NUMERO: 1335

ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Busca

MATERIA: Analisi Matematica I + Eserc., Prof.Adami

ANALISI I

RICCARDO.ADAMI @ POLITO.IT

Calcolo differenziale e integrale per funzioni reali di variabile reale

PROGRAMMA:

1) Logica, teoria degli insiemi (insiemi numerici) V
2) Insieme dei numeri reali: Estremo superiore V
3) Successioni (limiti)
4) Funzioni (e limiti)
5) Simboli di Landau V
6) Differenziabilità (Derivate), Polinomi di taylor V
7) Calcolo integrale (da Archimede di Siracusa) V
8) Numeri complessi
9) Equazioni differenziali

LIBRI TEORICI

- Fabio Nicola, Appunti di analisi I, CLUT
- Anita Tabacco e Claudio Canuto, SPRINGER
- Enrico Giusti, edito da BORINGHIERI
- Giovanni Prodi, // //

x GLI ESERCIZI:

- G. Quelali, CLUT
- Marco Bramanti
- Ravezzi - Righero (test)

ESAME (leggo su sito)

- a test a computer 20 domande a risposta multipla

+

compito scritto (4 es. tradizionali)

		su 20	su 30
RISPOSTA ERRATA	−0,15		
// NON DATA	0	$11 \leq V \leq 12$	18
// ESATTA	1	$13 \leq V \leq 14$	19
		$15 \leq V \leq 16$	20
		17	21
		18	22
		19	23
		20	24

sessione invernale, 2 appelli:

1° : 27, 28, 29 gennaio

2° : 11, 12, 13 febbraio

Sessione estiva, 1 appello:

16, 17 giugno

+ 1 appello in autunno

P e $(Q$ o $R) = (P$ e $Q)$ o $(P$ e $R)$ VERO? sì, dimostro con tavole di verità

PROP. DISTRIBUTIVA e vale scambiando "e" e "o"

P o $(Q$ e $R) = (P$ o $Q)$ e $(P$ o $R)$

5) non := $\neg$ inverte il valore di verità

P	$\neg P$
V	F
F	V

$\boxed{\neg(P \text{ e } Q) = \neg P \text{ o } \neg Q}$

P	Q	P e Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P$ o $\neg Q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	V	V

Dimostrato

$\boxed{\neg(P \text{ o } Q) = \neg P \text{ e } \neg Q}$

La negazione scambia i connettivi logici "e" e "o"

$\neg(\neg P$ e $\neg Q) = P$ o Q

$\neg$ + "e" = "o"

6) Connettivo di implicazione semplice o logica → causalità

P implica Q, se P è sempre vera, Q è sempre vera

$P \Rightarrow Q$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P$ o Q
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	F	V	V	V
F	V	V	V	V

DEFINIZIONE:

$\boxed{\text{"}P \Rightarrow Q\text{"} = \neg P \text{ o } Q}$

Da premessa falsa si può trarre qualsiasi conseguenza

" vera " " conseguenza vera

$\boxed{\text{"}P \Rightarrow Q\text{"} = \text{"}\neg Q \Rightarrow \neg P\text{"}}$ dimostrazione per assurdo

$\neg Q \Rightarrow \neg P = \neg\neg Q$ o $\neg P = Q$ o $\neg P = \neg P$ o $Q =$ "$P \Rightarrow Q$"

$P \Rightarrow Q = \neg P \Rightarrow \neg Q$ è generalmente falsa

ES 1) Scrivere un'espressione logica contenente 2 proposizioni elementari tali che (t.c.) sia vera quando una soltanto delle due sia vera

ES. 2 Scrivere un'espressione logica contenente 3 prop. elementari, che sia vera quando almeno 2 siano vere.

1) Se Roma non e' la capitale dell'Italia allora Parigi e' capitale della Francia

2) Roma e' capitale dell'Italia e (Parigi e' capitale della Francia O Torino e' in Lombardia.)

Variabili

$P(x)$ =

= x e' la capitale dell'Honduras. ← non posso attribuire il valore di verità, finche' non so x

x = Parigi ? F

x = Tegucigalpa ? V

PREDICATO: $P(x)$: proposizione che contiene una variabile

$\exists$ } QUANTIFICATORI ⟨ esistenziale "esiste almeno una x"...
$\forall$ } ⟨ universale "per ogni x" "per qualunque valore della variabile x"

ES.

P: $\forall x$ uomo, x e' mortale ← se c'e' quantificatore universale, indeterminazione della variabile sparisce

$\neg P$: $\exists$ uomo x, x non mortale

Se nego quant. universale, introduco quant. esistenziale. Cioe' basta 1 caso per negare una cosa universale

ES.

$\exists x$ numero più grande di tutti i numeri = Q

$\neg Q$ = $\forall x$ numero, x non e' il più grande di tutti

OSS.

La negazione scambia i quantificatori.

OSS.

$\forall n$ naturale, $\exists m$ naturale t.c. $m > n$ V

$\exists m$ naturale, $\forall n$ naturale $m > n$ F

OSS.

Lo scambio dell'ordine dei quantificatori cambia il senso della proposizione (e del valore di verità)

TEORIA DEGLI INSIEMI

Per definire insieme particolare occorre dichiarare chi sono i suoi elementi. In che modo?

1) Elenco $A = \{2, 3, 4, 6\}$

2) $A = \{$divisori non banali di $12\}$ → tramite caratterizzazione
↑
no 12 e no 1

Proprietà insiemi

1) $A \cup A = A$
$A \cap A = A$ RIFLESSIVA

2) $A \cup B = B \cup A$ COMMUTATIVA
$A \cap B = B \cap A$

3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ASSOCIATIVA
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ DISTRIBUTIVA

DIM

$A \cup (B \cap C) = \{x, x \in A \text{ o } x \in (B \cap C)\} = \{x \in A \text{ o } x \in B \text{ e } x \in C\}$
$= \{(x \in A \text{ o } x \in B) \text{ e } (x \in A \text{ o } x \in C)\} = \{x \in A \cup B \text{ e } x \in A \cup C\}$
$= \{x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)\}$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ si scambiano "e" e "o" con la
$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ differenza

INSIEME DELLE PARTI

A = insieme, $\mathcal{P}(A)$ = "insieme delle parti di A" si definisce come l'insieme che contiene tutti gli insiemi B che sono sottoinsiemi di A $= \{B \text{ insieme}, B \subset A\}$

ES.
$A = \{1; 2\}$
$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset; A; \{1\}; \{2\}\}$

ES.
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))$ quanti elementi ha? 1 ossia l'insieme vuoto
NO! RISULTATO 16

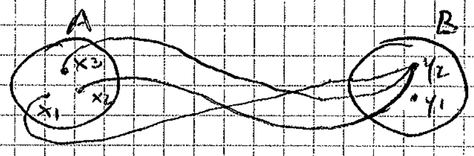
$a \in \{a\}$
$\{a\} \subset \{a, b\}$
$a \in \{a, \{a\}, b\}$
$\{a\} \in \{a, \{a\}, b\}$ ma anche $\subset$

$\{a, b\} \subset \{b, a\}$ ORDINE DEGLI ELEMENTI non conta
$\emptyset \subset \emptyset$

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ $\{\emptyset\} = \{x\}$
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\{x\}, \emptyset\} = \{x, y\}$
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\{x\}, \emptyset, \{y\}, \{x, y\}\} = \{x, y, z, w\}$
$\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset, \{x, y, z, w\}, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{w\}, \{x, y\}, \{x, z\},$
16 $\{x, w\}, \{y, z\}, \{y, w\}, \{y, z, w\}, \{x, z, w\}, \{x, y, w\}, \{x, y, z\}\}$

$\mathrm{Im}\,f$ o $\mathrm{Im}_f\,N$ (di N tramite F) o $f(N)$ = insieme degli elementi del codominio tali che esiste un elemento del dominio che fa sì che $f(x) = y$ *

Ripasso significato di "DIAGRAMMA DI VENN"



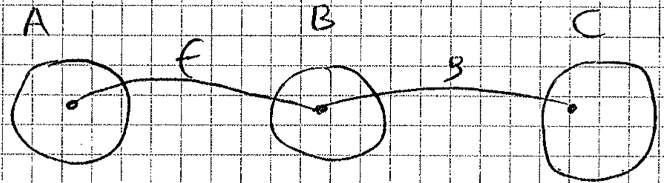
$\mathrm{Im}\,f = \{ y_2 \}$ = sottoinsieme di B

<u>Composizione di funzioni</u> è un'operazione tra funzioni (che prende 2 elementi e porta ad un terzo elemento)

$f : A \to B$

$g : B \to C$

Da due funzioni si arriva a 1 terza.



$g \circ f$: è una funzione che va da A a C = $A \to C$

$x \mapsto g[f(x)]$

Operazione composizione gode della <u>prop. associativa</u>

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$

$[h \circ (g \circ f)](x) = h[(g \circ f)(x)] = h[g[f(x)]] = (h \circ g)[f(x)]$

$= [(h \circ g) \circ f](x)$ → DIMOSTRAZIONE della prop. associativa

DEF. f iniettiva Quando $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

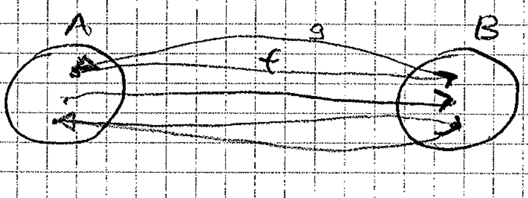
f suriettiva Quando $\mathrm{Im}\,f = B$

Quando sia iniettiva sia suriettiva è BIUNIVOCA o IDENTITÀ (ex. $y = x$)

DEF. f si dice <u>BIIETTIVA</u> se è INIETTIVA e SURIETTIVA

DEF. Sia $f : A \to B$; una funzione $g : B \to A$ si dice <u>inversa</u> di F se e solo se $f \circ g$ = identità di B e $g \circ f$ = identità di A

<u>Notazione</u> Identità di A è una f che va da A a A che associa ad ogni x se stesso. $f : A \to A$; $f : x \mapsto x$



facendo $f \circ g$ si torna all'insieme B

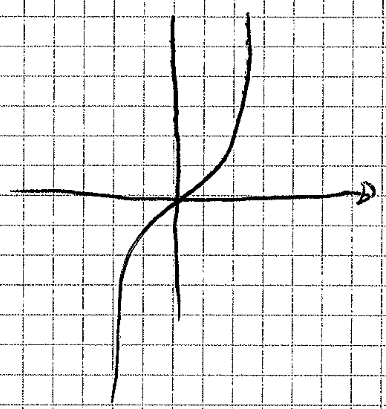
" $g \circ f$ " " A

Al test arctg x è invertibile

Basta che sia iniettiva xk sia invertibile, xk si può restringere codominio in modo che sia anche suriettiva

$y = tg\,x$

no iniettiva



Qui si restringe

$D = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ xk sia invertibile

Quindi non è detto che x essere invertibile debba essere bigettiva. Ce la giochiamo noi

<u>Notazione</u>

Inversa di f quando esiste si indica f^{-1}

DEF.

$f: A \to B$, si dice grafico di f Γ (gamma maiuscola) $(f) = \{(x, f(x)) \in A \times B\}$ = insieme delle coppie $(x, f(x))$ appartenenti al prodotto cartesiano $A \times B$

$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

nome della funzione h — operazione tra funzioni — NON HO CAPITO!

INSIEMI NUMERICI

1) $\boxed{N}$ = "naturali" compreso lo zero $= \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$

2 operazioni interne ad N:

1) SOMMA, applicazione il cui dominio $N \times N$ e codominio N

$+ : N \times N \to N$

Ad ogni coppia di quell'insieme associa un terzo elemento di N

$(n, m) \mapsto n+m$

2) PRODOTTO

$\cdot : N \times N \to N$

$(n, m) \mapsto n \cdot m$

Proprietà della SOMMA

- commutativa
- associativa

Propr. del PRODOTTO:

- comm.
- ass.
- distributiva $p \cdot (n+m) = p \cdot n + p \cdot m$

L'insieme N manca di elementi, è in difetto. Quindi si inseriscono nuovi insiemi

② INSIEME $\boxed{\mathbb{Z}}$ = numeri interi

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

SOMMA

1) ASSOCIATIVA

2) COMMUTATIVA

3) esiste inverso rispetto somma $\exists$ e n, $\forall p \in \mathbb{Z}\ \exists -p$

$$p + (-p) =: p - p = 0$$

PRODOTTO

1) comm

2) assoc.

3) $\exists$ el. neutro (1)

4) $\nexists$ inverso

③ INSIEME $\boxed{\mathbb{Q}}$ = numeri razionali

$$= \{ p/q \,/\, p \in \mathbb{Z},\ q \in N \setminus \{0\}, \text{ t.c. } |p| \text{ e } q \text{ sono primi tra loro} \}$$

non hanno divisori comuni

N.B.

