NUMERO: 1338

ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Busca

MATERIA: Geometria + Esercizi, Prof.Cordovez

GEOMETRIA

Esame:

- 10 quiz con 4 possibilità (1 solo giusta) (no penalità se sbaglio)
  ciascuno 2 punti → $10 \times 2 = 20$ punti
- 2 esercizi da 6 punti → 12 punti
  $20 + 12 = 32$ massimo
  sì calcolatrici
- non si può rifiutare il voto
- orale facoltativo

Date:

1° appello 27 giugno   2° appello 11 luglio   3° appello 18 settembre (finali per lenza del Cile da Spagna)

Programma:

- vettori
- geometria lineare (rette, piani)
- sfere, circonferenze, ..
- teoria degli spazi vettoriali (ALGEBRA LINEARE) → studio dei sottospazi
- coniche e quadriche (iperboloidi, ellissoidi, ...) → studio dei movimenti
- topologia (teoria degli insiemi) e funzioni in + variabili
- superfici

Esercitazioni

- mercoledì 1h e 30
- giovedì 1h e 30

Teoria

- lunedì, martedì e mercoledì 1h e 30

Libri:

- Letterio GATTO, lezioni di algebra lineare e geometria, CLUT (sottotitolo "I veri appunti del corso")

Esercizi:

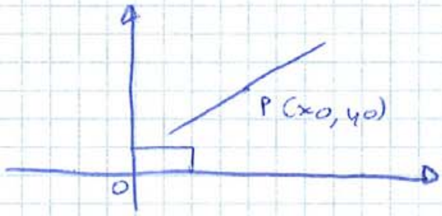
- Aristide SANINI, "Elementi di geometria"

INTRODUZIONE

$P \neq Q$ Per due punti diversi passa una e una sola retta

Per un punto passano infinite rette

Tutte le rette dello spazio non è detto che passano tutte per P.



qualsiasi punto si potrà esprimere rispetto ad O con due coordinate $P_0(x_0, y_0)$

tutte le rette per P → $y - y_0 = m(x - x_0)$

Esempio

$r: x + y = 0$ retta $y = -x$

$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} / u_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots n \right\}$

$\mathbb{R}^2$ è un esempio $\quad \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / x, y \in \mathbb{R} \right\}$

$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$

$\mathbb{R} = \{ x / x \in \mathbb{R} \}$

Oss.

$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(1) \\ \vdots \\ u(N) \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$

Quando $\vec{u} = \vec{v}$? $\quad \vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow u(i) = v(i) \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, \dots n$

2 operazioni:

① SOMMA $\quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$ colonna nulla, elemento neutro. Se sommo 1 colonna con questa ottengo la prima colonna

$-u = \begin{pmatrix} -u_1 \\ \vdots \\ -u_n \end{pmatrix}$ elemento opposto

- proprietà commutativa e associativa

$\mathbb{R}^N$ con la somma $\rightarrow$ gruppo abeliano (x commutatività)

② MOLTIPLICAZIONE PER SCALARE ($\mathbb{R}$)

$\lambda \cdot u = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}$

Proprietà:

1) $(\lambda + \mu) u = \lambda u + \mu u \quad (\lambda + \mu) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

2) $\lambda (\mu u) = (\lambda \cdot \mu) u$ moltiplicazione dei reali

3) $\lambda (u + v) = \lambda u + \lambda v$

4) $1 \cdot u = u$

$\mathbb{R}^N$ ha struttura di $\mathbb{R}$ spazio vettoriale con le operazioni appena definite

COMBINAZIONE LINEARE

$u, v \in \mathbb{R}^n \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ un'espressione del tipo $(\lambda u + \mu v)$ si dice combinazione lineare delle colonne $\lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu v_1 \\ \vdots \\ \mu v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 + \mu v_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n + \mu v_n \end{pmatrix}$

Ex. $\quad 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ è una combinazione lineare di $\mathbb{R}^3$

Base canonica

$E_n = (e_1, \dots e_n)$ insieme ordinato $\quad$ (con parentesi tonde rispetto ordine / con parentesi quadre non è necessario)

Def. $\quad \forall j = 1, \dots n$

$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j \quad$ tutti valgono 0 tranne il valore corrispondente a j

$e_j(i) = (e_j)_i = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

Proprietà:

(1) $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$

(2) $\langle \lambda u + \mu v, w\rangle = \lambda \langle u,w\rangle + \mu \langle v,w\rangle$

(3) $\langle v, \lambda v + \mu w\rangle = \lambda \langle u,v\rangle + \mu \langle u,w\rangle$

(4) $\langle v,u\rangle \geq 0$

Dimostrazione (2)

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$

$\langle \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}\rangle = \langle \begin{pmatrix} \lambda_1 + \mu v_1 \\ \vdots \\ \lambda_n + \mu v_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}\rangle =$

$= (\lambda u_1 + \mu v_1) w_1 + \dots (\lambda u_n + \mu v_n) w_n =$

$= \lambda u_1 w_1 + \mu v_1 w_1 + \dots \lambda u_n w_n + \mu v_n w_n =$

$= (\lambda u_1 w_1 + \dots \lambda u_n w_n) + (\mu v_1 w_1 + \dots \mu v_n w_n) =$

$= \lambda (u_1 w_1 + \dots u_n w_n) + \mu (v_1 w_1 + \dots v_n w_n) =$

$= \lambda \langle u,w\rangle + \mu \langle v,w\rangle$

Faccio io (3)

1 scalare $\times$ 1 vettore = 1 vettore

1 vettore $\cdot$ 1 vettore = scalare

<u>Def.</u> $u, v \in \mathbb{R}^n$

allora se $\langle u,v\rangle = 0$ si dice che u è <u>ortogonale</u> a v (perpendicolari)

Esempio

$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle = 2 + 0 - 2 = 0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ è ortogonale a $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>Def.</u> Sia $v \in \mathbb{R}^n$, il modulo di v in $\mathbb{R}^n$ $|v| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$

esempio $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$|v| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow v \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad |v| = \sqrt{a^2 + b^2}$

<u>LEMMA</u>

$|\lambda u + \mu v|^2 = \lambda^2 |u|^2 + 2\lambda\mu \langle u,v\rangle + \mu^2 |v|^2 \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}, u, v \in \mathbb{R}^n)$

Dimostrazione

$\langle \lambda u + \mu v, \lambda u + \mu v\rangle = \langle \lambda u, \lambda u + \mu v\rangle + \langle \mu v, \lambda u + \mu v\rangle =$

$= \langle \lambda u, \lambda u\rangle + \langle \lambda u, \mu v\rangle + \langle \mu v, \lambda u\rangle + \langle \mu v, \mu v\rangle =$

$= \lambda^2 \langle u,v\rangle + \lambda\mu \langle u,v\rangle + \lambda\mu \langle u,v\rangle + \mu^2 \langle v,v\rangle =$

$= \lambda^2 |u|^2 + 2\lambda\mu \langle u,v\rangle + \mu^2 |v|^2$

Proiezione ortogonale di V lungo la direzione di $[u]$

$$\pi_{[u]}(v) = \underset{\text{versore di } u}{\langle v, \vec{e}_u \rangle} \cdot \vec{e} = \langle v, \frac{u}{|u|} \rangle \cdot \frac{u}{|u|} = \underbrace{\left(\frac{\langle v, u \rangle}{|u|^2} \right) \cdot \underset{\text{direzione}}{u}}_{\text{vettore che rappresenta la proiezione ortogonale}}$$

Notiamo che

$$\langle \pi_{[u]}(v), v - \pi_{[u]}(v) \rangle = 0 ?$$

Se sí, ho dimostrato. Infatti

$$\langle \pi_{[u]}(v), v \rangle - \langle \pi_{[u]}(v), \pi_{[u]}(v) \rangle =$$

$$= \langle \langle v, \vec{e}_u \rangle \vec{e}_u, v \rangle - \langle \langle v, \vec{e}_u \rangle e_u, \langle v, \vec{e}_u \rangle e_u \rangle =$$

$$= \langle v, e_u \rangle \langle v, e_u \rangle - (\langle v, \vec{e}_u \rangle)^2 \underbrace{\langle \vec{e}_u, \vec{e}_u \rangle}_{1} =$$

$$= \langle v, \vec{e}_u \rangle^2 - \langle v, \vec{e}_u \rangle^2 = 0$$

$[u]$ direzione
$v \in \mathbb{R}^n$

$$\pi_{[u]}(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{|u|^2} \cdot u$$

Esercizio in $\mathbb{R}^2$

Trovare la proiezione ortogonale del vettore $(1,3)$ nella direzione del vettore $(1,1)$

$$\frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{(\sqrt{2})^2} \cdot (1,1) = \frac{4}{2} u = 2(1,1) = (2,2)$$

Determinanti in $\mathbb{R}^2$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Proprietà:

- É lineare rispetto al primo argomento

cioé $(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) \wedge \vec{w} =$
$= \lambda \vec{u} \wedge \vec{w} + \mu \vec{v} \wedge \vec{w}$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Dimostrazione

$$(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) \wedge w = \begin{pmatrix} \lambda u_1 + \mu v_1 \\ \lambda u_2 + \mu v_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda u_1 + \mu v_1 & w_1 \\ \lambda u_2 + \mu v_2 & w_2 \end{vmatrix} =$$

det. è l'unica funzione antisimmetrica / lineare rispetto al primo argomento t.c. $i \wedge j = 1$

Propr. : 1) $\vec{u} \wedge \vec{u} = 0$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_1 \\ u_2 & u_2 \end{vmatrix} = u_1 u_2 - u_1 u_2 = 0$$

2) $\vec{u}, \vec{v} \in R^2$ sono collineari

allora $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$

infatti $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & \lambda u_1 \\ v_2 & \lambda u_2 \end{vmatrix} = 0$$

Determinante in R^3

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \text{Regola di La Place}$$

$$= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} =$$

$$= u_1 (v_2 w_3 - w_2 v_3) - u_2 (v_1 w_3 - v_3 w_1) + u_3 (v_1 w_2 - w_1 v_2) =$$

$$= u_1 v_2 w_3 - u_1 v_3 w_2 - u_2 v_1 w_3 + u_2 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_2 - u_3 v_2 w_1$$

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & z_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & z_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & z_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 & z_4 \end{vmatrix} = 4! \text{ addendi}$$

$$= u_1 v_2 w_3 z_4 - \text{------}$$

- Se cambio solo l'ordine di un n° pari di indici, segno (+)
- Se cambio " " n° dispari di indici, segno (−)

Esempio $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$$= 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-7) - 2(1) = -14 - 2 = -16$$

u, v collineari

$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{pmatrix}$

$\vec{u} \neq \vec{v}$

$\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(\lambda u)$ sì stessa direzione

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \lambda 1 & \lambda 2 & \lambda 3 \\ 4 & 2 & -7 \end{vmatrix} \quad \lambda \neq 0$

COSA? NON HA CONCLUSO

Credo valga 0

Condizione di parallelismo

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \vec{u} \times \vec{v} = 0$$

$$\vec{v} = \lambda \vec{u}$$

$$\vec{u} \times \lambda \vec{u} = -\lambda \vec{u} \times \vec{u} = 0$$

Esercizio

$$\langle u \times v, u \rangle = 0$$

$$\langle u \times u, v \rangle = 0$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \qquad u \times v = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -(u_1 v_3 - u_3 v_1) \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

$$\langle (u \times v), u \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -(u_1 v_3 - u_3 v_1) \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= u_1 u_2 v_3 - \cancel{u_1 u_3 v_2} - u_1 u_2 v_3 + u_2 u_3 v_1 + \cancel{u_1 u_3 v_2} - \cancel{u_2 u_3 v_1} =$$

$$= 0$$

ES.

Dati i vettori $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Determinare un versore ortogonale ad entrambi

$$\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{\begin{vmatrix} i & 1 & 1 \\ j & 1 & 0 \\ k & -1 & 2 \end{vmatrix}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{14}} \qquad \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} \\ -\frac{3}{\sqrt{14}} \\ -\frac{1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} \text{ Trovato}$$

ES.

