



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1332

ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Arlotta

MATERIA: Progettazione di Protesi e Organi Artificiali,
Prof.Audenino_Morbiducci

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**



Bioreactors for TE and RM General overview

Professoressa Massai

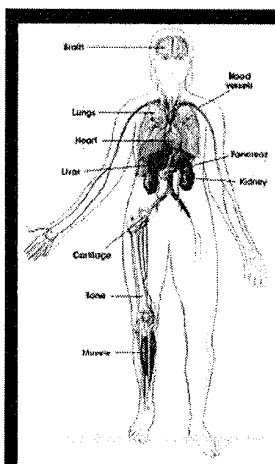
Progettazione di Protesi e Organi Artificiali – A.A. 2013/14

1/8

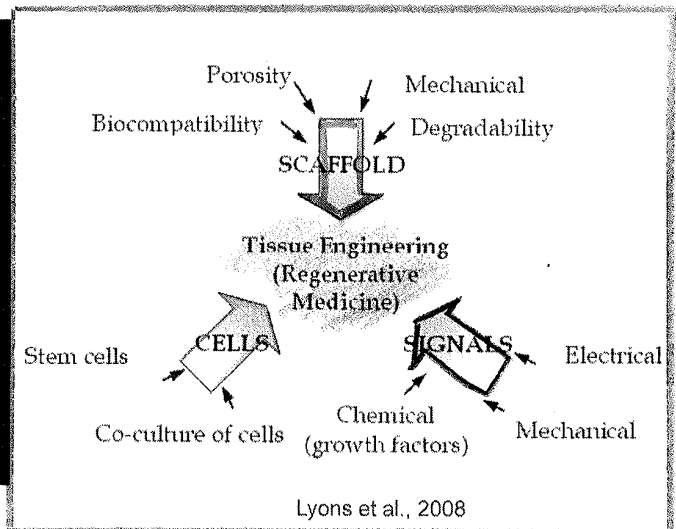


Introduction to RM

Regenerative Medicine (RM) aims to repair and regenerate damaged biological tissues by developing substitutes that mimic the native extracellular matrix to guide the growth of new functional tissue *in vitro* or *in vivo* to restore, maintain or improve tissue function.



Repair
Replace
Restore
Regenerate





Introduction to RM

POLITECNICO DI TORINO

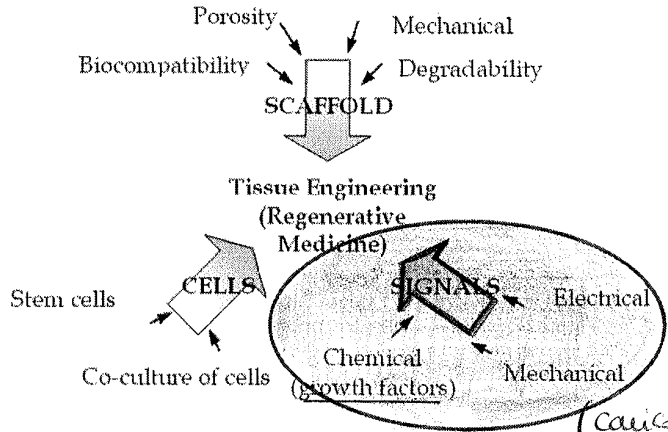
diana.massai@polito.it

Regenerative Medicine (RM) aims to repair and regenerate damaged biological tissues by developing substitutes that mimic the native extracellular matrix to guide the growth of new functional tissue *in vitro* or *in vivo* to restore, maintain or improve tissue function.

SIGNALS

(biological, chemical, and physical stimuli)

Influence and direct cells to express the desired tissue phenotype and their functions, promoting extracellular matrix formation and tissue maturation



Lyons et al., 2008

Se non è funzionale
Ma serve a wita

(causa cardiaca)
5/8 di Jesso)

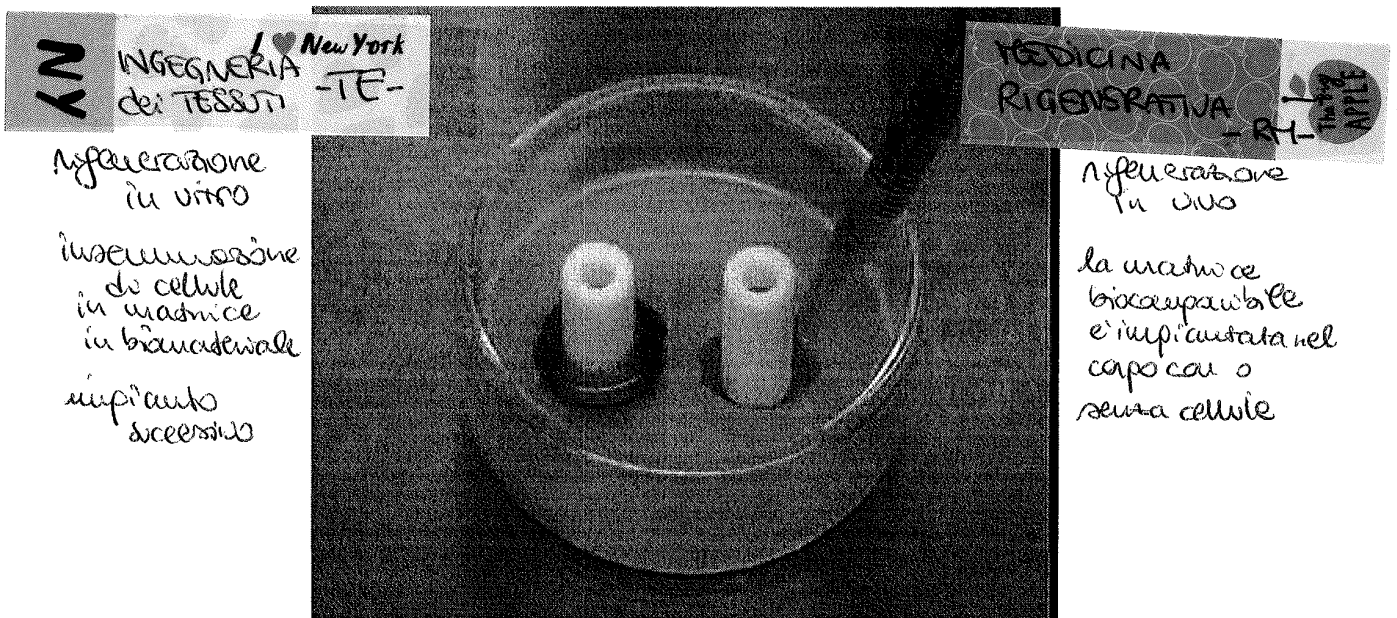
Progettazione di Protesi e Organi Artificiali – A.A. 2013/14



Introduction to RM

POLITECNICO DI TORINO

diana.massai@polito.it



Zimmermann et al., 2002

Progettazione di Protesi e Organi Artificiali – A.A. 2013/14

6/8



Bioreactors for TE and RM

General overview – Part I



Introduzione ai bioreattori

A **bioreactor** is a device in which **biological and/or biochemical processes** develop under **closely monitored and tightly controlled environmental and operating conditions**, e.g. pH, temperature, gas concentrations, nutrient supply and waste removal, physical stimuli supply (Martin, 2004; Plunkett, 2011).

[in vitro che le condizioni più fisiologiche possibili]

Bioreactors represent **innovative and effective tools for overcoming limitations of 2D static cultures**, since they can:

- provide a **monitored and controlled in vitro culture environment**
- supply **physiologic-like chemical and physical stimuli**
- **improve process efficiency**, by allowing automated, reproducible and scalable processes

all'interno si sviluppano processi biologici e biochimici in condizioni controllate e monitorate

RUOLI

- l'efficienza dei tessuti in vitro
- modelli di supporto per lo studio di cellule

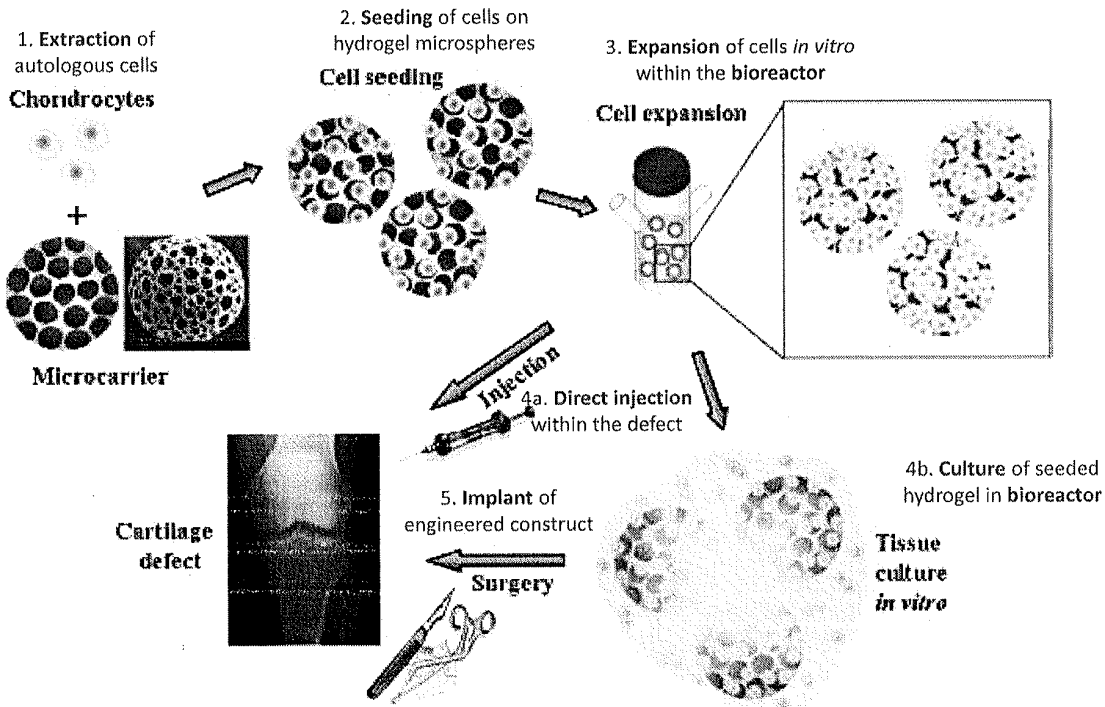
*Giugno/23
Cellulari*



Introduzione ai bioreattori

POLITECNICO DI TORINO

diana.massai@polito.it



Chung and Park, 2007



Introduzione ai bioreattori

POLITECNICO DI TORINO

diana.massai@polito.it

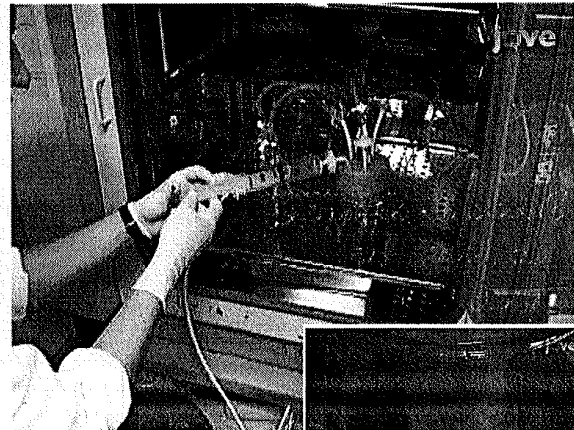
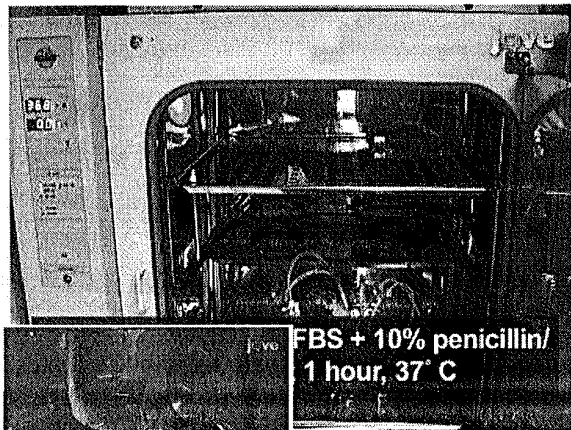
Procedure for Lung Engineering

Elizabeth A. Calle^{1,2}, Thomas H. Petersen^{1,2}, Laura E. Niklason^{1,3}

¹Department of Biomedical Engineering, Yale University, ²Department of Biomedical Engineering, School of Medicine, Duke University, ³Department of Anesthesia, Yale University

decellularization/rinsing and sterilization

recellularization



<http://www.jove.com/video/2651/procedure-for-lung-engineering>

Implanted engineered lungs
can exchange gas for 45-120 minutes



Introduzione ai bioreattori

POLITECNICO DI TORINO

diana.massai@polito.it

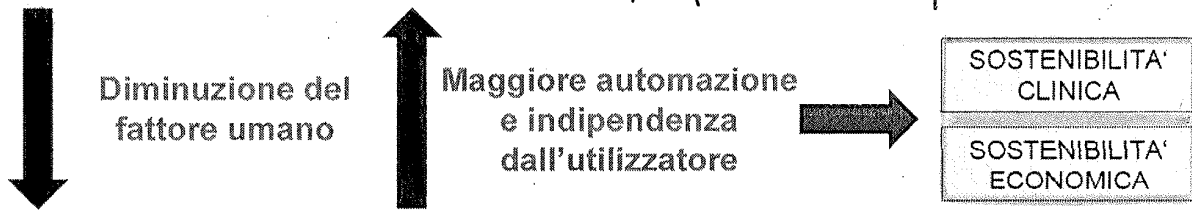
Processi manuali caratterizzati da:

- scarsa ripetibilità
- scarsa sicurezza
- scarsa scalabilità
- scarsa conformità alle **GMP**

Bioreattori assicurano:

- ripetibilità
- sicurezza
- scalabilità
- tracciabilità e riproducibilità
- Automazione
- produzione su larga scala

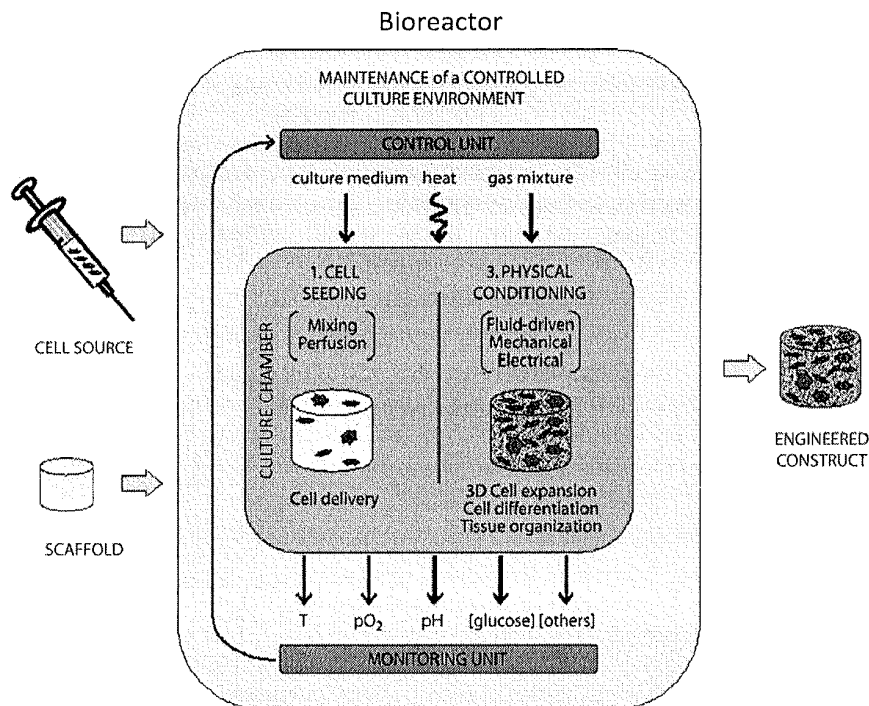
e' parte di un sistema di controllo qualità che copre produzione e sperimentazione



Introduzione ai bioreattori

POLITECNICO DI TORINO

diana.massai@polito.it

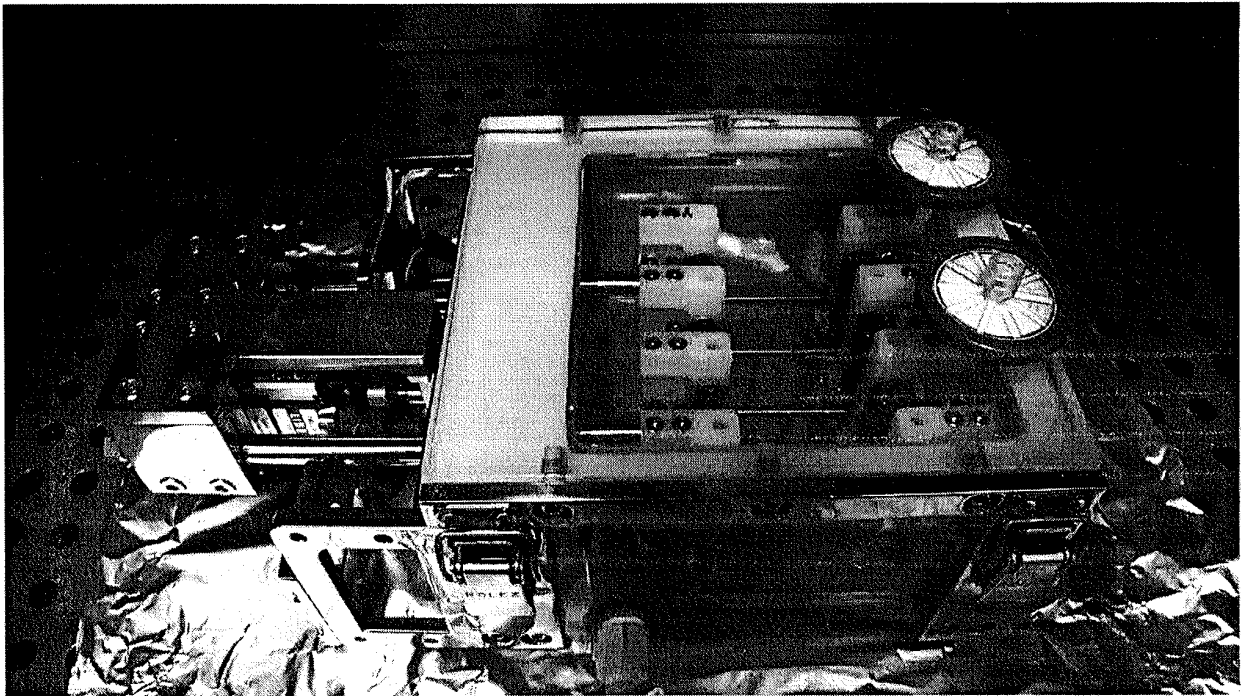




Componenti di un bioreattore

POLITECNICO DI TORINO

diana.massai@polito.it



Multitrack, bioreattore per coltura dinamica di patch cardiache - Politecnico di Torino

