NUMERO: 1337

ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Busca

MATERIA: Fisica I + Eserc., Prof.Gamba

FISICA I

- Aristotele - prime nozioni di fisica (4° secolo a.C.)
- Lucrezio (1° secolo a.C) → "De rerum natura" crea parola in latino → "natura"
- Galilei (1600)

Programma:

- Meccanica : 1) cinematica (descrizione moto)
  2) dinamica (cause del moto, forze)
  3) statica (quando non c'è moto, caso particolare di dinamica)

(1) PUNTO MATERIALE - oggetto ideale di cui non ci interessano le sue caratteristiche
(2) sistema di punti materiali
(3) CORPI RIGIDI (descritti da 3 coordinate)
(4) sistemi di corpi rigidi (aereo)

I fluidi, a differenza dei solidi, hanno infiniti gradi di libertà

Gas → fluido particolare, con particelle indipendenti tra loro

- Termodinamica (motori)

Fisica = scienza sperimentale. L'esperimento è l'inizio di qualsiasi scoperta

esperimento → misura → legge → teoria

Meccanica classica - scoperta tra 1600 e 1800

studio di moto di corpi non troppo piccoli* (> scala atomica molecolare)

e non troppo veloci (molto meno della v della luce 300 milioni di m/s)

* legato a principio di indeterminazione di Heisenberg

$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ $kg\,m^2/s$ è il valore minimo di scala

Se andiamo al di sotto di quel valore di scala (ex. lampada a neon, laser, ...)

↓

(1) MECCANICA QUANTISTICA

se andiamo a $v > c$

↓

(2) MECCANICA RELATIVISTICA

GRANDEZZE DERIVATE

① velocità $= \frac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo}}$ $\left(\frac{m}{s}\right)$

$[v] = \frac{m}{s}$

velocità $20 \frac{m}{s} \rightarrow \frac{0{,}02\,km}{1/3600\,h} = 20 \frac{3600}{1000} \frac{km}{h} =$

$= 20 \cdot 3{,}6 \frac{km}{h} = 72 \frac{km}{h}$

Regola $\boxed{X \frac{m}{s} = 3{,}6 \cdot X \frac{km}{h}}$

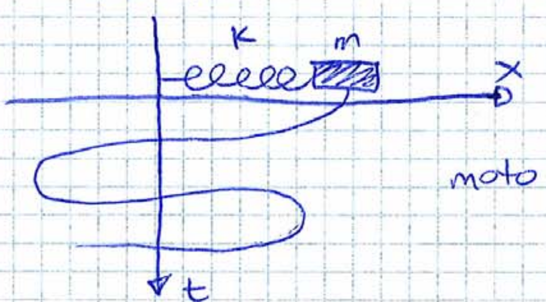
② Accelerazione - variazione di velocità in un determinato tempo

$a = \frac{\Delta V}{t}$ $\quad [a] = \frac{m}{s^2}$ cioè $\frac{\text{spazio}}{\text{tempo al quadrato}}$

g = accelerazione di gravità $= 9{,}81\ m/s^2$

ANALISI DIMENSIONALE → in quali unità di misura è espressa quella grandezza? È quella + adatta!

Esempio



moto oscillatorio

$x(t) = \sin(t)$
↓
sbagliato perché x ha u.d.m. → m
mentre $\sin t$ non ha u.d.m.

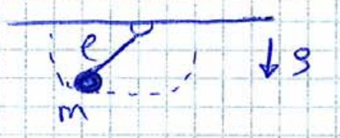
$x(t) = \sin(t) \cdot$ Ampiezza dell'oscillazione (metri)

Ancora sbagliato

$x(t) = A \cdot \sin\left(\frac{t}{\tau}\right)$ $\quad \tau$(tau) = periodo fisso in secondi dell'oscillazione

GIUSTA (si dovrebbe ancora aggiungere 2π dentro l'equazione del seno)

Analisi dimensionale permette di scoprire risultati che non conosco



T = dipende da ampiezza delle oscillazioni

In realtà se ampiezza molto piccola, il periodo non dipende da esso

Quanto è grosso l'errore?

periodi	scarti	scarti quadratici
T_1	$T_1 - \bar{T}$	$(T_1 - \bar{T})^2$
T_2	$T_2 - \bar{T}$	$(T_2 - \bar{T})^2$
$\vdots$		$\vdots$
T_n	$T_n - \bar{T}$	$(T_n - \bar{T})^2$

Se faccio media degli scarti

$$\overline{T_k - \bar{T}} = \bar{T} - \bar{T} = 0$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (T_k - \bar{T}) = \underbrace{\frac{1}{N} \sum T_k}_{\bar{T}} - \underbrace{\frac{1}{N} \sum \bar{T}}_{\frac{1}{N} N \cdot \bar{T}} = 0$$

scarti = deviazioni di T dal valore medio, la media di essi è per forza 0

Per farmi idea dell'errore sperimentale, devo usare altro.

Si guardano SCARTI QUADRATICI (sempre POSITIVI)

VARIANZA (σ^2) = "media degli scarti quadratici"

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum (T_k - \bar{T})^2$$ sempre positiva (o uguale a 0)

$$\sigma^2 = \overline{(T_k - \bar{T})^2} = \overline{dT_k^2}$$

$$dT_k = T_k - \bar{T}$$

$$[\sigma^2] = ? = s^2$$

Per misurare l'errore si usa $\sqrt{\text{varianza}} = \sigma$ = DEVIAZIONE STANDARD

in secondi, mi fornisce misura quantitativa dell'errore commesso, dispersione dei dati

$$\sigma^2_T = \overline{dT_k^2}$$

$$\sigma^2_l = \overline{dl_k^2}$$

① ISTOGRAMMA

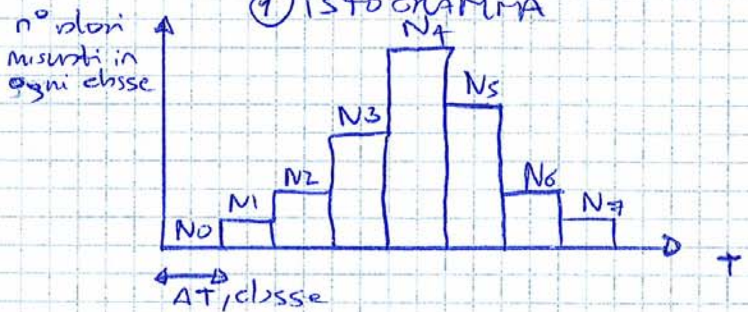
T_1

T_2

T_3

$\vdots$

T_n



N_i = n° valori misurati che stanno tra $i\Delta t$ e $(i+1)\Delta t$

Noi vogliamo che l'area faccia 1, non $\sqrt{2\pi}$

ecco perchè $p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

↓

NORMALIZZAZIONE

$\int p(t) = 1$

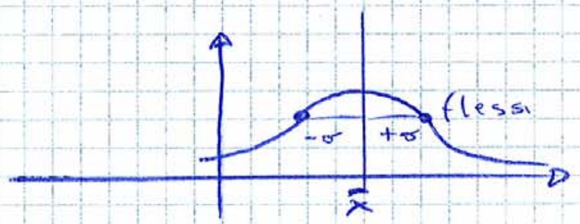
per avere campana centrata in $\bar{x}$ faccio traslazione (1) della x

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2}}$$

Poi dilatazione (2) per arrivare a formula finale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$



DISTRIBUZIONE GAUSSIANA o NORMALE

area = 1

distanza tra flessi $+2\sigma$

Se prendo σ + piccolo, curva + allungata verso l'alto

" " + grande, curva + piatta, + schiacciata verso asse X

prof luciano.scaltrito@polito.it se non riesco ad iscrivermi al laboratorio di fisica

PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI

g_1	$g_1 - \bar{g} = dg_1$	dg_1^2
g_2	$g_2 - \bar{g} = dg_2$	dg_2^2
g_3 ⋮	$g_3 - \bar{g} = dg_n$	dg_3^2
g_n		dg_N^2
$\bar{g}$		$\sigma^2 = dg_k^2$ = varianza

$dg_k = g_k - \bar{g}$ = scarto assoluto

$\frac{dg_k}{\bar{g}}$ = scarto relativo (se × 100 diventa SCARTO PERCENTUALE)

Scarto relativo è NUMERO PURO, ADIMENSIONALE

$\frac{dg}{\bar{g}} = 0{,}01$ è l'1% di errore, errore sulla 3ª cifra decimale

$$\boxed{\frac{df}{f} = d\ln f}$$ variazione relativa è il differenziale del logaritmo

$f = g \cdot h$

$$\frac{df}{f} = d\ln f = d\ln(g \cdot h) = d\ln g + d\ln h = d[\ln g + \ln h] =$$

$$= \frac{dg}{g} + \frac{dh}{h}$$

$$\frac{df}{f} = \frac{dg}{g} + \frac{dh}{h}$$

→ la variazione relativa di un prodotto è la somma delle variazioni relative dei fattori

→ l'errore relativo di un prodotto è la somma degli errori relativi sui fattori.

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

$dl, dT, \rightarrow dg?$

$$\frac{dg}{g} = d\ln g = d\ln\frac{4\pi^2 l}{T^2} = d[\underbrace{\ln 4\pi^2}_{\text{lo ignoro perché differenziale di una costante } K} + \ln l - 2\ln T]$$

$$= d\ln l - 2d\ln T = \frac{dl}{l} - 2\frac{dT}{T}$$

$$\boxed{\frac{dg}{g} = \frac{dl}{l} - \frac{2dT}{T}}$$ → questo vale per una singola misura

$$\frac{dg_k}{\bar{g}} = \frac{dl_k}{\bar{l}} - \frac{2dT_k}{\bar{T}} \quad \times \text{ ogni misura } \quad k = 1,2,3,\dots n$$

$$\overline{\left(\frac{dg_k}{\bar{g}}\right)^2} \simeq \overline{\left(\frac{dl_k}{\bar{l}} - \frac{2dT_k}{\bar{T}}\right)^2} = \overline{\left(\frac{dl_k}{\bar{l}}\right)^2} + 4\overline{\left(\frac{dT_k}{\bar{T}}\right)^2} - \overline{4\frac{dl_k}{\bar{l}}\frac{dT_k}{\bar{T}}}$$

$\bar{m}$ = media

solitamente i termini con segno variabile tendono a 0.

$$\overline{\left(\frac{dg_k}{\bar{g}}\right)^2} = \overline{\left(\frac{dl_k}{\bar{l}}\right)^2} + 4\overline{\left(\frac{dT_k}{\bar{T}}\right)^2}$$

σ_g^2 (varianza) $= \overline{dg_k^2}$ $\quad \sigma_l^2 = \overline{dl_k^2}$ $\quad \sigma_T^2 = \overline{dT_k^2}$

$$\boxed{\left(\frac{\sigma_g}{\bar{g}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_l}{\bar{l}}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_T}{\bar{T}}\right)^2}$$ FORMULA DI PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI

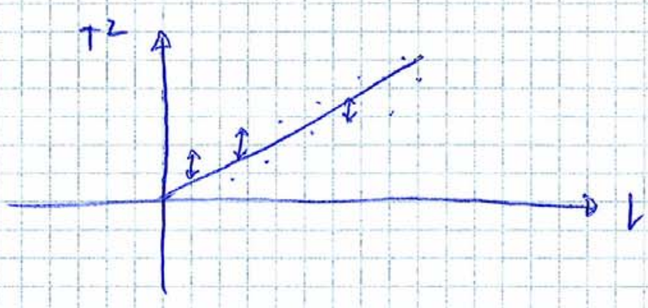
errore standard sulla media è uguale a errore sulla singola misura diviso $\sqrt{N}$

se voglio raddoppiare precisione, devo fare 4 volte + misure
" triplicare " , " 9 volte "

METODO DEI MINIMI QUADRATI

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

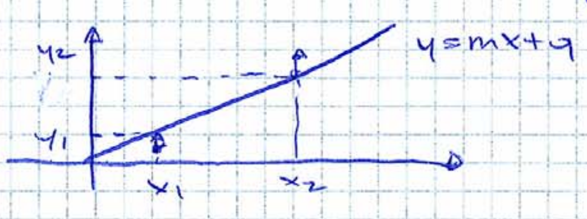
$$\boxed{T^2 = 4\pi^2\frac{l}{g} = \frac{4\pi^2}{g}\cdot l}$$ C'è prop. diretta tra T^2 e l



a grosso modo, trovo punti che stanno ± su una retta
coefficiente $\frac{4\pi^2}{g} = m$
dal grafico trovo valore di g.

$$g = \frac{4\pi^2}{m}$$

Devo trovare la retta con minima distanza dai punti nel grafico → METODO MINIMI QUADRATI
retta che minimizza distanza tra punti sperimentali e retta



Dati: $\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2}, \binom{x_3}{y_3}, (\,..\,) \;..\; \binom{x_N}{y_N}$ Incognite: m, q
(parametri della retta di regressione)

Non basta far differenza tra punto e retta, perché alcuni sono + e altri −
Quindi uso i quadrati delle distanze (da qui il nome del metodo)
CERCO retta che minimizza i quadrati delle distanze dei punti sperimentali dalla retta stessa

Si introduce FUNZIONE COSTO

$$f(m,q) = \sum_{k=1}^{N} (\underbrace{mx_k + q}_{\text{valore teorico}} \text{ (valore teorico di y sulla retta)} - \underbrace{y_k}_{\text{valore sperimentale}})^2$$

m e q che rendono COSTO + piccolo possibile − CERCO MINIMO di f
$(f' = 0)$

NOTAZIONE SCIENTIFICA ESPONENZIALE (Archimede di Siracusa)

$15,4\ Km = 15400\ m = 1,54 \cdot 10^4\ m$

la parte intera è sempre maggiore di 0 e di una sola cifra

Circonferenza della Terra $40\ 000\ 000\ m = 4 \cdot 10^7\ m$

Diametro di una cellula $10\ \mu m = 10 \cdot 10^{-6}\ m = 10^{-5}\ m$

Atomi di C in 12 g di C $6{,}023 \cdot 10^{23}$ atomi

Secondi in 1 giorno $24 \cdot 3600 = 2{,}4 \cdot 10^1 \cdot 3{,}6 \cdot 10^3 = 8{,}64 \cdot 10^4\ s$

Secondi in 1 anno $365 \cdot 8{,}64 \cdot 10^4 = 3{,}65 \cdot 8{,}64 \cdot 10^6 = 3 \cdot 10^7\ s$

CINEMATICA in 1 Dimensione

$x(t)$

LEGGE ORARIA

Grandezze cinematiche:

- posizione : $x(t)$
- velocità : $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$

concetto di derivata inventato da Newton x descrivere velocità

tachimetro misura quanto tempo per fare $2\pi R$ $\quad v = \frac{2\pi R}{T}$

$R = 20\ cm$

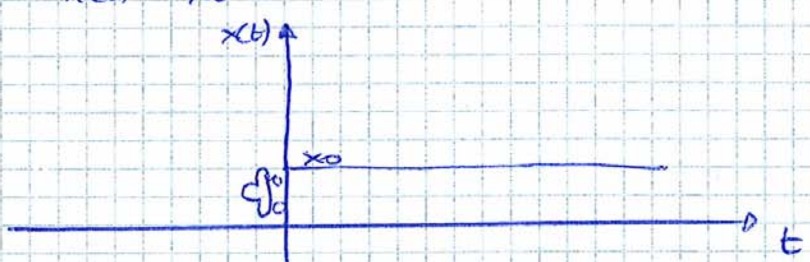
$v = 72\ Km/h = 20\ m/s$

$t = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}2}{20\ m/s} = 0{,}0628\ s = 0{,}063\ s = 6{,}3 \cdot 10^{-2}\ s$

- accelerazione $a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dv(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$

1. QUIETE

$x(t) = x_0$



Servono due integrazioni

DATI INIZIALI
$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \frac{dx}{dt}(0) = 0 \\ \frac{d^2(x)}{dt^2}(t) = a_0 = \text{const} \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{dx(0)}{dt} + \int_0^t \underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}(t')}_{\frac{df}{dt}(t')}dt' = *$$

$$* = 0 + \int_0^t a_0 \, dt' = [a_0 t']_0^t = a_0(t-0) = a_0 t$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt}(t) = a_0 t}$$ PRIMA INTEGRAZIONE (accelerazione → velocità)

Da adesso in poi $\begin{cases} f(t) = x(t) \\ \frac{df}{dt} = \frac{dx}{dt} \end{cases}$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \underbrace{\frac{dx}{dt}(t')}_{a_0 t} dt' =$$

