_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ Fa \end{Bmatrix} \quad \det [I] = 0$$

*impossibile!*

$$\begin{aligned} \rightarrow O_A - O_B &= 0 \\ B \uparrow V_A l &= Fb \\ A \uparrow O &= Fa \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} O_A \\ V_A \\ O_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Fb \\ Fa \end{Bmatrix} \quad \det [I] = 0$$

*impossibile!*

caso con 2 elementi e 3 cerniere



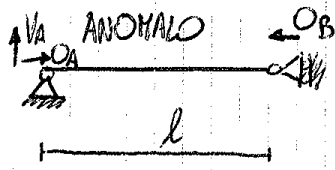
$$\begin{aligned} \text{I} \quad & \uparrow V_A - V_B = F \\ & \rightarrow O_A - O_B = 0 \\ & A \downarrow -O_B h + V_B h_1 = -Fa \\ \text{II} \quad & \uparrow V_B + V_C = 0 \\ & \rightarrow O_B + O_C = 0 \\ & C \downarrow O_B h + V_B h_2 = 0 \end{aligned}$$

$$V_B(h_1 + h_2) = -Fa \quad V_B = -\frac{Fa}{h_1 + h_2} \quad V_C = -V_B = \frac{Fa}{h_1 + h_2} \quad O_B = -\frac{V_B h_2}{h} = \frac{Fa h_2}{h(h_1 + h_2)}$$

$$O_A = O_B \quad V_A = F + V_B = F - \frac{Fa}{h_1 + h_2}$$

# Ritornando ai casi di prima

1 elemento  
1 cerniera  
1 appoggio

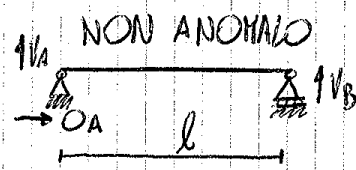


impugnatura

$O_A = O_B = K \neq 0 \rightarrow : OK$

$V_A = 0 \uparrow : OK$

STATICA



impugnatura

$V_A = K \quad V_B = K$

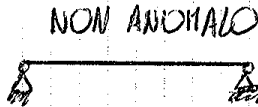
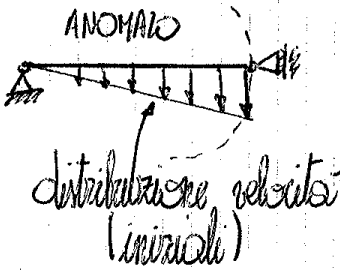
$\uparrow : NO$

oppure

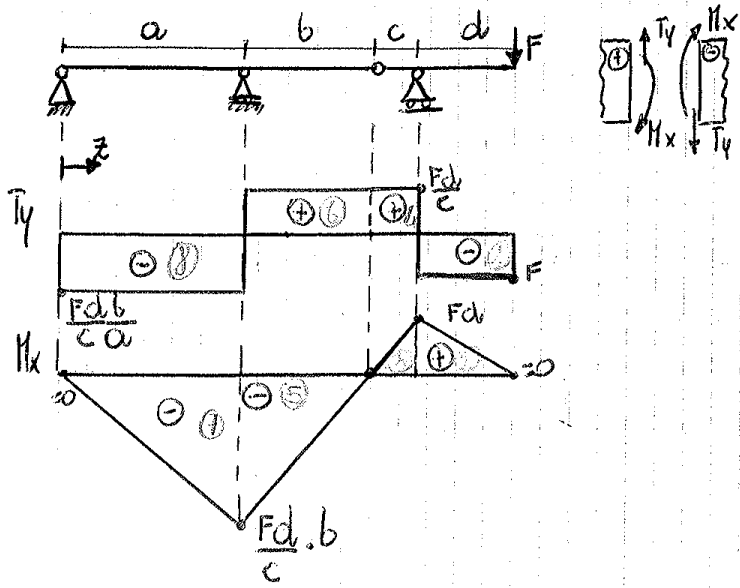
$V_A = K \quad V_B = -K$

$\uparrow : OK \quad \downarrow : NO$

CINETICA



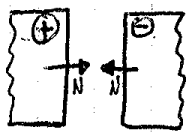
24 2 elementi stralzo curvato, cerniera interna



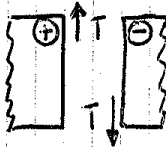
SIMMETRIA

- struttura (geometria, vincoli)
- condizioni di carico

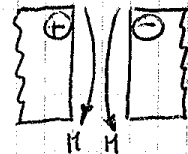
Proprietà di simmetria delle caratteristiche di sollecitazione N, T, M



N simmetrica (pari)



T antisimmetrica (dispari)



M simmetrica (pari)

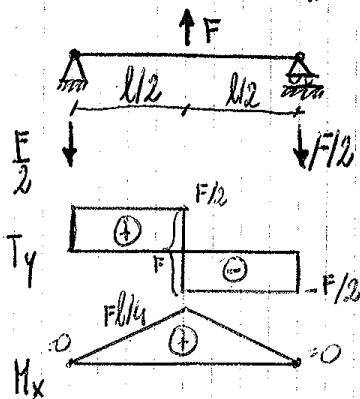
linea elastica  $v, \alpha$



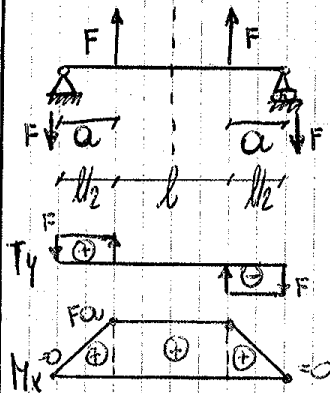
$v$  simmetrica (pari)  
 $\alpha$  antisimmetrica (dispari)