Progettazione di Protesi e Organi Artificiali – A.A. 2013/14

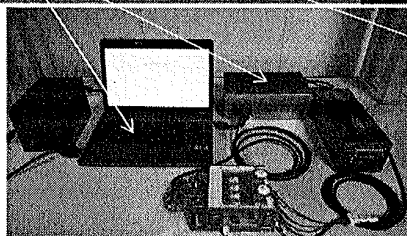
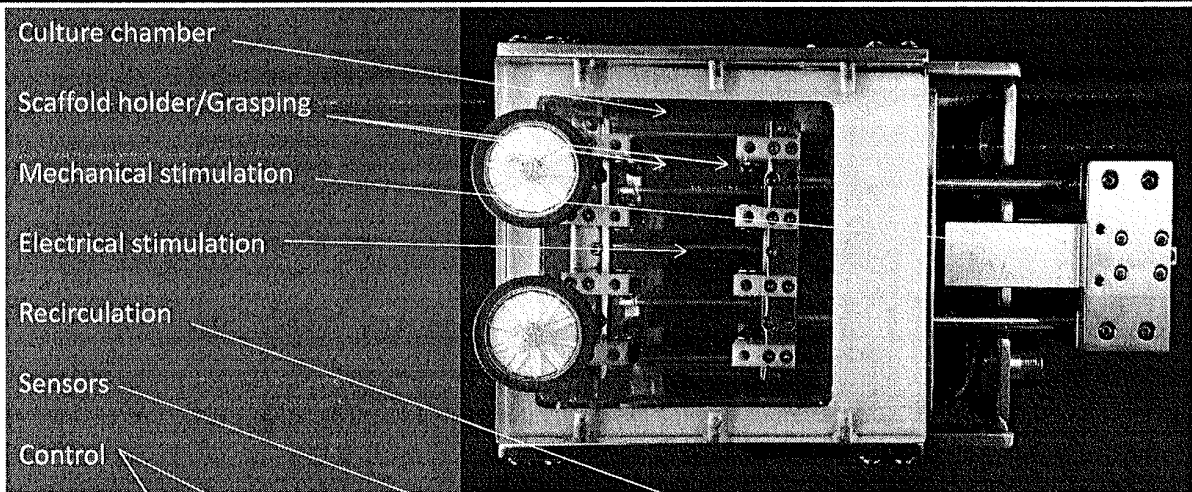
13/23



Componenti di un bioreattore

POLITECNICO DI TORINO

diana.massai@polito.it



Multitrack, bioreattore per coltura dinamica di patch cardiache - Politecnico di Torino

Progettazione di Protesi e Organi Artificiali – A.A. 2013/14

14/23



Classificazione dei bioreattori

POLITECNICO DI TORINO

diana.massai@polito.it

A further classification of bioreactors:

- **Non physiologic-like bioreactors** (an early form of bioreactors aiming to improve classical laboratory cell culture)
 - ✓ **Spinner flask** bioreactors
 - ✓ **Rotating wall** bioreactors

- **Physiologic-like bioreactors** (advanced bioreactors aiming to reproduce physiological environment and stimuli)
 - ✓ **Compression/ tensile strain** bioreactors
 - ✓ **Hydrostatic pressure** bioreactors
 - ✓ **Flow perfusion** bioreactors

Some of these features can be combined.



Bioreattori non fisiologici

POLITECNICO DI TORINO

diana.massai@polito.it

SPINNER FLASK BIOREACTORS

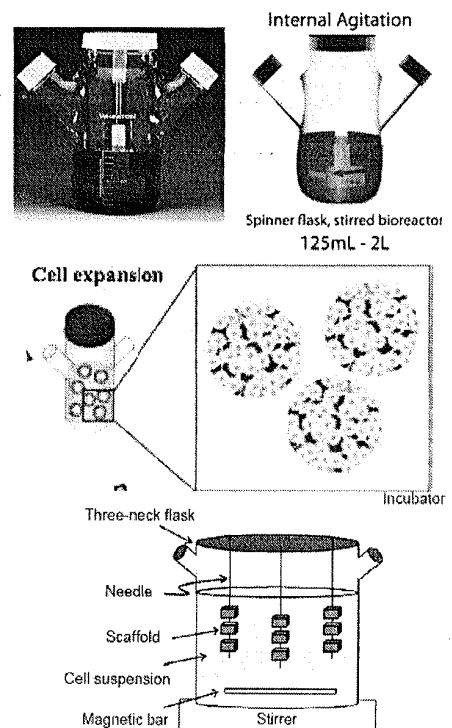
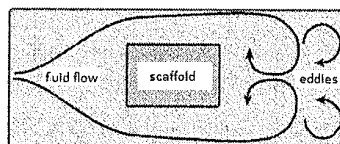
In a spinner flask bioreactor, **scaffolds are free floating or suspended** at the end of needles in a flask of culture media.

A magnetic stirrer (or similar) mixes the media.

Typically spinner flasks are around 120 ml in volume (although much larger flasks of up to 8 l have been used).

They are run at 50-80 rpm, and 50% of the medium used in them is changed every two days.

In case of suspended scaffolds, flow across their surface results in eddies in the scaffold superficial pores.

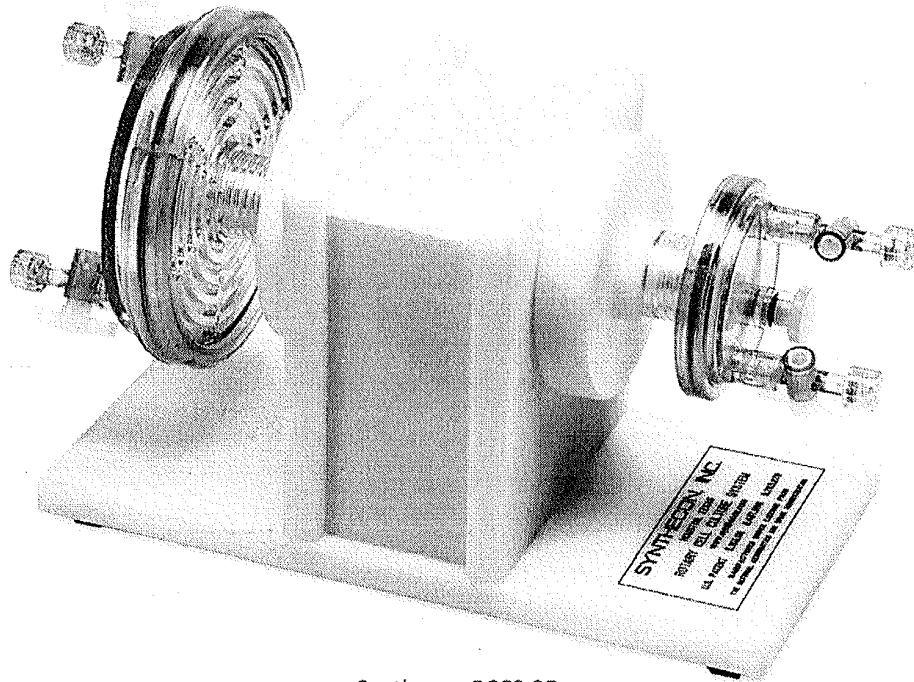




Bioreattori non fisiologici

POLITECNICO DI TORINO

diana.massai@polito.it



Synthecon RCCS-2D

Progettazione di Protesi e Organi Artificiali – A.A. 2013/14

21/23



Bioreattori non fisiologici

POLITECNICO DI TORINO

diana.massai@polito.it



Synthecon RCCS-2D

Progettazione di Protesi e Organi Artificiali – A.A. 2013/14

22/23



Bioreactors for TE and RM

General overview – Part II



Bioreattori fisiologici

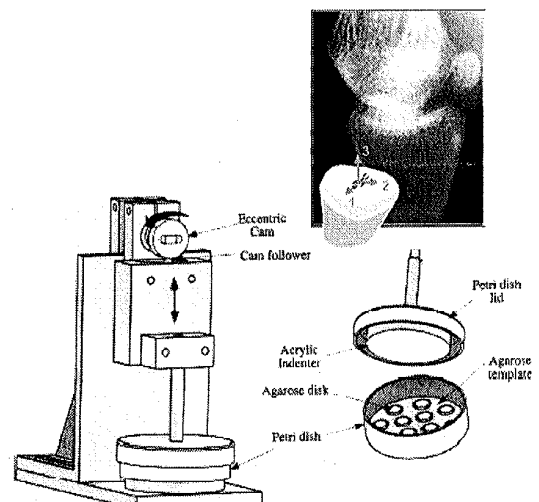
Physiological-like bioreactors aim to reproduce what happens in the native environment and in the region in which they will be implanted once cultured.

→ Cells “feel” the same stimuli they would withstand inside the body and they proliferate and differentiate in order to produce the tissue they are “convinced” to be set into.

COMPRESSION BIOREACTORS

This class of bioreactors is generally used in cartilage and bone TE. In general, compression bioreactors consist of a motor, a system providing linear motion, and a controlling mechanism. Both static loading and dynamic loading can be applied.

A signal generator can be used to control the system and load cells can be used to measure the load response.

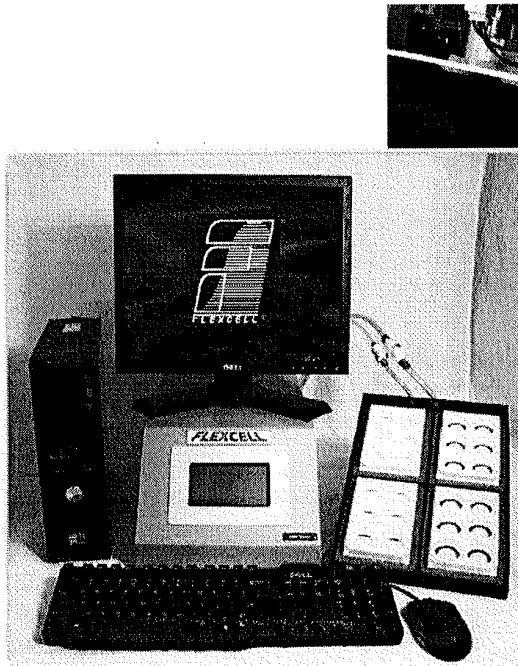




Bioreattori fisiologici

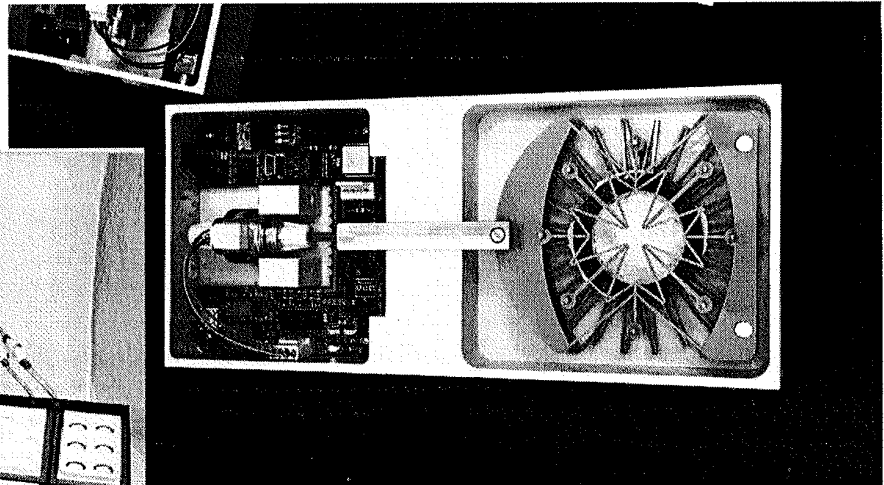
POLITECNICO DI TORINO

diana.massai@polito.it



Flexcell FX-5000

<http://www.flexcellint.com/slideshow2.htm>



Mechanoculture Kit, World Precision Instrument

<http://www.wpiinc.com/index.php/CS-MECHANO-SYS.html>

Progettazione di Protesi e Organi Artificiali – A.A. 2013/14

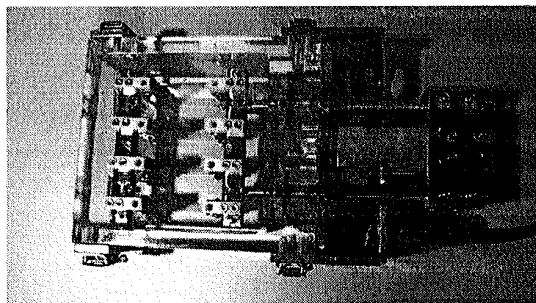
5/18



Bioreattori fisiologici

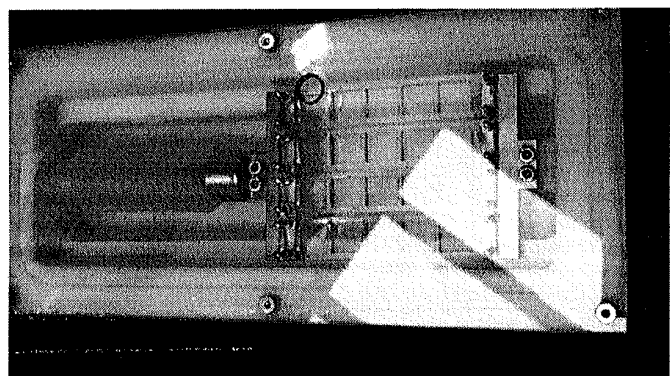
POLITECNICO DI TORINO

diana.massai@polito.it



Multitrack, bioreattore per coltura dinamica di patch cardiache - Politecnico di Torino

Prototipo di bioreattore per coltura dinamica di cellule - CellScale



Progettazione di Protesi e Organi Artificiali – A.A. 2013/14

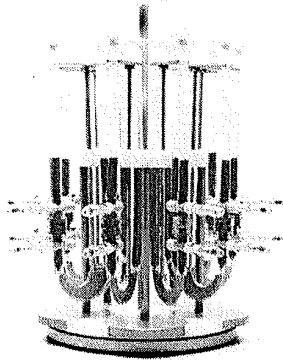
6/18



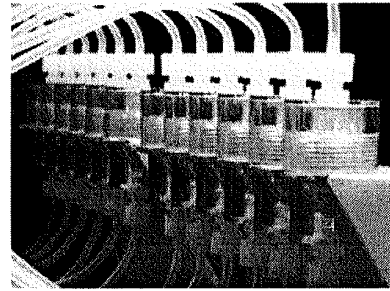
Bioreattori fisiologici

POLITECNICO DI TORINO

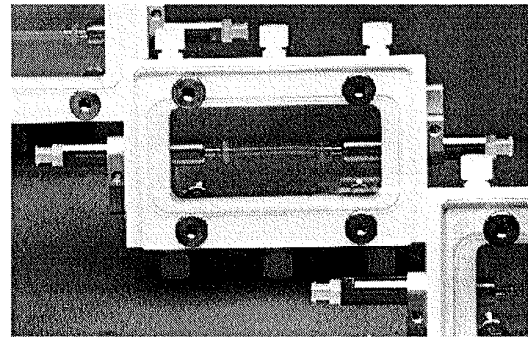
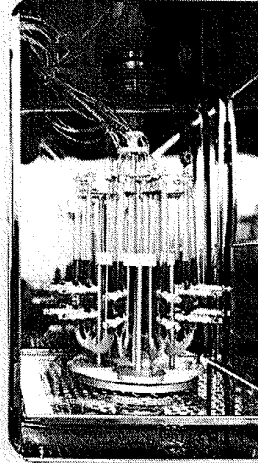
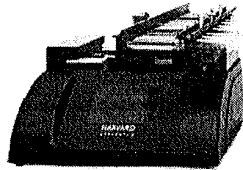
diana.massai@polito.it



U-Cup, Celtec Biotek
<http://www.celtecbiotek.com/>



010 - 1 OsteoGen Chambers



LumeGen - TGT

Progettazione di Protesi e Organi Artificiali – A.A. 2013/14

9/18



Classificazione dei bioreattori

POLITECNICO DI TORINO

diana.massai@polito.it

Last classification of bioreactors:

- **Mono-chamber**, bioreactors with just one culture chamber
- **Multichamber**, bioreactors with more than one culture chamber in parallel

Mono-chamber bioreactors allow just one sample culture, but they are less expensive to be built and bought. On the other hand, they are not suitable for mass production and, when used for laboratory experiments, it is needed to carry out several cultures in series in order to obtain statistically significant results.

Multi-chamber bioreactors allow different sample culture in parallel, they are more expensive (but the increase in price is less than linear...), but they allow mass production and give statistically significant results in just one culture.

Progettazione di Protesi e Organi Artificiali – A.A. 2013/14

10/18



Requisiti di progetto dei bioreattori

POLITECNICO DI TORINO

diana.massai@polito.it

Requisiti di progetto di un bioreattore:

- Sterilizzabilità e citocompatibilità dei componenti a contatto con il mezzo di coltura e le cellule
- Compatibilità con le procedure di laboratorio (semplice da montare e usare)
- Affidabilità del sistema (previsti lunghi periodi di coltura)
- Facilità di regolazione dei parametri di coltura e sollecitazione
- Facilità ricambio mezzo di coltura
- Ingombro ridotto (inserito in incubatore)
- Modularità dei componenti
- Basso costo di realizzazione e utilizzo

Progettazione di Protesi e Organi Artificiali – A.A. 2013/14

13/18



Requisiti di progetto dei bioreattori

POLITECNICO DI TORINO

diana.massai@polito.it

Selezione materiali:

Materials used within a bioreactor **must not elicit any adverse reaction from the cultured tissue**. Any material which is in contact with media must be **biocompatible** (not to induce inflammatory response and resist bacterial colonization).

FDA classifies materials in different “grades” according to the level of toxicity and release of debris the material produce when located in a particular environment or in a particular application.