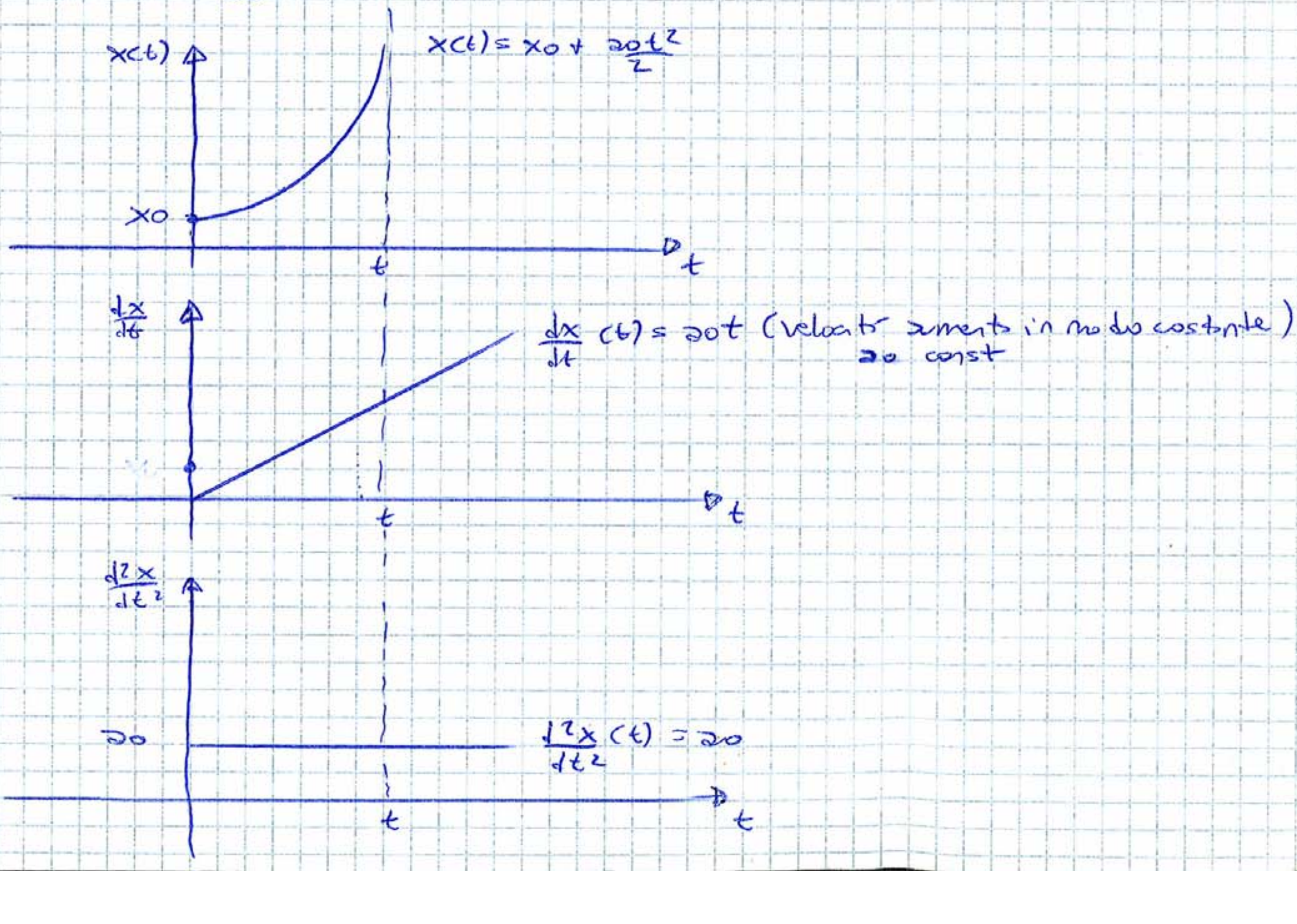
$$= x_0 + \int_0^t a_0 t' \, dt' = x_0 + \left[\frac{a_0 t'^2}{2}\right]_0^t =$$

$$= x_0 + \left(\frac{a_0 t^2}{2} - a_0 \frac{0^2}{2}\right) =$$

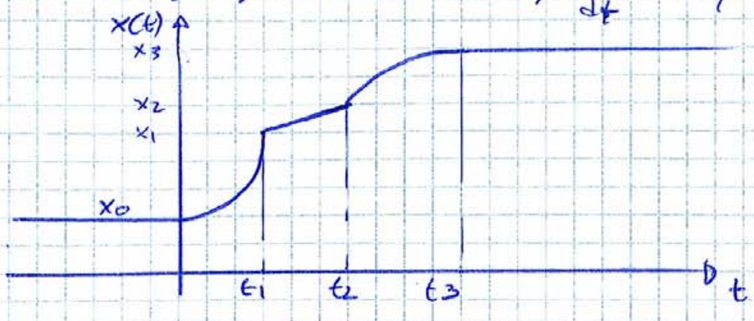
Formula del moto $\boxed{x(t) = x_0 + \frac{a_0 t^2}{2}}$ SECONDA INTEGRAZIONE (velocità → posizione)

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

1. $x(t) = x_0 + \frac{a_0 t^2}{2}$
2. $\frac{dx}{dt}(t) = 0 + a_0 t$ (derivata ')
3. $\frac{d^2x}{dt^2}(t) = a_0$ (derivata '')



Disegno grafico di $x(t)$, $\frac{dx}{dt}(t)$, $\frac{d^2x}{dt^2}(t)$



	$0<t<t_1$	$t_1<t<t_2$	$t_2<t<t_3$
$x(t)$	$x_0+a_0\frac{t^2}{2}$	$x_1+v(t-t_1)$	$x_2+v_2(t-t_2)-a_0\frac{(t-t_2)^2}{2}$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$a_0 t$	v_1	$v_2-a_0(t-t_2)$
$\frac{d^2x}{dt^2}(t)$	a_0	0	$-a_0 t$

$x_1 = x(t_1) = x_0 + a_0\frac{t_1^2}{2}$

$x_2 = x_1 + v_1(t_2-t_1) = x_0 + a_0\frac{t_1^2}{2} + a_0 t_1(t_2-t_1) =$

$v_1 = \frac{dx}{dt}(t_1) = a_0 t_1$

$= x_0 + \frac{a_0 t_1^2}{2} - a_0 t_1^2 + a_0 t_1 t_2 = x_0 - a_0$

$= x_0 - \frac{a_0 t_1^2}{2} + a_0 t_1 t_2$

$v_2 = v_1 = a_0 t_1$

$x_3 = x(t_3) = x_2 + v_2(t_3-t_2) - a_0\frac{(t_3-t_2)^2}{2}$

$v_3 = \frac{dx}{dt}(t_3) = v_2 - a_0(t_3-t_2)$ $\qquad v_3 = 0 \rightarrow$ trovo t_3

$a_0(t_3-t_2) = v_2$

$\frac{v_2}{a_0} = t_3 - t_2 \qquad t_3 - t_2 = \frac{v_2}{a_0} = \frac{v_1}{a_0} = \frac{a_0 t_1}{a_0} = t_1$

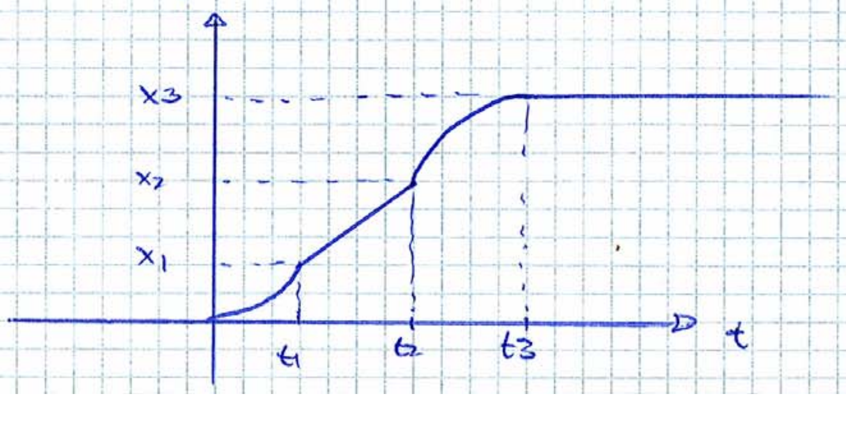
$x_3 = x_2 + v_2 \cdot t_1 - a_0\frac{t_1^2}{2}$ (sostituendo) $=$

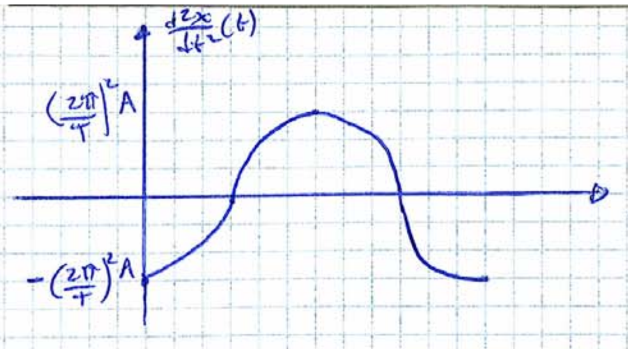
$= x_0 - \frac{a_0}{2}t_1^2 + a_0 t_1 t_2 + a_0 t_1^2 - a_0\frac{t_1^2}{2}$

$\boxed{x_3 = x_0 + a_0 t_1 t_2}$

$t_3 = t_1 + t_2$

strato percorso $\quad x_3 - x_0 = a_0 t_1 t_2$



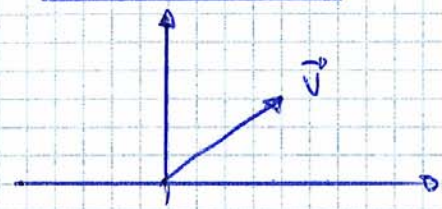


tipo $-\cos x$

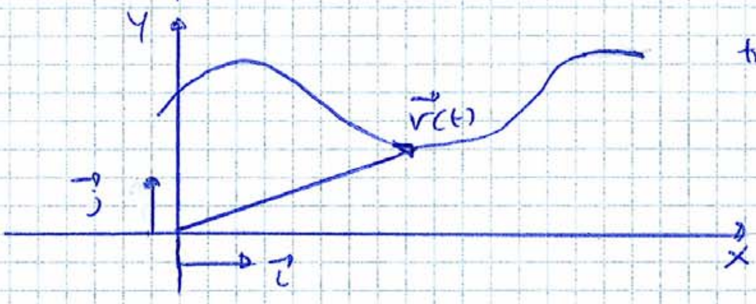
Notare, quando $v=0$, a max (in valore assoluto)

quando v_{max}, $a=0$

MOTO NEL PIANO



$v = |\vec{V}|$ $\boxed{v \neq \vec{V}}$ N.B.



traiettoria in 2D

Si descrive il moto dell'oggetto con un vettore

$\vec{i}, \vec{j}$ hanno lunghezza 1 e sono VERSORI

$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$

$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$

$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t)\, \vec{j}$ ← POSIZIONE

BASE ORTONORMALE = generata da $\vec{i}$ e $\vec{j}$

$$r(t) = |\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t) \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt}(t)\, \vec{j}$$

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}(t) \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}(t)\, \vec{j}$$

$\downarrow$ $\vec{g} = -g\vec{j}$ Ex. accelerazione costante in 2D

$$\boxed{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = \vec{g}}$$ CONDIZIONE in forma vettoriale (modo compatto)

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}(t) \cdot \vec{j} = -g\vec{j}$$

$\cdot\, \vec{i}$ $\quad \frac{d^2x}{dt^2}(t) \cdot 1 + 0 = 0$

$\cdot\, \vec{j}$ $\quad 0 + \frac{d^2y}{dt^2}(t) \cdot 1 = -g$

due equazioni scalari (modo esteso)

dati iniziali x_0, y_0, v_0, V_0

$$* = y = \frac{x}{v_0}\left(V_0 - \frac{gx}{2v_0}\right)$$ $y=0$ quando $x=0$ e quando proiettile cade

$x = \frac{2v_0V_0}{g}$ è la GITTATA mettendo $V_0 - \frac{gx}{2v_0} = 0$

a metà GITTATA $\frac{v_0V_0}{g}$, max altezza

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V_0}{v_0} - \frac{2gx}{2v_0^2} = \frac{V_0}{v_0} - \frac{gx}{v_0^2} \Rightarrow x = \frac{v_0V_0}{g}$$

derivata $=0 \rightarrow$ massimo

$$h = y\left(\frac{v_0V_0}{g}\right) = \frac{V_0}{v_0}\left(\frac{v_0V_0}{g}\right) - \frac{g}{2v_0^2}\frac{v_0^2V_0^2}{g^2} = \frac{V_0^2}{2g}$$ quota MASSIMA dipende solo dal moto unif. accelerato di y

$$\frac{2v_0V_0}{g} = \frac{2|V_0|^2\cos\theta\sin\theta}{g} = \frac{|V_0|^2}{g}\sin 2\theta$$

$$\frac{V_0^2}{2g} = \frac{|V_0|^2\sin^2\theta}{2g}$$ $|..|$ = lunghezza, modulo

GITTATA $= x_1$

$$2\theta = \arcsin\frac{gx_1}{V_0^2}$$

CINEMATICA

DINAMICA (nata nel 1600 con Galilei e Newton

1° LEGGE o PRINCIPIO D'INERZIA (Newton)

Ogni corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme fino a quando non è costretto dalle forze applicate a mutare il proprio stato.

$F=0 \longrightarrow a=0$ (ma in generale $v \neq 0$)

Navicelle spaziali - ambiente ideale per verificare principio di inerzia

Principio di relatività galileiano (anticipa Einstein):

Se siamo su un treno ma si muove solo quello di fianco, hai l'impressione che sia il tuo a muoversi. Nella stiva di una nave con tutto il necessario per fare esperimenti Se la nave ha moto uniforme, tu non sei in grado di sapere se la nave si muove o no ovvero i tuoi esperimenti avvengono allo stesso modo.

In caso contrario, ce ne accorgiamo. Per esempio, in un esperimento di Newton, secchio d'acqua che ruota, acqua gira, superficie diventa concava (verso il basso) per forza centrifuga. Se ci mettiamo sul bordo del secchio, vediamo lo stesso che superficie non è piana. 1) Newton diceva che secchio sente la presenza dell'atmosfera tutto intorno

2) stelle che influenzano

3) ruota rispetto allo spazio-tempo

Ad ogni azione corrisponde sempre una reazione uguale e contraria: cioè le azioni che due corpi esercitano uno sull'altro sono sempre uguali e dirette in verso contrario

Esempi visti con video: missile viene lanciato in aria per spinta del combustibile sotto

II LEGGE DI NEWTON

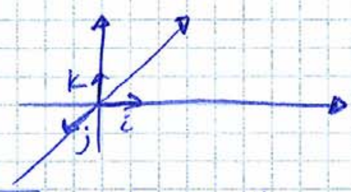
$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} \qquad \text{se } m = \text{const e siccome } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \qquad \vec{F} = m\vec{a}$$

Se ho una forma esplicita per F ottengo un eq. differenziale del 2° ordine per $\vec{r}(t)$ che posso risolvere.

Esempi

- Forza peso



$$\vec{F}_{peso} = -g\vec{k}m \quad (g \simeq 9{,}81 \frac{m}{s^2})$$

$$\boxed{-\cancel{m}g\vec{k} = \cancel{m}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}$$ Eq. differenziale del moto di un corpo soggetto alla Fpeso

Dimensioni fisiche della forza

$$[F] = [m \cdot a] = Kg \cdot \frac{m}{s^2} = N$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

eq. omogenee

$$1N = 1\frac{Kg\, m}{s^2}$$

$$\cancel{m}\frac{d^2z}{dt^2} = -\cancel{m}g \rightarrow \text{non omogenea}$$

Tutti i corpi cadono con stessa accelerazione indipendentemente dalla massa (va via in ambo i membri)

MASSA = misura dell'inerzia del corpo, cioè lui vorrebbe rimanere in moto uniforme

MASSA	≠ PESO
m	mg
Kg	N

l'astronauta nel filmato ha peso = 0, ma la massa è la stessa che aveva sulla terra

1 N ~ peso esercitato da 1 hg

$$x = x_0 + u_0 t$$

$$\vec{V}(0) = u_0\vec{i} + v_0\vec{j} + w_0\vec{k}$$

$$y = y_0 + v_0 t$$

$$z = z_0 + w_0 t - g\frac{t^2}{2}$$

$$\int_0^t \frac{d^2z}{dt^2}dt' = -\int_0^t g\, dt'$$

$$\frac{dz}{dt}(t) - \underbrace{\frac{dz}{dt}(0)}_{w_0} = -gt \qquad \int_0^t \frac{dz}{dt}dt' = \int_0^t (w_0 - gt)\,dt' \qquad z - z_0 = w_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

$$z = z_0 + w_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

$$m\int_0^t \frac{d^2x(t')}{dt^2}dt' = -\int_0^t mg\,dt' = -mgt$$

Ora proviamo con forza non costante

$$m\int_0^t \frac{d^2x(t')}{dt^2}dt' = -K\int_0^t x(t')\,dt'$$

Ora a membro dx ho l'integrale di una funzione incognita

TRUCCO

moltiplico x velocità ambo i membri

$$\underbrace{m\frac{d^2x(t)}{dt^2}\frac{dx(t)}{dt}} = \underbrace{\frac{dx(t)}{dt}\cdot(-Kx(t))}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{2}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2\right\} = -K\frac{d}{dt}\left[\frac{x^2(t)}{2}\right]$$

ENERGIA CINETICA

⌈ Teorema della funzione composta

$$\frac{d}{dt}f[x(t)] = \frac{df}{dt}[x(t)]\cdot\frac{dx}{dt}(t)$$ ⌋

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{2}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2 + \frac{K}{2}x^2(t)\right\} = 0$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL 2° ORDINE sotto forma (derivata totale) = 0

$$\frac{m}{2}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2 + \frac{K}{2}x^2(t) = E$$

costante di integrazione, ENERGIA TOTALE si conserva nel tempo

E si ricava dai dati iniziali

$$\frac{m}{2}v_0^2 + \frac{K}{2}x_0^2 = E$$

U, energia potenziale (elastica)

ENERGIA CINETICA (K) dipende da velocità

Energia è un integrale primo del moto, nasce dalla prima integrazione dell' eq. di Newton.

