



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1340

ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Leschiera

MATERIA: Fisica I + Applicaz. Prof.Penna

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

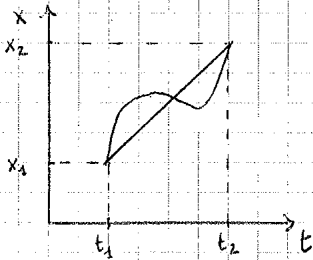
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

MOTO RETTILINEO

Il moto rettilineo si può descrivere tramite l'uso della sola coordinata $x(t) \rightarrow$ DIAGRAMMA ORARIO (a un istante t generico corrisponde un punto x dello spazio)

Velocità media



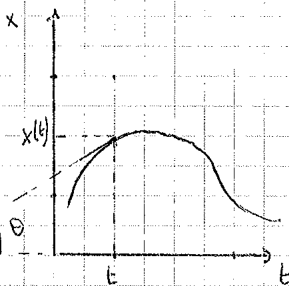
$V_m = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$ \rightarrow caratterizza la rapidità con cui avviene lo spostamento
 \downarrow
 è una informazione generale

In un moto generico, però, la velocità non è costante nel tempo

Velocità istantanea

Quando si suddivide lo spazio in parti infinitesime dx al tempo dt si trova la velocità istantanea.

$\lim_{t' \rightarrow t} \frac{x(t') - x(t)}{t' - t} \rightarrow v(t) = \left(\frac{dx}{dt} \right)$ la velocità istantanea è la rapidità delle variazioni temporali della posizione nell'istante t considerato
 \rightarrow se $\dot{x} > 0$ la curva è crescente
 se $\dot{x} < 0$ la curva è decrescente



$v(t) = \tan \theta \rightarrow$ è il punto del grafico

Se conosco $v(t)$ posso trovare $x(t)$?

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \rightarrow \int_{t_0}^t \frac{dx}{ds} ds \stackrel{\text{è una cost}}{\rightarrow} \int_{t_0}^t v(s) ds \rightarrow x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t v(s) ds$$

$$\boxed{x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(s) ds}$$

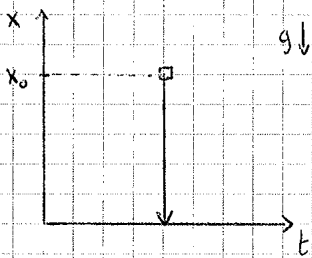
$$x(t_0) = x_0$$

equazione del moto per trovare lo spazio percorso

MOTO VERTICALE DI UN CORPO

Un corpo lasciato libero di cadere in vicinanza della superficie terrestre si muove verso il basso con un'accelerazione che vale $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

→ moto rettilineo uniformemente accelerato



$$x_0 = h$$

$$v_0 = 0$$

$a = -g$ → è negativa perché l'asse x è rivolto verso l'alto

$$v(t) = -gt \iff x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

tempo di caduta $= \sqrt{\frac{2h}{g}}$

velocità di caduta $= \sqrt{2gh}$ → $v_c = -g \cdot t_c$

In generale → $v(t) = v_0 - gt$

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

MOTO ARMONICO SEMPLICE

$$x(t) = A \sin(\underbrace{\omega t + \varphi}_{\text{fase iniziale}})$$

ampiezza fase del moto

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \iff T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Il massimo spostamento dello spazio dipende da A

Se $\varphi = 0$ la sinusoidale parte dal tempo $t=0$

$$\rightarrow x(t) = A \sin(\omega t)$$

Se $\varphi \neq 0$ la sinusoidale parte da punto in cui

$$x(t) = A \sin \varphi$$

$$\text{Se } \varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow x(t) = A \cos(\omega t)$$

Periodicità → se ad un istante t , una funzione è periodica quando si ripete ogni T

$$\rightarrow x(t) = x(t+T) \Rightarrow x(t+T) = A \sin(\omega(t+T) + \varphi)$$

$$\Rightarrow A \sin(\omega t + \varphi + \frac{\omega T}{2\pi})$$

$$\Rightarrow A \sin(\omega t + \varphi) = x(t) \rightarrow$$

$$\boxed{x(t+T) = x(t)}$$

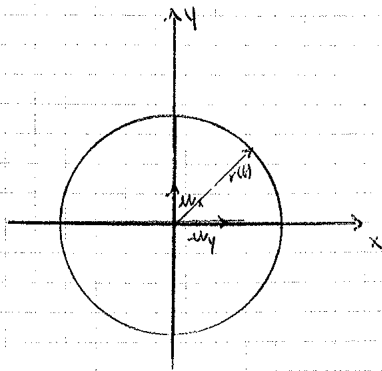
$$a(t) = -A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow a(t) = -\omega^2 x(t) \text{ legge nuova}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

Se un moto soddisfa l'eq. allora è un moto armonico





$$r(t) = x(t) \hat{u}_x + y(t) \hat{u}_y$$

$$x(t) = R \cos(\omega t)$$

$$y(t) = R \sin(\omega t)$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Velocità istantanea

$$v(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (x \hat{u}_x + y \hat{u}_y + z \hat{u}_z) \rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} \hat{u}_x + \frac{dy}{dt} \hat{u}_y + \frac{dz}{dt} \hat{u}_z}$$

$$\rightarrow v_x(t) \hat{u}_x + v_y(t) \hat{u}_y + v_z(t) \hat{u}_z \iff \lim_{t' \rightarrow t} \frac{r(t') - r(t)}{t' - t} \rightarrow \lim_{t' \rightarrow t} \frac{x(t') - x(t)}{t' - t} + \frac{y(t') - y(t)}{t' - t} + \frac{z(t') - z(t)}{t' - t}$$

legge omnia per il vettore posizione $\rightarrow \int_{t_0}^t \vec{v}(s) ds = \int_{t_0}^t \frac{d\vec{r}(s)}{dt} \rightarrow \vec{r}(t) = r(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(s) ds$

$$\rightarrow \boxed{r(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t-t_0)} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x(t_0) + v_x(t-t_0) \\ y(t) = y(t_0) + v_y(t-t_0) \\ z(t) = z(t_0) + v_z(t-t_0) \end{cases}$$

accelerazione media

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

accelerazione istantanea

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\vec{v}(t') - \vec{v}(t)}{t' - t} \rightarrow \frac{dv_x(t)}{dt} \hat{u}_x + \frac{dv_y(t)}{dt} \hat{u}_y + \frac{dv_z(t)}{dt} \hat{u}_z$$

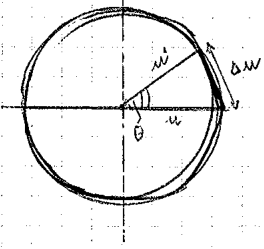
$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} \\ a_z(t) = \frac{dv_z}{dt} \end{cases} \rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} \Rightarrow \int_{t_0}^t \frac{d\vec{v}}{ds} ds = \int_{t_0}^t \vec{a}(s) ds \rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(s) ds$$

\rightarrow se $\vec{a} = \omega s \hat{k} \rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \vec{a}(t-t_0)$ moto unif accelerato

$$\rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \underbrace{\left[\vec{v}(t_0) + \vec{a}(s-t_0) \right]}_{\int_{t_0}^t \vec{v}(s) ds} ds \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \vec{v}(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2} \vec{a}(t-t_0)^2$$

\rightarrow se $t_0 = 0 \rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + v_0(t) + \frac{1}{2} \vec{a} t^2}$

livello di un vettore



$$\frac{dw}{dt} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\hat{w}' - \hat{w}}{t' - t} \rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{w}}{\Delta t}$$

$$\rightarrow \frac{|\Delta w|}{\Delta t} \frac{\Delta w}{|\Delta w|}$$

$$\rightarrow \Delta \theta = |\Delta w| \leftrightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \left(\frac{\Delta w}{|\Delta w|} \right)$$

$\hat{w}_\perp \rightarrow$ vettore ortogonale

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\hat{w}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \hat{w}_\perp}$$

Applicazioni

- Moto uniforme $\rightarrow |v| = \text{cost}$

$$\rightarrow \vec{d}_T = \frac{dv}{dt} \hat{w}_T = 0$$

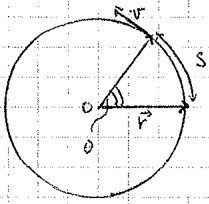
$\rightarrow \vec{d}_N = \frac{v^2}{R} \hat{w}_N \neq 0 \rightarrow \hat{d}_N$ è dipendente dalla circonferenza osculatrice infatti se il raggio è grande \hat{d}_N è piccola

- Moto rettilineo

$$\vec{d}_N = \frac{v^2}{R} \hat{w}_N \neq 0 \rightarrow \vec{d}_N = 0$$

$$\vec{d}_T = \frac{dv}{dt} \hat{w}_T =$$

- Moto circolare



$$s = R\theta \quad R = \text{cost} = r(t)$$

$$\vec{v} = v \hat{w}_T \Rightarrow \frac{ds}{dt} \hat{w}_T \rightarrow R \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \hat{w}_T$$

\rightarrow velocità angolare w

$$w = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$

uniforme:

$$\int_0^t \frac{d\theta}{d\tau} d\tau = \int_0^t w(\tau) d\tau \rightarrow \theta(t) - \theta(0) = \int_0^t w(\tau) d\tau$$

\rightarrow moto uniforme $w = \text{cost}$

$$\rightarrow \boxed{\theta(t) = \theta(0) + w t}$$

accelerazione:

$$\vec{d} = \vec{d}_N + \vec{d}_T \rightarrow \vec{d}_T = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{d(Rw)}{dt} \rightarrow R \frac{dw}{dt} \rightarrow \text{accelerazione angolare}$$

$$\vec{d}_N = \frac{v^2}{R} = \boxed{w^2 R} \quad \text{moto uniformemente accelerato}$$

$$w(t) = w(0) + \int_0^t d(\tau) d\tau \rightarrow \boxed{w(t) = w(0) + \alpha t}$$

\rightarrow In funzione della velocità angolare

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t [w(0) + \alpha \tau] d\tau$$

$$\theta(t) = \theta(0) + w(0)t + \frac{\alpha}{2} (t^2)$$

In funzione dello spazio



3° principio \rightarrow Se un corpo esercita una forza $\vec{F}_{1,2}$ (da un corpo 1 che lo origina e subita da un corpo 2), allora il corpo che subisce la forza (corpo 2) reagisce esercitando una forza $\vec{F}_{2,1}$ che è uguale e contraria $\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}}$

Le due leggi di Newton sono chiamate di Fondamento delle dinamiche

\Rightarrow Se si conoscono le varie forze che agiscono su un sistema e le loro leggi è possibile determinare il futuro comportamento di un corpo

QUANTITÀ DI MOTO

$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$ \rightarrow equazione della quantità di moto

Dal 2° principio $\rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \iff m \text{ è costante } \rightarrow m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$

\rightarrow Questa è la forma più generale della seconda legge di Newton

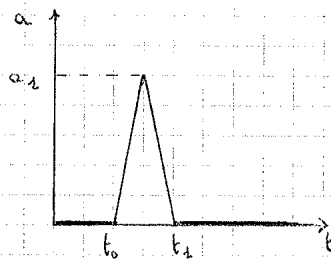
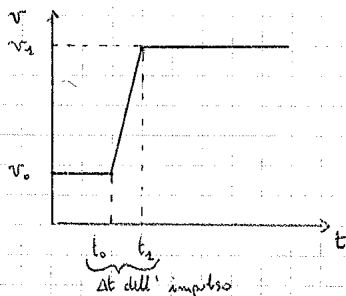
TEOREMA DELL'IMPULSO

IMPULSO: l'impulso di una forza applicata provoca la variazione di velocità di un corpo \rightarrow è la variazione della quantità di moto infatti $\rightarrow d\vec{p} = \vec{F} dt$

$$J = \int_0^t \vec{F}(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{d\vec{p}(\tau)}{d\tau} d\tau \rightarrow \boxed{p(t) - p(0) = m \vec{v}(t) - m \vec{v}(0)}$$

Applicazioni: calcolare la forza media esercitata su una molla in vari fenomeni

impulsivi \rightarrow (urti) $\left\{ \begin{array}{l} \text{colpisce di un pallone} \\ \text{palline da biliardo} \\ \text{pallone sul muro} \end{array} \right.$



$$\int_{t_0}^t \vec{F}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t m \cdot \vec{v}(\tau) d\tau \rightarrow \underbrace{\vec{F}(t) - \vec{F}(t_0)}_{\Delta \vec{F}(t)} = m (\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0))$$

$$\rightarrow \vec{F}_{\text{media}} = \frac{m (\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0))}{t - t_0}$$

Sapendo che $\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{2,1} = \frac{dp_1}{dt} \\ \vec{F}_{1,2} = \frac{dp_2}{dt} \end{array} \right. \rightarrow \frac{dp_1}{dt} = -\frac{dp_2}{dt} \rightarrow \int_{t_0}^t \frac{dp_1}{d\tau} d\tau = - \int_{t_0}^t \frac{dp_2}{d\tau} d\tau$$

$$\Rightarrow p_1(t) - p_1(t_0) = -p_2(t) + p_2(t_0) \iff p_1(t) + p_2(t) = p_1(t_0) + p_2(t_0)$$

LEGGE DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

L'equilibrio statico è caratterizzato da un altissimo numero di legami tra le molecole dei due corpi a contatto (sono legami di natura chimica)

L'attrito statico è l'energia che serve per abbattere tutti questi legami microscopici

L'attrito dinamico è invece l'energia che serve per abbattere tutti i legami istantanei che si formano tra le molecole dei due corpi a contatto → sono più deboli e meno frequenti

FORZA VISCOSA

Forza di frenamento di un fluido su una massa

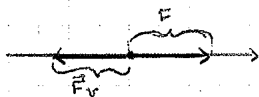
$$\rightarrow \vec{F}_{\text{viscosa}} = -\lambda \vec{v}$$

Equazione di Newton diventa $\rightarrow m \cdot \vec{a} = \vec{F}_v \Leftrightarrow m \cdot \vec{a} = -\lambda \vec{v} \rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{-\lambda}{m} \vec{v}$

$K =$ coefficiente dell'attrito viscoso

$\vec{v} = v \hat{u}_x \rightarrow \frac{dv}{dt} = -kv \Rightarrow v(t) = v_0 + e^{-kt}$ CASO UNIDIMENSIONALE

Applicazione \rightarrow corpo soggetto a $\begin{cases} \vec{F}_v \text{ positiva} \\ \text{forza costante} = \vec{F} \end{cases}$



$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{F}_v \rightarrow m \cdot \vec{a} = \vec{R} \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - m \cdot K \cdot \vec{v}$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} - K \vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + K \vec{v} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\rightarrow \int_{t_0}^t \frac{d\vec{v}}{\frac{\vec{F}}{m} + K \vec{v}} = \int_{t_0}^t dt \stackrel{scelta}{=} -\frac{1}{K} \ln \left[\frac{\vec{F}}{m} + K \vec{v} \right]_{v_0}^v = t$$

$$A = e^{-Kt} \cdot e^{-Kt_0}$$

se $v_0 = 0 \Rightarrow \ln \left(\frac{\vec{F}}{m} + K v \right) = -Kt \rightarrow \frac{\vec{F}}{m} + K v = e^{-Kt}$

$$v(t) = \frac{1}{K} \left(\frac{\vec{F}}{m} - e^{-Kt} \right)$$

$$v_0 = \frac{1}{K} \left(\frac{\vec{F}}{m} - A \right) \rightarrow v_0 = \frac{\vec{F}}{mK} - \frac{A}{K} \Rightarrow A = \frac{\vec{F}}{m} - K v_0$$

$$\rightarrow v(t) = \frac{\vec{F}}{mK} - \left(\frac{\vec{F}}{mK} - v_0 \right) e^{-Kt}$$

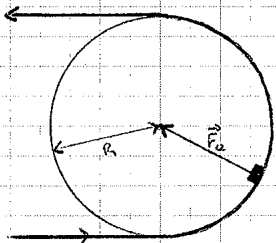
velocità limite $\Rightarrow v(\infty) = \frac{\vec{F}}{mK} \rightarrow$ dopo un tempo

$\vec{F}_v = -\lambda v$ adatta a corpi non troppo veloci

$m \frac{dv}{dt} = F - \alpha v^2 \rightarrow$ per corpi veloci $\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} cgv$

FORZA CENTRIFUGA

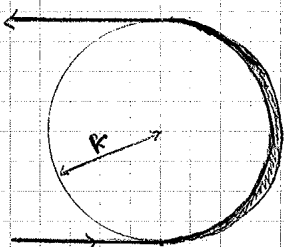
1° applicazione → Un'auto che percorre una curva a velocità costante con presenza di attrito statico μ_s . La curva ha raggio R .



