



Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1331

ANNO: 2014

# A P P U N T I

STUDENTE: Arlotta

MATERIA: Controlli Automatici + Eserc., Prof.Regruto

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

## FORMULE sulle SLIDES

LAPLACE trasformate notevoli

n. 4 come iniziare e finire i diagrammi di Bode  
Matlab per Bode, Nyquist e Nichols

n. 5 criteri di stabilità interna del sistema feedback  
teorema di Nyquist

n. 7 tabella errori al riferimento

n. 8  $K_c$  e  $K_p$  dai limiti  
errori polinomiali  
errori sinusoidali

n. 9 sovraelevazione  
tempo d'ascesa  
tempo d'assottamento

n. 11  $T_p$ ,  $S_p$ ,  $\omega_{c}$ ,  $\omega_{n}$

→ errore polinomiale

$$e_d^\infty = y_d = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G_p(s)}{1+L} d(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^\mu K_p}{s^{\mu+p} + K_c K_p G_a G_f G_s} \frac{D_{ao}}{s^{n+1}} =$$

$$= \frac{K_p D_{ao}}{\beta + K_c K_p G_a G_f G_s} \left\{ \begin{array}{l} \beta = 0 \quad \mu+p=0 \\ \beta = 1 \quad \mu+p > 0 \end{array} \right.$$

e da qui ricavare  $K_c$

Anche per posto errore che calcolare  $\mu$ .

NB per  $s \rightarrow 0$

$$G_p \approx K_p / s^p$$

$$G_c \approx K_c / s^\mu$$

! DA QUESTE SPECIFICHE RICAPO:

$\mu$  e  $K_c$   
 prendo  $\mu$  più piccolo (  $\mu = -1$  escluso )  
 L'una scelta scelta  $\mu$ , prendo tra le  $K_c$  corrispondenti, la più grande.

② Traduzione delle specifiche al transitorio

→  $\hat{S}$ ,  $t_s$  e  $t_r$ : dalla sovraelaborazione massima, il tempo di risalita e polo di ampiezza, ricavare

$$\hat{S} = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \rightarrow \text{ricavo } \xi \text{ cui rendere}$$

$$T_p = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$s_p = \frac{2\xi\sqrt{2+4\xi^2} + 2\sqrt{1+8\xi^2}}{\sqrt{1+8\xi^2} + 4\xi^2 - 1}$$



Reste non  
LINEE GUIDA

$$\omega_c^L = \omega_p 10^{\frac{(-M_s^{LF})}{40}}$$

$$\omega_c \geq 2\omega_c^L$$

$$\omega_c^H = \omega_p 10^{\frac{(+M_s^{HF})}{40}}$$

$$\omega_c \leq \frac{\omega_c^H}{2}$$

SODDISFARE LE SPECIFICHE UOL DIRE:

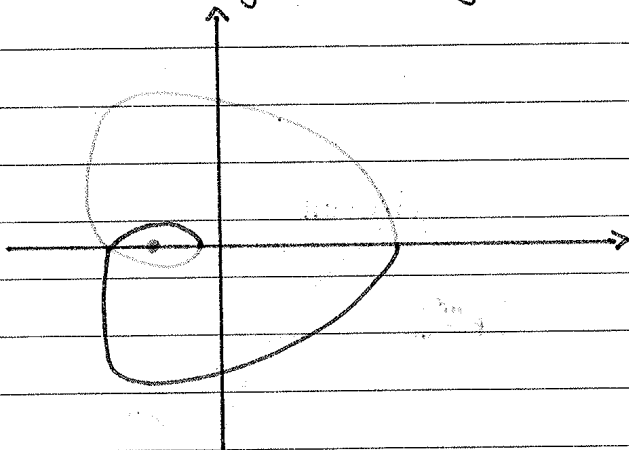
L prima sotto lo spetto a HF;  
sopra lo spetto a LF,  
 $\omega_c$  cerca un range di validità

### ③ Il segno di $K_c$

Suppongo uno dei due segni, ad esempio positivo, e costruisco la funzione ad anello (L), ricordando che:

$$G_c = \frac{K_c}{s^m}$$

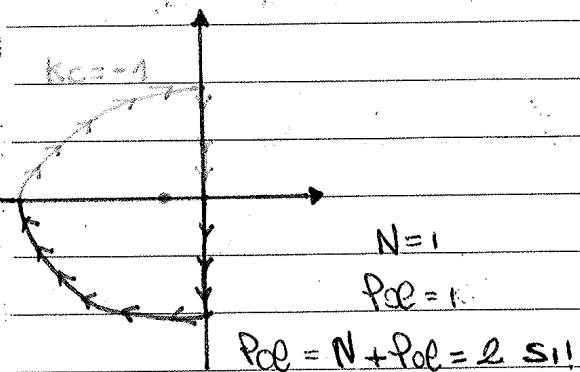
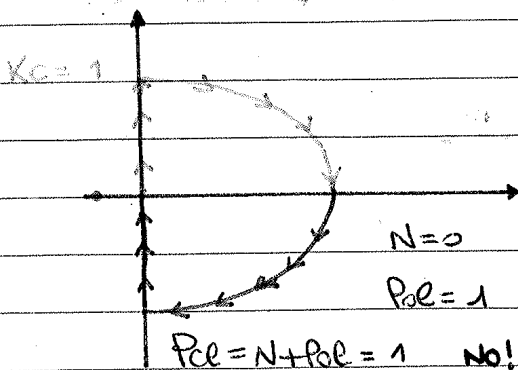
E la disegno sul diagramma di Nyquist: se il punto critico è



incrociato un numero di volte modificabile (avendo due o un solo multiplo), il segno va bene

$$P_{cl} = N + P_{ol} = 0$$

Il segno va bene anche se il punto critico non è incrociato.



→ rete integrativa

Anche qui uso l'abaco e mi cavo pi e zi come per la derivativa.

L'uso di questa rete è sconsigliato.

Quando evito di usare:

- ↳ pseudocon ha vincoli su Kc quindi uso una derivativa e uso Kc per aggiustare il guadagno;
- ↳ posso fare una scelta per cui l'azione da compiere è aumentare sia il modulo che la fase.

→ rete zero

La rete pseudo zero recupera parecchia fase.

Il controllore non deve risultare un sistema improprio:  $\mu$  deve essere maggiore di zero.

$$R_z = 1 + \frac{1}{z}$$

Parto dal modulo, incasso all'abaco la rete e il modulo da guadagnare. Dopo lo vin e prendo se recupero la fase che volevo.

lo zero è sempre  $\frac{\omega_{cb}}{\omega_{om}}$

## SCHEMA SIMULINK

Definisco le funzioni di trasferimento con il blocco TRANSFER FCN e continuo a cui posso dare come parametri  $num_g$ ,  $den_g$  dal workspace di Matlab.

Per i blocchi a valore costante uso GAIN. Per avere più di due blocchi uso SUM: devo aprire per impostare i segni dei blocchi in entrata.

Per immettere il segnale, vado alla libreria SOURCES. Da qui posso inserire diversi segnali quali:

una costante (CONSTANT)

una rampa (RAMP)

un gradino (STEP)

una sinusoide (SINE WAVE)

Per visualizzazione, attacco uno scope e poi do lo START alla simulazione.