K e U variano sempre in modo opposto. Quando una è al max, l'altra è al min

K sempre positiva (v^2)

infatti E costante (con piccolo errore numerico)

$$K = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \qquad U = \frac{K}{2}x^2 \qquad K+U = E$$

unità di misura

$[K] = Kg\left(\frac{m}{s}\right)^2 = J$ (Joule) = energia di un corpo di 1 kg che si muove con $v = 1\,\frac{m}{s}$

integrale primo della 2ª legge di Newton

$$K + U = E$$

per trovare posizione, altro integr

$$\frac{m}{2}\left[\frac{dx}{dt}(t)\right]^2 + \frac{K}{2}x^2(t) = E$$

esplicito v

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = E - \frac{K}{2}x^2(t)$$

Come dipendono le costanti arbitrarie A e ϕ_0 dalle condizioni iniziali x_0, v_0?

x_0, v_0

$$E = \frac{m}{2} v_0^2 + \frac{k}{2} x_0^2$$

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{m v_0^2 + k x_0^2}{k}} = \sqrt{\frac{m}{k} v_0^2 + x_0^2} \qquad \text{se } v_0 = 0 \quad A = x_0$$

modo alternativo x trovare A

$$\begin{cases} x(t) = A \sin(\omega t + \phi_0) \\ \frac{dx}{dt}(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi_0) \end{cases}$$

condizioni iniziali $(t=0)$

$$\begin{cases} x_0 = A \sin \phi_0 \\ v_0 = A\omega \cos \phi_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = A \sin \phi_0 \\ \frac{v_0}{\omega} = A \cos \phi_0 \end{cases}$$

$$x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 = A^2 \sin^2\phi_0 + A^2 \cos^2 \phi_0 = A^2$$

$$A = \sqrt{(x_0)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \qquad \text{uguale a prima}$$

$$\frac{\omega x_0}{v_0} = \frac{\sin \phi_0}{\cos \phi_0} = \operatorname{tg} \phi_0 \qquad \begin{cases} \phi_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega x_0}{v_0}\right) \\ A = \sqrt{(x_0)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \end{cases}$$

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

$$E = \frac{1}{2} A^2 k \qquad \omega^2 = \frac{k}{m} \qquad E = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \cdot m$$

$$\boxed{E = \frac{m}{2} A^2 \omega^2}$$

ω = frequenza $\cdot 2\pi = 2\pi \nu$ (nu)

$$\sin(\omega t) = \sin(2\pi \nu t) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad f = \frac{1}{T} \quad \omega = 2\pi f$$

frequenza = quanti cicli al secondo

$$\boxed{x(t) = A \sin(\omega t + \phi_0)}$$
$$= A \cos\left(\omega t + \phi_0 - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\boxed{x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0')}$$

Ho incorporato $-\frac{\pi}{2}$ nella costante arbitraria

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi_0) = A \sin \omega t \cos \phi_0 + A \cos \omega t \sin \phi_0 =$$

$$\boxed{x(t) = \mathcal{A} \sin \omega t + \mathcal{B} \cos \omega t}$$

ancora 2 costanti arbitrarie

modo equivalente di scrivere l'integrale generale

$$\begin{cases} \mathcal{A} = A \cos \phi_0 \\ \mathcal{B} = A \sin \phi_0 \end{cases}$$

FORZE CHE DIPENDONO DALLA POSIZIONE (1D)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = F[x(t)]$$

caso massa (molla: $F[x(t)] = -k x(t)$

energia cinetica + energia potenziale = energia totale costante

$$U(x) = -\underbrace{\int_a^x F(x')\,dx'}_{\text{lavoro fatto da forza x spostare da } a \to x} = \text{energia potenziale}$$

$$\boxed{K(t) + U(t) = K(0) + U(0)}$$ Teorema CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Forza peso costante

$F(x) = -mg$

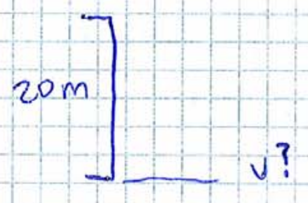
lavoro fatto da forza peso: $\int_a^x F(x')\,dx' = -\int_a^x mg\,dx' = -mg\cdot(x-a)$

energia potenziale $U(x)$: $+mg(x-a) = mgx - \underbrace{mga}_{\text{termine additivo costante}}$

Il termine additivo costante e' irrilevante
perché U compare sia a membro dx che sx dell'equazione della conservazione dell'energia ⇒ lo scelgo nel modo + comodo possibile, in questo caso $a = 0$

$$U(x) = +mgx = -\int_0^x mg\,dx'$$

$$\frac{m}{2}v^2(t) + mgx(t) = \frac{m}{2}v_0^2 + mgx_0$$



$$\frac{m}{2}0^2 + mgh = \frac{m}{2}v^2 + 0$$

$$v = \sqrt{2\left(9{,}81\,\frac{m}{s^2}\right)\cdot 20\,m} = \dots$$

Esercizio

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \text{MEDIA TEMPORALE}$$

Calcolo $\overline{\frac{m}{2}v^2(t)}$, $\overline{\frac{k}{2}x^2(t)}$ (scopro che sono uguali) th. VIRIALE

viene dal calcolo

$$\overline{v^2(t)} = \frac{1}{2}(A\omega_0)^2$$ analisi dimensionale

$$E = \overline{\frac{m}{2}v^2(t)} + \overline{\frac{k}{2}x^2(t)}$$

fotone $\quad E = \frac{h}{2\pi}\omega \quad h = 6{,}63\cdot 10^{-34}\ J\cdot s$

↓

non e' un oscillatore classico)

$$\underbrace{F[x(t)]\cdot\frac{dx}{dt}(t)}_{F\cdot v = \text{POTENZA}} = \frac{d}{dt}\left\{\underbrace{\frac{m}{2}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2}_{E_{CIN}}\right\}$$

$$\frac{m}{2}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2 - \frac{m}{2}\left[\frac{dx(0)}{dt}\right]^2 = \underbrace{\int_{x(0)}^{x(t)} F(x)\,dx}_{\text{LAVORO}}$$ con cambio di variabile $t \to x$

Altre forze posizionali

Attrazione di gravità

$$\boxed{F(x) = -\frac{GMm}{x^2}}$$

forza attrattiva

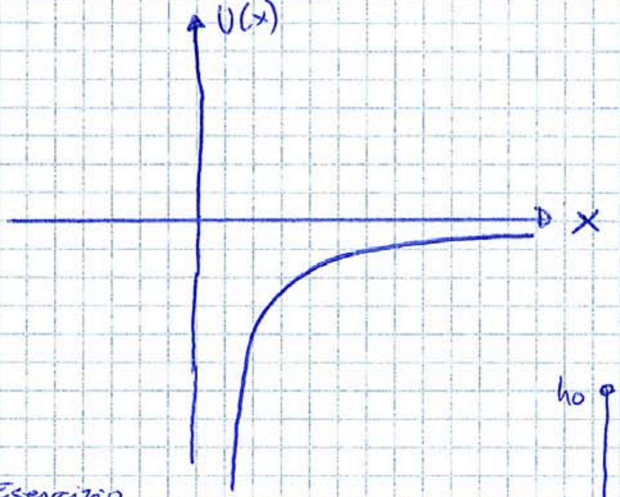
forza proporzionale alle 2 masse, e inversamente prop. al quadrato della distanza

G = costante di gravità (lo stesso x qualsiasi pianeta) Universale

$\cong 6,67 \cdot 10^{-11} \ \frac{m^3}{kg\, s^2}$

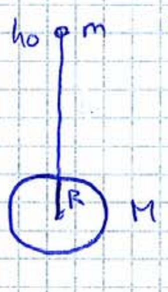
$$U(x) = -\int_a^x -\frac{GMm}{x'^2}\,dx' = \left[-\frac{GMm}{x'}\right]_a^x = -\frac{GMm}{x} + \cancel{\frac{GMm}{a}}$$

se scelgo $a = +\infty$



$$F = -\frac{dU}{dx}$$

$t = 0$ quiete



Esercizio

Calcolare quanta quota deve perdere x raggiungere una data velocità $v = 1000$ km/h

$h_0 = 10.000$ km

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{K} + \underbrace{\left(-\frac{GMm}{R+h}\right)}_{U} = 0 - \frac{GMm}{R+h_0}$$

$$\frac{GMm}{R+h} = \frac{GMm}{R+h_0} + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{R+h}{GMm} = \frac{1}{\frac{GMm}{R+h_0} + \frac{1}{2}mv^2}$$

$$h = \frac{GMm}{\frac{GMm}{R+h_0} + \frac{1}{2}mv^2} - R = \frac{1}{\frac{1}{R+h_0} + \frac{1}{2}\frac{mv^2}{GM\cancel{m}}} - R =$$

$$= \frac{R+h_0}{1 + \frac{(R+h_0)\cancel{m}v^2}{2GM\cancel{m}}} - R = \frac{R+h_0}{1 + \frac{(R+h_0)v^2}{2GM}} - R \qquad \frac{(R+h_0)v^2}{2GM} = \varepsilon$$

introdurre valori numerici

Taylor $\frac{1}{1+\varepsilon} = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 \dots$ trovare formula approssimata al 1° ordine per $\Delta h = h_0 - h$

nel caso della molecola H_2 questa situazione corrisponde alla dissociazione tra H e H

Se sono in x_1, energia minima necessaria x ottenere dissociazione

$$\mathcal{E} = -U_{MIN} = +\frac{b^2}{4a} = \text{energia di dissociazione}$$

$$\mathcal{E}_{H_2} = 0{,}72 \text{ aJ} \qquad (\text{atto} = 10^{-18})$$

$$x_{min} = 74 \text{ pm} \qquad (\text{pico} = 10^{-12})$$

con $x > x_{MIN}$ potenziale attrattivo

con $0 < x < x_{MIN}$ potenziale repulsivo

(se lontani, si attraggono; se troppo vicini, repulsione)

Potenziale attrattivo a lungo raggio, repulsivo a breve raggio

$\left(-\frac{b}{x^6}\right)$ $\qquad$ $\left(\frac{a}{x^{12}}\right)$

Esercizio

Calcolare a, b a partire da E dissociazione $\mathcal{E}$ e dalla distanza di riposo x_{MIN}

$$x_{MIN} = \left(\frac{2a}{b}\right)^{1/6} \qquad \mathcal{E} = -\frac{b^2}{4a}$$

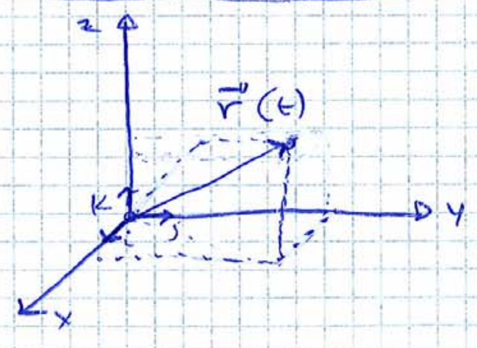
soluzione $\quad U(x) = \mathcal{E}\left[\left(\frac{x_{MIN}}{x}\right)^{12} - 2\left(\frac{x_{min}}{x}\right)^6\right]$

scala naturale di energia è data dall'energia di dissociazione

rapporti adimensionali

scala naturale delle lunghezze è data dalla distanza di riposo x_{MIN}

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA - 3D



$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt} + \vec{k}\frac{dz}{dt}$$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}[\vec{r}(t)] \qquad 2^\circ \text{ legge di Newton in 3D}$$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt} + \vec{k}\frac{dz}{dt}\right)\cdot(\text{stessa cosa}) =$$

$$= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right] = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] =$$

$$= 2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} = 2\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right] = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

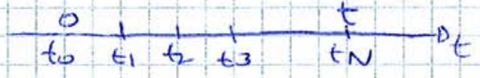
$$\vec{F}[\vec{r}(t)]\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2^\circ \text{ membro})$$

$$V(\vec{r} + \vec{k}\Delta z) - V(\vec{r}) \simeq \vec{F} \cdot \vec{k}\,\Delta z = F_z\, dz$$

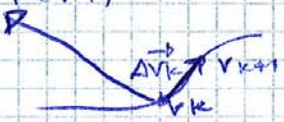
$$\Rightarrow \begin{cases} F_x = \dfrac{dV}{dx} \\ F_y = \dfrac{dV}{dy} \\ F_z = \dfrac{dV}{dz} \end{cases}$$ Specie di generalizzazione 3D della primitiva

$$\frac{dF_x}{dy} = \underbrace{\frac{d^2V}{dy\,dx}}_{} = \underbrace{\frac{d^2V}{dx\,dy}}_{} = \frac{dF_y}{dx}$$ UGUAGLIANZA delle derivate INCROCE

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \simeq \sum_{k=0}^{N-1} \vec{F}(\vec{r}_k) \cdot \Delta\vec{r}_k \qquad \text{dove } \Delta\vec{r}_k = \vec{r}_{k+1} - \vec{r}_k$$



$\vec{F}_k = \vec{F}(\vec{r}_k)$

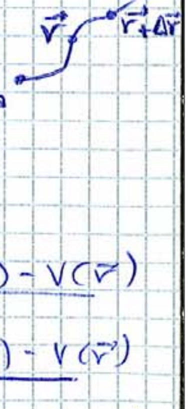


In 1D, si calcola la primitiva della forza, si fa un cambiamento di variabile e si eliminava la dipendenza dell'integrale dalla traiettoria ⇒ non cambia il risultato se cambiava il percorso. In 3D! NON È DETTO CHE SIA COSÌ
Quando esiste $V(\vec{r}) = \int_{\vec{a}}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ e non dipende dal cammino che faccio per andare da $\vec{a}$ a $\vec{r}$, dico che il campo di forze è CONSERVATIVO

POTENZIALE $= V(\vec{r}) \simeq \sum_{k=0}^{N-1} \vec{F}_k \cdot \Delta\vec{r}_k$ → lo posso sempre definire ma in generale dipende sempre dalla scelta del cammino

Questa V è una specie di primitiva di $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x,y,z) =$
$= F_x(x,y,z)\vec{i} + F_y(x,y,z)\vec{j} + F_z(x,y,z)\vec{k}$
Derivando $V(\vec{r})$, ritrovo $\vec{F}(\vec{r})$?

$$V(\vec{r} + \Delta\vec{r}_N) - V(\vec{r}) \simeq \sum_{k=0}^{N} \vec{F}_k \Delta\vec{r}_k - \sum_{k=0}^{N-1} \vec{F}_k \cdot \Delta\vec{r}_k$$



$\simeq \vec{F}_N \cdot \Delta\vec{r}_N$

$$V(\vec{r} + \Delta\vec{r}_N) - V(\vec{r}) = \vec{F}_N \cdot \Delta\vec{r}_N$$

Adesso scegliamo $\Delta\vec{r}_N = \vec{i}\,\Delta x, \vec{j}\,\Delta y, \vec{k}\,\Delta z$

$$V(\vec{r} + \vec{i}\Delta x) - V(\vec{r}) = F_x \cdot \Delta x$$
$$V(\vec{r} + \vec{j}\Delta x) - V(\vec{r}) = F_y\, \Delta y \quad \Rightarrow$$
$$V(\vec{r} + \vec{k}\Delta x) - V(\vec{r}) = F_z\, \Delta z$$

$$F_x \simeq \frac{V(\vec{r} + \vec{i}\Delta x) - V(\vec{r})}{\Delta x}$$
$$F_y \simeq \frac{V(\vec{r} + \vec{j}\Delta y) - V(\vec{r})}{\Delta y}$$
$$F_z \simeq \frac{V(\vec{r} + \vec{k}\Delta z) - V(\vec{r})}{\Delta z}$$

$$\Rightarrow F_x^{(x,y,z)} = \frac{\partial V}{\partial x}(x,y,z)$$
$$F_y^{(x,y,z)} = \frac{\partial V}{\partial y}(x,y,z)$$
$$F_z^{(x,y,z)} = \frac{\partial V}{\partial z}(x,y,z)$$

$\vec F(\vec r) = \vec k \times \vec r = \vec k \times (\vec i x + \vec j y + \vec k z) =$

$= x\vec j - y\vec i + 0 \quad \rightarrow \quad F_x = -y$

$F_y = x$

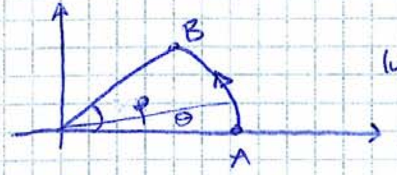
$F_z = 0$

$$\begin{cases} \vec i \times \vec j = \vec k \\ \vec j \times \vec k = \vec i \\ \vec k \times \vec i = \vec j \end{cases}$$

$\vec a \times \vec b = -\vec b \times \vec a$

$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} = 1 \qquad -1 \neq 1$

La forza non soddisfa la condizione di irrotazionalità $\vec\nabla \times \vec F = 0$



lunghezza arco = φR

$L_{AB} = \int_A^B \vec F \cdot d\vec r = \int_A^B (\vec k \times \vec r)\, d\vec r$

$\vec r = \vec i R\cos\theta + \vec j R\sin\theta$

$d\vec r = -\vec i R\sin\theta\, d\theta + \vec j R\cos\theta\, d\theta$

$\vec k \times \vec r = \vec k \times (\vec i R\cos\theta + \vec j R\sin\theta) = \vec j R\cos\theta - \vec i \sin\theta R$

$(\vec k \times \vec r)\cdot d\vec r = (\vec j R\cos\theta - \vec i R\sin\theta)\cdot(-\vec i R\sin\theta + \vec j R\cos\theta)\, d\theta =$

$= (R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta)\, d\theta = R^2\, d\theta$

$L_{AB} = \int_A^B (\vec k \times \vec r)\cdot d\vec r = \int_A^B R^2\, d\theta = R^2\varphi$

Ho trovato un lavoro che dipende dall'angolo φ, cioè non è conservativo, perché se $\varphi = 360°$, il lavoro dovrebbe essere 0 mentre invece è $R^2\varphi$.