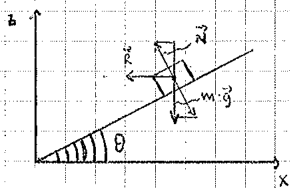
$$\begin{aligned}
 m \cdot \vec{a} &= \vec{F}_a & \vec{F}_a &= \hat{\mu}_N \cdot F_a \\
 \vec{a} &= \vec{a}_T + \vec{a}_N & \Rightarrow \frac{dv}{dt} \hat{w}_T &+ \frac{v^2}{R} \hat{w}_N \\
 \begin{cases} m \vec{a}_T = 0 \\ m \vec{a}_N = F_a \end{cases} & \rightarrow \begin{cases} m \frac{dv}{dt} = 0 \\ m \frac{v^2}{R} = F_a \end{cases} \\
 \begin{cases} v = \text{cost} \\ m \frac{v^2}{R} = F_a \leq F_a^{\text{max}} = \mu_s m \cdot g \end{cases} \\
 \Rightarrow \boxed{v \leq \sqrt{\mu_s R \cdot g}}
 \end{aligned}$$

La forza centripeta dipende dalle applicazioni.

2° applicazione → Un'auto che percorre una curva di raggio R a velocità $|v| = \text{cost}$ in assenza di attrito. La strada ha inclinazione θ . Trovare v per cui l'auto non esce dalla pista.



VISTA DALL'ALTO



VISTA DA UN LATO

$$\begin{aligned}
 \vec{R} &= \vec{N} + m\vec{g} \\
 m\vec{a} &= \vec{R} \\
 \vec{a} &= a_z \hat{w}_z + \vec{a}_N + \vec{a}_T
 \end{aligned}$$

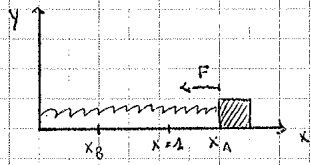
$$\begin{cases} a_z = 0 & \text{poiché } N \cos \theta = mg \rightarrow N = \frac{mg}{\cos \theta} \\ a_T = 0 & \Leftrightarrow v = \text{cost} \\ m \frac{v^2}{r} = N \sin \theta \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m a_z = R_z \rightarrow N \cos \theta - mg = 0 \\ m a_T = 0 \\ m a_N = R_x \rightarrow N \sin \theta \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{v = \sqrt{r \cdot g \cdot \tan \theta}}$$

POTENZA ISTANTANEA

$$\vec{P} = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} \Rightarrow m \cdot \vec{a} \cdot \vec{v} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) \Rightarrow \frac{dE_k}{dt}}$$

LAVORO DI UNA FORZA ELASTICA



$$\vec{F} = \hat{u}_x (-k)(x-L)$$

$$W_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \int_{x_A}^{x_B} \hat{u}_x (-k)(x-L) \cdot (\hat{u}_x dx)$$

$$\rightarrow \int_{x_A}^{x_B} -k(x-L) dx \Rightarrow \left[-\frac{k}{2}(x-L)^2 \right]_{x_A}^{x_B}$$

$$W_{AB} = -(E_p(B) - E_p(A))$$

ΔE_p = variazione dell'energia potenziale

$$\rightarrow \left[-\frac{k}{2}(x_B-L)^2 + \frac{k}{2}(x_A-L)^2 \right] \rightarrow E_p(x)$$

LAVORO DI UN CORPO DI FORZA COSTANTE

$$\vec{F} = F_x \hat{u}_x + F_y \hat{u}_y + F_z \hat{u}_z = \text{costante}$$

$$W_{AB} = \int_{A_y}^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_{A_y}^B d\vec{r} \rightarrow \vec{F} \cdot \left[\hat{u}_x(x_B - x_A) + \hat{u}_y(y_B - y_A) + \hat{u}_z(z_B - z_A) \right]$$

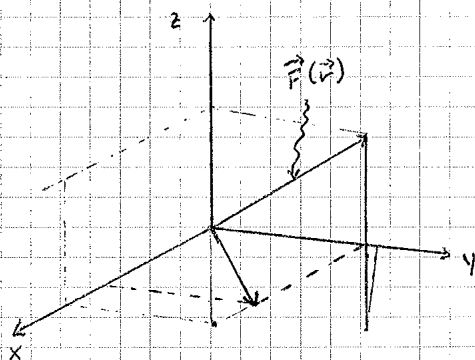
$$\rightarrow \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \Rightarrow \boxed{- (E_p(\vec{r}_B) - E_p(\vec{r}_A))} \iff \boxed{E_p(\vec{r}) = C - \vec{F} \cdot \vec{r}}$$

LAVORO DI UN CAMPO DI FORZA CENTRALE

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \hat{u}_r$$

$$\hat{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$F(r) = -\frac{K}{r^2}$$



$$W_{AB} = \int_{A_y}^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \Rightarrow \int_A^{A_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{A_1}^{A_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{A_2}^{A_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{A_3}^{A_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{A_4}^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$\hat{u}_r \cdot d\vec{r}$
Valgono 0 perché $F \parallel d\vec{r}$

$$\rightarrow \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = F(r) \hat{u}_r \cdot d\vec{r} \Rightarrow F(r) \underbrace{\hat{u}_r \cdot \hat{u}_r}_{1} d\vec{r}$$

$$\Rightarrow F(r) d\vec{r} = -\frac{K}{r^2} d\vec{r}$$

$$\rightarrow \int_A^{A_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{A_2}^{A_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{A_4}^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow W_{AB} = \int_{r_1}^{r_2} -\frac{K}{r^2} dr + \int_{r_2}^{r_3} -\frac{K}{r^2} dr + \int_{r_4}^{r_0} -\frac{K}{r^2} dr \Rightarrow \left[-\frac{K}{r} + \frac{K}{r_A} \right]$$

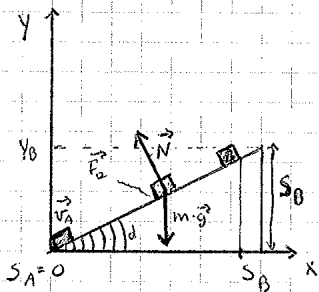
$$\rightarrow \boxed{E_p(r) = -\frac{K}{r} + C}$$

FORMULA DEL BILANCIO ENERGETICO

$$\vec{F}(v) = -\nabla E_p = -\left(\hat{m}_x \frac{dE_p}{dx} + \hat{m}_y \frac{dE_p}{dy} + \hat{m}_z \frac{dE_p}{dz}\right)$$

$$W_{AB} = \int_A^B (\vec{F} + \vec{F}_a) \cdot d\vec{r} = \int_{A_x}^B \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{A_y}^B \vec{F}_a \cdot d\vec{r} = -(E_p^B - E_p^A) + W_{AB}'$$

lavoro della forza di attrito (non è conservativa) varia in base al sistema



$$E_p = + mgy + c$$

$$E_p = -\vec{F} \cdot \vec{r} = -(-mg \hat{m}_y) \cdot \vec{r}$$

energia potenziale nel campo gravitazionale

$M_d \rightarrow$ noto (coefficiente di attrito dinamico)

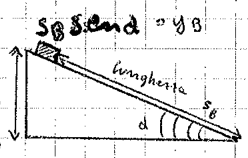
$$\vec{F}_a = M_d \cdot \vec{N} \Rightarrow mg \cos \alpha \cdot M_d$$

$$\vec{F}_a = -\vec{F}_a \hat{m}_s$$

$$v_A \text{ nota}$$

$$v_B = 0$$

$$\frac{m}{2} v_B^2 - \frac{m}{2} v_A^2 = -mg(y_B - y_A) + \int_{s_A}^{s_B} \vec{F}_a \cdot d\vec{s}$$



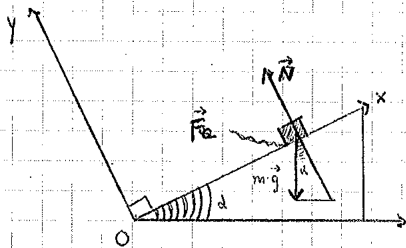
$$-\frac{m}{2} v_A^2 = -mg y_B - \int_{s_A=0}^{s_B} (M_d mg \cos \alpha) \cdot ds \Rightarrow -\frac{m}{2} v_A^2 = -mg y_B - F_a s_B$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v_A^2 = g \sin \alpha s_B + M_d g \cos \alpha s_B \Rightarrow$$

$$s_B = \frac{v_A^2}{2g(\sin \alpha + M_d \cos \alpha)}$$

curve uguali in un punto

Non esiste un ente che permette alle varie forze di attrito di essere conservative



$$\vec{R} = m \cdot \vec{a} \quad \begin{cases} R_x = -F_a - mg \sin \alpha \\ R_y = N - mg \cos \alpha \end{cases}$$

$$x) -F_a - mg \sin \alpha = m a_x$$

$$y) N - mg \cos \alpha = m a_y = 0$$

$$m a_x = -mg \sin \alpha - M_d mg \cos \alpha$$

$$a_x = -g(\sin \alpha + M_d \cos \alpha)$$

$$\begin{cases} x(t_1) = x_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2} a_x t_1^2 \\ v_x(t_1) = v_0 + a_x t_1 \end{cases}$$

$$x(t_1) = v_0 t_1 - \frac{|a_x|}{2} t_1^2 \Rightarrow$$

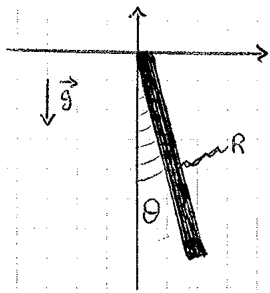
$$\Rightarrow \frac{v_0}{|a_x|} - \frac{|a_x|}{2} \left(\frac{v_0}{|a_x|}\right)^2 \Rightarrow \frac{v_0^2}{2|a_x|} \Rightarrow \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + M_d \cos \alpha)}$$

tempo di arresto

$$v_x(t_1) \Rightarrow v_0 - |a_x| t_1 = 0$$

$$t_1 = \frac{v_0}{|a_x|}$$

GRAFICO DELL' Energia potenziale DEL PENDOLO SEMPLICE



$$E_p(\theta) = E_p(y) = mgy + c \quad \rightarrow \quad -mgR \cos \theta + c$$

$$\begin{cases} y = -R \cos \theta \\ c = mgR \\ \uparrow \\ \text{costante} \end{cases}$$

Applicazione delle formule del gradiente

$$\vec{F}(r) = -\nabla E_p = -\left(\hat{u}_x \frac{dE_p}{dx} + \hat{u}_y \frac{dE_p}{dy} + \hat{u}_z \frac{dE_p}{dz} \right)$$

① Oscillatore armonico

$$E_p(x) = -\frac{k}{2} (x-L)^2$$

$$\vec{F}(x) = -\hat{u}_x \frac{d}{dx} \left(-\frac{k}{2} (x-L)^2 \right) = -\hat{u}_x (k \cdot (x-L))$$

$$E_p(r) = c - \frac{k}{r}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

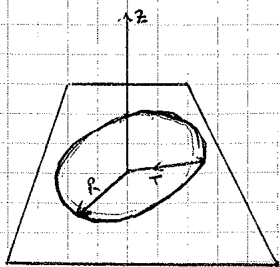
$$\vec{F}(r) = -\frac{k}{r^2} \hat{u}_r$$

$$\frac{dE_p}{dx} = \frac{d}{dx} \left(-\frac{k}{r} \right) \Rightarrow -k \frac{d(1/r)}{dx}$$

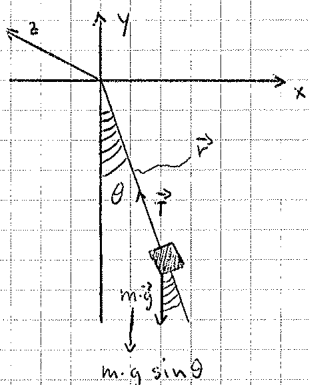
$$\rightarrow -k \frac{(-1)}{r^2} \frac{dr}{dx} = \frac{k}{r^2} \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2x$$

$$\Rightarrow \frac{kx}{r^3} \quad / \quad \text{similmente} \quad \frac{dE_p}{dy} = \frac{ky}{r^3}, \quad \frac{dE_p}{dz} = \frac{kz}{r^3}$$

Esempio: moto circolare uniforme



$m \cdot \vec{a} = \text{tensione del filo}$
 $m \cdot \vec{a}_N = \text{tensione del filo} \parallel \vec{r}$
 $\rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{T} = 0$
 $\rightarrow \vec{L} = \text{cost} \Rightarrow m \cdot \vec{r} \wedge \vec{v} = m \cdot r \cdot v \cdot \hat{u}_z \rightarrow \text{costante}$
 Essendo costante \vec{L} , anche $r, v = \text{cost}$
 $\Rightarrow v(t) r(t) = \text{costante}$



$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{H} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge (m \cdot \vec{g} + \vec{T})$ parallelo ad \vec{v}
 $\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = r m g \sin \theta (-\hat{u}_z)$
 $\vec{L} = m \vec{r} \wedge \vec{v} = m r^2 \dot{\theta} \hat{u}_z \sim (\cancel{r} \hat{u}_r + r \dot{\theta} \hat{u}_\theta)$
 $\Rightarrow m r^2 \dot{\theta} \hat{u}_z \sim \hat{u}_z$ parallelo
 $\vec{L} = m r^2 \dot{\theta} \hat{u}_z$

$d(m r^2 \dot{\theta} \hat{u}_z) = -\hat{u}_z r m g \sin \theta$

$\cancel{m r^2} \dot{\theta} \hat{u}_z = -\cancel{r} \cancel{m} g \sin \theta$

$\rightarrow r \ddot{\theta} = -g \sin \theta$

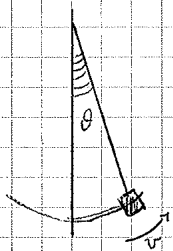
$\ddot{\theta} = -\frac{g}{r} \sin \theta$

Separato che $\sin \theta$ ha come sviluppo
 $\sin \theta = \theta - \frac{1}{3!} \theta^3 + \dots$
 se $\theta \ll \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin \theta \approx \theta$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{r} \theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{K}{m} x = 0$

$\rightarrow \theta(t) = A \sin(\omega t + \phi)$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = \frac{2\pi}{T}$



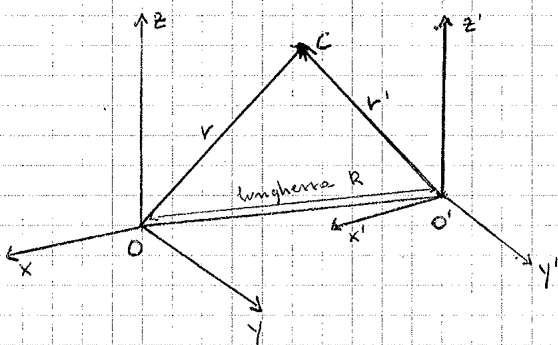
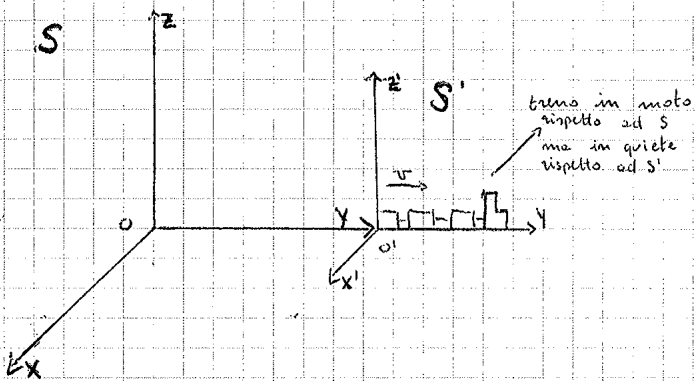
Se ignora il momento angolare ed uso le equazioni di Newton

$m \cdot \vec{a} = \vec{T} + m \vec{g}$

$\begin{cases} m a_r \hat{u}_r = -m g \sin \theta \hat{u}_r & \rightarrow \vec{a}_r = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\dot{\theta})}{dt} \\ m a_N \hat{u}_N = \hat{u}_N T - m g \cos \theta \hat{u}_N & \rightarrow \vec{T} = m \vec{a}_N + m \vec{g} \cos \theta \end{cases}$

$\Rightarrow r \ddot{\theta} \Rightarrow \cancel{m} r \ddot{\theta} = -\cancel{m} g \sin \theta \rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{r} \sin \theta$

MOTI RELATIVI



$$\vec{v} = \text{cost} \quad \vec{a} = 0$$

$$\vec{v} \neq \text{cost} \quad \vec{a} \neq 0$$

I moti possono essere visti dal sistema di riferimento S oppure S'

Proprietà:

- S ed S' hanno sempre assi paralleli
- O' è in moto rispetto ad O

Che cosa è cambiato?