24 carichi concentrati con simmetria (pari)

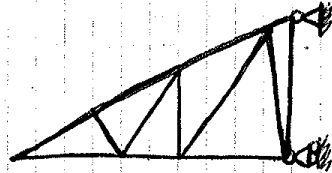
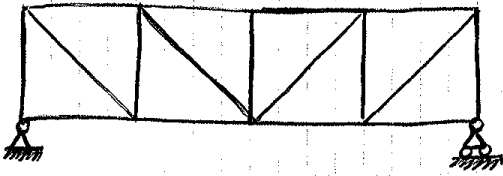
FLESSIONE 3 PUNTI



FLESSIONI 4 PUNTI

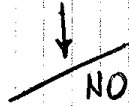
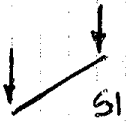


# Strutture reticolari



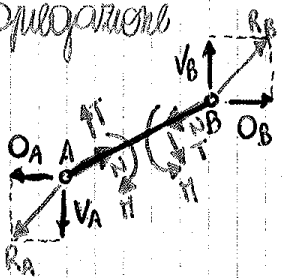
elementi disposti a rete  
connessi nei nodi

- Particolarità:
- elementi rettilinei
  - cerniere all'estremità (nodi)
  - carichi applicati solo nei nodi



⇒ sollecitazione soltanto di forza normale  $N$   
( $T, M = 0$ )

Spiegazione

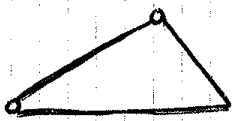


Reazione della cerniera agli estremi

Per l'equilibrio dell'elemento complessivo le reazioni in A e in B devono  
essere equilibrate tra di loro

$R_A = R_B$  allineate con l'elemento stesso inoltre  $N = R_A = R_B$  e  $T, M = 0$

spiegazione 2



cerniere  $M = 0$

rotto unico da A a B  
↗ lineare

⇒  $M$  costantemente nulla

la derivata di  $M$  è nulla ⇒  $T = 0$

vantaggi della struttura reticolare

Efficienza

- $\sigma = N/A$  costante
- possibilità di usare sezioni diverse

Leggerzza

# poligono delle forze

sintetizzando

## procedura risolutiva

- si trovano con i metodi scaldi le reazioni esterne
- per ogni nodo (non più di 2 aste incognite)

Due possibilità: 1) poligono delle forze  $\rightarrow$  valori assoluti  
2) disposizione delle forze sul nodo  $\rightarrow$  segno

N entrante  $\rightarrow$  compressione  $\rightarrow$  segno "-"

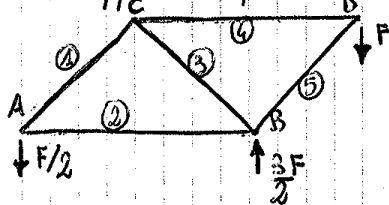
N uscente  $\rightarrow$  trazione  $\rightarrow$  segno "+"

$\rightarrow O_B = 0$

$B \rightarrow V_A l + F \frac{l}{2} = 0 \quad V_A = F/2$

$A \rightarrow V_B l - F \frac{3}{2} l = 0 \quad V_B = \frac{3}{2} F$

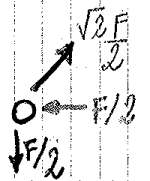
adesso applico il procedimento



$|N_1| = \sqrt{2} \frac{F}{2}$

$|N_2| = F/2$

posizione forze



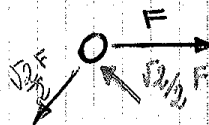
NODO C



$|N_4| = \sqrt{2} \frac{F}{2} \cdot \sqrt{2} = F$

$|N_3| = \sqrt{2} \frac{F}{2}$

posizione forze



NODO D

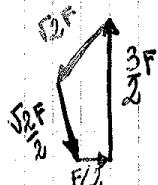


$|N_5| = \sqrt{2} F$

posizione forze

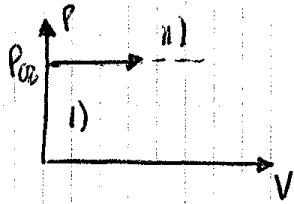


NODO B (superfluo visto che ho già trovato tutti)



in pratica

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E J_{xx}}{l_0^2}$$



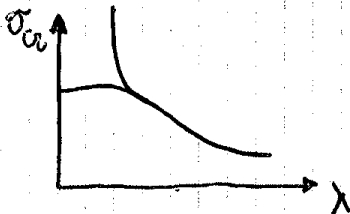
in termini di tensione ( $\sigma_{zz}$ )

$$\sigma_{zz} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{-\pi^2 E J_{xx}}{l_0^2 A} = \frac{E \pi^2 P^2}{l_0^2}$$