Allora potremmo pensare che tutte le volte che $\vec\nabla \times \vec F = 0$, allora L_{AB} non dipende dal cammino e la forza è conservativa.

In realtà c'è un'altra cosa che potrebbe andare storto: se esiste qualche punto $\vec r$ dove $\vec F$ non è definita

TH: Se $\vec\nabla \times \vec F = 0$ e non ci sono punti dove $\vec F$ non è def. allora L_{AB} non dipende dal cammino e quindi posso definire un'energia potenziale in modo che sia $\vec F = -\vec\nabla U$

Es. $\boxed{F(\vec r) = \vec k \times \frac{\vec r}{r^2}}$ Questa non è definita in $r = 0$
→ irrotazionale ma non conservativa (per il dominio)

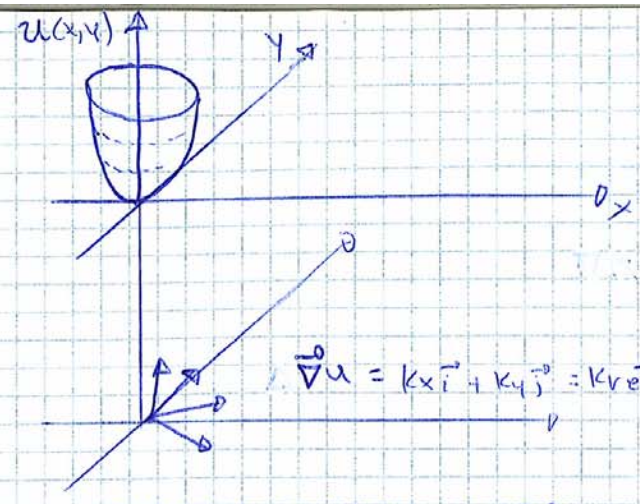
1) Verificare che, dove è definita, $\vec\nabla \times \vec F = 0$

2) Verificare che $L_{AB} = R\varphi$

ESEMPIO: FORZA POSIZIONALE CONSERVATIVA

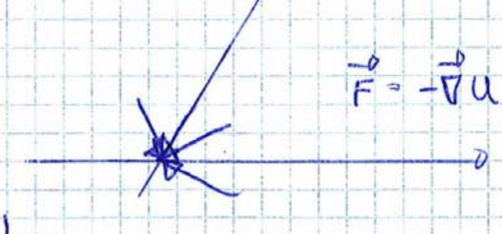
SISTEMA MASSA-MOLLA IN 2D (o 3D)

$\vec F = -K\vec r \qquad U = ?$



PARABOLOIDE DI ROTAZIONE

$\vec{\nabla} U = kx\vec{i} + ky\vec{j} = kr\vec{e_r}$

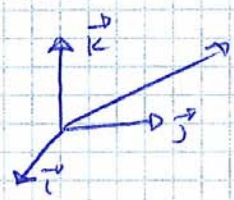


$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -k\vec{r}$

FORZA COSTANTE IN 3D

$\downarrow g$

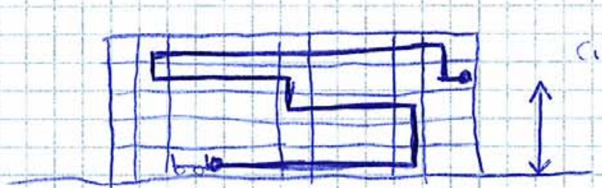
$\vec{F} = -mg\vec{k}$



$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + \vec{k}z$

$$U(\vec{r}) = -\int_0^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_0^{\vec{r}} (-mg\vec{k})\cdot(\vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz) =$$

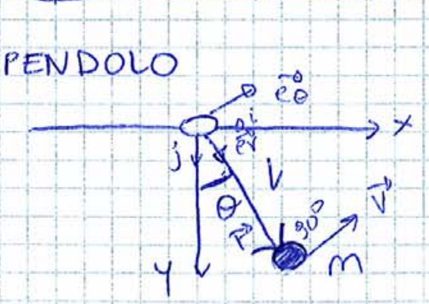
$$= \int_0^{\vec{r}} mg\, dz = mgz$$



Ciascun piano è equipotenziale

conta solo la direzione verticale iniziale e finale

PENDOLO



$$\vec{r} = l\cos\theta\,\vec{j} + l\sin\theta\,\vec{i} = \rho\vec{e_r}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -l\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{i} + l\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{j} =$$

$$= l\vec{e_\theta}\, d\theta / dt$$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$K = \frac{m}{2}v^2 = \frac{ml^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

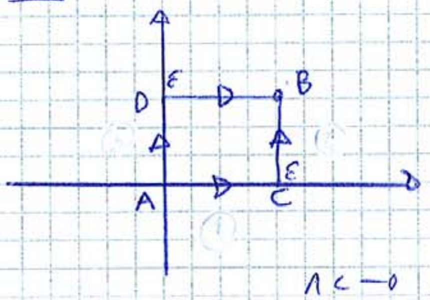
$$U = -mg\underbrace{l\cos\theta}_{h}$$

$*_2$ $\boxed{\frac{ml^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - mgl\cos\theta = E}$ CONSERVAZIONE ENERGIA

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{ml^2}\left[E + mgl\cos\theta\right]}$$

$$*_1 = \int_0^T \frac{d\theta}{\sqrt{\cdots\cdots}} = \pm\int_0^T dt = \pm T$$

EX.



AC: $\begin{cases} 0 < x < \varepsilon \\ y = 0 \end{cases}$ CB: $\begin{cases} x = \varepsilon \\ 0 < y < \varepsilon \end{cases}$

AD: $\begin{cases} 0 < y < \varepsilon \\ x = 0 \end{cases}$ DB: $\begin{cases} y = \varepsilon \\ 0 < x < \varepsilon \end{cases}$

AC $\rightarrow$ $dy = 0$ CB $\rightarrow$ $dx = 0$

$\vec{F}(x,y)$ campo di forze qualsiasi

Per semplicità $\vec{F}(0,0) = 0$. Faccio uno sviluppo di Taylor (McLaurin) di $\vec{F}$ nell'intorno di O (1° ordine)

$$F_x(x,y) = 0 + \frac{\partial F_x}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial F_x}{\partial y} \cdot y + \dots$$

$$F_y(x,y) = 0 + \frac{\partial F_y}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial F_y}{\partial y} \cdot y + \dots$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x}(0,0)$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy = F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy$$

$$L_{ACB} = \int_A^C [F_x(x,y)dx + \cancel{F_y(x,y)dy}] + \int_C^B [\cancel{F_x(x,y)dx} + F_y(x,y)dy] =$$

$$= \int_{0\,AC}^{\varepsilon} \left[\frac{\partial F_x}{\partial x} x + 0\right] dx + \int_{0\,CB}^{\varepsilon} \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} \varepsilon + \frac{\partial F_y}{\partial y} y\right] dy =$$

COSTANTI

$$L_{ACB} \stackrel{\wedge}{=} \frac{\partial F_x}{\partial x} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x}\right)\varepsilon^2 + \frac{\partial F_y}{\partial y}\frac{\varepsilon^2}{2}$$

1° ordine di approssimazione ($\varepsilon << 1$)

unica cosa che cambia

$$L_{ADB} = \text{da solo} = \frac{\partial F_x}{\partial x} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\partial F_x}{\partial y}\varepsilon^2 + \frac{\partial F_y}{\partial y}\frac{\varepsilon^2}{2}$$

se $\frac{\partial F_y}{\partial x} \neq \frac{\partial F_x}{\partial y}$ $\rightarrow$ $L_{ACB} \neq L_{ADB}$

CAMPI CONSERVATIVI

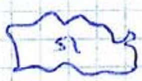
Un campo di forze si dice conservativo o che ammette un potenziale se esiste una funzione tale che $\vec{F} = \nabla V(\vec{r})$

$V(\vec{r})$

$V(\vec{r}) = \int_{\vec{s}}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$, non dipende dal cammino che porta da $\vec{s}$ a $\vec{r}$ ma solo dai punti di partenza e arrivo; inoltre il rotore di F è 0 ($\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$)

VICEVERSA:

th: se $\vec{F}(x,y,z)$ è continuo con derivate continue su un dominio senza* buchi e inoltre $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ allora ammette un potenziale.



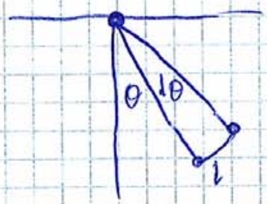
* connesso e semplicemente connesso

$\vec{e_r} = \vec{j}\cos\theta + \vec{i}\sin\theta$

$\vec{e_\theta} = -\vec{j}\sin\theta + \vec{i}\cos\theta$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = l \frac{d\theta}{dt} \vec{e_\theta}$

velocità angolare (ω)



$ds = l\,d\theta$ $\qquad v = \frac{ds}{dt} = l\frac{d\theta}{dt}$

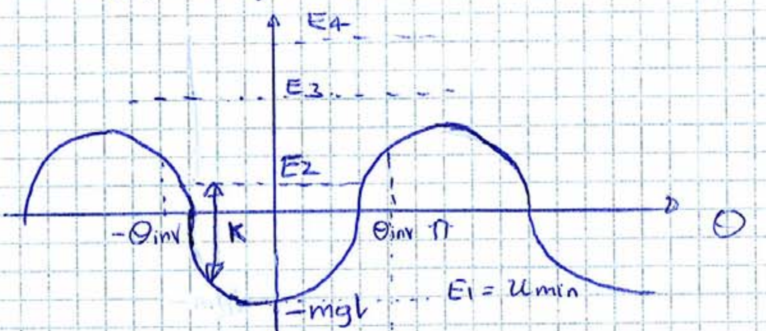
si tratta di formule di cinematica

$[v] = [l] \cdot \left[\frac{1}{t}\right]$

$\frac{m}{2}\left(l\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - mgl\cos\theta = E$ $\qquad$ perché $-$? Cerca risposta

$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2}{ml^2}[E + mgl\cos\theta]}$ $\qquad$ eq. differenziale 1° ordine non lineare a variabili separabili

$U(\theta) = -mgl\cos\theta$



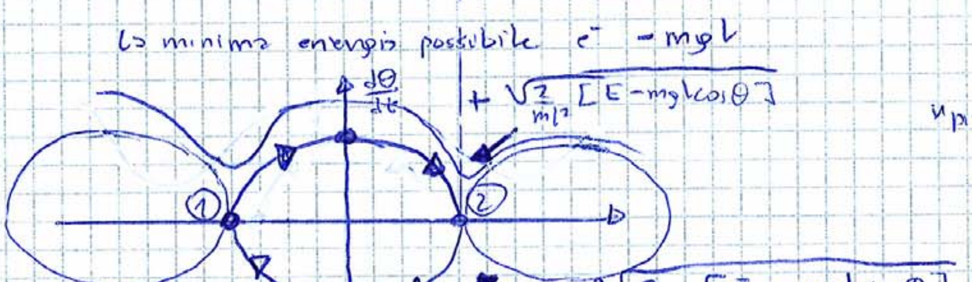
$K + U = E$

$U = E - K \leq E$

$K \geq 0$

θ_{inv} = angolo in cui si inverte il segno

la minima energia possibile è $-mgl$



"piano delle fasi" = piano posizione - velocità

① ②: punti di equilibrio: U ha minimo o massimo $\quad \frac{dU}{d\theta}(\theta) = 0$

$\vec{F} = -\nabla U$

equilibri stabili: minimi di U $\qquad$ equilibri instabili punti di massimo

se do energia E3 o E4, che è maggiore del massimo il pendolo fa angoli giri all'infinito (se non c'è attrito)

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta_0}{2} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \, d\varphi}_{\pi/4}$$

quando $\theta_0 << 1$ $\quad \sin\theta_0 \simeq \theta_0$

$$\simeq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^2 \frac{\pi}{4} + O(\theta_0^4) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \dots\right]$$

PERIODO DELLE OSCILLAZIONI non dipende da ampiezza dell'angolo se ampiezza è piccola

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA:

$$\frac{m}{2}\left(l\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - mgl\cos\theta = E$$ eq. diff. 1° ordine

$$\frac{d}{dt}\Big(\quad \frac{\cancel{m}}{\cancel{2}}\, \cancel{2}\, \cancel{l} \cancel{\frac{d\theta}{dt}}\, l \frac{d^2\theta}{dt^2} + \cancel{m}g\cancel{l}\sin\theta \cancel{\frac{d\theta}{dt}} = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}(t) = -\frac{g}{l}\sin\theta(t)$$ eq. diff. 2° ordine non lineare

$$\sin\varepsilon = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{6} + \dots$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\left[\theta(t) - \frac{\theta^3(t)}{6} + \dots\right]$$

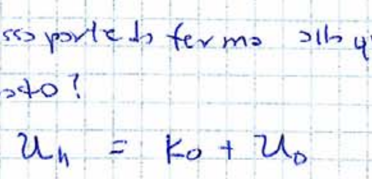
Quando $|\theta| << 1$, posso trascurare i termini non lineari e studiare le oscillazioni usando l'EQUAZIONE LINEARIZZATA

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta(t)}$$ EQUAZIONE LINEARIZZATA delle PICCOLE OSCILLAZIONI del pendolo

$$\theta(t) = \theta_0\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \varphi_0\right)$$ soluzione globale

REAZIONE VINCOLARE

VINCOLO LISCIO O IDEALE se ha sempre solo componente normale alla superficie di vincolo



$\vec N \perp$ superficie di vincolo

Se il vincolo è liscio la reazione vincolare $\vec N$ non fa lavoro per uno spostamento tangente alla superficie di vincolo

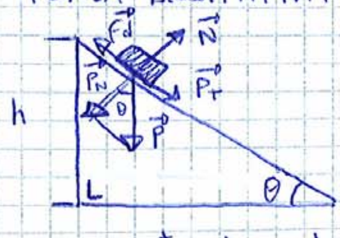
Quindi posso applicare il teorema dell'energia

Es la massa parte da fermo alla quota h, quale è la sua velocità alla fine del piano inclinato?

$$K_h + U_h = K_0 + U_0$$

$$0 + mgh = \frac{m}{2}v_f^2 + 0$$ $\quad v_f = \sqrt{2gh}$ stessa velocità se fosse caduto a picco da h

FORZA DISSIPATIVA $\rightarrow$ non posso definire un'ENERGIA POTENZIALE



$$\vec{N} = \vec{P_N}$$

massa parte da quota h da ferma. V_f? alla quota 0

Posso usare ancora $\frac{m}{2} V_f^2 - 0 = \int_0^{t_f} \vec{F}\, d\vec{r} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lavoro della} \\ \text{forza peso}}}{mgh} - \mu_d N \cdot l$

$h = l \sin\theta \qquad l = \frac{h}{\sin\theta}$

$\vec{N} = mg\cos\theta$

$\frac{m}{2} V_f^2 = mgh - \mu_d \frac{mgh\cos\theta}{\sin\theta} = mgh\left(1 - \frac{\mu_d}{tg\theta}\right)$ stessa Ecin finale diminuita di un fattore $\frac{\mu_d}{tg\theta}$

$mgh\left(1 - \frac{\mu_d}{tg\theta}\right) \geq 0$

θ non può essere troppo piccolo se no è parentesi negativa

$V_f = \sqrt{2gh\left(1 - \frac{\mu_d}{tg\theta}\right)}$

con Velocità iniziale V_0 $\qquad V_f = \sqrt{2gh\left(1 - \frac{\mu_d}{tg\theta}\right) + V_0^2}$

c'è un'oscillazione critica per cui parentesi $= 0$, in questo caso $V_f = V_0$, moto uniforme. si tratta di un angolo critico dinamico $\theta_{c,d}$ per cui

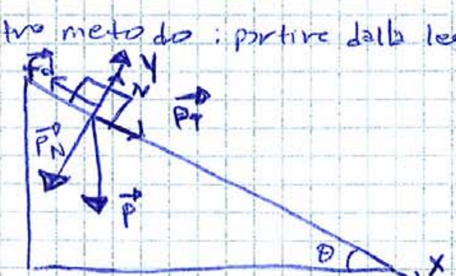
$\mu_d = tg\theta_{c,d}$ e quindi $V_f = V_0$ e massa scende con velocità costante

Questa formula suggerisce un metodo sperimentale per determinare μ_d.

Ho risolto l'esercizio usando il teorema dell'energia.