Among the different grades, let's define:

- food grade, an absolutely non-toxic material, suitable for being in touch with food for human alimentation
- medical grade, a non-toxic material whose release of debris is so low that it can be used for surgery or it can be implanted

According to FDA classification, materials used in a bioreactor must be at least “food grade” if not “medical grade”.

Progettazione di Protesi e Organi Artificiali – A.A. 2013/14

14/18



Requisiti di progetto dei bioreattori

POLITECNICO DI TORINO

diana.massai@polito.it

Therefore...

Metals

- If your bioreactor has metal components, the only requirement you must take into account is metal grade (food grade/medical grade), any metal will be suitable for any sterilization method (not microwaves!)

Polymers

- If your bioreactor has to be autoclavable, the polymer you choose must be food grade/medical grade and it has to be able to withstand at least a 121°C wet environment (polycarbonate, polyoxymethylene)
- If your bioreactor has to be dry heat sterilized, the polymer you choose must be food grade/medical grade and it has to be able to withstand at least a 160°C dry environment

Progettazione di Protesi e Organi Artificiali – A.A. 2013/14

17/18



Bibliografia

POLITECNICO DI TORINO

diana.massai@polito.it

Chung HJ, Park TG. Surface engineered and drug releasing pre-fabricated scaffolds for tissue engineering. *Adv Drug Deliv Rev.* 2007 May 30;59(4-5):249-62. Epub 2007 Apr 10.

Kasper C, Griensven M, Pörtner R. Bioreactor Systems for Tissue Engineering. *Advances in Biochemical Engineering/Biotechnology, Vol. 112, 2009, Springer.*

Progettazione di Protesi e Organi Artificiali – A.A. 2013/14

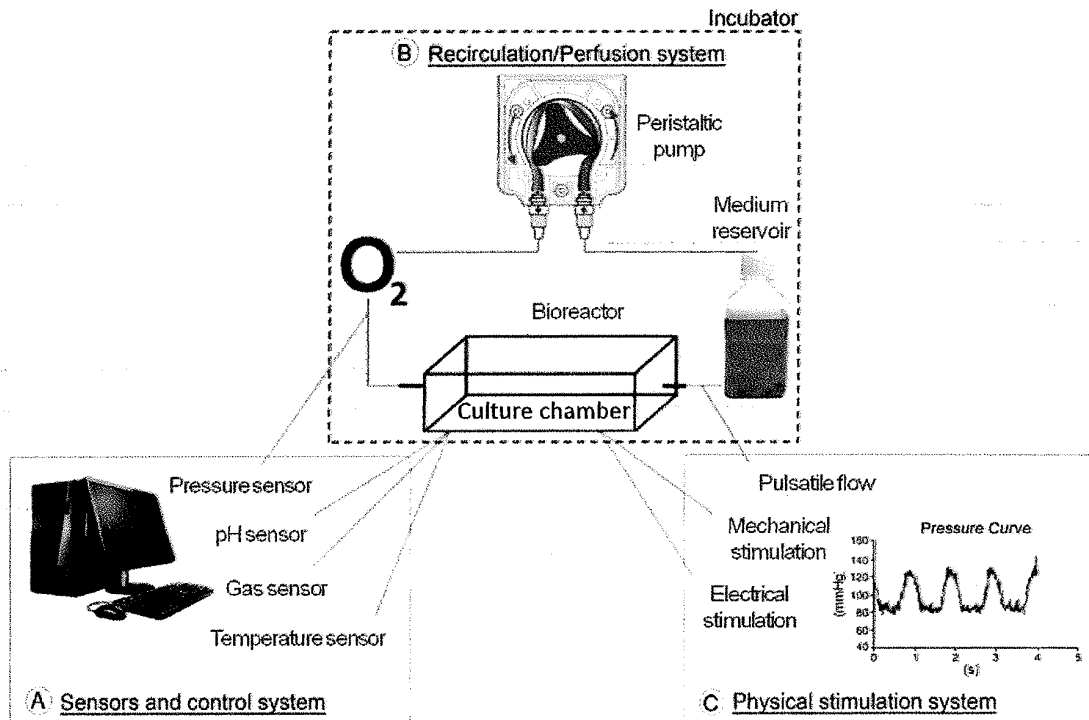
18/18



Componenti di un bioreattore

POLITECNICO DI TORINO

diana.massai@polito.it



Progettazione di Protesi e Organi Artificiali – A.A. 2013/14

3/19



Bioreattori – Sottosistemi

POLITECNICO DI TORINO

diana.massai@polito.it

CULTURE CHAMBER

The culture chamber allows to **house (and hold) the cell/tissue constructs** in a **sterile and sealed vessel**.

Culture chamber design requirements:

- be able to house and hold the construct when applicable
- be properly sealed to avoid any contamination and fluid leakage
- each component must work at 37°C, in humid atmosphere or immersed in culture medium
- must be as transparent as possible (to allow the visual monitoring of the experiments and the possible use of imaging monitoring instrumentation)
- have a good surface finishing (machined recesses could collect condensed steam during autoclaving and become breeding grounds for micro-organisms)

Progettazione di Protesi e Organi Artificiali – A.A. 2013/14

4/19



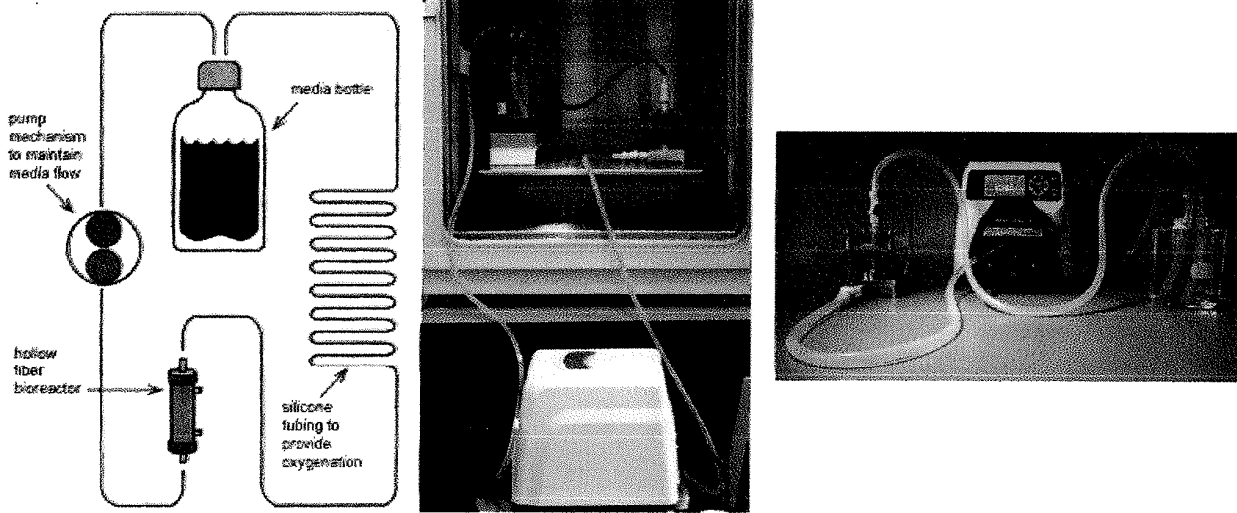
Bioreattori – Sottosistemi

POLITECNICO DI TORINO

diana.massai@polito.it

RECIRCULATION/PERFUSION SYSTEM

The closed loop recirculation/perfusion system allows the recirculation of the medium within the bioreactor and normally consists of: a medium reservoir, a peristaltic pump, and oxygen permeable tubes.



Progettazione di Protesi e Organi Artificiali – A.A. 2013/14

7/19



Bioreattori – Sottosistemi

POLITECNICO DI TORINO

diana.massai@polito.it

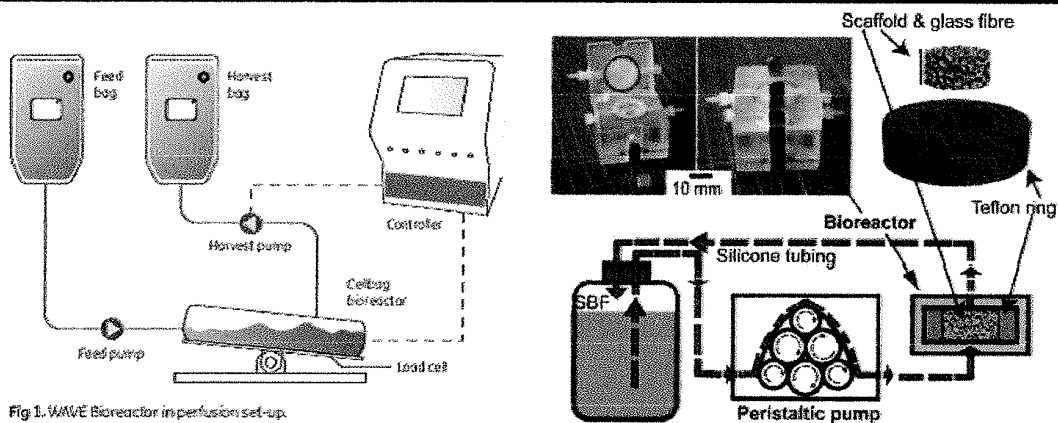


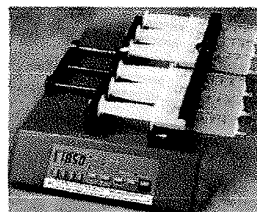
Fig 1. WAVE Bioreactor in perfusion set-up.



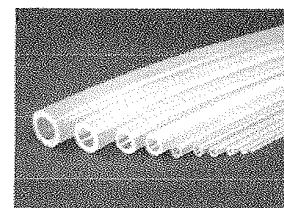
Reservoirs



MasterFlex peristaltic pump



South Pointe Surgical syringe pump



Tubing

Progettazione di Protesi e Organi Artificiali – A.A. 2013/14

8/19



Bioreattori – Sottosistemi

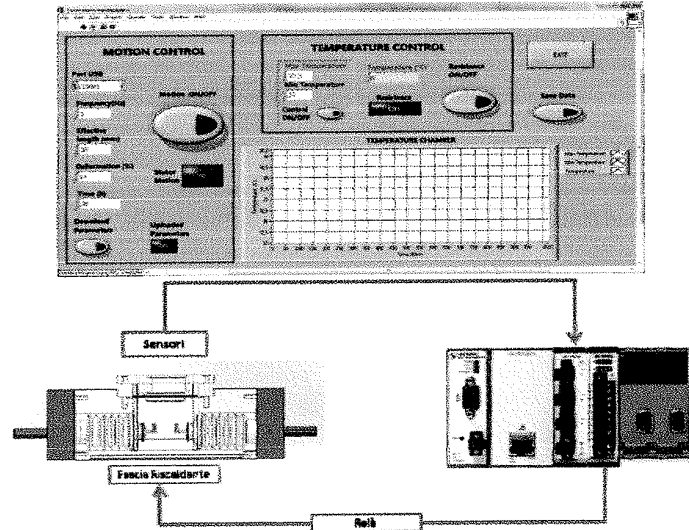
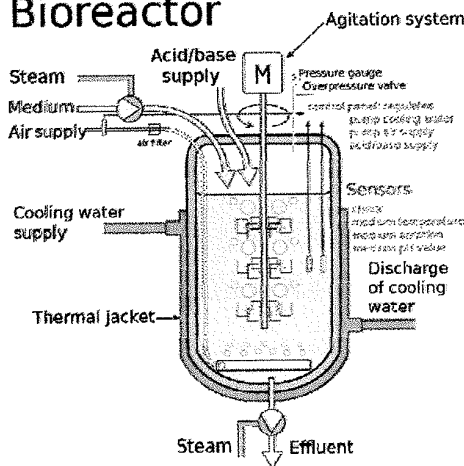
POLITECNICO DI TORINO

diana.massai@polito.it

MONITORING AND CONTROL SYSTEM

This system allows the **real-time monitoring and recording** of the culture medium parameters, and the **control of the stimulation system**. It can be composed of: **sensors, data acquisition system, personal computer, user-friendly interface**.

Bioreactor



Progettazione di Protesi e Organi Artificiali – A.A. 2013/14

11/19



Bioreattori – Sottosistemi

POLITECNICO DI TORINO

diana.massai@polito.it

The monitoring of the culture and tissue parameters is useful for:

- tracing of the culture process
- elucidating the physical/biochemical mechanisms of tissue development
- implementation of feedback-controlled strategies aimed at optimizing the culture progression
- Automation and scale-up of tissue manufacturing

For instance, monitoring the pO_2 and pCO_2 in the culture medium, and detecting the concentrations of glucose and lactate, allows to **quantitatively evaluate the metabolic behavior of cultured cells**, thus supporting/substituting subjective and qualitative conclusions traditionally derived by simply observing the color of the medium.

On the basis of such information, it is then possible to enact strategies (e.g., injection of fresh medium or supplements, modification of the medium flow rate in perfusion bioreactors) aimed at **adapting the dynamic culture environment to the actual developmental state of the engineered construct**.

Progettazione di Protesi e Organi Artificiali – A.A. 2013/14

12/19



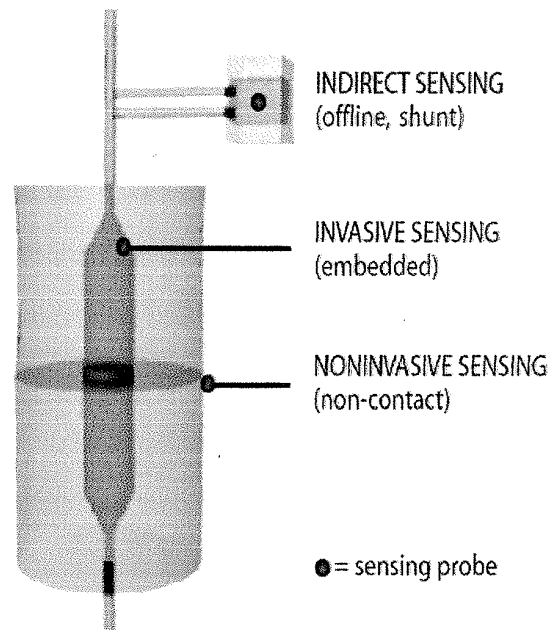
Bioreattori – Sottosistemi

POLITECNICO DI TORINO

diana.massai@polito.it

Sensors for environment monitoring can be classified in **three categories** according to the **position of the sensing probe relative to the culture chamber** of the bioreactor:

- **Invasive**, sensor is placed directly inside the culture chamber of the bioreactor, either immersed in the culture fluid or in direct contact with the construct
- **Non-invasive**, sensor does not come in contact with the interior of the culture chamber, and is capable of measuring via interrogation through the bioreactor wall
- **Indirect**, directly on the culture media, but via sampling means



Progettazione di Protesi e Organi Artificiali – A.A. 2013/14

15/19



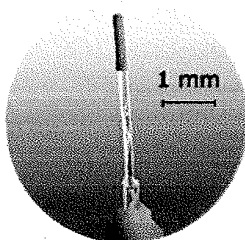
Bioreattori – Sottosistemi

POLITECNICO DI TORINO

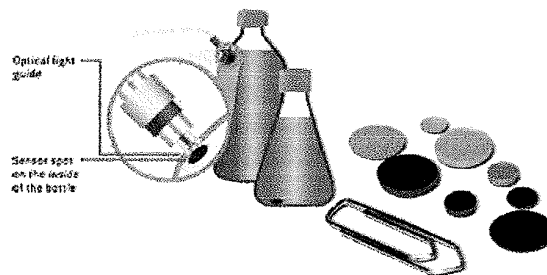
diana.massai@polito.it

Environment sensor design requirements:

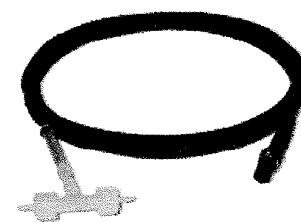
- **small in size**
- **easily sterilizable**
- **have a lifetime of several weeks**, if they are not sufficiently low cost to be disposed of and replaced during culture
- **ensure a stable response over time**, since repeated calibration might be difficult to carry out due to the accessibility of the sensors during culture



PreSens invasive oxygen probe



Disposable non-invasive oxygen probes



Flow-through indirect pH sensor for shunt sensing

Progettazione di Protesi e Organi Artificiali – A.A. 2013/14

16/19



Bibliografia

POLITECNICO DI TORINO

diana.massai@polito.it

Chung HJ, Park TG. Surface engineered and drug releasing pre-fabricated scaffolds for tissue engineering. *Adv Drug Deliv Rev.* 2007 May 30;59(4-5):249-62. Epub 2007 Apr 10.

Kasper C, Griensven M, Pörtner R. Bioreactor Systems for Tissue Engineering. *Advances in Biochemical Engineering/Biotechnology*, Vol. 112, 2009, Springer.

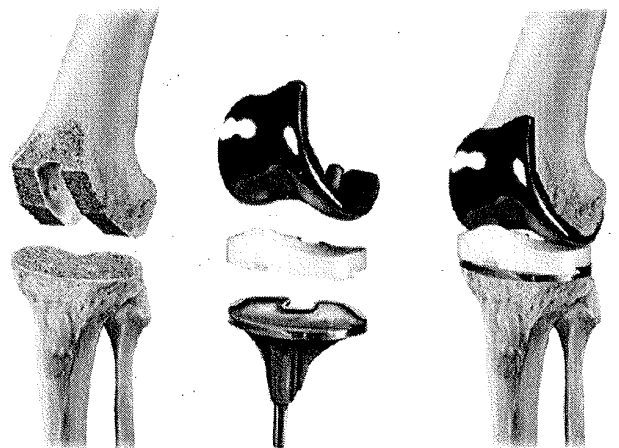
Tandon N, Cannizzaro C, Chao PH, Maidhof R, Marsano A, Au HT, Radisic M, Vunjak-Novakovic G. Electrical stimulation systems for cardiac tissue engineering. *Nat Protoc.* 2009; 4(2):155-73.

Introduction

- Why a model?
 - Prostheses and other medical devices are subjected to a wide range of biomechanical tests before they can be implanted in the body.
 - These pre-clinical tests are important in protecting patients against ineffective devices.
 - Often we cannot conduct an experiment on the real system and instead we construct a 'model' of the system (experimental, computational).