È cambiata la posizione di O rispetto ad O'

$$\rightarrow \hat{u}_x = \hat{u}'_x \Leftrightarrow \hat{u}_y = \hat{u}'_y \Leftrightarrow \hat{u}_z = \hat{u}'_z$$

$$\vec{OO'} = \vec{R}$$

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \rightarrow \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d\vec{R}}{dt}$$

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}' \rightarrow \vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$$

$$\vec{a} = \vec{A} + \vec{a}' \rightarrow \vec{a}' = \vec{a} - \vec{A}$$

velocità relative o di trascinamento

accelerazione relativa o di trascinamento

Si definiscono "trasformazioni galileiane" quelle che collegano i sistemi S ed S' soggetti ad un moto relativo uniforme $\Rightarrow V = \text{costante}; A = \text{costante}$

Allora: O' tale che $R'(t) = R_0(t) + Vt$ (tipico moto rettilineo uniforme)

conseguentemente \rightarrow

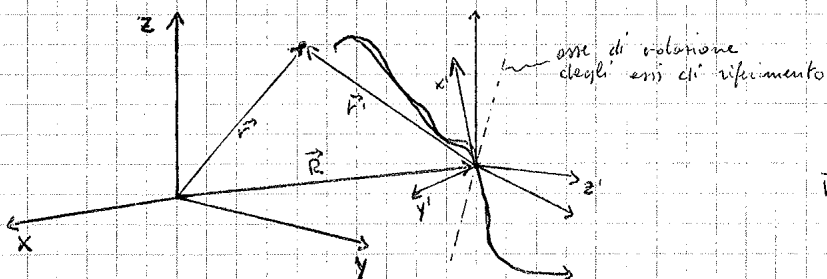
$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$$

$$\vec{a}' = \vec{a}$$

Le trasformazioni galileiane collegano i sistemi così detti **INERZIALI**

Caso generale



In questo caso S' ha assi di riferimento rispetto ad un asse di rotazione

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \begin{cases} \vec{r} = x \hat{u}_x + y \hat{u}_y + z \hat{u}_z \\ \vec{R} = X \hat{u}'_x + Y \hat{u}'_y + Z \hat{u}'_z \\ \vec{r}' = x' \hat{u}'_x + y' \hat{u}'_y + z' \hat{u}'_z \end{cases}$$

$\vec{a}' \rightarrow$ accelerazione vista da S'

$2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}' \rightarrow$ accelerazione di CORIOLIS

$\vec{a}_0' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' \rightarrow$ accelerazione di trascinamento

FORZE FITTIZIE O APPARENTI DI UN SISTEMA NON INERZIALE

$$\vec{a}' = \vec{a} - \left(\vec{a}_0' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') \right) - 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

$$\omega = \text{cost}$$

\vec{a}_0' \rightarrow vinto che ω è costante

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

$$\rightarrow m \vec{a}' = \vec{F} - m \vec{a}_0' - 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

Se guardiamo i "fatti" tramite dei sistemi di riferimento inerziali, le leggi fisiche saranno identiche per tutti gli osservatori

$$S \Rightarrow S' \begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{R} \\ \vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0' \\ \vec{a}' = \vec{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_0' = \text{cost} \\ \vec{a}_0' = 0 \end{cases}$$

Legge di INERZIA \rightarrow $\begin{cases} \vec{v}_0' = \text{cost} \\ \vec{v} = \text{cost in } S \\ \vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0' = \text{costante} \end{cases}$

Legge di Newton $\rightarrow \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$ in S

$F = m \cdot \vec{a}' \Rightarrow m \cdot \frac{d\vec{v}'}{dt}$ in S' poiché $\vec{a}' = \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

Se però il sistema S' non fosse inerziale

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0'$$

$$\Rightarrow m \vec{a}' = \vec{F} - m \vec{a}_0'$$

Teorema della quantità di moto $\rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \Rightarrow$ la quantità di moto è costante

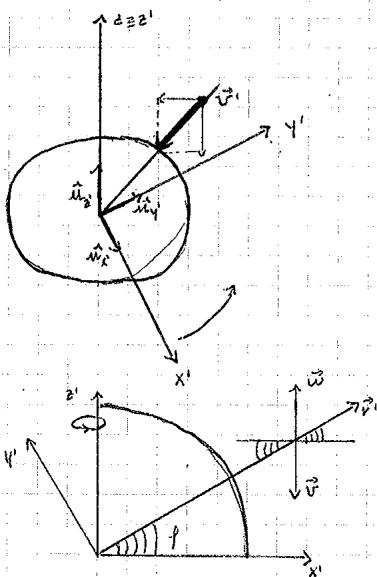
$$\vec{p}_1(t) + \vec{p}_2(t) = \vec{P} \rightarrow \text{costante nel tempo}$$

$$\vec{p}_1'(t) + \vec{p}_2'(t) = \vec{P}' \rightarrow \text{anche questo è costante?}$$

$$\Rightarrow m_1 \vec{v}_1'(t) + m_2 \vec{v}_2'(t) \Rightarrow \text{rispondo che } \boxed{\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_0'}$$

$$\Rightarrow m_1 (\vec{v}_1(t) - \vec{v}_0') + m_2 (\vec{v}_2(t) - \vec{v}_0') \Rightarrow m_1 \vec{v}_1(t) + m_2 \vec{v}_2(t) - (m_1 + m_2) \vec{v}_0'$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{p}_1(t) + \vec{p}_2(t) - (m_1 + m_2) \vec{v}_0'}$$



$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$$

↓
gravitico

$$2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' = 2\omega \hat{u}_z \wedge (-v' \sin \theta \hat{u}_x)$$

$$\rightarrow 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' = -2\omega v' \cos \theta \hat{u}_y$$

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') = -\omega^2 r' \cos \theta \hat{u}_x$$

$$\vec{a}' = \vec{g} - (-2\omega v' \cos \theta \hat{u}_y) - (-\omega^2 r' \cos \theta \hat{u}_x)$$

$$\rightarrow \vec{a}' = \vec{g} + \underbrace{2\omega v' \cos \theta \hat{u}_y}_{\text{caduta verso EST}} + \dots$$

Perché i fiumi corrono maggiormente l'origine destra?

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}' = \omega \hat{u}_z \wedge (v' \sin \theta \hat{u}_x)$$

$$\rightarrow \vec{\omega} \wedge \vec{v}' = \omega v' \sin \theta \hat{u}_y$$

$$m\vec{a}' = \underbrace{-2m\omega v' \sin \theta \hat{u}_y}_{\text{FORZA DI CORIOLIS}} - m\vec{\omega} \wedge (\omega \hat{u}_z \wedge v' \cos \theta \hat{u}_x)$$

Secondo che

$$-m\vec{\omega} \wedge (\omega \hat{u}_z \wedge v' \cos \theta \hat{u}_x) = -m\omega v' \cos \theta \vec{\omega} \wedge \hat{u}_y$$

$$\rightarrow -m\omega^2 v' \cos \theta \underbrace{(\hat{u}_z \wedge \hat{u}_y)}_{-\hat{u}_x}$$

$$\rightarrow m\vec{a}' = -2m\omega v' \sin \theta \hat{u}_y + m\omega^2 v' \cos \theta \hat{u}_x$$

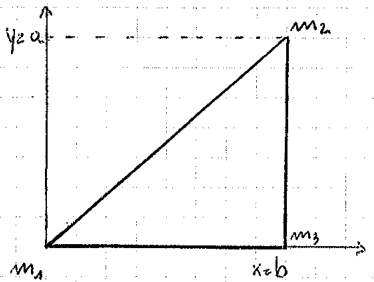
SISTEMI DI PARTICELLE (sistemi e molti corpi)

Centro di massa $\rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j}{\sum_{j=1}^N m_j}$ \rightarrow vettore della posizione media nel sistema di particelle

Se $m_1 = m_2 = m_3 = \dots = m_j \rightarrow$ masse uguali
 $\rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \vec{r}_j \rightarrow$ valori medio dei vettori posizione

Se le masse non sono uguali il risultato sarà condizionato dalla massa più pesante

Troviamo il centro di massa per tre masse (m_1, m_2, m_3) poste ai vertici di un triangolo



$$m_1: \vec{r}_1 = 0$$

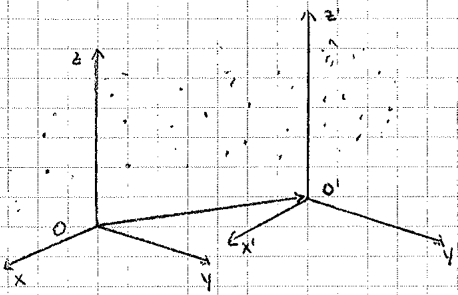
$$m_2: \vec{r}_2 = b \hat{u}_x + 0 \hat{u}_y$$

$$m_3: \vec{r}_3 = 0 \hat{u}_x + b \hat{u}_y$$

$$X_{CM} = \frac{\sum m_j x_j}{M} \quad Y_{CM} = \frac{\sum m_j y_j}{M} \quad Z_{CM} = \frac{\sum m_j z_j}{M}$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\hat{u}_x}{M} \sum m_j x_j + \frac{\hat{u}_y}{M} \sum m_j y_j \Rightarrow \boxed{\vec{R}_{CM} = \frac{(m_1 + m_3) b \hat{u}_x}{M} + \frac{m_2 a \hat{u}_y}{M}}$$

TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE

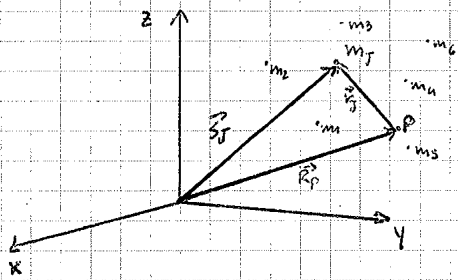


$$\vec{v}_j + \vec{R}_{CM} = \vec{v}_j$$

$$\vec{v}'_j + \vec{V}_{CM} = \vec{v}_j$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{R}'_{CM} = \frac{1}{M} \sum_T m_T \vec{v}'_T \Rightarrow 0 \\ \vec{V}'_{CM} = \frac{1}{M} \sum_T m_T \vec{v}'_T \Rightarrow 0 \end{cases}$$

Il raggio vettore del centro di massa e la velocità del centro di massa rispetto al sistema del centro di massa sono nulli



$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_T m_T \vec{F}_T$$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_T m_T \vec{v}_T$$

$$\begin{cases} \vec{R}'_{CM} = \frac{1}{M} \sum_T m_T \vec{v}'_T = 0 \\ \text{perché } \rightarrow \frac{1}{M} \sum_T m_T (\vec{v}_T - \vec{R}_{CM}) \\ \rightarrow \frac{1}{M} \sum_T m_T \vec{v}_T - \frac{1}{M} \sum_T m_T \vec{R}_{CM} \\ \rightarrow \frac{1}{M} \sum_T m_T \vec{v}_T - \vec{R}_{CM} = 0 \end{cases}$$

perché $\sum_T m_T = M$

$$\begin{cases} \vec{V}'_{CM} = \sum_T m_T \vec{v}'_T = \frac{1}{M} \sum_T m_T (\vec{v}_T - \vec{V}_{CM}) \\ \Rightarrow \frac{1}{M} \sum_T m_T \vec{v}_T - \frac{1}{M} \sum_T m_T \vec{V}_{CM} = 0 \\ \frac{1}{M} \sum_T m_T \vec{v}_T - \vec{V}_{CM} = 0 \\ \Rightarrow \vec{V}_{CM} - \vec{V}_{CM} = 0 \end{cases}$$

perché $\sum_T m_T = M$

$$\begin{cases} \vec{S}_T = \vec{R}_P + \vec{v}_T \\ \vec{v}_T = \vec{V}_P + \frac{d\vec{r}_T}{dt} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{L}_T = m_T \vec{v}_T \wedge \vec{r}_T \\ \vec{H}_T = \vec{v}_T \wedge \vec{F}_T \end{cases}$$

\vec{L} = momento angolare TOT = $\sum_T \vec{L}_T = \sum_T m_T \vec{v}_T \wedge \vec{r}_T$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_T m_T \vec{v}_T \wedge \vec{r}_T = \sum_T m_T \frac{d}{dt} (\vec{v}_T \wedge \vec{r}_T)$$

$$\rightarrow \sum_T m_T \left(\frac{d\vec{v}_T}{dt} \wedge \vec{r}_T + \vec{v}_T \wedge \frac{d\vec{r}_T}{dt} \right)$$

$$\rightarrow \sum_T m_T [(\vec{v}_T - \vec{V}_P) \wedge \vec{r}_T + \vec{v}_T \wedge \vec{\omega}_T]$$

$$\rightarrow \sum_T m_T (-\vec{V}_P) \wedge \vec{r}_T + \sum_T \vec{v}_T \wedge (m_T \vec{\omega}_T) \rightarrow \vec{F}_T = m_T \vec{\omega}_T$$

$$\rightarrow -\vec{V}_P \wedge \sum_T m_T \vec{r}_T + \sum_T \vec{v}_T \wedge \vec{F}_T^E + \sum_T \vec{v}_T \wedge \vec{F}_T^I$$

$$\rightarrow -\vec{V}_P \wedge M \vec{V}_{CM} + \vec{M}^E + \sum_T \vec{v}_T \wedge \sum_{i \neq T} \vec{F}_{Ti}$$

$$\begin{aligned} \sum_T \sum_{i \neq T} \vec{v}_T \wedge \vec{F}_{Ti} &= 0 \\ \text{perché } \vec{v}_1 \wedge \vec{F}_{21} + \vec{v}_2 \wedge \vec{F}_{12} &= 0 \\ \rightarrow (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \wedge \vec{F}_{21} &= 0 \\ \text{perché sono paralleli} & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E - \vec{V}_P \wedge M \vec{V}_{CM}$$

1° TEOREMA DI KÖNIG (per il momento angolare)

$\vec{L} = \sum_T m_T \vec{r}_T \wedge \vec{v}_T \rightarrow$ POLO O

$\vec{L} = \sum_T m_T (\vec{R}_{cm} + \vec{r}_T) \wedge (\vec{V}_{cm} + \vec{v}_T) \rightarrow \sum_T m_T [(\vec{R}_{cm} \wedge \vec{V}_{cm}) + (\vec{R}_{cm} \wedge \vec{v}_T) + (\vec{r}_T \wedge \vec{V}_{cm}) + (\vec{r}_T \wedge \vec{v}_T)]$

$\Rightarrow \vec{R}_{cm} \wedge \vec{V}_{cm} \sum_T m_T + \vec{R}_{cm} \wedge \sum_T m_T \vec{v}_T + \sum_T m_T \vec{r}_T \wedge \vec{V}_{cm} + \sum_T m_T \vec{r}_T \wedge \vec{v}_T$ momento angolare riferito ad O

$\rightarrow M \vec{R}_{cm} \wedge \vec{V}_{cm} + \vec{L}'$

$M \vec{R}_{cm} \wedge \vec{V}_{cm} \rightarrow$ termine orbitale $\Leftrightarrow \vec{L}_{cm}$

$\vec{L}' \rightarrow$ termine locale / termine interno

2° TEOREMA DI KÖNIG (per l'energia cinetica)

$\frac{1}{2} \sum_T m_T v_T^2 \rightarrow \frac{1}{2} \sum_T m_T (\vec{V}_{cm} + \vec{v}_T)^2 \rightarrow \frac{1}{2} \sum_T m_T (V_{cm}^2 + 2\vec{V}_{cm} \cdot \vec{v}_T + v_T^2)$

$\rightarrow \frac{1}{2} M \vec{V}_{cm}^2 + \underbrace{\sum_T m_T \vec{v}_T \cdot \vec{V}_{cm}}_{zero} + \left(\frac{1}{2} \sum_T m_T v_T^2 \right) \rightarrow$ Energia cinetica rispetto al cm

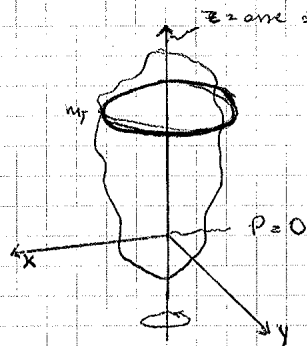
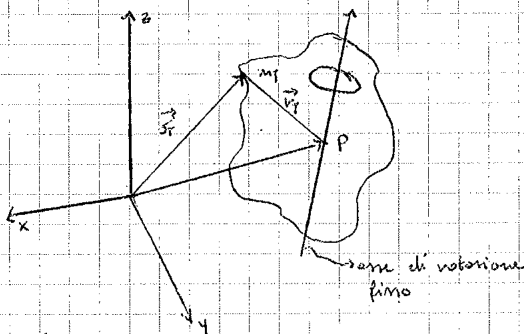
$\boxed{E_K = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + E_K'}$

$\frac{1}{2} M \vec{V}_{cm}^2 = E_{K,cm} \rightarrow$ termine orbitale

$\frac{1}{2} \sum_T m_T v_T^2 = E_K' \rightarrow$ termine locale

I "termini locali" sono le formule viste dal centro di massa

MECCANICA DEL CORPO RIGIDO



$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^E = M \vec{V}_P \wedge \vec{V}_{cm}$

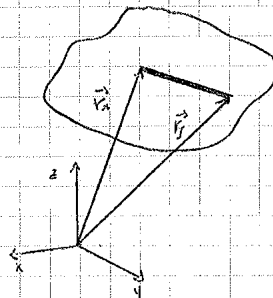
Che cos'è un corpo rigido?