Altro metodo: partire dalla legge di Newton

diagramma di corpo libero



$\vec{P_T} = mg\sin\theta$

$\vec{P_N} = mg\cos\theta$

Il teorema dell'energia ci dà una relazione scalare, l'eq. di Newton è una relazione vettoriale:

- proiettiamo eq. di Newton su direzioni opportune (adatte al problema)

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{f_d}$$

$$\begin{cases} x: & m\frac{d^2x}{dt^2} = \vec{P_T} - f_d = mg\sin\theta - \mu_d N \\ y: & 0 = \vec{N} - mg\cos\theta \end{cases} \qquad \vec{N} = mg\cos\theta$$

ATTRITO STATICO	ATTRITO DINAMICO
$f_s \leq \mu_s \cdot N$	$f_d = \mu_d N$

Di solito $\mu_s < 1$, ovvero non vado oltre i 45°

μ_s cresce con l'inclinazione dell'angolo, fino a quando raggiunge un max, poi decresce un po' fino a stabilizzarsi su μ_d

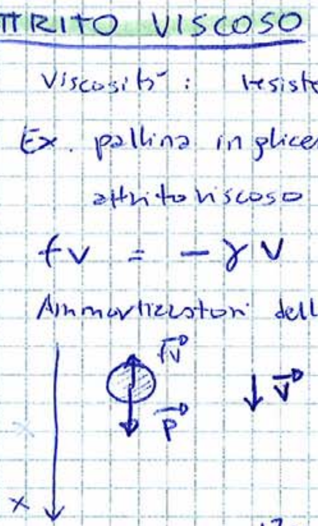
ATTRITO VISCOSO

Viscosità: resistenza che un fluido oppone al movimento di un corpo nel fluido

Ex. pallina in glicerina, subito accelerazione di gravità, poi velocità costante x attrito viscoso

$f_V = -\gamma V$ (proporzionale alla velocità e al suo modulo)

Ammortizzatori delle auto si basano su attrito viscoso



$$\vec{f_V} = -\gamma \vec{V}$$

moto in 1D (direzione verticale)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - \gamma \frac{dx}{dt}$$ eq. di Newton x pallina in glicerina

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt}$$ eq. differenziale del 2° ordine che contiene anche derivata prima della f incognita $x(t)$, mentre non contiene esplicitamente $x(t)$

Scegliamo $V(t) = \frac{dx}{dt}$ come nuova fx incognita:

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{\gamma}{m} v(t)$$ eq. diff. del 1° ordine non omogenea lineare

(g ← TERMINE FORZANTE)

1° metodo

stato stazionario (moto uniforme)

$$0 = g - \frac{\gamma}{m} \cdot V_\infty$$ (cioè velocità limite per (l'infinito))

$$\boxed{V_\infty = \frac{mg}{\gamma}}$$

Cambio variabili: $V(t) = V_\infty + u(t)$

$u(t) = V(t) - V_\infty$

(1) $\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{\gamma}{m} v(t)$ EQ. NON OMOGENEA

$\frac{dV_\infty}{dt} = 0 = g - \frac{\gamma}{m} V_\infty$ (2) EQ. STATO STAZIONARIO

$$\frac{d}{dt}[v(t) - V_\infty] = -\frac{\gamma}{m}[v(t) - V_\infty]$$

(3) $\frac{du}{dt}(t) = -\frac{\gamma}{m} u(t)$ EQ. OMOGENEA ASSOCIATA (è stato tolto il termine forzante)

RISOLVO SUBITO: $u(t) = u(0) \cdot e^{-\frac{\gamma}{m}t}$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - \gamma\frac{dx}{dt}$$ FISICA NEWTONIANA (forza prop. a accelerazione)

Nel limite di fluido molto viscoso diventa $\gamma\frac{dx}{dt} \simeq mg$ perché $a \simeq 0$

↑ FISICA ARISTOTELICA (velocità prop. alla forza, in ambito viscoso; per esempio automobile: schiaccio acceleratore, è la velocità che aumenta)

RESISTENZA VISCOSA

moto delle particelle di fluido

Flusso LAMINARE che si ha in fluidi molto viscosi e a basse velocità

$F_V = \gamma v$ (nel caso del precedente non vale, perché non ci sono le condizioni)

FLUSSO TURBOLENTO

che si ha a velocità + grandi e viscosità più bassa

$f_t \sim v^2$

Si parla di RESISTENZA AERODINAMICA

Esercizio

RESISTENZA AERODINAMICA

$$f_t = -Kv^2$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - K\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$v = \frac{dx}{dt} \to \frac{dv}{dt} = g - \frac{K}{m}v^2$ legge del moto?

→ NON LINEARE

non funziona il trucco $v = v_\infty + \mu$

velocità limite $v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{K}}$

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{K}{mg}v^2\right)$$

$$\frac{dv}{1-\frac{K}{mg}v^2} = g\,dt$$

soluzione: per $|v_0| < |v_\infty|$ $v(t) = v_\infty \tanh\left(\frac{t-t^*}{2\tau}\right)$

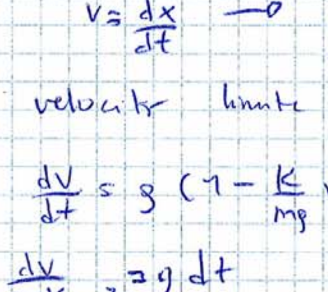
2 modi:

- ricordando d/dx arctangh $x = 1/(1-x^2)$
- usando fratti semplici

$x(t) = x_0 + \tau v_\infty \log\left(\frac{t-t^*}{2\tau}\right)$

LABORATORIO

MOTO VARIO



$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{T}_f + \vec{F} = m(\vec{a}_t + \vec{a}_n)$$

$$-\cancel{m}g\sin\theta = \cancel{m}\cdot a_t \qquad (t)$$

$$a_t = L\frac{d^2\theta}{dt^2} = L\alpha$$

$$\Rightarrow \cancel{L}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

con θ piccolo $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$

$F_{el} = -Kx$

$F_V = -\gamma V$

$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma \frac{dx}{dt} - Kx$ eq. di Newton

termine proporzionale alla velocità

$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt} - \frac{K}{m}x(t)$

$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{K}{m}x(t) = 0$ eq. omogenea descrive oscillazioni libere

Conviene usare variabili complesse

Nel caso senza smorzamento

$\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2 x$ $\quad w^2 = \frac{K}{m}$

estendiamo l'equazione al caso complesso

$\frac{d^2z}{dt^2} = -w^2 z$ eq. lineare omogenea

$\frac{d^2\bar{z}}{dt^2} = -w^2 \cdot \bar{z}$

Sommo membro a membro

$$\frac{d^2}{dt^2}\underbrace{\frac{(z+\bar{z})}{2}}_{Re\, z} = -w^2 \underbrace{\frac{(z+\bar{z})}{2}}_{Re\, z}$$

$x = Re\, z$

$\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2 x$

Basta prendere la parte reale ad ambo i membri e ritrovo l'equazione "reale"

1° trucco: passare a variabili complesse

2° trucco:

$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$

$\frac{d^2}{dt^2} e^{\lambda t} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

Diciamo che $e^{\lambda t}$ è AUTOFUNZIONE dell'operatore di derivazione d/dt con AUTOVALORE λ

Per risolvere $\frac{d^2z}{dt^2} = -w^2 z$

Cerco la soluzione nella forma $z(t) = e^{\lambda t}$ con λ da determinare

$\lambda^2 e^{\lambda t} = -w^2 e^{\lambda t}$

$\lambda^2 = -w^2$ eq. algebrica di 2° grado per gli autovalori λ

$\boxed{\lambda = \pm i w}$

$z_\pm(t) = e^{\pm i wt}$ sono le due autofunzioni

$$\lambda = -\frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2}$$

1) argomento negativo $\quad \frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2 < 0 \quad , \quad \omega_0^2 > \frac{1}{\tau^2}$

PICCOLO COEFFICIENTE DI SMORZAMENTO $\quad \frac{k}{m} > \frac{\gamma^2}{4m^2}$

$$\gamma < 2\sqrt{km}$$

$$\sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2} = \sqrt{-\left(\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}\right)} = i \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}}_{\omega}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}} < \omega_0 \quad , \quad \lambda = -\frac{1}{\tau} \pm i\omega$$

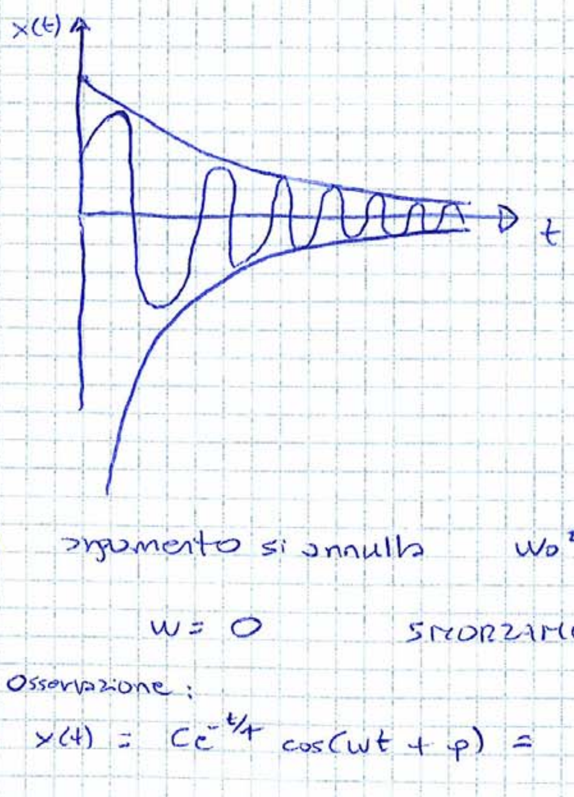
$$z_\pm(t) = e^{\left(-\frac{1}{\tau} \pm i\omega\right)t} = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot e^{\pm i\omega t}$$

$$z(t) + \overline{z(t)} = \mathcal{C}\, e^{-t/\tau} e^{\pm i\omega t} + c.c.$$

$$\mathcal{C} = c \cdot e^{i\varphi}$$

$$\frac{z(t) + \overline{z(t)}}{2} = \frac{c \cdot e^{-t/\tau} e^{i(\omega t + \varphi)} + c.c.}{2}$$

$$\boxed{x(t) = c\, e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi)}$$ integrale generale del sistema smorzato (libero)



SMORZAMENTO DEBOLE

2) argomento si annulla $\quad \omega_0^2 = \frac{1}{\tau^2} \quad , \quad \gamma = 2\sqrt{mk}$

$\omega = 0 \qquad$ SMORZAMENTO CRITICO (oscillazioni scompaiono)

Osservazione:

$$x(t) = Ce^{-t/\tau}\cos(\omega t + \varphi) = e^{-t/\tau}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

due funzioni indipendenti

$\lim_{\omega \to 0} \cos\omega t = 1$

$\lim_{\omega \to 0} \sin\omega t = 0 \qquad$ "perdo una soluzione" quando $\omega \to 0$

Dove è finita la soluzione mancante?

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{k}{m} z + \frac{\mathcal{F}}{m} \cdot e^{i\Omega t}$$

Provo a cercare una particolare soluzione $z(t)$ di questa equazione forzata (= non omogenea) nella forma $z(t) = A e^{i\Omega t}$

A differenza del problema omogeneo risolto prima, ora vedremo che c'è un solo A possibile:

$$-\Omega^2 A e^{i\Omega t} = -\omega^2 A e^{i\Omega t} + \frac{\mathcal{F}}{m} e^{i\Omega t}$$

sostituendo nell'equazione ho trovato un'equazione non omogenea per A:

$$(\omega^2 - \Omega^2) A = \frac{\mathcal{F}}{m}$$

$$A = \frac{\mathcal{F}/m}{\omega^2 - \Omega^2}$$

quindi

$$z(t) = \frac{\mathcal{F}/m}{\omega^2 - \Omega^2} e^{i\Omega t} =$$

$$= \frac{F_0 e^{i\varphi}/m}{\omega^2 - \Omega^2} e^{i\Omega t}$$

e passando a prendere Re:

$$\boxed{\underset{\text{particolare}}{x(t)} = \frac{F_0}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t + \varphi)}$$

però non è integrale generale

trucco:

$$m \frac{d^2 x_{particolare}(t)}{dt^2} = -K x_{part}(t) + F_0 \cos(\Omega t + \varphi_f)$$ EQ. NON OMOGENEA

$$m \frac{d^2 x_{omo}(t)}{dt^2} = -K x_{omogenea}(t) + 0$$ EQ. OMOGENEA ASSOCIATA

$$m \frac{d^2}{dt^2} \underbrace{[x_{omo}(t) + x_{part}(t)]} = -K \underbrace{[x_{omog}(t) + x_{part}(t)]} + F_0 \cos(\Omega t + \varphi_f)$$

(soluzione particolare equazione forzata) + (integrale generale eq. libera)
= (integrale generale equazione forzata)

RISONANZA

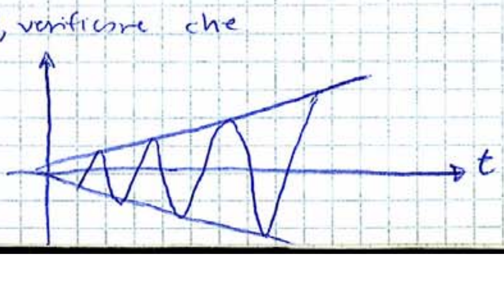
$$x(t) = x_{omo}(t) + x_{part}(t) = \underbrace{A \cos(\omega t + \varphi)}_{\text{oscillazioni proprie del sistema indotte dalle condizioni iniziali}} + \underbrace{\frac{F_0/m}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t + \varphi_f)}_{\text{oscillazioni indotte dalla forzante}}$$

$\omega^2 \neq \Omega^2$

Quando è esattamente $\Omega = \omega$, verificare che

$$x_{part}(t) = A \cdot t \cdot e^{i\omega t}$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + \frac{F_0}{m\omega} t \sin(\omega t + \varphi_f)$$



$$\omega_0^2 - \Omega^2 + \frac{2i\Omega}{\tau} = \sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + 4\left(\frac{\Omega}{\tau}\right)^2} \cdot e^{i\Delta\varphi}$$

$a = |a| e^{i\Delta\varphi}$

$$\Delta\varphi = \arctan \frac{2\Omega/\tau}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Quindi nell'insieme:

$$A = \frac{F_0 e^{i\varphi_f}/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + \frac{4\Omega^2}{\tau^2}}} e^{-i\Delta\varphi}$$

$$z_{part} = A e^{i\Omega t}$$

Il sistema smorzato risponde con ritardo

Passando alla parte reale: $x_{part}(t) = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + \frac{4\Omega^2}{\tau^2}}} \cos(\Omega t + \varphi_f - \Delta\varphi)$

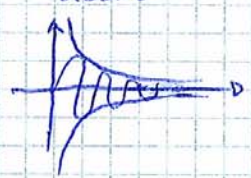
impedisce al denominatore di diventare ∞

La soluzione generale:

$$x(t) = \underbrace{A e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi)}_{\text{OSCILLAZIONI SMORZATE LIBERE}} + \underbrace{\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + \frac{4\Omega^2}{\tau^2}}} \cos(\Omega t + \varphi - \Delta\varphi)}_{\text{oscillazioni indotte dalla forzante}}$$

COSTANTI ARBITRARIE

STATO STAZIONARIO



indotte da condizioni iniziali fuori dall'eq.

TRANSITORIO O TRANSIENTE

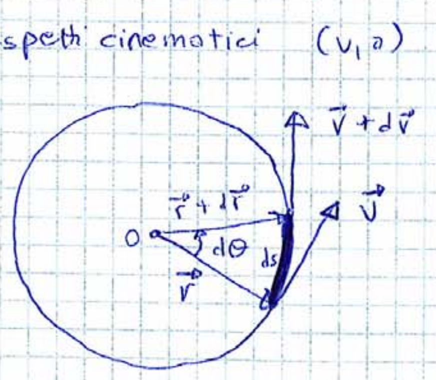
ESERCIZIO

Determinare A, φ in funzione di $x(0) = x_0$

$v(0) = v_0$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

aspetti cinematici (v, a)



modulo di $\vec{v}$ costante, cambia direzione

$r = const$ $\qquad \vec{r} \neq const$

$V = const$ $\qquad \vec{v} \neq const$

$\Downarrow$

moto accelerato

$$ds = |d\vec{r}| = r \cdot d\theta = v \cdot dt \Rightarrow v = \frac{ds}{dt}$$

confronto con espressione vettoriale $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

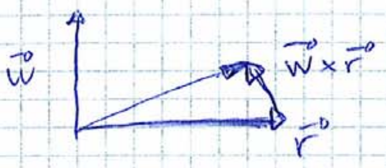
$$v = r \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$\frac{d\theta}{dt} \to$ velocità angolare (ω) $\frac{rad}{s}$

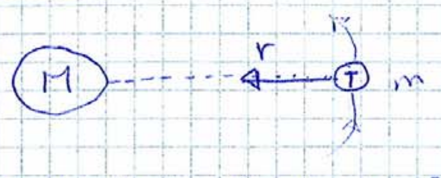
$\vec{a} \perp \vec{v}$ $\qquad \vec{a} = -\omega^2 r \cdot \vec{e_r}$ verso il centro, ACCELERAZIONE CENTRIPETA

$$\boxed{\vec{a} = \omega^2 r \cdot \underbrace{\vec{k} \times \vec{e_\theta}}_{-\vec{e_r}}} = (\omega \vec{k}) \times (\omega r \vec{e_\theta}) = \boxed{\vec{\omega} \times \vec{v}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} v = \omega r & \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \\ a = \omega^2 r & \vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} \end{array}}$$



ORBITE CIRCOLARI (esempio satelliti)



$a_c = \omega^2 r$

periodo dell'orbita circolare?

Accelerazione centripeta che serve per tenere il satellite sull'orbita, alla quale deve corrispondere una forza centripeta

$$F_c = m \cdot a_c = m\omega^2 r = \frac{GMm}{r^2}$$

la forza centripeta deve essere fornita dall'attrazione gravitazionale

$$\omega^2 = \frac{GM}{r^3} \qquad \omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2} \qquad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \frac{2\pi}{T} = \frac{\sqrt{GM}}{r^{3/2}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} r^{3/2}} \qquad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \quad (3^\circ \text{ legge di Keplero})$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} r^{3/2}$$

A che altezza porto il satellite perché stia in stato geostazionario?
Cioè sempre sopra lo stesso punto

$$r = \left(\frac{\sqrt{GM}}{2\pi} \cdot T\right)^{2/3} = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = \left[\frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\, m^3\, kg^{-1}\, s^{-2})(5{,}97 \cdot 10^{24}\, kg)}{4\pi^2} \cdot 24\,h \cdot 3600\, s/h\right.$$

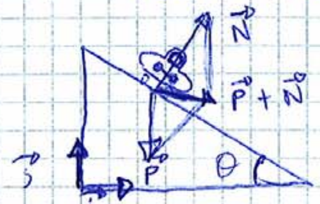
$= 42.000$ Km distanza da Terra di satellite geostazionario

$= 6400$ Km (raggio) $+ 3600$ Km

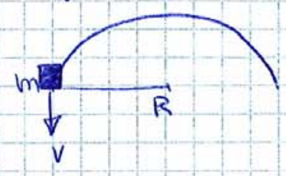
Periodo di rotazione della terra non è proprio 24 h (x via del moto di rivoluzione)

GIORNO SIDERALE 23,9 h

CURVA SOPRAELEVATA



$$a = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$$



angolo di inclinazione ottimale per percorrere la curva con velocità v ?