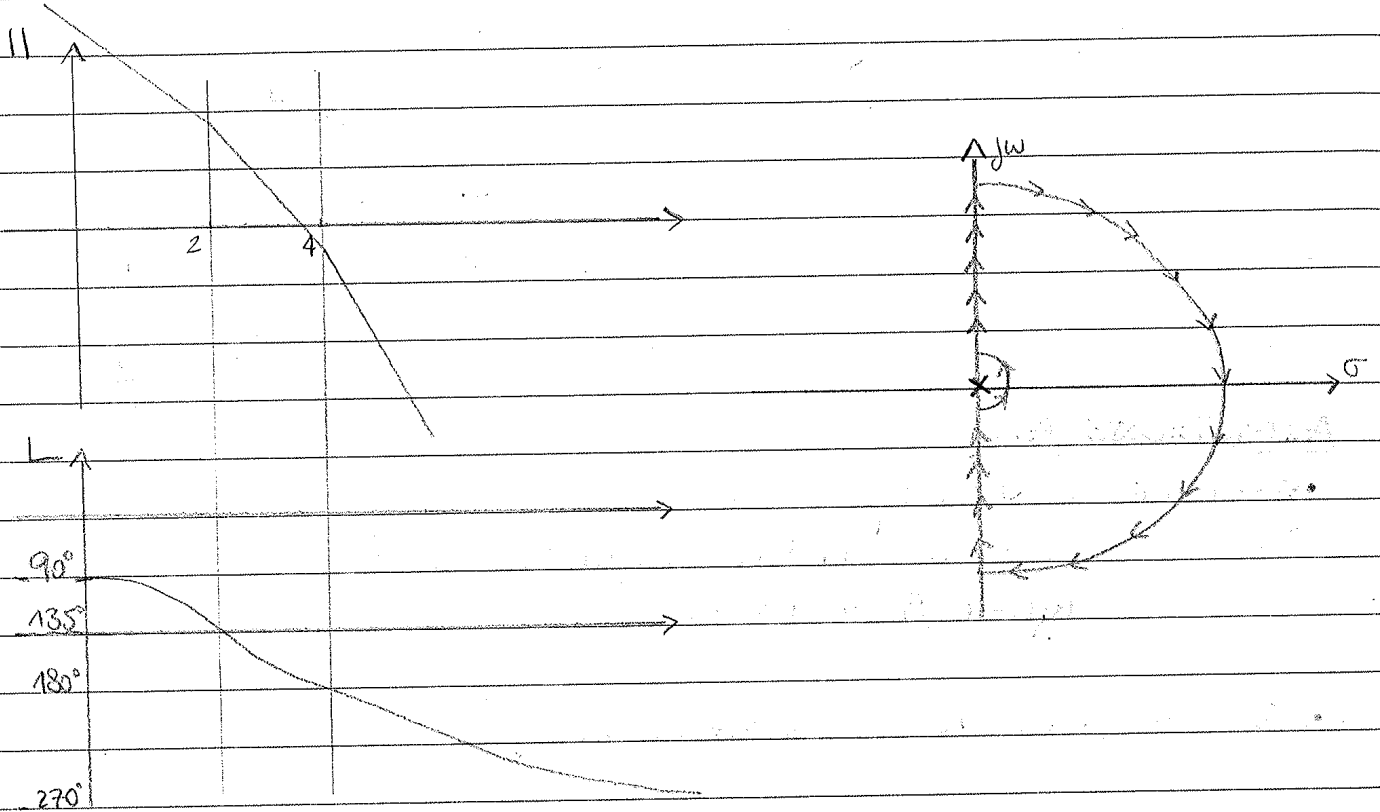
$$H(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+4)} = \frac{1}{s \cdot 2 \left(1 + \frac{s}{2}\right) \cdot 4 \left(1 + \frac{s}{4}\right)} =$$