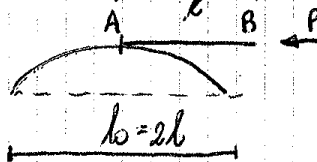
raggio di inerzia  $P^2$

$$\Rightarrow \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{l \lambda^2}$$

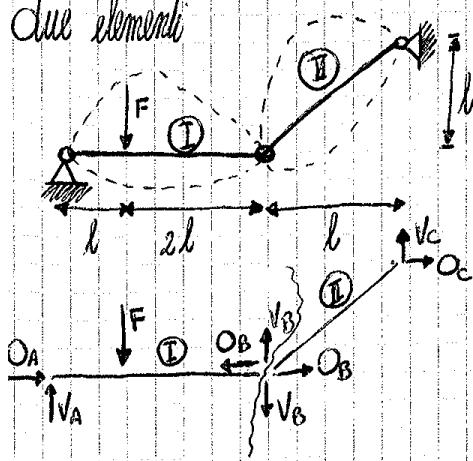
$$\lambda = \frac{l_0}{P_{min}} = \text{snelliana}$$



$l_0$  = legato al n° di semionde presenti tra gli estremi, dipende anche dalle condizioni di vincolo



due elementi



$$m=2$$

$$C=3$$

$$V=6$$

$$h=6-6=0 \text{ momentos}$$

equilibrio

$$\textcircled{I} \rightarrow: O_A - O_B = 0 \Rightarrow O_A = O_B$$

$$B) \uparrow: V_A 3l - F 2l = 0 \Rightarrow V_A = 2/3 F$$

$$A) \downarrow: F l - V_B 3l = 0 \Rightarrow V_B = 1/3 F$$

$$\textcircled{II} \rightarrow: O_B + O_C = 0 \Rightarrow O_C = -O_B = +F/3$$

$$\uparrow: V_C - V_B = 0 \Rightarrow V_C = V_B = F/3$$

$$\curvearrow: O_B l + V_B l = 0 \Rightarrow O_B = -V_B = -F/3$$

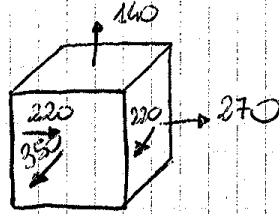
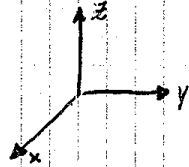
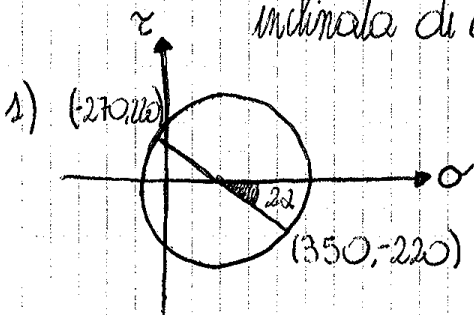


esempio 1

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 350 & 220 & 0 \\ 220 & -270 & 0 \\ 0 & 0 & 140 \end{bmatrix} \text{ (MPa)} \quad z \text{ principale} \quad z = p_3$$

determinare 1) tensioni di riferimento

2)  $\sigma, \tau$  su un piano del fascio di piani che ha  $p_3$  come asse e  $\vec{n}$  inclinata di  $60^\circ$  rispetto a  $p_1$



valori  $\sigma_{a,b}$

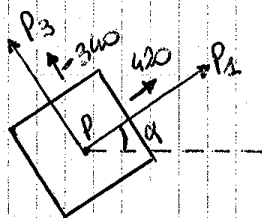
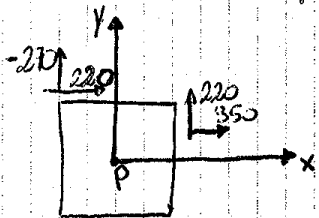
$$\sigma_{a,b} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{a,b} = \frac{350 - 270}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{350 + 270}{2}\right)^2 + 220^2} = \begin{cases} 420 \text{ MPa} \\ -340 \text{ MPa} \end{cases}$$

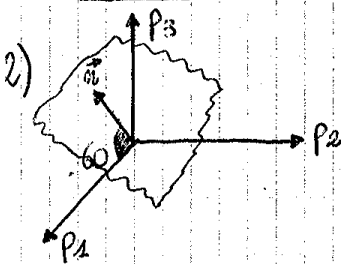
quindi ordino in maniera decrescente  $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$  chiamandole  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  che sono le tensioni principali

$$\sigma_1 = 420 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = 140 \text{ MPa} \quad \sigma_3 = -340 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\alpha = \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right| = \left| \frac{2 \cdot 220}{350 - (-270)} \right| \Rightarrow 2\alpha = \arctan\left|\frac{440}{620}\right| = 0,71 \quad \text{quindi } \alpha \text{ è } +17,7^\circ$$



parto da  $p_1$  e vado verso  $x$



come trovare le componenti  $\sigma, \tau$  sul piano?