(caso in cui attrito trascurabile)

la situazione ottimale si realizza quando $\vec P + \vec N = \vec F_{c.p.}$ dove $\vec F_{c.p.}$ è esattamente la forza centripeta necessaria per tenere macchina sulla sua traiettoria circolare (cioè forza centripeta parallela a $\vec i$)

$$m\frac{v^2}{R}\,\vec i = -mg\,\vec j + \vec N$$

$$\vec N = N\cdot(\vec i\sin\theta + \vec j\cos\theta)$$

$$-mg\,\vec j + N(\vec i\sin\theta + \vec j\cos\theta) = \frac{mv^2}{R}\,\vec i$$

$(\vec i)$ $\quad N\sin\theta = \frac{mv^2}{R}$ (1) $\quad\rightarrow\quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,mg = \frac{mv^2}{R}$

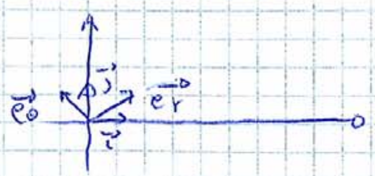
$(\vec j)$ $\quad -mg + N\cos\theta = 0$ (2) $\quad\rightarrow\quad N = \frac{mg}{\cos\theta}$

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{v^2}{R\cdot g}$$

$v: 60\,km/h \qquad g = 9{,}81\,m/s^2 \qquad R = 100\,m$

caso più generale: MOTO PIANO GENERICO (cinematica)

coordinate polari



$$\vec e_r = \vec i\cos\theta + \vec j\sin\theta$$

$$\vec e_\theta = -\vec i\sin\theta + \vec j\cos\theta$$

$$\frac{d\vec e_r}{d\theta} = \vec e_\theta \quad / \quad \frac{d\vec e_\theta}{d\theta} = -\vec e_r$$

se θ varia nel tempo

$$\frac{d\vec e_r}{dt} = \frac{d}{dt}\vec e_r[\theta(t)] = \frac{d\vec e_r}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \vec e_\theta\cdot\omega$$

$$\frac{d\vec e_\theta}{dt} = -\omega\,\vec e_r$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta}$$

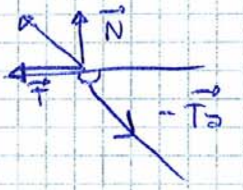
non compare la reazione vincolare incognita perché ho proiettato nella direzione tangenziale al vincolo liscio.

2. Proietto nella direzione normale $\vec{e_r}$

$F_r = m a_r$

$mg\cos\theta - T_a = -l\,\omega^2 \cdot m$

$T_a = mg\cos\theta + l\,\omega^2 m$



$N = T_a \cdot \cos\theta$

$T = T_a \sin\theta$

$N = mg\cos^2\theta + ml\omega^2\cos\theta$

$T = mg\cos\theta\sin\theta + ml\omega^2\sin\theta$

Nell'approssimazione di piccole oscillazioni

$\theta = \theta(t) = A\cos(\Omega t + \varphi_0)$

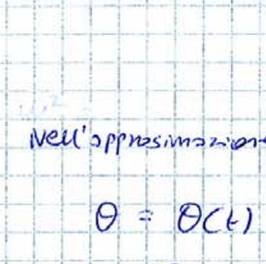
$\omega = \frac{d\theta}{dt} = -\Omega A\sin(\Omega t + \varphi_0)$

$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

In generale sia $\vec{u}$ un qualsiasi vettore unitario $\vec{u}(t)$

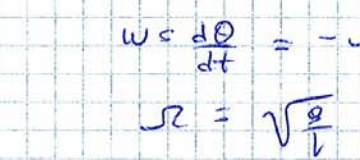
$\vec{u}\cdot\vec{u} = 1 \qquad d\vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot d\vec{u} = 0$ (perché ????)

$\Rightarrow \vec{u}\cdot d\vec{u} = 0 \longrightarrow d\vec{u} \perp \vec{u}$, si capisce intuitivamente, perché se siamo nel caso di una sfera, se vogliamo variare $\vec{u}$, possiamo solo variare direzione



piano individuato da $\vec{u}$ e $d\vec{u}$

Su tempi brevi tutti i moti del versore sono rotazioni infinitesime

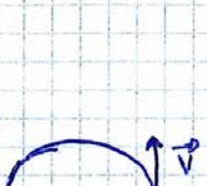


$d\vec{u} = \vec{k}\times\vec{u}\cdot d\theta$

$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{k}\times\vec{u}\cdot\omega$

$\frac{d\vec{u}}{dt} = (\omega\vec{k})\times\vec{u} \qquad \vec{\omega} = \omega\vec{k}$

$$\boxed{\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{u}}$$



moto rotatorio uniforme $\qquad v = \omega r$, velocità tangenziale $\qquad a = \omega^2 r$ accelerazione centripeta radiale

$d\vec{e}_t = \vec{e}_n \cdot d\theta$

$$\frac{d\vec{e}_t}{d\theta} = \vec{e}_n$$

$$\frac{d\vec{e}_t}{ds} = \frac{d\theta}{ds}\,\frac{d\vec{e}_t}{d\theta} = \frac{1}{R}\,\vec{e}_n$$

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_t}{ds} = \frac{1}{R}\,\vec{e}_n}$$

CINEMATICA

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\frac{d\vec{e}_t}{d\theta} = \omega\,\vec{e}_n = (\omega\,\vec{e}_b)\times\vec{e}_t = \boxed{\vec{\omega}\times\vec{e}_t = \frac{d\vec{e}_t}{dt}}$$

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{ds}{dt}\,\frac{d\vec{e}_t}{ds} = v\cdot\frac{1}{R}\cdot\vec{e}_n$$

$$\vec{v} = v\cdot\vec{e}_t$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\,\vec{e}_t) = \frac{dv}{dt}\,\vec{e}_t + \frac{d\vec{e}_t}{dt}\cdot v = \frac{dv}{dt}\,\vec{e}_t + v\cdot\frac{v}{R}\,\vec{e}_n$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\vec{e}_t + \frac{v^2}{R}\,\vec{e}_n}$$

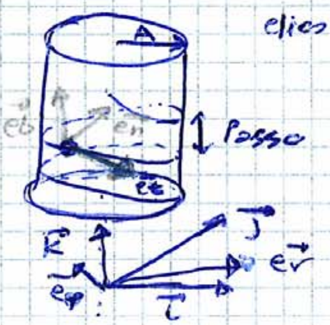
nel moto rotatorio

$\vec{e}_t = \vec{e}_r$

$\vec{e}_n = -\vec{e}_\theta$

$\vec{e}_b = \vec{k}$

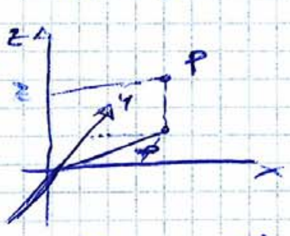
Esercizio



elica cilindrica

Determinare la reazione vincolare esercitata dalla guida sull'anello che scivola senza attrito

equazione elica cilindrica



$$\vec{r}(\varphi) = \underbrace{A\,\vec{i}\cos\varphi + A\,\vec{j}\sin\varphi} - P\,\frac{\varphi}{2\pi}\,\vec{k}$$

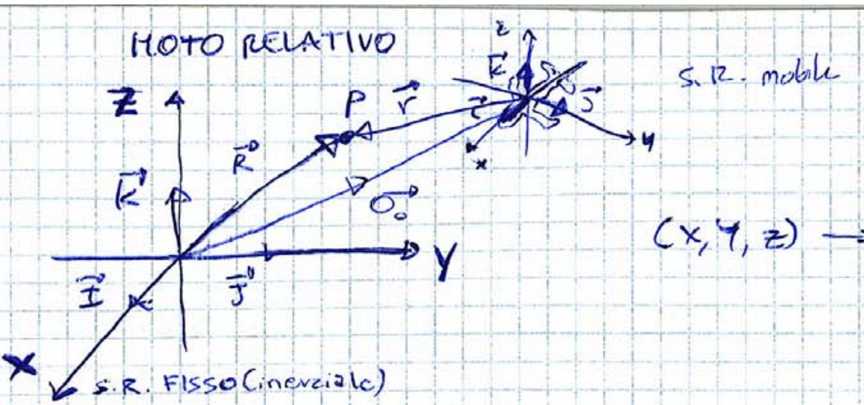
$$= A\,\vec{e}_r - P\,\frac{\varphi}{2\pi}\,\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = A\,\vec{e}_\varphi - \frac{P}{2\pi}\,\vec{k}$$

$$\left|\frac{dr}{d\varphi}\right| = \sqrt{A^2 + \frac{P^2}{4\pi^2}} = C$$

$$ds = |d\vec{r}| = C\cdot d\varphi$$

MOTO RELATIVO



$(X, Y, Z) \rightarrow (x, y, z)$

$$\vec{R} = \vec{O_o} + \vec{r}$$

$$\vec{V} = \frac{d}{dt}\vec{O_o} + \frac{d}{dt}\vec{r} = \vec{V_o} + \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}}_{\vec{v}} + \underbrace{x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}}_{} =$$

$\vec{v}$ velocità relativa dell'oggetto visto dall'aeroplano

dovute al fatto che il sistema di riferimento è mobile

$$= \vec{v} + x\cdot\vec{\omega}\times\vec{i} + y\cdot\vec{\omega}\times\vec{j} + z\cdot\vec{\omega}\times\vec{k} =$$

$$= \vec{v} + \vec{\omega}\times(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = v + \vec{\omega}\times\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\underbrace{\vec{V}}_{} = \underbrace{\vec{V_o} + \vec{\omega}\times\vec{r}}_{} + \underbrace{\vec{v}}_{}$$

velocità assoluta nel sistema di rif fisso

velocità di TRASCINAMENTO

velocità relativa misurata nel s.r. mobile

(c'è anche quando $v = 0$: non dipende da v)

$$\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V_o}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} + \vec{\omega}\times\vec{r}$

$\frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \vec{a} + \vec{\omega}\times\vec{v}$

$$\boxed{\vec{A} = \underbrace{\vec{a_o} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}}_{} + \underbrace{\vec{a} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}}_{}}$$

forza di Coriolis

relativi al sistema mobile

accelerazione di trascinamento

accelerazione relativa nel sistema mobile

accelerazione centripeta

CONSEGUENZE DINAMICHE

1° CASO - Moto relativo uniforme del sistema mobile

$\vec{a_o} = 0$

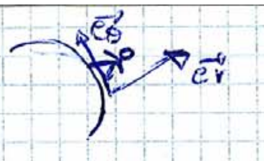
$\omega = 0$ (non ruota)

$$\begin{cases} \vec{A} = a \\ \vec{V} = \vec{V_o} + \vec{v} \end{cases}$$

sistema mobile e sistema fisso misurano le stesse accelerazioni

$$\vec{F} = m\vec{A} = m\vec{a} = \vec{f}$$

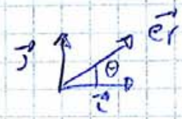
Relatività galileiana, tutti i sistemi di riferimento di moto relativo



$$(\vec{P} + \vec{F}_{cf}) \cdot \vec{e}_r = -mg_0 + \underline{m\omega^2 R\cos^2\theta}$$

$$F_{cf} = m\omega^2 \cdot r_\perp = m\omega^2 \cdot R\cos\theta \cdot \vec{i}$$

$$\vec{F}_{cf} \cdot \vec{e}_r = m\omega^2 R\cos^2\theta$$



$\vec{i} \cdot \vec{e}_r = \cos\theta$

$g = g_0 - \omega^2 R\cos\theta$ (come diminuito) $=$

$g_0 - \Delta g$

$$\frac{\Delta g}{g_0} = \frac{\omega^2 R\cos^2\theta}{g_0} = \frac{\left(\frac{2\pi}{24 \cdot 3600 s}\right)^2 6370\, Km}{9{,}8\ m/s^2} \cos^2\theta \simeq (0{,}003)\cos^2\theta$$

variazione di 3 per mille di g all'equatore

$\Delta\varphi \simeq 0{,}1^\circ$ (variazione dell'angolo tra forza peso e forza risultante)

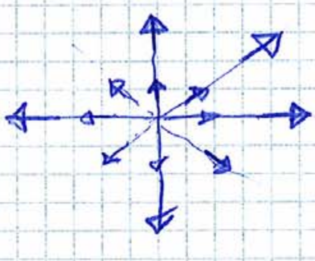
Forza di Coriolis ortogonale a velocità (infatti dalla formula si vede)

forza di Coriolis non fa lavoro

$$L = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v} \cdot \vec{v} \cdot dt = 0 \quad \text{forza deviatrice}$$

La differenza della Fcentrifuga, è che fa lavoro

$\vec{F}_{cf} = \omega^2 r \cdot \vec{e}_r$ (aumenta con la distanza dal centro)

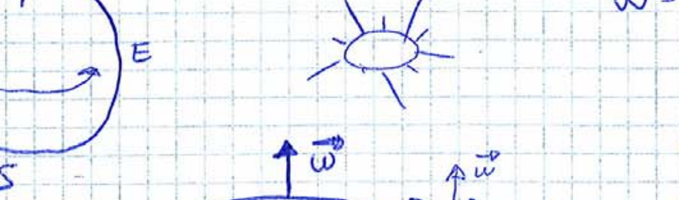


FORZA CENTRALE

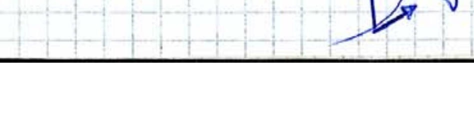
$$U = -\frac{\omega^2 r^2}{2}$$

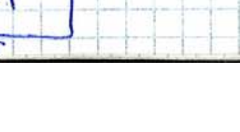
$$-\nabla U = \vec{F}_{c.f.}$$

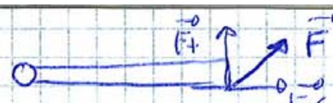
Rilevanza della forza di Coriolis per la metereologia



$\omega = \frac{2\pi}{24 h}$



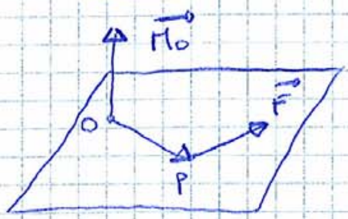


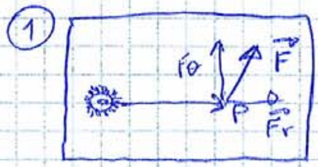


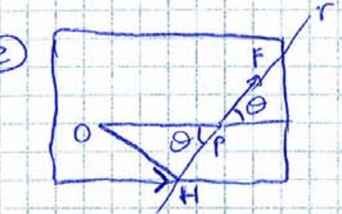
(inutile x aprire porta)

$$M_O = |OP| \cdot F_{tangenziale} = |OP| \cdot F \cdot \sin\theta$$

<u>DEF.</u> $\boxed{\vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{F}}$ momento della forza F rispetto al polo O







P = punto di applicazione

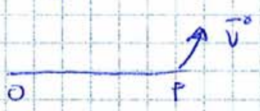
O = polo

r = retta di applicazione della forza

$$|OH| = |OP| \sin\theta = \text{braccio della forza}$$

$$M_o = |OP| \cdot \sin\theta \cdot F = |OH| \cdot F$$

Il concetto di momento non si applica solo alla forza, ma anche a qualsiasi altro vettore applicato



$$M_O = \vec{OP} \cdot \vec{v}_\theta$$

<u>Esempio</u>

Il vettore <u>Quantità di moto</u>

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \qquad m\vec{a} = \boxed{\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}}$$

$$r = \vec{OP}$$

momento della quantità di moto $= \vec{OP} \times m\vec{v} = \vec{L}$
=
momento angolare

<u>Teorema del momento angolare</u>

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = ?$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \cancel{\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}} + \vec{r} \times \underbrace{\left(m\frac{d\vec{v}}{dt}\right)}_{F}$$

Se il polo O è fisso, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = M_O \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = M_O$$

Siccome L_0 individua il piano ad esso $\perp$, $\vec{L_0} = \text{const}$

Il moto di ciascun pianeta avviene in un piano che e' detto "piano invariabile"
nel caso della Terra si chiama "piano dell'eclittica"

$\vec{K}$ direzione di $\vec{L_0}$

$\vec{L_0} = L_0 \cdot \vec{K}$

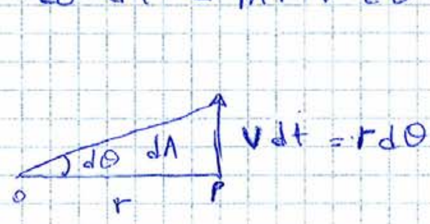
$L_0 = r \cdot m v_\theta =$

$= r\, m\, r \dfrac{d\theta}{dt}$

$L_0 = \underbrace{m r^2}_{\text{momento d'inerzia}} \dfrac{d\theta}{dt}$

$L_0\, dt = m r \cdot r \cdot d\theta$

orbita circolare:



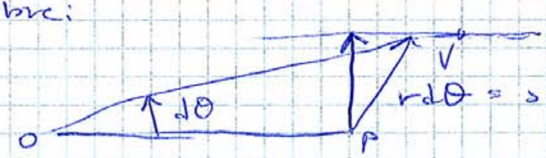
$v\,dt = r\,d\theta$

$dA = \frac{1}{2} r \cdot r\, d\theta$

$m r \cdot r \cdot d\theta = 2m \cdot dA$ (area spazzata dal moto del pianeta)

$L_0 = 2m \cdot \dfrac{dA}{dt}$ = velocità areolare

se orbita non e' circolare:



$dA = \dfrac{dt}{2m} L_0$

T = periodo dell'orbita

A = area dell'ellisse

$A = T \cdot \dfrac{L_0}{2m}$

II legge di Keplero: "costanza della velocità areolare"

Keplero

I

II

III

Newton

II legge

legge di attrazione gravitazionale

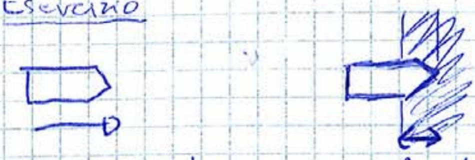
teorema del momento angolare

$\Delta x_{volo} = 3 \cdot 40\ mm$ (diametro pallina) $\simeq 0,1\ m$

$$v \cong \frac{\Delta x_{volo}}{\Delta t_{volo}} = \frac{0,1\ m}{2 \cdot 10^{-3}\ s} = 50\ \frac{m}{s}$$

$$F_m = \frac{2mv}{\Delta t_{urto}} = \frac{2 \cdot (50 g) \cdot 50\ m/s}{4 \cdot 10^{-4}\ s} = \frac{2 \cdot (5 \cdot 10^{-2}\ kg) \cdot (50\ m/s)}{4 \cdot 10^{-4}\ s} = 1,2 \cdot 10^{4}\ N$$

Esercizio



urto anelastico

$v = 100\ m/s$ $\quad$ $\Delta x = 1 cm$

$m = 0,02 kg$ $\quad$ tempo di arresto?