$K_c > 0$

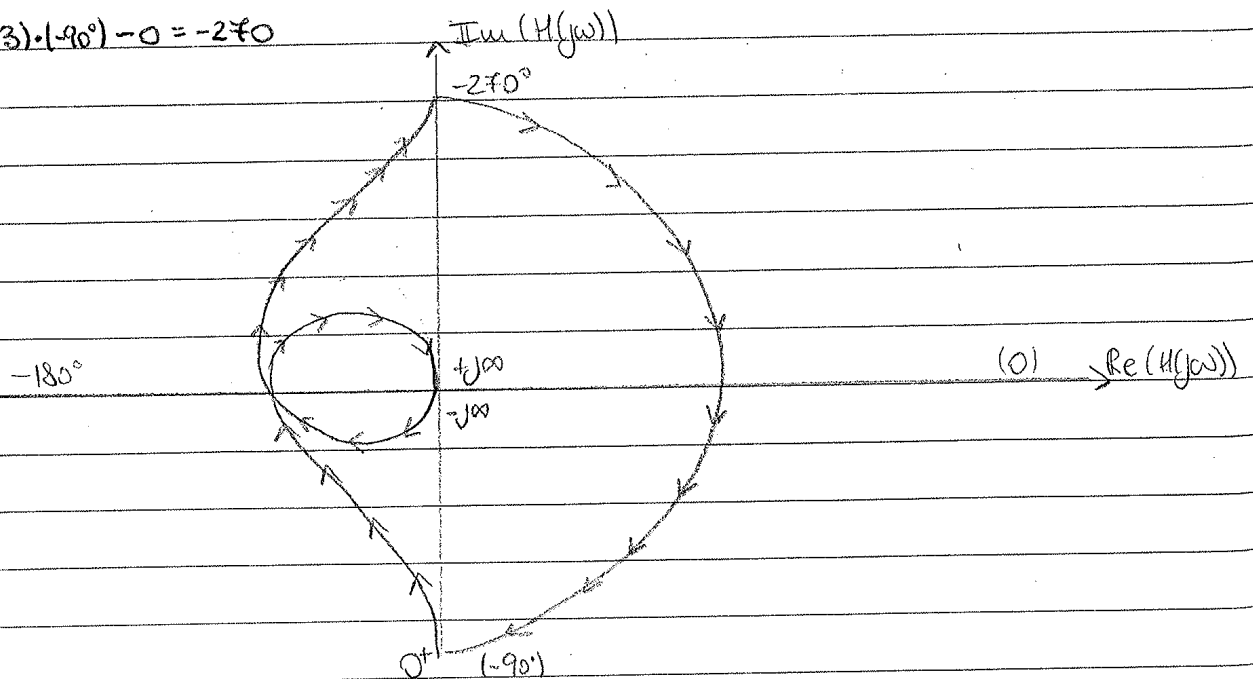
$s = 0, -2, -4$  3 poli

nessuno zero

$$= \frac{1}{8} \frac{1}{s(1+s/2)(1+s/4)}$$



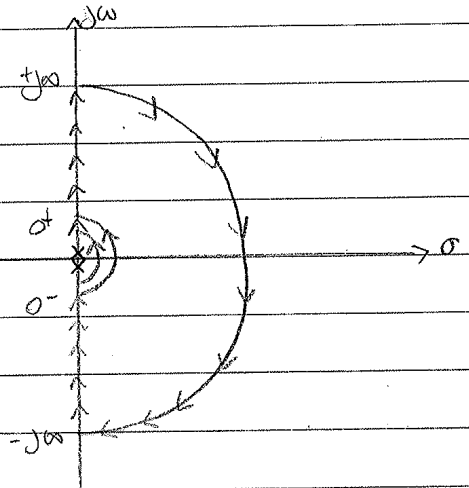
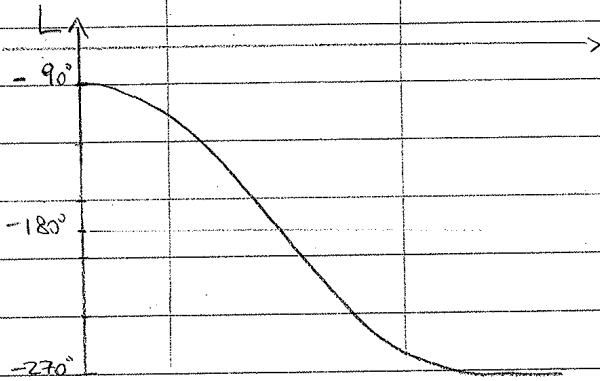
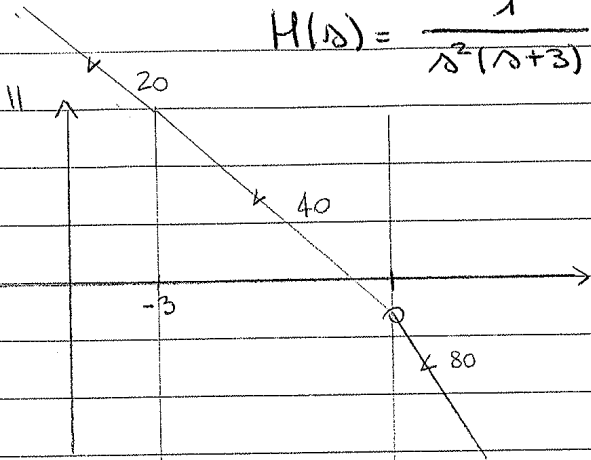
parte da  $\varphi(-90^\circ) - 0 = -90^\circ$   
 arriva a  $(3) \cdot (-90^\circ) - 0 = -270^\circ$



$$H(s) = \frac{1}{s^2(s+3)} = \frac{1}{s^2 \cdot 3(1+s/3)}$$

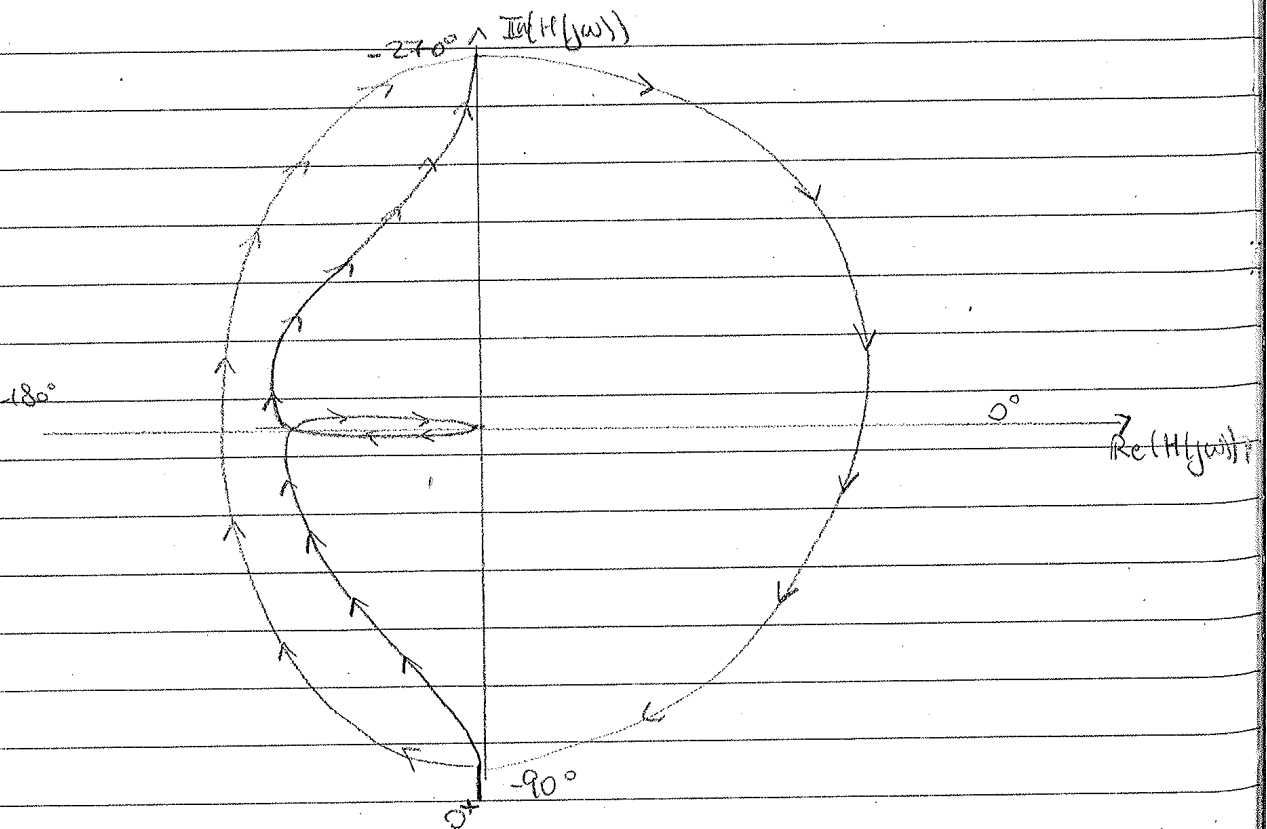
$K=0$

$\Delta = 0; 0; -3$  3 poli



parte da  $-90^\circ$

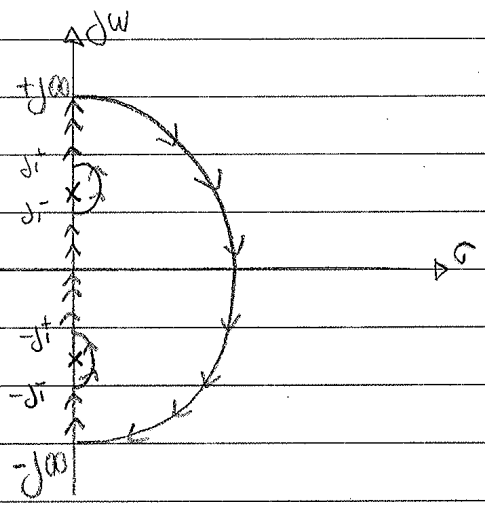
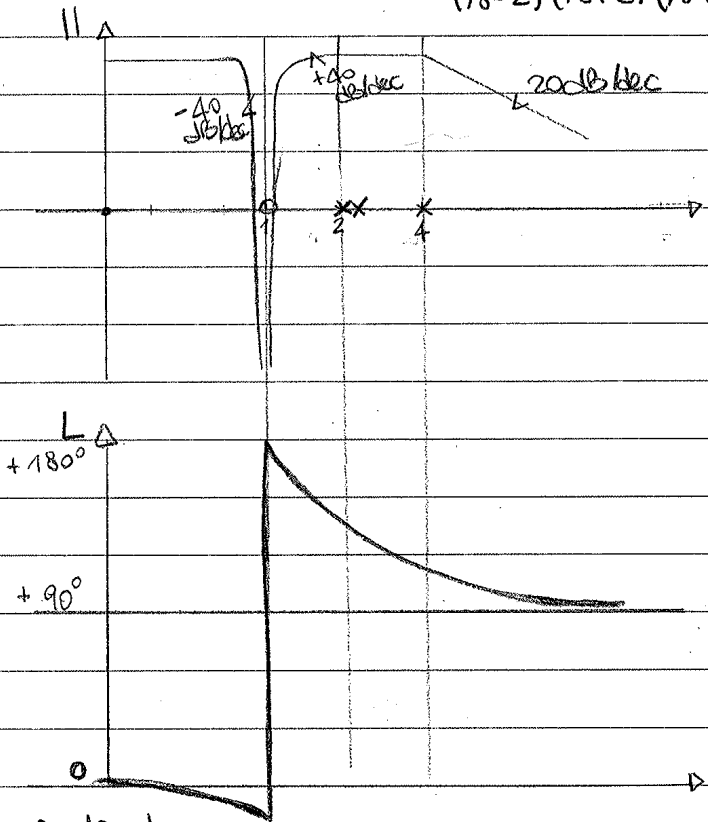
arriva a  $(3) \cdot (-90) - 0 = -270^\circ$