2 strade possibili  $\rightarrow$  con il vettore  $\{\delta\} = [\sigma] \{n\}$  nel riferimento principale

$$\{\delta\} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos 60 \\ \sin 60 \\ \sin 60 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \cos 60 \\ 0 \\ \sigma_3 \sin 60 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \frac{1}{2} \\ 0 \\ \sigma_3 \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma = \vec{n} \cdot \vec{\delta} = \{n\}^T \{\delta\} = \left\{ \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \frac{1}{2} \\ 0 \\ \sigma_3 \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} = \frac{\sigma_1}{4} + 0 + \sigma_3 \frac{3}{4} = -150 \text{ MPa}$$

$$\tau = \sqrt{\delta^2 - \sigma^2} \rightarrow \text{teorema di Pitagora} = \sqrt{|\delta|^2 - |\sigma|^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3 \sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1}{4} + \frac{\sigma_3 \cdot 3}{4}\right)^2} = -329 \text{ MPa}$$

esercitazione ③ Note di deformazione

1) dato  $[\sigma] = \begin{bmatrix} 120 & 0 & 100 \\ 0 & 30 & 0 \\ 100 & 0 & 20 \end{bmatrix}$  MPa

$$\begin{cases} E = 2,06 \times 10^5 \text{ MPa} & (\text{acciaio}) \\ \nu = 0,29 \end{cases}$$

determinare: a) deformazioni in (x, y, z)

b) deformazioni in principale e l'angolo  $\alpha$

2) richiamo eq. costitutive per un corpo elastico isotropo:

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ \epsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] \\ \epsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases}$$

$$G = \frac{2,06 \cdot 10^5}{2(1+0,29)} = 7,98 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{2,06 \cdot 10^5} [120 - 0,29(30 + 20)] = 5,12 \cdot 10^{-4}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{2,06 \cdot 10^5} [30 - 0,29(120 + 20)] = -5,15 \cdot 10^{-5}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{2,06 \cdot 10^5} [20 - 0,29(120 + 30)] = -1,14 \cdot 10^{-4}$$

$$\gamma_{xy} = 0$$

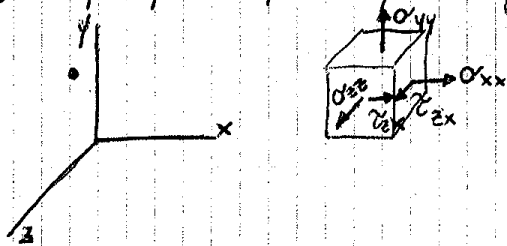
$$\gamma_{yz} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{100}{7,98 \cdot 10^4} = 1,25 \cdot 10^{-3}$$

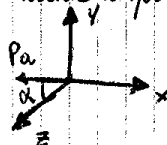
$$[E] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yz}}{2} & \epsilon_{yy} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

b) attraverso i cerchi di Mohr delle tensioni oppure attraverso i cerchi di Mohr delle deformazioni

①b)  $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$  perciò y è il riferimento principale  $\Rightarrow \sigma_{yy} = 30$  MPa principale



consultando i cerchi di Mohr e sapendo che y è la direzione principale



$$\alpha^* = \frac{1}{2} \arctan \left| \frac{2 \gamma_{xz}/2}{\epsilon_{xx} - \epsilon_{zz}} \right| = \frac{1}{2} \arctan [2] = 31,7^\circ$$

$$\gamma_{xz} > 0, \epsilon_{xx} > \epsilon_{zz} \Rightarrow -90^\circ < \alpha < -45^\circ \Rightarrow \alpha = \alpha^* - 90 = -58,3^\circ$$

esercizio ②

un punto di un corpo con  $\begin{cases} E = 6,90 \cdot 10^4 \text{ MPa} \\ \nu = 0,31 \end{cases}$

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = -2,22 \cdot 10^{-3} \\ \epsilon_{yy} = 2,52 \cdot 10^{-3} \\ \gamma_{xy} = 2,28 \cdot 10^{-3} \end{cases}$$

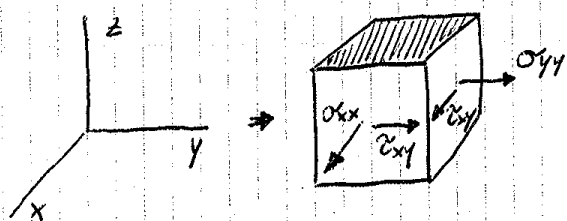
in stato di tensione  
piana

determinare: a)  $[\sigma]$  in  $(x, y, z)$

b)  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  e  $\alpha$

ipotesi: faccia  $\perp z \Rightarrow \sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \text{ MPa} \rightarrow$  se tensione piana

in tal caso  $z$  è anche una direzione principale  
 $z$  è detta superficie libera



la tensione piana si assume anche per elementi  
rettali

$\sigma_{zz} = 0 \text{ MPa}$  principale

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}] \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx}] \end{cases}$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \gamma_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\sigma_{xx} = -110 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{yy} = 140 \text{ MPa}$$

con  $G = 2,63 \cdot 10^4 \text{ MPa}$   $\gamma_{xy} = 60 \text{ MPa}$

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -1,35 \cdot 10^{-4}$$

il tensore della tensione è completo

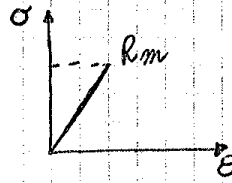
esercitazione ④

esempi su ipotesi di cedimento, coefficiente di sicurezza

esempio ①

materiale fragile, ghisa CJ-L300

sogetto a  $[\sigma] = \begin{bmatrix} 60 & -75 & 0 \\ -75 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{bmatrix} \text{ MPa}$