$\langle u \times v, w \rangle = \langle u, v \times w \rangle$ si chiama PRODOTTO MISTO

ES.

$$u \times v \times w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u$$

ES.

$$(u \times v) \times w + (v \times w) \times u + (w \times u) \times v = 0$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}| = \left\| \begin{vmatrix} i & 0 & -1 \\ j & 1 & -1 \\ k & 2 & 2 \end{vmatrix} \right\| = \sqrt{4^2+(2)^2+1^2} = \sqrt{21} = \sqrt{21}$$ Area del parallelogramma

Area triangolo $= \dfrac{\sqrt{21}}{2}$

Se prodotto scalare tra $\vec{u}$ e $\vec{v}$ viene 0, il triangolo è rettangolo

se prodotto scalare tra $\vec{u}$ e $\vec{w}$ viene 0, " "

" " tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$ " " "

$\vec{u}\times\vec{v}$ in $\mathbb{R}^3$

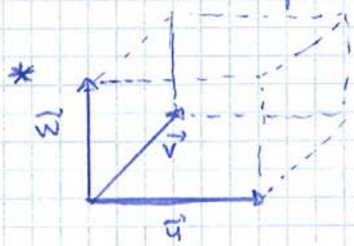
1) risultato è vettore perpendicolare ad entrambi

2) regola mano destra

3) $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$ con $\theta = \widehat{\vec{u},\vec{v}}$

4) $\langle \vec{u}\times\vec{v}, \vec{w}\rangle$ prodotto misto

5) $|\vec{u}\times\vec{v}|$ = Area del parallelogramma generato dalle parallele ad $\vec{u}$ e $\vec{v}$



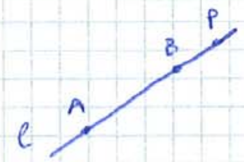
$|\langle \vec{u}\times\vec{v}, w\rangle|$ = VOLUME del parallelepipedo generato dai vettori $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ nel senso (*)

Oss. condizione di complanarità è l'annullamento del prodotto misto ossia $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ giacciono sullo stesso piano se e solo se $\langle u\times v, w\rangle = 0$

$$\langle \vec{u}\times\vec{v}, w\rangle = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

vettori finiti

GEOMETRIA ANALITICA



$A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OB-A} = \vec{w}$

$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $P = A + t\vec{w}$ $t\in\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Equazioni parametriche di ℓ

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{array}\right\} \quad t\in\mathbb{R}$$

$P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & x_1-x_0 & x_2-x_0\\ y-y_0 & y_1-y_0 & y_2-y_0\\ z-z_0 & z_1-z_0 & z_2-z_0\end{vmatrix}=0$$

Determinare l'equazione del piano che passa per $A\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$

$<(P-A)\times(B-A),(C-A)>$

$$\begin{vmatrix}x-1 & 0 & -2\\ y & 1 & -2\\ z+2 & 3 & 5\end{vmatrix}=0$$

$$(x-1)\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 5\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}0 & -2\\ 3 & 5\end{vmatrix}+(z+2)\begin{vmatrix}0 & -2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=$$

$=(x-1)\cdot 11-y(+6)+(z+2)\cdot 2= \quad 11x-11-6y+2z+4=$

$=11x-6y+2z-7=0$

$11x-6y+2z-7=0$ piano β

$ax+by+cz+d=0$
$ax+by+cz+d'=0$ > 2 piani paralleli

oss. 2 piani non paralleli determinano un'unica retta

$\alpha,\beta \quad \alpha \not\parallel \beta \quad \alpha\cap\beta=$ retta

$$r=\begin{cases}\text{equazione } \alpha\\ \text{equazione } \beta\end{cases}$$

$a=b=d=0, \ c\neq 0 \quad cz=0 \rightarrow z=0$

ossia il piano xy

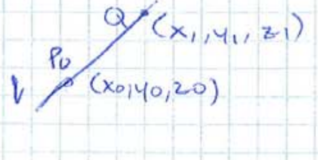
Se voglio che $\overrightarrow{AP}$ stia nel piano ABC, prodotto misto $=0$

$<\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}>=0$

$A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$, $P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & x_1-x_0 & x_2-x_0\\ y-y_0 & y_1-y_0 & y_2-y_0\\ z-z_0 & z_1-z_0 & z_2-z_0\end{vmatrix}=0$$

Eq. parametriche di una retta nello spazio



$\overrightarrow{P_0Q}=w=\begin{pmatrix}x_1-x_0\\y_1-y_0\\z_1-z_0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_0}+t\,\overrightarrow{P_0Q}$

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y & 0 & -1 \\ z+3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$(x-1)4 + 5y + (z+3)(1) = 0$

$4x + 5y + z - 1 = 0$

$N_\pi = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

altro modo: fascio di piani

$x + y = 0$

$y + z - 1 = 0$

$\lambda(x+y) + \mu(y+z-1) = 0$

λ, μ non entrambi nulli

$\lambda x + (\lambda+\mu)y + \mu z - \mu = 0$

$\lambda + (\lambda+\mu)0 - 3\mu - \mu = 0$ impongo passaggio per A

$\lambda - 4\mu = 0 \quad \lambda = 4\mu$

$\lambda = 4, \mu = 1$

$4x + 5y + z - 1 = 0$

$P_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad P_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \qquad d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$

$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2 - P_1}$

$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_2} \rangle}$ = distanza tra 2 punti

Esercizio Si considerino i piani

$\pi_1: \; ax + y - 2z = 0$

$\pi_2: \; y + z + 2b = 0$

$\pi_3: \; 2x + y + 2z = 1$

Trovare i valori di a e b per cui la retta $\pi_1 \cap \pi_2$ è parallela a π_3

$\pi_1 \cap \pi_2 = \ell$

$\vec{N}_{\pi_1} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{N}_{\pi_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{d}_\ell = \vec{N}_{\pi_1} \times \vec{N}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} i & a & 0 \\ j & 1 & 1 \\ k & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - \vec{j}\cdot a + k \cdot a =$

$= \begin{pmatrix} 3 \\ -a \\ a \end{pmatrix}$

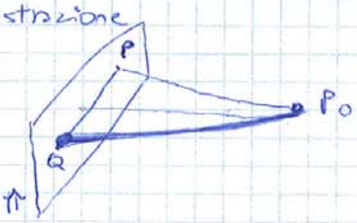
$\langle \vec{d}_\ell, \vec{N}_{\pi_3} \rangle = 0 \iff \ell \parallel \pi_3$

$\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = 0 \qquad 6 - a + 2a = 0$

$\boxed{a = -6}$

$\forall b \in \mathbb{R}$

Dimostrazione



$\overrightarrow{P_0Q}$ parallelo a $\vec{n}_\pi = \dfrac{\vec{N}_\pi}{|\vec{N}_\pi|}$

Si ha che $\langle \overrightarrow{P_0Q}, \vec{n}_\pi \rangle = |\overrightarrow{P_0Q}|$

infatti $\langle \overrightarrow{P_0Q}, \vec{n}_\pi \rangle = |\overrightarrow{P_0Q}| \, \underset{1}{|\vec{n}_\pi|} \underset{1}{\cos\theta}$ $\qquad \theta = 0$ ok

$$|\overrightarrow{P_0Q}| = |\langle \overrightarrow{P_0Q}, \vec{n}_\pi \rangle| = |\langle \overrightarrow{P_0P} + \overrightarrow{PQ}, \vec{n}_\pi \rangle| =$$

$$= |\langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{n}_\pi \rangle + \langle \overrightarrow{PQ}, \vec{n}_\pi \rangle| = |\langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{n}_\pi \rangle|$$

$$|\langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{n}_\pi \rangle| = d(P_0, Q) = |P_0Q| \leq d(P_0, P) \qquad \forall p \in \pi$$

$$\left|\left\langle \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{pmatrix} \right\rangle\right| = \left| \frac{a(x-x_0)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \frac{b(y-y_0)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \frac{c(z-z_0)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right| =$$

$$= \frac{|ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|ax+by+cz - ax_0 - by_0 - cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|-d - ax_0 - by_0 - cz_0|}{\sqrt{\ldots}}$$

$$= \frac{|d + ax_0 + by_0 + cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$d(P_0, \pi) = \inf\{d(P, \pi) \,/\, P \in \pi\} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Esercizio trovare distanza del piano $x+y+z=1$ dall'origine

$$d = \frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

DISTANZA PUNTO-RETTA

$$d(P_0, r) = \inf\{d(P_0, P) \,/\, P \in r\}$$

Sia $\vec{v}$ la direzione di r. $P_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

$$d(P_0, r) = \frac{|\overrightarrow{P_0P} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Esempio

$r \begin{cases} x = t+1 \\ y = t+1 \\ z = 2t-3 \end{cases}$ $\qquad P_0(2,1,1)$ $\qquad P$ con $t=0$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$P - P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}(v,s) = \frac{|\langle \vec{v_1} \times \vec{v_2}, \vec{P_1P_2} \rangle|}{|\vec{v_1} \times \vec{v_2}|}$$

<u>Esercizio</u> Date le rette $l_1 \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$ $l_2 \begin{cases} x + y = 1 \\ y + 3z = 2 \end{cases}$

1) Provare che l_1, l_2 sghembe
2) Trovare distanza $d(l_1 l_2)$

1) $\vec{d l_1} = \vec{V_1} = \begin{vmatrix} i & 1 & 0 \\ j & -1 & 1 \\ k & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ Se $z=0 \to y=0 \to x=0$

$l_1 = \begin{cases} x = -4t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases}$

l_2 $y = t$ $x = -t+1$ $3z = 2 - t$

$z = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}t$

$l_2 \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = t' \\ z = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}t' \end{cases}$

(i) $\boxed{l_1 \not\parallel l_2}$ perché $\vec{d l_2} = \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Supponiamo $l_1 \cap l_2 = \{P\}$

$\begin{cases} 1 - t' = -4t \\ t' = -3t \\ -\frac{1}{3}t' + \frac{2}{3} = t \end{cases}$ $1 + 3t = -4t$ $7t = -1$ $t = -\frac{1}{7}$ $t' = +\frac{3}{7}$

$-\frac{1}{3}\left(+\frac{3}{7}\right) + \frac{2}{3} = -\frac{1}{7}$

$\frac{2}{3} - \frac{1}{7} = -\frac{1}{7}$ NO $\Rightarrow \boxed{l_1 \cap l_2 = \emptyset}$ (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow$ rette SGHEMBE

2) $P_0 \; (-4t, -3t, t)$ $Q_0 \; (1-t', t', \frac{2}{3} - \frac{1}{3}t')$

$\begin{cases} \langle (Q_0 - P_0), v_1 \rangle = 0 \\ \langle (Q_0 - P_0), v_2 \rangle = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \left\langle \begin{pmatrix} 1 - t' + 4t \\ t' + 3t \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{3}t' - t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \begin{pmatrix} 1 - t' + 4t \\ t' + 3t \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{3}t' - t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -4 + 4t' - 16t - 3t' - 9t + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}t' - t = 0 \\ -1 + t' - 4t + t' + 3t - \frac{2}{9} + \frac{1}{9}t' + \frac{1}{3}t = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{2}{3}t' - 26t - \frac{10}{3} = 0 \\ \frac{19}{9}t' - \frac{2}{3}t - \frac{11}{9} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2t' - 78t - 10 = 0 \to t' - 39t - 5 = 0 \\ 19t' - 6t - 11 = 0 \end{cases}$

$$d(C,\pi) = \frac{|-1-3-4+1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{7}{3}$$

$\frac{7}{3} < \frac{5}{2} \to 14 < 15$ Taglio secante

Consideriamo retta r passante per C e ortogonale a π

$$r \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -\frac{3}{2} + 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Per determinare il centro della circonferenza γ : $\pi \cap r = 0$

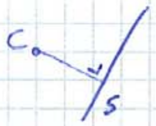
$-1 + t - 3 + 4t - 4 + 4t + 1 = 0$

$9t - 7 = 0 \qquad \boxed{t = \frac{7}{9}}$

$$\begin{cases} x = -2/9 \\ y = -3/2 + 14/9 \\ z = 2 - \frac{14}{9} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2/9 \\ y = 1/18 \\ z = 4/9 \end{cases}$$

$$r = \sqrt{R^2 - (d(C,\pi))^2} = \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{49}{9}} = \frac{\sqrt{29}}{6}$$ (Pitagora)

<u>ESERCIZIO</u> Scrivere equazioni per la circonferenza di centro $C(1,-1,3)$ tangente alla retta $s: \begin{cases} x+z=0 \\ -y+z+1=0 \end{cases}$



Fascio di piani che contengono la retta s

$\lambda(x+z) + \mu(-y+z+1) = 0 \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, non entrambi nulli

$\lambda x - \mu y + (\lambda+\mu)z + \mu = 0$

Imponiamo passaggio per C

$\lambda + \mu + 3\lambda + 3\mu + \mu = 0 \qquad 4\lambda = -5\mu \qquad \lambda = -\frac{5}{4}\mu$