$\frac{1}{q} = q^{-1}$ per "chiudere" l'insieme rispetto all'inverso del prodotto

Questa aggiunta mi ha aperto le operazioni ma non me le chiude

$\frac{p}{q}$ per "chiudere" le operazioni di somma e prodotto

In $\mathbb{Q}$, $\forall\, p/q \neq 0 \quad \exists\, (p/q)^{-1}$ t.c. $p/q \cdot (p/q)^{-1} = 1$

Elenco dei razionali

1	-1	uso 1
$1/2 \quad 2$	$-\frac{1}{2} \quad -2$	uso anche 2
$1/3 \quad 2/3 \quad 3 \quad \frac{3}{2}$	$-\frac{1}{3} \quad -\frac{2}{3} \quad -3 \quad -\frac{3}{2}$	uso anche 3
$\frac{1}{4} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{3} \quad 4$	$-\frac{1}{4} \quad -\frac{3}{4} \quad -\frac{4}{3} \quad -4$	uso anche 4

in questo modo si prendono tutti i razionali

Rappresentazione decimale

Ogni numero razionale può essere rappresentato così:

$$\alpha_0, \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_k \dots$$

$$\alpha_j \in \{0, 1, 2, \dots 9\},\ j \neq 0$$

④ INSIEME $\boxed{\mathbb{R}}$ = numeri reali

4.1 • $\mathbb{R} \supseteq \mathbb{Q}$

4.2 • $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ $\quad \exists\,(-x),\quad x(-x) = x - x = 0$

$\forall x \neq 0,\ \exists\ \frac{1}{x}\ \text{t.c.}\ x \cdot \frac{1}{x} = 1$

4.3 • $\mathbb{R}$ è totalmente ordinato

$\forall x, y \in \mathbb{R},\quad x \leq y$ oppure $y \leq x$

Inoltre

$x \leq y$ e $x \geq y \Rightarrow x = y$

4.4 • Rispetto all'ordinamento, le operazioni interne si comportano così:

$\forall z \in \mathbb{R},\quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

$\forall z \geq 0,\quad x \leq y \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$

$\forall z \leq 0,\quad x \leq y \Rightarrow x \cdot z \geq y \cdot z$

4.5 • $\mathbb{R}$ è completo $\Rightarrow$ ASSIOMA { di COMPLETEZZA / di SEPARAZIONE / di DEDEKIND } *

$\sqrt{2} = 1,4142135\ldots$

Definiamo gli insiemi $A-$ e $A+$ come segue:

$A- = \{1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414, \ldots\}$ tutti n° razionali, aggiungo sempre una cifra

$A+ = \{2,\ 1.5,\ 1.42,\ 1.415, \ldots\}$ sempre più grandi di $\sqrt{2}$

$A\pm \subset \mathbb{Q}$

$\forall x \in A-,\ \forall y \in A+,\quad x < y$

$\exists z \in \mathbb{Q}$ t.c. $\forall x \in A-,\ \forall y \in A+$

$x \leq z \leq y$? no, non esiste un tale z. $\boxed{\text{DIMOSTRAZIONE 3}}$

Supponiamo che esista.

$z < \sqrt{2}$ o $z > \sqrt{2}$

Se $z < \sqrt{2}$

$z = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_j \ldots$

fino a un certo j, tutte le cifre decimali di z corrispondono con quelle di $\sqrt{2}$

z però è razionale, non può essere uguale a $\sqrt{2}$, e al tempo stesso minore

La prima cifra che si discosta da quella di $\sqrt{2}$ deve essere minore

Supponiamo sia la quarta

$z = 1,4141$

Ma $z < 1,4142 \in A-$. Questo va contro l'ipotesi che $z \geq x$, con $x \in A-$

Analogamente, se $z > \sqrt{2} \Rightarrow \exists y \in A+$ t.c. $y < z$ contro l'ipotesi di prima

Unico n° che si interpone tra $A-$ e $A+$ è $\sqrt{2}$, che non è razionale

* $\forall A-, A+ \subset \mathbb{R},\ A-, A+ \neq \emptyset$, t.c. $\forall x \in A-, \forall y \in A+,\ x \leq y$

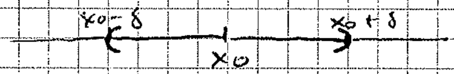
$\Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}$ t.c. $\boxed{x \leq z \leq y}$

$(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$

DEF.

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Si dice INTORNO SFERICO (APERTO) di centro x_0 e raggio $\delta > 0$,

l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \underbrace{|x - x_0|}_{\text{distanza tra } x \text{ e } x_0} < \delta\}$

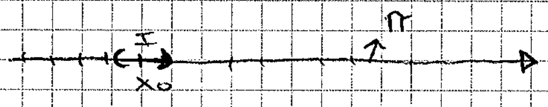


$= (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$

ES

$|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

DEF. $x_0 \in \mathbb{R}$. Un insieme $U \subset \mathbb{R}$ si dice INTORNO di x_0 se $\exists \delta > 0$, $U \supset I(x_0, \delta)$



$= U$ è un intorno di x_0 perché contiene un intorno sferico di x_0

In particolare $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ è un intorno di x_0? sì, perché contiene $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$[x_0 - \delta; x_0]$ è un intorno di x_0? NO

DEF. $x_0 \in \mathbb{R}$.

$U_+ \subset \mathbb{R}$ si dice intorno destro di x_0 se contiene $[x_0; x_0 + \delta)$ per qualche $\delta > 0$

$U_- \subset \mathbb{R}$ si dice intorno sinistro di x_0 se contiene $(x_0 - \delta, x_0]$ per qualche $\delta > 0$

ESTREMO SUPERIORE

$E := \{1, \pi, \sqrt{2}, e\}$ In ordine $1, \sqrt{2}, e, \pi$

DEF.

$E \subset \mathbb{R}$. $\bar{x} \in E$ si dice MASSIMO di E se preso $\forall y \in E$, $y \leq \bar{x}$.

OSS Il massimo di un insieme è unico.

$\boxed{\text{DIMOSTRAZIONE}}$

x_1, x_2 entrambi massimi di E

$x_1 \leq x_2$ (perché x_2 massimo) $x_2 \leq x_1$ (perché x_1 è un massimo)

Se 2 numeri sono $\geq$ dell'altro, allora sono lo stesso n°.

$\Rightarrow x_1 = x_2$

DEF. $\tilde{x} \in E$ minimo se $\forall y \in E$, $\tilde{x} \leq y$.

Domanda: max $[0; 1)$? non c'è. Massimo, per definizione, deve appartenere all'insieme

Infatti, $x \in [0; 1) \Rightarrow x < 1$. Quindi se massimo c'è, $\exists$ (λ) < 1

Ma $\lambda' = \lambda + \frac{1 - \lambda}{2} > \lambda$. $\lambda' = \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ 1

$\lambda' < 1$ $1 > \lambda' > \lambda$ ∴ λ non può essere massimo.

Sup E − ε non e' più l'estremo superiore xk non e' + il minimo dei maggioranti, anzi non e' + un maggiorante.

ESTREMO INFERIORE

$E \neq \emptyset$ limitato inferiormente. $(\exists y \in \mathbb{R}$ t.c. $y \leq x \ \forall x \in E)$

y si dice minorante

$m(E)$ = "insieme dei minoranti di E" ha un massimo.

inf E = massimo di $m(E)$

$\lambda = \inf E$ se e solo se

i) $\forall y \in E, \ \lambda \leq y$

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in E$ t.c. $y < \lambda + \varepsilon$

PROPRIETÀ DI ARCHIMEDE

$\forall x, y > 0, \ x < y.$ $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ t.c. $y < nx$

per quanto piccolo x, se lo moltiplico n volte prima o poi supera y.

$\boxed{\text{DIMOSTRAZIONE 8}}$

$E := \{nx, \ n \in \mathbb{N}\}$

Supponiamo che prop. Archimede falsa.

$nx \leq y \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow E$ e' limitato superiormente

Allora esiste estremo superiore

Usiamo la propr. 2 della caratterizzazione dell'Estremo sup con $\varepsilon = x$

$$\exists \bar{n}x \in E \text{ t.c. } \bar{n}x + \varepsilon = \underbrace{\bar{n}x + x}_{} > z$$

$$(\bar{n}+1)x > z$$

$$(\bar{n}+1) \in E$$

$(\bar{n}+1)x$ non può essere $> z$ perché z estremo superiore di E.

DEF.

$E \subset \mathbb{R}$ si dice denso se $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ x < y, \ \exists \xi \in E$ t.c. $x < \xi < y$ (lettera greca (Xi))

x |—ξ—| y

PROP.

$\mathbb{Q}$ e' un insieme denso nei reali.

$\boxed{\text{DIMOSTRAZIONE 9}}$

Siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad x_1 < x_2$

1) $x_1 < 0 < x_2, \ \xi = 0$ CASO BANALE

2) $0 \leq x_1 < x_2$

Archimede $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $n(x_2 - x_1) = nx_2 - nx_1 > 1$

nx_1 ——— nx_2 c'e' un numero naturale in mezzo

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ t.c. $m \in (nx_1, nx_2) \Leftrightarrow nx_1 < m < nx_2$

$nx_1 \cdot \frac{1}{n} < \frac{m}{n} < nx_2 \cdot \frac{1}{n} \qquad x_1 < \frac{m}{n} < x_2 \qquad \underset{\xi}{\frac{m}{n}} = \text{razionale}$

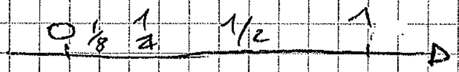
Negando tesi, neghiamo ipotesi.

ES. In N non ci sono punti di accumulazione. Neanche Z

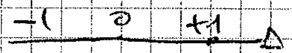
In Q? Punti di accumulazione e' tutto R e non solo Q, perchè x esempio π e' punto di accumulazione in Q pur non appartenendo a Q.

ES. $\left\{ \frac{1}{n}, n \in N \right\}$

Ci sono punti di accumulazione? Lo 0.



ES.

$\left\{ \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right), n \in N \right\}$  $\rightarrow \{0; \pm 1\}$ e' l'insieme, che non ha punti di acc.

oss. Insieme con n° finito di elementi non ha pt di accumulazione

esempio $(0; 1]$ pt di accumulazione? $[0; 1]$. 0 deve appartenere a R, non all'insieme.

esempio $E = \{\sin n, n \in N\}$

LEMMA $x \in R, \forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon \Rightarrow x = 0$

DIMOSTRAZIONE 11

Supponiamo $x \neq 0 \Rightarrow |x| > 0$

$\varepsilon = \frac{|x|}{2}$

Quindi $|x| < \varepsilon = \frac{|x|}{2} \rightarrow 1 < \frac{1}{2}$ ASSURDO. Quindi $x = 0$.

Lemma e' un risultato che serve x dimostrare altre cose.

TEOREMA DI BOLZANO - WEIERSTRASS (non vale se si parlasse solo dei razionali)

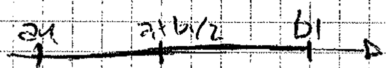
sacerdote boemo — 50 anni dopo

$E \subset R$

E e' limitato $\# E = +\infty$

$\Rightarrow \exists$ punto di accumulazione per E

DIMOSTRAZIONE 12



$a_1 = \inf E \in R$

$b_1 = \sup E \in R$

$\frac{a_1 + b_1}{2}$ = punto medio

Se $\# \left[a_1; \frac{a_1+b_1}{2}\right] \cap E < +\infty$ e $\# \left[\frac{a_1+b_2}{2}; b_1\right] \cap E < +\infty$

$\Rightarrow \# E < +\infty \Rightarrow$ assurdo

Almeno in una delle due metà ha n° infinito di elementi

Per arbitrarietà di ε e per lemma dimostrato prima $\beta - \alpha \leq 0 \Rightarrow \beta \leq \alpha$

Consideriamo $I(\alpha, \delta)$

$\alpha = \inf a_j \Rightarrow \exists\, \tilde{j}$ t.c. $a_{\tilde{j}} > \alpha - \delta$

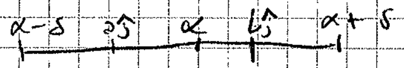
$\alpha = \sup b_j \Rightarrow \exists\, j^*$ t.c. $b_{j^*} < \alpha + \delta$

$\hat{j} = \max(\tilde{j}\,;\, j^*)$

$\alpha - a_{\hat{j}} \leq \alpha - a_{\tilde{j}}$

$a_{\hat{j}} \in I(\alpha; \delta)$

$b_{\hat{j}} - \alpha \leq b_{j^*} - \alpha < \delta \quad \Rightarrow b_{\hat{j}} \in I(\alpha, \delta)$



$\Rightarrow [a_{\hat{j}}\,;\, b_{\hat{j}}] \subset I(\alpha, \delta)$

$\#\,[a_{\hat{j}}\,;\, b_{\hat{j}}] = \infty \quad \Rightarrow \alpha$ pt. di accumulazione di E

TEOREMA BINOMIALE

$a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ = coefficiente binomiale

$\boxed{\text{DIMOSTRAZIONE 13}}$ per induzione

1) base dell'induzione

$n = 1$, $(a+b)^1 = a + b$

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 =$$

$= a + b$ ok

2) passo induttivo

Supponiamo $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ vero

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k}_{I_1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}}_{I_2}$$

$$I_1 = \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k = \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} a^{n-k} b^{k+1}$$

$$I_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

$$(a+b)^{n+1} = I_1 + I_2 = \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} a^{n-k} b^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + \binom{n}{n} b^{n+1} =$$

3) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ Tutte le volte che n e' dispari, la y cambia di segno

4) $x_n = (-1)^n$ cambia sempre da +1 a -1

5) $x_n = n^2$

6) SHIFT DI BERNOULLI (Bernulli)

$x_0 = (\text{reale})\ \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots$

$x_1 = 0, \alpha_2 \alpha_3 \ldots \ldots \alpha_{k+1} \ldots \in (0,1)$

$x_2 = 0, \alpha_3 \ldots \ldots \alpha_{k+2} \ldots$

$\vdots$

ESERCIZIO

Graficare la successione per $x_0 = 1$
$x_0 = 1/3$
$x_0 = \pi$

In simboli

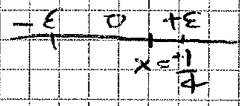
$x_n \to l$, $n \to +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} n = l$

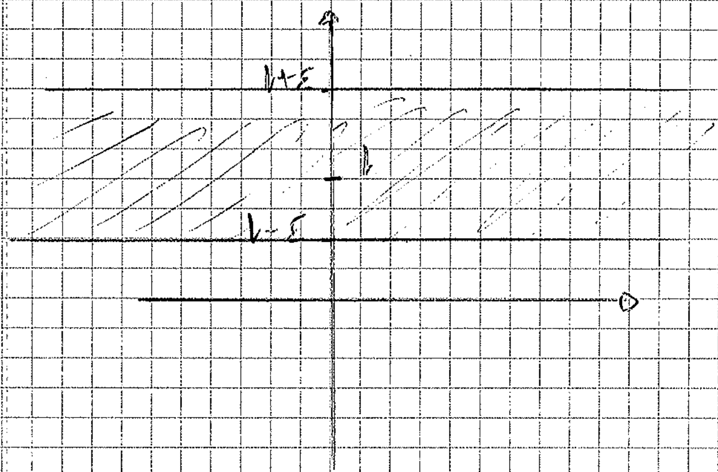
<u>Esempio</u> $\quad x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

Intuitivamente $\quad l = 0$

Intorno $\quad (-\varepsilon, +\varepsilon)$



Da $x_n = \dfrac{1}{4}$, i punti dopo saranno dentro l'intorno $(-\varepsilon; +\varepsilon)$



Da un certo punto in poi, tutti i punti cadranno dentro l'intervallo segnato

<u>OSS.</u>

$\bar{n}$ dipende da ε.