È un sistema di punti materiali in cui le distanze tra tutte le possibili coppie di punti non possono variare.

$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{costante}, \forall i, j$

Nel corpo rigido il lavoro delle forze interne è uguale a zero

$\boxed{W^F = 0}$



EQUAZIONE DEL MOTO ROTAZIONALE DEL CORPO RIGIDO

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E$$

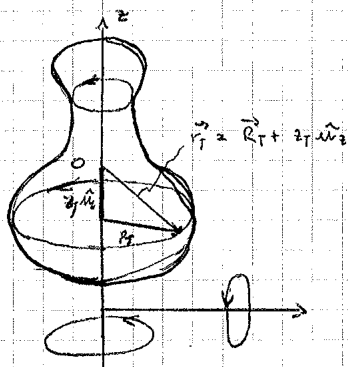
Se $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ ovvero $\vec{L}_z = I_z \vec{\omega} \Leftrightarrow L_{xy} = 0$

Allora $\frac{d(I_z \vec{\omega})}{dt} = \vec{M}^E \rightarrow I \vec{\alpha} = \vec{M}^E$ perché $\frac{d(I_z \vec{\omega})}{dt} = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

Caso 1: $\vec{L} = I_z \vec{\omega} + \vec{L}_{xy}$ \rightarrow asse di rotazione coincide con asse di simmetria

Caso 2: $\vec{L} = I_z \vec{\omega} + \vec{L}_{xy}$ \rightarrow asse di rotazione generico

CASO 1:



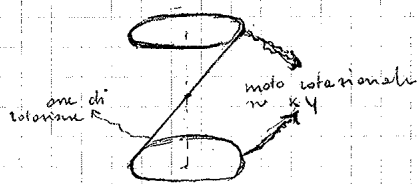
$$\vec{M}^E = \sum_j \vec{r}_j^E \wedge \vec{F}_j^E = \sum_j (R_j + z_j \hat{u}_z) \wedge \vec{F}_j^E$$

$$\rightarrow \sum_j R_j \wedge \vec{F}_j^E + \hat{u}_z \wedge \left(\sum_j z_j F_j^E \right) \rightarrow \text{giace su } xy$$

momenti paralleli
e z

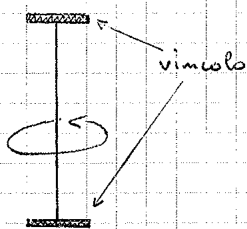
$$\rightarrow I \vec{\alpha} = \sum_j R_j \wedge \vec{F}_j^E + \hat{u}_z \wedge F_{xy}$$

perché ci sono forze su xy?



Le forze su xy contrastano le forze rotazionali lungo l'asse rotazionale z e portano ad un moto rotazionale dell'asse di rotazione nel piano xy

Questa forza viene più generalmente annullata dal Momento delle reazioni vincolari $\Rightarrow \vec{M}_{RV} + \hat{u}_z \wedge \sum_j z_j F_j^E = 0$



Il momento delle reazioni vincolari è la forza generata dai vincoli alle estremità dell'asse di rotazione che permette di ottenere un asse di rotazione fisso

Caso 2:

$$\vec{L} = I_z \vec{\omega} + \vec{L}_{xy}$$

$$L_{xy} = \sum_j m_j z_j \vec{\omega} \wedge \vec{R}_j$$

$$\frac{d}{dt} (I_z \vec{\omega} + \vec{L}_{xy}) = \vec{M}_{tot}^E \rightarrow I_z \vec{\alpha} + \frac{d(\vec{L}_{xy})}{dt} = \vec{M}_{tot}^E$$

$$\rightarrow \frac{d(\vec{L}_{xy})}{dt} = - \frac{d\vec{\omega}}{dt} \sum_j m_j z_j \vec{R}_j - \vec{\omega} \sum_j m_j z_j \frac{d\vec{R}_j}{dt} \Rightarrow \vec{\omega} \wedge \vec{R}_j$$

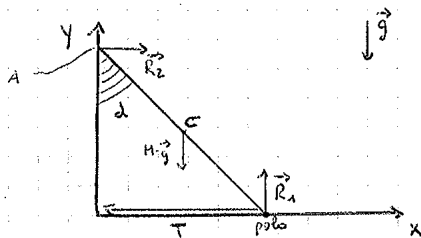
$$\rightarrow + \frac{\dot{\omega}}{\omega} \vec{L}_{xy} + \vec{\omega} \wedge \vec{L}_{xy} \rightarrow I \text{ due vettori sono paralleli}$$

$$\rightarrow I_z \vec{\alpha} + \frac{d\vec{L}_{xy}}{dt} = \vec{M}_{tot}^E \Rightarrow \sum_j \vec{R}_j \wedge \vec{F}_j^E + \vec{M}_{RV}$$

$$\rightarrow \boxed{I_z \vec{\alpha} = \sum_j \vec{R}_j \wedge \vec{F}_j^E}$$

vale in un ambiente molto più generale.

Esempio 2



$$\begin{cases} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{T} + M\vec{g} = 0 \\ \vec{r}_C \wedge M\vec{g} + \vec{r}_A \wedge \vec{R}_2 = 0 \end{cases}$$

Sapendo che:

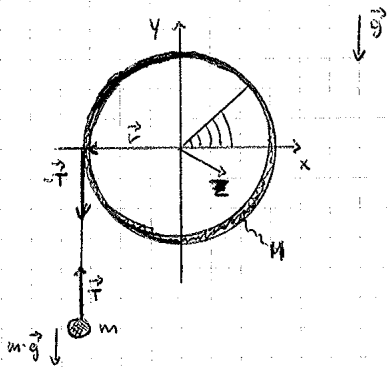
$$\vec{r}_C \wedge M\vec{g} = \frac{L}{2} \hat{u}_z \sin \alpha \cdot Mg$$

$$\vec{r}_A \wedge \vec{R}_2 = -\hat{u}_z L \cos \alpha \cdot R_2$$

$$\begin{cases} \otimes R_2 - T = 0 \\ \odot R_1 - Mg = 0 \\ \frac{L}{2} Mg \sin \alpha - L \cos \alpha R_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1 = Mg \\ R_2 = T \\ R_2 = \frac{Mg}{2} \tan \alpha \end{cases}$$

Esempio 3



M → massa disco

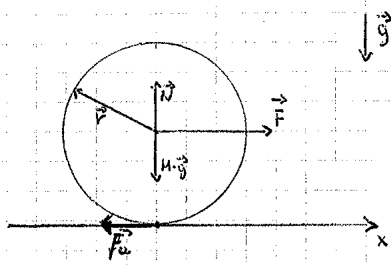
$$I = \frac{M}{2} R^2 \rightarrow \text{come abbiamo dimostrato prima}$$

$$\begin{cases} m \vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} \\ I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{r} \wedge (-\vec{T}) \end{cases}$$

$$\vec{T} = T \hat{u}_y \quad g = -g \hat{u}_y \quad \vec{r} = -R \hat{u}_z \quad \vec{\omega} = \omega \hat{u}_z = \dot{\omega} \hat{u}_z$$

$$\begin{cases} -m\dot{d} = -mg + T \\ I_2 \dot{d} = RT \hat{u}_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\dot{d} = mg - T \\ I \dot{d} = RT \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = \frac{I}{R} \dot{d} \\ m\dot{d} = mg - \frac{I}{R} \dot{d} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \vec{F} + M \cdot \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_c = M \cdot \vec{a} & \vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \vec{E} \rightarrow \vec{r} \wedge \vec{F}_c \end{cases}$$

$$\begin{cases} \textcircled{1} F - F_c = M a & \vec{F} = F \hat{u}_x & \vec{F}_c = -F_c \hat{u}_x \\ \textcircled{2} N - Mg = 0 & & \\ I \frac{d\omega}{dt} \hat{u}_z = (-R \hat{u}_y) \wedge (-F_c \hat{u}_x) & & \vec{v} = R \hat{u}_y \omega \end{cases}$$

Il rotolamento persiste finché:

$$\rightarrow -I a \hat{u}_z = -\hat{u}_z R F_c \Rightarrow \boxed{a = \frac{a}{R}}$$

$$F_c \leq F_c^{\max} \rightarrow \mu_s Mg$$

$$\mu_s \frac{IF}{MR^2 + I} \leq \mu_s Mg$$

$$\begin{cases} F - F_c = Ma \\ -I a = -R F_c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F - F_c = Ma \\ -I \frac{a}{R} = -F_c \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{F \leq \frac{Mg \mu_s}{I} (MR^2 + I)}$$

$$\mu_s a = \frac{F}{M + \frac{I}{R^2}} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{FR^2}{I + MR^2} \rightarrow \text{accelerazione c.d.m.} \\ F_c = \frac{IF}{(MR^2 + I)} \rightarrow \text{forza di attrito statico} \end{cases}$$

Se $F > \frac{Mg \mu_s}{I} (MR^2 + I) \rightarrow$

MOTO MISTO DI ROTOLAMENTO + STRISCIAMENTO

$$\begin{cases} Ma = F - F_c \\ I a = -R F_c \end{cases}$$

a ed d sono indipendenti $\rightarrow d \neq \frac{a}{R}$

$$F_c = \mu_d N \rightarrow \mu_d Mg$$

$$a = \frac{F - F_c}{M} \Rightarrow \frac{F}{M} - \mu_d g$$

$$d = -\frac{R F_c}{I} \Rightarrow -\frac{R \mu_d Mg}{I}$$

SONO NOTE

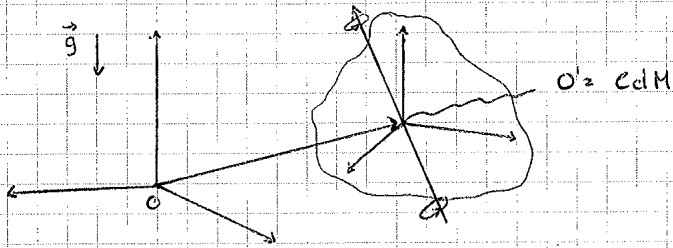
$$\Rightarrow E_{p,d}^{\text{tot}} = E_{p,d}^E + \frac{1}{2} \sum_j \sum_i \epsilon_{ijk} E_{p,d}^{(i,j)} \quad d = A, B$$

Da questo deriva che l'energia in un corpo rigido si conserva, come eravamo già visto per le masse puntiformi

$$\Rightarrow E_{K_B} + E_{P_B}^{\text{tot}} = E_{K_A} + E_{P_A}^{\text{tot}}$$

$$\Leftrightarrow -(E_{P_B}^{\text{tot}} - E_{P_A}^{\text{tot}}) = E_{K_B} - E_{K_A}$$

Enunciato



$$E = E_K + E_P^{\text{tot}}$$

$$\Rightarrow \sum_j \frac{m_j}{2} \vec{v}_j^2 + E_P^E + \frac{1}{2} \sum_j \sum_i \epsilon_{ijk} E_P^{(i,j)}$$

$$\vec{r}_i - \vec{r}_j = \text{costante}$$

$$\vec{F} = \sum_j \frac{m_j}{2} \vec{v}_j^2 + \sum_j E_{P_j}^E \rightarrow m_j g z_j$$

$$z = \frac{\sum_j m_j z_j}{M}$$

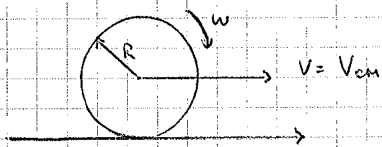
$$\Rightarrow \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \sum_j \frac{m_j I}{2} (v_j')^2 + g \sum_j m_j z_j \Rightarrow \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_j m_j I (v_j')^2 + Mg z$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sum_j m_j I (v_j')^2 = \frac{1}{2} \sum_j m_j I \omega^2 R_j^2 \Rightarrow \frac{1}{2} I_B \omega^2$$

$$\vec{v}_j' = \vec{\omega} \wedge \vec{R}_j$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_B \omega^2 + Mg z$$

Corpo che rotola



$$V_{cm} = R |\omega|$$

$$E_K = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \left(\frac{1}{2} M R^2 + \frac{1}{2} I \right) \omega^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(M + \frac{I}{R^2} \right) V_{cm}^2$$

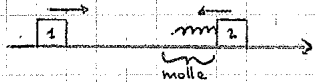
CASO UNIDIMENSIONALE (urto completamente elastico)

$\vec{v}_1' = \vec{v}_2'$ \rightarrow i due corpi dopo l'urto si muovono insieme

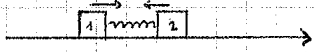
$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{v}' (m_1 + m_2) \Leftrightarrow \vec{v}' = V_{CM}$



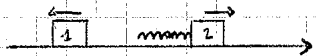
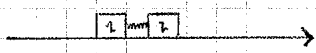
Interpretazione dell'urto completamente elastico



$E = E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$



fase di contatto

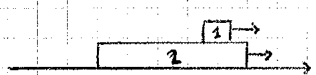
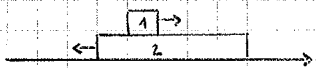
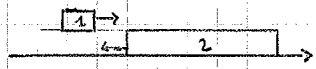


$E = E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$

Nella fase di contatto $\rightarrow E = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + \left[\frac{k}{2} (x_2 - x_1 - L)^2 \right] \rightarrow E_p$ della forza elastica

L'energia nel contatto si conserva \rightarrow Nell'urto diminuisce la E_k e aumenta l' E_p della forza elastica

Interpretazione dell'urto completamente anelastico



fase di contatto

Nella fase di contatto $\rightarrow \begin{cases} m_1 a_1 = -F_a \\ m_2 a_2 = +F_a \end{cases} \Rightarrow m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (m_1 v_1 + m_2 v_2) = 0$
 quindi $m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{cost}$

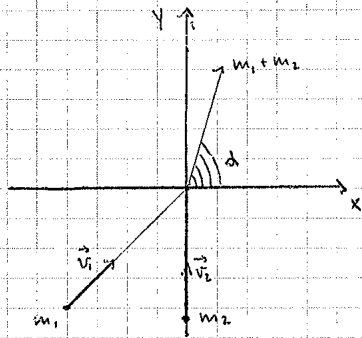
$W_1' = -F_a \Delta S$

$W_2' = +F_a \Delta S$

$W_1' + W_2' = -2 F_a \Delta S \neq 0$

$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{v}' (m_1 + m_2)$

Moto anelastico bidimensionale (ESEMPIO DI APPLICAZIONE)



$m_2 = \frac{m_1}{4}$ $\vec{v}_{1i} = 3,5 \text{ m/s}$ $\vec{v}_{2i} = 0,8 \text{ m/s}$

Che angolo forma la mossa conseguente dall' urto rispetto all' asse x?