$\lambda = 5, \ \mu = -4$

$5x + 4y + z - 4 = 0 \to$ PIANO

$\Sigma : (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = R^2$

Manca solo R

$d(C,s) = ?$

$$s \begin{cases} x = -t \\ y = t+1 \\ z = t \end{cases}$$

Piano perpendicolare ad s

$-x + y + z + d = 0$

(per C) $-1 - 1 + 3 + d = 0 \qquad d = -1$

$\boxed{-x+y+z-1=0}\ \alpha$

$\alpha \cap s: \ t + t + 1 + t - 1 = 0$

$3t = 0 \qquad t = 0$

Esercizio Siano

$\Sigma : (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4$

$\pi : x+y-z=0$

(1) Determinare il piano γ tangente a Σ in O

(2) Determinare la retta tangente alla circonferenza

$\gamma : \Sigma \cap \pi$ in $O(0,0,0)$

$C(2,0,0) \quad R=2$

$-2(x-0)+0(y-0)+0(z-0)=0$

$x=0$

FASCI DI SFERE

$\Sigma_1 : x^2+y^2+z^2+A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$\Sigma_2 : x^2+y^2+z^2+A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

punti in comune

* $(A_1-A_2)x + (B_1-B_2)y + (C_1-C_2)z + D_1-D_2 = 0$

se Σ_1 e Σ_2 non sono concentriche

C' centro Σ_1 : $\left(-\frac{A_1}{2}, -\frac{B_1}{2}, -\frac{C_1}{2}\right)$

C'' : $\left(-\frac{A_2}{2}, -\frac{B_2}{2}, -\frac{C_2}{2}\right)$

$C' \neq C''$ uno tra i numeri $A_1-A_2, B_1-B_2, C_1-C_2$ non è nullo

Allora * è un piano. Si chiama PIANO RADICALE di Σ_1, Σ_2

Risulta che questo piano è ortogonale al vettore $\overrightarrow{C'C''}$

* $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \gamma$ circonferenza nel piano radicale

oppure

* $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{P_0\}$ → piano radicale è tangente a Σ_1 e Σ_2 in P_0

FASCI DI SFERE SECANTI

γ una circonferenza

L'insieme di tutte le sfere passanti per γ si chiama fascio di sfere con luogo di base γ.

Teorema

Siano $\Sigma : x^2+y^2+z^2+ex+fy+gz+h=0$ sfere per γ e

$\pi : ax+by+cz+d=0$ il piano della circonferenza γ.

Allora le sfere del fascio di luogo base γ sono tutte e solo quelle aventi equazioni

$x^2+y^2+z^2+ex+fy+gz+K(ax+by+cz+d)=0$ dove K è un

Notazione $B = -A$, cioè $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $-A \begin{pmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$

L'operazione $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$

$(\lambda, A) \to \lambda \cdot A$

Se $A = (a_{ij})$ $\lambda A = (\lambda a_{ij})$ $\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

Gode delle seguenti proprietà:

(1) $\lambda \cdot (A+B) = \lambda A + \lambda B$

(2) $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$

(3) $(\lambda \cdot \mu) A = \lambda(\mu A)$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(4) $1 \cdot A = A$

Dunque $\mathbb{R}^{m\times n}$ munito delle operazioni appena definite è un cosiddetto SPAZIO VETTORIALE su $\mathbb{R}$ (in generale K campo)

PRODOTTO DI MATRICI

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 3 \\ -1 & -5 & -5 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Il n° di colonne del primo fattore deve coincidere con il n° di righe del secondo prodotto

<u>Def.</u> $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$; $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times l}$ $1 \le i \le n$, $1 \le j \le l$

$A \cdot B = C = (c_{ij})$ $c_{ij} = ?$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \\ a_{m1} & \dots & & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & & b_{1l} \\ \\ b_{n1} & \dots & & b_{nl} \end{pmatrix}_{n\times l}$$

$C = (c_{ij})$ $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \dots a_{1n}b_{n1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1}$

$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + \dots a_{1n}b_{n2} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2}$

$A \cdot B = C = (c_{ij})$ $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ $i = 1, \dots n$, $j = 1, \dots l$

<u>Oss.</u>

In generale $A \cdot B \neq B \cdot A$

$A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ $B \cdot A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

<u>Oss.</u> $A \cdot B = 0 \not\Rightarrow A = 0$ oppure $B = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times l}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times s}$

Associatività $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ ok

Distributività $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

$(z_1, z_2) + (z_3, z_4) = (z_1 + z_3, z_2 + z_4)$

$\lambda (z_1, z_2) = \lambda z_1 + \lambda z_2$

$a+b$

7. $\mathbb{C}^n$ come $\mathbb{R}$ spazio vettoriale (quando faccio moltiplicazione per scalare)

$\mathbb{C}$ è un $\mathbb{R}$ spazio vettoriale

$\mathbb{C}^2$ è " " "

8. $\mathbb{R}^+$

$x \oplus y = x \cdot y$

$\lambda \odot y = x^\lambda$

è un modello di spazio vettoriale

è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

$\lambda \cdot (x+y) = (x+y)^\lambda = xy^\lambda = x^\lambda \cdot y^\lambda = x^\lambda + y^\lambda = \lambda x + \lambda y$

Def. Sia V un K spazio vettoriale

Prendiamo $W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$. Allora W si dice un SOTTOSPAZIO VETTORIALE di V se, a sua volta, W è uno spazio vettoriale (su K) con le operazioni di V ristrette a W

Prop. Sia $W \subseteq V_K$, $W \neq 0$. Allora W è un sottospazio vettoriale di V ($W \leq V$) se e solo se

(1) $0_V \in W$

(2) $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$

(3) $\lambda \in K$, $\lambda \cdot v \in W$ $(w \in W)$

Esempio $\mathbb{R}^{2\times 2} = V$

$W = \{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} / \det A = 0 \}$

$W \leq V$? cioè W è sottospazio di V?

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ sì

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ NO

Es

$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + y + z - 5 = 0 \right\}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U$ non è sottospazio di $\mathbb{R}^3$ (in generale i piani non sono sottospazi)

Es - $\mathbb{R}^3 \leq \mathbb{R}^3$

- Piani passanti per O (origine) (unici piani che sono sottospazi)
- rette passanti per O (uniche rette sottospazi)
- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (unico punto sottospazio)

$\Leftarrow \quad v = u + w = u' + w'$

$$\underset{\in U}{u-u'} = \underset{\in W}{w'-w}$$

$\Rightarrow u-u', w'-w \in U \cap W$

ipotesi $u-u' = 0_V$, $w'-w = 0_V$

$\rightarrow u = u'$, $w' = w$

V si dice che somma diretta di U e W se e solo se $V = U + W$ e $U \cap W = \{0_V\}$

ovvero $\forall v \in V$, $v = u + w$, $u \in U$, $w \in W$ in modo unico.

Sia V un K spazio vettoriale. Siano $v_1, v_2, \dots v_n$ n vettori di V

$\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) = \{ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \,/\, \alpha_1, \dots \alpha_n \in K \}$

l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori $v_1, \dots v_n$ è un sottospazio vett.

Ossia $\mathcal{L}(v_1, \dots v_n) \leq V$

Def. Siano $\{v_1, \dots v_n\}$ vettori di V. Si dice che $v_1, \dots v_n$ sono linearmente indipendenti (L.I.) se e solo se per ogni CL

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V$

ALLORA

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

Esempio $v \in V$, $v \neq 0_V$

$\{v\}$ è L.I.

$\alpha v = 0_V \Leftrightarrow \alpha = 0$

(2) $\{0_V\}$ è LINEARMENTE DIPENDENTE.

$\lambda 0_V = 0_V$

Non è necessario che λ sia nullo

Teorema $\{v_1, \dots v_n\}$ L.I. se e solo se $\forall v \in \mathcal{L}(v_1, \dots v_n)$ si esprime in modo unico come C.L. dei v_i, $i = 1, \dots n$

Dimostrazione

$\Rightarrow \quad v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = 0_V$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) v_i = 0$

ipotesi $\alpha_i - \beta_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots n$

$\Rightarrow \alpha_i = \beta_i$

$\Leftarrow \quad \underset{\alpha_1}{\underset{\parallel}{0}} \cdot v_1 + \underset{\alpha_2}{\underset{\parallel}{0}} v_2 + \dots + \underset{\alpha_n}{\underset{\parallel}{0}} \cdot v_n = 0_V$

di W è infinita ($\dim W = \infty$)

Concetto di base di uno spazio vettoriale V

Un insieme $\{v_1, \dots v_n\} \subseteq V$ si dice una base per V se e solo se

(1) $\{v_1, \dots v_n\}$ è L.I.

(2) $\mathcal{L}(v_1, \dots v_n\} = V$

Ad esempio, nell'esercizio precedente $\{(1,1), (1,-2)\}$ è una base per U ma anche $\{(1,1), (2,3)\}$ e $\{(1,-2), (2,3)\}$ erano Li generatori per U (dunque base per U).

$\{(1,1), (2,2)\}$ non è base per U

Oss.

L'insieme dei vettori $v_1, \dots v_n \in V$ che costituiscono una base per V, in certi casi, sarà necessario considerare l'ordine. In tal caso, scriveremo

$(v_1, \dots v_n)$ (cioè in ordine)

cioè nonostante, per esempio, $\{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica di $\mathbb{R}^3$ saranno considerate basi diverse (e_1, e_2, e_3), (e_2, e_1, e_3)

Se V uno spazio finitamente generato e ammette una base $(v_1, \dots v_n)$ di n vettori qualunque base di V avrà n vettori. Così avrà senso di parlare di dimensione di V.

Notazione $\dim V = n$ (n° vettori di una base)

Oss $W \leq V$ finitamente generato, $\exists$ una base di W e supponiamo che $W = \mathcal{L}(w_1, \dots w_m)$ se $(w_1, \dots w_m)$ l.i. base per W

altrimenti applichiamo il teorema $*$ finito ad ottenere una base

Teorema $*$ qual è ???

Oss.

Sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato

(1) se $\dim V = n$ e $v_1, \dots v_n$ sono n vettori diversi che generano V allora automaticamente costituiscono una base per V

(2) Se $\dim V = n$ e $v_1, \dots v_n$ insieme L.I. allora $\{v_1, \dots v_n\}$ base di V

Teorema

Se $W \leq V$ e $\dim V = n$ e se pure $\dim V = n$ allora $V = W$

FORMULA DI GRASSMANN

$U, W \leq V$

$U + W \leq V$

Allora $\dim(U + W) \leq \dim V$

$$\boxed{\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W}$$

Def. Una matrice si dice RIDOTTA per righe se e solo se ogni riga non nulla possiede almeno un elemento non nullo al di sotto del quale sulla medesima colonna vi siano soltanto 0 o nessuna ulteriore entrata.

Una matrice si dice RIDOTTA per colonne se e solo se la sua TRASPOSTA è ridotta per righe

Prop. Il rango di una matrice A ridotta per righe (rispettivamente per colonne) coincide con il numero di righe non nulle

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & \boxed{0} & -1 & 9 \\ 1 & \boxed{0} & -1 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & -1 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

ESEMPIO DI MATRICE RIDOTTA

Lo spazio delle righe $\mathcal{L}((1,2,-1,9),(2,0,-1,9),(1,0,-1,0),(\ldots))$

Operazioni elementari

3 tipi:

(1) $R_i \longleftrightarrow R_j$ scambio tra 2 righe di una matrice

$R_1 \leftrightarrow R_3$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -7 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -7 & \sqrt{2} \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $K \cdot R_j$, $K \neq 0$ moltiplico riga per uno scalare purché $\neq 0$

$\frac{1}{3} R_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4/3 \\ -7 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

(3) $R_i \longrightarrow KR_j + R_i$ $K \neq 0$ moltiplico una riga per uno scalare non nullo e poi la sommo ad un'altra riga

$R_2 \longrightarrow -3R_1 + R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ -7 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Definizioni analoghe x le colonne

Importante Sia A' una matrice ottenuta facendo una operazione elementare ad altra matrice A. Allora $r(A) = r(A')$

Esercizio 1

Determinare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$\dim \mathcal{L}((1,2,3),(4,5,6),(7,8,9))$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 = -4R_1 + R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 = -7R_1 + R_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 = -2R_2 + R_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{0} & -3 & -6 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{pmatrix}$$ matrice ridotta

QUESITO DA ESAME

spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sottospazi $U = \mathcal{L}((1,0,0),(2,3,4))$ e $V = \mathcal{L}((2,0,0),(2,0,4))$

a) $U \cap V = 0_V$ e basta; NO

b) $U + V \neq \mathbb{R}^3$

~~c)~~ $(3,0,0) \in U \cap V$;

d) $U \subseteq V$;