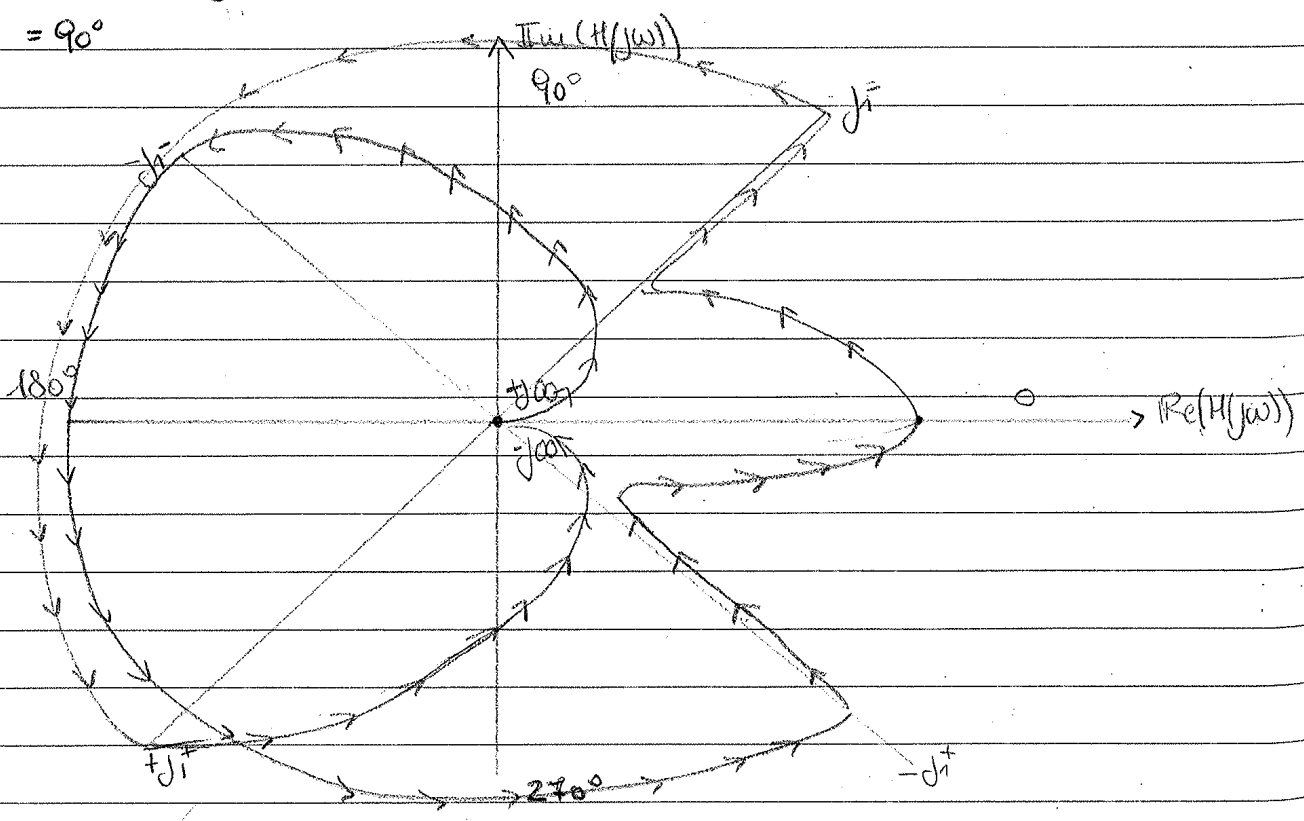
$$H(s) = \frac{s^2 + 1}{(s-2)(s+2)(s+4)}$$

$K=1$

$s = -1 \pm 1j$  zeri  
 $s = 2, -2, -4$  poli  
 zeri  $\pm 1j$  (no Re)



parte da 0  
 curva a  $(2)(-90) + (3)(90) = 90^\circ$



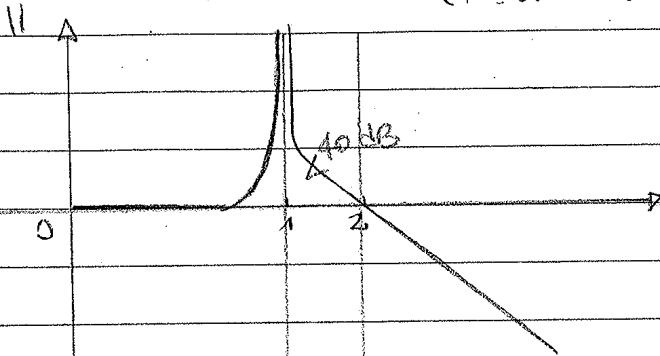
⚠ IN COSTANTI  
 $\frac{-z(1-\frac{\sigma}{z})}{z(\frac{\sigma}{z}+1)(\sigma^2+1)}$

$$H(\sigma) = \frac{\sigma - 2}{(\sigma + 2)(\sigma^2 + 1)}$$

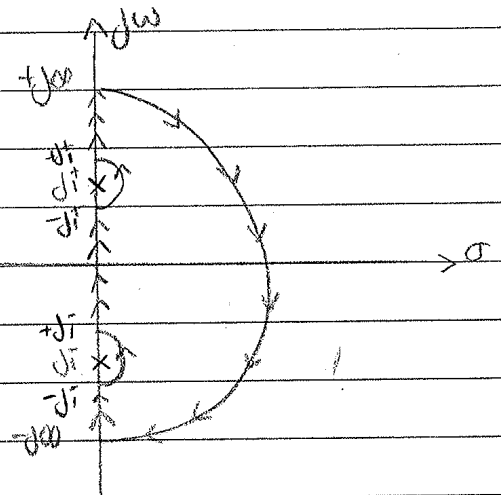
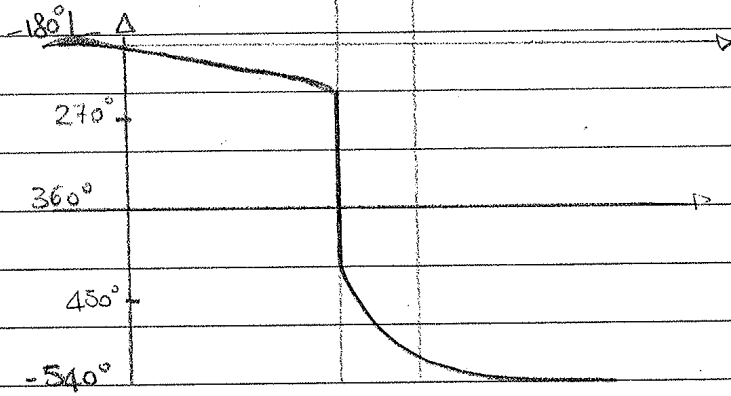
$\rightarrow K = 1$   $r = 0$ , parte da K