$\rightarrow \alpha = ?$

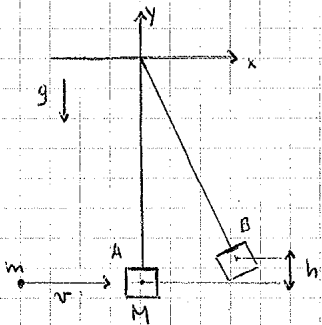
$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) \vec{V}$

$\begin{cases} m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = (m_1 + m_2) V_x \\ m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = (m_1 + m_2) V_y \end{cases}$

$\begin{cases} V_x = \frac{3m_1 + 2m_2}{m_1 + \frac{m_1}{4}} = \frac{12}{5} \text{ m/s} \\ V_y = \frac{5m_1 + 8(\frac{m_1}{4})}{m_1 + \frac{m_1}{4}} = \frac{28}{5} \text{ m/s} \end{cases}$

$\text{tg } \alpha = \frac{V_y}{V_x} = \frac{7}{3}$

PENDOLO BALISTICO



$V_0 = 0$ $h = y_B - y_A$

$m v + M V_0 = (m + M) V'$

$\rightarrow V' = \frac{m v}{(m + M)}$

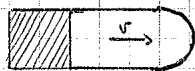
$\rightarrow \frac{m + M}{2} V_A'^2 + (m + M) g y_A = \frac{m + M}{2} V_B'^2 + (m + M) g y_B$

$\rightarrow \frac{(m + M)}{2} V'^2 = \frac{(m + M)(y_B - y_A)}{h} g$

$\rightarrow \frac{(m v)^2}{(m + M)^2} \frac{1}{2} = h g \rightarrow v^2 = 2gh \left(\frac{m + M}{m} \right)^2$

$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gh}$

MOTO DI UN RAZZO



$m \cdot v$ quantità di moto



$dm < 0$

$m = m + dm$
 $v = v + dv$

$v \cdot v^*$

$m \vec{v} = (m + |dm|)(\vec{v} + d\vec{v}) + (\vec{v} - \vec{v}^*) |dm|$

$m \vec{v} = m \vec{v} + |dm| \vec{v} + m d\vec{v} + (|dm| d\vec{v} + \vec{v} dm + \vec{v}^* |dm|)$

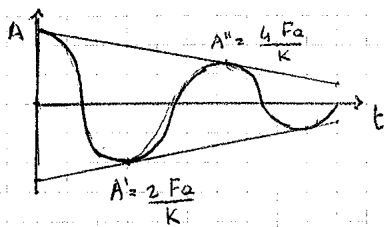
$m \vec{v} = m \vec{v} + \cancel{|dm| \vec{v}} + m d\vec{v} - dm d\vec{v} + \vec{v}^* dm + \vec{v} dm$

Sopra da che $\frac{dm}{dt} = -k$

$m dv = v^* dm$

$\rightarrow m \frac{dv}{dt} = v^* \frac{dm}{dt} \rightarrow v(t) = v_0 + v^* \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - kt} \right)$

Visto che $m(t) = m_0 - kt$



Ogni x_n si ripete il moto

$$\text{con } x_n = \frac{4n Fa}{K}$$

$$\boxed{\text{Il moto persiste fino a } K|x_n| \leq F_a^{\max} = m_s mg}$$

OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO DA UNA FORZA VISCOSA

$$m a = -Kx - \underset{\substack{\text{forza viscosa} \\ \downarrow}}{\gamma \dot{x}} \quad \rightarrow \quad m \ddot{x} = -Kx - \gamma \dot{x} \quad \rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \frac{\gamma}{m} \dot{x} + \frac{K}{m} x = 0}$$

Sapendo che

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0^2 = \frac{K}{m} \text{ pulsazione propria} \\ \gamma = \frac{1}{2m} \text{ coefficiente di smorzamento} \end{array} \right. \rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x = C e^{dt} \quad \rightarrow \quad C d^2 e^{dt} + 2\gamma C d e^{dt} + C \omega_0^2 e^{dt} = 0$$

abbito viscoso

$$\rightarrow (d^2 + 2\gamma d + \omega_0^2) e^{dt} = 0$$

$$\rightarrow (d^2 + 2\gamma d + \omega_0^2) = 0 \quad \text{trovo 2 sol } d_1, d_2$$

la soluzione generale è $\rightarrow \boxed{x(t) = A e^{d_1 t} + B e^{d_2 t}}$

$$d_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$x(t) = A e^{(-\gamma-R)t} + B e^{(-\gamma+R)t}$$

$$\rightarrow e^{-\gamma t} (A e^{-Rt} + B e^{Rt})$$

Si trovano 3 casi

{	$\gamma > R$	smorzamento forte
	$\gamma = R$	smorzamento critico
	$\gamma < R$	smorzamento debole

Smorzamento forte

$$d_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$d_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Sono entrambi negativi

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(A e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + B e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right) \quad \rightarrow \text{SOLUZIONE GENERALE (esponenziali decrescenti)}$$

Smorzamento critico

$$d_1 = d_2 = -\gamma$$

$$\rightarrow x(t) = e^{-\gamma t} (A t + B)$$

Nello smorzamento critico il punto tende molto rapidamente alla posizione di equilibrio $x=0$ \rightarrow NON C'È MAI OSCILLAZIONE



$$\rightarrow A(\omega_0^2 - \omega^2)(\sin(\omega t + \theta) \cos(\theta) + \cos(\omega t) \sin(\theta)) + 2\gamma \omega A(\cos(\omega t) \cos(\theta) - \sin(\omega t) \sin(\theta)) = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t)$$

$$\rightarrow [A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin(\theta) + 2\gamma A \omega \cos(\theta)] \cos(\omega t) + [A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\theta) - 2\gamma A \omega \sin(\theta) - \frac{F_0}{m}] \sin(\omega t) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \theta + 2\gamma \omega \cos \theta = 0 \\ A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \theta - 2\gamma \omega A \sin \theta = \frac{F_0}{m} \end{cases} \quad \rightarrow \quad x(t) = x_{sp}(t) = A \sin(\omega t + \theta)$$

Suppongo che $\rightarrow \begin{cases} 2\gamma \omega = -R \sin \theta \\ \omega_0^2 - \omega^2 = R \cos \theta \end{cases} \quad \rightarrow \quad \frac{2\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = -\tan \theta \quad \rightarrow \quad \tan \theta = -\frac{2\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

Suppongo che $\rightarrow \begin{cases} R \cos \theta \sin \theta - R \sin \theta \cos \theta = 0 \\ A R \cos^2 \theta - (-R \sin \theta) A \sin \theta = \frac{F_0}{m} \end{cases} \quad \rightarrow \quad AR = \frac{F_0}{m} \quad \rightarrow \quad A = \frac{F_0}{mR}$

$$\rightarrow A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

$$\rightarrow R^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2$$

$$\begin{cases} 4\gamma^2 \omega^2 = R^2 \sin^2 \theta \\ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 = R^2 \cos^2 \theta \end{cases}$$

Regimi

Se $\omega \ll \omega_0$

$$\tan \theta \approx -\frac{2\gamma \omega}{\omega_0^2} \quad \text{ma tende a } 0 \quad \leftarrow \text{dal segno}$$

È IN FASE CON LA FORZA

$$A = \frac{F_0}{m \omega_0^2}$$

$$x(t) = A \sin(\omega t) \quad \text{con } \theta = 0$$

Se $\omega \gg \omega_0$

$$\tan \theta \approx \frac{2\gamma}{\omega} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

È IN OPPOSIZIONE DI

$$A = \frac{F_0}{m \omega^2} \quad \cos \theta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{R}$$

FASE CON LA FORZA

$$x(t) = A \sin(\omega t + \theta) \quad \rightarrow \quad -A \sin(\omega t)$$

Se $\omega = \omega_0$

$$\tan \theta = -\frac{2\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \pm \infty \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

ESSENDO $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$A = \frac{F_0}{2m\gamma \omega}$$

È IN QUADRATURA CON LA FORZA

$$x(t) = A \cos(\omega t)$$

DINAMICA E LEGGE GRAVITAZIONALE

3 leggi di Keplero →

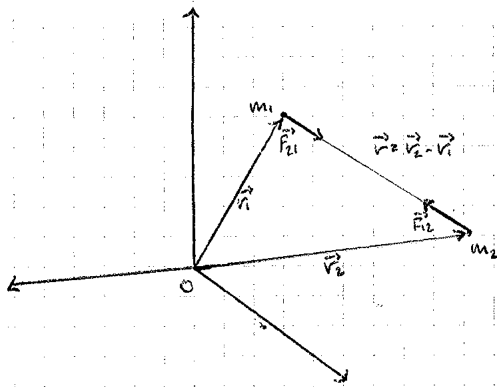
① Le orbite dei pianeti sono ellissi e il sole giace in uno dei fuochi dell'ellisse.

② Il vettore posizione di ogni pianeta rispetto al sole spazza aree uguali in tempi uguali → VELOCITÀ AREOLARE COSTANTE

③ $T^2 = KR^3$ $R = \frac{r_1 + r_2}{2}$

Legge di gravitazione universale

$$|\vec{F}_{12}| = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$



γ = costante di gravitazione universale

$$\gamma \approx 6,67 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg}$$

\vec{F}_{21} = forza gravitazionale che agisce su m_1

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \rightarrow \vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r \quad \boxed{\hat{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}}$$

$$\text{oppo } -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad \text{con } \hat{u}_r = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

CAMPO GRAVITAZIONALE

$$\vec{F}_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \Rightarrow m_1 \vec{G}_2(\vec{r}_1)$$

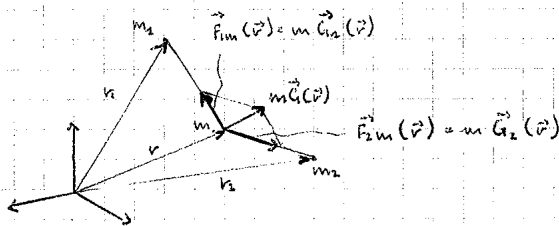
$$\vec{G}_J(\vec{r}) = -\gamma \frac{m_J}{|\vec{r} - \vec{r}_J|^3} (\vec{r} - \vec{r}_J) \quad \vec{r} \rightarrow \text{vettore posizione generica}$$

Caso con tante masse sorgenti ($m_1, m_2, m_3, \dots, m_N$)

definisco m come la massa di prova posta in \vec{r} ← POSIZIONE GENERICA

$$\vec{G}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \vec{G}_j(\vec{r}) \Rightarrow \sum_{j=1}^N \frac{-m_j \gamma}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} (\vec{r} - \vec{r}_j)$$

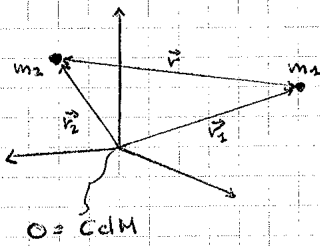
ESEMPIO CON 2 MASSE + 1 SORGENTE IN m



Ne risulta che in r_1 e r_2 agiscono campi di forza gravitazionale su m

$$\text{oppo } \vec{F}(\vec{r}) = m \vec{G}(\vec{r})$$

SCENARIO CON 2 CORPI



$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = -\vec{r}_2$$

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = -\frac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \frac{m_1}{M} \vec{r} \end{cases}$$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M} \rightarrow \frac{m_1}{M} \left(-\frac{m_2}{M} \vec{r} \right) + \frac{m_2}{M} \left(\frac{m_1}{M} \vec{r} \right) = 0$$

Dal vettore posizione relativa $\vec{r} \rightarrow \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} - \frac{d\vec{r}_2}{dt} \text{ mtd } \vec{v}_1 - \vec{v}_2$

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = -\frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} \\ \vec{v}_2 = \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}} \end{cases}$$

$$\rightarrow E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{m_1}{2} \frac{m_2^2}{M^2} \dot{\vec{r}}^2 + \frac{m_2}{2} \frac{m_1^2}{M^2} \dot{\vec{r}}^2$$

$$\rightarrow \frac{m_1 m_2}{2} \frac{1}{M^2} \dot{\vec{r}}^2 (m_1 + m_2) = \frac{m_1 m_2}{2M} \dot{\vec{r}}^2$$

$$\rightarrow \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2, \mu = \text{massa ridotta} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{L} = m_1 \vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1 + m_2 \vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2 = m_1 \left(-\frac{m_2}{M} \vec{r} \right) \wedge \left(-\frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} \right) + m_2 \left(\frac{m_1}{M} \vec{r} \right) \wedge \left(\frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}} \right) \dot{\vec{r}}^2$$

$$= \frac{m_1 m_2}{M^2} (m_1 + m_2) \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} = \mu \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}$$

Se $m_1 \rightarrow \infty$

$$E_k = \dots = \frac{m_2}{2} \dot{\vec{r}}^2$$

$$\vec{L} = \dots = m_2 \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{v}_1 = \dots = -\frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} = 0$$

$$\vec{v}_2 = \dots = -\frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} = 0 \text{ mtd } \vec{v}_2 = \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}$$

SECONDA LEGGE DI KEPLERO

(velocità angolare costante)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \mu \vec{r} \wedge \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} \rightarrow \vec{r} \wedge \mu \ddot{\vec{r}}$$

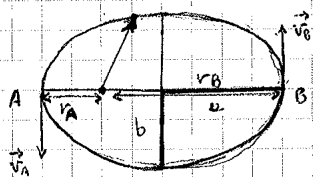
$$\vec{L} = \mu \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} \rightarrow \vec{r} \wedge \vec{F} = 0$$

$L = \text{cost}$ con $\vec{F} \parallel \vec{r}$

$$\vec{L} = \mu \dot{\vec{r}}^2 \hat{\phi}$$

$$A = \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 \hat{\phi}$$

TERZA LEGGE DI KEPLERO



\vec{r}_A distanza min

\vec{r}_B distanza max

$\vec{v}_A \neq \vec{v}_B$ per conservazione del momento angolare

$$\vec{v}_A + \vec{v}_B = 2\vec{e}$$

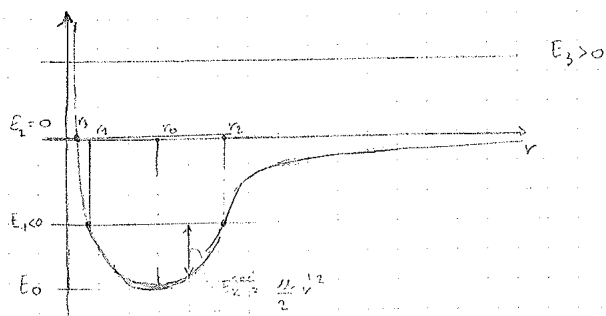
$$\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B = b^2$$

$$A_{area} = \pi a \cdot b$$

$$1) \frac{dA_{area}}{dt} = \frac{\pi a \cdot b}{T} = \frac{L_z}{2\mu}$$

$$2) \vec{L}_z = \mu \vec{r}_A \wedge \vec{v}_A = \mu \vec{r}_B \wedge \vec{v}_B$$

$$3) E = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_A} = \frac{\mu}{2} v_B^2 - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_B}$$



è davvero un minimo?

$$\frac{dE_p}{dr} = -\frac{L^2}{2\mu r^3} - \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^3} \left(-\frac{L^2}{\mu} - \gamma m_1 m_2 r \right)$$

$$r = r_0 =$$

La E_K^{rad} aumenta quando si avvicina alla $E_p(r_0)$ e diminuisce avvicinandosi alla $E_1 < 0$
 $\rightarrow E_K^{\text{rad}}$ max al valore $E_p(r_0)$

Quando $E = E_0$ cosa succede?

$$E_0 = E_p(r_0) \rightarrow \text{solo quando } \dot{r} = 0$$

Quando $E_2 = 0$?

$$\frac{\mu r^2}{2} - E_p(r) = 0 \rightarrow \frac{\mu r^2}{2} = E_p(r) \Leftrightarrow E_K^{\text{rad}} = E_p(r)$$

\rightarrow PARABOLA $\rightarrow r_3 \leq r \leq \infty$

Quando $E_3 > 0$?