Introduction

- Computational modelling in biomechanics
 - Complex geometries



Cuts

Implant components

Implanted

C'è poi il comportamento per il quale lo applico esso spostamento, in questa sua forza e questa tende a scaricarsi.

Altri materiali biodegradabili (in vitro) riescono a recuperare (la cartilagine) ma con grosse difficoltà. È difficile caratterizzare i tessuti molli.

Il problema successivo è l'imposizione dei vincoli e dei carichi (pg. 3) Questo discorso dipende molto dal tipo di attività che il soggetto svolge

- camminare;
- fare le scale;
- chinarsi per terra.

Dato che la realtà ha molte forme deterministiche bisogna fare un opportuno mix, un sistema di carico/compensate.

Il fine di tutto c'è sempre il problema della specificità del paziente. Potrebbe tornare d' moda la protesi "custom made".

Offi normalmente in laura con delle taglie, con analisi di percorsi.

costi maggiori
tempi non compatibili con depense brevi

Le tecniche di fast prototyping sono usate per lo studio di protesi protesiche, delle loro caratteristiche e funzionalità ma offi possono essere usate per la produzione di protesi "personalizzate" in tempi brevi (come il laser sintering).

pluettano di generare strutture diverse da quelle che ottenerei mediante lavorazione meccanica per spostazione di materiale. Posso pensare ad un materiale metallico con strutture ortopedico come l'osso corticale

Le protesi d'anca hanno il problema che, per sopportare i carichi, hanno bisogno di materiali metallici con resistenza importante. Ottego un pezzo più rigido dell'osso (2-3 ordg). Si pensano delle concentrazioni di tensione e ampie zone funzionali più sollecitate del normale e altre per tutta l'elasticità.

Questo provoca impatti violenti e molti gli elementi ossei

Un problema è che tutte le protesi metalliche possono incorere nel problema delle metallici, passaggio di He^+ , che provoca anche il fallimento delle protesi.

Devo curare l'usura del pezzo.

* ha un problema grosso di corrodere di più.

è legata alla elasticità di stress/strain e alla zona di contatto

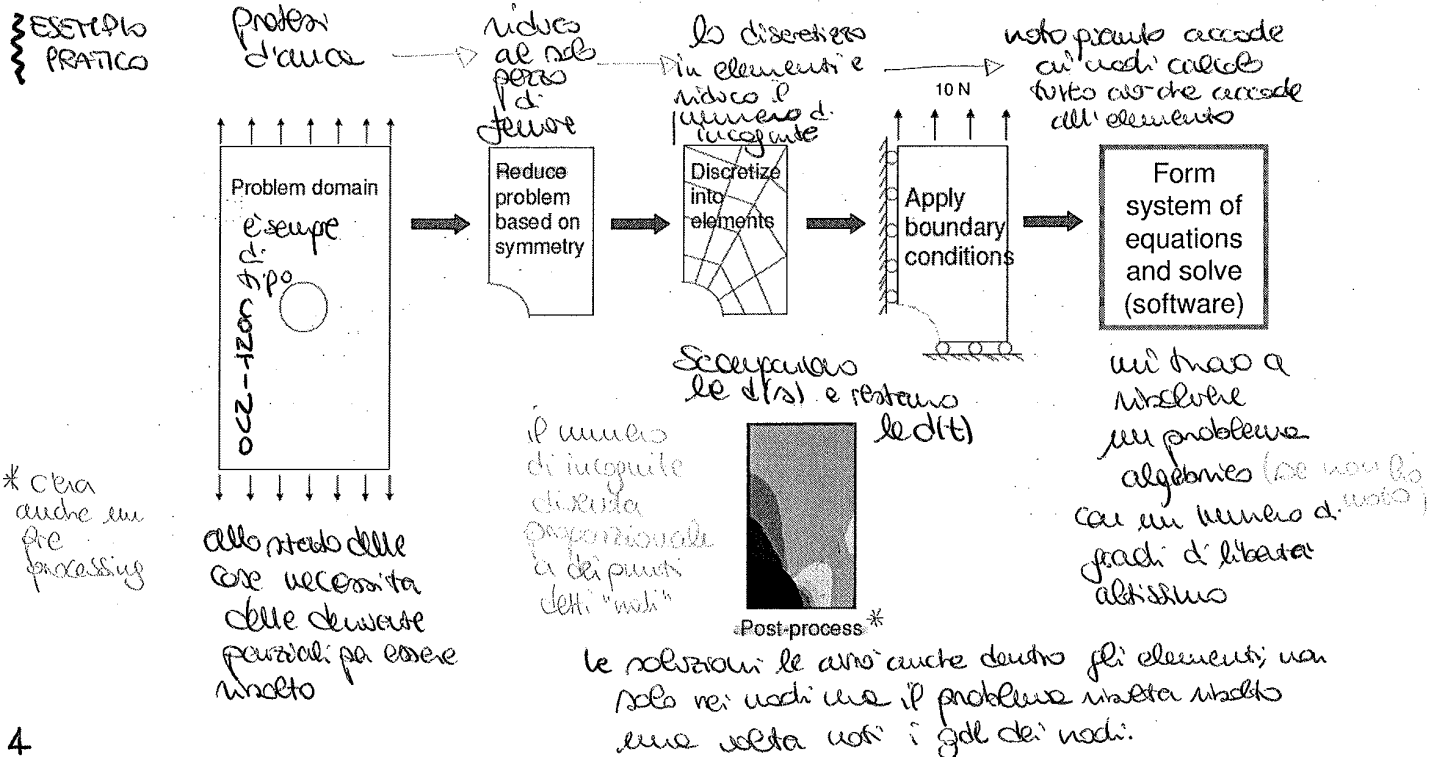
Finite element method

"The finite element method (FEM) is a computer-aided mathematical technique for obtaining approximate numerical solutions to the equations of calculus that predict the response of physical systems subjected to external influences"

le things l'attive
 ho scelto bene
 → materiali:
 → geometria
 → carichi e vincoli

COSA GUARDARE NOI?
 → i calcoli lineari elastici
 statici
 → trattamento di materiali
 solidi
 applichiamo la teoria dell'elasticità
 usi: carichi, applicano trazione
 New York tensioni e
 New York deformazioni

How does the FEM work: an illustrative example



FEM-Resources

■ Commercial software

- ✓ ANSYS
- ABAQUS
- COSMOS/M
- NASTRAN
- PATRAN
- MARC
- ADINA
- IDEAS
- ✓ CATIA...

■ Open source finite element packages

Una mesh ben fatta non è uniforme!
 È un compromesso inevitabile
 dove non più alti i gradienti

(*)
 Gli elementi non sono
 distribuiti
 linearmente

Gli elementi più semplici
 non in grado di descrivere
 spostamenti che seguono in
 modo lineare e quindi
 derivando le rete vengono
 fuori costanti → gli stessi
 deformazioni non costanti

WHAT DO I NEED

to Building a finite element model?

- Geometry
- Material properties
- Boundary conditions
 - Loading
 - Restraints

■ Additional features: contact interfaces, friction,

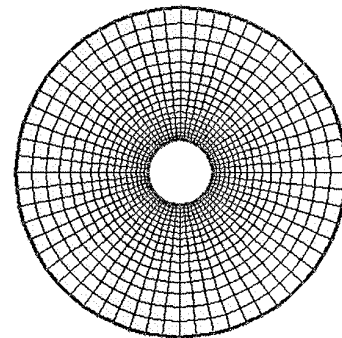
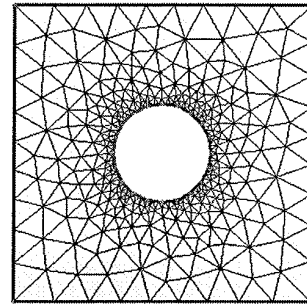
Se il modello è complesso
 a loro di sicuro(*)

(*) Quando si parla di
 codice non lineare
 si intende che esiste
 una delle tre famiglie
 principali di non linearità:
 1) n. l. geometriche dove non
 considero i piccoli spostamenti
 2) n. l. materiale
 3) n. l. di contatto lo
 fanno non rigidamente
 causate, che possono
 entrare in contatto
 oppure no e passare
 una rigata all'altra

Già che sto sbagliando, devo vedere che ho zone dove posso sbagliare di più e
 altre meno e questo dipende dai gradienti tensionali deformativi. (*)

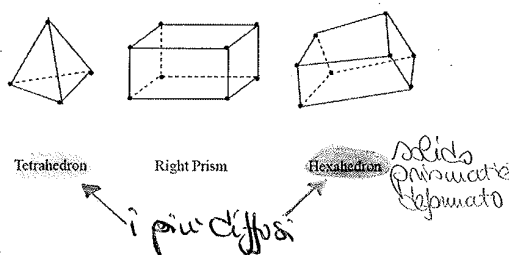
FEM: Modelling the geometry

- The shape of the structure is divided into small finite elements.
- In principle, every detail of the structure can be taken into account by using sufficiently small elements.
 - In practice this may not be feasible due to the limitations of computer capacity.
- Refinement of the mesh must depend on the kind of information sought.



FEM: Modelling the geometry

- For 3D analysis, elemental volumes of a particular shape (e.g. bricks) are used and for 2D analysis, elemental areas of a particular shape (e.g. triangles) are used.



a punta di triangolo / change ne esordio che hanno più punti

linear triangular *quadratic triangular* *cubic triangular*

linear quadrilateral *quadratic quadrilateral* *cubic quadrilateral*

Diventano punti: un avanzamento d'apertamento quadratico cubico a seconda che il GDE appaia

FEM: Boundary conditions

È la cosa più complessa da inserire

perché spesso i carichi sono VARIABILI

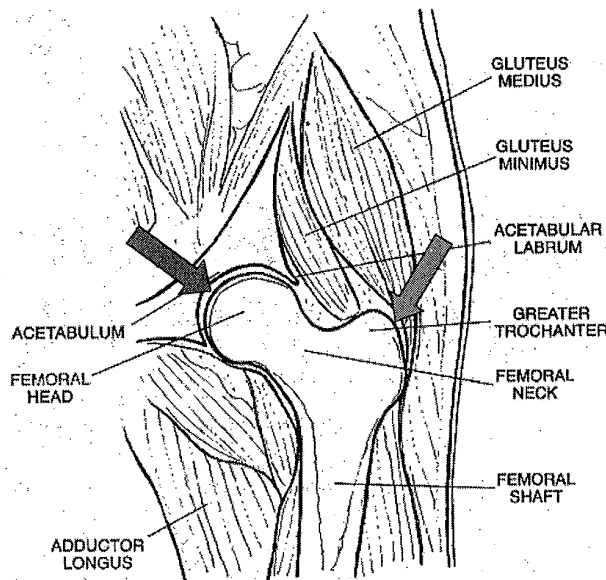
- An FE analysis requires a numerical description of all external loads applied to the structure (point of application, magnitude & direction). The loads are usually variable and are not always precisely known.
- By using parametric variation, the loads can be varied to study the "worst case scenario"*. *si fa spesso così! Anche posto però dipende dal caso.*
- It is also useful to investigate the sensitivity of the stress patterns to small deviations of external loads.

* in questo aspetto quindi si preoccupano e la notifica ciò che sta progettando. Non è la cosa migliore però per lo scenario di fatica e usura!

→ Prevedo lo scenario peggiore anche se non (probabilità) di accadimento molto bassa.

Non ha senso occuparsi di sollecitazioni massime e minime e l'analisi di sollecitazioni medie che sono decisamente accorciate.

FEM: Boundary conditions



PARTE SECONDA

CALCOLO MATRICIALE DELLE STRUTTURE

CAPITOLO I

FORMULAZIONE GENERALE

Il calcolo delle strutture trae grande vantaggio, sia in termini di rapidità sia in termini di precisione, dall'essere svolto applicando le tecniche di calcolo matriciale. Se infatti le relazioni della scienza delle Costruzioni, ed in particolare della teoria delle travi, vengono riscritte in forma matriciale esse risultano particolarmente adatte ad essere elaborate con i calcolatori elettronici.

Si tratta quindi di modelli matematici noti a cui viene data una nuova veste più adatta al calcolo automatico.

Il calcolo matriciale si presenta come passaggio fondamentale nel percorso verso le tecniche di analisi strutturale più moderne come il metodo degli Elementi Finiti cui verrà dedicata la terza parte di questo volume.

I concetti di elemento, nodo, spostamenti nodali, forze nodali, matrice di rigidezza e le tecniche operative per l'assemblaggio delle matrici di rigidezza degli elementi per formare la matrice di rigidezza della struttura, per l'imposizione dei vincoli e per la soluzione del sistema di equazioni sono preziosa eredità del calcolo matriciale delle strutture cui ha attinto a piene mani il metodo degli elementi finiti. Ecco allora l'importanza di far precedere alla trattazione del metodo degli elementi finiti l'esposizione dei concetti fondamentali del calcolo matriciale delle strutture.

Da tale esposizione risulterà inoltre evidente la differenza in termini concettuali fra l'impostazione del modello matematico agli elementi finiti e il calcolo strutturale secondo la teoria delle travi.

i valori degli spostamenti nodali in luogo del valore dell'allungamento. La (1.1) diviene

$$\begin{cases} F_1 = K (f_1 - f_2) \\ F_2 = K (f_1 - f_2) \end{cases} \quad (1.4)$$

che permette di calcolare le forze nodali (ovviamente uguali e contrarie) una volta che siano noti gli spostamenti dei nodi. La (1.2) può essere scritta come

$$\begin{cases} (f_1 - f_2) = F_1 / a \\ (f_1 - f_2) = F_2 / a \end{cases} \quad (1.5)$$

che, tenuto conto dell'equazione di equilibrio $F_1 = F_2$, si presenta come una identità. Non è possibile risalire dal valore delle forze applicate al valore degli spostamenti nodali! Questo è dovuto al fatto che nello scrivere la (1.5) non sono stati imposti i vincoli. Questo risultato è di grande rilevanza: è sempre possibile scrivere la relazione di rigidezza

$$F_i = \sum_j K_{ij} f_j \quad (1.6)$$

non è possibile scrivere la relazione di deformabilità

$$f_j = \sum_i a_{ji} F_i \quad (1.7)$$

per strutture (o elementi) labili; per poter dare significato alla relazione di deformabilità occorre che la struttura (o elemento) sia sufficientemente vincolata, almeno resa isostatica. Si nota inoltre espressamente che al variare della condizione di vincolo variano i valori dei coefficienti a_{ji} .

Si consideri ora un elemento bidimensionale, ad esempio una trave inflessa o un pannello, e si scriva per esso la relazione di rigidezza fra i carichi nodali F_i e gli spostamenti nodali f_j .

$$F_i = \sum_j K_{ij} f_j \quad (1.6 \text{ rip})$$

Tale relazione permette di dare un significato preciso ai termini di rigidezza K_{ij} . Ciascuno di essi è infatti pari al valore della forza F_i quando la struttura è soggetta allo spostamento f_j di

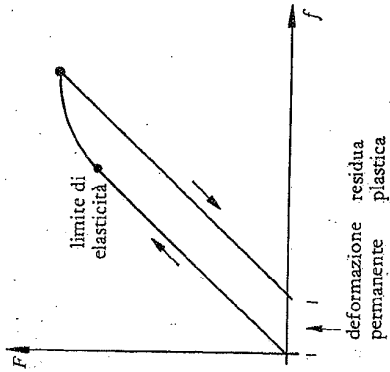


Fig. 1.1 d Comportamento elasto-plastico.

Si definiscano ora **nod** alcuni punti significativi dell'elemento che si sta studiando. Nel caso della molla o dell'asta i nodi saranno almeno due, i due punti di estremità. Ciascuno dei punti materiali che costituiscono l'elemento subirà uno spostamento nello spazio a seguito dell'applicazione dei carichi. Si nota espressamente che al termine "spostamento" va qui assegnato un significato più ampio di "traslazione" comprendendo, almeno in alcuni casi, anche il significato di rotazione (spostamenti generalizzati). Particolare importanza hanno gli spostamenti dei punti scelti come nodi, poiché una volta che questi siano noti o siano stati calcolati si conoscono gli spostamenti di tutti i punti dell'elemento (campo degli spostamenti). Gli spostamenti dei punti nodali dell'elemento, generalmente indicati col termine di spostamenti nodali, costituiscono quindi i gradi di libertà dell'elemento; il simbolo f_j rappresenta il j-esimo spostamento nodale.

Gli elementi scambiano forze fra loro o con il mondo esterno solo attraverso i nodi. Si nota espressamente che anche al termine "forza" va qui assegnato un significato più ampio comprendendo, almeno in alcuni casi, anche il significato di coppia (forze generalizzate). Tali forze sono indicate con il termine di forze nodali; il simbolo F_i rappresenta la i-esima forza nodale.

Si provi ora a riscrivere le relazioni (1.1) e (1.2) esplicitando

$$\{ F \} = \{ F_1, M_2, F_3, M_4 \}^T \quad (1.11)$$

e i due spostamenti nodali non nulli in un vettore $\{ f \}$ degli spostamenti nodali

$$\{ f \} = \{ f_3, \theta_4 \}^T \quad (1.12)$$

il sistema (1.10) può essere scritto in forma matriciale

$$\{ F \} = [K] \{ f \}. \quad (1.13)$$

La matrice $[K]$ che contiene i coefficienti di rigidità dell'elemento (o della struttura) è detta matrice di rigidità dell'elemento (o della struttura).

1.3 RELAZIONE DI DEFORMABILITÀ PER UNA TRAVE

Si ricaveranno ora i coefficienti di deformabilità per una trave incastrata ad un estremo e soggetta all'altro estremo alla forza di taglio F_3 ed al momento flettente M_4 . La forza di taglio F_1 ed il momento flettente M_2 sono le reazioni vincolari, il cui valore è per il momento incognito.

Il particolare vincolo che è stato posto all'estremo sinistro si traduce nell'essere gli spostamenti f_1 ed θ_2 nulli. Questa particolare condizione toglie generalità al ragionamento seguente.

La figura 1.2 fa ancora da riferimento per la definizione delle forze imposte e degli spostamenti risultanti.

Risulta evidente che per il calcolo dei coefficienti di deformabilità attraverso l'applicazione ripetuta della definizione (1.7) occorre necessariamente fare riferimento alla struttura vincolata (si nota espressamente che la modalità di vincolo deve essere quella effettiva, il valore dei coefficienti di deformabilità è infatti dipendente dallo schema di vincolo).