$\sigma = 2$  zero

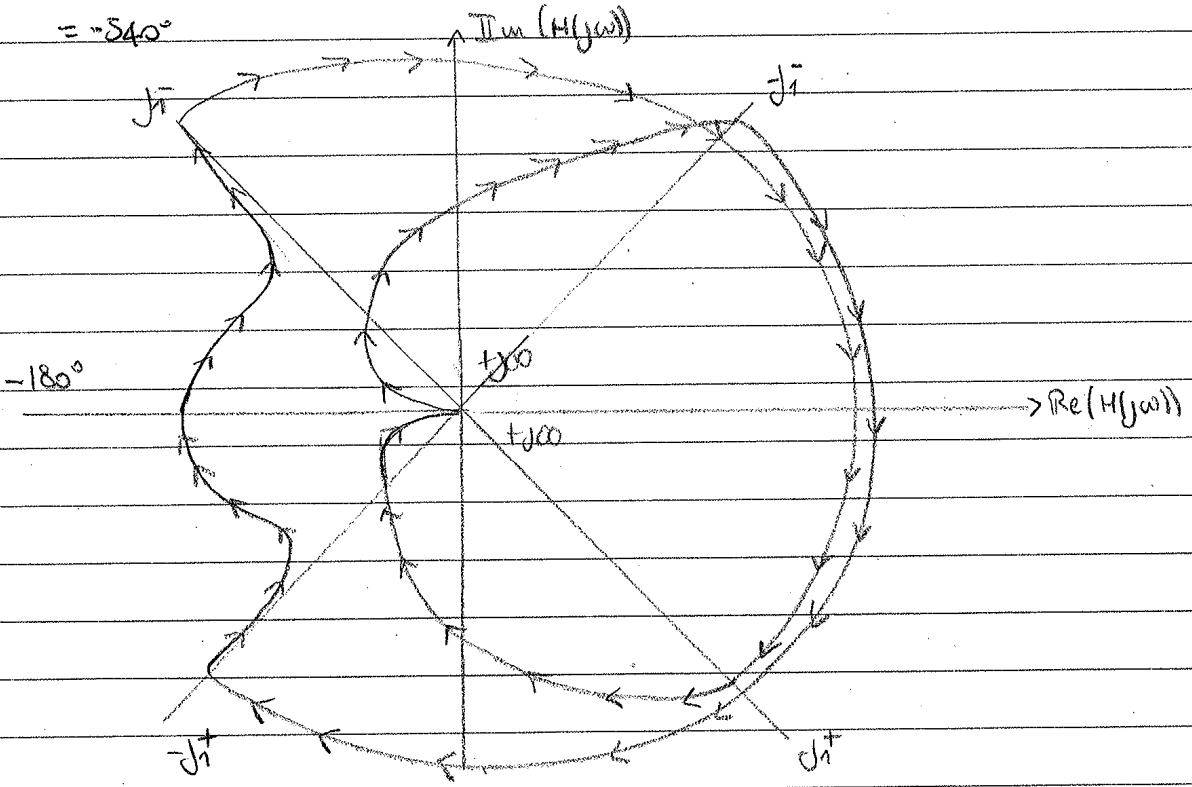
$\sigma = -2, \pm j1$  poli (3)



in 2 un 0 e un  $\times = 2$  annullano a vicenda



parte da  $0(-90) - 180 = 180^\circ$   
 curva a  $(2)(-90) + (0)(90) - 180^\circ$   
 $= -540^\circ$



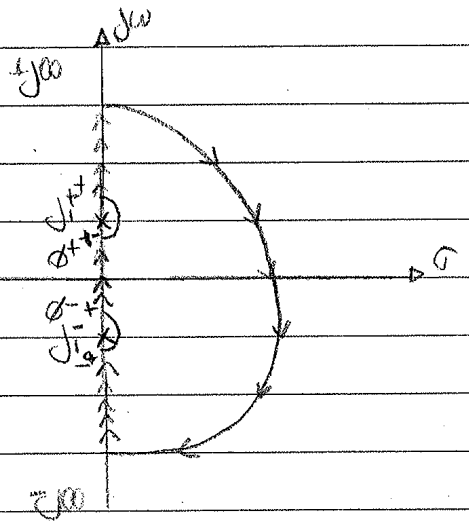
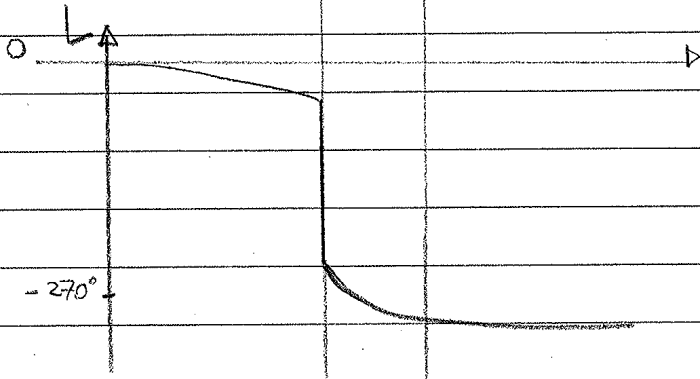
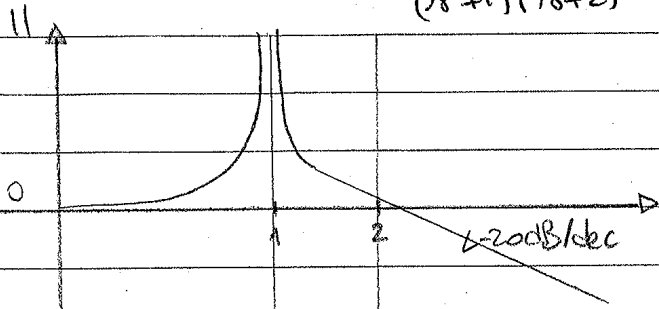
$$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s+2)}$$