Con ε molto piccolo, si aspetta un $\bar{n}$ molto grande perché il punto cada nell'intervallo.

<u>ES.</u> Dimostrare che $\dfrac{1}{n}$ tende a 0 per $n \to +\infty$

Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Per quali valori di n si ha che $\left|\dfrac{1}{n} - l\right| = \left|\dfrac{1}{n}\right| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$

È sufficiente che sia n più grande di $\dfrac{1}{\varepsilon}$ $\quad n > \dfrac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow n \geq \underbrace{\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]}_{\text{parte intera}} + 1$

Definisco $\bar{n} = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

Allora, $n > \bar{n} \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ $\qquad$ Dimostrato

<u>OSS.</u>

$\bar{n} = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ dipende da ε

<u>ES</u> $\quad \dfrac{\text{sen}\, n}{n}$. Dimostrare con $n \to +\infty$, che limite è 0.

Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. $\quad \left|\dfrac{\sin n}{n}\right| < \varepsilon$?

TEOREMA DEI DUE CARABINIERI

2 successioni: $x_n \to l,\ n \to +\infty$

$y_n \to l,\ n \to +\infty$

terza successione z_n tale che $x_n \leq z_n \leq y_n$

$\Rightarrow z_n \to l,\ n \to +\infty$

DIMOSTRAZIONE 16

$\varepsilon > 0$ arbitrario.

$\exists \bar{n}_1$ t.c. $n > \bar{n}_1 \Rightarrow |x_n - l| < \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon$

$\exists \bar{n}_2$ t.c. $n > \bar{n}_2 \Rightarrow |y_n - l| < \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < y_n < l + \varepsilon$

$\bar{n} = \max(\bar{n}_1, \bar{n}_2)$

$n > \bar{n} \Rightarrow$

$l - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < l + \varepsilon$

$l + \varepsilon < z_n < l + \varepsilon \qquad |z_n - l| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} z_n = 0$

$z_n \in I(l, \varepsilon)$

SUCCESSIONE LIMITATA

1) $\{x_n\}$ si dice limitato superiormente se esiste $K > 0$ t.c.

$x_n \leq K,\ \forall n \in \mathbb{N}$

2) $\{x_n\}$ si dice limitato inferiormente se $\exists K' > 0$ t.c.

$x_n \geq K,\ \forall n \in \mathbb{N}$

3) $\{x_n\}$ si dice limitato quando esiste $\exists M > 0$

t.c. $|x_n| \leq M$

PROP

$x_n \to l,\ n \to +\infty \Rightarrow x_n$ è limitata.

DIMOSTRAZIONE 17

$\exists \bar{n}$ t.c. $n > \bar{n} \Rightarrow |x_n - l| < 1$ (cioè $\varepsilon = 1$)

$\Leftrightarrow l - 1 < x_n < l + 1$

$|x_n| < |l| + 1 \quad (*)$

$\{|x_0|, |x_1|, |x_2|, \ldots |x_{\bar{n}}|, |l| + 1\} = X$

sia $M = \max(X)$

$\boxed{|x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

se $n \leq \bar{n}$, $|x_n| \in X \Rightarrow x_n \leq M$

se $n > \bar{n}$ per $(*)$ $|x_n| < |l| + 1$

$\exists n_1, n > n_1 \Rightarrow |y_n - k| < \dfrac{\varepsilon}{\Pi + |k|}$

N.B $\qquad \Pi > 0$ per definizione di successione limitata

$\exists n_2, n > n_2 \Rightarrow |x_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{\Pi + |k|}$

$\Rightarrow$ se $n > \bar{n} = \max(n_1, n_2) \qquad |x_n y_n - lk| < \Pi \dfrac{\varepsilon}{\Pi + |k|} + |k| \dfrac{\varepsilon}{\Pi + |k|} = \varepsilon$

d) Osserviamo che $\exists m > 0$ t.c $|y_n| \geq m$ cioè che mantiene una certa distanza m da 0.

$\exists \nu(n_1) \in \mathbb{N}$ t.c. $n > \nu \Rightarrow |y_n - k| < \dfrac{k}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{k}{2} < y_n < \dfrac{3}{2} k \qquad \Rightarrow |y_n| \geq \dfrac{|k|}{2}$

$Y = \{ |y_0|, |y_1|, \dots |y_\nu|, \dfrac{|k|}{2} \}$

$m = \min(Y)$ esiste perché Y finito

m esiste e $m > 0$

Inoltre $|y_n| \geq m$ perché $|y_n| \geq \dfrac{|k|}{2}$

$\left| \dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{l}{k} \right| = \left| \dfrac{x_n k - y_n l}{k \cdot y_n} \right| = \dfrac{|x_n k - y_n l|}{|k y_n|} \leq \dfrac{|x_n k - y_n l|}{|k| \cdot m}$ perché $\dfrac{1}{|y_n|} \leq \dfrac{1}{m}$

$\leq \dfrac{|x_n k - kl + kl - y_n l|}{|k| \cdot m} \leq \dfrac{|k||x_n - l| + |l||y_n - k|}{|k| m}$

$\exists n_1, n > n_1 \Rightarrow |x_n - l| < \dfrac{|k| m \varepsilon}{|k| + |l|}$ con $k \neq 0$ (ipotesi)

$\exists n_2, n > n_2 \Rightarrow |y_n - k| < \dfrac{|k| m \varepsilon}{|k| + |l|}$

$\bar{n} = \max(n_1, n_2)$

$n > \bar{n} \Rightarrow \left| \dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{l}{k} \right| < \dfrac{|k| m \varepsilon}{|k| + |l|} \left(\dfrac{|k| + |l|}{|k| m} \right)$

$\left| \dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{l}{k} \right| < \varepsilon \qquad$ per definizione di limite $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{l}{k}, n \to +\infty$

Esempio

$p > 0 \qquad x_n = \sqrt[n]{p} = p^{1/n}$

"l'unico numero positivo che elevato alla n.ma potenza dà p.

i) $p > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{p} > 1$

Se così non fosse avrei che $(\sqrt[n]{p})^n < (1)^n \Rightarrow p < 1$

definisco h_n t.c $\sqrt[n]{p} = 1 + h_n$, con $h_n \geq 0$

i) $a<0$ esercizio

DEF. x_n successione reale

Si dice x_n positivamente divergente se $\forall K>0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$

$n > \bar{n} \Rightarrow x_n > K$

Dopo un po', i termini della successione sono tutti oltre K

$x_n \to +\infty, \ n \to +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

DEF. Successione x_n negativamente divergente

$\forall K>0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \quad n > \bar{n} \Rightarrow x_n < -K$

Esempio

$x_n = n^2$ positivamente divergente

$x_n = (-1)^n \, n$ né + né − divergente

PROP. (Algebra dei limiti in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$)

1. $x_n \to +\infty$, y_n lim. inf. $\Rightarrow x_n + y_n \to +\infty$
2. $x_n \to -\infty$, y_n lim. super. $\Rightarrow x_n + y_n \to -\infty$
3. $x_n \to +\infty$, $y_n \to K>0 \Rightarrow x_n \cdot y_n \to +\infty$
4. $x_n \to +\infty$, $y_n \to K<0 \Rightarrow x_n \cdot y_n \to -\infty$
5. $x_n \to -\infty$, $y_n \to K>0 \Rightarrow x_n \cdot y_n \to -\infty$
6. $x_n \to -\infty$, $y_n \to K<0 \Rightarrow x_n \cdot y_n \to +\infty$
7. $|x_n| \to +\infty$, $\frac{1}{x_n} \to 0$
8. $x_n \to 0$, $x_n \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{|x_n|} \to +\infty$

Se inoltre $x_n > 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \to +\infty$

se invece $x_n < 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \to -\infty$

$x_n \to 0$ e y_n limitata $\quad x_n \cdot y_n \to 0$

DIMOSTRAZIONE x esercizio

DEF. se $\{x_n\}$ è convergente o divergente, si dice REGOLARE.

N.B. $x_n = (-1)^n \cdot n$ non è regolare ma OSCILLANTE

Una successione non regolare si dice oscillante

Esempio

$x_n = \sin n$

(eventualmente)
DEFINITIVAMENTE = "da un certo n in poi"

Quello che succede all'inizio di una successione non è interessante, ma è la "coda" interessante.

SUCCESSIONI MONOTÓNE

1) $\{x_n\}$ si dice monotona crescente o monotona non decrescente se x_{n+1} è maggiore o uguale a x_n. (rientrano anche le successioni costanti)

$$x_{n+1} \geq x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2) monotona strettamente crescente quando

$$x_{n+1} > x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

3) monotona decrescente

$$x_{n+1} \leq x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

4) monotona strettamente decrescente

$$x_{n+1} < x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

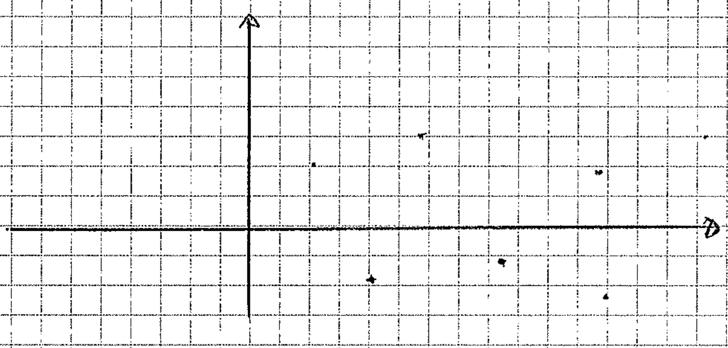
esempi

$\frac{1}{n} = x_n$ strettamente decrescente

$x_n = e^{-n}$ str. decrescente

$x_n = \sin n$ non è monotona

$x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ no monotona ma neanche oscillante, perché limite $= 0$



$x_n = \sin 1 \cdot \sin 2 \cdot \sin 3 \dots \sin n$

PROP. Una successione monotona è sempre regolare.

In particolare

1) x_n monotona crescente, $\lim x_n =$ estremo superiore $\{x_n\}$

2) x_n monotona decrescente, $\lim x_n =$ estremo inferiore $\{x_n\}$

$n < n+1$

$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ $\qquad -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1}$ $\qquad 1-\frac{1}{n} < 1-\frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow x_n < x_{n+1} \Rightarrow x_n$ MONOTONA STRETTAMENTE CRESCENTE $\Rightarrow$ REGOLARE

Converge o diverge? Controlliamo se è limitato o meno,

Troviamo un numero che sia maggiore di x_n e che non dipenda da n, in modo da poter dire che è illimitato

$$x_n \leq \sum_{k=0}^{n} k!$$

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots k} < \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2 \cdots 2} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

con $k>0$ $\qquad$ perché D aumenta, N diminuisce

$$x_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} =$$

ho scalato l'indice

$$< 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1+2 = 3$$

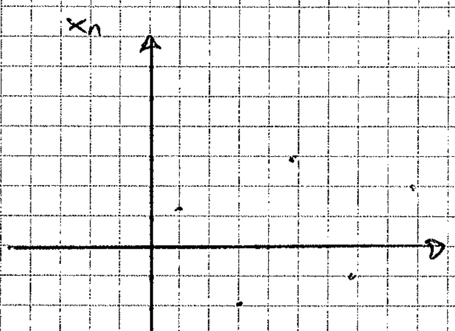
$\forall x_n,\ x_n < 3 \Rightarrow x_n$ limitato quindi x_n convergente

$\lim x_n = \sup x_n \leq +3$ (minimo dei maggioranti

DEF. $\lim x_n = e$

$e = 2{,}718281828459045$

SOTTOSUCCESSIONI



Una sottosuccessione è una successione ottenuta prendendo alcuni elementi della successione in ordine.

Sia $\{x_n\}$ una successione

$\{y_n\}$ è detta sottosuccessione di $\{x_n\}$ o SUCCESSIONE ESTRATTA se

$\exists\ \varphi$ (phi) $: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad$ t.c. $y_k = x_{n_k}\ \forall k \in \mathbb{N}$

strettamente crescente $\quad k \mapsto n_k$

COROLLARIO Sia $\{x_n\}$ limitata, allora esiste sottosuccessione convergente.