L'energia è composta solamente da E_K mentre l' E_p è minore di zero

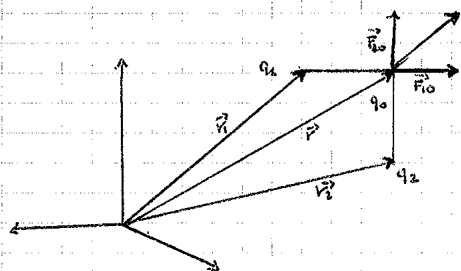
CAMPO ELETTROSTATICO E

Distribuzione di cariche q_1, q_2, \dots, q_N

q_0 = carica di prova

posizione carica di prova

$$\vec{F} = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} + \dots + \vec{F}_{N0} = \sum_{i=1}^N \frac{q_0 q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

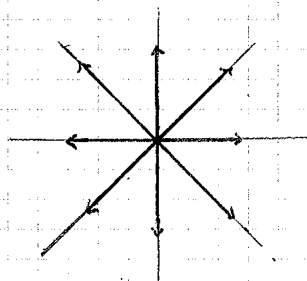


$$\vec{F} = q_0 \sum_{i=1}^N \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

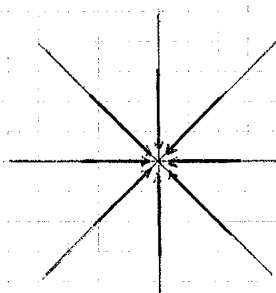
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r})$$

\downarrow
 $\vec{E}_i(\vec{r})$

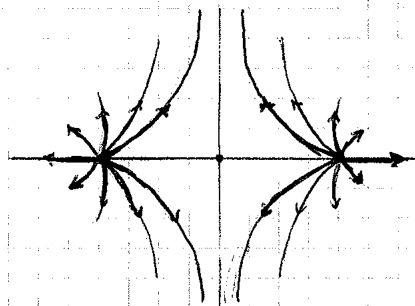
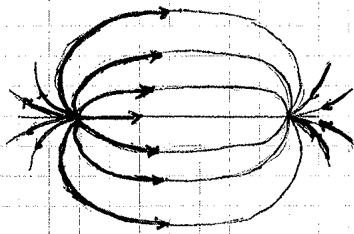
LINEA DI CAMPO \rightarrow assegnato un campo E , si definiscono linee di campo le cuiche caratterizzate dal fatto che in ogni punto \vec{r} il campo $E(\vec{r})$ risulta tangente alla curva



1 carica
 $q_1 > 0$
 \rightarrow linee uscenti



1 carica
 $q_2 < 0$
 \rightarrow linee entranti



$$\vec{F}(\vec{r}) = q_0 \vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_0 q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{i0}(\vec{r})$$

$$\vec{F}_{i0} = -\nabla_{\vec{r}} E_p^{(i)}(\vec{r}) = \frac{q_0 q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad \rightsquigarrow$$

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) &= q_0 \vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N (-\nabla_{\vec{r}} E_p^{(i)}(\vec{r})) \\ &\downarrow \\ &= -\nabla_{\vec{r}} \left(\sum_{i=1}^N E_p^{(i)}(\vec{r}) \right) \\ &\downarrow \\ &= -\nabla_{\vec{r}} E_p(\vec{r}) \end{aligned}$$

$$E_p^{(i)}(\vec{r}) = \frac{q_0 q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \left(E_p(\vec{r}_B) - E_p(\vec{r}_A) \right)$$

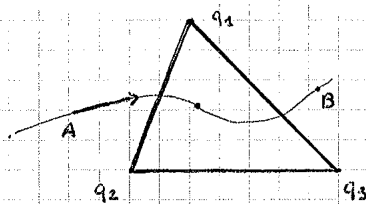
Potenziali e campo elettrico

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_0}$$

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} = -\nabla E_p(\vec{r})$$

$$W(\vec{r}) = \frac{E_p(\vec{r})}{q_0} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|} \rightarrow V_i(\vec{r})$$

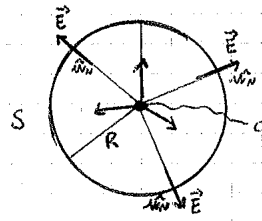
$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) \quad \rightarrow \quad E_i(\vec{r}) = -\nabla_{\vec{r}} V_i(\vec{r})$$



1) Caso in cui S è una sfera con una sola carica

$$\Phi(\vec{E}) = \iint_S \vec{E} \cdot \hat{w}_N \, dS \rightarrow \iint_S \frac{q \hat{w}_V \cdot \hat{w}_N}{4\pi\epsilon_0 r^2} \, dS \rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \iint_S dS \rightarrow r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 4\pi R^2$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{q}{\epsilon_0}}$$

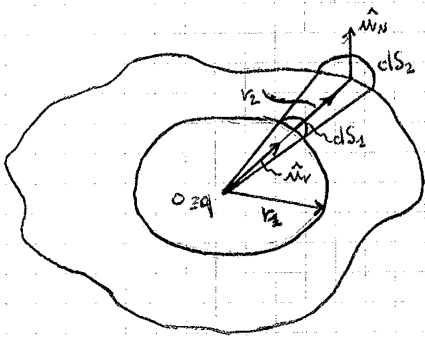


sfera che circonda la carica

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\hat{w}_N = \hat{w}_V = \frac{\vec{r}}{r}$$

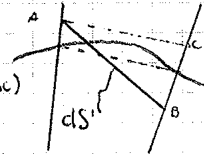
2) Flusso di una carica attraverso una S qualsiasi



$$E \parallel \hat{w}_V$$

$$d\phi_2 = E \cdot \hat{w}_N \, dS_2 \rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \hat{w}_V \cdot \hat{w}_N \, dS_2$$

dS' è la sfera che approssima dS_2
(dS' diventa ipotenusa del triangolo sac)



$$-d\vec{E} \cos\theta_2 \, dS_2 = |\vec{E}| \, dS'$$

$$\rightarrow dS' = \cos\theta_2 \, dS_2 \rightarrow r_2^2 \underbrace{\sin\theta \, d\theta \, d\varphi}_{d\Omega}$$

$$\rightarrow |\vec{E}| r_2^2 \, d\Omega \rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} r_2^2 \, d\Omega \rightarrow \boxed{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \, d\Omega}$$

$$d\phi_1 = \vec{E} \cdot \hat{w}_N \, dS_1 = \frac{q \hat{w}_V \cdot \hat{w}_N}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} r_1^2 \, d\Omega \rightarrow \boxed{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \, d\Omega}$$

$$\Rightarrow d\phi_1 = d\phi_2 \rightarrow \text{IMPORTANTE}$$

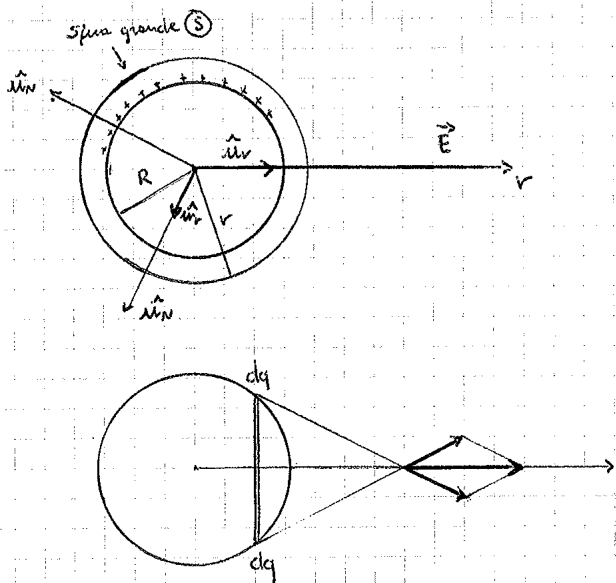
$$\rightarrow \Phi(\vec{E}) = \iint_S \frac{\vec{E} \cdot \hat{w}_N \, dS}{d\phi} = \iint_{S'} \vec{E} \cdot \hat{w}_N \, dS \rightarrow \text{sulla sfera} \Rightarrow \boxed{\frac{q}{\epsilon_0}}$$

con S qualsiasi

con S sfera

CAMPO \vec{E} generato da un guscio sferico carico

σ = densità superficiale di carica = $\frac{Q}{S} \rightarrow \frac{Q}{4\pi R^2}$, R = raggio sfera



$$\vec{E}(\vec{r}) = E \hat{u}_r$$

$$\hat{u}_N = \hat{u}_r$$

$$\phi(\vec{E}) = \iint_S \vec{E} \cdot \hat{u}_N dS = \frac{Q_{TOT}}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow \iint E(r) \hat{u}_r \cdot \hat{u}_N dS$$

$$\rightarrow E(r) \iint dS = E(r) \overset{\text{superficie sfera}}{4\pi r^2} = \frac{Q_{TOT}}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow \begin{cases} E(r) = \frac{4\pi R^2 \sigma}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \rightarrow \text{per } r > R \\ E(r) = 0 \rightarrow \text{per } r < R \end{cases}$$

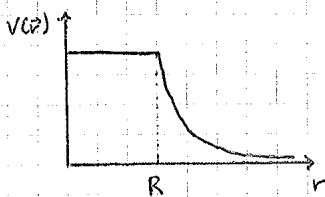
$$V(r) = \begin{cases} \text{cost} & r < R \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r} & r \geq R \end{cases}$$

se $r = R$

la costante $C = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R}$

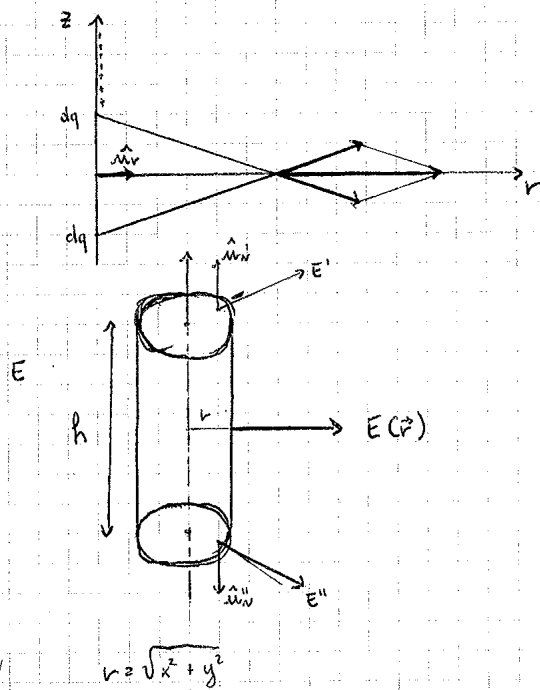
$$\vec{E} = -\nabla V = -\nabla \left(\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} \right) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \nabla \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\rightarrow -\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(-\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{\hat{u}_r}{r^2}$$



CAMPO \vec{E} generato da un filo carico

λ = densità lineare costante



$$\vec{E}(\vec{r}) = E(\vec{r}) \hat{u}_r$$

$$\phi(\vec{E}) = \iint_S \vec{E} \cdot \hat{u}_N dS = \phi_{\text{base}} + \phi_{\text{lati}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \iint_{S_L} E(\vec{r}) \hat{u}_r \cdot \hat{u}_N dS = E(\vec{r}) \iint_{S_L} dS$$

ha raggio r cost

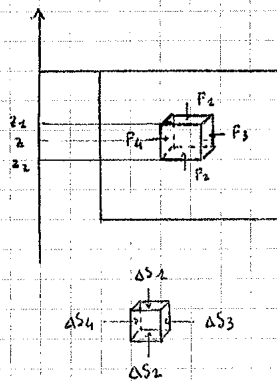
$$\rightarrow E(\vec{r}) 2\pi r h = \frac{Q_{TOT}}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow E(\vec{r}) 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{E(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}}$$

$$\rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E(\vec{r}) \hat{u}_r = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \hat{u}_r$$

$$\rightarrow V(\vec{r}) = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

SPINTA DI ARCHIMEDE



$$F_{\text{lat}}^{(x)} = F_1 - F_3 = 0 \rightarrow P(z) \Delta S_4 - P(z) \Delta S_3 = 0$$

$$F_{\text{lat}}^{(y)} = F_5 - F_6 = 0$$

$$F_{\text{lat}}^{(z)} = F_2 - F_4 = 0 \rightarrow P(z_2) \Delta S_2 - P(z_1) \Delta S_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow (P(z_2) - P(z_1)) \Delta S$$

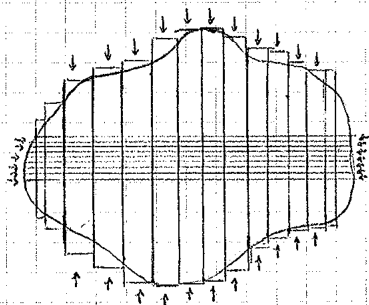
$$\rightarrow [(P_0 + \rho g (z_0 - z_2)) - P_0 - \rho g (z_0 - z_1)] \Delta S$$

$$\rightarrow \rho g (z_1 - z_2) \Delta S$$

$$F_{\text{ARCHIMEDE}} = F_2 - F_4 \Rightarrow \rho g (z_1 - z_2) \Delta S$$

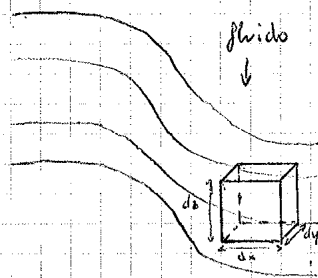
$$\rightarrow F_{\text{TOT}} = F_{\text{ARCHIMEDE}} - \Delta M g \Rightarrow \rho g \Delta V - \rho_{\text{corpo}} \Delta V g$$

$$\rightarrow (\rho - \rho_{\text{corpo}}) g \Delta V$$



le frecce rappresentano le pressioni infinitesime sulle mense

EQUILIBRIO DI UN FLUIDO



fluido immerso in un campo $\vec{F}(\vec{r})$

campo delle forze di volume

$$d\vec{F} = \vec{F} dV = \rho dV \vec{F}$$

forza per
unità di massa

$$dV = dS dx = dS dy = dS dz$$

$$x) P(x) dS - P(x + dS) dS + F_x \rho dV = 0$$

$$y) P(y) dS - P(y + dS) dS + F_y \rho dV = 0$$

$$z) P(z) dS - P(z + dS) dS + F_z \rho dV = 0$$

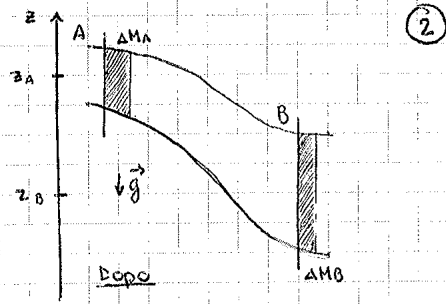
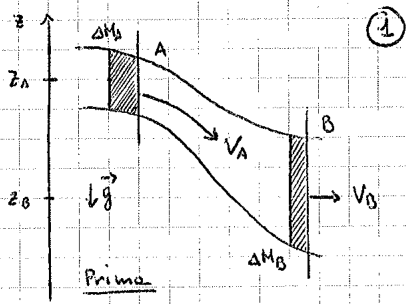
$$\Rightarrow P(x) dS - (P(x) + \frac{dP}{dx} dx) dS = -F_x \rho dV$$

$$-\frac{dP}{dx} = -F_x \rho dV$$

→ Stesse cose per y e z

$$\nabla P = \rho dV$$

TEOREMA DI BERNULLI



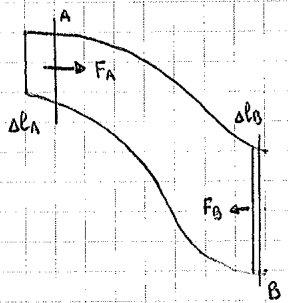
$$\Delta E_K = -\Delta E_P + W' \quad \rightarrow \quad \Delta E_K = E_{Kf} - E_{Ki} \quad \rightarrow \quad E_{K2} - E_{K1}$$