zeri:  $\phi$

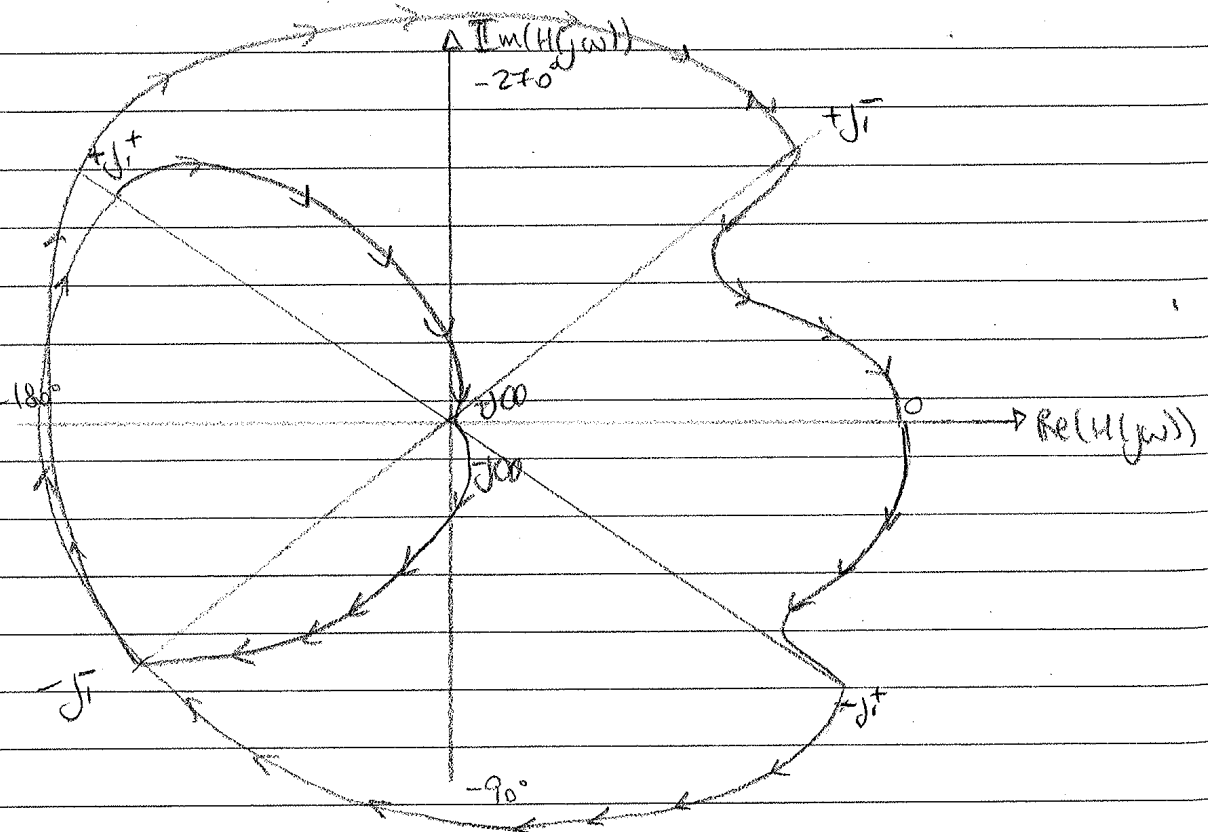
poli:  $-2$

$-i, +i$   $\rightarrow$  coppia di poli coniugati

$v=0 \rightarrow$  parte da  $K/ds=0$



parte da  $(0)(-90^\circ) - 0 = 0^\circ$   
 arriva a  $(3)(-90^\circ) - 0 = -270^\circ$





Quindi

$$K_d = 1$$

$$G_f = 1$$

$K_p$  n° incanti come

$$\lim_{s \rightarrow 0} s G_p(s) = \text{[dove } p=1 \text{ (poli in } s=0 \text{ di } G_p(s)\text{)]}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{25}{s(s^2 + 3.3s + 2)} =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{25}{s^2 + 3.3s + 2} = 12.5$$

Quindi

$$\left| \frac{K_d^2 R_0}{K_p K_c G_a} \right| \leq 1.5 \cdot 10^{-1}$$

$$R_0 = 1 \quad K_c \text{ da trovare}$$

$$K_d = 1 \quad G_a = 0.095$$

$$K_p = 12.5$$

$$|K_d^2 R_0| \leq 1.5 \cdot 10^{-1} |K_p K_c G_a|$$

$$|K_c| \geq \frac{|K_d^2 R_0|}{1.5 \cdot 10^{-1} |K_p G_a|}$$

$$|K_c| \geq 5.614 \quad \text{con } \mu = \phi$$

Errore percentuale da  $|e_{da}| \leq 1.5 \cdot 10^{-2}$

$$e_{da}^{as} = \frac{K_p D_{as}}{\beta + K_c K_p G_a G_f G_s}$$

dato che  $\mu + p > 0$ ,

$$\beta = 0$$

$$e_{da}^{as} = \frac{K_p D_{as}}{K_c K_p G_a G_f G_s}$$

$$\frac{D_{as}}{K_c G_a G_f G_s} = 1.5 \cdot 10^{-2}$$

$$K_c = \frac{D_{as}}{1.5 \cdot 10^{-2} (G_a G_f G_s)} = 3.86$$

SE NON TI VENE DATO  $K_{ol}$   
 MA DIRE CHE NON  
 TI SERVE!

Errore normalizzato  $|e_{dn}^p| \leq 5 \cdot 10^{-4}$

$$e_{dn}^p = y_{dn}^{\infty} = \cos |f_{ol}| \rightarrow y | \sin(\omega s t + \varphi)$$

$$= \cos \cdot \left| \frac{G_d}{1+L} \right| \sin(\omega s t + \varphi) =$$

$$= \cos \cdot |G_d(j\omega) S(j\omega)| \sin(\omega s t + \varphi)$$

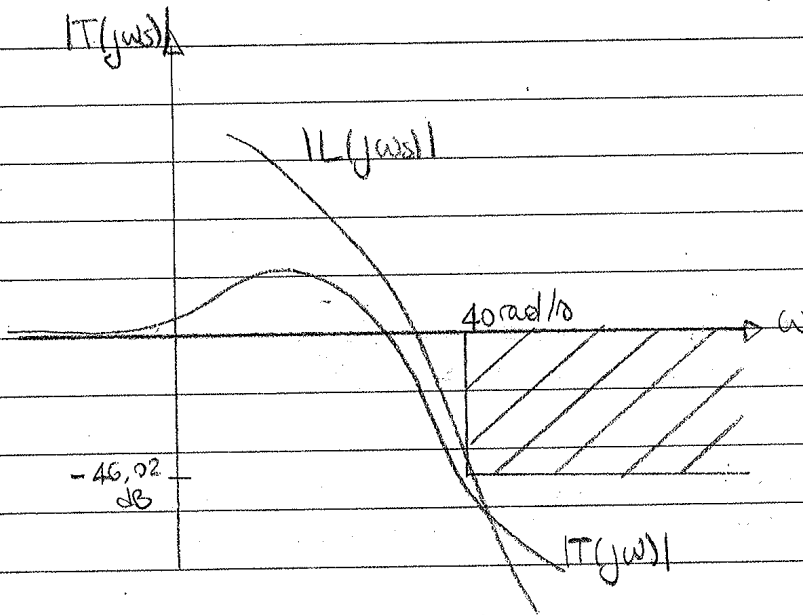
non è questa la  
 fdt

$$|e_{dn}^p| = |\cos| |G_d(j\omega) S(j\omega)| \leq 5 \cdot 10^{-4}$$

= 1 a  
 tutte le  
 frequenze

$$|S(j\omega)| \leq \frac{5 \cdot 10^{-4}}{|\cos|} = 0,005 = 5 \cdot 10^{-3}$$

$$\gamma_s^{LF} \leq -46,02 \text{ dB per } \omega \geq 40 \text{ rad/s}$$



$$= \cos \cdot \underbrace{|f_{ol}|}_{\text{da-by}} | \sin(\omega s t + \varphi) =$$

$$\frac{G_f \cdot G_c \cdot G_a \cdot G_p}{G_o} = \frac{L}{G_o}$$

de cifre  $G_s \rightarrow L$

$$= \cos \left| \frac{L/G_s}{1+L} \right| \sin(\omega s t + \varphi) =$$

$$= \cos \left| \frac{L}{1+L} \right| \frac{1}{G_s} = \cos |T(j\omega)| \cdot \frac{1}{G_o}$$

$$\omega_{cbs} \approx \max(\omega_{c1}, \omega_{c2}) = 0,66 \text{ rad/s}$$

Dalle specifiche sugli errori concludo che

$$\mu = 0$$

$$|Kc| \geq 5614$$

Punto a progettare il controllore da

$$G_c = \frac{Kc}{s^2} = Kc$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_c = 1$$