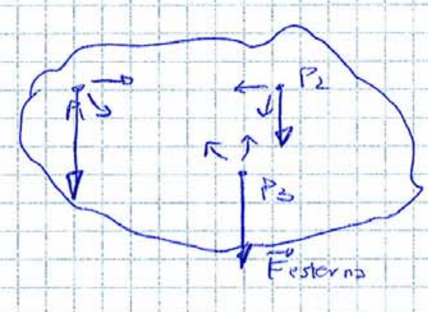
Th impulso + Th energia cinetica

$$mv = F_m \cdot \Delta t \;\Big|\; \frac{1}{2} mv^2 \underset{\text{approssimato}}{\simeq} F_m \cdot \Delta x$$

SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

corpi estesi: corpi rigidi, corpi elastici, fluidi

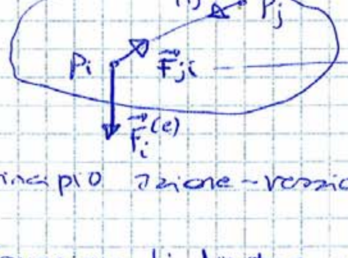
punto materiale singolo $\xrightarrow[\text{sistemi di punti materiali}]{}$ corpi estesi



forze esterne e forze interne

interne: originate da punti interni al sistema

esterne: originate da punti esterni



$\vec{F}_{ji}$ ⟶ forza che P_j esercita su P_i

(P.A.R) Principio azione-reazione ⟶ $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$ per ogni coppia di punti i, j

Equazione di Newton per ogni punto P_i

$$m_i \vec{a}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{(E)}$$

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_N$

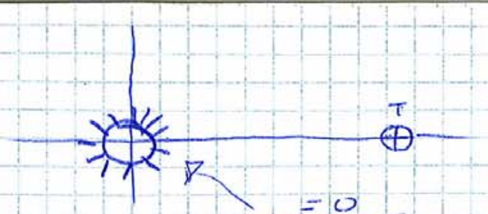
$\vec{R} = \sum \vec{F}_k$ "risultante" di un sistema di forze

In particolare per noi $\vec{R} = \vec{R}^{(I)} + \vec{R}^{(E)}$

Prima osservazione importante: in virtù del principio azione/reazione, la risultante delle forze interne è nulla $\vec{R}^{(I)} = 0$

$$R^{(I)} = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} = \sum_{i<j} \vec{F}_{ij} + \sum_{i>j} \vec{F}_{ij}$$

$$m_\odot = 300.000\, M_\oplus$$



$$x_{CM} = \frac{m_\odot \underbrace{x_\odot}_{=0} + m_\oplus x_\oplus}{m_\odot + m_\oplus} = \frac{m_\oplus}{m_\odot + m_\oplus} \cdot x_\oplus \sim \frac{m_\oplus}{m_\odot} \cdot x_\oplus$$

$$x_{CM} = \frac{1}{300.000} x_\oplus \simeq (3 \cdot 10^{-6}) \cdot (150 \cdot 10^6 \text{ Km}) = 450 \text{ Km dal Sole}$$

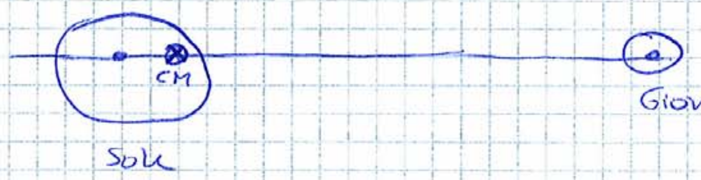
$d_\odot = 1{,}4 \cdot 10^6$ Km $\qquad 450$ Km $\sim 3 \times 10^{-4}\, d_\odot$

$= 109\, d_\oplus$

Ripeto con Giove ♃

$m_{♃} = 10^{-3}\, m_\odot \qquad x_{♃} =$ 5 unità astronomiche

$$x_{CM} = \frac{m_{♃}}{m_\odot} x_{♃} = 10^{-3} \cdot 5 \cdot 150 \cdot 10^6 \text{ Km} = 450.000 \text{ Km}$$

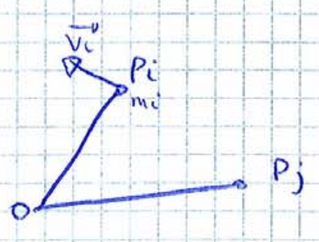


$$\vec{P} = \Sigma\, m_i \vec{v_i}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \Sigma\, m_i \frac{d\vec{v_i}}{dt} = \Sigma\left(\cancel{F_i^{(I)}} + F_i^{(E)}\right) = R_i^{(I)} + R^{(E)} = R_i^{(E)}$$

$$M \vec{a}_{CM} = \boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(E)}}$$

PRIMA EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA DEI SISTEMI



Analogalmente posso calcolare $\frac{d\vec{L_0}}{dt}$

$$\vec{L_{0i}} = \Sigma\, \vec{OP_i} \times m\vec{v_i}$$

O deve essere fisso x far tornare i conti

Se polo O non è fisso nel sistema di riferimento

$$\frac{d}{dt}\vec{OP_i} = \frac{d}{dt}\left(\vec{OO_{fisso}} + \vec{O_{fisso}P_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(-\vec{O_{fisso}O} + \vec{O_{fisso}P_i}\right)$$

$$= -\vec{v_0} + \vec{v_i}$$

$$\frac{d\vec{L_0}}{dt} = \Sigma \frac{d}{dt}\vec{OP_i} \times m\vec{v_i} + \Sigma\, \vec{OP_i} \times m\frac{d\vec{v_i}}{dt} =$$

$$= \Sigma(\vec{v_i} - \vec{v_0}) \times m\vec{v_i} + \Sigma\, \vec{OP_i} \times \left(\cancel{\vec{F}^{(I)}} + \vec{F}^{(E)}\right) =$$

$$= -\vec{v_0} \times \Sigma\, m\vec{v_i} + \vec{M}_0^{(E)} =$$

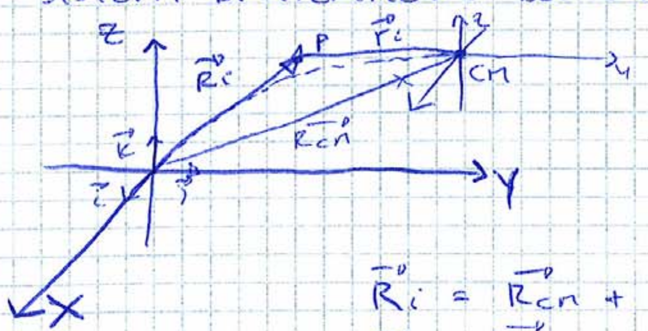
$$\boxed{\frac{d\vec{L_0}}{dt} = -\vec{v_0} \times M\vec{v_{CM}} + \vec{M}_0^{(E)}}$$

SECONDA EQ. CARDINALE DELLA DINAMICA DEI SISTEMI

$L_{q,1} = 2 m r_1^2 w_1 = 2 m r_2^2 w_2 = L_{q,2}$

$$w_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 w_1$$

SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA



sistema mobile con CM≡origine ma stessi $\vec i, \vec j, \vec k$

$$\vec R_i = \vec R_{cm} + \vec r_i$$
$$\vec V_i = \vec V_{cm} + \vec v_i$$
$$\vec A_i = \vec A_{cm} + \vec a_i$$
$$m\vec A_i = m\vec A_{cm} + m\vec a_i = \vec F_i$$
$$m\vec a_i = \vec F_i - m\vec A_{cm}$$

unica forza apparente (non ci sono rotazioni, no F coriolis,..)

I eq. cardinale

$$\vec P = 0$$

II eq. cardinale

momento delle forze apparenti $= \sum \vec r_i \times (-m_i \vec A_{cm}) =$

$$= -M\underbrace{\left(\frac{\sum m_i \vec r_i}{M}\right)}_{=0 \text{ nel sistema del centro di massa}} \times \vec A_{CM}$$

$$\frac{d\vec L_{cm}}{dt} = \vec M^{(E)}$$

Relazione tra momento angolare ed energia cinetica calcolati nel sistema mobile del CM e nel sistema fisso

$$\vec R_i = \vec R_{cm} + \vec r_i$$
$$\vec V_i = \vec V_{cm} + \vec v_i$$

$$\vec L = \sum_i \vec R_i \times m_i \vec V_i = \sum_i (\vec R_{cm} + \vec r_i) \times m_i (\vec V_{cm} + \vec v_i) =$$

$$= \sum_i \vec R_{cm} \times m_i V_{cm} + \sum \vec r_i \times m_i \vec V_{cm} + \sum \vec R_{cm} \times m_i \vec v_i +$$

$$+ \underbrace{\left(\sum \vec r_i \times m_i \vec v_i\right)}_{\vec L_{CM}} =$$

$$= \vec R_{cm} \times \left(\sum m_i\right) \vec V_{cm} + \underbrace{\cancel{\left(\sum m_i \vec r_i\right) \times \vec V_{cM}}}_{=0} + \vec R_{cm} \times \underbrace{\left(\sum m_i \vec v_i\right)}_{=0} + \vec L_{cm}$$

perché proporzionale al CM, che nel S. mobile è 0.

eq. energia cinetica:

$$m_1 v_{1i}^2 + m_2 v_{2i}^2 = m_1 v_f^2 + m_2 v_{2f}^2$$

$$m_1 v_{1i}^2 + m_2 \frac{m_1^2}{m_2^2} v_{1i}^2$$

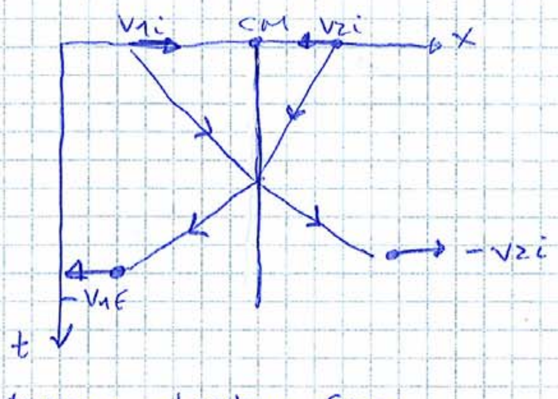
$$m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) v_{1i}^2 = m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) v_{1f}^2$$

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2$$

$$v_{1f} = \pm v_{1i}$$

soluzione fisica $v_{1f} = -v_{1i}$

$v_{2f} = v_{2i}$



Per tornare al sistema fisso

$$V_{1i} = V_{CM} + v_{1i}$$

$$v_{1i} = V_{1i} - V_{CM}$$

$$V_{CM} = \frac{m_1 V_{1i} + m_2 V_{2i}}{m_1 + m_2}$$

sostituendo $V_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_{1i} + \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} V_{2i}$

$$V_{2f} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} V_{i2} + \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} V_{1i}$$

casi particolari

$m_1 = m_2$ $\qquad V_{1f} = V_{2i}, \; V_{2i} = V_{1f}$ velocità si scambiano

$m_2 >> m_1$ $\qquad V_{1f} = 2V_{2i} - V_{1i}$

$$V_{2f} \simeq V_{2i}$$

RIASSUNTO delle lezioni sui sistemi

$i \rightarrow \leftarrow j$ $\qquad \vec{F_{ij}} = -\vec{F_{ji}}$ (x principio azione-reazione)

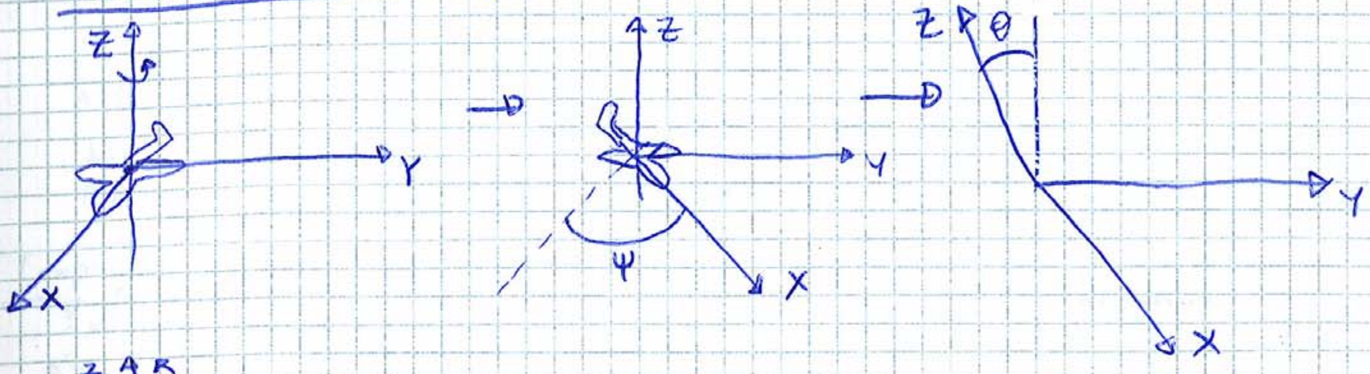
$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{R}$ $\qquad$ somma della quantità di moto (totale) = risultante delle forze

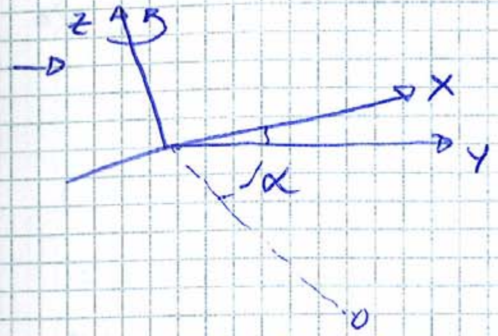
I EQUAZIONE CARDINALE DEI SISTEMI

$\frac{d}{dt}\vec{L_O} = \vec{M_O}^{(E)} - \vec{v_O} \times m\vec{v}_{CM}$ (termine correttivo) $\qquad$ II EQUAZIONE CARDINALE (equazione del momento angolare)

3 coordinate servono per specificare la posizione del C.M. G : x_G, y_G, z_G

ANGOLI DI EULERO $O \equiv G$





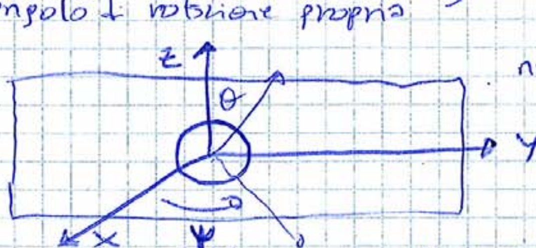
Y sembra fisso ma non lo è, nota sempre

CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO

6 gradi di libertà → 6 coordinate di configurazione $x_G, y_G, z_G, \psi, \theta, \varphi$

(xi) ψ = angolo di precessione
(teta) θ = angolo di nutazione
(phi) φ = angolo di rotazione propria

} 3 angoli di Eulero



nutazione della Terra (inclinazione rispetto a perpendicolare)

(precessione dell'orbita della Terra)

Ci saranno 6 componenti di velocità $\underbrace{\frac{dx_G}{dt}, \frac{dy_G}{dt}, \frac{dz_G}{dt}}_{\text{3 velocità lineari}}, \underbrace{\frac{d\psi}{dt}, \frac{d\theta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}}_{\text{3 velocità angolari}}$

Per descrivere la dinamica servono 6 equazioni:

2 equazioni cardinali

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(E)}, \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

Per usare concretamente queste equazioni devo saper scrivere $\vec{P}$ e $\vec{L}_O$ in termini delle 6 velocità viste prima