↑
lavoro forze esterne

$$\rightarrow \left(\cancel{E_K} + \frac{1}{2} \Delta M_B V_B^2 \right) - \left(\cancel{E_K} + \frac{1}{2} \Delta M_A V_A^2 \right) = -\Delta E_P$$

$$\Delta E_P = E_{P2} - E_{P1} \quad \rightarrow \quad (E_P^R + \Delta M_B g z_B) - (E_P^R + \Delta M_A g z_A)$$

E_K^R ed E_P^R si eliminano a tutto il sistema
 $\Delta M_A, \Delta M_B$ sono le quantità che entrano ed escono dall'intervallo



$$W' = F_A \Delta l_A - F_B \Delta l_B \quad \rightarrow \quad P_A S_A \Delta l_A - P_B S_B \Delta l_B$$

$$S_A \Delta l_A = S_B \Delta l_B = \Delta V$$

$$W' = (P_A - P_B) \Delta V$$

$$\frac{1}{2} \Delta M_B V_B^2 - \frac{1}{2} \Delta M_A V_A^2 = -(\Delta M_B g z_B - \Delta M_A g z_A) + (P_A - P_B) \Delta V$$

$$\Delta M_A = \Delta M_B + \rho_A \Delta V_A = \rho_B \Delta V_B \quad \rho_A = \rho_B \rightarrow \Delta V_A = \Delta V_B = \Delta V$$

$$\rightarrow \cancel{\Delta V} \left(\frac{\rho}{2} V_B^2 - \frac{\rho}{2} V_A^2 \right) = \cancel{\Delta V} (-\rho g z_B + \rho g z_A) + (P_A - P_B) \cancel{\Delta V}$$

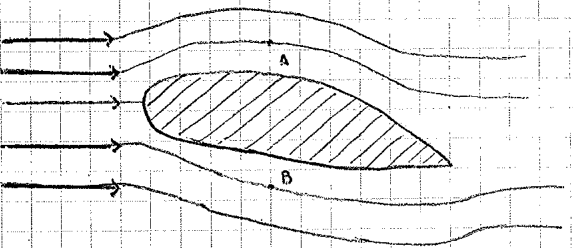
$$\rightarrow \frac{\rho}{2} V_B^2 - \frac{\rho}{2} V_A^2 = \rho g z_A - \rho g z_B + P_A - P_B$$

$$\rightarrow \frac{\rho}{2} V_B^2 + \rho g z_B + P_B = \frac{\rho}{2} V_A^2 + \rho g z_A + P_A$$

\uparrow E_{PB} \uparrow E_{PB} \uparrow W'_{PB} \uparrow E_{KA} \uparrow E_{PA} \uparrow W'_{KA}

$$\boxed{\frac{\rho}{2} V^2 + \rho g z + P = C} \quad \rightarrow \quad \text{lungo ogni linea di corrente}$$

Applicazioni 1) Spinta nell'ala di un aereo

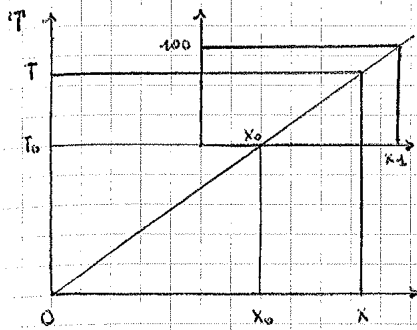


$$P_A + \frac{\rho}{2} V_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{\rho}{2} V_B^2 + \rho g z_B = C$$

$$\text{Essendo } V_A > V_B \rightarrow P_B - P_A = \frac{\rho}{2} (V_A^2 - V_B^2) > 0$$

Vi è una spinta verticale

Temperature assoluta: T espressa in gradi Kelvin (K)



$$\frac{X}{T} = \frac{X_0}{T_0} \rightarrow T = T_0 \frac{X}{X_0} \quad T_0 = 273.16 \text{ K}$$

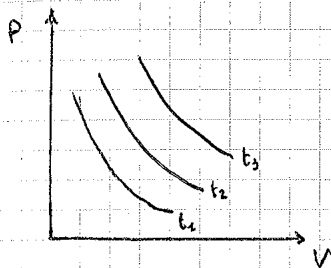
GAS IDEALI E GAS REALI

Legge isoterna (Boyle-Mariotte)

$T = \text{fine}$

$$P \cdot V = \text{cost}$$

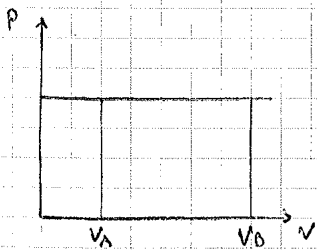
o $T = \text{cost}$



\rightarrow se T aumenta $\rightarrow P$ diminuisce, V aumenta

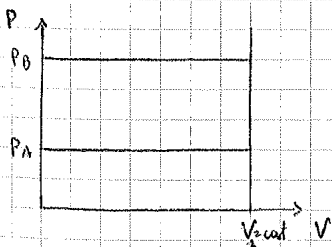
\rightarrow se T diminuisce $\rightarrow P$ aumenta, V diminuisce

Legge isocora (Volta-Gay-Lussac)



$$V = V_0 (1 + \alpha dt)$$

Legge isobara



$$P = P_0 (1 + \beta dt)$$

con $P_0 = \text{pressione a } t = 0$

$$P \cdot V = C \left(\frac{1}{d} + t \right) \Rightarrow P \cdot V = \frac{C}{d} (1 + dt)$$

$$P_1, V_1, T_1 = 100^\circ C \quad T_2 = t + \frac{1}{d}$$

$$P \cdot V = P_0 V_0 (1 + dt)$$

$$P_2 V_2 = P_0 V_0 (1 + dt_2) \rightarrow P_0 V_0 + d P_0 V_0 t_2 \rightarrow P_2 V_2 - P_0 V_0 = d P_0 V_0 100$$

$$\rightarrow \frac{1}{d} = \frac{P_0 V_0 100}{P_2 V_2 - P_0 V_0}$$

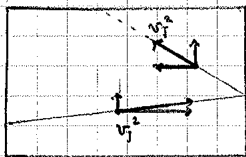
Teoria cinetica dei gas

Energia cinetica di un gas $\rightarrow E_k^{TOT} = \sum_j \frac{m}{2} v_j^2 \rightarrow \langle E_k \rangle = \frac{E_k^{TOT}}{N} = \frac{1}{N} \sum_j \frac{m}{2} v_j^2$

velocità medio \downarrow
 $v_j = m \cdot v_{mj}$

$$\langle v_j^2 \rangle = \sum_j \frac{1}{N} v_j^2 \Rightarrow \frac{1}{N} (E_T v_{Tx}^2 + E_T v_{Ty}^2 + E_T v_{Tz}^2) \Rightarrow \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle$$

uguali \downarrow
 $= \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$



$$\begin{cases} v_{Tx} \rightarrow v'_{Tx} = -v_{Tx} \\ v_{Ty} \rightarrow v'_{Ty} = v_{Ty} \end{cases} \Rightarrow \Delta p_j = |m v'_{Tx} - m v_{Tx}| = 2 m v_{Tx}$$

$$\int_0^{\Delta t} F(t) dt = \Delta p \rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = \vec{F}$$

$\langle F_x \rangle$ = forze totali medie

$$\rightarrow F_{jx} = \frac{\Delta p_j}{\Delta t} = \frac{2 m v_{Tx}}{\frac{2L}{v_{Tx}}} = \frac{m v_{Tx}^2}{L} \quad \text{con } \Delta t = \frac{2L}{v_{Tx}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{N} \sum_j F_{jx} = \frac{1}{N} \sum_j \frac{m v_{jx}^2}{L}$$

$$\rightarrow \frac{m}{L} \frac{1}{N} \sum_j v_{jx}^2 = \frac{m}{L} \langle v_{Tx}^2 \rangle \rightarrow \text{scarto quadratico medio}$$

$$P = \frac{N \langle F_x \rangle}{A} = \frac{N}{L^2} \frac{m \langle v_{Tx}^2 \rangle}{L} = \frac{Nm}{V} \langle v_x^2 \rangle = \frac{Nm}{3V} \langle v^2 \rangle$$

Ricordando che $\rightarrow PV = nRT \rightarrow \frac{2}{3} \frac{N}{V} \left(\frac{m \langle v^2 \rangle}{2} \right) \Rightarrow \frac{2}{3} \frac{N}{V} \langle E_k \rangle$

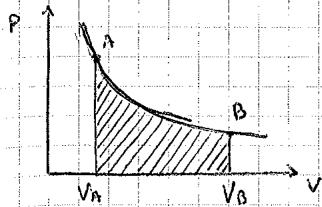
$$P \cdot V = \frac{Nm}{3V} \langle v^2 \rangle \cdot V \rightarrow NKT \rightarrow P \cdot V = \frac{2}{3} N \langle E_k \rangle = NKT$$

$$\rightarrow \langle E_k \rangle = \frac{3}{2} NKT$$

gas monoatomico	$\langle E_k \rangle = \frac{3}{2} k_B T$	3 gradi di libertà
gas biatomico	$\langle E_k \rangle = \frac{5}{2} k_B T$	3+2 gradi di libertà
gas poliatomico	$\langle E_k \rangle = \frac{6}{2} k_B T$	6 gradi di libertà

$$\text{ma } \langle E_k \rangle = \frac{3+f}{2} k_B T \rightarrow \text{TEOREMA DI EQUIPARTIZIONE DELL'ENERGIA}$$

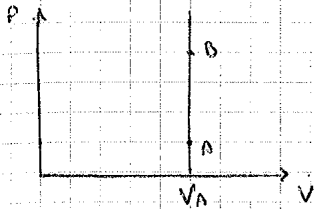
2) lavoro in una trasformazione isoterma



$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} P(V, T) dV \rightarrow \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V} dV$$

$$\rightarrow nRT \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} \rightarrow nRT \ln \frac{V_B}{V_A}$$

3) lavoro in una trasformazione isocora

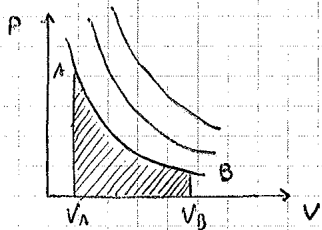


$$W_{AB} = 0$$

Caso più generale

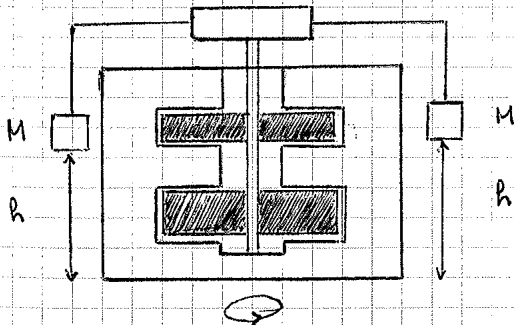
$$PV^\gamma = C$$

$$W_{AB} = \int_A^B P dV \rightarrow \int_{V_A}^{V_B} \frac{C}{V^\gamma} dV \rightarrow \left(-\frac{C}{\gamma+1} \frac{1}{V^{\gamma+1}} \right)_{V_A}^{V_B}$$



ESPERIMENTO DI JOULE

Mostra che il lavoro meccanico è sempre proporzionale alla variazione della temperatura ed alla massa della sostanza (liquido) a cui agisce meccanicamente



PARETI ADIABATICHE

$$2Mgh = \Delta E_p \rightarrow \Delta W_{\text{alt}} + \Delta W$$

$$\downarrow$$

$$\Delta Q$$

Dopo il riscaldamento si misura la variazione di T

$\Delta W = \Delta Q \rightarrow$ il calore coincide con il lavoro

Specialmente con masse diverse e sostanze diverse si trova \rightarrow

$$\Delta Q = m c (T_f - T_i) \quad (1)$$

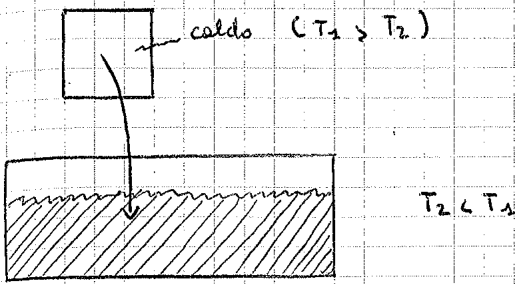
$c \rightarrow$ calore specifico = calore che si deve fornire per innalzare di 1 K l'unità di massa della sostanza

$1 \text{ cal} = \text{caloria} \rightarrow$ calore necessario per innalzare di 1 K 1 grammo di H_2O

$$1 \text{ caloria} = 4,186 \text{ J}$$



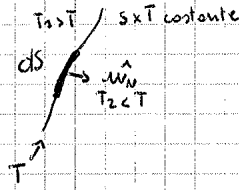
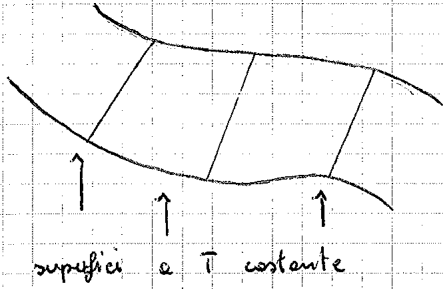
Esempio



Trasmissione del calore \rightarrow

- CONVEZIONE \rightarrow trasporto di masse calde o fredde
- IRRAGGIAMENTO \rightarrow radiazione termica
- CONDUZIONE \rightarrow contatto di un corpo caldo con uno piú freddo

LEGGI FENOMENOLOGICA DI FOURIER



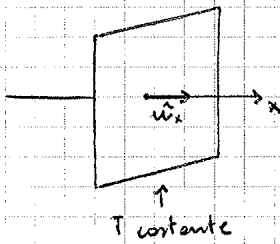
$$dQ = -K(\nabla T) \cdot \hat{n} \, dS \, dt$$

↑
calore trasmesso

$$T = T(x, y, z) = T(\vec{r})$$

K = conducibilità termica

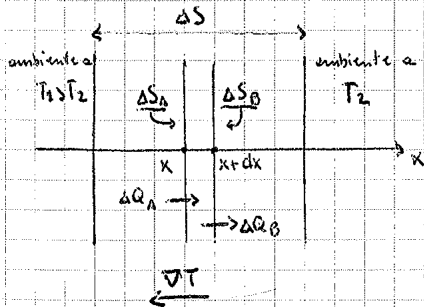
Caso semplice



$$dQ = -K \left(\frac{dT}{dx} \hat{u}_x \right) \cdot \hat{n} \, dS \, dt$$

$$\hat{n} = \hat{u}_x$$

$$dQ = -K \frac{dT}{dx} \, dS \, dt$$



$$dQ_A = -K \left(\frac{dT}{dx} \right)_x \, \Delta S_A \, dt$$

$$dQ_B = -K \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x+dx} \, \Delta S_B \, dt$$

$$\rightarrow -K \left[\frac{dT}{dx} + \left(\frac{d^2T}{dx^2} \right) dx \right] \Delta S \, dt \quad \Delta S_A = \Delta S_B = \Delta S$$

$$dQ_A - dQ_B = K \frac{d^2T}{dx^2} \, \Delta S \, dx \, dt$$

$$\rightarrow dQ_A - dQ_B = dm \, c \, dt \quad \text{perché} \quad dm \, c \, dt = K \frac{d^2T}{dx^2} \, \Delta S \, dx \, dt$$

$dm = \rho \, dx \, \Delta S$

EQUAZIONE DEL CALORE \rightarrow $\rho c \frac{dT}{dt} = K \frac{d^2T}{dx^2}$

Regime stazionario $\rightarrow \frac{dT}{dt} = 0 \rightarrow K \frac{d^2T}{dx^2} = 0$

$$T(x) = ax + b \begin{cases} T(0) = b = T_1 \\ T(x_1) = T_2 = ax_1 + b \end{cases} \rightarrow a = \frac{T_2 - T_1}{x_1}$$

$$T(x) = \left(\frac{T_2 - T_1}{x_1} \right) x + T_1$$

$$Q = \int_0^{t_2} dt \iint_S dS \left(-K \frac{dT}{dx} \right) \rightarrow -E a K \iint dS \Rightarrow -E a K S \rightarrow -K \left(\frac{T_2 - T_1}{x_1} \right) E S$$