Da due stadi, il primo di  $Kc$ : passo supponendo  $Kc$  positivo e  
CALCOLO  
 (faccio calcolo a Matlab) la usanza  $L$  definita da

$$L = G_c \cdot G_a \cdot G_p \cdot G_s \cdot G_f$$

$$= Kc \cdot 0,095 \cdot G_p(s) \cdot 1 \cdot 1$$

$$= \frac{13,32}{s^3 + 3,3s^2 + 2s} \quad (K \geq 0)$$

Questo sistema ha un polo in  $s=0$

$$s^3 + 3,3s^2 + 2s = s(s^2 + 3,3s + 2)$$

$$\text{poli } s=0$$

$$s = -2,5$$

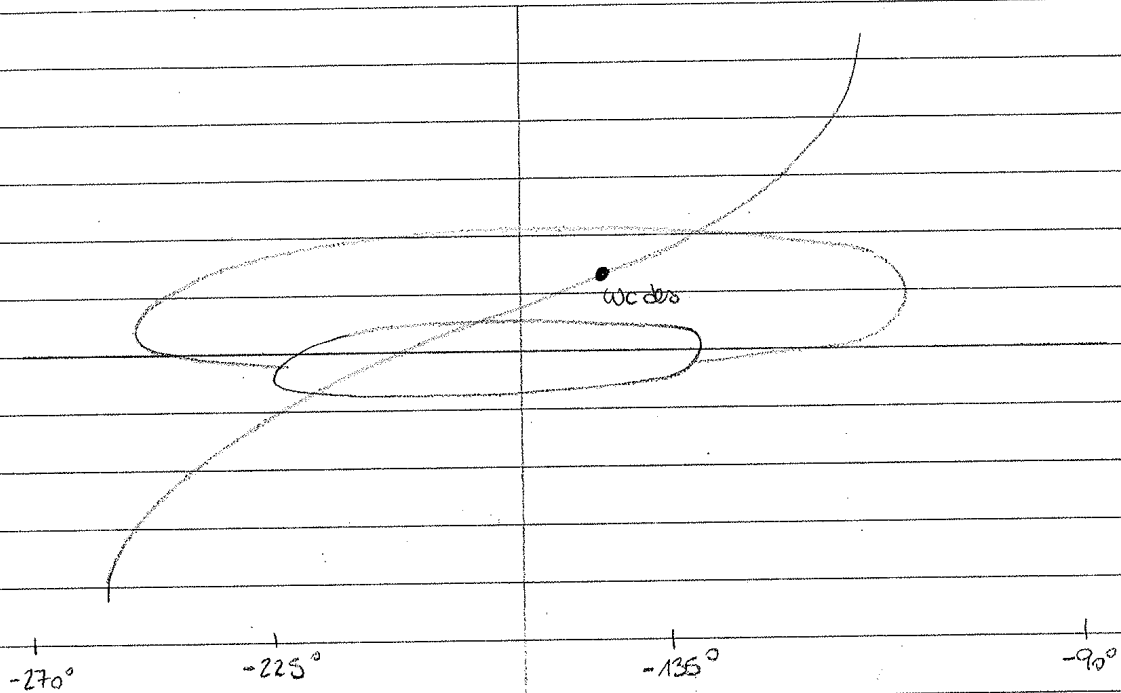
$$s = -0,8$$

Non ci sono zeri, re' poli complessi coniugati. Dato che c'è un polo in zero, il diagramma del modulo inizia a  $+\infty$  e chiava poi due poli.

$$\text{La fase inizia a } 1 \cdot (-90^\circ) = 0 = -90^\circ$$

$$\text{Finisce a } (3) \cdot (-90^\circ) = 0 = -270^\circ$$

Al momento la situazione nel diagramma di Nichols è la seguente



A  $w_{ces} (0,66)$ ,

la fase vale  $-144^\circ$

il modulo vale 17,6dB

Il mio obiettivo è portare la fase a  $-110^\circ$  e il modulo a 0°

### LEAD NETWORK

Dall'abaco della rete LEAD devo ottenere il miglior alzamento di modulo ottenendo un recupero di  $34^\circ$ .

Scelgo

$$w = 16$$

per  $w_u = 1,8 \cdot 10^0 \text{ rad/s}$

Resto aumenta il modulo di 15

$$z_0 = \frac{w_u}{w_{ces}} = 0,36 \text{ rad/s}$$

$$p_0 = 5,18 \text{ rad/s}$$

Recupero più della fase  
perduta per colpa che  
passo in una  
rete integrativa

## Soddisfattiamento dei requisiti

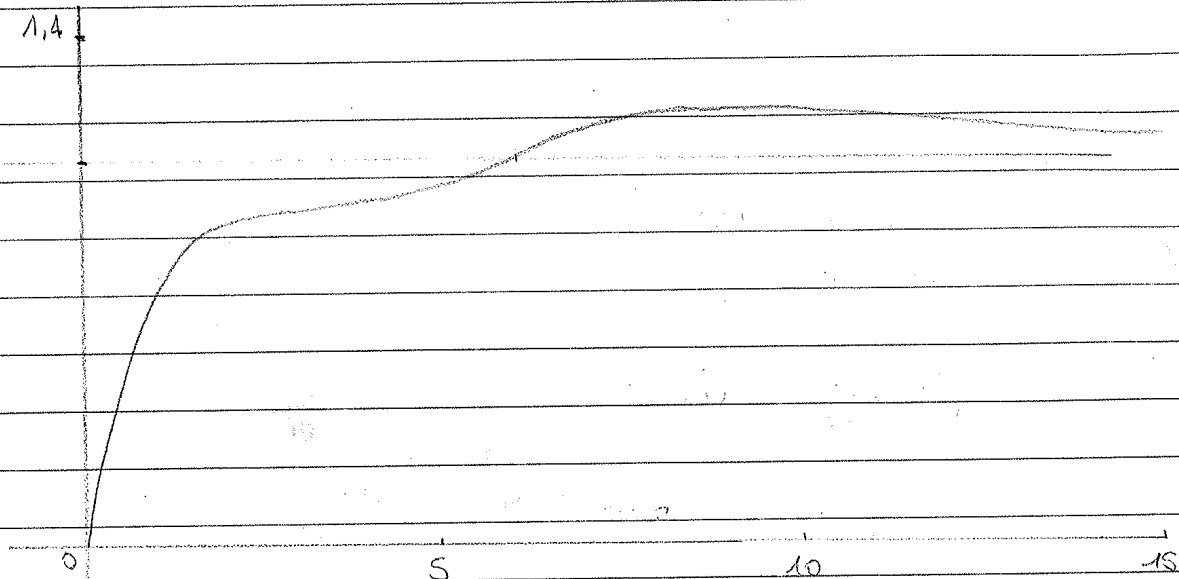


Grafico di:  
 $\frac{T}{1+L}$

La  $\hat{\delta}$  doveva essere minore del 10%. Ho ottenuto

$$\hat{\delta} = \frac{1,08 - 1}{1} = 0,08 = 8\%$$

Punto requisito è soddisfatto

Il  $t_r$  doveva essere  $\leq 30$ . Dal grafico si vede che punto non è soddisfatto perché il grafico tocca la linea dell'1 a 5,5 secondi.

Il  $t_{s,5\%}$  doveva essere  $\leq 12$ .