Per il teorema precedente si estrae sottosucc. monotona, che è a sua volta limitata, $\Rightarrow$ convergente.

EX. $\sin n$

LIMITI DI FUNZIONI

Casi particolari

Successione: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \mapsto x_n$

convergente $x_n \to l \in \mathbb{R}$, $n \to \infty$

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \quad n > \bar{n} \Rightarrow |x_n - l| < \varepsilon$

$I(x_0, \overset{eta}{\eta}) = (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$

U t.c. $\exists \eta$, $U \supset I(x_0, \eta)$

(1) DEF.

La famiglia di intorni del punto x_0 $\mathcal{U}_{x_0} = \{U$ t.c. U contiene un intorno sferico di $x_0\}$

(1) bis

$\forall V \in \mathcal{U}_l \ \exists \bar{n} \quad n > \bar{n} \Rightarrow x_n \in V$

DEF.

$U \subset \mathbb{R}$ intorno di $+\infty$ se $\exists k > 0$ t.c. $U \supset (k, +\infty)$

$\mathcal{U}_{+\infty} = \{U$ t.c. U è un intorno di $+\infty\}$

DEF.

$U \subset \mathbb{R}$ è intorno di $-\infty$ se $\exists k > 0$ t.c. $U \supset (-\infty, -k)$

$\mathcal{U}_{-\infty} = \{U$ t.c. U è un intorno di $-\infty\}$

(1) ter

$\forall V \in \mathcal{U}_l \ \exists \ \in \mathcal{U}_{+\infty}$ t.c. $n \in U \cap \mathbb{N} \Rightarrow x_n \in V$

Questa è + generale xk ammette anche casi limiti $+\infty$ e $-\infty$, cioè anche successioni divergenti.

Simbolo

$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ossia o $+\infty$ o $-\infty$

Ogni punto di $\bar{\mathbb{R}}$ possiede una famiglia di intorni $\mathcal{U}_x$

Consideriamo $E \subset \mathbb{R}$

$f: E \to \mathbb{R}$

DEF. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \bar{\mathbb{R}} \iff \forall V \in \mathcal{U}_l \ \exists U \in \mathcal{U}_{+\infty}$ t.c.

$$\underbrace{x \in U \cap E \Rightarrow f(x) \in V}_{f(U \cap E) \subset V}$$

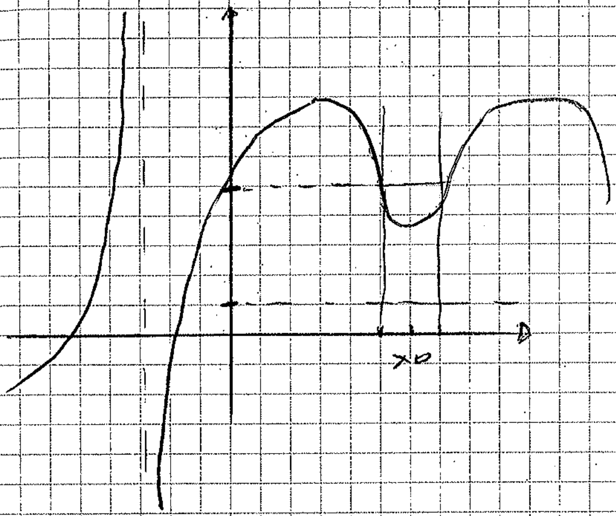


Immagine di x_0 è contenuta nel rettangolo formato tra intorno di x_0 e intorno di l

OSS. Il limite non dipende dal comportamento della f in x_0.

In particolare, può succedere che

1) $x_0 \notin E$ (sede di un asintoto)

2) $x_0 \in E$, $f(x_0) \neq \lim_{x \to x_0} f(x)$

ESEMPI

1) $f(x) = x^2$. $\lim_{x \to x_0} f(x) = (x_0)^2$ Dimostrarlo.

Sia $\varepsilon > 0$,

$|f(x) - l| = |x^2 - x_0^2| \leq |x - x_0||x + x_0| \leq |x - x_0|(|x| + |x_0|)$

Supponiamo $\delta < 1$ $(\delta > 0)$

$\Rightarrow |x| < |x_0| + 1$

$|f(x) - l| < |x - x_0|(1 + 2|x_0|)$

Supponiamo $\delta < \dfrac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|} \Rightarrow |f(x) - l| < \dfrac{\varepsilon}{1+2|x_0|}(1 + 2|x_0|)$

In definitiva, scegliendo $\delta = \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}\right)$, ho

$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

2) $f(x) = x^n$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = (x_0)^n$

Sia $\varepsilon > 0$ Da trovare δ

$|f(x) - l| = |x^n - x_0^n| = |x - x_0| \cdot |x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots x_0^{n-1}|$

Sia $\delta \leq 1 \Rightarrow |x| \leq |x_0| + 1$

$x^{n-1} < (1 + |x_0|)^{n-1}$

$x^{n-2}x_0 < (1 + |x_0|)^{n-2}|x_0| < (1 + |x_0|)^{n-1}$

$\Rightarrow |f(x) - l| < |x - x_0|(1 + |x_0|)^{n-1} \cdot n$

$\delta = \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{n(1 + |x_0|)^{n-1}}\right)$

$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \dfrac{\varepsilon}{\cancel{n(1 + |x_0|)^{n-1}}} \cancel{n(1 + |x_0|)^{n-1}}$

3) $f(x) = \sin x$ $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

$\varepsilon > 0$

$|f(x) - l| = |\sin x|$

Consideriamo $\delta_n = \frac{1}{n}$

$\exists x_n, \ 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ t.c. $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon_0$

$\Rightarrow \lim f(x_n) \neq l$

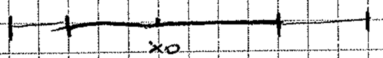
D'altra parte $0 \leq |x_n - x_0| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \to x_0$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$0 \quad 0 \quad 0$

$U, V \in \mathcal{U}_{x_0} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}_{x_0}$

l'intersezione di 2 intorni di x_0 è ancora un intorno di x_0



DEF. $f: E \to \mathbb{R}$

x_0 pt di accumulazione per E

$x_0 \in \overline{\mathbb{R}}, \quad l \in \overline{\mathbb{R}}$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ oppure $f(x) \to l, x \to x_0$

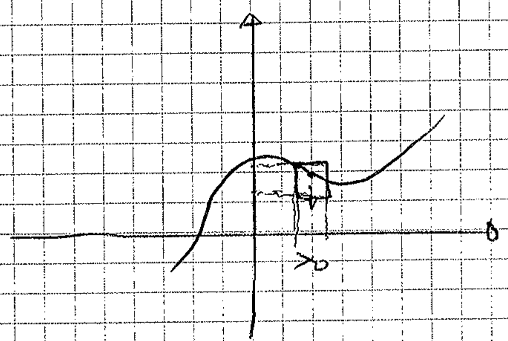
$\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{U}_l, \ \exists U \in \mathcal{U}_{x_0}$ t.c. $x \in U \cap E \setminus \{x_0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \in V$

se x_0 e $l \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ (che dipende da ε)

$0 < |x - x_0| < \varepsilon, \ x \in E$

$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$



$x_0 = -\infty, \quad l = +\infty$

$\forall K > 0 \ \exists M > 0$ t.c. $x \in E$ e $x < -M \Rightarrow f(x) > K$

TEOREMA

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset E \setminus \{x_0\}$ t.c. $x_n \to x_0, n \to +\infty$

allora $f(x_n) \to l$

$\exists U_2 \in U_{x_0}$ t.c. $x \in U_2 \cap E \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$

Definisco $U = U_1 \cap U_2 \Rightarrow \forall x \in U_1 \cap U_2 \cap E \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$|f(x) - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow |l - l'| < \varepsilon$$

Per il lemma ε, $l = l'$.

1° TEOREMA DEL CONFRONTO o dei DUE CARABINIERI al finito

$f, g, h : E \to \mathbb{R}$

x_0 pt di accumulazione per E

$\exists W \in U_{x_0}$ t.c. $f(x) \le h(x) \le g(x)$

$\forall x \in W \cap E \setminus \{x_0\}$

Inoltre $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$

Allora $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$

DIMOSTRAZIONE 25

$f(x) \to l$, $x \to x_0 \Rightarrow \exists U_1 \in U_{x_0}$ t.c. $x \in U_1 \cap E \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

Analogamente per g

$\exists U_2 \in U_{x_0}$ t.c. $x \in U_2 \cap E \setminus \{x_0\} \Rightarrow l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$

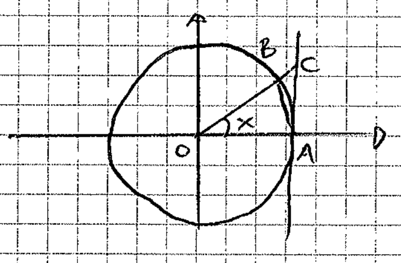
$U := U_1 \cap U_2$

Allora $x \in U \cap E \setminus \{x_0\} \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < h(x) < g(x) < l + \varepsilon$

$\lim_{x \to x_0} h(x) = l$.

1° Esempio notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad x > 0$$



$\text{Area}(O\hat{A}B) = \frac{\sin x}{2}$

$\text{Area}(\widehat{OAB}) = \frac{x}{2}$

$\overline{AC} = \operatorname{tg} x$

$\text{Area}(O\hat{A}C) = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$

Dalle inclusioni dei triangoli, $\sin x \le x \le \operatorname{tg} x$

$\exists U \in \mathcal{U}_{x_0}$ t.c. $x \in U \cap E \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{l}{2} \Rightarrow 0 < \frac{l}{2} < f(x)$

<u>DEF.</u> $f: E \to \mathbb{R}$ si dice limitata in $E' \subset E$ se $\sup_{x \in E} |f(x)| < +\infty$

<u>PROP.</u> $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}_{x_0}$ t.c. f è limitata in

$U \cap E \setminus \{x_0\}$

DIMOSTRAZIONE 27

Procedendo come nel caso precedente,

1) $l > 0 \Rightarrow \frac{l}{2} < f(x) < \frac{3}{2}l \Rightarrow |f(x)| < \frac{3}{2}l$

2) $l < 0 \Rightarrow \frac{3l}{2} < f(x) < \frac{l}{2} \Rightarrow |f(x)| < \frac{3}{2}|l|$

3) $l = 0$ $\exists U \in \mathcal{U}_{x_0}$ t.c. $x \in U \cap E \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x)| < 1$

2° <u>LIMITE NOTEVOLE</u>

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Già visto per le successioni. Se per tutte le successioni vale, allora vale anche per le funzioni e non devo dimostrarlo.

<u>ALGEBRA DEI LIMITI</u>

$E \subset \mathbb{R}$, x_0 e' pt di acc. per E

$f, g : E \to \mathbb{R}$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to x_0} g(x) = K \in \mathbb{R}$

1) $\lim_{x \to x_0} (f+g) = l + K$

DIMOSTRAZIONE 28

$$|(f+g)(x) - (l+k)| = |f(x) + g(x) - (l+k)| \leq |f(x) - l| + |g(x) - k|$$

Sia $\varepsilon > 0$

$\exists U_1 \in \mathcal{U}_{x_0}$ t.c. $x \in U \cap E \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists U_2 \in \mathcal{U}_{x_0}$ t.c. $x \in U \cap E \setminus \{x_0\} \Rightarrow |g(x) - k| < \frac{\varepsilon}{2}$

$U = U_1 \cap U_2$

$x \in U \cap E \setminus \{x_0\} \Rightarrow |(f+g)x - (l+k)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

2) $c \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} c f(x) = cl$

3) $\lim_{x \to x_0} (fg)x = lk$

DIMOSTRAZIONE 29

$$|f(x) \cdot g(x) - lk| = |f(x) g(x) - f(x)k + f(x)k - lk| \leq |f(x)||g(x) - k| +$$
$$+ |k||f(x) - l| \quad (*)$$

TEOREMA (COMPOSIZIONI DI FUNZIONI)

$f: E \to F$

$g: F \to \mathbb{R}$

x_0 pt di accumulazione per E, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\lim_{y \to l} g(y) = K \in \overline{\mathbb{R}}$$

Inoltre, se $l \in F \Rightarrow g(l) = K$

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{y \to l} g(y) = K$$

In particolare, se $l \in F$ $\quad \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)$

DIMOSTRAZIONE 3!