Si deve pertanto procedere al calcolo degli spostamenti nodali f_j applicando successivamente le sole due forze nodali F_3 e M_4 , mentre sarebbe privo di significato applicare alla trave le reazioni vincolari come se fossero forze esterne (cioè i coefficienti a_{j1} e a_{j2} non hanno significato).

La relazione di deformabilità si esprime quindi attraverso i seguenti otto coefficienti a_{ij}

$$\begin{cases} F_1 = K_{13} f_3 + K_{14} \theta_4 \\ M_2 = K_{23} f_3 + K_{24} \theta_4 \\ F_3 = K_{33} f_3 + K_{34} \theta_4 \\ M_4 = K_{43} f_3 + K_{44} \theta_4 \end{cases} \quad (1.10)$$

che esprime la formulazione di rigidità dell'elemento trave incastrata ad un estremo. Si nota espressamente che il sistema (1.10) contiene quattro equazioni in quattro incognite: le due reazioni vincolari F_1 ed M_2 e le due forze F_3 ed M_4 se sono imposti gli spostamenti f_3 ed θ_4 o i due spostamenti f_3 ed θ_4 se sono imposti i carichi F_3 ed M_4 .

Si nota inoltre che scrivendo il sistema (1.10) sono stati rimossi i vincoli aggiuntivi che erano stati introdotti per scrivere le relazioni (1.9).

E' inoltre evidente che il sistema (1.10) contiene tutte le informazioni necessarie per affrontare il problema strutturale in eventuali situazioni iperstatiche di vincolo.

Ordinando le quattro forze nodali in un vettore $\{ F \}$ delle forze nodali

CAPITOLO II

MATRICI DI RIGIDEZZA DI ELEMENTI

Si vuole in questo capitolo ricavare l'espressione delle matrici di rigidezza per alcuni elementi semplici, in particolare un asta, un elemento soggetto a torsione pura, una trave.

Si vedrà inoltre come poter trattare il caso di un carico esterno uniformemente distribuito o di un carico termico attraverso la loro sostituzione con dei carichi nodali equivalenti.

2.1 L' ELEMENTO ASTA

La figura 2.1 mostra la geometria dell'elemento considerato, vengono inoltre evidenziate le forze (assiali di sola trazione o compressione) e gli spostamenti (traslazioni) coinvolti nel problema e se ne stabiliscono i versi positivi.

Si indica nel seguito con l la lunghezza dell'asta, con A l'area della sua sezione retta e con E il modulo elastico normale del materiale o modulo di Young.

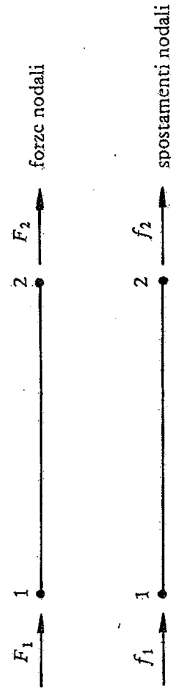


Fig. 2.1 Elemento asta: forze e spostamenti nodali.

Il coefficiente di rigidezza K_{11} è pari, secondo la definizione data, al valore della forza nodale F_1 conseguente al solo spostamento nodale f_1 posto di entità unitaria mentre tutti gli altri spostamenti nodali sono posti a zero (vincolati).

l'elemento (o alla struttura), verranno quindi scritte relazioni di equilibrio;
 - mantenere gli stessi valori degli spostamenti nodali, verranno quindi scritte relazioni di congruenza.

Risulta evidente che il principio di equivalenza non riguarda lo stato interno dell'elemento (il campo delle deformazioni e delle tensioni interne subisce infatti variazioni importanti) ma riguarda piuttosto le "relazioni esterne" dell'elemento con il resto della struttura in cui è inserito.

Si indichino con F_i i valori delle forze nodali equivalenti che si vogliono determinare.

Per l'equilibrio dell'asta si possono scrivere le seguenti relazioni:

● sistema reale dei carichi applicati

$$F_1 + F_2 + q_a l = 0 \quad (2.6)$$

● sistema equivalente dei carichi applicati

$$F_1 + F_2 + F_1^* + F_2^* = 0 \quad (2.7)$$

da cui si ricava

$$F_1^* + F_2^* = q_a l \quad (2.8)$$

Per quanto riguarda gli spostamenti nodali si possono scrivere le seguenti relazioni:

● sistema reale dei carichi applicati, l'allungamento dell'asta (integrando sulla lunghezza dell'asta la deformazione assiale) vale

$$f_2 - f_1 = F_2 l / EA + q_a l^2 / 2 EA \quad (2.9)$$

● sistema equivalente dei carichi applicati

$$f_2^* - f_1^* = F_2^* l / EA + F_1^* l / EA \quad (2.10)$$

da cui si ricava

$$F_2^* l / EA = q_a l^2 / 2 EA \quad (2.11)$$

ossia

$$F_2^* = q_a l / 2 \quad (2.12)$$

Le due relazioni (2.8) e (2.12) permettono infine di stabilire che il vettore dei carichi nodali equivalenti al carico distribuito uniformemente q_a è

$$\{ q_a l / 2 ; q_a l / 2 \}^T \quad (2.13)$$

e pertanto l'equazione risolutiva del problema, utilizzando la scrittura matriciale, diviene

$$EA / l \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_a l / 2 \\ q_a l / 2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

2.1.2 VARIAZIONE DI TEMPERATURA IN UN'ASTA

La figura 2.3 illustra il problema che si intende ora affrontare: l'asta è sottoposta all'azione delle due forze nodali F_1 ed F_2 ed a una variazione della sua temperatura media di entità pari a T_m .

Anche in questo caso il problema non può essere studiato con la formulazione matriciale descritta in precedenza infatti il tipo di carico applicato non si configura come una forza nodale F .

Per ricondurre il problema nell'ambito dell'analisi matriciale delle strutture occorre sostituire l'effetto termico con opportuni carichi nodali equivalenti.

Si indichino ancora con F_i i valori delle forze nodali equivalenti che si vogliono determinare.

Per l'equilibrio dell'asta si possono scrivere le seguenti relazioni:

$$F_1 + F_2 = 0 \quad (2.15)$$

- sistema equivalente dei carichi applicati

$$F_1 + F_2 + F_1^* + F_2^* = 0 \quad (2.16)$$

da cui si ricava

$$F_1^* + F_2^* = 0 \quad (2.17)$$

$$K_{33} = M_3 / \theta_3 = G J_t / l \quad (2.24)$$

Il coefficiente K_{33} ha segno positivo infatti un angolo di torsione θ_3 positivo dà origine ad un'azione di torsione dell'elemento all'estremo 1 (l'estremo 2 rimane fermo!) e quindi ad un momento torcente M_3 concorde con la direzione positiva indicata.

A conti fatti la matrice di rigidezza a torsione dell'elemento risulta la seguente matrice di ordine due

$$[K] = G J_t / l \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

che è matrice simmetrica come d'altronde c'è da aspettarsi per via del teorema di reciprocità di Betti-Maxwell.

2.3 L'ELEMENTO TRAVE

La figura 2.5 mostra la geometria dell'elemento considerato, vengono inoltre evidenziate le forze (forza di taglio e momento flettente) e gli spostamenti (freccia e angolo di inflessione) coinvolti nel problema e se ne stabiliscono i versi positivi.

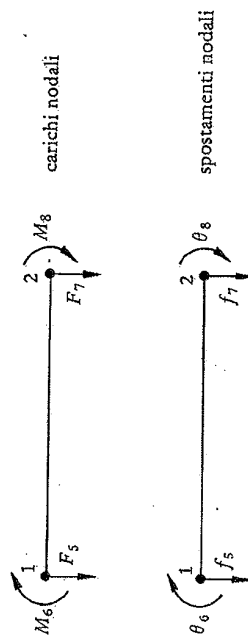


Fig. 2.5 Elemento a flessione piana; forze e spostamenti nodali.

Nel seguito verrà indicato con J_f il valore del momento d'inerzia a flessione della sezione retta della trave attorno ad un asse baricentrico normale al piano in cui avviene l'inflessione.

In questo paragrafo si considera la flessione piana, essendo la flessione nello spazio riconducibile, nelle ipotesi fatte di linearità ed elasticità e salvo casi particolari come ad esempio la flessione deviata, alla composizione di due flessioni in due piani ortogonali. Inoltre, in prima battuta, si trascurano gli effetti delle deformazioni di taglio.

I coefficienti di rigidezza per il caso della trave sono 16, per brevità si mostra come vengono ricavati i primi quattro lasciando al lettore per esercizio di ricavarli i rimanenti dodici.

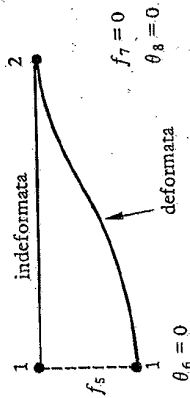


Fig. 2.6 Configurazione per il calcolo dei coefficienti K_{5i} della matrice di rigidezza.

Si consideri la trave sottoposta all'unico spostamento f_5 , cioè la freccia nell'estremo 1, essendo gli altri spostamenti tutti nulli come mostra la figura 2.6.

Per ricavare il valore delle forze nodali e dei momenti nodali corrispondenti a questa condizione di spostamento si possono scrivere due equazioni di equilibrio

$$\begin{aligned} F_5 + F_7 &= 0 \\ M_6 + M_8 - F_5 l &= 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

e due equazioni di spostamento una per la freccia f_5 e una per l'angolo di rotazione θ_6

$$[K_{xy}] = EJ_{fz} / l^3 \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & (4+t_y)^2 & -6l & (2-t_y)l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & (2-t_y)^2 & -6l & (4+t_y)l^2 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

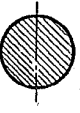




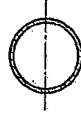

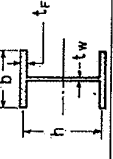
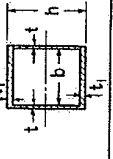
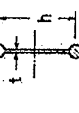
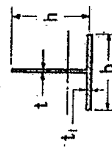
Per l'analisi della flessione della trave nell'altro piano (il piano xz) si costruisce una matrice di rigidità $[K_{xz}]$ del tutto analoga alla (2.36) o alla (2.38), sostituendo ovviamente al momento d'inerzia J_{fz} il momento d'inerzia J_{fy} e, ove fosse presente, al coefficiente correttivo per il taglio t_y il coefficiente t_z .

Si nota ancora che generalmente i versi positivi per i momenti flettenti M_y e M_z vengono assunti opposti a quelli sottintesi nella operazione appena descritta per il calcolo della matrice di rigidità $[K_{xz}]$. In questo caso le espressioni della matrice di rigidità per la flessione nel piano xz risultano:

$$[K_{xz}] = 2 EJ_{fy} / l^3 \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

ovvero

$$[K_{xz}] = EJ_{fy} / l^3 \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & (4+t_z)^2 & -6l & (2-t_z)l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & (2-t_z)^2 & -6l & (4+t_z)l^2 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

	CIRCLE $K = \frac{6(1+\nu)}{7+8\nu}$
	HOLLOW CIRCLE $K = \frac{6(1+\nu)(1+m^2)^2}{(1+m^2)^2 + (20+12\nu)m^2}$ WHERE $m = b/a$
	RECTANGLE $K = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu}$
	ELLIPSE $K = \frac{12(1+\nu) a^2 (3a^2 + b^2)}{(40+37\nu)a^4 + (16+10\nu)a^2 b^2 + 4b^4}$ a MAY BE EITHER $>$ OR $<$ b
	SEMICIRCLE $K = \frac{1+\nu}{1.05+1.273\nu}$
	THIN-WALLED ROUND TUBE $K = \frac{2(1+\nu)}{4+3\nu}$
	THIN-WALLED SQUARE TUBE $K = \frac{20(1+\nu)}{48+35\nu}$
	THIN-WALLED I-SECTION $K = \frac{10(1+\nu)(1+3m)^2}{(12+72m+150m^2+90m^3) + \nu[(1+66m+135m^2+30m^3)(m+m^2) + 5\nu m(6m+9m^2)]}$ WHERE $m = 2b_f/t_w$, $n = b/h$
	THIN-WALLED BOX SECTION $K = \frac{10(1+\nu)(1+3m)^2}{(12+72m+150m^2+90m^3) + \nu[(1+66m+135m^2+90m^3) + 10n^2(3+2m+3m^2)]}$ WHERE $m = b_1/n$, $n = b/h$
	SPAR-AND-WEB SECTION $K = \frac{10(1+\nu)(1+3m)^2}{(12+72m+150m^2+90m^3) + \nu[(1+66m+135m^2+90m^3)]}$ WHERE $m = 2A_s/n$, $A_s = \text{AREA OF ONE SPAR}$
	THIN-WALLED T-SECTION $K = \frac{10(1+\nu)(1+4m)^2}{(12+96m+276m^2+192m^3) + \nu[(1+88m+216m^2+216m^3) + 30n^2(m^2+m^3) + 10\nu n^2(4m+5m^2+m^3)]}$ WHERE $m = b_1/n$, $n = b/h$

Tab. 2.1 Fattori di taglio $K=1/X_t$ per vari tipi di sezione.

matriciali, diviene

$$[K_{xy}] \begin{bmatrix} f_5 \\ \theta_6 \\ f_7 \\ \theta_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_5 \\ M_6 \\ F_7 \\ M_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_y l/2 \\ \alpha_y l^2/12 \\ \alpha_y l/2 \\ -\alpha_y l^2/12 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

2.3.2 VARIAZIONE DI TEMPERATURA PER LA TRAVE

In questo paragrafo si vuole ricavare il vettore dei carichi nodali equivalente ad una distribuzione di temperatura non uniforme fra l'intradosso e l'estradosso di una trave.

E' bene ricordare che una variazione della temperatura non uniforme fra intradosso ed estradosso ha in generale due effetti distinti: il valor medio di tale distribuzione T_m provoca un allungamento (o una contrazione) dell'elemento come già è stato esaminato per l'asta (paragrafo 2.1.2), il resto della distribuzione $T(y) - T_m$ provoca una flessione avendosi un allungamento delle fibre là dove la temperatura è superiore al valor medio e una contrazione delle fibre là dove la temperatura è minore del valor medio.

In quanto segue la distribuzione di temperatura è supposta uniforme secondo l'asse della trave x , non uniforme invece nello spessore (asse y).

Si approssimi la distribuzione di temperatura con una funzione polinomiale in y :

$$T(y) = T_m + 2 T_1 y/h + 4 T_2 y^2/h^2 + \dots \quad (2.49)$$

Il secondo termine di tale funzione polinomiale, cioè il termine che descrive la parte lineare della variazione di temperatura nello spessore, dà origine ad una rotazione delle sezioni della trave che può essere calcolata con la seguente relazione

$$\theta(x) - \theta_6 = -2 \alpha T_1 x / h \quad (2.50)$$

avendo indicato con h la dimensione (spessore) della trave second-

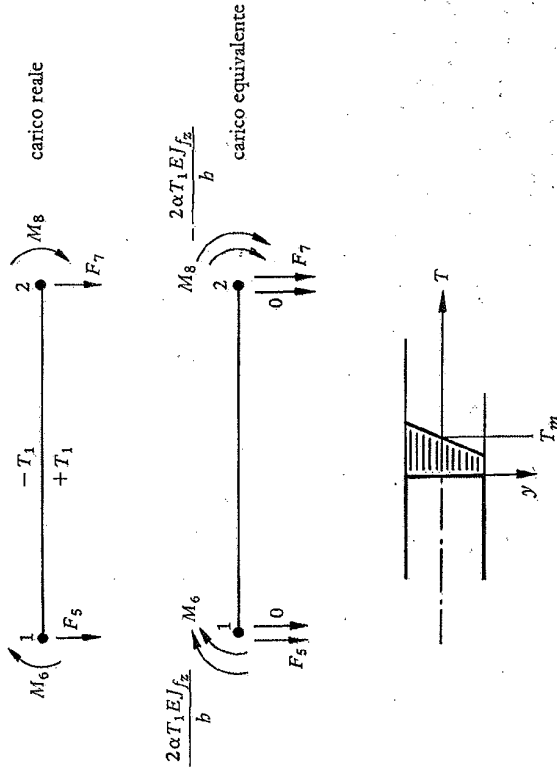


Fig. 2.8 Variazione di temperatura nello spessore della trave.

do l'asse y .

La figura 2.8 riassume i termini del problema.

Si indichino al solito con F_i ed M_i i valori delle forze e dei momenti nodali equivalenti che si vogliono determinare.

Per l'equilibrio della trave si possono scrivere le seguenti relazioni:

- sistema reale dei carichi applicati

$$F_5 + F_7 = 0$$

$$M_6 + M_8 - F_5 l = 0$$

(2.51)

- sistema equivalente dei carichi applicati

(2.60), nella matrice di rigidezza complessiva si ritrovano, procedendo lungo la diagonale principale, prima la matrice di rigidezza dell'asta, poi la matrice di rigidezza a torsione, poi la matrice di rigidezza a flessione nel piano xy ed infine quella a flessione nel piano xz.

La matrice di rigidezza globale assume in questo caso una configurazione a banda stretta, con i termini non nulli raggruppati in prossimità della diagonale principale.

Nel caso in cui la sezione della trave fosse tale da ingenerare i noti fenomeni di flessione deviata (accoppiamento fra i comportamenti flessionali nei piani xy ed xz) o di flesso-torsione (accoppiamento fra il comportamento flessionale nel piano xy e/o nel piano xz con il comportamento torsionale) questo si tradurrebbe nel dover porre non nulli alcuni opportuni coefficienti di rigidezza che nella matrice di figura 2.9, per via della regolarità della sezione della trave, sono stati posti nulli.

La figura 2.10 mostra la configurazione della matrice di rigidezza globale in un caso di flessione deviata e in un caso di flesso-torsione.

Nell'uso applicativo è comunque conveniente dal punto di vista logico, e pertanto comunemente utilizzato nei codici di calcolo commerciali, riorganizzare i vettori dei carichi e degli spostamenti nodali elencando prima tutte le grandezze di un nodo e poi tutte le grandezze dell'altro nodo.