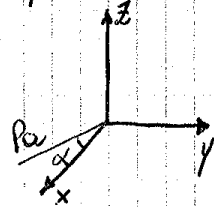
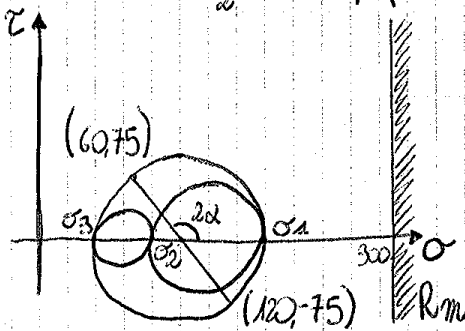


$$\sigma_{lim} = 300 \text{ MPa}$$

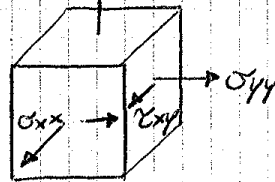
ipotesi:  $\max \sigma : \sigma_{id} = \sigma_1$

tensioni principali

$$\sigma_{a,b} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



z -> direzione principale  $\Rightarrow \sigma_{zz} = \text{principale}$



$$\sigma_{a,b} = \frac{60 + 120}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60 - 120}{2}\right)^2 + 75^2} = \begin{cases} 171 \text{ MPa} \\ 9 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\sigma_1 = 171 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = 55 \text{ MPa} \quad \sigma_3 = 9 \text{ MPa}$$

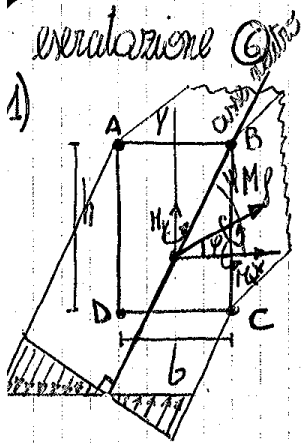
$$|\tan 2\alpha| = \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right| = \left| \frac{-150}{-60} \right| = 2,5 \Rightarrow \alpha \cong 56^\circ$$

$$\sigma_{id} = \sigma_1 = 171 \text{ MPa}$$

coefficiente di sicurezza

$$C_s = \frac{\sigma_{lim}}{\sigma_{id}} = \frac{300}{171} = 1,75$$

insufficiente per un materiale fragile, dovrebbe essere almeno 3



$b = 20 \text{ mm}$   
 $h = 40 \text{ mm}$   
 $M_y = 8 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$   
 $\psi = 30^\circ$

$A = (-10; 20)$   
 $B = (10; 20)$   
 $C = (10; -20)$   
 $D = (-10; -20)$

$M_x = M_y \cos 30 = 8 \cdot 10^5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6,93 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$

$M_y = M_y \sin 30 = 8 \cdot 10^5 \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$

$J_{xx} = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \cdot 40^3}{12} = 1,07 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 = J_1$ 
 $J_{yy} = \frac{hb^3}{12} = \frac{40 \cdot 20^3}{12} = 2,67 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 = J_2$

$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{J_{xx}} y - \frac{M_y}{J_{yy}} x$

asse neutro  $\sigma_{zz} = 0$

$y = \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_{xx}}{J_{yy}} x = \tan \psi x = \tan 30 \cdot \frac{1,07 \cdot 10^5}{2,67 \cdot 10^4} x = 2,31 x \rightarrow \psi = 66,8^\circ$

$\sigma_{zz}^A = \frac{6,93 \cdot 10^5}{1,07 \cdot 10^5} (20) - \frac{4 \cdot 10^5}{2,67 \cdot 10^4} (-10) = 279 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_{zz}^C = \frac{6,93 \cdot 10^5}{1,07 \cdot 10^5} (-20) - \frac{4 \cdot 10^5}{2,67 \cdot 10^4} (10) = -279 \text{ N/mm}^2$

se fosse presente anche la trazione,  $N = 60 \text{ kN} \rightarrow$  si aggiunge una costante  $N/A$

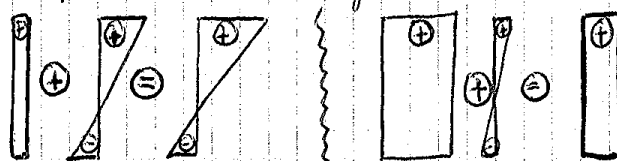
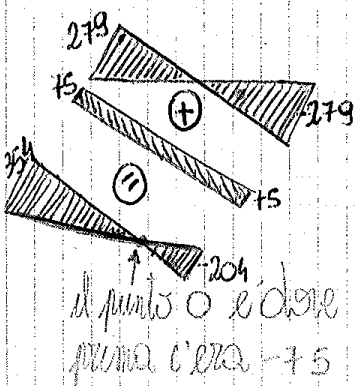
$A = b \cdot h = 800 \text{ mm}^2$

$N/A = \frac{60000}{800} = 75 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_{zz} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_{xx}} y - \frac{M_y}{J_{yy}} x \rightarrow \sigma_{zz}^A = 279 + 75 = 354$