Sia $V \in \mathcal{U}_K \Rightarrow \exists\, W \in \mathcal{U}_l$ t.c. $y \in W \cap F \setminus \{l\} \Rightarrow g(y) \in V$

Se $l \notin F$ $\quad W \cap F \setminus \{l\}$ è superfluo perché è già detto

se invece $l \in F \Rightarrow g(l) = K$ quindi anche in questo caso è superfluo. Possiamo quindi togliere "$\setminus \{l\}$"

$\exists\, U \in \mathcal{U}_{x_0}$ t.c. $x \in U \cap E \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in W \cap F \Rightarrow g(f(x)) \in V$

Esempio **LIMITE NOTEVOLE 3**

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

FORMULA DI BISEZIONE

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{\frac{1-\cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)}{2} \cdot 2}{x^2} = \frac{2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x/2}{x/2}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{2}} \quad \text{oppure} \quad \frac{1}{2} \frac{\sin x/2}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin x/2}{\frac{x}{2}}$$

Applico il teorema

$$f(x) = \frac{x}{2}$$

$$g(y) = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 y}{y^2}$$

$$(g \circ f)x = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x \to 0} (g \circ f)x = \lim_{y \to 0} g(y) = \lim_{y \to 0} \frac{1}{2} \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2}$$

Come si fa in pratica?

$$\frac{1}{2} \frac{\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad \text{con } \frac{x}{2} = y \text{ (entrambi tendono a 0)}$$

DIMOSTRAZIONE 32

$\Rightarrow$

Sia $V \in \mathcal{U}_l$

$\exists U \in \mathcal{U}_{x_0}$ t.c. $x \in U \cap E \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V$

$U_+ := U \cap [x_0; +\infty)$

$U_- = U \cap (-\infty; x_0]$

$x \in U_+ \cap E \setminus \{x_0\} \Rightarrow x \in U \cap E \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$

Analogalmente $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$

$\Leftarrow$

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \Rightarrow \forall V \in \mathcal{U}_l \quad \exists U_+ \in \mathcal{U}_{x_0^+}$ t.c. $x \in U_+ \cap E \setminus \{x_0\}$
$\Rightarrow f(x) \in V$

Analogalmente $\exists U_- \mathcal{U}_{x_0^-}$ t.c. $x \in U \cap E \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V$

$\exists U_1 \in \mathcal{U}_{x_0}$ t.c. $U_+ = U_1 \cap [x_0, +\infty)$

$\exists U_2 \in \mathcal{U}_{x_0}$ t.c. $U_- = U_2 \cap (-\infty, x_0]$

$U = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_{x_0}$

$x \in U \rightarrow x > x_0 \Rightarrow x \in U_1 \Rightarrow x \in U_+ \Rightarrow f(x) \in V$

$x < x_0$, $x \in U_2 \Rightarrow x \in U_- \Rightarrow f(x) \in V$

6° LIMITE NOTEVOLE

$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

$\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

$y = \frac{1}{x} \to +\infty \Rightarrow \lim_{y \to +\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$

$\lim_{x \to 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

$y = \frac{1}{x} \to -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Algebra dei limiti in $\overline{\mathbb{R}}$

$\left|\frac{1}{0}\right| = +\infty \qquad \frac{1}{0} = ?\ \pm\infty$ a seconda dei casi

$\frac{1}{0^+} = +\infty \qquad \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

PUNTI DI DISCONTINUITÀ

$f: E \to \mathbb{R}$, x_0 pt di accumulazione per E

t.c. $\forall U_+ \in \mathcal{U}_{x_0^+}$, $E \cap U_+ \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

$\forall U_- \in \mathcal{U}_{x_0^-}$, $E \cap U_- \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

Studiamo:

$f(x_0^+) := \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

$f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

Tre possibilità:

1) $f(x_0^+) = f(x_0^-) = l \in \mathbb{R}$

Tre sotto possibilità:

a) $x_0 \notin E$

Esempio

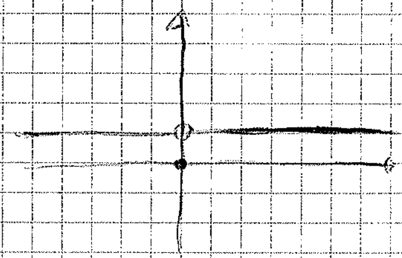
$f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x_0 = 0$ che non appartiene al Dominio

b) $x_0 \in E$, $f(x_0) \neq l$

Esempio

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to \lim_{n \to +\infty} |x|^{1/n} = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



$f(0^+) = f(0^-) = 1 \neq 0 = f(x_0)$

c) $x_0 \in E$, $f(x_0) = l$

$f(x) = \sin x$

$x_0 = \frac{\pi}{2}$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

1a) e 1b) $\Rightarrow \exists!$ $\tilde{f}$ t.c. $\tilde{f}$ è localmente (= in un qualche intorno di x_0)
unica

uguale a f, eccetto che nel punto x_0, e $\tilde{f}(x_0) = f(x_0^+)$

lo faccio x farlo diventare continuo

Esempio

$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

$\tilde{f}$ è una funzione il cui comportamento in 0 è del tipo 1c) ora lo ho aggiunto che anche in 0 la funzione è uguale a 1, cioè il limite per $x \to 0$ di $\frac{\sin x}{x}$

Si dice che f è "continua" in x_0.

CASO DI DISCONTINUITÀ ELIMINABILE: 1b), 1a)
o 3ª SPECIE

PROP.

$f(x): [a,b] \to \mathbb{R}$ funzione monotona crescente

$x_0 \in (a,b)$ un punto di discontinuità per f

Allora x_0 è un punto di discontinuità di 1ª specie

LEMMA

$f: E \to \mathbb{R}$ monotona crescente ; x_0 pt di accumulazione per E

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf f(x)$ per $x > x_0$

(nel caso $x_0 \neq +\infty$)

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup f(x)$ $x < x_0$

se $x_0 \neq -\infty$

DIMOSTRAZIONE 33

Siccome posso calcolare $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, $x_0 \neq \inf E$

Due casi: $f(x)$ illimitata in $U \in U_{x_0^-}$ di x_0 ;

$f(x)$ limitata in $U \in U_{x_0^-}$

Nel primo caso $\lim_{x \to x_0^-} = +\infty = \sup f(x)$

Nel 2º caso $|f(x)| \leq L$ $\forall x \in U \Rightarrow \sup f(x) < +\infty$ per $x < x_0$

Tesi

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup f(x)$

Sia $x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0^+)$

$f(x_0^+)$ è maggiorante per $\{ f(x), x < x_0, x \in E\}$

Sia $\varepsilon > 0$. Per definizione di estremo superiore

$\exists x < x_0$ t.c. $f(x) > \sup f(x) + \varepsilon$

$\Rightarrow \forall x'$, $x < x' < x_0$ $\Rightarrow f(x') \geq f(x) > \sup_{x < x_0} f(x) - \varepsilon$

$\wedge$

$\sup f(x) >$

$\Rightarrow \forall x' \in (x, x_0)$

$\sup f(x) - \varepsilon < f(x) < \sup f(x) + \varepsilon$

$\Rightarrow \sup f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

PROP. I punti di discontinuità $x_0 \in (a,b)$ di una funzione monotona crescente (o decrescente) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sono tutti di 1ª specie.

DIMOSTRAZIONE 34

Sia $x_0 \in (a,b)$ un punto di discontinuità

$$f(a) \leq \sup_{x \in [a, x_0)} f(x) \leq \inf_{x \in (x_0, b]} f(x) \leq f(b) \quad (*)$$

Perché la seconda maggiorazione?

$\forall x \in [a, x_0)$, $\forall y \in (x_0, b]$, $f(x) \leq f(y)$

A contiene tutti i pt di discontinuità

A è un'unione numerabile di elementi finiti e quindi è numerabile

ES

Trovare f monotona crescente che abbia esattamente un n° numerabile di discontinuità

PROP.

$a<b$, $a,b \in \mathbb{R}$

$f:[a;b] \to \mathbb{R}$ monotona crescente

$x_0 \in (a,b)$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{a \leq x < x_0} f(x)$

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x_0 < x \leq b} f(x)$

DIMOSTRAZIONE 30

$\varepsilon > 0$ $\quad \sup f(x) < +\infty$ perché $\forall x \in [a,x_0)$, $f(x) \leq f(b)$ per monotonia

Per definizione di sup $\exists \bar{x} \in (a,x_0)$ t.c. $f(\bar{x}) > \sup_{a \leq x < x_0} f(x) - \varepsilon$

Per monotonia, $\forall x \in (\bar{x},x_0)$

$$f(x) \geq f(\bar{x}) > \sup f(x) - \varepsilon$$

Ma $f(x) \leq \sup_{a \leq x < x_0} f(x) < \sup f(x) + \varepsilon$

$U_- := (\bar{x}, x_0)$

$x \in U_- \Rightarrow \sup_{a \leq y < x_0} f(y) - \varepsilon < f(x) < \sup_{a \leq y < x_0} f(y) + \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{a \leq y < x_0} f(y)$

CONTINUITÀ

DEF $\quad f: E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in E$

f si dice CONTINUA in x_0 se $\forall V \in \mathcal{U}(f(x_0))$, $\exists U \in \mathcal{U}_{x_0}$ t.c. $x \in U \cap E$ $\Rightarrow f(x) \in V$

Due casi

1) x_0 pt di accumulazione per E

Allora, se f è continua in x_0, $x \in U \cap E \setminus \{x_0\} \Rightarrow x \in U \cap E$

$\Rightarrow f(x) \in V$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$

Proprietà delle funzioni continue

1) LOCALE LIMITATEZZA

f continua in x_0 $\Rightarrow \exists\, U \in U_{x_0}$

f limitata in U

LOCALE = in un intorno del punto che sto considerando

2) PERMANENZA DEL SEGNO

f continua in x_0, $f(x_0) > 0$

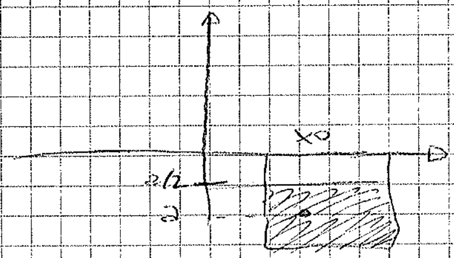
$\Rightarrow \exists\, U \in U_{x_0}$ t.c. $x \in U \cap E \Rightarrow f(x) > 0$

Analogamente se $f(x) < 0$

ES.

f continua in x_0, $f(x_0) = a < 0$

Allora $\exists$ un intorno di x_0 in cui $f(x) < \frac{a}{2}$? SI



OSS. Se richiesto $f(x) > \frac{a}{2}$, NO

Algebra delle funzioni continue

1) f, g continue in x_0 $\Rightarrow$ $f+g$ continua in x_0

2) f, g continue in x_0 $\Rightarrow$ $f \cdot g$ continua in x_0

3) // se $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ continua in x_0

$f: E \to F$, $g: F \to \mathbb{R}$

f continua in x_0, $f(x_0) = l$

g continua in l $\Rightarrow$ $(g \circ f)$ è continua in x_0

$(g \circ f)(x_0) = g(l)$

OSS. Se x_0 è pt di accumulazione per E, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

g continua in l

$\lim_{x \to x_0} (g \circ f) = g(l) = g(\lim_{x \to x_0} f(x))$

ES.

$f(x) = x^2$

Dimostrare che $\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0^2$

Sia $\varepsilon > 0$

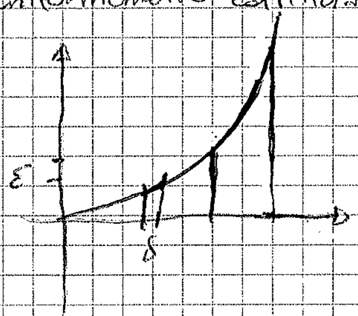
$|x^2 - x_0^2| = |x_0 - x|\,|x_0 + x| \leq |x_0 - x|(|x_0| + |x_0| + 1) = |x_0 - x|(1 + 2|x_0|)$ (*)

$\delta \leq 1$

(*) $< \varepsilon$ Basta prendere $\delta < \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}$

$f(x) = x^2 \qquad E = \mathbb{R}^+$

non uniformemente continua



Andando verso destra troveremo una δ in modo che la differenza tra $f(x)$ e $f(y)$ è maggiore di ε (fissato prima)

con $E = [0; 1]$ $\quad f(x) = x^2$ è uniformemente continua in E

Dato $\varepsilon > 0$ $\qquad \delta = \min\left(1; \frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}\right)$

$$\forall\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Ma $|x_0| \le 1 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{1+2|x_0|} \ge \frac{\varepsilon}{3}$

Quindi se prendo $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{3}\right)$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \forall x, x_0$$

$y = x$ è uniformemente continua

<u>Esempio</u>

$f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto \sqrt{x}$ è uniformemente continua

Infatti, $0 < x, y < +\infty$, $x < y$

Allora $\sqrt{y} - \sqrt{x} < \sqrt{y-x}$ Perché?

$$x + y - 2\sqrt{xy} < y - x$$

$$\cancel{2}x < \cancel{2}\sqrt{xy}$$

$$\sqrt{x} \cdot \cancel{\sqrt{x}} < \cancel{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{y}$$

$$\sqrt{x} < \sqrt{y}$$

VERA x IPOTESI

$\delta = \varepsilon^2$ non dipende da x_0

$|x - y| < \delta$

$$|x| - |y| < \sqrt{|y - x|} = \varepsilon$$

<u>FUNZIONI CONTINUE SU INTERVALLI</u>

$f: [a; b] \to \mathbb{R}$

Dominio chiuso e limitato $\quad -\infty < a < +\infty$

<u>DEF.</u> $f: E \to \mathbb{R}$

$\bar{x} \in E$ si dice <u>PUNTO DI MASSIMO</u> ASSOLUTO O GLOBALE se $\forall y \in E \quad f(\bar{x}) \ge f(y)$

si dice PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO <u>STRETTO</u> se $\forall y \in E \quad f(\bar{x}) > f(y)$

$\bar{x}$ PUNTO DI MINIMO GLOBALE O ASSOLUTO se $\forall y \in E \quad f(\bar{x}) \le f(y)$

" " " " " STRETTO se $\forall y \in E \quad f(\bar{x}) < f(y)$

$f(a)<0 \quad , f(b)>0$

Allora $\exists \bar{x} \in [a,b]$ t.c. $f(\bar{x})=0$

$\boxed{\text{DIMOSTRAZIONE 39}}$

$a = x_0 \quad , \quad b = y_0$

Nel punto medio $\frac{x_0+y_0}{2}$

se $f\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right)=0$ ok

se $f\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right)>0$

$x_1 = a \quad , \quad y_1 = \frac{x_0+y_0}{2}$

se $f\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right)<0$

$x_1 = \frac{x_0+y_0}{2} \quad , \quad y_1 = b$

Ripeto questo algoritmo n volte

se non capita mai che $f\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right)=0 \quad \forall n$

otteniamo 2 successioni

$\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ t.c. $a \le x_n \le y_n \le b$

$x_n \le y_m \quad \forall n,m$

$\forall n,m \quad f(x_n)<0, \ f(y_m)\ge 0$

Inoltre, x_n monotona crescente limitata

$y_n - x_n = \frac{b-a}{2^n}$

$\Rightarrow x_n \to \bar{x}$

y_n decrescente limitata, $y_n \to \bar{y}$

$$|\bar{x}-\bar{y}| \le |\bar{x}-x_n| + |\bar{y}-y_n| + |x_n-y_n|$$

$$|\bar{x}-\bar{y}| \le |\bar{x}-x_n| + |\bar{y}-y_n| + \frac{b-a}{2^n}$$

$\exists \bar{n}_1$ t.c. $n>\bar{n}_1 \Rightarrow |\bar{x}-x_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ (1)

$\exists \bar{n}_2$ t.c. $n>\bar{n}_2 \Rightarrow |\bar{y}-y_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ (2)

$\exists \bar{n}_3$ t.c. $n>\bar{n}_3 \quad \frac{b-a}{2^n} < \frac{\varepsilon}{3}$ (3)

$\bar{n} = \max(\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3)$

$n > \bar{n} \Rightarrow$ (1), (2) e (3) valgono simultaneamente

$|\bar{x}-\bar{y}| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

Ora

$f(\bar{x}) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) \le 0$

$f(\bar{y}) = \lim f(y_n) \ge 0$

Ma $f(\bar{x}) = f(\bar{y}) = 0$.

oss 0 $f([a,b])$ è un intervallo per via del corollario.

oss 2 $f((a,b))$ è ancora un intervallo.