$\dim U = 2$

$\dim V = 2$

$(2,0,0) = 2(1,0,0) + 0(2,3,4) \to$ a) NO

c) sì $(3,0,0) = 3(1,0,0) + 0(2,3,4)$

$(3,0,0) = \frac{3}{2}(2,0,0) + 0(2,0,4)$

QUESITO

In $\mathbb{R}^3$ $U = (a, a+b, b)$ $V = (c+d, d, -c-d)$

a) $U \cap V = \emptyset$

~~b)~~ $\dim(U \cap V) = 1$

c) $\dim(U) + \dim(V) \leq 3$

d) $U \cap V = \mathbb{R}^3$

$U = \mathcal{L}((1,1,0),(0,1,1))$

$V = \mathcal{L}((1,0,-1),(1,1,-1))$

$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim U \cap V = 2 + 2 - 1 = 3$

$1(1,1,0) + -1(0,1,1) = (1,1,0) + (0,-1,-1) = (1,0,-1)$

$\in$

U

$(1,1,-1) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1)$

$\alpha = 1$

$\beta = 0$

NO! questo vuol dire che $U \neq V$

$\dim(U \cap V) = 1$

ES.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sottospazi $U = \mathcal{L}(A, {}^tA, \overset{\substack{\text{inutile} \\ \uparrow}}{A + {}^tA}) = \mathcal{L}(A, {}^tA)$

$V = \mathcal{L}(A, B)$

Trovare basi per

(i) U, (ii) $U+V$, (iii) $U \cap V$

$U = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$

$V = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

$U + V = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

$U \cap V = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Invece se il n° di incognite n è maggiore del rango, il sistema ha $\infty^{n-rk(A)}$ soluzioni

Oss: Se $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ il sistema si dice OMOGENEO ed è sempre COMPATIBILE

(Ammette soluzione $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$) e l'insieme delle sue soluzioni costituisce un sottospazio vettoriale di K^n di dimensione $n - rk(A)$ (caso omogeneo)

Esercizio

in $\mathbb{R}^5$ determinare una base per l'intersezione dei 2 sottospazi:

$U_1 = \{(x_1, \ldots x_5) / t.c.\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 = x_4 - 3x_5\}$

$U_2 = \{(x_1, \ldots x_5) / t.c.\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 0\}$

Poi la somma è tutto $\mathbb{R}^5$?

$U_1 \cap U_2$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$ rango 3 $\quad \dim U_1 \cap U_2 = 5 - 3 = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$2x_1 - x_2 + 2x_4 + 2x_5 = 0$

$x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0$

$x_4 - 3x_5 = 0 \quad \Rightarrow x_4 = 3x_5$

$x_3 = -2x_4 - 2x_5 = -8x_5$

$2x_1 = x_2 - 2x_4 - 2x_5$

$x_1 = \frac{1}{2}x_2 - 4x_5$

$U_1 \cap U_2 = \{(\frac{1}{2}x_2 - 4x_5, x_2, -8x_5, 3x_5, x_5) / x_2, x_5 \in \mathbb{R}\} =$

$= \{x_2(\frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0) + x_5(-4, 0, -8, 3, 1) / x_2, x_5 \in \mathbb{R}\} =$

$= \mathcal{L}((1, 2, 0, 0, 0), (-4, 0, -8, 3, 1)) \rightarrow$ base dell'intersezione

Grassmann

$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) = 3 + 4 - 2 = 5$

$U_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$ rango 2 $\quad \dim U_1 =$ n° incognite $-$ rango $= 5 - 2 = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\Big(\underbrace{(1,0,2,0,0)}_{v_1}, \underbrace{(0,1,-1,0,0)}_{v_2}, \underbrace{(0,0,0,1,0)}_{v_3}, \underbrace{(0,0,0,0,1)}_{v_4}\Big)$$

$\dim(W_1 + W_2) = 4$

Usando la formula di Grassmann, $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1+W_2) = 2$

$W_1 + W_2$ non è diretto

$\mathbb{R}^5 \neq W_1 + W_2$

Usare il teorema del completamento di base per avere una base di $\mathbb{R}^5$ in modo che questa base contenga precisamente i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 base di W_1+W_2

Devo aggiungere un vettore v_5 che non sia combinazione lineare dei $v_1, \dots$ 4 vettori,

$v_5 (0, 0, 40, 0, 0)$

__Esercizio__

In $\mathbb{R}^4$ $\quad v_1(1,-2,3,0) \qquad v_3(0,1,4,-5)$

$v_2(2,-2,2,-1) \qquad v_4($

Es 1) $\{v_1, v_2, v_3\}$ l.i. (uso α, β, γ)

2) completarlo ad una base di $\mathbb{R}^4$

3) trovare le componenti di $w = (0,0,4,3)$ rispetto alla base $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ dove v_4 = vettore di completamento usato in 2)

4) Estrarre una base B' contenente w dell'insieme $\{v_1, v_2, v_3, v_4, w\}$

$w = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4$

$$[w]_B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \underset{n\times n}{A^{-1}} \cdot \underset{n\times 1}{B}}$$

Se A invertibile, soluzione unica

soluzione — unica / infinite

non c'è via di mezzo (matrice completa) $A \cdot X = B$

Esercizio

$$\begin{cases} 3x+y-z=0 \\ x+y-3z=1 \\ x+y=-1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 1 & -3 & | & 1 \\ 1 & 1 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} \times(-3) \sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & 8 & | & -3 \\ 1 & 1 & -3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 3 & | & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & | & 1 \\ 0 & -2 & 8 & | & -3 \\ 0 & 0 & 3 & | & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times(-2) \\ \times\left(\frac{1}{3}\right) \end{matrix}$$

$rk = 3$

n° soluzioni $= \infty^0 = 1$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & | & 1 \\ 0 & 1 & -4 & | & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \times(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -4 & | & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} x = \frac{1}{6} \\ y = -\frac{7}{6} \\ z = -\frac{2}{3} \end{matrix}$$

Esercizio

Trovare (se esiste) una relazione fra h_1, h_2, h_3 affinché il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = h_1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = h_2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = h_3 \end{cases}$$

abbia una soluzione e determinare la soluzione generale quando $h_1 = -1$, $h_2 = 4$, $h_3 = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & | & h_1 \\ 1 & 3 & 1 & -3 & | & h_2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & | & h_3 \end{pmatrix} (\times(-1)) \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & | & h_1 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & | & h_2-h_1 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & | & h_3-2h_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & | & h_1 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & | & h_2-h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & h_3-h_2-h_1 \end{pmatrix}$$

$rk(A) = 2$ cioè $h_3 - h_2 - h_1 \neq 0$ allora $rk(A|B) = 3$ e il sistema è incompatibile. Affinché il sistema abbia soluzione, necessariamente deve accadere che

$h_3 - h_2 - h_1 = 0 \Rightarrow rk(A|B) = 2$ $\quad \infty^{4-2} = \infty^2$ soluzione

con $h_3 = 3$, $h_2 = 4$, $h_1 = -1 \rightarrow 3 - 4 + 1 = 0$ sì

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & | & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 + x_3 = 1$ $\qquad x_1 = 1 - x_3$

$x_2 - x_4 = 1$ $\qquad x_2 = 1 + x_4$ $\qquad S = (1 - x_3, 1 + x_4, x_3, x_4)$

$S = \{(1,1,0,0) + x_3(-1,0,1,0) + x_4(0,1,0,1) \,/\, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$

$= \mathcal{L}((-1,0,1,0),(0,1,0,1))$ soluzione generale sistema omogeneo associato

$AX = I$

Esercizio Calcolare A^{-1} se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det A = 1 \neq 0 \Rightarrow$ invertibile

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$\uparrow A^{-1}$

Infatti

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Teorema ALTRO MODO x CALCOLARE MATRICE INVERSA

$A \in K^{n \times n}$ e $\det A \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det} (\mathrm{Ady}\, A) \rightarrow \text{che cozz??? matrice aggiunta???}$$

$\mathrm{Ady}\, A = {}^t(m_{ij})$ dove m_{ij} sono i minori di A

ossia m_{ij} = determinante della matrice ottenuta da A diminuendo la riga i-esima e la colonna j-esima moltiplicata per $(-1)^{i+j}$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$m_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\quad m_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\quad m_{13} = 1$

$m_{21} = 1$ $\quad m_{22} = -1$ $\quad m_{23} = 0$ $\quad m_{31} = 0$ $\quad m_{32} = 1$ $\quad m_{33} = -1$

Esercizi

1) Sia $A \in K^{m \times n}$ allora $rk(A) \leq \min(m, n)$
2) Se V è un K spazio vettoriale di V e $\dim V = n (< \infty)$

Allora (a) se S è un insieme di n vettori linearmente indipendenti, allora S costituisce una base per V

(b) Se S è un insieme di n-vettori t.c. $\mathcal{L}(S) = V$ allora S è una base per V

$= (x + x' + y + y', x + x' - y - y') = (x+y, x-y) + (x'+y', x'-y')$

$= f(x,y) + f(x',y')$

(2) $f(\lambda(x,y)) = \lambda f(x,y)$

$f(\lambda(x,y)) = f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y) =$

$= (\lambda(x+y), \lambda(x'-y')) = \lambda(x+y, x-y) = \lambda f(x,y)$

Esempio 2

$id\ V \to V$

$v \mapsto v$

Esempio 3

$0 : V \to V$

$v \mapsto 0_v$

Esempio 4

Sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Questa matrice induce un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$A_{m\times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}_{m\times 1}$$

$A(v+w) = Av + Aw$

$A(\lambda v) = \lambda Av$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 2} \qquad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x,y) \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{3\times 2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{2\times 1} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+3y \\ 4y \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

Prop. $f: V \to W$ è lineare

(1) $f(0_V) = 0_W$

(2) $f(-v) = -f(v)$

Dim 1.

$f(0_V) = f(0 \cdot v) = 0 f(v) = 0_W$

(2) $f(-v) = -f(v)$

Def.

$f: V \to W$ è lineare

$\ker f = \{v \in V / f(v) = 0_W\}$ si chiama il NUCLEO di f

È un sottospazio di V

Infatti, $0_V \in \ker f$

Se $v_1, v_2 \in \ker f$ allora $v_1 + v_2 \in \ker f$

(1) $v_1 \in \ker f \to f(v_1) = 0_W$

Se a fosse un altro vettore l.i. a w_1, w_2, allora $\dim \operatorname{Im} f = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ CONTRADDIZIONE in quanto f funzione

Allora $\dim \operatorname{Im} f$ deve essere 2

$f : V \to W$ K lineare e $\dim V = n < +\infty$

Allora $\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

Oss. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+3y \\ +y \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} f = \mathcal{L}\left(f(e_1), f(e_2)\right) = \mathcal{L}\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$$

Prop. $f : V \to W$ K lineare

Allora f è iniettiva se e solo se $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_V\}$

(DOMANDA D'ESAME) !!!

$v \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(v) = 0_W$

$\Rightarrow f(v) = f(0_V)$

$\Rightarrow v = 0_V$

$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Reciprocamente $f(v) = f(w)$ per dimostrare che $v = w$

Ma $f(v) = f(w) \Rightarrow f(v) - f(w) = 0_W$

$f(v-w) = 0_W \Rightarrow v - w = \operatorname{Ker} f$

$\Rightarrow v - w = 0_W \Rightarrow v = w$

Esempio $f : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to (c, d)$$

Determinare una base per il nucleo

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (0,0)\right\}$$

$$(c, d) = (0, 0)$$

$$\text{nucleo} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R}\right\} = \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} / a, b \in$$

$$\text{nucleo} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$ $\qquad \dim \operatorname{Im} f = 4 - 2 = 2$

(b) f suriettivo $\Leftrightarrow$ $\dim \operatorname{Im} f = \dim V$

$\{u_1, \dots, u_N\}$ base di U

f iniettiva

$\{f(u_1), \dots, f(u_N)\}$ L.I. in V

$\operatorname{Im} f = \mathcal{L}(f(u_1), \dots, f(u_N))$

Allora $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathcal{L}(f(u_1), \dots, f(u_N)) = n = \dim U$

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA LINEARE

Sia U, V 2 K spazi vettoriali con $\dim U = n$ e siano

$\{u_1, \dots, u_N\}$ una base di U e $\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ vettori arbitrari di V

Allora esiste una unica applicazione K-lineare $f: U \to V$ t.c.