$\sigma_{zz}^C = -279 + 75 = -204$

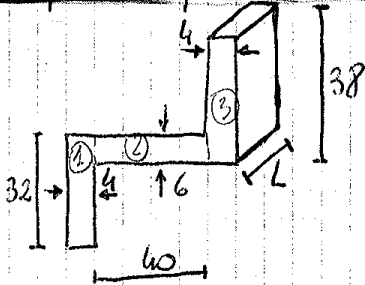
con possibili trazione + flessione



esercitazione 7

- tema {
- ① parete sottile aperta
  - ② parete sottile chiusa
  - ③ sezione circolare piena o cava

esempio ① parete sottile aperta



$L = 600 \text{ mm}$

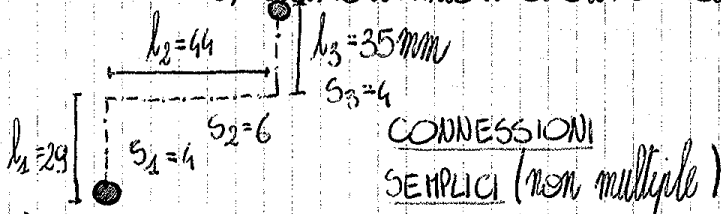
la sezione è sottoposta a momento torcente

$M_t = 9 \cdot 10^4 \text{ Nmm}$

$G = 7,29 \cdot 10^4 \text{ MPa}$

Determinare: a) tensioni

b) rotazione sezione a distanza 600 mm dalla zona di vincolo



→ linea media, continua in cui il flusso delle tensioni è obbligato a seguire una data direzione  
 connessioni multiple →

a)

$$J_{t1} = \frac{1}{3} (h_1 - 0,3s_1) s_1^3 = \frac{1}{3} (29 - 0,3 \cdot 4) 4^3 = 593 \text{ mm}^4$$

solo un'estremità è vincolata

$$J_{t2} = \frac{1}{3} (h_2 \cdot s_2^3) = \frac{1}{3} 44 \cdot 6^3 = 3168 \text{ mm}^4$$

$$J_{t3} = \frac{1}{3} (h_3 - 0,3s_3) s_3^3 = \frac{1}{3} (35 - 0,3 \cdot 4) 4^3 = 721 \text{ mm}^4$$

quando ci sono estremità libere

$$J_t = J_{t1} + J_{t2} + J_{t3} = 593 + 3168 + 721 = 4482 \text{ mm}^4$$

$$\tau_{1 \text{ MAX}} = \frac{M_t \cdot s_1}{J_t} = \frac{9 \cdot 10^4}{4482} \cdot 4 = 80 \text{ MPa}$$

$$\tau_{2 \text{ MAX}} = \frac{M_t \cdot s_2}{J_t} = \frac{9 \cdot 10^4 \cdot 6}{4482} = 120 \text{ MPa}$$

$$\tau_{3 \text{ MAX}} = \frac{M_t \cdot s_3}{J_t} = 80 \text{ MPa}$$

tensioni longitudinali massime nei rettangoli 1,2,3

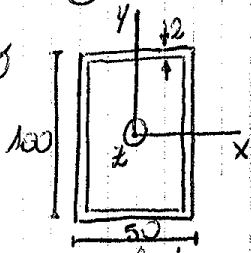
b)

$$\theta' = \frac{M_t}{J_t \cdot G} \Rightarrow \Delta \theta = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot J_t} = \frac{9 \cdot 10^4 \cdot 600}{7,29 \cdot 10^4 \cdot 4482} = 0,153 \text{ rad} \approx 8,77^\circ$$

si considerano i rettangoli costituenti la figura

esercitazione 8

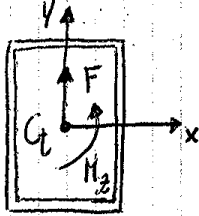
1) taglio



$F = 4,5 \cdot 10^4 \text{ N}$

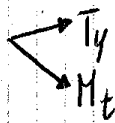
valutare: distribuzione tensioni, valore e posizioni delle tensioni max.

i) sistema equivalente con  $T_y = F$  applicato in  $C_t$

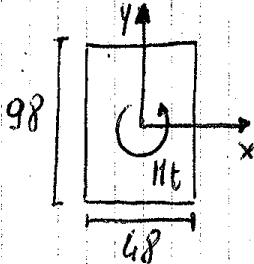


$M_z = 4,5 \cdot 10^4 \cdot 24 = F \cdot 24 = 1,08 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$

sovrapposizione effetti

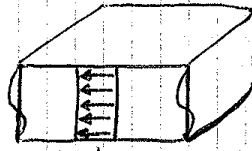


ii) considera contributo a  $\tau$  dato solo da  $M_t$

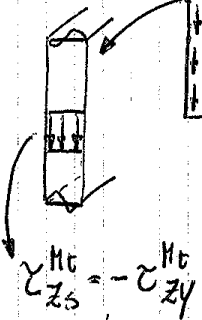


$$\tau_{z_0}^{M_t} = \frac{M_t}{2 \Omega_s} = \frac{1,08 \cdot 10^6}{2 \cdot 4704 \cdot 2} = 57 \text{ MPa}$$