1) Trasformazione isoterma $\rightarrow T = \text{cost}$

$$dQ = dU + dW \rightarrow dQ = PdV$$

\downarrow
perché $T = \text{cost}$

$$dQ = \int_A^B dQ = \int_A^B PdV \rightarrow nRT \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

\downarrow
 $\frac{nRT}{V} dV = d(nRT \ln(V))$

2) Trasformazione isobara $\rightarrow P = \text{cost}$

$$dQ = dU + PdV \rightarrow \Delta Q = \int_A^B dQ = \int_A^B dU + \int_A^B PdV \rightarrow U(T_B) - U(T_A) + P(V_B - V_A)$$

$$\rightarrow n c_v (T_B - T_A) + P(V_B - V_A) \rightarrow n c_v (T_B - T_A) + nR(T_B - T_A)$$

$$\rightarrow n \underbrace{(c_v + R)}_{c_p = c_v + R} (T_B - T_A)$$

$c_p = \text{calore specifico a } P \text{ costante} \rightarrow \boxed{\frac{3 + f + 2}{2} R}$ RELAZIONE DI MAYER

3) Trasformazione isocora $\rightarrow V = \text{cost}$

$$dQ = dU + \underbrace{PdV}_0 \rightarrow \Delta Q = \int_A^B dQ = \int_A^B dU = n c_v (T_B - T_A)$$

\downarrow
perché $V = \text{cost}$

4) Trasformazione adiabatica

$$PV^\gamma = \text{cost} \leftrightarrow TV^{\gamma-1} = \text{cost}$$

$$\underbrace{dQ}_0 = dU + PdV \rightarrow 0 = n c_v dT + \frac{nRT}{V} dV \rightarrow c_v dT = - \frac{RT}{V} dV$$

per cambiare il rapporto $\frac{V}{V_0}$

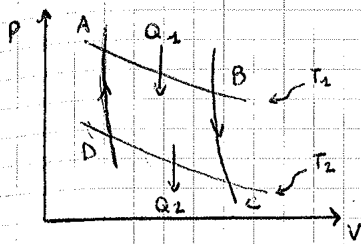
$$\rightarrow \frac{dT}{dV} = - \frac{RT}{c_v V} \rightarrow \int \frac{dT}{T} = - \int \frac{R}{c_v} \frac{dV}{V} \rightarrow \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) = - \underbrace{\left(\frac{R}{c_v}\right)}_{\gamma-1} \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$$

Sapendo che $\rightarrow \gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{R}{c_v}$

$$\rightarrow \boxed{\frac{T}{T_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma-1}}$$

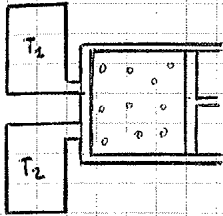
$$P \cdot V^\gamma = \text{cost} \rightarrow \frac{P \cdot V}{n \cdot R} V^{\gamma-1} = \text{cost} \rightarrow TV^{\gamma-1} = T_0 V_0^{\gamma-1} = \text{cost}$$

CICLO DI CARNOT



L'area racchiusa è il lavoro

$AB \left\{ \begin{array}{l} \text{ISOTERME} \\ \text{CD} \end{array} \right.$
 $BC \left\{ \begin{array}{l} \text{ADIABATICHE} \\ \text{DA} \end{array} \right.$



Non esiste nessuna macchina di Carnot nella realtà, perché non è efficiente, ma ha grandi risvolti teorici

$$\eta = \frac{Q_{TOT}}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \boxed{1 + \frac{Q_2}{Q_1}} \rightarrow \text{RENDIMENTO}$$

$$\rightarrow \frac{W_{TOT}}{Q_1}$$

$$Q_{ASSORBITO} = Q_1 = \int_A^B \delta Q = \int_A^B P dV \rightarrow nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} > 0$$

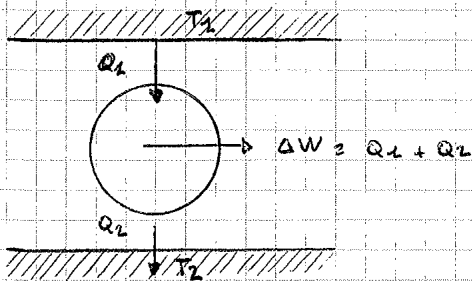
$$Q_{CEDUTO} = Q_2 = \int_C^D \delta Q = \int_C^D P dV \rightarrow nRT_2 \ln \frac{V_D}{V_C} < 0$$

$$\eta = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{nRT_2 \ln(V_D/V_C)}{nRT_1 \ln(V_B/V_A)} \rightarrow 1 + \frac{T_2 \ln(V_D/V_C)}{T_1 \ln(V_B/V_A)} = \boxed{1 + \frac{T_2}{T_1}} \leftarrow \text{TEOREMA DI CARNOT}$$

perché è ADIABATICA $\rightarrow TV^{\gamma-1} = \text{cost} \rightarrow \frac{V_B^{\gamma-1}}{V_D^{\gamma-1}} = \frac{V_C^{\gamma-1}}{V_A^{\gamma-1}}$

$$\rightarrow \eta = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \leftarrow \text{Rendimento (o efficienza) di un ciclo di CARNOT}$$

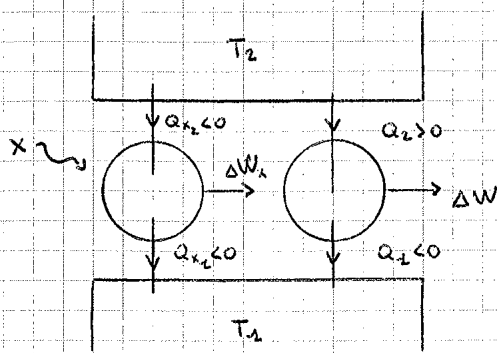
L'efficienza η di una macchina termica che opera secondo un ciclo reversibile di Carnot è indipendente della sostanza che compie il lavoro e dipende solo dalle due temperature alle quali il ciclo si svolge



Schema del ciclo di Carnot

Più in dettaglio $\rightarrow \begin{cases} \eta_x = \eta & \text{x } \times \text{ opera reversibilmente} \\ \eta_x < \eta & \text{x } \times \text{ opera irreversibilmente} \end{cases}$

Dimostrazione:

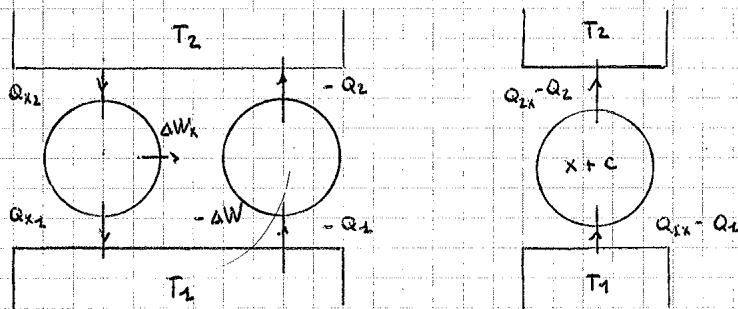
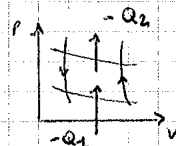


Prova per assurdo $\rightarrow \eta_x > \eta$

$$\eta_x = \frac{Q_{x1} + Q_{x2}}{Q_{x2}} = \frac{\Delta W_x}{Q_{x2}} > \eta = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_2} = \frac{\Delta W}{Q_2}$$

Prendo macchina di Carnot tale che $\Delta W = \Delta W_x \rightarrow Q_2 > Q_{x2}$

Faccio lavorare la macchina di Carnot con un ciclo frigorifero



$$Q_2 > Q_{2x} \Rightarrow Q_{2x} - Q_2 < 0$$

$$\Delta W = \Delta W_x \rightarrow Q_1 + Q_2 = Q_{1x} + Q_{2x} \rightarrow Q_{2x} - Q_2 = Q_1 - Q_{1x} > 0$$

$$\rightarrow \eta_x > \eta \text{ falso} \rightarrow \boxed{\eta_x \leq \eta}$$

Se x fosse reversibile posso provare che $\eta_x \geq \eta$ in aggiunta a $\eta_x \leq \eta$ e quindi l'unica possibilità è $\eta_x = \eta$

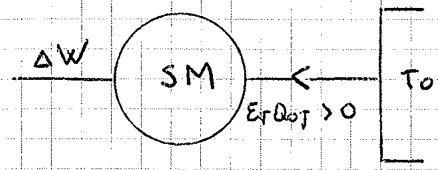
$$\eta_x \leq \eta = 1 + \frac{T_1}{T_2}$$

$$1 + \frac{Q_{1x}}{Q_{2x}} \leq 1 + \frac{T_1}{T_2} \rightarrow \frac{Q_{1x}}{Q_{2x}} + \frac{T_1}{T_2} \leq 0 \rightarrow \frac{Q_{1x}}{T_1} + \frac{Q_{2x}}{T_2} \leq 0$$

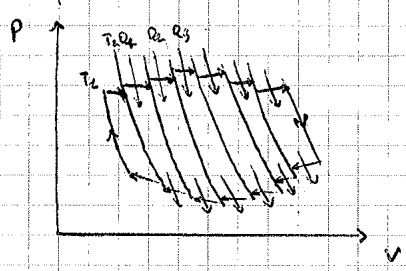
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_{01}}{T_0} &= 0 \\ -\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_{02}}{T_0} &= 0 \\ -\frac{Q_3}{T_3} + \frac{Q_{03}}{T_0} &= 0 \\ \dots \\ -\frac{Q_N}{T_N} + \frac{Q_{0N}}{T_0} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\longrightarrow -\sum_j \frac{Q_j}{T_j} + \sum_j \frac{Q_{0j}}{T_0} = 0 \longrightarrow \frac{1}{T_0} \sum_j Q_{0j} = \sum_j \frac{Q_j}{T_j}$$

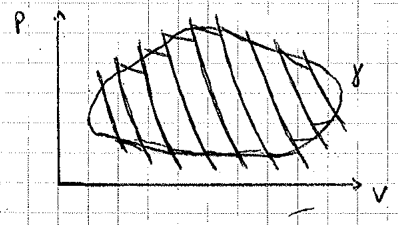
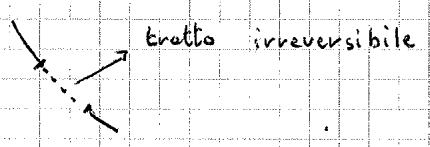
Assunto: $\sum_j \frac{Q_j}{T_j} > 0 \longrightarrow \sum_j \frac{Q_{0j}}{T_0} > 0 \longrightarrow \sum_j Q_{0j} > 0$



ma questo viola l'enunciato di Kelvin-Planck

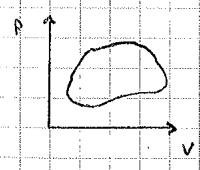


Comincio a tratti con alternanza di adiabatiche e di isoterme \rightarrow posso immaginarlo come una curva che è l'unione di tanti cicli di Carnot

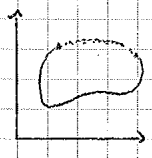


Approssimo la curva con adiabatiche ed isoterme. Selgo le isoterme in modo che tocchino a metà le curve

Invece di usare $\sum_j \frac{Q_j}{T_j} \rightarrow \oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$



\rightarrow segno di uguaglianza (=) \rightarrow CASO REVERSIBILE

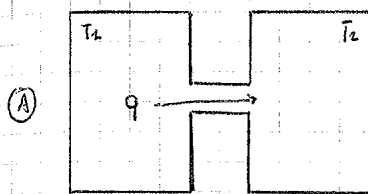


\rightarrow segno di disuguaglianza (<) \rightarrow CASO IRREVERSIBILE

LEGGE DI AUMENTO DELL' ENTROPIA

- 1) Aumento di equilibrio termico e crescita dell' entropia
 - 2) Aumento di equilibrio meccanico e crescita dell' entropia
- } IRREV.

Due corpi/sistemi isolati dall' ambiente, a contatto, con $T_1 > T_2$, permettono lo scambio calore

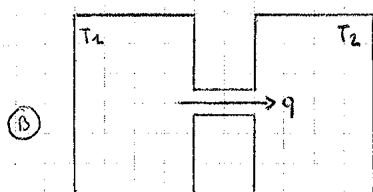


$$\Delta Q_1 = -q$$

$$\Delta Q_2 = q$$

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = 0 \rightarrow \text{isolamento}$$

Le due transf. sono:
 - globalmente adiabatiche
 - singolarmente isocore ma non adiabatiche perché tra loro scambio calore



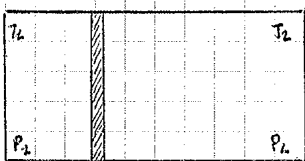
TEOREMA L' entropia è una quantità additiva $S_{TOT} = S_1 + S_2$

$$S_B - S_A = (S_{1B} + S_{2B}) - (S_{1A} + S_{2A}) = (S_{1B} - S_{1A}) + (S_{2B} - S_{2A}) = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

$$NB: dQ = Tds = dU + \frac{PdV}{\gamma}$$

$$V = \text{costante} \rightarrow \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{\Delta U_1 + P_1 \Delta V_1}{T_1} + \frac{\Delta U_2 + P_2 \Delta V_2}{T_2} = \frac{\Delta U_1}{T_1} + \frac{\Delta U_2}{T_2} =$$

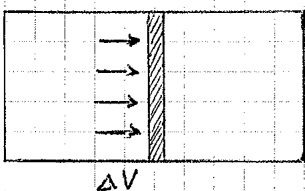
$$\rightarrow \frac{\Delta Q_1}{T_1} + \frac{\Delta Q_2}{T_2} = q \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) > 0 \quad \begin{matrix} \Delta U_1 = \Delta Q_1 \\ \Delta U_2 = \Delta Q_2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{perché } P\Delta V = 0 \\ \text{" " " " " " } \end{matrix}$$



$$T_1 = T_2 = T$$

$$P_1 > P_2$$

l' è equilibrio termico ma non c' è eq. meccanico



$$\Delta V_1 + \Delta V_2 = 0$$

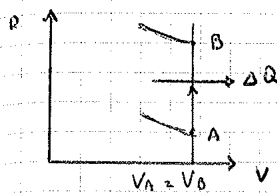
$$\Delta V_1 = -\Delta V_2 = \Delta V$$

$$S_B - S_A = (S_{1B} + S_{2B}) - (S_{1A} + S_{2A}) = (S_{1B} - S_{1A}) + (S_{2B} - S_{2A}) = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

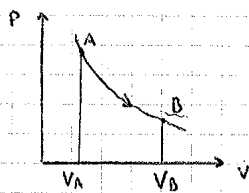
$$\rightarrow \Delta S_1 = \frac{\Delta U_1 + P_1 \Delta V_1}{T_1} \rightarrow \frac{P_1 \Delta V_1}{T_1} + \frac{P_2 \Delta V_2}{T_2} \rightarrow \frac{\Delta V}{T} (P_1 + P_2) > 0$$

$$\rightarrow \Delta U_i = 0 \quad T_1 = T_2 = T$$

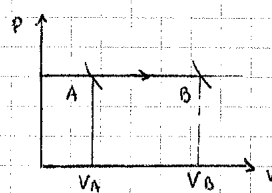
CVD \rightarrow L' entropia cresce in entrambi i casi $\rightarrow S_B > S_A$



ISOCORA → $\left\{ \begin{array}{l} T_B \text{ piú disordine} \\ T_A \text{ piú ordine} \\ \text{Varia } E_k \text{ media} \end{array} \right.$



ISOTERMA → $\left\{ \begin{array}{l} V_B \text{ piú disordine} \\ V_A \text{ piú ordine} \\ \text{Varia } V \text{ del gas} \end{array} \right.$



ISOBARA → $\left\{ \begin{array}{l} B \text{ piú disordine} \\ A \text{ piú ordine} \\ \text{Varia sia } V \text{ che } E_k \text{ media} \end{array} \right.$
 È l'unione dei primi 2 casi

3° PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

La variazione di ΔS (di entropia) associata ad una trasformazione reversibile di un sistema tende a zero per $T \rightarrow 0$ (ENUNCIATO DI NERNST-SIMON)

$$S(T, X) = S(0, X) + \int_0^T \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}}$$

↑
0