$f(u_i) = v_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

Dim Esistenza

$v \in U \qquad v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$ scrittura unica

def. $f: U \to V$

$u \mapsto \lambda_1 v_1 + \dots \alpha_n v_n$

$f(u) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

f lineare $\quad f(\lambda u + \lambda u) = \lambda f(u) + \lambda f(u)$

Sia $u' = \lambda_1' u_1 + \lambda_2' + \dots \lambda_n' u_n$

$\lambda u + \lambda' u' = \lambda(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n) + \lambda'(\lambda_1' u_1 + \dots \lambda_n' u_n)$

$(\lambda\lambda_1 + \lambda'\lambda_1')u_1 + \dots + (\lambda\lambda_n + \lambda'\lambda_n')u_n$

$\Rightarrow f(\lambda u + \lambda' u') = (\lambda\lambda_1 + \lambda'\lambda_1')v_1 + \dots (\lambda\lambda_n + \lambda'\lambda_n')v_n$

$\lambda(\lambda_1 v_1 + \dots \lambda_n v_n) + \lambda'(\lambda_1' v_1 + \dots \lambda_n' v_n) =$

$= \lambda f(u) + \lambda' f(u')$

Unicità

Suppongo $\exists \varphi \in \operatorname{Hom}_K(U, V)$ t.c. $\varphi(u_i) = v_i$

$\varphi(u) = \varphi(\lambda_1 u_1 + \dots \lambda_n u_n) = \lambda_1 \varphi(u_1) + \dots \lambda_n \varphi(v_n) =$

$= \lambda_1 v_1 + \dots \lambda_n v_n$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\{(1,1), (1,0)\}$ base canonica di $\mathbb{R}^2$

$(1,1) \xrightarrow{f} (0,0)$

$(1,0) \xrightarrow{f} (0,1)$

$f(x,y) =$

$(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(1,0)$

$\left.\begin{matrix} \alpha + \beta = x \\ \alpha = y \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \beta = x - \alpha \\ = x - y \end{matrix}$

Prop. Siano U e V 2 K spazi vettoriali* Allora $f \in Hom_K(U,V)$ è iniettiva se e solo se f è suriettiva

* della stessa dimensione

Supponiamo f iniettiva

$\Rightarrow \ker f = \{0_V\}$

$\Rightarrow \dim \ker f = 0$

Teorema dimostrato $\dim U = \dim Im f$

$Im f \leq V \Rightarrow f$ suriettiva

Def. Due K spazi vettoriali U e V si dicono isomorfi se e solo se $\exists\, f : Hom_K(U,V)$ che sia BIETTIVA

Prop. Due K spazi vettoriali U e V sono isomorfi se e solo se $\dim U = \dim V$

MATRICI ASSOCIATE

Sia V K spazio vettoriale $\dim V = n$.

Sia $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base di V

$v \in V \quad v = \lambda_1 b_1 + \dots \lambda_n b_n \quad \lambda_i \in K$ unici

Def. $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ si dice la colonna delle coordinate di v rispetto alla base ordinata $\mathcal{B}$.

Esempio in $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{B} = \{(1,-1), (2,3)\}$

$v = (3,0)$

$[v]_{\mathcal{B}} = [(3,0)]_{\mathcal{B}}$

$(3,0) = \lambda_1(1,-1) + \lambda_2(2,3) = (\lambda_1 + 2\lambda_2, -\lambda_1 + 3\lambda_2)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 3 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$5\lambda_2 = 3 \quad \lambda_2 = \frac{3}{5}$

$\lambda_1 + \frac{6}{5} = 3 \Rightarrow \lambda_1 = 3 - \frac{6}{5} = \frac{9}{5}$

$[(3,0)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

$(0,0,1) = \alpha'' (1,1,1) + \beta'' (1,1,0) + \gamma'' (1,0,0)$

$\alpha''+\beta''+\gamma''=0$ $\qquad \alpha''=1$

$\alpha''+\beta''=0$ $\qquad \beta''=-1$

$\alpha''=1$ $\qquad \gamma''=0$

$$P^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$[(x,y,z)]_{\mathcal{C}}$

$(x,y,z) = \alpha(1,2,3) + \beta(0,1,4) + \gamma(0,0,1)$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = x \\ 2\alpha+\beta = y \\ 3\alpha+4\beta+\gamma = z \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \beta = y-2x \\ \gamma = z-3x-4y+8x = z+5x-4y \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y-2x \\ z+5x-4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+4y-8x+z+5x-4y \\ -x-3y+6x-5x+4y-z \\ -x-y+2x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} z \\ y-z \\ x-y \end{pmatrix}$$

$P^{\mathcal{B},\mathcal{C}} [(x,y,z)]_{\mathcal{C}} = [(x,y,z)]_{\mathcal{B}}$

Verifico

$(x,y,z) = \alpha(1,1,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0)$

$\alpha+\beta+\gamma = x$ $\qquad \alpha = z$

$\alpha+\beta = y$ $\qquad \beta = y-z$

$\alpha = z$ $\qquad \gamma = x-z-y+z$

MATRICE ASSOCIATA AD UN'APPLICAZIONE LINEARE

Sia $f \in \mathrm{Hom}(U,V)$

$\mathcal{B} = (u_1, \dots u_n)$ base di U ($\dim U = n$)

$\mathcal{C} = (v_1, \dots v_n)$ base di V ($\dim V = n$)

Def. La matrice $A := M_f^{\mathcal{C},\mathcal{B}} = [\,[f(u_1)]_{\mathcal{C}}, \dots [f(u_n)]_{\mathcal{C}}\,]$ $\in K^{m \times n}$ si dice la matrice associata alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$

e si ha $M_f^{\mathcal{C},\mathcal{B}} \cdot [u]_{\mathcal{B}} = [f(u)]_{\mathcal{C}}$

infatti $[f(\alpha_1 u_1 + \dots \alpha_n u_n)]_{\mathcal{C}} = [\alpha_1 f(u_1) + \dots + \alpha_n f(u_n)]_{\mathcal{C}} =$

$= \alpha_1 [f(u_1)]_{\mathcal{C}} + \dots + \alpha_n [f(u_n)]_{\mathcal{C}} =$

$$= \underbrace{M_f^{\mathcal{C},\mathcal{B}}}_{m \times n} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

Ker A ? (Ker f)

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ y=0 \\ 3x-y=0 \end{cases} \to x=y=0 \qquad \ker f=(0,0)$$

Ricordo che $rk(A) \le \min\{n,m\}$

$\dim \ker f =$ n° incognite − rango $= 2-2=0$

$\dim \operatorname{Im} f = \dim A - \dim \ker f = 2-0=2$

$\operatorname{Im} f = \mathcal{L}\left(A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$

$\operatorname{Im} f = ((1,0,3),(-2,1,-1))$

$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ è una base per $\operatorname{Im} f$

1) Trovare un vettore di $\mathbb{R}^3$ privo di controimmagini

Ci chiedono $v \notin \operatorname{Im} f$

$f^{-1}(v)=\emptyset$

$$\begin{pmatrix}1&0&3\\-2&1&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&5\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$v=(0,0,\sqrt{2})$ privo di controimmagini

2) Trovare la controimmagine di $v(-1,1,2)$

$$\begin{aligned} x-2y&=-1 \\ y&=1 \\ 3x-y&=2 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=f^{-1}(v)$$

$$A(1,1)=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

Esercizio

Sia $f:\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice $A \begin{pmatrix}1&0&-1&2&3\\2&-1&0&1&2\\-3&1&1&-3&-5\end{pmatrix}$

1) Determinare una base per $\ker f$, per $\operatorname{Im} f$

2) Stabilire per quali valori di h in $\mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix}-2\\h\\h^2\end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Im} f$

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1-x_3+2x_4+3x_5\\2x_1-x_2+x_4+2x_5\\-3x_1+x_2+x_3-3x_4-5x_5\end{pmatrix} = \vec{0}_V$$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Ker f il sistema omogeneo associato ad A

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&2&3\\2&-1&0&1&2\\-3&1&1&-3&-5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&-1&2&3\\0&-1&2&-3&-4\\0&1&-2&3&4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&-1&2&3\\0&+1&-2&+3&+4\end{pmatrix}$$

$\dim \ker f = 5-2=3$

$$\begin{aligned} x_1-x_3+2x_4+3x_5&=0 \qquad & x_1&=x_3-2x_4-3x_5 \\ x_2-2x_3+3x_4+4x_5&=0 \qquad & x_2&=2x_3-3x_4-4x_5 \end{aligned}$$

Esercizio

Sia $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1+x_2 \\ x_1+x_2+x_3 \end{pmatrix}$

Scrivere la matrice M_f associata ad f

e trovare un vettore $\in \mathbb{R}^4$ t. c. $f(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

$f(1,0,0,0) = (1,1,1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1)$

$\alpha = \beta = \gamma = 1$

$f(0,1,0,0) = (0,1,1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1)$

$\alpha = 0 \quad \beta = 1 \quad \gamma = 1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 = x_3 = 0$

$x_2 = 1 \quad x_4 =$ qualsiasi

$v = (0, 1, 0, d)$

Esercizio

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x,y) \to (2x-y, 3y, x-y)$

$\mathcal{B} = ((1,-1), (2,0))$

$\mathcal{C} = ((0,1,-1), (0,1,1), (1,0,0))$

Determinare $M_f^{\mathcal{C},\mathcal{B}}$

$f(1,-1) = (3,-3,2)$

$f(2,0) = (4,0,2)$

$(3,-3,2) = \alpha(0,1,-1) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,0,0)$

$\gamma = 3$

$\alpha + \beta = -3 \qquad \alpha = -3-\beta \qquad \alpha = -\frac{5}{2}$

$-\alpha + \beta = 2 \qquad 3+\beta+\beta = 2 \qquad 2\beta = -1 \qquad \beta = -\frac{1}{2}$

$(4,0,2) = \alpha(0,1,-1) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,0,0)$

$4 = \gamma \qquad \alpha + \beta = 0 \qquad -\alpha + \beta = 2$

$\alpha = -\beta \qquad \beta + \beta = 2 \qquad \beta = 1 \qquad \alpha = -1$

$$M^{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -5/2 & -1 \\ -1/2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$[f(1,1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -5/2 & -1 \\ -1/2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} [(1,1)]_{\mathcal{B}}$$

Dim * guardo su libro (non leggo alla lavagna)

Esempio

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\qquad g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (x, x+y, x-y)$ $\qquad (x,y,z) \mapsto (x+z, z)$

$(g \circ f)(x,y) = g(f(x,y)) = g(x, x+y, x-y) = (2x-y, x-y)$

$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad M_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$M_g \cdot M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2} = M_{g\circ f}$

Prop.

$f \in Hom_K(U, V)$

$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ 2 basi di U; $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ 2 basi di V

Allora $\boxed{M_f^{\mathcal{C}_2, \mathcal{B}_2} = P^{\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1} \cdot M^{\mathcal{C}_1, \mathcal{B}_1} \cdot P^{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}}$

Prop. $id_V : V \to V$

$v \mapsto v$

$M_{id_V}^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = I_n$

se $f \in Aut(V)$ (automorfismo di V), $\dim(V) = n$

f K lineare e biettiva ($V \to V$)

Allora $M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}} \in$ Gruppo lineare (K)

$\mathcal{B}$ base di V

dove Gruppo lineare (K) = { matrici invertibili a coefficienti in K di ordine $n \times n$ }

Se $\mathcal{C}$ è un'altra base di V, allora le matrici $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ e $M^{\mathcal{C},\mathcal{C}}$ si dicono simili ossia $\exists P \in Gl(K)$ t.c. $M_f^{\mathcal{C},\mathcal{C}} = P^{-1} \cdot M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}} \cdot P$

dove $P = P^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ e $P^{-1} = P^{\mathcal{C},\mathcal{B}}$

Oss. la matrice di passaggio $P^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ è invertibile e l'inversa è $P^{\mathcal{C},\mathcal{B}}$

$P^{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot P^{\mathcal{C},\mathcal{B}} = P^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = I_n$

In generale $P^{\mathcal{B}\mathcal{C}} \cdot P^{\mathcal{C},\mathcal{D}} = P^{\mathcal{B},\mathcal{D}}$

Esercizio in $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{B} = \{(1,1)\ (-1,2)\}$

$\mathcal{C} = \{(1,1), (0,1)\}$

$M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$

$(1,1) = \alpha(1,1) + \beta(-1,2)$ $\qquad \alpha - \beta = 1$ $\quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases}$

$(0,1) = \alpha'(1,1) + \beta'(-1,2)$ $\qquad \alpha + 2\beta = 1$

$\alpha' - \beta' = 0$ $\quad \begin{cases} \alpha' = 1/3 \\ \beta' = 1/3 \end{cases}$ $\qquad M^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

$\alpha' + 2\beta' = 1$

$= ad - at - dt + t^2 - cb = t^2 - (a+d)t + ad - cb = t^2 - tr(A)\,t + det(A)$

Esercizio

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ Grazie al cazzo...