Mantenendo i simboli via via definiti nel corso di questo capitolo, i vettori delle forze nodali (2.59) e degli spostamenti nodali (2.60) risulterebbero così riorganizzati

$$\{F\} = \{ F_1, M_3, F_5, M_6, F_9, M_{10}, F_2, M_4, F_7, M_8, F_{11}, M_{12} \}^T \quad (2.61)$$

$$\{f\} = \{ f_1, \theta_3, f_5, \theta_6, f_9, \theta_{10}, f_2, \theta_4, f_7, \theta_8, f_{11}, \theta_{12} \}^T \quad (2.62)$$

La matrice di rigidezza complessiva assume in questo caso una configurazione a banda larga, con elementi non nulli in posizione anche molto distante dalla diagonale principale.

F_1	F_2	M_3	M_4	F_5	M_6	F_7	M_8	F_9	M_{10}	F_{11}	M_{12}				
=															
ASSIALE				TORSIONE				FLESSIONE PIANO xy				FLESSIONE PIANO xz			
f_1	f_2	θ_3	θ_4	f_5	θ_6	f_7	θ_8	f_9	θ_{10}	f_{11}	θ_{12}				

Fig. 2.9 Composizione della matrice globale di rigidezza di un elemento lineare nello spazio.

CAPITOLO III

COSTRUZIONE DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA STRUTTURA

Nella pratica professionale si dovranno trattare non tanto problemi modellabili con l'uso di singoli elementi del tipo di quelli visti nel capitolo precedente quanto piuttosto si dovranno analizzare strutture anche assai complesse il cui modello matematico in alcuni casi potrà utilmente essere ricondotto alla "somma" di più elementi semplici.

Si consideri per esempio la struttura reticolare mostrata in figura 3.1, che potrebbe essere, tanto per fissare le idee, la fiancata di un carroponete. Viene spontaneo individuare un certo numero di elementi (aste o travi) in corrispondenza di ciascuno dei componenti di cui è fisicamente costituita la fiancata e un certo numero di nodi in corrispondenza dei punti di giunzione fra i singoli componenti.

Ciascun elemento, sia che si scelga di modellarlo come asta sia che si scelga di modellarlo come trave, ha caratteristiche fisiche e geometriche ben definite che permettono di scriverne la matrice di rigidezza secondo quanto si è visto nel capitolo precedente.

Tali matrici di rigidezza fanno riferimento ad un sistema di assi coordinati denominati locali (o di elemento) ed individuati come è stato detto nel capitolo precedente (asse x coincidente con l'asse geometrico dell'elemento).

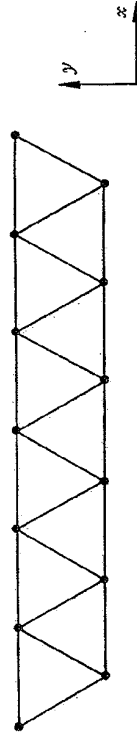


Fig. 3.1 Esempio di struttura reticolare.

dimento proposto al caso di un problema spaziale in cui quindi i sistemi di riferimento debbano poggiare su tre assi coordinati e la direzione dell'asse x sia descritta nel sistema globale X,Y,Z da due diversi angoli β_{xy} e β_{xz} .

In questo ultimo caso la matrice di rigidezza [Kxy] dell'asta nel sistema di riferimento globale tridimensionale risulta di ordine sei.

Si comprende qui la convenienza di utilizzare il sistema di riferimento locale nello scrivere le relazioni di rigidezza per l'elemento: con tale scelta infatti l'ordine dei vettori delle grandezze nodali e della matrice di rigidezza risulta minore.

3.1.2 ELEMENTO TRAVE

Si consideri la trave di figura 3.3. Il problema è, per semplicità, nuovamente supposto piano; il sistema di assi coordinati x,y è il sistema locale (l'asse x coincide con l'asse della trave), il sistema di assi coordinati X,Y è il sistema globale; gli assi x dei due sistemi formano fra loro un angolo β .

Alla trave sono assegnate sia le capacità di reazione a flessione (elemento trave in senso stretto), sia le capacità di reazione a trazione e compressione (elemento asta), d'altronde questo schema corrisponde a quanto generalmente si ha nelle strutture piane o spaziali.

Pertanto in figura sono riportati tre spostamenti per ciascuno dei nodi.

Si consideri il nodo 1, per esso si possono scrivere le seguenti relazioni a riguardo degli spostamenti nodali

$$\begin{aligned} f_1 &= l_x f_{1X} + m_x f_{1Y} \\ f_5 &= l_y f_{1X} + m_y f_{1Y} \\ \theta_6 &= \theta_{1XY} \end{aligned} \quad (3.15)$$

dove con l_x e m_x si sono indicati i coseni direttori dell'asse x nel sistema globale di assi XY

$$l_x = \cos \beta \quad m_x = \sin \beta \quad (3.16)$$

e con l_y e m_y si sono indicati i coseni direttori dell'asse y nel sistema globale XY

$$\{ f_{xy} \} = \{ f_1, f_2 \}^T \quad (3.6)$$

$$\{ f_{XY} \} = \{ f_{1X}, f_{1Y}, f_{2X}, f_{2Y} \}^T \quad (3.7)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

La matrice [T] è denominata matrice di rotazione. In modo del tutto analogo si può operare con i vettori delle forze nodali, ottenendo

$$\{ F_{xy} \} = [T] \{ F_{XY} \} \quad (3.9)$$

$$\{ F_{XY} \} = [T]^T \{ F_{xy} \} \quad (3.10)$$

dove la matrice [T] è ancora la matrice di rotazione (3.8). Partendo ora dalla relazione di rigidezza scritta nel sistema di riferimento locale x,y

$$\{ F_{xy} \} = [K_{xy}] \{ f_{xy} \} \quad (3.11)$$

premultiplicando ambo i membri per la matrice [T] trasposta, si ha

$$[T]^T \{ F_{xy} \} = \{ F_{XY} \} = [T]^T [K_{xy}] \{ f_{xy} \} \quad (3.12)$$

sostituendo ora al vettore degli spostamenti nel sistema locale d'assi xy quello ruotato nel sistema globale d'assi XY si ha

$$\begin{aligned} \{ F_{XY} \} &= [T]^T [K_{xy}] [T] \{ f_{XY} \} \\ &= [K_{XY}] \{ f_{XY} \} \end{aligned} \quad (3.13)$$

[Kxy] è la matrice di rigidezza dell'asta nel sistema di riferimento globale e vale

$$[K_{XY}] = [T]^T [K_{xy}] [T] \quad (3.14)$$

La matrice di rigidezza [Kxy] dell'asta nel sistema di riferimento globale risulta di ordine quattro.

Non c'è alcuna difficoltà concettuale ad estendere il proce-

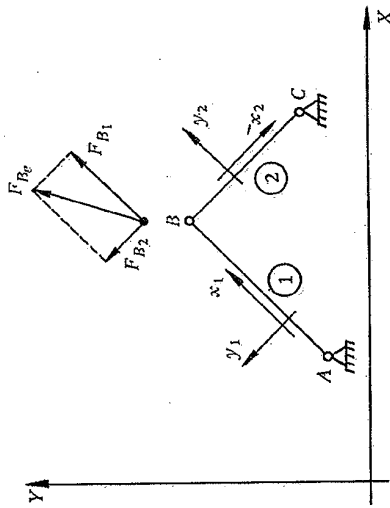


Fig. 3.4 Connessione di due elementi asta.

struttura a partire dalle matrici di rigidità degli elementi. Si consideri il caso di figura 3.4: due aste, indicate in figura con 1 e 2, giacciono nel piano XY e hanno in comune un nodo, il nodo B che le interconnette.

Per mezzo dei risultati ottenuti nei paragrafi precedenti, per ciascuna delle due aste si sa scrivere la relazione di rigidità nel sistema di riferimento globale XY

$$\begin{aligned} \{ F_{XY} \}_1 &= [K_{XY}]_1 \{ f_{XY} \}_1 \\ \{ F_{XY} \}_2 &= [K_{XY}]_2 \{ f_{XY} \}_2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

dove i pedici 1 e 2 stanno ad indicare il nome dell'asta.

Nel nodo comune B si possono porre delle relazioni aggiuntive che traducono matematicamente l'interconnessione delle due aste operata dal nodo e che permettono quindi di costruire la struttura.

In particolare si possono scrivere una relazione di congruenza degli spostamenti affermando che gli spostamenti del punto B sono gli stessi sia che il punto B sia pensato appartenente alla asta 1 sia che sia pensato appartenente all'asta 2

$$\{ f_B \}_1 = \{ f_B \}_2 \quad (3.32)$$

risulta di ordine dodici.

3.1.3 COSENI DIRETTORI

Si ritiene utile richiamare ancora alcune semplici espressioni per il calcolo dei coseni direttori che compaiono nelle matrici di rotazione.

Con riferimento alle figure 3.2 e 3.3 si può scrivere

$$\begin{aligned} \cos \beta &= (x_2 - x_1) / a \\ \sin \beta &= (y_2 - y_1) / a \end{aligned} \quad (3.28)$$

dove si è indicato con a la lunghezza dell'elemento.

La matrice [T] di rotazione (3.8) ricavata per il caso dell'asta può essere riscritta come

$$[T] = 1/a \begin{bmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

La matrice di rotazione (3.21) ricavata per il caso della trave può essere riscritta come

$$[T] = 1/a \begin{bmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1-y_2 & x_2-x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_1-y_2 & x_2-x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

3.2 COSTRUZIONE DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA STRUTTURA

Un esempio permette di chiarire i concetti attraverso ai quali si opera la costruzione della matrice di rigidità della

In altri termini, dopo aver formato i vettori degli spostamenti nodali e delle forze nodali esterne della struttura, la matrice di rigidezza della struttura è ottenuta da quella dei singoli elementi per somma dei termini omologhi che legano i gradi di libertà (spostamenti) dei nodi comuni con le forze nodali agenti nei nodi stessi.

La figura 3.5 illustra visivamente le zone delle matrici di rigidezza degli elementi i cui termini vanno sommati secondo la (3.44).

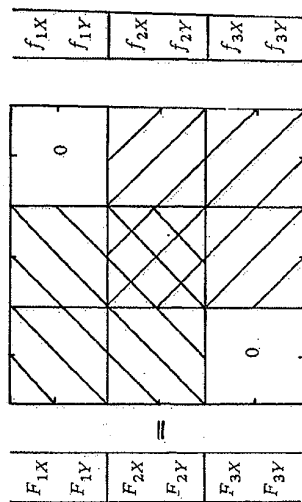


Fig. 3.5 Costruzione della matrice di rigidezza di una struttura con due elementi asta.

Si nota espressamente che il procedimento ora illustrato per mezzo dell'esempio semplice di una struttura formata da due aste è del tutto generale e viene utilizzato anche per la costruzione delle matrici di rigidezza di strutture suddivise in elementi più complessi come ad esempio quelli ottenuti con il metodo degli elementi finiti che verrà esposto in maggior dettaglio nei capitoli della terza parte di questo volume.

3.3 CONSIDERAZIONI DI CALCOLO.

E' noto dalla analisi numerica applicata alla soluzione di grandi sistemi di equazioni che una proprietà importante della matrice dei coefficienti è la larghezza di banda, cioè la massima

distanza di termini non nulli dalla diagonale principale. Per molti dei procedimenti adottati per la soluzione di tali sistemi infatti una ridotta larghezza di banda significa, oltre ad una minore occupazione di memoria (caratteristica tutt'altro che secondaria), una maggiore rapidità di calcolo.

La larghezza della banda della matrice di rigidezza è notevolmente influenzata dalla sequenza di numerazione dei nodi nella struttura. La figura 3.6 illustra come sia possibile ridurre la larghezza di banda attraverso una rinumerazione dei nodi. In pratica occorre fare in modo che i nodi che sono collegati da un elemento abbiano numeri identificativi il più vicino possibile.

Attualmente i migliori programmi commerciali fra quelli generalmente utilizzati per la preparazione (pre-processing) dei dati di input per il calcolo eseguono anche l'operazione di rinumerazione dei nodi per la riduzione della larghezza di banda. Nei casi in cui viene utilizzato il metodo di soluzione frontale allora non risulta importante la larghezza di banda quanto piuttosto quella del fronte e un diverso algoritmo provvede alla riduzione di questa.

3.4 IMPOSIZIONE DEI VINCOLI E SOLUZIONE

In un problema di meccanica strutturale, generalmente, sono note le forze concentrate applicate dall'esterno alla struttura in certi punti, che si avrà l'accortezza di scegliere come punti nodali. Si è altresì visto come sia possibile ridurre una condizione di carico diversa dall'applicazione di forze concentrate ad una condizione di carico calcolata come forze nodali equivalenti. Si indichi con $\{F_e\}$ il vettore delle forze esterne, dove ovviamente occorrerà mettere zero per tutte le componenti nodali relative ai nodi cui non è applicata una forza esterna. Si indichi inoltre con $\{f_e\}$ il vettore degli spostamenti nodali dei punti cui sono applicate le forze esterne note (ancorché nulle). Tali spostamenti nodali rappresentano i gradi di libertà "liberi" (cioè non soggetti a vincolo) della struttura.

Sono inoltre generalmente noti gli spostamenti di alcuni punti, che si avrà l'accortezza di scegliere come punti nodali. Se gli spostamenti noti sono nulli tali punti sono generalmente indicati come punti di vincolo della struttura, per tali punti sono incognite le forze esterne applicate che prendono il nome di reazioni vincolari. Si indichi con $\{F_v\}$ il vettore delle forze

Nella prima delle equazioni (3.51) sono noti tutti i termini meno il vettore degli spostamenti nodali $\{f_e\}$ che pertanto può essere ricavato con la

$$\begin{aligned} \{f_e\} &= [K_{ee}]^{-1} \{ \{F_e\} - [K_{ev}] \{f_v\} \} & (3.52) \\ &= [K_{ee}]^{-1} \{F'e\} \end{aligned}$$

occorre però verificare che la matrice $[K_{ee}]$ sia invertibile. L'invertibilità della matrice $[K_{ee}]$, che è matrice quadrata, può essere accertata calcolandone il determinante, se questo risulta non nullo la matrice è non singolare e si può invertire. A questa verifica matematica corrisponde un preciso significato fisico: la matrice di rigidezza $[K_{ee}]$ risulta invertibile se la struttura è sufficientemente vincolata (isostatica o iperstatica), se la struttura è labile la matrice di rigidezza è singolare e quindi non invertibile.

Nel caso in cui il vettore degli spostamenti nodali vincolati $\{f_v\}$ abbia componenti tutte nulle la (3.52) si semplifica nella

$$\{f_e\} = [K_{ee}]^{-1} \{F_e\} \quad (3.53)$$

Per il calcolo automatico della soluzione della equazione matriciale (3.52) anziché procedere ad una effettiva inversione della matrice $[K_{ee}]$ che risulta eccessivamente oneroso sia come tempo di calcolo sia come occupazione di memoria centrale della unità di calcolo, nei codici di calcolo normalmente si utilizzano i procedimenti di fattorizzazione del sistema secondo le tecniche di Gauss (vedi appendice 1), di Gauss e Jordan o di Cioleski. Per il calcolo della soluzione del sistema (3.52) è stata messa a punto da B.Irons una tecnica diversa, detta "frontale", che esegue contemporaneamente la costruzione della matrice di rigidezza della struttura e la sua riduzione così da trattare un solo gruppo di equazioni per volta. Il metodo frontale è illustrato in dettaglio in alcuni dei testi indicati in bibliografia, a tali testi si rimanda il lettore interessato.

Sono ora noti tutti gli spostamenti nodali e quindi facendo uso della seconda delle (3.51)

$$\{F_v\} = [K_{vv}] \{f_v\} + [K_{ve}] \{f_e\} \quad (3.54)$$

si può infine ricavare il valore delle reazioni vincolari nei

punti di vincolo. Nel caso in cui il vettore degli spostamenti nodali vincolati $\{f_v\}$ abbia componenti tutte nulle la (3.54) si semplifica nella

$$\{F_v\} = [K_{ve}] \{f_e\} \quad (3.55)$$

Per ottenere infine le caratteristiche di sollecitazione (forze interne) dei singoli elementi occorre riprendere le matrici di rigidezza degli elementi stessi e moltiplicarle una ad una per il vettore degli spostamenti nodali, ormai noti, dei nodi dell'elemento.

3.4.1 IMPOSIZIONE DI CONDIZIONI DI VINCOLO GENERALI.

Nella trattazione svolta nei paragrafi precedenti si sono tacitamente introdotte alcune ipotesi semplificative che è utile poter rimuovere.

In particolare nel paragrafo 3.4 si è ipotizzato che i gradi di libertà vincolati fossero disposti secondo le direzioni degli assi coordinati del sistema di riferimento globale, trascurando i casi, peraltro piuttosto comuni, di vincoli inclinati (figura 3.7a).

Inoltre nel paragrafo 3.2 si è ritenuto che il fatto di avere un nodo in comune fra due elementi comportasse automaticamente l'uguaglianza di tutti gli spostamenti del nodo stesso.