Esempi

1) $f : (0;1) \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{1}{x}$

$f(0;1) = (1;+\infty)$ Non è né chiuso né limitato.

2) $f(0;2\pi) \to \mathbb{R}$

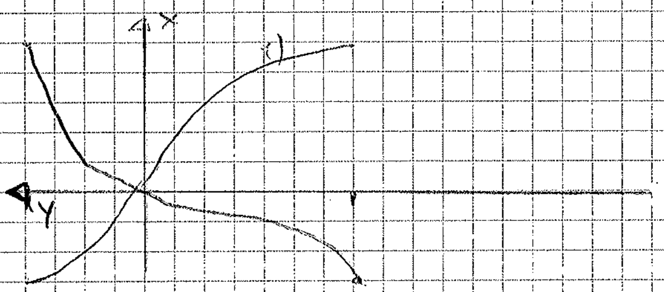
$x \longmapsto \operatorname{sen} x$

$f(0;2\pi) = [-1;+1]$. In questo caso è chiuso e limitato.

Se intervallo $[a,b]$, $\operatorname{Im} f$ è chiuso e limitato.

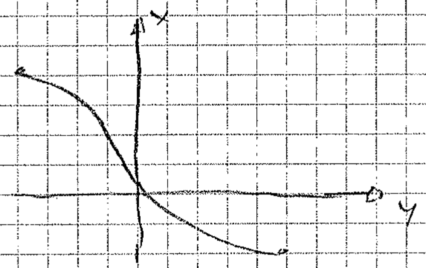
Se intervallo $(a;b)$, $\operatorname{Im} f$ non si sa! Caso x caso.

funzione inversa di $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\to$ f invertibile se e solo se f strettamente monotona.



1) Ruotare di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario

2) Riflettere rispetto all'asse verticale (asse x)



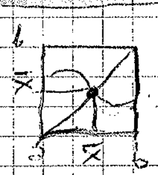
Se f strettamente crescente / decrescente $\Rightarrow$ inversa rispettivamente crescente / decr.

PROP (Punto fisso, Brower)

$f : [a,b] \to [a,b]$

$\Rightarrow \exists\, \bar{x}$ t.c. $f(\bar{x}) = \bar{x}$

$\boxed{\text{DIMOSTRAZIONE 41}}$



DIMOSTRAZIONE 43

$\frac{f(x) - l g(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} - l \to 0$ per $x \to x_0$

$f(x) - l g(x) = o(g) \Rightarrow f(x) = l g(x) + o(g)$ (2)

Viceversa, assumiamo (2)

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l g(x) + o(g)}{g(x)} = l + \frac{o(g)}{g(x)}$

$\frac{o(g)}{g(x)} \xrightarrow{x \to x_0} 0$

Quindi $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

<u>Osservazioni</u>

1) $e^x \sim 1+x$ per $x \to 0$

Infatti $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Rightarrow (e^x - 1)$ equivalente a "x" $\to e^x \sim (x+1)$

Analogamente $\log(1+x) = x + o(x)$ ossia $\log(1+x) \sim x$

inoltre, $(1+x)^\alpha = [1 + \alpha x + o(x)] \sim (1 + \alpha x)$

Teorema - <u>PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE</u> o PRINCIPIO DI TRASCURABILITÀ DEGLI o PICCOLI

$E \subset \mathbb{R}$, x_0 pt di acc per E

$F, f, G, g : E \to \mathbb{R}$ * t.c. $f = o(F)$ e $g = o(G)$ per $x \to x_0$

* $\exists U \in \mathcal{U}_{x_0}$ t.c. $F(x)$ e $G(x) \neq 0$, $\forall x \in U \cap E \setminus \{x_0\}$

Allora $\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) + f(x)}{G(x) + g(x)}$ e $\lim_{x \to x_0} \frac{F(x)}{G(x)}$ o sono entrambi inesistenti o sono uguali

cioè $f(x)$ e $g(x)$ sono ininfluenti

DIMOSTRAZIONE 44

$\frac{F(x) + f(x)}{G(x) + g(x)} = \frac{F(x)}{G(x)} \cdot \frac{1 + \frac{f(x)}{F(x)}}{1 + \frac{g(x)}{G(x)}}$ dove ho escluso il caso banale $G = 0$ per qualche x comunque si scelga un intorno di x_0

$\frac{f(x)}{F(x)} \to 0$, $\frac{g(x)}{G(x)} \to 0$, $\frac{1 + \frac{f(x)}{F(x)}}{1 + \frac{g(x)}{G(x)}} \to 1$

$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x)}{G(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) + f(x)}{G(x) + g(x)} = l$

Viceversa, se $\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) + f(x)}{G(x) + g(x)} = L \in \bar{\mathbb{R}}$

allora $\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) + f(x)}{G(x) + g(x)} \cdot \frac{1 + \frac{g(x)}{G(x)}}{1 + \frac{f(x)}{F(x)}}$ tende a L.

$\frac{1 + \frac{g(x)}{G(x)}}{1 + \frac{f(x)}{F(x)}} \to 1$

<u>Esempi</u>

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^3) + tg(x^2)}{\sqrt{x} + \sin x}$

Osserviamo $\lim_{x \to 0} \frac{tg(x^2)}{\sin x^3}$ è $\lim_{x \to 0^+} \frac{tg(x^2)}{x^2} \cdot \frac{x^2 \cdot x^3}{\sin x^3 \cdot x^3} =$

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \frac{tg\, x^2}{x^2} \cdot \frac{x^3}{\sin x^3} = +\infty \to tg(x^2)$ domina sul seno

$\frac{tg\, x^2}{x^2} \to 1$, $\frac{x^3}{\sin x^3} \to 1$

2) $o(g) - o(g) = o(g)$

3) $O(g) + O(g) = O(g)$

Infatti $\left|\frac{f_1(x) + f_2(x)}{g(x)}\right| \le \left|\frac{f_1(x)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f_2(x)}{g(x)}\right|$ *

3bis) $o(g) + O(g) = O(g)$

Infatti $f_1 = o(g)$, $f_2 = O(g)$

* entrambi i termini sono limitati

In generale $f_1 + f_2 \ne o(g)$

$g(x) = 1$ con $x_0 = 5$

$f_1(x) = 0$ $\quad f_1 = o(g)$

$f_2(x) = 1$ $\quad f_2 = O(g)$ $\quad | x \to 5$

$f_1 + f_2 = g = O(g)$

4) $O(g) \cdot o(g) = o(g^2)$

$f_1 = o(g)$, $f_2 = O(g)$

$\frac{f_1(x)}{g(x)} \cdot \frac{f_2(x)}{g(x)} \to 0$

$\frac{f_1(x)}{g(x)} \to 0$, $\frac{f_2(x)}{g(x)} \to c$

In generale, $\boxed{o(g_1) \cdot O(g_2) = o(g_1 g_2)}$

Anche caso particolare $o(g_1) \cdot o(g_2) = o(g_1 g_2)$

5) $o(O(g)) = o(g)$

$h = O(g)$, $f = o(h)$

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{h(x)} \cdot \frac{h(x)}{g(x)} \to 0$

$\frac{f(x)}{h(x)} \to 0$, $\frac{h(x)}{g(x)} \to c$

5bis) $O(o(g)) = o(g)$

stessa dimostrazione di prima

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ $\qquad f(x) = l + o(1)$ $\quad x \to x_0$

se f continua in x_0 (pto di accumulazione per E) $\iff$ $f(x) = f(x_0) + o(1)$

INFINITESIMI = fx che va a 0, per $x \to x_0$ $(x_0 \in \bar{\mathbb{R}})$

DEF f si dice infinitesimo per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

DEF f, g due infinitesimi per $x \to x_0$

Si dice f infinitesimo di ORDINE SUPERIORE a g se

$f(x) = o(g)$, $x \to x_0$

Esempio

$f(x) = 1 - \cos x$, $g(x) = \sin x$

$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x + o(x)} \sim \frac{x}{2} \to 0$

DEF siano f, $\varphi(f_1)$ due infinitesimi per $x \to x_0$. f si dice di ordine α $(\alpha > 0)$

rispetto all'infinitesimo campione φ se esiste un l reale ma non 0, finito

$\sin x - tg(x) = -\frac{1}{2} x^3 + o(x^3)$

- $f(x) = e^{-x}$

$\varphi = \frac{1}{x}$, $x \to +\infty$

$$\frac{e^{-x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}} = e^{-x} x^{-\alpha} \to 0$$

non esiste un ordine di e^{-x} rispetto all'infinitesimo campione

Si dice che i 2 infinitesimi non sono confrontabili

DEF.

f si dice un $\boxed{\text{infinito}}$ per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ o $-\infty$

DEF.

Se f, g sono 2 infiniti per $x \to x_0$, f si dice di ordine superiore rispetto a g se $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ oppure $g = o(f)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 1-\cos^2 x \sim x^2 \\ 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2} \end{array}\right| x \to 0$$

$\cos x$ e' di ordine 0 rispetto a x, $x \to 0$.

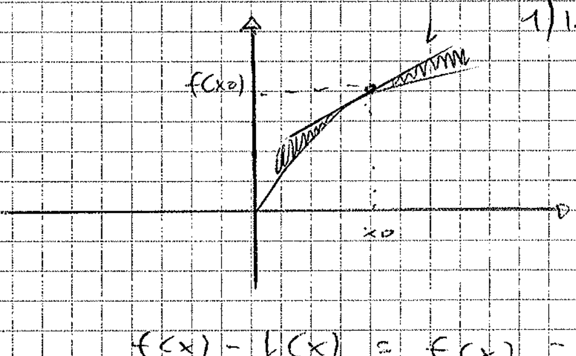
$f(x)$ e $\varphi(x)$ due infiniti

$f(x) = l \cdot [\varphi(x)]^{\alpha} + o[\varphi(x)^{\alpha}]$, $\alpha \geq 0$ $\quad l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$l\,[\varphi(x)]^{\alpha}$ = parte principale di f rispetto all'infinito campione φ.

CALCOLO DIFFERENZIALE (funzioni reali di variabile reale)

PROBLEMA: approssimare funzione qualsiasi (f) con una funzione lineare $l(x) = mx + q$, $m, q \in \mathbb{R}$, nell'intorno di un punto x_0 ossia trovare la retta che approssima al meglio il grafico di f, nelle vicinanze di un punto $[x_0, f(x_0)]$.



1) Imponiamo: Retta approssimante passi per $(x_0, f(x_0))$

$\Rightarrow l_x = f(x_0) + m(x - x_0)$

N.B.: $f(x_0) = l(x_0)$

2) Valutiamo lo scarto tra la retta e il grafico di f.

$$f(x) - l(x) = f(x) - f(x_0) - \underbrace{m(x - x_0)}_{o(1)}$$ tende a 0 con $x \to x_0$

Se f continua in x_0, $f(x) - f(x_0) = o(1)$ con $x \to x_0$

lo scarto tende a 0 avvicinandosi a x_0.

3) $\boxed{f(x) = x^2}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 - x_0^2 + x_0^2 = x_0^2 + (x + x_0)(x - x_0)$

Osserviamo $x = x_0 + o(1)$, $x \to x_0$

$= x_0^2 + (2x_0 + o(1))(x - x_0) = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) + o(1)(x - x_0) =$

$= x_0^2 + 2x_0(x - x_0) + o(x - x_0)$

Infatti

$\frac{o(1)(x - x_0)}{x - x_0} \to 0$, $x \to x_0$ $\Rightarrow$ $o(1)(x - x_0) = o(x - x_0)$

$f'(x^2) = 2x_0$

4) $\boxed{f(x) = x^n}$ $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$

$x_0 \in \mathbb{R}$

$f(x) = x^n - x_0^n + x_0^n = f(x_0) + x^n - x_0^n =$

$= f(x_0) + (x - x_0)(x^{n-1} + x_0 x^{n-2} \dots + x_0^{n-1}) =$

$= f(x_0) + (x - x_0)(x_0^{n-1} + o(1) + x_0(x_0^{n-2} + o(1)) + \dots x_0^{n-1})$

$= f(x_0) + n x_0^{n-1}(x - x_0) + o(1)(x - x_0) = f(x_0) + n x_0^{n-1} + o(x - x_0)$

$f'(x_0) = n x^{n-1}$

5) $\boxed{\sin x = f(x)}$

$\sin x = \sin x_0 + \sin x - \sin x_0 = \sin x_0 + 2 \cos \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2} =$

$= \sin x_0 + 2(\cos x_0 + o(1))\left(\frac{x - x_0}{2} + o(x - x_0)\right) =$

$= \sin x_0 + \cos x_0 (x - x_0) + o(x - x_0)$

$f'(x_0) = \cos x_0$

ES.