TEOREMA DI CAYLEY-HAMILTON

$$p_A(A) = O_{n\times n}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad p_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ -1 & -t \end{vmatrix} = -(1-t)t + 2 = t^2 - t + 2$$

$$A^2 - A + 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio

$$\boxed{A \sim B \iff p_A(t) = p_B(t)}$$

$A \sim B \Rightarrow \exists P \in GL(K)$ t.c. $A = P^{-1} \cdot B \cdot P$

$p_A(t) = det(A - tI) = det(P^{-1} \cdot B \cdot P - tI) = det(P^{-1}(B - tI) \cdot P)$

$(P^{-1}B - tP^{-1} \cdot I) \cdot P = P^{-1}B \cdot P - tP^{-1}_I \cdot P = P^{-1}B \cdot P - tI$ ok

$\boxed{det(A \cdot B) = det A \cdot det B}$ (RICORDO) TEOREMA DI BINET

Applico Binet

$det(P^{-1}) \cdot det(B - tI)\, det P = det(P^{-1}) \cdot det(P) \cdot det(B - tI) =$

$= det(P^{-1} \cdot P) \cdot det(B - tI) = det(I_n) \cdot det(B - tI) = 1 \cdot det(B - tI) =$

$p_B(t)$

Esercizio

$f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2\times 2}) \qquad f(X) = AX - XA$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

a) f è lineare

b) Provare che $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin Ker f$ e $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin Im f$

$$f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$$
$$X \to AX - XA$$

Dimostro che $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$

Infatti $A(X+Y) - (X+Y) \cdot A = AX + AY - XA - YA$

$AX - XA + AY - YA = f(X) + f(Y)$

$f(\lambda X) = \lambda f(X)$ dimostro

QUESITO

$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y,z,t) = (x-y+t,\ x-y+t)$

(a) Ker f dim 3 $\qquad$ (c) matrice associata 4×2

(b) dim Im f = 3 no $\qquad$ (d) suriettiva

$$M_f \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \dim \operatorname{Im} f = \underline{1}$$

QUESITO

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(a) si annulla su almeno un vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$

(b) suriettiva no

(c) iniettiva no

(d) dim Ker f = 1 no

QUESITO

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\qquad$ matrice $A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(a) $(1,0,0) \in \operatorname{Ker} f$

(b) iniettiva

(c) Im f dim 1

(d) esistono vettori di $\mathbb{R}^3$ con immagine $(1,1)$

QUESITO

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ applicazione lineare nulla, cioè $f(\vec{v}) = \vec{0}$

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrice di f rispetto alle basi canoniche

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ //

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ //

(d) f non ha matrice che la rappresenta

$f(1,0) = (0,0,0) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1)$

$\alpha = \beta = \gamma = 0$

$f(0,1) = (0,0,0) \qquad \alpha' = \beta' = \gamma' = 0$

$$M_f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

QUESITO $\quad f: \mathbb{R}^{250} \to \mathbb{R}^{100}$

(a) f iniettiva no

(b) nucleo di dimensione 200 ed è suriettiva no

(c) esiste $\vec{v} \neq \vec{0}$ t.c. $f(v) = 0$

(d) dim(Im f) = 350 no

GEOMETRIA

AUTOVALORI E AUTOVETTORI

$A \in K^{n \times n}$ si dice DIAGONALIZZABILE se e solo se A è simile a una matrice diagonale cioè se e solo se $\exists P$ invertibile t.c. $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$ dove D matrice diagonale.

Def. $\lambda \in K$ si dice AUTOVALORE di f, $f \in End_K(V)$ se e solo se $\exists v \in V, v \neq 0_V$ t.c. $f(v) = \lambda v$. Il vettore si chiama AUTOVETTORE di f relativo all'autovalore λ.

Supponiamo che V abbia una base di autovettori relativi a f.

$f: \overset{B}{V} \to \overset{B}{V}$, $\dim V = n$

$B = (v_1, \dots v_n)$ base di V autovettori relativi ad f

$f(v_1) = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_n$

$f(v_2) = \lambda_2 v_2 = 0 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + 0 v_n$

$\vdots$

$f(v_n) = \lambda_n v_n = 0 \lambda_1 + 0 \lambda_2 + \dots + \lambda_n v_n$

$$M_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Come determinare gli autovalori di $f \in End(V)$?

$f(v) - \lambda v = 0_V$ con $v \neq 0_V$

$(f - \lambda id_V)(v) = 0_V$, $v \neq 0_V$

$\ker (f - \lambda id_V) \neq \{0_V\}$

$(f - \lambda id_V)$ non è iniettiva

$Av = \lambda v$, $v \neq 0$

$rk(A - \lambda I_n) < n$

$\det(A - \lambda I_n) = 0$

λ è autovalore di A se e solo se $\exists v \neq 0_V$ t.c. $Av = \lambda v$
se e solo se $rk(A - \lambda I_n) < n$
se e solo se $\det(A - \lambda I_n) = 0$
se e solo se λ è radice di $P_A(t)$

Esempio $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$

$$A = M_f^{e,e} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di f (oppure di A) $\det \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = 0$

$(1-t)^2 - 1 = 0$

$t^2 - 2t = 0$

$P_A(t) = t^2 - 2t$

$t(t-2) = 0$

$f(v) = \lambda_1 v \wedge f(v) = \lambda_2 v$

$\lambda_1 v = \lambda_2 v \qquad \lambda_1 v - \lambda_2 v = 0_V$

$(\lambda_1 - \lambda_2) v = 0_V$ ma $v \neq 0$

$\lambda_1 = \lambda_2$

<u>Corollario</u>

$v_1 \in V_A(\lambda_1)$ e $v_2 \in V_A(\lambda_2)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, allora v_1 e v_2 linearmente indipendenti.

$\dim V = n$

<u>Oss.</u> $f \in End_K(V)$ possiede al più n-autovalori, contati ciascuno con la propria molteplicità algebrica $m_a(\lambda)$

infatti gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico associato ad A (oppure f)

Se K è algebricamente chiuso (ad esempio $K = \mathbb{C}$) allora possiede esattamente n autovalori contati con la dovuta molteplicità.

<u>Def.</u> λ autovalore di A $(A = M_e^{e,e})$

$m_g(\lambda) = \dim(\ker f - \lambda id_V) = \dim(V_A(\lambda))$

<u>Teorema</u>

$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \qquad \forall \lambda$ autovalore di A

$1 \leq$ molteplicità geometrica $\leq$ molteplicità algebrica

<u>Oss.</u>

$$\underbrace{V_A(\lambda_1) + \ldots + V_A(\lambda_h)}_{\substack{\text{somma diretta} \\ \text{(no autovettori dipendenti)}}} \subseteq V$$

$\dim(V_A(\lambda_1) + \ldots V_A(\lambda_h)) \leq n$

<u>Def.</u> $f \in End_K(V)$ si dirà SEMPLICE se V si decompone nella somma diretta di autospazi di V o, equivalentemente, se V possiede una base formata da autovettori di f

<u>Prop.</u> $f \in End_K(V)$ è semplice se e solo se $\sum m_a(\lambda_i) = n$ e se e solo se $(\lambda_i$ = autovalori di $f)$ $m_a(\lambda_i) \leq m_g(\lambda_i)$

<u>Prop.</u> $A \in K^{n \times n}$

A è diagonalizzabile se e solo se $\sum m_a(\lambda_i) = n$, $m_a(\lambda_i) \leq m_g(\lambda_i)$ $\forall \lambda_i$ autovalore di A

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\ldots\ldots$ P^{-1} $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 5/3 & 4/3 \\ 1 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

$P^{-1} \cdot A \cdot P = D$ verifico

Esercizio

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y) \to (-2x + 3y - 3z, y, x + y + 2z)$

$M_f^{e,e} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1) È un isomorfismo? (matrice M_f con $\det \neq 0$)

2) f è semplice?

1) $\det A = -2(2) - 3(0) - 3(-1) = -4 + 3 = -1 \neq 0 \Rightarrow$ matrice invertibile $\Downarrow$ f biettiva $\Downarrow$ isomorfismo

2) f semplice $\Leftrightarrow$ matrice A diagonalizzabile

$\det \begin{pmatrix} -2-t & 3 & -3 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 1 & 2-t \end{pmatrix} = (-2-t)(1-t)(2-t) - 3(0) - 3(-1+t) = 0$

$(4 + 4t + t^2)(1-t) + 3 - 3t = 0 \qquad 4 + 4t + t^2 - 4t + 4t^2 - t^3 + 3 - 3t = 0$

$-t^3 + t^2 + t - 1 = 0$

$(t-1)(t^2-1) = 0$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

$t = 1 \quad \vee \quad t = \pm 1$

$t = 1$ molteplicità doppia (algebrica)

$t = -1$ molteplicità singola (algebrica)

$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \dim V_A(1) = 3 - rk(A) = 1$ molteplicità geometrica 1

non è diagonalizzabile, non è semplice

Siccome $m_a(1) = 2 \neq m_g(1) = 1$, f non è semplice (A non diagonalizzabile)

Somma diretta autospazio(1) + autospazio(-1) $\neq \mathbb{R}^3$

ISOMORFISMO $\not\Leftrightarrow$ SEMPLICE FUNZIONE

$f \in End_K(V)$, f isomorfismo allora f è semplice FALSO

A diagonalizzabile $\Rightarrow$ A invertibile V o F? FALSO

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile ma $\det(A) = 0$ no invertibile

Esercizio

Data $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ determinare una matrice Y invertibile e una matrice diagonale D t.c. $C = Y^{-1} D Y$

$C Y^{-1} = D Y^{-1} \qquad Y C \cdot Y^{-1} = D$

$P = Y^{-1} \qquad P^{-1} C P = D$

Dimostrazione

$P \cdot {}^tP = I_n \qquad \det(P \cdot {}^tP) = \det(I_n) \qquad \det(I_n) = 1$

BINET $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

$\det P \cdot \det {}^tP = 1$

$\det P \cdot \det P = 1$

$(\det P)^2 = 1 \qquad \det P = \pm 1$

A simmetrica reale $\Rightarrow$ A diagonalizzabile e esiste P invertibile e ortogonale t.c. ${}^tP \cdot A \cdot P = D$

Esercizio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad {}^tA = A$$

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 1 & 0 \\ 1 & 1-t & -1 \\ 0 & -1 & 2-t \end{vmatrix} = 0$$

$(2-t)[(2-t)(1-t)-1] - 1(2-t) = 0$

$(2-t)[2-3t+t^2-1] - 2+t = 0$

$4-6t+2t^2-2-2t+3t^2-t^3+t-2+t = 0$

$-t^3+5t^2-6t = 0$

$t(-t^2+5t-6) = 0$

$t(t^2-5t+6) = 0$

$t = 0 \lor t = +3 \lor t = +2$

$V(0)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad rk(V_0) = 2 \qquad \dim V_0 = 3-2 = 1$$

$-y+2z = 0 \qquad y = 2z$

$x+y-z = 0 \qquad x+2z-z = 0 \qquad x+z = 0 \qquad x = -z$

$V(0) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \rightarrow \mathcal{L}\left(\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right)$ vettore ortonormale

$\uparrow$ modulo $= 1$

$V(3)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} -y-z = 0 \\ x-2y-z = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} y = -z \\ x+2z-z = 0 \\ x = -z \end{matrix}$$

$V(3) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$

$V(2)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} y = 0 \\ x-z = 0 \\ x = z \end{matrix}$$

$V(2) = \mathcal{L}((1,0,1)) = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$

$\forall (x,y) \quad q(x,y) < 0$?

Se sì, si dice che la forma quadratica è definita negativa

Def. (2)

$\forall (x,y) \quad q(x,y) \geq 0$. Allora $q(x,y)$ si dice semidefinita positiva

Analogamente se $\forall (x,y) \quad q(x,y) \leq 0$ allora $q(x,y)$ si definisce semidefinita negativa

Def. (3) Se esistono (x,y) per cui $q(x,y) < 0$ e (x,y) per cui $q(x,y) > 0$ si dice che la forma quadratica non è definita.

Studiare il segno di una forma quadratica vuol dire studiare il segno degli autovalori di qualunque matrice associata

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}_{1\times 2} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}_{2\times 2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{2\times 1} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y & a_{12}x + a_{22}y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2$$

Esercizio

Dire se esiste un vettore $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ t.c. ${}^t v \cdot A \cdot v < 0$ nei seguenti casi

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Teorema (Cartesio)

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n$ con a_i reali, che ammette tutte le sue radici in $\mathbb{R}$, allora il numero di radici positive è uguale al numero di cambiamenti di segni della successione ordinata $(a_n, a_{n-1}, \dots a_0)$

* le matrici simmetriche le radici sono sempre reali, perché sono sempre diagonalizzabili.