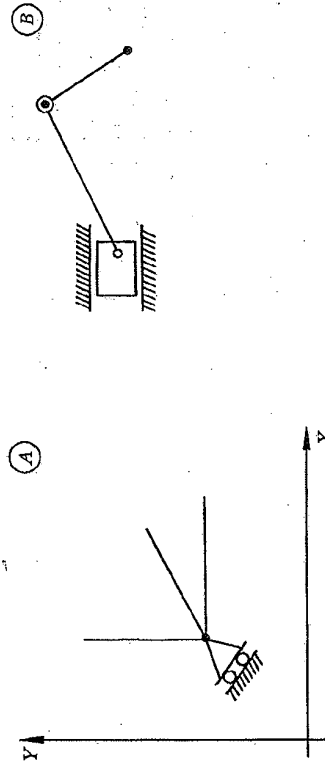


Fig. 3.7 Condizioni generali di vincolo: vincoli inclinati (A), connessione di due travi con cerniera (B)

Si operi ora la sostituzione della (3.60) nella prima delle equazioni (3.63)

$$\{F_r\} = [K_{rr}] \{f_r\} + [K_{ri}] \{f_i\} + [K_{rd}] (\{f_v\} + [D] \{f_i\}) \quad (3.64)$$

da cui

$$\{F_r\} = \{F_r\} - [K_{rd}] \{f_v\} = [K_{rr}] \{f_r\} + ([K_{ri}] + [K_{rd}] [D]) \{f_i\} \quad (3.65)$$

$$= [K_{rr}] \{f_r\} + [K'_{ri}] \{f_i\}$$

e similmente dalle altre due righe della (3.63)

$$\{F_i\} = \{F_i\} - [K_{id}] \{f_v\} = [K_{ir}] \{f_r\} + ([K_{ii}] + [K_{id}] [D]) \{f_i\} \quad (3.66)$$

$$\{F_d\} = \{F_d\} - [K_{dd}] \{f_v\} = [K_{dr}] \{f_r\} + ([K_{di}] + [K_{dd}] [D]) \{f_i\} \quad (3.67)$$

Si nota che questa definizione dei vettori delle forze $\{F'\}$ coincide con quella applicata con la (3.52); anche qui il vettore $\{F'\}$ sarà diverso dal vettore $\{F\}$ solo nel caso in cui il problema strutturale presenti degli spostamenti nodali imposti, ossia nel caso in cui il vettore $\{f_v\}$ non abbia componenti tutte nulle. Si ponga ora l'equazione di equilibrio

$$\{F''_i\} = \{F'_i\} + [D]^T \{F'_d\} \quad (3.68)$$

che riporta le forze agenti sui gradi di libertà dipendenti a forze agenti sui gradi di libertà indipendenti. Facendo uso delle (3.66) e (3.67) si ha

$$\begin{aligned} \{F''_i\} &= [K_{ir}] \{f_r\} + ([K_{ii}] + [K_{id}] [D]) \{f_i\} \\ &+ [D]^T ([K_{dr}] \{f_r\} + ([K_{di}] + [K_{dd}] [D]) \{f_i\}) \\ &= [K'_{ir}] \{f_r\} + [K'_{ii}] \{f_i\} \end{aligned} \quad (3.69)$$

dove si sono indicate con $[K'_{ir}]$ e $[K'_{ii}]$ le seguenti matrici

$$\begin{aligned} [K'_{ir}] &= [K_{ir}] + [D]^T [K_{dr}] \\ [K'_{ii}] &= [K_{ii}] + [K_{id}] [D] + [D]^T ([K_{di}] + [K_{dd}] [D]) \end{aligned} \quad (3.70)$$

L'equazione matriciale di rigidezza della struttura (3.63) risulta infine ridotta alla

$$\begin{Bmatrix} \{F''_r\} \\ \{F''_i\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{rr}] & [K'_{ri}] \\ [K'_{ir}] & [K'_{ii}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{f_r\} \\ \{f_i\} \end{Bmatrix} \quad (3.71)$$

che può essere risolta con i metodi indicati in precedenza.

La (3.71) è di fatto il risultato di una condensazione dei gradi di libertà dipendenti: il loro effetto non è stato eliminato ma è stato congelato in quello dei gradi di libertà indipendenti.

Una volta ricavati i valori degli spostamenti $\{f_i\}$ corrispondenti ai gradi di libertà indipendenti, applicando la (3.60), si ottengono i valori degli spostamenti $\{f_d\}$ corrispondenti ai gradi di libertà dipendenti.

3.4.2 LA CONDENSAZIONE STATICA DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA.

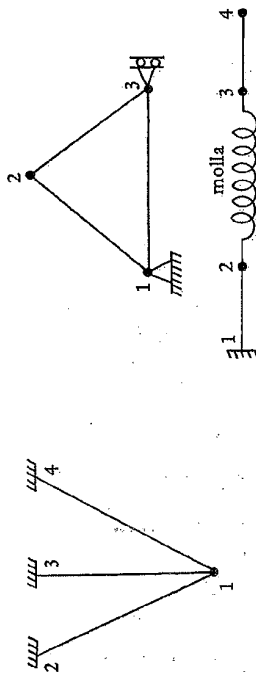
Si vuole infine dedicare un breve cenno alla cosiddetta condensazione statica della matrice di rigidezza. L'uso di tale pratica è molto limitato nei problemi statici che sono oggetto di questo volume, restando solo di qualche utilità nei casi in cui si ricorra alla tecnica della "sottostrutturazione".

La condensazione ha invece notevole rilevanza nella trattazione dei problemi dinamici, per i quali si possono conseguire notevoli risparmi di tempo di calcolo. Pertanto ad essa è dedicato un maggior spazio nel secondo volume di questo testo, dedicato appunto ai problemi dinamici.

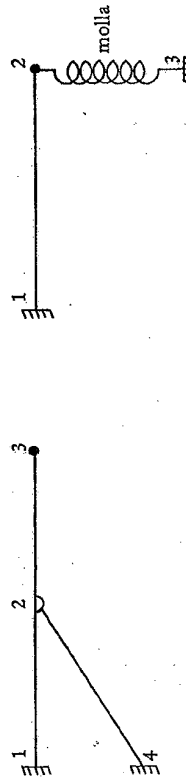
Si possono individuare nella discretizzazione operata su una struttura un insieme di gradi di libertà necessari ai fini della soluzione del problema (i gradi di libertà dei punti vincolati, i gradi di libertà dei punti di applicazione delle forze esterne ed eventualmente i gradi di libertà dei nodi di contorno o di cui è utile conoscere l'effettivo spostamento) e un insieme di gradi di libertà accessori, immessi nella discretizzazione al solo scopo di dettagliarla meglio. Si badi bene però che il maggior dettaglio della discretizzazione non è di per sé un fatto accessorio ma è sempre conseguente alla necessità di descrivere in maniera adeguata le proprietà di rigidezza della struttura.

3.5 ESERCIZI.

1) Ricavare in forma letterale la matrice di rigidezza delle seguenti tre strutture costituite da elementi asta ed evidenziare quindi le righe e le colonne interessate dalla presenza dei vincoli.



2) Ricavare in forma letterale la matrice di rigidezza delle seguenti tre strutture costituite da elementi trave ed evidenziare quindi le righe e le colonne interessate dalla presenza dei vincoli.



PARTE TERZA
IL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

CAPITOLO I
FORMULAZIONE GENERALE

Il metodo degli elementi finiti è un procedimento di discretizzazione che, attraverso l'uso di un modello matematico e di tecniche di calcolo di tipo numerico, rende possibile lo studio di problemi particolarmente complessi.

Sulla base delle equazioni fondamentali che reggono il fenomeno allo studio, mediante una opportuna approssimazione delle variabili in gioco, viene ricercata una soluzione che, pur non essendo esatta, fornisce indicazioni utili per l'analisi in problemi la cui soluzione per via analitica, coi metodi classici, risulterebbe onerosissima quando anche fosse possibile.

Il metodo degli elementi finiti può essere applicato sia per lo studio di strutture, sia per lo studio di problemi di trasmissione del calore, di fluidodinamica, di acustica ed altri ancora, eventualmente accoppiati fra loro.

Per quanto riguarda la meccanica delle strutture possono essere affrontati problemi lineari elastici, ma anche problemi di elasticità non lineare, di plasticità e di viscoplasticità, problemi statici, stazionari, dinamici ed anche di meccanica impulsiva.

In queste note ci si occuperà prevalentemente di problemi di meccanica delle strutture lineari elastiche in campo statico, rinviando ad un altro volume della stessa collana le applicazioni del metodo allo studio della dinamica delle strutture.

L'obiettivo è di arrivare a scrivere per un certo numero di elementi significativi la relazione di rigidezza

$$\{ F \} = [K] \{ f \}$$

(1.1)

e di poter scrivere delle relazioni che permettano di esprimere il campo degli spostamenti, delle deformazioni e delle tensioni in tutto l'elemento, a partire dai valori degli spostamenti

esaminato. Il pieno rispetto di ϕ questo requisito non è vincolante per l'ottenimento di risultati "significativi" e pertanto in alcuni casi, verificate alcune condizioni, si potranno ammettere delle deroghe parziali. Quando verrà esaminato l'elemento piastra secondo la formulazione di Kirchhoff si potrà approfondire questi aspetti. Si evidenzia inoltre fin da ora che questa condizione dovrà essere verificata attentamente qualora nella discretizzazione si dovessero connettere elementi di tipo diverso.

④ dovrà essere priva di punti singolari nel suo dominio di definizione, ossia ancora la continuità del campo degli spostamenti ma questa volta all'interno dell'elemento.

Indicando con δ_i lo spostamento i-esimo, per ciascun punto dell'elemento si potrà scrivere

$$\begin{cases} \delta_1(x_k) = \alpha_1 \phi_{11}(x_k) + \alpha_2 \phi_{12}(x_k) + \dots + \alpha_n \phi_{1n}(x_k) \\ \delta_2(x_k) = \alpha_1 \phi_{21}(x_k) + \alpha_2 \phi_{22}(x_k) + \dots + \alpha_n \phi_{2n}(x_k) \\ \dots \\ \delta_i(x_k) = \alpha_1 \phi_{i1}(x_k) + \alpha_2 \phi_{i2}(x_k) + \dots + \alpha_n \phi_{in}(x_k) \\ \dots \end{cases} \quad (1.4)$$

dove x_k sono le coordinate del punto considerato nel sistema di riferimento locale, ϕ_{ij} sono le funzioni polinomiali scelte, calcolate in tale punto, ed α_j sono i coefficienti della combinazione lineare delle funzioni. Il valore dei coefficienti α_j per il momento sono incogniti, essi devono essere almeno in numero complessivamente pari al numero dei gradi di libertà dell'elemento (ossia al numero delle componenti del vettore $\{f\}$ attraverso il quale potranno porsi delle condizioni al contorno). Organizzando quanto sopra in forma matriciale si ha

$$\{ \delta(x_k) \} = [\phi(x_k)] \{ \alpha \} \quad (1.5)$$

dove la matrice $[\phi(x_k)]$ raccoglie tutte le funzioni ϕ_{ij} ed il vettore $\{\alpha\}$ tutti il coefficienti α_j .

dell'elemento

$$\{ f \} = \{ \{ f_1 \}, \{ f_2 \}, \dots, \{ f_j \}, \dots, \{ f_n \} \}^T \quad (1.2)$$

$$\{ F \} = \{ \{ F_1 \}, \{ F_2 \}, \dots, \{ F_j \}, \dots, \{ F_n \} \}^T \quad (1.3)$$

dove n è il numero di nodi dell'elemento.

PASSO II scegliere una opportuna funzione per approssimare il campo degli spostamenti per ogni punto dell'elemento.

Si tratta qui di scegliere una funzione attraverso la quale sia possibile descrivere univocamente il campo degli spostamenti dell'elemento. La funzione scelta è generalmente di tipo polinomiale, in certe applicazioni è altresì utile usare un polinomio trigonometrico. Salvo fortunate eccezioni la funzione scelta (non fornisce una descrizione esatta del campo degli spostamenti ma solo una descrizione approssimata che è però sufficiente per dare risultati analitici di interesse ingegneristico.

La funzione scelta per approssimare il campo degli spostamenti dovrà soddisfare a quattro requisiti fondamentali, i primi due sono indicati in letteratura come requisiti di completezza, i secondi due sono invece indicati come requisiti di compatibilità; il soddisfacimento di tutti e quattro tali requisiti garantisce una convergenza monotona verso il risultato esatto come verrà discusso più avanti.

In particolare la funzione scelta

① dovrà garantire la possibilità di esprimere tutti i moti rigidi dell'elemento, senza che questo comporti l'insorgere di uno stato di tensione nell'elemento.

② dovrà garantire la possibilità di esprimere almeno tutti gli stati di deformazione costante su tutto l'elemento. Si noti però che non viene richiesta la continuità del campo delle deformazioni.

③ dovrà garantire la continuità del campo degli spostamenti fra elementi contigui nella struttura, ossia durante la deformazione della struttura non dovranno prodursi strappi o sovrapposizioni. Questa condizione verrà verificata in seguito per ogni elemento

del materiale dagli spostamenti nodali. E' da sottolineare che il simbolo B è conosciuto con questo significato a livello internazionale (quasi fosse uno standard), cosicché quando si parla di matrice [B] generalmente si intende la matrice che lega direttamente il campo delle deformazioni agli spostamenti nodali.

PASSO V scrivere il legame fra il campo delle tensioni e il campo delle deformazioni dell'elemento.

In ogni punto dell'elemento, in conseguenza della presenza di un campo di deformazioni, il materiale è sottoposto a tensioni. La misura di queste tensioni, per la quale si applicano nuovamente le regole della teoria della elasticità, può essere espressa con un vettore

$$\{ \sigma(x_k) \}$$

le cui componenti sono funzione delle coordinate x_k del punto considerato, cosicché il vettore $\{ \sigma(x_k) \}$ esprime il campo delle tensioni.

Le componenti del vettore $\{ \sigma(x_k) \}$ sono legate alle componenti del vettore $\{ \epsilon(x_k) \}$ delle deformazioni tramite una matrice che contiene le caratteristiche elastiche del materiale ed eventualmente le caratteristiche geometriche della sezione dell'elemento.

$$\{ \sigma(x_k) \} = [D] \{ \epsilon(x_k) \} \quad (1.14)$$

La matrice [D] che esprime il legame fra tensioni e deformazioni è detta matrice di rigidità o di elasticità del materiale; è una matrice quadrata.

Come già è stato fatto per la misura delle deformazioni anche per la misura dello stato di tensione conviene fare una opportuna scelta di grandezze caratteristiche per l'elemento in esame. Tale scelta deve inoltre essere congruente con la scelta fatta nel definire le grandezze rappresentative delle deformazioni. Per problemi di elasticità piana (elementi asta ed elementi membranali) e con elementi solidi le grandezze caratteristiche convenienti per descrivere lo stato di tensione sono le tensioni normali σ e le tensioni tangenziali τ come definite dalla teoria della elasticità.

Se invece si stanno trattando elementi che si deformano fuori dal piano, come ad esempio nel caso della flessione delle travi e delle piastre, è conveniente definire come misura della deformazione la curvatura che è, secondo l'approssimazione generalmente utilizzata nella scienza delle costruzioni, la derivata seconda della funzione che descrive il campo degli spostamenti (freccie).

$$\{ \epsilon(x_k) \} \iff d^2 \{ \delta(x_k) \} / dx_k^2 \quad (1.10)$$

In generale si può dunque scrivere

$$\{ \epsilon(x_k) \} \iff \text{differenziale } \{ \delta(x_k) \} \quad (1.11)$$

Ricordando l'espressione (1.8) che è stata ricavata al passo precedente per descrivere il campo degli spostamenti

$$\{ \delta(x_k) \} = [\phi(x_k)] [A]^{-1} \{ f \} \quad (1.8 \text{ rip}) \\ = [N(x_k)] \{ f \}$$

notando che il secondo e il terzo fattore del prodotto a secondo membro hanno solo termini costanti rispetto a x_k , la (1.11) può essere scritta

$$\{ \epsilon(x_k) \} = [\text{diff. } \phi(x_k)] [A]^{-1} \{f\} \quad (1.12) \\ = [C] [A] \{f\} \\ = [B] \{f\}$$

La matrice [C] raccoglie le funzioni risultato delle operazioni di differenziazione delle funzioni (1.6) di approssimazione del campo degli spostamenti, secondo le regole di derivazione prima ricordate. I termini della matrice [C] sono in generale funzioni di x_k .

Se si fa ricorso alla espressione del campo degli spostamenti tramite le funzioni di forma si ottiene direttamente

$$\{ \epsilon(x_k) \} = [\text{diff. } N(x_k)] \{f\} \\ = [B] \{f\} \quad (1.13)$$

La matrice [B], i cui termini sono in generale anch'essi funzioni di x_k , raccoglie le funzioni risultato delle operazioni di differenziazione delle funzioni di forma N.

La matrice [B] esprime la dipendenza del campo delle deformazioni

Il campo delle deformazioni virtuali, indotto dagli spostamenti nodali virtuali imposti, può essere calcolato con la

$$\{ \epsilon^* \} = [B] \{ f^* \} \quad (1.17)$$

Il lavoro virtuale elementare eseguito dalle tensioni interne alla struttura (elemento) per ogni volumetto elementare di materiale $dVol$ vale

$$dL_{int} = \{ \epsilon^* \}^T \{ \sigma \} dVol \quad (1.18)$$

che integrato su tutto il volume dell'elemento dà il lavoro totale virtuale interno.

Il campo delle tensioni può essere calcolato sulla base delle formule (1.13) e (1.14) con la

$$\{ \sigma \} = [D] [B] \{ f \} \quad (1.19)$$

dove chiaramente, trattandosi del campo delle tensioni effettivamente agenti nell'elemento, si fa uso del vettore degli spostamenti nodali reali, a differenza di quanto è stato fatto per la (1.17) dove, trattandosi del campo delle deformazioni virtuali, si era fatto uso del vettore degli spostamenti nodali virtuali. Il lavoro totale virtuale delle tensioni interne risulta quindi

$$L_{int} = \int \{ f^* \}^T [B]^T [D] [B] \{ f \} dVol \quad (1.20)$$

dove sia il vettore degli spostamenti nodali virtuali sia il vettore degli spostamenti nodali reali sono delle costanti rispetto alla variabile di integrazione e possono quindi essere estratti dal segno di integrale. In definitiva il lavoro totale virtuale interno risulta

$$L_{int} = \{ f^* \}^T \int ([B]^T [D] [B] dVol) \{ f \} \quad (1.21)$$

Ponendo ora l'uguaglianza fra il lavoro virtuale esterno e il lavoro virtuale interno e ricordando che il vettore degli spostamenti nodali virtuali è stato possibile sceglierlo, entro certi

limiti, a piacere e quindi è ininfluente sul verificarsi della uguaglianza anzi detta, si ottiene

$$\{ F \} = \int ([B]^T [D] [B] dVol) \{ f \} \quad (1.22)$$

che confrontata con la relazione di rigidezza

$$\{ F \} = [K] \{ f \} \quad (1.1 \text{ rip})$$

permette di esplicitare l'espressione della matrice di rigidezza dell'elemento secondo la

$$[K] = \int [B]^T [D] [B] dVol \quad (1.23)$$

Risulta chiaro dal procedimento seguito che i termini di rigidezza così calcolati discendono direttamente, attraverso l'uso delle relazioni della teoria della elasticità, dalla scelta fatta inizialmente per descrivere il campo degli spostamenti.

Occorre quindi sottolineare che i termini della matrice di rigidezza ottenuti con (1.23) sono solo valori approssimati. L'approssimazione di questo risultato è tanto migliore quanto più l'approssimazione del campo degli spostamenti fatta con le funzioni di forma al passo III è vicina al vero (cioè alla realtà fisica).