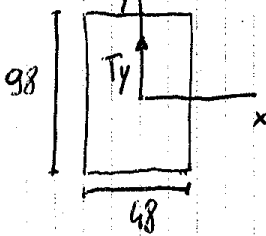
$\Omega = 48 \cdot 98 = b \cdot h = 4704 \text{ mm}^2$



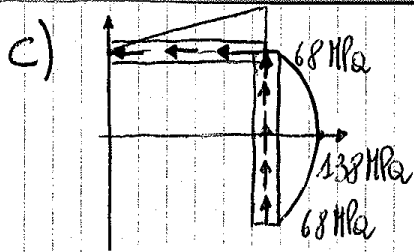
$\tau_{z_0}^{M_t} = 57 \text{ MPa} = -\tau_{z_x}^{M_t}$



iii) considera contributo a  $\tau$  dato dal solo  $T_y$



$\xi \Rightarrow$  scelta lungo linea media  
 a) origine ad un estremo libero, se  $\xi$   
 b) origine lungo assi di simmetria  $\equiv$  direzione del taglio  
 se  $\xi$  estremo libero  
 c) origine in un punto di rotazione della linea media



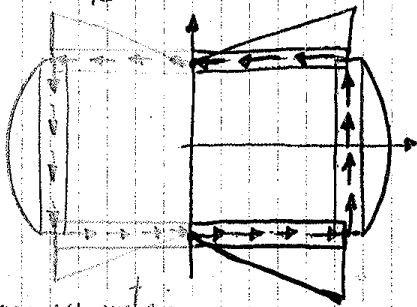
$\tau_{z5,2} > 0 \Rightarrow$  discordi con  $\epsilon_2$

III tratto:  $0 \leq \epsilon_3 \leq \frac{b}{2}$

A)  $S_{x,3}^* = A_3 \cdot y_{G_3}^* = s \cdot \epsilon_3 \cdot \left(-\frac{b}{2}\right) = -98 \epsilon_3$

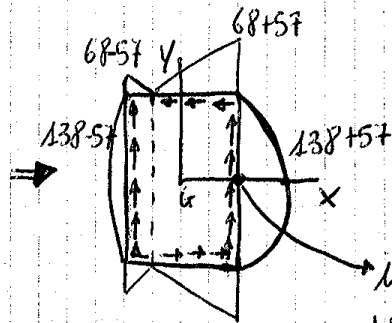
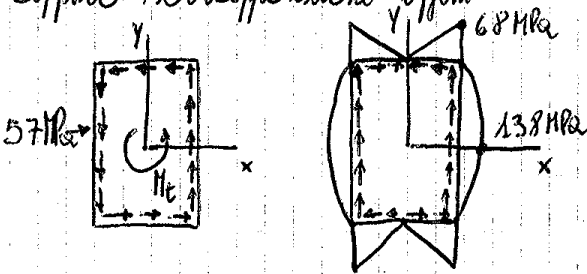
B)  $\tau_{z5,3} = \frac{T_y S_{x,3}^*}{J_{xx} \cdot 2} = -2,8445 \epsilon_3 < 0$  ( $\epsilon_3 = 0$ )  
 $-68 \text{ MPa}$  ( $\epsilon_3 = \frac{b}{2}$ )

c)  $\tau_{z5,3} < 0 \Rightarrow \tau$  concordi con  $\epsilon_3$

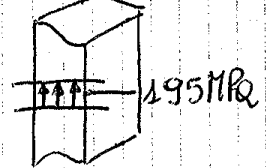


per simmetria

IV Applicazione sovraposizione effetti



il punto più sollecitato



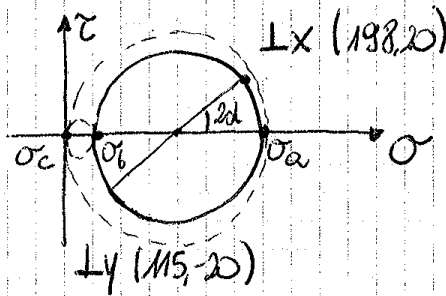


$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx}) = 115 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = 7,98 \cdot 10^4 (-2,5 \cdot 10^{-4}) = -20 \text{ N/mm}^2$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{7,98 \cdot 10^4}{2(1+0,29)} = \frac{2,06 \cdot 10^5}{2(1,29)}$$

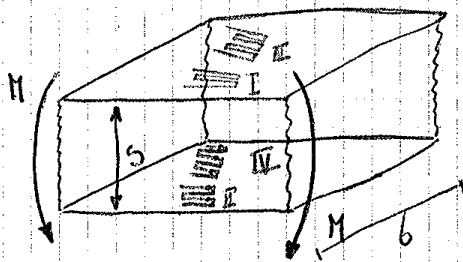
Referimento principale



$$\tan 2\alpha = \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right| = \frac{2 \cdot 20}{198 - 115} = 0,482$$

$$\Rightarrow \alpha = 12,8^\circ$$

es 3) trasduttore



per la a flessione  
parte completa  
 $E = 7,24 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$   
 $R_{p0,2} = 240 \text{ N/mm}^2$

$$s = 10 \text{ mm}$$

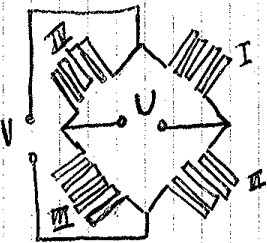
$$b = 25 \text{ mm}$$

$$K = 2,1$$

$$V = 5 \text{ V}$$

$$\epsilon_{lim} = 5000 \frac{\mu\text{m}}{\text{m}} = 5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{m}}$$