(1) $4x^2 - 6xy + 4y^2 = q(x,y)$

$(4-t)^2 - 9 = 0$

$16 - 8t + t^2 - 9 = 0 \qquad t^2 - 8t + 7 = 0 \rightarrow$ 2 cambiamenti di segno $\rightarrow$ 2 autovalori positivi

$\frac{\Delta}{4} = \sqrt{16 - 7} = \sqrt{9} = 3$

$t = 4 \pm 3 = \begin{matrix} 7 \\ 1 \end{matrix}$

Entrambi positivi

Questa $q(x,y)$ è definita positiva $\forall (x,y)$

(2) $4x^2 + 10xy + 4y^2 = q(x,y)$

$(4-t)^2 - 25 = 0$

$16 - 8t + t^2 - 25 = 0$

$t^2 - 8t - 9 = 0$

1 cambiamento di segno $\rightarrow$ 1 autovalore + e uno −

$(t+1)(t-9) = 0$

$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 9 \qquad$ forma quadratica non definita

$V_A(6) = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 2 & -8 & -2 \\ -4 & -2 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \quad V_A(6) = \left(\left(\frac{+2}{3}, \frac{+1}{3}, \frac{-2}{3} \right) \right)$

$* = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 2z-2x \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad x - 4z + 4x = 0$

$5x = 4z$

$= \mathcal{L}\left(\left(\frac{1}{\sqrt5}, \frac{-2}{\sqrt5}, 0 \right), \left(\frac{4}{\sqrt{45}}, \frac{2}{\sqrt{45}}, \frac{5}{\sqrt{45}} \right) \right) \qquad x = 4 \quad z = 5$

$y = 2$

$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt5 & 4/\sqrt{45} & 2/3 \\ -2/\sqrt5 & 2/\sqrt{45} & 1/3 \\ 0 & 5/\sqrt{45} & -2/3 \end{pmatrix} \qquad \det P = -1$

cambio i segni di un autovettore

$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt5 & 4/\sqrt{45} & 2/3 \\ 2/\sqrt5 & 2/\sqrt{45} & 1/3 \\ 0 & 5/\sqrt{45} & -2/3 \end{pmatrix}$

Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. V si dice **EUCLIDEO** se è dotato di una funzione $g : V \times V \to \mathbb{R}$ t.c. verifica le seguenti proprietà:

(1) $g(\lambda u_1 + \mu u_2, v) = \lambda g(u_1, v) + \mu g(u_2, v)$

(2) $g(u, v) = g(v, u)$

(3) $g(u, u) \geq 0$ e $g(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0$

Def. $|u| = \sqrt{g(u,u)}$

Esempio $V = \mathbb{R}^n$

$\langle u, v \rangle = {}^t u \cdot v$

$\underset{1 \times N}{(u_1, \dots, u_n)} \underset{N \times 1}{\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$

SPAZI VETTORIALI NORMATI

$\| \ \| : V \to \mathbb{R}_0^+$ t.c.

1) $\|u\| \geq 0 \quad \forall u, v \in V$ e $\|u\| = 0$ sse $u = 0$

2) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$

3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Def. Sia X un insieme non vuoto, $X \neq 0$

$d : X \times X \to X$ t.c.

1. $d(P_1, P_2) \geq 0 \quad \forall P_1, P_2 \in X$

$d(P_1, P_2) = 0$ sse $P_1 = P_2$

2. $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$

3. $d(P_1, P_2) \leq d(P_1, Q) + d(Q, P_2)$

(X, d) si chiama SPAZIO METRICO (d è una METRICA per X)

Oss. Ogni spazio normato è uno spazio metrico

Def. Si dice che $P \in X$ e' punto di accumulazione di un sottoinsieme $D \subseteq X$ sse per ogni intorno U di P si ha:

$$(U \setminus \{P\}) \cap D \neq \emptyset$$

Un punto che non e' di accumulazione si dice PUNTO ISOLATO

$D = \{\frac{1}{n}\}_{n \in N}$

0 e' punto di accumulazione, tutti gli altri punti isolati

0 non appartiene a D

Esercizio Un insieme D e' chiuso sse contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

Def. Sia $D \subseteq X$. L'esterno di $D =: Ext(D)$ e' l'insieme dei punti interni del complementare $(X \setminus D)$

La frontiera di $D =: Fr(D)$ e' il complementare insiemistico di

$$Int(D) \cup Ext(D)$$

Teorema $D \subseteq X$

Allora $X = Int(D) \cup Fr(D) \cup Ext(D)$

$(\overline{D})$ La chiusura di $D = Int(D) \cup Fr(D)$

CONTINUITÀ NEGLI SPAZI METRICI

Siano $X_d, Y_{d'}$ Una funzione $f: X \to Y$ e' continua se e solo se $\forall B$ aperto di Y, allora $f^{-1}(B)$ e' un aperto di X

Si dice che f e' continua in P $(P \in X)$ se e solo se la controimmagine di ogni aperto contenente $f(P)$ e' un aperto che contiene P

Prop. Una funzione $f: X \to Y$ e' continua in $P_0 \in X$ se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad t.c. \quad d_X(P_0, P) < \delta \Rightarrow d_Y(f(P_0), f(P)) < \varepsilon$$

Dimostrazione

$\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\quad f^{-1}(B_{f(P_0)}(\varepsilon))$ e' un aperto di X che contiene P_0

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.c. $f(B_{P_0}(\varepsilon)) \subseteq B_{f(P_0)}(\varepsilon)$

$\Leftarrow$ Gatto!

Concetto di limite

$f: D \subseteq X \longrightarrow Y$ funzione. P_0 punto di accumulazione di D

Si dice che $\lim_{P \to P_0} f(P) = Q$ $(Q \in Y)$ se e solo se la funzione $\bar{f}: D \cup \{P_0\} \to Y$ e' continua in P_0, dove $\bar{f}$ e' l'estensione di f a P_0

cioe' $\bar{f}(P) = \begin{cases} f(P) & \text{se } P \neq P_0 \\ Q & \text{se } P = P_0 \end{cases}$

Si osserva che f e' continua se e solo se $\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$ ossia

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad t.c. \quad 0 < d_X(P_0, P) < \delta \Rightarrow d_Y(f(P), \underset{f(P_0)}{Q}) < \varepsilon$$

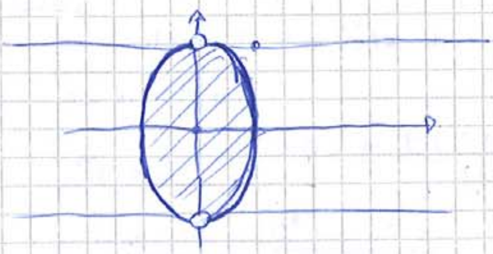
2) $A = \{ (x,y) / \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 - 1 \leq 0 \, , \, |y| < 3 \}$

~~a)~~ frontiera di A contiene $(2,0)$

b) $Fr(A) = \emptyset$

c) $(2,3) \in Fr(A)$ NO

~~d)~~ $(2,3)$ è esterno a A



3) $A \in \mathbb{R}^{4,4}$

a) $\det(A^t A) < 0$

b) $\forall B \in \mathbb{R}^{4,4}$ $\det(3A - 2B) = 3\det(A) - 2\det(B)$

c) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$

~~d)~~ $\det(-A) = \det(A)$

4) In $\mathbb{R}^2$ $A = \{ (x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4 \}$

a) $(0,0)$ interno ad A

b) A compatto

c) $(\sqrt{2}, 0)$ esterno ad A

~~d)~~ $\mathbb{R}^2 \setminus A$ chiuso

5) $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1 \}$

~~a)~~ $P(1,1)$ è interno ad A

b) $A = \emptyset$ NO

c) $Q(1,0)$ è interno ad A

d) $A = \mathbb{R}^2$ NO

$y \geq 1 - x$

6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) A non diagonalizzabile

b) $\lambda = 1$ è autovalore di A

c) $v(1,0,1)$ v^t autovettore di A

~~d)~~ $p(0) = 0$

A non invertibile → 0 autovalore

se A matrice quadrata non invertibile → A <u>singolare</u>

7) A sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$

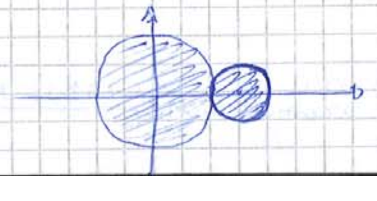
$A = \{ (x,y) / (x-3)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \} \cup \{ x^2 + y^2 - 4 < 0 \}$

a) A aperto NO

b) A chiuso NO

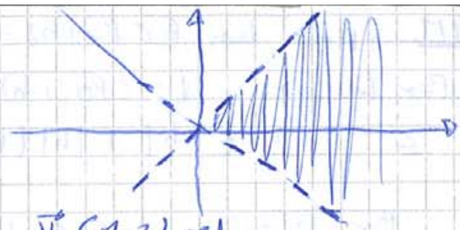
c) $(-2,0)$ interno ad A

~~d)~~ $(-2,0)$ appartiene alla frontiera di A



Es. $f(x,y) = \log(x^2-y^2) = \log[(x+y)(x-y)]$

$\text{dom} f = A$



Es. Sia $f(x,y) = e^x \cdot \cos y$

Calcolare la derivata direzionale lungo il vettore $\vec{v}(1,2)$ nel punto $(0,0)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,2)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,2t)-f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^t \cos 2t - 1}{t} = \lim_{t\to 0} [e^t(-2\sin 2t) + e^t \cos 2t] = 1$$

Esercizio

$f(x,y) = x^2 + xy - z$

Determinare derivata direzionale in $P(1,0)$ lungo $\vec{v}=(2,1)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((1,0)+t(2,1)) - f(1,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(1+2t,t) - f(1,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(1+2t)^2 + (1+2t)\cdot t - 2 + 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1+4t^2+4t+t+2t^2-2+1}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t(6t+5)}{t} = 5$$

Esercizio Calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

Possiamo pensare al fascio di rette che passano per l'origine $y = nx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(nx)^2}{x^2+(nx)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 n}{x^2(1+n^2)} = 0$$

Esercizio

Calcolare le derivate parziali prime di:

a) $f(x,y) = \log(x+\sqrt{x^2+y^2})$

b) $f(x,y,z,t) = \frac{x-y}{z-t}$

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} 2x\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}(x+\sqrt{x^2+y^2})}$

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{z-t}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{z-t}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{x-y}{(z-t)^2}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{x-y}{(z-t)^2}$

TAYLOR

$f(P_0+h) = f(P_0) + d_{P_0} f \cdot h + |h| \cdot R_1(P_0+h)$

dove $|h| \cdot R_1(P_0,h)$ è t.c. $\lim_{h\to 0} |R_1(P_0,h)| = 0$

Basterebbe definire $R_1(P_0,h) = \begin{cases} f(P_0+h) - f(P_0) - d_{P_0} f \cdot h & |h| \neq 0 \\ 0 & h = 0 \end{cases}$

COROLLARIO $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è differenziabile in P_0, allora f è continua in P_0.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_i} := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) e_i$ la derivata parziale seconda della funzione f

f prima rispetto alla x_j e poi rispetto alla x_i

TEOREMA DI SCHWARZ

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$P_0 \in D$ e supponiamo che in un intorno di P_0 esistono per i, j,

fissati $1 \leq i, j \leq n$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$

e sono continue in P_0.