$f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 0$ faccio derivata

OSS. Lo scarto fra tangente e funzione in x_0 è $o(x - x_0)$, cioè il minimo scarto

OSS. f derivabile in x_0 $\Rightarrow$ f continua in x_0

DIMOSTRAZIONE 46

$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{o(1) \text{ per } x \to x_0} + \underbrace{o(x - x_0)}_{o(1)}$

$f(x) = f(x_0) + o(1)$ per $x \to x_0$ $\Leftrightarrow$ f continua in x_0

OSS. f continua in x_0 $\not\Rightarrow$ f derivabile in x_0

controesempio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto |x|$

se $x > 0$ $f(x) = x = x + o(x)$ (1)

se $x < 0$ $f(x) = -x = -x + o(x)$

Da (1) abbiamo $l_1(x) = x$ approssima $f(x)$ a meno di $o(x)$ per $x > 0$

$x<0 \qquad f(x) = -x \cdot \sin x = -x\,(x+o(x)) = -x^2 + o(x) = o(x) =$

$= 0 \cdot x + o(x) \qquad f'(0)^- = 0$

$\Rightarrow$ f derivabile, con derivata $= 0$

Non sempre quando c'è il modulo c'è un punto angoloso

ALTRE DERIVATE NOTEVOLI

$f(x) = x^m \ , m \in \mathbb{N} \qquad f'(x_0) = m\,x_0^{m-1}$

6) $f(x) = x^\alpha \ , \alpha \in \mathbb{R} \qquad x_0 > 0$

$f(x) = x^\alpha = [(x-x_0)+x_0]^\alpha = x_0^\alpha \left[1 + \frac{x-x_0}{x_0}\right]^\alpha =$

$= x_0^\alpha \left[1 + \frac{\alpha(x-x_0)}{x_0} + o\left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)\right] = *$

È stato applicato lim notevole $\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \to \alpha, \ x \to 0$

$* = x_0^\alpha + \alpha x_0^{\alpha-1}(x-x_0) + x_0^\alpha\, o\left(\frac{x-x_0}{x_0}\right) = \underbrace{x_0^\alpha}_{f(x_0)} + \underbrace{\alpha x_0^{\alpha-1}}_{f'(x_0)}(x-x_0) + o(x-x_0)$

$\Rightarrow \boxed{f'(x_0) = \alpha\, x_0^{\alpha-1}}$

In particolare $f(x) = \sqrt{x} \ , \ f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \ \Rightarrow \ f'(x_0) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1}$

Inoltre $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad f'(x_0) = -\frac{1}{x^2}$ con $x_0 > 0$

Vale anche per $x_0 < 0$

7) $f(x) = e^x \qquad x_0 \in \mathbb{R}$

$f(x) = e^x = e^{x_0} + e^x - e^{x_0} = e^{x_0} + e^{x_0}(e^{x-x_0} - 1) =$

Siccome $\frac{e^x - 1}{x} \to 1 \quad x \to 0$

$f(x) = f(x_0) + e^{x_0}((x-x_0) + o(x-x_0)) = f(x_0) + e^{x_0}(x-x_0) + o(x-x_0)$

$\Rightarrow \boxed{f'(x_0) = e^{x_0}}$

N.B. $D(e^x) = e^x$

8) $f(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x = \cos x_0 + \cos x - \cos x_0 = f(x_0) - 2 \sin\frac{x+x_0}{2} \sin\frac{x-x_0}{2} =$

$= f(x_0) - 2(\sin x_0 + o(1))\left(\frac{x-x_0}{2} + o\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right) = f(x_0) - (\sin x_0)(x-x_0) +$

$+ o(x-x_0)$

$\boxed{f'(x_0) = -\sin x_0}$

2) $c \in \mathbb{R}$, $(cf)'(x_0) = c f'(x_0)$

DIMOSTRAZIONE 48

$$c f(x) = c \cdot \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \right] = c f(x_0) + c f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

3) REGOLA DI LEIBNIZ

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$$

DIMOSTRAZIONE 49

$$f(x) \cdot g(x) = \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \right] \left[g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \right]$$

$$= f(x_0) g(x_0) + (x - x_0)\left[f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0) \right] + f(x_0) g'(x_0)(x - x_0)^2 + o(x - x_0)$$

$$= f(x_0) g(x_0) + [\underbrace{f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)}_{\text{derivata}}](x - x_0) + o(x - x_0)$$

Esempio

$f(x) = x^\alpha \cdot \sin x \qquad \alpha > 0,\ x > 0$

sia $x_0 > 0$

$$f'(x_0) = \alpha x^{\alpha - 1} \sin x + \cos x \, x^\alpha$$

4) Se in più supponiamo che $g(x_0) \neq 0$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0) g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

DIMOSTRAZIONE 50

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)}{g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} + \frac{f(x_0)}{g(x_0)} =$$

$$= \left(\frac{f}{g}\right)x_0 + \frac{\cancel{f(x_0) g(x_0)} + f'(x_0) g(x_0)(x - x_0) - \cancel{f(x_0) g(x_0)} - f(x_0) g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)}{g(x_0)\left[g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \right]}$$

Osserviamo che $\dfrac{1}{g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)} = \dfrac{1}{g(x_0)} + o(1)$ con $x \to x_0$

$$\left(\frac{f}{g}\right)x = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0) + (x - x_0) \cdot \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g(x_0)} \left(\frac{1}{g(x_0)} + o(1) \right) =$$

$$= \frac{f}{g}(x_0) + \underbrace{\frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g^2(x_0)}}_{\text{derivata}} (x - x_0) + o(x - x_0)$$

Esempio

1) $E = \mathbb{R} \setminus \{ (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \}$

$f: x \longmapsto \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$x_0 \in E$

$$f'(x) = \frac{(\cos)^2 + (\sin)^2}{\cos^2 x} = \boxed{\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

2) $E = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \}$

$f: x \longmapsto \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

sia $x \in E$

$$f'(x) = -1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \boxed{-(1 + \operatorname{cotg}^2 x)}$$

Derivazione della funzione inversa

$f: E \to \mathbb{R}$ $\quad g: \operatorname{Im} f \to \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = x \quad , \forall x \in E$

Ora $(g \circ f)(x) = x \qquad (g \circ f)'(x) = 1$

$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \qquad g'y = \dfrac{1}{f'(x)} \qquad y = f(x)$

Esempio

$f(x) = \sin x \qquad x = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$g: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$y \to x$ t.c. $\sin x = y$

$g(y) = \arcsin \cancel{x}$

$(\arcsin y)' = \dfrac{1}{\cos x}$ Siccome $\sin x = y$, allora $\cos x = \sqrt{1 - y^2}$

segno + perché $\sin x$ in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow \cos x > 0 \quad \Rightarrow (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

ES.

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dimostrare

$E = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \qquad f: \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \operatorname{tg} x$

$g: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$y \mapsto x$ t.c. $\operatorname{tg} x = y$

$g(y) = \operatorname{arctg} y$

$g'(y) = \dfrac{1}{(\operatorname{tg} x)'} \quad y = \operatorname{tg} x \quad = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{1+y^2}$

$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}} \qquad \boxed{\operatorname{arccotg} x = -\dfrac{1}{1+x^2}}$

— $f(x) = e^x \qquad g(y) = \log y$

$\operatorname{dom} g = (0; +\infty)$

$g'(y) = \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{y}$

Esempio

$f(x) = 1$

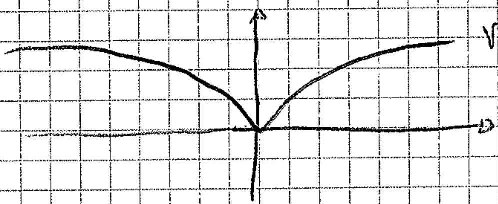
ha massimi relativi? sì, sono tutti i punti

ha minimi relativi? sì, tutti

Se si parlasse di max e min stretti, allora nessuno

Es.

$f(x) = \sqrt{|x|}$ esistono punti di minimo relativo? sì, $x = 0$



non è derivabile in $x_0 = 0$ quindi no teorema di Fermat (punto di CUSPIDE)

punto di NON DERIVABILITÀ

Oss. Il medesimo risultato ($f'(x_0) = 0$) vale anche nel caso in cui x_0 sia punto di minimo relativo e f derivabile in x_0

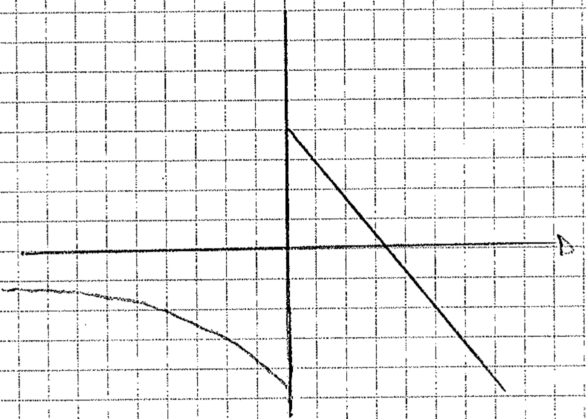
Teorema di Fermat non vale per

ESTREMI ASSOLUTI

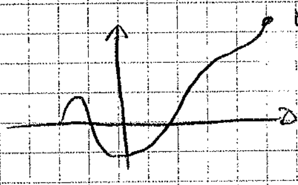
$y = \frac{1}{x}$ $\quad x \geq 0$ $\qquad y = -e^{x}$ $\quad x < 0$

In questo caso MASSIMO ASSOLUTO

ma FERMAT non verificato



oppure



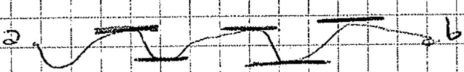
M ma $f'(x_0) \neq 0$

Il teorema di Fermat non si applica per PTO DI MASSIMO GLOBALE (o MINIMO)

1) TEOREMA DI ROLLE

$-\infty < a < b < +\infty$
$$\begin{cases} f : [a, b] \to \mathbb{R}, \text{ continua e derivabile in } (a, b) \\ f(a) = f(b) \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists\, c \in (a, b)$ t.c. $f'(c) = 0$.



ALMENO 1, magari tanti.

$$\lambda = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

F continua in $[a;b]$ e derivabile in $(a;b)$

Per il teorema di Rolle $\exists c \in (a;b)$ $F'(c)=0$

Ma $F'(c) = f'(c) + \lambda g'(c) = 0$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = -\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

(4) TEOREMA DI LAGRANGE (come corollario di CAUCHY)
o teorema del valore medio

$-\infty < a < b < +\infty$

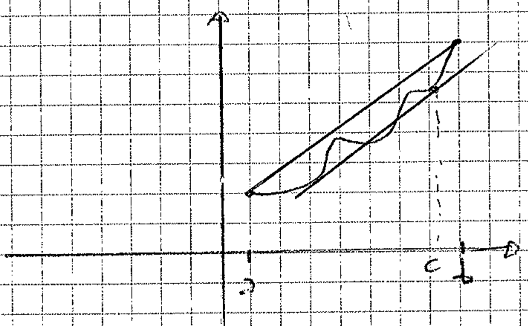
$f: [a;b] \to \mathbb{R}$

$\begin{cases} f \text{ continua in } [a;b] \\ f \text{ derivabile in } (a;b) \end{cases}$ | $\exists c \in (a;b)$ t.c. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

$\boxed{\text{DIMOSTRAZIONE SS}}$

segue dal teorema di Cauchy con $g(x) = x$

$g'(x) = 1$ $g(b)-g(a) = b-a$



m è il valore della derivata è uguale al coefficiente della retta che unisce $f(a)$ a $f(b)$

coefficiente angolare $f'(c)$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \text{retta } ab = f'(c)$$

Interpretazione geometrica di Cauchy non è fondamentale, c'è sul libro.

ES

$f: [1,3] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^3$

Dire se $c=2$ è un punto di Lagrange?

$$3c^2 = \frac{27-1}{2}$$

$12 = 13$ no!

Calcolare punto di Lagrange

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 13$$

$f'(c) = 13$

$3c^2 = 13$

$$c^2 = \frac{13}{3} \qquad c = +\sqrt{\frac{13}{3}}$$

Prova a dimostrare Lagrange non come corollario di Cauchy (riguardo libro sup.)

Suggerimento: rifare dim. Cauchy ponendo $g(x) = x$

$F(x) = f(x) + \lambda x$ $F(a) = F(b) \to F(a) = F(b) = f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b$

$$\lambda = -\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$F(x)$ continua in $[a;b]$ e derivabile in $(a;b)$

Applico Rolle $\to F'(c) = f'(c) + \lambda = 0$ $\lambda = -f'(c)$ $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

OSS. se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f$ strettamente crescente in (a,b)

OSS. se $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ monotona crescente in $[a;b]$

si può dimostrare seguendo DIM. 57

Faccio attenzione quando si ha f crescente o strettamente crescente, in relazione alla derivata.

Risultati analoghi nel caso di monotonia decrescente.