Va inoltre notato che l'integrale (1.23) solo in determinati casi può essere eseguito con facilità per via analitica, molto spesso è più conveniente (e con la formulazione isoparametrica si procede senz'altro così) eseguirlo per via numerica con algoritmi di integrazione del tipo di quello di Gauss-Legendre (cfr. Appen- dice II).

Nel caso in cui siano presenti delle forze esterne di superficie $\{ P \}$ e delle forze di volume $\{ V \}$ (ad esempio le forze centrifughe) l'espressione del lavoro virtuale esterno si modifica nella

$$L_{est} = \{ f^* \}^T \{ F \} + \int \{ f^* \}^T [N]^T \{ p \} ds$$

commercialmente disponibili) dovranno essere scelti (la scelta è fatta dall'estensore del codice ma talvolta si ha qualche possibilità di intervento anche da parte dell'utente) i punti in cui vengono calcolati i valori delle tensioni nell'elemento. Spesso vengono utilizzati i nodi come punti di appoggio per il calcolo delle tensioni ma, a causa della approssimazione del calcolo eseguito, non sempre sono i punti più significativi per ottenere delle informazioni "serie" sullo stato di tensione, hanno però il non trascurabile vantaggio della comodità. Si può dimostrare che una scelta migliore (nel senso che i valori così calcolati danno una stima localmente più precisa del livello di tensione effettivo) è costituita dai punti di appoggio utilizzati per svolgere numericamente, applicando l'algoritmo di Gauss-Legendre (cfr. Appendice II), l'integrazione con cui si ottengono i termini della matrice di rigidezza.

1.2 IMPOSTAZIONI ALTERNATIVE PER LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA.

Come era stato anticipato l'equazione dei Lavori Virtuali utilizzata al passo VI non è l'unica relazione che permette eseguire il calcolo dei termini della matrice di rigidezza di un elemento.

Si vuole qui accennare brevemente, senza avere la pretesa di essere completi, ad altri tre procedimenti: il primo è basato sulla definizione di Potenziale, il secondo è noto come metodo di Rayleigh - Ritz, il terzo è denominato metodo dei residui pesati. A questa ultima impostazione si rifanno, a livello concettuale, un certo numero di sviluppi applicativi di cui il più noto ed utilizzato è il metodo di Galerkin, dal nome di chi per primo lo formulò.

1.2.1 IL METODO DEL POTENZIALE.

La definizione stessa di potenziale offre la possibilità di calcolare il valore della forza agente in un determinato punto di una struttura e in una determinata direzione eseguendo la derivata parziale del potenziale (l'energia potenziale di deformazione elastica posseduta dalla struttura a seguito delle deformazioni subite) rispetto allo spostamento del punto di applicazione

di tale forza nella direzione specificata.

Se allora si esegue la derivata parziale dell'energia potenziale di deformazione elastica posseduta da un elemento, che è stato assoggettato al campo di spostamenti descritto tramite l'approssimazione (1.8), rispetto a ciascuno degli spostamenti nodali si possono calcolare le forze nodali corrispondenti e quindi, in virtù della definizione adottata di coefficiente di rigidezza (cfr. capitolo I della seconda parte di questo testo), i termini della matrice di rigidezza.

L'energia potenziale di deformazione elementare assorbita dalla struttura (elemento) per ogni volumetto elementare di materiale $dVol$ vale

$$dE_{pd} = 1/2 \{ \epsilon \}^T \{ \sigma \} dVol \quad (1.32)$$

che integrata su tutto il volume dell'elemento dà l'energia potenziale di deformazione elastica complessiva.

Il campo delle deformazioni e delle tensioni, espressi in funzione degli spostamenti nodali, valgono

$$\{ \epsilon \} = [B] \{ f \} \quad (1.13 \text{ rip})$$

$$\{ \sigma \} = [D] [B] \{ f \} \quad (1.19 \text{ rip})$$

dove chiaramente, trattandosi del campo delle deformazioni e delle tensioni effettivamente presenti nell'elemento, si fa uso del vettore degli spostamenti nodali reali. L'energia potenziale totale risulta quindi

$$E_{pd} = 1/2 \int \{ f \}^T [B]^T [D] [B] \{ f \} dVol \quad (1.33)$$

dove il vettore degli spostamenti nodali è una costante rispetto alla variabile di integrazione e può quindi essere estratto dal segno di integrale. In definitiva l'energia potenziale di deformazione elastica complessiva, ricordando anche la definizione (1.23), risulta

$$E_{pd} = 1/2 \{ f \}^T \int ([B]^T [D] [B] dVol) \{ f \} \quad (1.34)$$

fisico più intuitivo ai vari passaggi ed è per questo motivo che è stata adottata nella trattazione svolta precedentemente. L'equazione dei lavori virtuali inoltre può essere scritta anche per sistemi non conservativi, dove per esempio occorre mettere in conto anche l'attrito, per i quali invece il metodo di Rayleigh-Ritz non può essere usato.

Il metodo variazionale di Rayleigh-Ritz permette di valutare il modo in cui la soluzione ottenuta approssima quella esatta, infatti la soluzione ottenuta attraverso l'approssimazione degli elementi finiti generalmente non rappresenta il minimo dell'energia potenziale totale (cioè la soluzione esatta) ma solo il minimo possibile con i vincoli (aggiuntivi rispetto alla struttura reale) e gli errori introdotti con la discretizzazione. La descrizione della struttura ottenuta con gli elementi finiti, se sono completamente soddisfatte le condizioni di completezza e compatibilità poste per la descrizione del campo degli spostamenti dell'elemento, risulta più "rigida" di quella reale. All'aumentare del numero di gradi di libertà del modello (la descrizione del campo degli spostamenti diviene più vicina al vero) e la soluzione agli elementi finiti converge monotonicamente verso la soluzione esatta, pur mantenendosi sempre dalla parte delle descrizioni più rigide. Se non fossero soddisfatte le condizioni di completezza e compatibilità poste per la descrizione del campo degli spostamenti, non si potrebbe più affermare con certezza che la discretizzazione agli elementi finiti è più rigida del reale, nè assicurare la convergenza monotona al risultato esatto con l'aumentare del numero di gradi di libertà.

1.2.3 IL METODO DI GALERKIN.

Il metodo di Galerkin è un altro metodo variazionale, fa parte della famiglia dei metodi detti dei "residui pesati", metodi di approssimazione basati su un procedimento di minimizzazione dei residui (errori), sommati con opportuni pesi. L'equazione che governa il fenomeno allo studio (ed in particolare la statica dei corpi deformabili) può essere scritta nella forma seguente:

$$L[f(x_k)] - g(x_k) = 0 \tag{1.41}$$

dove L rappresenta una funzione differenziale nota della variabile di campo $f(x_k)$; nel problema strutturale $f(x_k)$ può essere il campo degli spostamenti.

Si approssimi la funzione $f(x_k)$ con una opportuna combinazione lineare $h(x_k)$ di funzioni $M(x_k)$, si ponga cioè

$$h(x_k) = \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 + \dots \tag{1.42}$$

anche qui le funzioni M devono essere scelte in modo che la combinazione soddisfi le condizioni al contorno "essenziali" o geometriche (cioè assumere il valore degli spostamenti nodali quando calcolata nei nodi) ed anche le condizioni al contorno "naturali", ossia quelle poste dalle forze distribuite che agiscono sul contorno.

Si noti che se come funzioni M vengono utilizzate le funzioni di forma N allora, anche qui, i coefficienti α_j sono gli spostamenti nodali f. Naturalmente ponendo questa espressione nella relazione generale si ottiene

$$L[h(x_k)] - g(x_k) = e(x_k) \neq 0 \tag{1.43}$$

dove la funzione $e(x_k)$ sta ad indicare l'errore (il residuo) cioè lo scostamento fra il risultato ottenibile con l'approssimazione fatta e il risultato esatto. I coefficienti α_j della combinazione lineare si ottengono imponendo che

$$\int e(x_k) w(x_k) dx_k = 0 \tag{1.44}$$

cioè annullando la media pesata dell'errore su tutto l'elemento. La funzione $w(x_k)$ rappresenta la funzione peso per il calcolo della media. La scelta della funzione peso può essere fatta in vari modi e quindi si possono avere diverse varianti del metodo dei residui pesati, note come il metodo di Galerkin, il metodo dei minimi quadrati, il metodo delle collocazioni, ecc.

Una possibile scelta è di utilizzare la funzione di forma come funzione peso per il calcolo della media dell'errore e questa scelta definisce il metodo noto come metodo di Galerkin. Nell'analisi strutturale i risultati cui si perviene con il metodo di Galerkin sono nuovamente coincidenti con quelli cui si perviene con l'uso della equazione dei lavori virtuali.

Il metodo di Galerkin e più in generale i metodi dei residui

mente perché i nodi estremi sono i soli punti in comune fra gli elementi.
 Non ci sono singolarità della funzione.
 E' possibile descrivere un campo delle deformazioni almeno costante, come potrà essere verificato al passo IV.

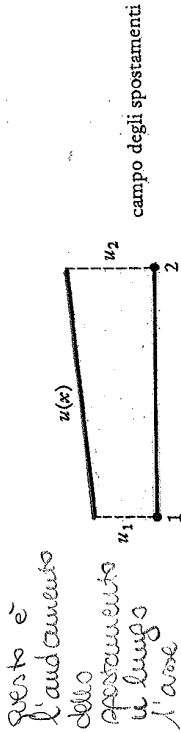


Fig. 2.4 Campo degli spostamenti nell'asta.

PASSO III : legare il campo degli spostamenti dell'elemento agli spostamenti nodali; le funzioni di forma.

Per l'elemento asta i nodi 1 e 2 hanno rispettivamente coordinate $x=0$ e $x=L$. Facendo uso della funzione di approssimazione (2.3), gli spostamenti nodali u_1 possono essere calcolati con le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} u = u_1 = \alpha_1 \\ u = u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 L \end{cases} \quad (2.5)$$

Scrivendo queste relazioni sotto forma matriciale si ottiene

$$\{ f \} = [A] \{ \alpha \} \quad (2.6)$$

dove la matrice [A] risulta

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

La matrice [A] è facilmente invertibile anche manualmente, infatti

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= u_1 \\ \alpha_2 &= (u_2 - u_1) / L \end{aligned} \quad (2.8)$$

Per ciascun nodo può essere indicata una forza assiale Q_i (figura 2.3), pertanto il vettore delle forze nodali ha le due seguenti componenti

$$\{ F \} = \{ Q_1, Q_2 \}^T \quad (2.2)$$



Fig. 2.3 Forze nodali.

PASSO II : scegliere una opportuna funzione per approssimare il campo degli spostamenti per ogni punto dell'elemento.

L'elemento asta è unidimensionale. Per rappresentare il campo degli spostamenti assiali u si sceglia un polinomio di primo grado in x , infatti sono disponibili complessivamente due condizioni al contorno.

La funzione che approssima il campo degli spostamenti è quindi

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad (2.3)$$

che può essere riscritta in forma matriciale come

$$\{ u \} = [1, x] \{ \alpha_1, \alpha_2 \}^T \quad (2.4)$$

In figura 2.4 è mostrato l'andamento dello spostamento u lungo l'asse della trave.

Per quanto riguarda le quattro verifiche circa l'ammissibilità della funzione scelta per approssimare il campo degli spostamenti si possono fare le seguenti osservazioni.

Il coefficiente α_1 permette di descrivere correttamente un moto di traslazione rigida dell'asta lungo l'asse x .

La continuità del campo degli spostamenti fra l'elemento in esame e i contigui dello stesso tipo è garantita automaticamente

scrittura della funzione (2.3) che approssima il campo degli spostamenti. Il campo delle deformazioni risulta costante su tutta l'asta. La relazione (2.13) può essere riscritta in forma matriciale ottenendo

$$\{ \epsilon_x \} = [C] \{ \alpha \} \quad (2.14)$$

dove la matrice [C] è composta di una riga e due colonne

$$[C] = [0 \quad 1] \quad (2.15)$$

La figura 2.6 mostra l'andamento del campo delle deformazioni nell'elemento.

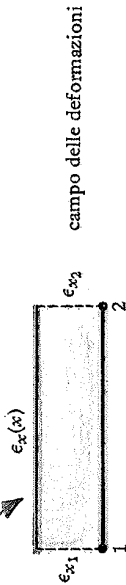


Fig. 2.6 Campo delle deformazioni nell'asta.

Il vettore delle deformazioni si scrive

$$\{ \epsilon(x) \} = [C] \{ \alpha \} = [C] [A]^{-1} \{ f \} \quad (2.16)$$

La matrice [B] prodotto della matrice [C] per la matrice [A] inversa vale

$$[B] = [-1/L \quad 1/L] \quad (2.17)$$

Si nota espressamente che la matrice [B] risulta in questo caso con tutti i suoi termini indipendenti da x. I termini della matrice [B] potevano anche essere ottenuti per derivazione rispetto ad x dei termini omologhi della matrice [N] delle funzioni di forma.

PASSO V : scrivere il campo delle tensioni in funzione del campo delle deformazioni dell'elemento.

In sintonia con la scelta fatta per le deformazioni, per l'elemento asta come grandezza caratteristica dello stato di tensione nell'elemento è scelta la tensione normale secondo l'asse x.

$$\{ \sigma(x) \} = \{ \sigma_x \} \quad (2.18)$$

se E è il modulo di elasticità normale del materiale o modulo di Young, fra la tensione e la deformazione, in considerazione del fatto che si è in presenza di uno stato di tensione monodimensionale, vale la semplicissima relazione

$$\{ \sigma(x) \} = E \{ \epsilon(x) \} \quad (2.19)$$

e quindi la matrice [D] di rigidezza del materiale è una matrice 1 * 1 e vale

$$[D] = [E] \quad (2.20)$$

PASSO VI : ricavare la matrice di rigidezza dell'elemento.

La matrice di rigidezza dell'elemento asta si ottiene eseguendo l'integrale

$$[K] = \int [B]^T [D] [B] dVol \quad (2.21)$$

dove l'esecuzione dell'integrazione sul volume è semplice perché tutte e tre le matrici sono indipendenti dalla coordinata di integrazione e possono essere estratte dal segno di integrale. La matrice di rigidezza risulta infine

$$[K] = E A \begin{bmatrix} 1/L & -1/L \\ -1/L & 1/L \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

La matrice di rigidezza così ottenuta coincide con quella già nota dal calcolo matriciale delle strutture in quanto si è operata una scelta della funzione di approssimazione del campo degli spostamenti (e quindi delle funzioni di forma) che descrive con

ed ancora il campo delle deformazioni assiali vale

$$\epsilon_x = du / dx = \alpha_2 \quad (2.13 \text{ rip})$$

Il funzionale di Ritz composto dalla energia potenziale elastica e dal lavoro delle forze esterne applicate vale

$$E_p = \int_0^l EA_0(1+x/l) \alpha_2^2 dx / 2 - Q_2(\alpha_1 + \alpha_2 l) - Q_1 u_1 \quad (2.31)$$

Imponendo il rispetto della condizione di vincolo per esempio per $x = 0$ $u(x) = u_1$, risulta $\alpha_1 = u_1$. Per l'equilibrio vale inoltre la relazione

$$Q_1 + Q_2 = 0 \quad (2.32)$$

che permette di ottenere il valore della reazione vincolare Q_1 . Per ottenere il valore di α_2 occorre ora imporre che E_p sia minimo rispetto ad α_2 cioè

$$dE_p/d\alpha_2 = 1.5 EA_0 \alpha_2 l - Q_2 l = 0 \quad (2.33)$$

da cui si ricava

$$\alpha_2 = 2 Q_2 / 3 EA_0 \quad (2.34)$$

Infine, nell'ipotesi di asta incastrata ad un estremo, $u_1 = \alpha_1 = 0$, per lo spostamento dell'estremo libero si ottiene il valore

$$u_2 = 2 Q_2 l / 3 EA_0 \quad (2.35)$$

La soluzione esatta, ottenibile integrando l'equazione differenziale della deformazione, è

$$u_2 = 0.6932 Q_2 l / EA_0 \quad (2.36)$$

ed è in buon accordo con quella ottenuta. Si noti che la soluzione ottenuta con il polinomio di primo grado coincide con quella ottenibile ponendo nella formula (2.21), come valore dell'area l'espressione (2.30) in funzione di x ovvero un quantità costante pari al valore medio dell'area lungo l'asta.

Si nota inoltre che la soluzione ottenuta (2.35) dà una sovrastima della rigidezza dell'asta.

Se per approssimare il campo degli spostamenti si fosse utilizzato il polinomio di secondo grado

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 \quad (2.37)$$

si sarebbe ottenuta una soluzione più accurata, infatti ripetendo il procedimento delineato si perviene alla seguente espressione del campo degli spostamenti assiali u

$$u(x) = u_1 + 12 Q_2 x / 13 EA_0 - 3 Q_2 x^2 / 13 EA_0 l \quad (2.38)$$

e ponendo infine $x=l$ si ha

$$u_2 = 0.6923 Q_2 l / EA_0 \quad (2.39)$$

che fornisce un'ottima approssimazione della soluzione esatta (2.36), migliorando apprezzabilmente rispetto alla (2.35).

Si nota che anche in questo caso il modello matematico fornisce una sovrastima (ormai molto piccola) della rigidezza dell'asta. Risulta inoltre verificato che aumentando i gradi di libertà del modello matematico la soluzione converge verso la soluzione esatta.

Si nota infine che con il procedimento di soluzione scelto non si è più vincolati a limitare il numero delle funzioni ϕ , utilizzate nella combinazione lineare che approssima il campo degli spostamenti, al numero delle condizioni al contorno disponibili, ma è possibile espandere il numero delle funzioni ϕ a piacere. L'aumento del numero delle funzioni ϕ porta però con sé maggiori complicazioni di calcolo per cui generalmente si preferisce accettare risultati leggermente meno accurati ma meno onerosi dal punto di vista computazionale.

Il particolare caso dell'asta (come più oltre della trave) non pone problemi di continuità del campo degli spostamenti fra elementi contigui, anche se per gli elementi contigui venissero adottati polinomi di approssimazione del campo degli spostamenti di grado diverso. Questo, come si potrà verificare, non è più vero per elementi di tipo diverso dai due suddetti.