Allora $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right|_{P_0}$

Esempio $f(x,y) = e^x + 2x^2y - y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = e^x + 4xy$

$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 2x^2 - 1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = e^x + 4y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} e^x + 4xy = 4x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 - 1) = 4x$

ESERCIZIO

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Provare che $\left.\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right|_{(0,0)} \neq \left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right|_{(0,0)}$

DIFFERENZIABILITÀ DI CAMPI VETTORIALI

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$P \to f(P)$

la componente i-esima di $f(P)$ sarà $f_i(P) = f(P) e_i$

dove $e = (e_1, \dots e_m)$ base canonica di $\mathbb{R}^m$

$P = (x_1, \dots x_n)$, $f(P) = (f_1(P), \dots f_m(P))$

f è differenziabile in P_0 sse $\forall f_i$ è differenziabile in P_0

$d_{P_0} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$u \mapsto \begin{pmatrix} d_{P_0} f_1 \cdot u \\ \vdots \\ d_{P_0} f_n \cdot u \end{pmatrix}$$

Es. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x^2 y \\ x + y e^y \end{pmatrix}$$

Determinare:

$J_{P_0} f$ $\quad P_0 (0, 1)$ matrice jacobiana

$f = (f_1, f_2)$ $\quad f_1 (x, y) = x^2 y$

$f_2 (x, y) = x + y e^y$

$$J_{P_0} f \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}_{P_0 = \binom{0}{1}} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 1 & e^y + ye^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2e \end{pmatrix}$$

Regola della catena

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

$g : D' \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ $\quad$ t.c. $f(D) \subseteq D'$

Se f è differenziabile in $P_0 \in D$ e g è differenziabile in $Q_0 = f(P_0)$

Allora $g \circ f : D \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile in P_0 e il differenziale è:

$d_{P_0} (g \circ f) = d_{Q_0} g \circ d_{P_0} f$; inoltre $J_{P_0}(g \circ f) = J_{Q_0} g \cdot J_{P_0} f$

Esempio

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita da $(x, y, z) = (2t, 1 + t, \sin t)$
$\quad t \to f(t)$

$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $(u, v) = (x + y + z^2, xy)$

Determinare $J(g \circ f)$ $\quad$ n° righe = 2

$$J g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2z \\ y & x & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\sin t \\ 1+t & 2t & 0 \end{pmatrix}$$ n° colonne = 3

$$J f = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \cos t \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$

$$J_{g \circ f} = J g \cdot J f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\sin t \\ 1+t & 2t & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2\sin t \cos t \\ 2 + 2t + 2t + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + \sin 2t \\ 4t + 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2$$
$$t \longrightarrow f(t) \longrightarrow g(f(t))$$

Es. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(x, y) = \sin(2x + y) \vec{i} + e^{x + 2y} \vec{j}$

$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad g(u, v, z) = (u + 2v^2 + 3z^3, u^2 - 2v)$

1) calcolare $J f$, $J g$ $\qquad$ 2) $h = f \circ g$, calcolo $J_{P_0} h$ con $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$J f = \begin{pmatrix} 2\cos(2x+y) & \cos(y+2x) \\ e^{x+2y} & 2e^{x+2y} \end{pmatrix}_{2 \times 2} \qquad J g = \begin{pmatrix} 1 & 4v & 9z^2 \\ 2u & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h = \left(\sin(2u + 4v^2 + 6z^3 + u^2 - 2v), e^{(u + 2v^2 + 3z^3 + 2u^2 - 4v)} \right)$$

$$J_{f \circ g} = \begin{pmatrix} 1 & 4v & 9z^2 \\ 2u & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\cos(2u + 4v^2 + 6z^3 + u^2 - 2v) & \cos(u^2 - 2v + 2u + 4v^2 + 6z^3) \\ e^{\cdots} & \end{pmatrix}$$

Esercizio

Scrivere la formula di Taylor del 2° ordine per la funzione:

$f(x,y) = x \cdot e^{2x+y^2}$ nel punto $P_0(1,0)$. Ricavare inoltre dalla formula scritta l'equazione del piano tangente al grafico di f in Q corrispondente a P_0. Decidere se vicino a Q il piano tg si colloca sopra o sotto il grafico. Dire se, sostituendo f con il polinomio che si ottiene troncando lo sviluppo di f ai termini di 1° grado si ottiene un'approssimazione di f nei punti vicini a P_0 per eccesso o difetto

a) $f(x_0,y_0) = e^2$

$f_x = e^{2x+y^2} + 2x e^{2x+y^2}$

$f_y = 2yx\, e^{2x+y^2}$

$f_{xx} = 2e^{2x+y^2} + 4x e^{2x+y^2} + 2e^{2x+y^2}$

$f_{yy} = x(2e^{2x+y^2} + 4y^2 e^{2x+y^2})$

$f_{xy} = 2y e^{2x+y^2} + 4xy\, e^{2x+y^2}$

$$f(x,y) = e^2 + (e^{2x+y^2} + 2x e^{2x+y^2})(x-1) + 2xy e^{2x+y^2}(y) + \frac{1}{2}(2e^{2x+y^2} + 4x e^{2x+y^2})(x-1)^2$$
$$+ \frac{1}{2}x(2e^{2x+y^2} + 4y^2 e^{2x+y^2}) + (2y e^{2x+y^2} + 4xy e^{2x+y^2})(x-1)y + o((x-1)^2+y^2)$$

$$f(x,y) = e^2 + (3e^2)(x-1) + 0\, y + \frac{1}{2}(8e^2)(x-1)^2 + \frac{1}{2}(2e^2)(y)^2 +$$
$$+ 0 + o((x-1)^2+y^2) =$$
$$e^2 + 3e^2(x-1) + 4e^2(x-1)^2 + e^2(y)^2 + o((x-1)^2+y^2)$$

b) $\boxed{z = f(x,y)}$

$f(x,y) - z = 0$

$f(x_0,y_0) = e^2$

$Q(1,0,e^2)$ Il piano tangente a Q (mi arresto fino al 1° grado)

$e^2 - 3e^2 + 3e^2 x = z$

$\boxed{3e^2 x - z - 2e^2 = 0}$

c) $f(x,y) - g(x,y) =$

$4e^2(x-1)^2 + e^2 y^2 = q(x,y)$ sempre positiva (definita positiva)

Il grafico di f, vicino al punto q, sopra il piano tangente

d) Per difetto

Def Sia $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si dice che P_0 è un punto critico o stazionario se e solo se differenziale di P_0 in $f = 0$ cioè sse $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{P_0} = 0 \quad \forall i$

Un punto stazionario si dice di massimo locale per f se e solo se esiste un intorno U_{P_0} t.c. $f(P) \leq f(P_0) \quad \forall P \in U_{P_0}$

Si dice di minimo locale se esiste un intorno U_{P_0} t.c. $f(P) \geq f(P_0) \quad \forall P \in U_{P_0}$

Si dice che il punto P_0 è di SELLA per f se per ogni intorno di P_0

Se autovalore è 0, questo metodo non si segue.

ESEMPIO

Sia $f(x,y) = x^3y^2 - 3xy^2 + y^2 + 6y$

a) trovare i punti di massimo, di minimo, di sella

b) calcolare la derivata direzionale nel punto $(0,1)$ nella direzione del vettore $\vec{v}(2,1)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 - 3y^2$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 6xy + 2y + 6$

$f_{xx} = 6xy^2$ $\qquad$ $f_{xy} = 6x^2y - 6y$ $\qquad$ $f_{yy} = 2x^3 - 6x + 2$

$\begin{cases} 3x^2y^2 - 3y^2 = 0 \\ 2x^3y - 6xy + 2y + 6 = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $3y^2(x^2-1) = 0$ $\qquad$ $y = 0 \lor x = \pm 1$

(1) $2y - 6y + 2y + 6 = 0$

$-2y + 6 = 0$

$y = 3$

$P_1(1,3)$

(2) $-2y + 6y + 2y + 6 = 0$

$6y = -6$

$y = -1$

$P_2(-1,-1)$

$\begin{pmatrix} 54 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ det = $54 \cdot (-2)$ = negativo $\qquad$ P_1 punto di sella

$\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ $\qquad$ det = -36 $\qquad$ P_2 punto di sella

$(3x^2y^2 - 3y^2,\ 2x^3y - 6xy + 2y + 6) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$(-3,\ 8) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -6 + 8 = +2$

$d_{\vec{v}} = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,1) + t(2,1)) - f(0,1)}{t} = \lim_{h \to 0} \frac{f(2t, 1+t) - f(0,1)}{t} =$

$= \lim_{t \to 0} \frac{8t^3 \cdot (1+t)^2 - 3(2t)(1+t)^2 + (1+t)^2 + 6 + 6t - 7}{t} =$

$N = 8t^3(1 + 2t + t^2) - 6t(1 + 2t + t^2) + 1 + 2t + t^2 - 1 + 6t =$

$= \cancel{8t^3} + 16t^4 + \cancel{8t^5} - \cancel{6t} - 12t^2 - \cancel{6t^3} + 1 + 2t + t^2 - 1 + 6t =$

$= 8t^5 + 16t^4 + 2t^3 - 11t^2 + 2t$

$\lim_{t \to 0} \frac{8t^5 + 16t^4 + 2t^3 - 11t^2 + 2t}{t} = \lim_{t \to 0} 8t^4 + 16t^3 + 2t^2 - 11t + 2 = 2$

QUESITO

$f(x,y) = x^3 + y^3$

a) $\nabla f(1,1) = (3,3)$

b) f non derivabile nell'origine

$\nabla = (3x^2, 3y^2)$

c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

d) $(1,1,1)$ appartiene al grafico di f

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t = \left[\frac{t + \sin t \cos t}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$\text{TOTALE} = 2\pi + \pi + 8\pi = 12\pi$$

RICORDO:

$$\int_a^b \cos^2 t \, dt = \left[\frac{t + \cos t \sin t}{2}\right]_a^b$$

$$\int_a^b \sin^2 t \, dt = \left[\frac{t - \sin t \cos t}{2}\right]_a^b$$

4. È piana la curva? Sia con il piano osculatore sia con questo metodo.

Cerco tre punti

$t = 0 \to P_1(1, 0, 0)$

$t = \pi \to P_2(-1, 0, \pi)$

$t = \frac{\pi}{2} \to P_3(0, 3, \frac{\pi}{2})$

PIANO? $PP_1 = (x-1, y, z)$

$P_2P_1 = (-2, 0, \pi)$

$P_3P_1 = (-1, 3, \frac{\pi}{2})$

$$\begin{pmatrix} x-1 & y & z \\ -2 & 0 & \pi \\ -1 & 3 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = 0 \qquad -3\pi(x-1) - y(-\pi + \pi) + z(-6) = 0$$

$$-3\pi x + 3\pi - 6z = 0$$

$$3\pi x + 6z - 3\pi = 0$$

$$3\pi \cos(t) + 6t - 3\pi = 0$$

$$3\pi \cos(t) = 3\pi - 6t$$

$$\cos(t) = 1 - \frac{2t}{\pi}$$

no, non sempre verificata $\to$ NON è piana

Se aggiungessi la funzione costante a $\cos(t), 3\sin(t), t$, si hanno 4 fx linearmente indipendenti $\to$ NO PIANA

QUESITO

$V(x,y) = (2x, 4y)$ $\quad \gamma(t) = (3\cos(t), -2\sin(t))$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$V = (6\cos(t), -8\sin(t))$

$$\int_0^{\pi/2} V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \int_0^{\pi/2} -18 \sin t \cos t + 16 \cos t \sin t = \int_0^{\pi/2} -2 \sin t \cos t \, dt = *$$

$$\gamma(t) : [0, \tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2 \xrightarrow{V} \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto (3\cos(t), -2\sin(t)) \to (6\cos(t), -8\sin(t))$$

$$\gamma'(t) = (-3\sin(t), -2\cos(t))$$

$$* = \int_0^{\pi/2} -\sin 2t \, dt = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 2 \sin 2t = +\frac{1}{2}\left[\cos 2t\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

P_2 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ det $= 2 \cdot \frac{2}{3}$

$f_{xx} > 0$, $f_{yy} > 0$ punto di minimo

P_3 $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ det $= -4$ P_3 punto di sella

P_4 $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ P_4 punto di sella

Esercizio

Sia data la funzione $f(x,y) = (y-2)(2x^2 - y^2) = 2x^2y - y^3 - 4x^2 + 2y^2$

(i) calcolare $f(0,1)$

(ii) punti stazionari e natura

Nello spazio si consideri la superficie $S: \ z = (y-2)(2x^2 - y^2)$

(iii) determinare l'equazione cartesiana del piano tangente a S nel punto $(0,1,1)$

(iiii) determinare le equazioni parametriche di una retta contenuta nel piano tangente a S in $(0,1,1)$

(i) $f(0,1) = (-1)(-1) = 1$

(ii) $f_x = 4xy - 8x$ $f_{xx} = 4y - 8$ $f_{yx} = 4x$

$f_y = 2x^2 - 3y^2 + 4y$ $f_{yy} = -6y + 4$

$4xy - 8x = 0$ con $x = 0$ $y(-3y+4) = 0$

$4x(y-2) = 0$ $P_1(0,0)$ $P_2(0, \frac{4}{3})$

$x = 0 \ \vee \ y = 2$ con $y = 2$ $2x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

$P_3(\sqrt{2}, 2)$ $P_4(-\sqrt{2}, 2)$

P_1 $\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ P_1 punto di sella

P_2 $\begin{pmatrix} \frac{16}{3} - 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ P_2 punto di massimo

P_3 $\begin{pmatrix} 0 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & -8 \end{pmatrix}$ $-16 \cdot 2 = -32$ punto di sella

P_4 $\begin{pmatrix} 0 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & -8 \end{pmatrix}$ punto di sella

(iii) $f(x,y) = 2x^2y - y^3 - 4x^2 + 2y^2 = z$ $2x^2y - y^3 - 4x^2 + 2y^2 - z = 0$

$Gr(f) = \{(x, y, \underset{z}{f(x,y)}) \ / \ z = f(x,y)\}$