momento applicato  $4 \cdot 10^4 \text{ Nmm} \Rightarrow U = ?$



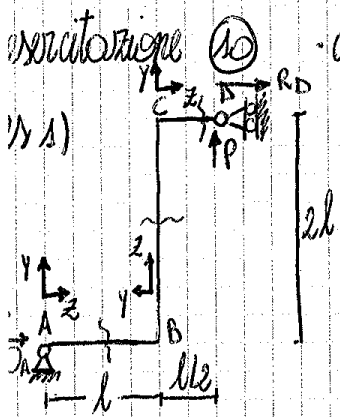
$$U = \frac{VK}{4} (\epsilon_I - \epsilon_{II} + \epsilon_{III} - \epsilon_{IV}) = \frac{VK}{4} 4\epsilon$$

$$J = \frac{b s^3}{12} = \frac{25 \cdot 10^3}{12} = 2,083 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$\sigma = \frac{M}{J} \frac{s}{2} = \frac{4 \cdot 10^4}{2,083 \cdot 10^3} \cdot \frac{10}{2} = 96 \text{ N/mm}^2 < R_{p0,2}$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{96}{7,24 \cdot 10^4} = 1,33 \cdot 10^{-3}$$

$$U = \frac{5 \cdot 2,1 \cdot K \cdot 1,33 \cdot 10^{-3}}{4} = 14 \cdot 10^{-3} \text{ V} = 14 \text{ mV}$$

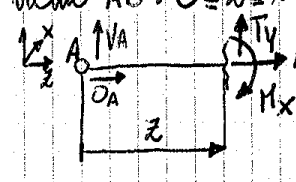


caratteristiche della reattazione  
 z diretto come la linea d'ome  
 x entrante  
 y verso destra

① reazioni vincolari ( $V_A, O_A, R_D$ )

$$\begin{aligned} \uparrow: V_A + P &= 0 & V_A &= -P \\ \rightarrow: O_A + R_D &= 0 & O_A &= -R_D = -\frac{3P}{4} \\ \downarrow: -P(\frac{3}{2}l) + R_D 2l &= 0 & R_D &= \frac{3P}{4} \end{aligned}$$

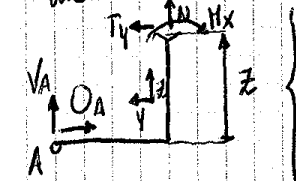
tratto AB:  $0 \leq z \leq l$



$$\begin{cases} \uparrow: V_A + T_y = 0 \Rightarrow T_y = -V_A = P \\ \rightarrow: O_A + N = 0 \Rightarrow N = -O_A = \frac{3P}{4} \\ \curvearrowright: V_A z + M_x = 0 \Rightarrow M_x = -V_A z = Pz = \begin{cases} 0, z=0 \\ Pl, z=l \end{cases} \end{cases}$$

il mom. flettente nelle cerniere è 0

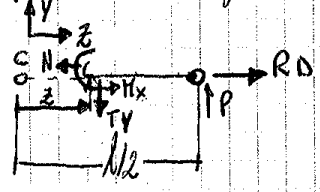
tratto BC:  $0 \leq z \leq 2l$



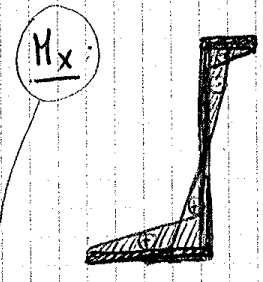
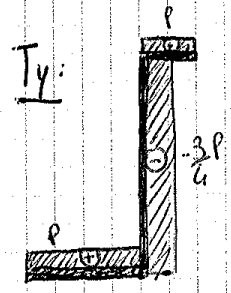
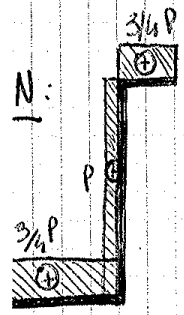
$$\begin{cases} \uparrow: V_A + N = 0 \Rightarrow N = -V_A = P \\ \rightarrow: O_A - T_y = 0 \Rightarrow T_y = -\frac{3P}{4} \\ \curvearrowright: V_A z + M_x - O_A z = 0 \Rightarrow M_x = O_A z - V_A z = -\frac{3P}{4}z + Pl = \begin{cases} Pl, z=0 \\ -\frac{Pl}{2}, z=2l \end{cases} \end{cases}$$

tratto CD:  $0 \leq z \leq l/2$

(convenzione faccia negativa)



$$\begin{cases} \uparrow: -T_y + P = 0 \Rightarrow T_y = P \\ \rightarrow: -N + R_D = 0 \Rightarrow N = R_D = \frac{3P}{4} \\ \curvearrowright: -\frac{Pl}{2} - z - M_x = 0 \Rightarrow M_x = -(\frac{Pl}{2} - z) = \begin{cases} -\frac{Pl}{2}, z=0 \\ 0, z=l/2 \end{cases} \end{cases}$$



lo posso ricavare anche dal diagramma di taglio derivando i vari valori