Per quanto riguarda la quantità di moto $\vec{P} = m\vec{v}_G = m \cdot \left(\vec{i}\frac{dx_G}{dt} + \vec{j}\frac{dy_G}{dt} + \vec{k}\frac{dz_G}{dt}\right)$

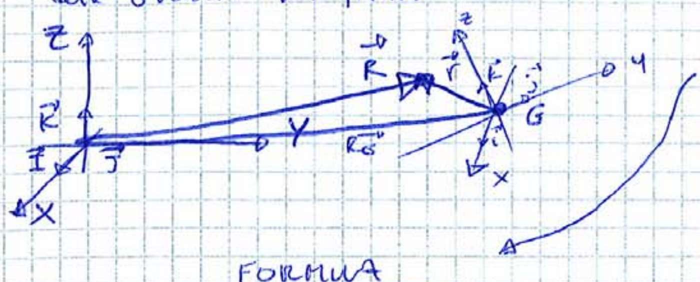
Per usare praticamente questa relazione devo saper determinare il centro di massa del corpo

$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k$ per sistema di punti

$\vec{M_O} = \sum_{k=1}^{N} \vec{r_k} \times (-m_k g \vec{k}) = -\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r_k}}_{m \cdot \vec{r_G}}\Big) \times g\vec{k} = \vec{r_G} \times (-mg\vec{k})$

$\vec{r_G} \times (-mg\vec{k}) = 0$ se $\vec{r_G} \parallel \vec{k}$

Affrontiamo ora il problema di esprimere $\vec{L_O}$ (momento angolare totale) in funzione delle 6 velocità viste prima



$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{R_G} + \vec{r} \\ \vec{V} = \underbrace{\vec{V}_G + \vec{w} \times \vec{r}}_{\text{velocità di trascinamento}} + \cancel{\vec{v}} \end{cases}$$

i punti del corpo rigido sono fissi nel sistema di rif. solidale nel corpo rigido

FORMULA FONDAMENTALE DELLA CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO

$$\vec{L_O} = \sum_{k=1}^{N} \vec{R_k} \times m_k \vec{V_k} = \sum_{k=1}^{N} (\vec{R_G} + \vec{r_k}) \times m_k (\vec{V_G} + \vec{w} \times \vec{r_k})$$

$$= \sum \vec{R_G} \times m_k \vec{V_G} + \cancel{\sum \vec{R_G} \times m_k \vec{w} \times \vec{r_k}} + \cancel{\sum \vec{r_k} \times m_k \vec{V_G}} +$$

$$+ \sum \vec{r_k} \times m_k (\vec{w} \times \vec{r_k})$$

perché $\sum m_k \cdot r_k = 0$ (vedi teorema di König)

$$= \vec{R_G} \times M \vec{V_G} + \vec{L_G}$$

$$\vec{L_G} = \sum \vec{r_k} \times m_k (\vec{w} \times \vec{r_k}) = \sum m_k [r_k^2 \vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{r_k}) \vec{r_k}] =$$

$$[\ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}\ ]$$

$$= \sum m_k [\underbrace{r_k^2 \vec{w}}_{\text{contributo } \parallel \vec{w}} - \underbrace{(\vec{w} \cdot \vec{r_k}) \vec{r_k}}_{\text{contributo, in generale, } \nparallel \vec{w}}]$$

In generale $\vec{L_G} \parallel \vec{w}$

Per usare questa relazione scrivo esplicitamente $\vec{r_k}, \vec{w}, \vec{L_G}$ nelle coordinate del sistema di riferimento fisso nel CR:

$$\begin{cases} \vec{r_k} = x_k \vec{i} + y_k \vec{j} + z_k \vec{k} \\ \vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k} \\ \vec{L_G} = l_x \vec{i} + l_y \vec{j} + l_z \vec{k} \end{cases}$$

Esercizio risulta .....

$$\begin{bmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum m_k (y_k^2 + z_k^2) & -\sum m_k x_k y_k & -\sum m_k y_k z_k \\ \sum m_k x_k y_k & \sum m_k (x_k^2 + z_k^2) & -\sum m_k y_k z_k \\ -\sum m_k y_k z_k & -\sum m_k y_k z_k & \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}$$

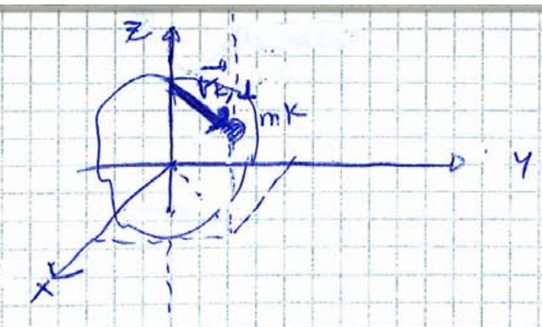
matrice simmetrica

MATRICE D'INERZIA

Termini su diagonale principale: momenti d'inerzia (il primo rispetto asse x, il secondo rispetto asse y, il terzo rispetto asse z)

Termini fuori diagonale: Prodotti d'inerzia

Algebra lineare: ogni matrice simmetrica diventa diagonale se scegliamo come base dello spazio i suoi autovettori, che sono tra loro ortogonali

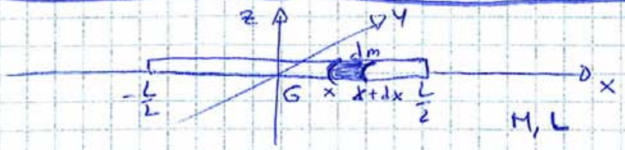


$$\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{M_O}^{(E)}$$

$$\frac{dL_{Ox}}{dt} = I_x \frac{d\omega_x}{dt} = M_{Ox}^{(E)}$$

$$\frac{dP_x}{dt} = m \frac{dV_{G,x}}{dt} = R_x^{(E)}$$

MOMENTO DI INERZIA DI UN'ASTA SOTTILE



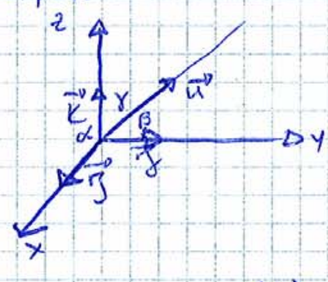
$$\rho_e = \frac{M}{L}$$

$$dm = \rho_e\, dx = \frac{M}{L} dx$$

$$I_x \simeq 0$$

$$I_z = \int \left(\text{distanza da } z\right)^2 dm = \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 \cdot \frac{M}{L} dx = \dots \quad \frac{ML^2}{12}$$

Posso calcolare il momento d'inerzia anche rispetto ad asse $\vec{u}$ diverso dagli assi principali



$$\vec{u} \cdot \vec{i} = \cos\alpha$$
$$\vec{u} \cdot \vec{j} = \cos\beta$$
$$\vec{u} \cdot \vec{k} = \cos\gamma$$

"coseni direttori"

$$I_{\vec{u}} = \sum m_K\, r_{K,\perp}^2$$

$$(*) \quad I_{\vec{u}} = I_x \cdot \cos^2\alpha + I_y \cdot \cos^2\beta + I_z \cdot \cos^2\gamma$$

Esercizio per dimostrare (*)

si prende $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{u}$ e si pone nelle espressioni precedentemente ricavate:

$$\vec{L_G} = \sum m_K \left[r_K^2\, \vec{\omega} - (\vec{r_K} \cdot \omega)\, \vec{r_K} \right]$$

$$K_G = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L_G} = \dots = \frac{1}{2} I_{\vec{u}} \cdot \omega^2$$

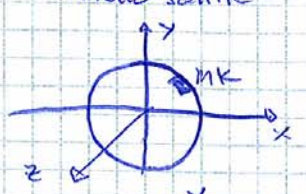
$$(\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{u})$$

$$= \frac{1}{2} \left(I_x \cdot \omega_x^2 + I_y \cdot \omega_y^2 + I_z \cdot \omega_z^2 \right) = \dots =$$

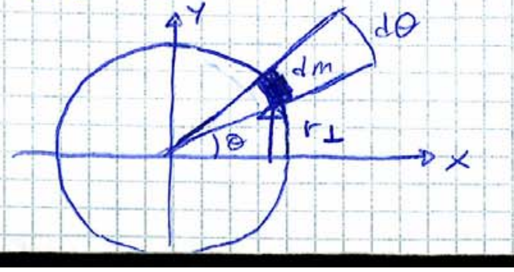
$$= \frac{1}{2} \omega^2 \left(I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma \right)$$

Esempio

Anello sottile M, R



$$I_z = \sum m_K \cdot r_{K,\perp}^2 = R^2 \sum m_K = MR^2$$

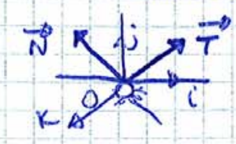


$$dm = M \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$r_\perp = R \sin\theta$$

$$I_x = \int (R\sin\theta)^2\, M \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{MR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta$$

Trovare - periodo delle piccole oscillazioni
- reazioni vincolari nella cerniera



(1) $\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{M_O}$ II eq. cardinale con polo in O in modo che non compaiano le reazioni vincolari $\vec N$ e $\vec T$

per determinare moto del pendolo

Successivamente userò $\frac{d\vec P}{dt} = \vec R^{(E)}$ I eq. cardinale per determinare $\vec N, \vec T$

1) Siccome siamo nel piano

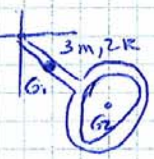
$$\vec{L_O} = L_z \cdot \vec k \, , \quad \vec{M_O}^{(E)} = M_z \vec K$$

e quindi restiamo con una sola equazione scalare

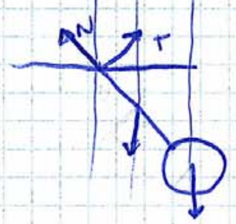
$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{(E)}$$

$$L_z = I_z \cdot \omega \quad . \quad I_z = I_z^{asta} + I_z^{anello} = 14\, mR^2$$

$$I_z^{asta} = \frac{3m(2R)^2}{12} + \underbrace{3mR^2}_{\text{Huygens-Steiner}} = 4mR^2$$



$$I_z \text{ anello} = mR^2 + \underbrace{m(3R)^2}_{\text{Huygens-Steiner}} = 10\, mR^2$$



In generale

$$\vec{M_O}^{(peso)} = \sum \vec r_k \times (-m_k g\vec j) =$$

$$= \underbrace{\sum m_k \vec r_k}_{M\vec r_G} \times (-g\vec j)$$

$$M \vec r_G \times (-g\vec j) =$$

$$= \vec r_G \times (-mg\vec j)$$

$$M_z^{(peso\ asta)} = -\underbrace{R\sin\theta}_{\text{braccio}} \cdot \underbrace{(3mg)}_{\text{forza applicata nel CM}}$$

perché forza peso fa ruotare in senso orario e non antiorario

$$M_z^{(peso\ anello)} = -\underbrace{(3R\sin\theta)}_{\text{braccio}} \cdot \underbrace{mg}_{\text{forza nel CM}}$$

senso orario

$$M_z^{(peso,tot)} = -6mgR\sin\theta$$

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{(E)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(I_z \frac{d\theta}{dt}\right) = -6mgR\sin\theta$$

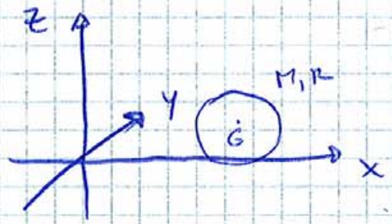
$$14\, \cancel{m}R^{\cancel{2}} \frac{d^2\theta}{dt^2} = -6\cancel{m}g\cancel{R}\sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3}{7}\sin\theta \cdot \frac{g}{R} = -\left(\frac{3}{7}\frac{g}{R}\right)\sin\theta$$ (simile alla formula $\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\theta(t)$)

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{7}\frac{g}{R}}$$ (frequenza piccole oscillazioni)

$$\Rightarrow \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{6g}{7R}\cos\theta$$

$$N = 6mR\frac{6g}{7r}\cos\theta + 4mg\cos\theta = \frac{64}{7}\, mg\cos\theta$$



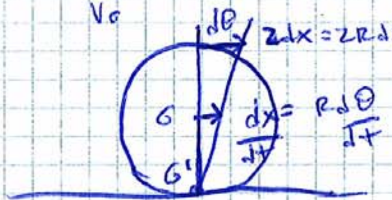
Anello omogeneo che rotola su asse X con velocità del C.M. V.
(1) Calcolo momento angolare e K (2) (rotola senza strisciare) e dire se si conservano

1 grado di libertà: posso scegliere come coordinata di conf. per esempio V, oppure $X = X_G$:

(1) $$\vec{L_O} = \vec{r_G} \times M\vec{v_G} + \vec{L_G}$$

$$\vec{r_G} = (x\vec{i} + R\vec{k})$$

$\vec{v_G}$



cinematica del rotolamento senza strisciare

$$\boxed{v_G = R\omega}$$

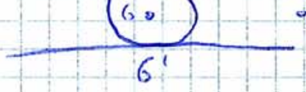
$$\vec{v_G} = R\omega\vec{i}$$

$$\vec{r_G} \times M\vec{v_G} = (x\vec{i} + R\vec{k}) \times MR\omega\vec{i} = MR^2\omega\vec{j}$$

$$\vec{L_G} = I_G \cdot \omega = MR^2\omega\vec{j}$$

$$\vec{L_O} = MR^2\omega\vec{j} + MR^2\omega\vec{j} = 2MR^2\omega\vec{j}$$

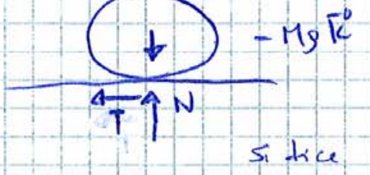
$$K = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2 = \underbrace{\frac{1}{2}M(R\omega)^2}_{\text{(moto C.M.)}} + \underbrace{\frac{1}{2}MR^2\omega^2}_{\text{(rotazione)}} = MR^2\omega^2$$



oppure $K = \frac{1}{2}I_{G'}\omega^2 = \text{Steiner} = \frac{1}{2}(MR^2 + I_G)\omega^2 =$

$$= \frac{1}{2}(MR^2 + MR^2)\omega^2 = MR^2\omega^2$$

Queste quantità si conservano?



$N = Mg$ (si equilibra con il peso)

lavoro della forza d'attrito $\vec{T} \cdot \vec{v_{G'}}\,dt = dW = 0$ perché non si sposta

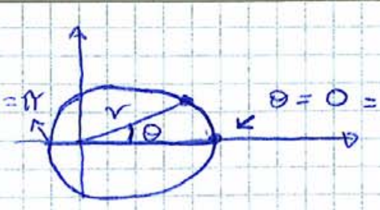
Si dice che il vincolo di puro rotolamento è ideale perché non viene fatto lavoro

le forze esterne (attrito, peso) non fanno lavoro $\Rightarrow$ E cinetica si conserva

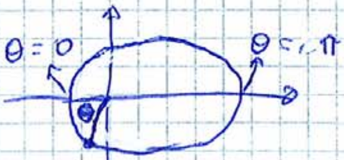
Il momento delle forze esterne è nullo perché

$N = Mg$ e la retta di applicazione di T passa per O $\quad L_O = \text{const}$

$\varepsilon = \dfrac{r}{d + r\cos\theta}$



Se scegliamo di porre $\theta = 0$ al perielio



$$\varepsilon = \frac{r}{d - r\cos\theta}$$

$\varepsilon(d + r\cos\theta) = r$

$r(1 - \varepsilon\cos\theta) = \varepsilon d$

(1) $r = \dfrac{\varepsilon d}{1 - \varepsilon\cos\theta}$ $\rightarrow$ $\theta = 0$ all'afelio

(2) $\varepsilon(d - r\cos\theta) = r$

$r(1 + \varepsilon\cos\theta) = \varepsilon d$

$\boxed{r = \dfrac{\varepsilon d}{1 + \varepsilon\cos\theta}}$ $\rightarrow$ con $\theta = 0$ PERIELIO

$\boxed{\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{\varepsilon d} + \dfrac{\cos\theta}{d}}$ ancora + semplice se scritta in funzione di $\dfrac{1}{r}$

Con $\varepsilon = 1$ ellisse degenere = parabola

$\varepsilon > 1$ iperbole

Leggi di Newton $\longrightarrow$ Leggi di Keplero

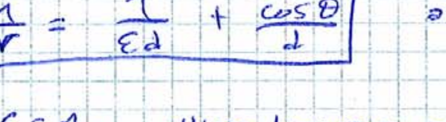
1. PRINCIPIO D'INERZIA	1. orbite ellittiche con sole in uno dei fuochi
2. $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	2. costanza della velocità areolare
3. PRINCIPIO A/R	3. $T^2 \propto a^3$ ($\uparrow$ semiasse maggiore)

\+

Legge di gravitazione universale

$$F_{gr} = \frac{GMm}{r^2}$$

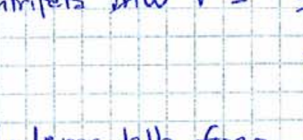
Nell'approssimazione di orbite circolari abbiamo già ricavato alcuni di questi risultati



acc. centripeta $m\omega^2 r = \underbrace{\dfrac{GMm}{r^2}}_{\text{accelerazione gravitazionale}}$ $\qquad \omega^2 = \dfrac{GM}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{T^2}$ $\qquad T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM} r^3$

La legge della forza "inverso del quadrato della distanza" fornisce la 3ª legge di Keplero

C'è un altro argomento che può aver suggerito la legge dell'inverso del quadrato



Quanti raggi/m² arrivano a Terra?

$\dfrac{N}{4\pi r^2}$ (osservazione stupida)