- f decrescente in $[a;b] \Rightarrow f'(x) \leq 0$ in (a,b)
- $f'(x) < 0$ in $(a,b) \Rightarrow f$ strettamente decrescente in $[a;b]$

  il viceversa è falso
- $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a;b) \rightarrow f$ monotona decrescente in $[a;b]$

(5) TEOREMI DI DE L'HÔPITAL (in realtà BERNULLI)

limiti di rapporti $\frac{f(x)}{g(x)}$ nei casi di indeterminazione $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Th 1

$f, g: E \to \mathbb{R}$, x_0 pto di acc. per E, f, g continue e derivabili in x_0

$f(x_0) = g(x_0) = 0$

$g'(x_0) \neq 0 \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

$\boxed{\text{DIMOSTRAZIONE 58}}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\overset{0}{f(x_0)} + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)}{\underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{g(x_0)} + g'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)} = \frac{f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)}{g'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)}$$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)\cancel{(x-x_0)}}{g'(x_0)\cancel{(x-x_0)}}$ x principio di trascurabilità degli o piccoli

$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

ES.

$f(x) = \sin x \qquad x_0 = 0$

$g(x) = x \qquad \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$

$\frac{\cos x}{1} = 1$ Per De l'Hôpital th 1 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Notazione

$f(x)\Big|_{x = x_0} = f(x_0)$

ES.

$f(x) = 1 - \cos x \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$

$g(x) = x^2$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

In realtà non è possibile applicare Th 1 di De l'Hôpital perché $g'(x) = 2x$ con $x_0 = 0$ è $= 0$

$f'(x) > 0$ in $(a; x_0)$ e $(x_0; b)$ $\Rightarrow$ f strettamente crescente su $(a; b)$

Come si dimostra? Non l'ha detto

<u>oss.</u>

$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin 1/x}{x}$ è trattabile con l'° teorema di De l'Hôpital

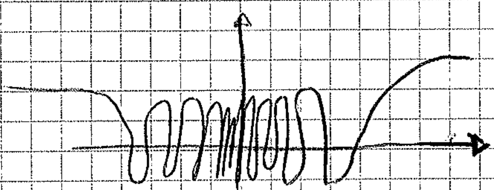
$\frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{1} = 0$

<u>N.B.</u> f derivabile in $x = 0$ (si usa rapporto incrementale)

$F(x, x_0) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = x \sin \frac{1}{x} \to 0$

La funzione derivata non è continua in 0, cioè il suo valore in 0 non basta

$F'(x) = x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2x \sin \frac{1}{x}$ non ammette limite per $x \to 0$



ES.

$|f(x)| < x^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f'(0) = 0$

Dimostrare

<u>COROLLARIO</u>

$f: (a; b) \to \mathbb{R}$ continua derivabile in $(a; x_0) \cup (x_0, b)$

$x_0 \in (a, b)$

$\lim_{x \to x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f derivabile in x_0 e $f'(x_0) = l$

DIMOSTRAZIONE 60

$F(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Th2 De l'Hôpital $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{1} = l$

Allora esiste anche $\lim F(x, x_0)$

<u>Esempio</u>

$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right]$

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\right) = \frac{\sin x}{6x} = \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$

De l'Hôpital si può iterare perché

1) ad ogni passo si trovi sempre caso di indeterminazione

2) le iterazioni necessarie sono finite

<u>ESempio</u> $\lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ $\frac{e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}}{1} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$ che è + complicato della scrittura di quisimu partita

$$\frac{x}{\log^{b/a} x} = \frac{x'}{(\log^{b/a} x)'} = \frac{1}{\frac{b}{a}(\log^{b/a-1} x)\cdot\frac{1}{x}} = \frac{a}{b}\frac{x}{\log^{b/a-1} x}$$

se $\frac{b}{a} > 1 \Rightarrow \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$

$\Big[\ \frac{b}{a} = 1 \ (a = b) \Rightarrow \frac{a}{b}x \to +\infty$ con $x \to +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(\log_a x)^{1/a}} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{(\log_a x)^b} = +\infty \ \Big]$

$\frac{b}{a} < 1 \qquad \frac{a}{b}\frac{x}{\log^{b/a-1} x} = \frac{a}{b} \ x \ (\log^{1-b/a} x) \to +\infty$

$\frac{b}{a} > 1$ ancora indeterminazione. Ripeto De L'Hopital

Ripetendolo $\left[\frac{b}{a}\right]+1$ volte, si ottiene che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log^{b/a} x} = +\infty$

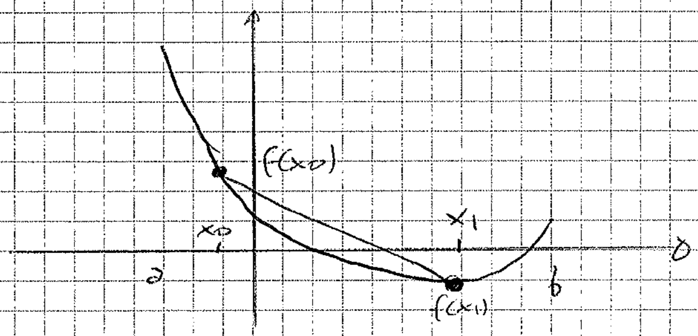
FUNZIONI CONVESSE (Prodi)

$-\infty \le a \le b \le +\infty$

DEF $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ si dice CONVESSA (su $[a;b]$) se $\forall x_0, x_1 \in [a;b]$, e qualsiasi λ $0 \le \lambda \le 1 \Rightarrow$

$$f(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1) \le \lambda f(x_0) + (1-\lambda)f(x_1) \quad *$$

Interpretazione grafica



Chi è l'insieme

$(\lambda x_0 + (1-\lambda)x, \ \lambda f(x_0) + (1-\lambda)f(x_1))$

$x = \lambda x_0 + (1-\lambda)x_1$

$\Leftrightarrow x - x_1 = \lambda(x_0 - x_1)$

$\Rightarrow \lambda = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}$

$y = \lambda f(x_0) + (1-\lambda)f(x_1) = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} f(x_0) + \left(1 - \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}\right) f(x_1)$

$= \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} x + \frac{x_1 f(x_0) - x_0 f(x_1)}{x_1 - x_0}$

y è una retta

se $x = x_1$, $y = f(x_1)$

se $x = x_0$, $y = f(x_0)$

se $\lambda = 0$, $x = x_1$

se $\lambda = 1$, $x = x_0$

$* =$ il grafico della funzione sta sotto ogni corda che unisce i due punti $f(x_0)$, e $f(x_1)$

L'insieme $(\lambda x_0 + (1-\lambda)x, \lambda f(x_0) + (1-\lambda)f(x_1))$ è la corda!

(2) Siccome monotono crescente $F(x, x_0)$, in ogni punto il limite sinistro è minore o uguale al limite destro.

(3) sempre x monotonia crescente del rapporto incrementale

$f_d'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = F(x+h, x)$

Rapporto incrementale è simmetrico, non importa se guardo a dx o a sx di x.

$F(x+h, x) \leq F(x+h, x')$ x monotonia del rapporto incrementale

Siccome $h \to 0$, posso considerare $h < \frac{x'-x}{2}$

$\Rightarrow x+h < x'-h$

Quindi $F(x+h, x) \leq F(x'-h, x')$

Passando al limite $h \to 0^+$

$f_d'(x) \leq f_s'(x')$ perché $-h$ tende a 0 da sinistra

COROLLARIO

f convessa in $[a;b] \Rightarrow$ f continua in $(a;b)$ perché a, b possono anche essere infiniti

$f(x) \leq f(x_0) + f_d'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) \leq f(x_0)$

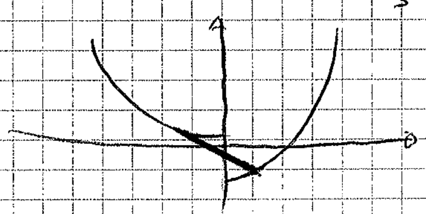
Analogamente $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow f$ continua in x_0

OSS. (4° punto della dim. 63)

$f'(d)$ e $f'(s)$ sono monotone crescenti in $(a;b)$

Infatti sia $a < x < x' < b$

$\underbrace{f_d'(x) \leq \overbrace{f_s'(x') \leq f_d'(x')}^{2°}}_{3°}$



Le funzioni derivata dx e derivata sx sono continue tranne al più un numero numerabile di punti (vecchio teorema)

COROLLARIO

$\exists Y = \{y_1, y_2, \ldots y_n\}$ al più numerabile

t.c. $f'(d)$ e $f'(s)$ sono entrambe continue in $(a;b) \setminus Y$

DIMOSTRAZIONE 64

f'_d monotona crescente $\Rightarrow \exists Y_d = \{\xi_1, \ldots \xi_n, \ldots\}$ al più numerabile t.c.

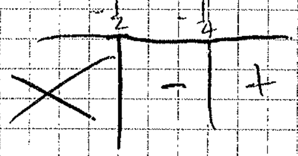
f'_d continua su $(a;b) \setminus Y_d$

Analogamente $\exists Y_s$ al più numerabile t.c. f'_s continua su $(a;b) \setminus Y_s$

$x \geq -\frac{1}{4}$ $\rightarrow$

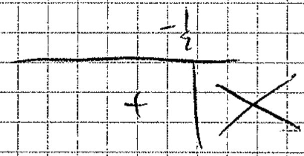
① $x > -\frac{1}{2}$, $x \neq 0$

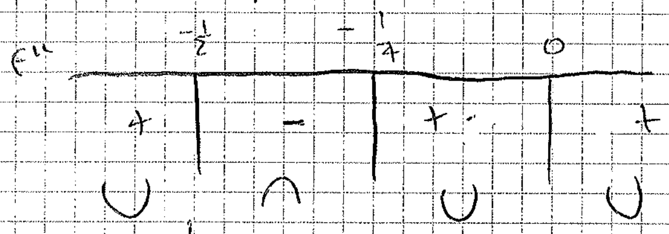
con $f''(x) \geq 0$ $\quad$ $x \geq -\frac{1}{4}$



② $x < -\frac{1}{2}$

$f''(x) \geq 0$ $\quad$ $x < -\frac{1}{4}$





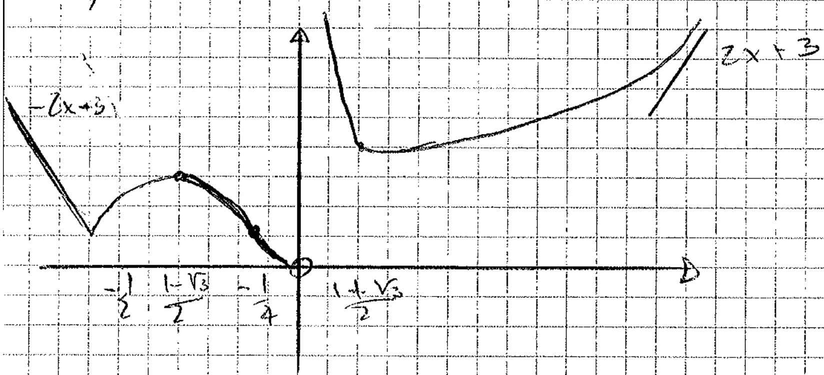
no punto di flesso

$x = -\frac{1}{4}$ pto di flesso a tangente obliqua

f convessa in $(-\infty, -\frac{1}{2}]$, $[-\frac{1}{4}, 0)$ e $(0; +\infty)$

f concava in $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$

7) GRAFICO



fa schifo

$x > -\frac{1}{2}$, $x \neq 0$

$f'(x) = 2e^{\frac{1}{x}} + (2x+1)\, e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(2 - \frac{2x+1}{x^2}\right) =$

$= e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{2x^2 - 2x - 1}{x^2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,(2x^2 - 2x - 1)$

$x < -\frac{1}{2} \longrightarrow f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,(2x^2 - 2x - 1)$

$x = -\frac{1}{2}$ $\quad \lim_{x \to x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x_0) = l \quad (*)$

$\nexists\, l \in \mathbb{R}$ t.c. $(*)$ vale. Quando?

1) $l = +\infty$, $l = -\infty$ $\longrightarrow$ pto di flesso a tangente verticale

2) $\nexists\, l \in \overline{\mathbb{R}}$ t.c. $(*)$ vale. Per esempio $l^- = \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$

$l^+ = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$

$l^- \neq l^+$

se almeno uno tra l^- e l^+ è finito, PUNTO ANGOLOSO

se l^- e l^+ infiniti discordi CUSPIDE

$\nexists\, l^-, l^+ \Rightarrow$ rapporto incrementale (esempio $f(x) = \begin{cases} x^i \left(\sin \frac{1}{x}\right), & i = 1, 2 \quad x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

con $i \geq 2$, derivata è f x continua

$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} f'(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} \underbrace{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}}_{4e^{-2}} \underbrace{(2x^2 - 2x - 1)}_{\frac{1}{2}}$

$= 2e^{-2}$

$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} = -2e^{-2}$ $\quad$ i due limiti sono diversi

PUNTO ANGOLOSO $x = -\frac{1}{2}$

$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,(2x^2 - 2x - 1), & x > -\frac{1}{2},\ x \neq 0 \\ -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,(\ \text{"}\ ), & x < -\frac{1}{2} \end{cases}$

Studio segno $f'(x)$

<u>oss.</u> studiamo segno di $(2x^2 - 2x - 1)$

$2x^2 - 2x - 1 \geq 0$

$\frac{\Delta}{4} = 1 + 2 = 3$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ $\quad \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

$x \leq \frac{1-\sqrt{3}}{2} \ \vee\ x \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$x > -\frac{1}{2} \longrightarrow f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow p(x) \geq 0$