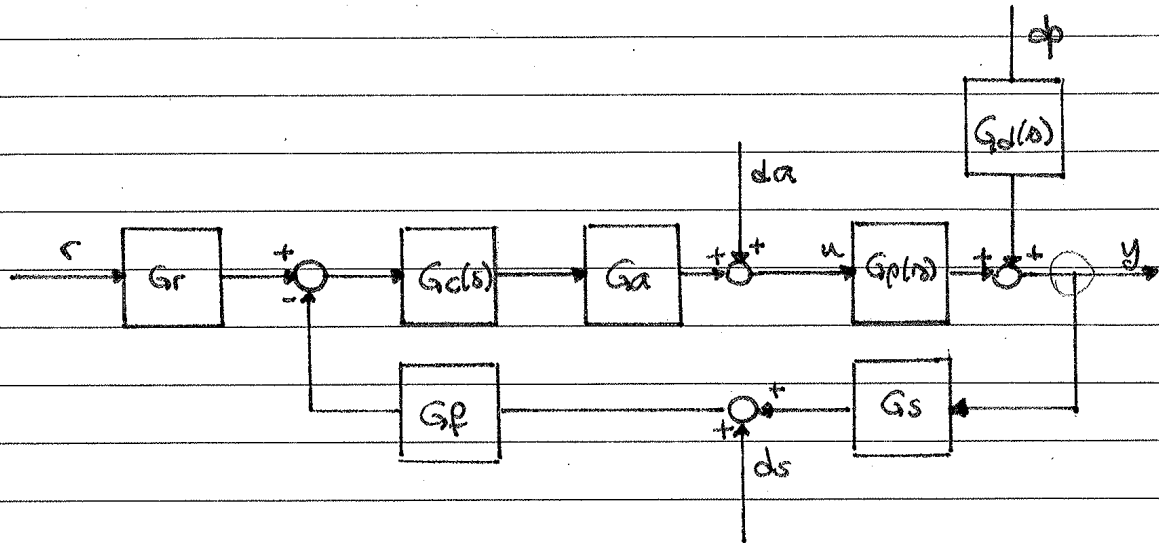
Il grafico entra nella fascia  $\pm 5\%$  senza neanche solo intorno ai 19 secondi.

## Soddisfattiamento delle specifiche

Dallo schema multilink, prendo l'errore al riferimento

Dalla specifica si deve mantenere  $\leq 1,5 \cdot 10^{-1}$

Controllando osservando il grafico. Si vede che in un valore è leggermente inferiore a  $1,5 \cdot 10^{-1}$ , quindi è soddisfatto.



Errore al regime  $|e_{r1}^{st}| \leq 1,5 \cdot 10^{-1}$  (rampa a  $R_0 = 1$ )

$$G_p(s) = \frac{25}{s^3 + 3,3s + 2}$$

$$h = \mu + p$$

$$\mu = h - p = 1 - 1 = 0$$

$$= \frac{25}{s(s^2 + 3,3s + 2)}$$

$p = 1$

$$\left| \frac{K_d^2 R_0}{K_p K_c G_a} \right| \leq 1,5 \cdot 10^{-1}$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} s^p G_p(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{25}{s(s^2 + 3,3s + 2)} =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{25}{s^2 + 3,3s + 2} = 12,5$$

$$|K_d^2 R_0| \leq 1,5 \cdot 10^{-1} |K_p K_c G_a|$$

$$|K_c| \geq \left| \frac{K_d^2 R_0}{K_p G_a} \right| \cdot \frac{1}{1,5 \cdot 10^{-1}} = 5,614 \quad \text{per } \mu = 0$$

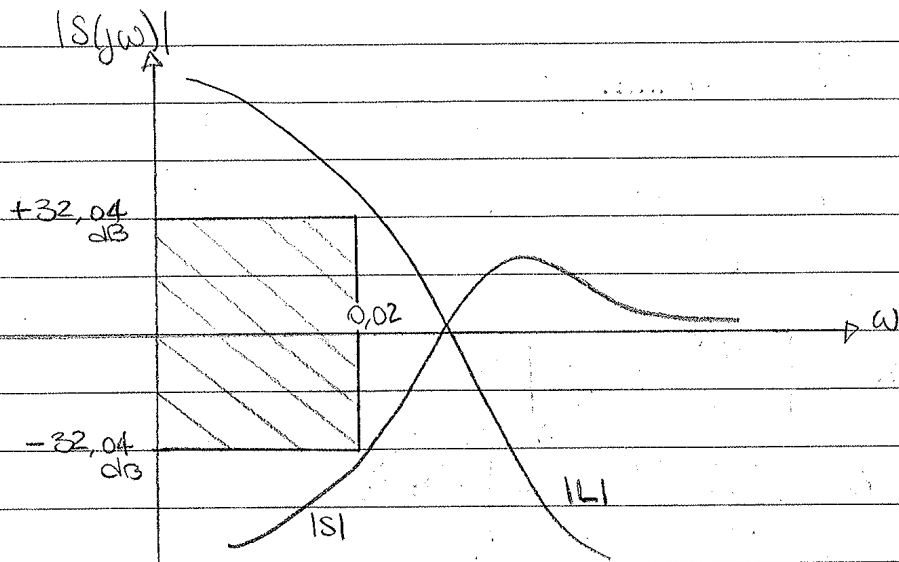
Errore plisuonale  $|e_{da}^{st}| \leq 1,5 \cdot 10^{-2}$

$$\left| \frac{R_0}{s \rightarrow -24} \right|$$

$$e_{da}^{st} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G_p}{1+L} d_a(s) =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{G_p}{1+L} \frac{D_{ao}}{s} =$$

il disturbo è generato da una costante



$$\omega_c^L = \omega_p \cdot 10^{-\left(\frac{M_S^{LF} |ds|}{40}\right)}$$

$$= 0,123 \text{ rad/s}$$

$$\omega_c \geq 2 \omega_c^L = 0,25 \text{ rad/s}$$

Errore stazionario  $|e_{ds}^\infty| \leq 5 \cdot 10^{-4}$

$$|a_{ol}| \leq 10^{-1}$$

$$\omega_s \geq 40 \text{ rad/s}$$

$$|e_{ds}^\infty| = |a_{ol}| \left| \frac{p}{ds \rightarrow y} \right| \left| \frac{1}{n_y(\omega_s + \omega_p)} \right|$$

$$= |a_{ol}| \left| \frac{G_f G_c G_a G_p}{1+L} \right|$$

$$\text{ma } G_f G_c G_a G_p = \frac{L}{G_s}$$

$$|e_{ds}^\infty| = |a_{ol}| \left| \frac{L}{1+L} \right| \frac{1}{G_s} \quad G_s = 1$$

$$|e_{ds}^\infty| = |a_{ol}| |T(j\omega_s)|$$

$$|T(j\omega)| = \frac{|e_{ds}^\infty|}{|a_{ol}|} = 0,005$$

$$= -46,02 \text{ dB} = M_T^{MF}$$

$$S_p = \frac{2\xi\sqrt{2+4\xi^2+2\sqrt{1+8\xi^2}}}{\sqrt{1+8\xi^2+4\xi^2}-1}$$

$$= 1,36$$

Dal tempo di salita

$$t_r = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} (\pi - \arccos(\xi))$$

$$\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t_r = (\pi - \arccos(\xi))$$

$$\omega_n = \frac{\pi - \arccos(\xi)}{t_r \sqrt{1-\xi^2}} = 0,91 \text{ rad/s}$$

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{1+4\xi^2 - 2\xi^2} = 0,66 \text{ rad/s}$$

Dal tempo di assestamento

$$t_{s,5} = \frac{1}{\omega_n \xi} \ln\left(\frac{100}{\alpha}\right)$$

$$\omega_n \xi t_{s,5} = \ln\left(\frac{100}{\alpha}\right)$$

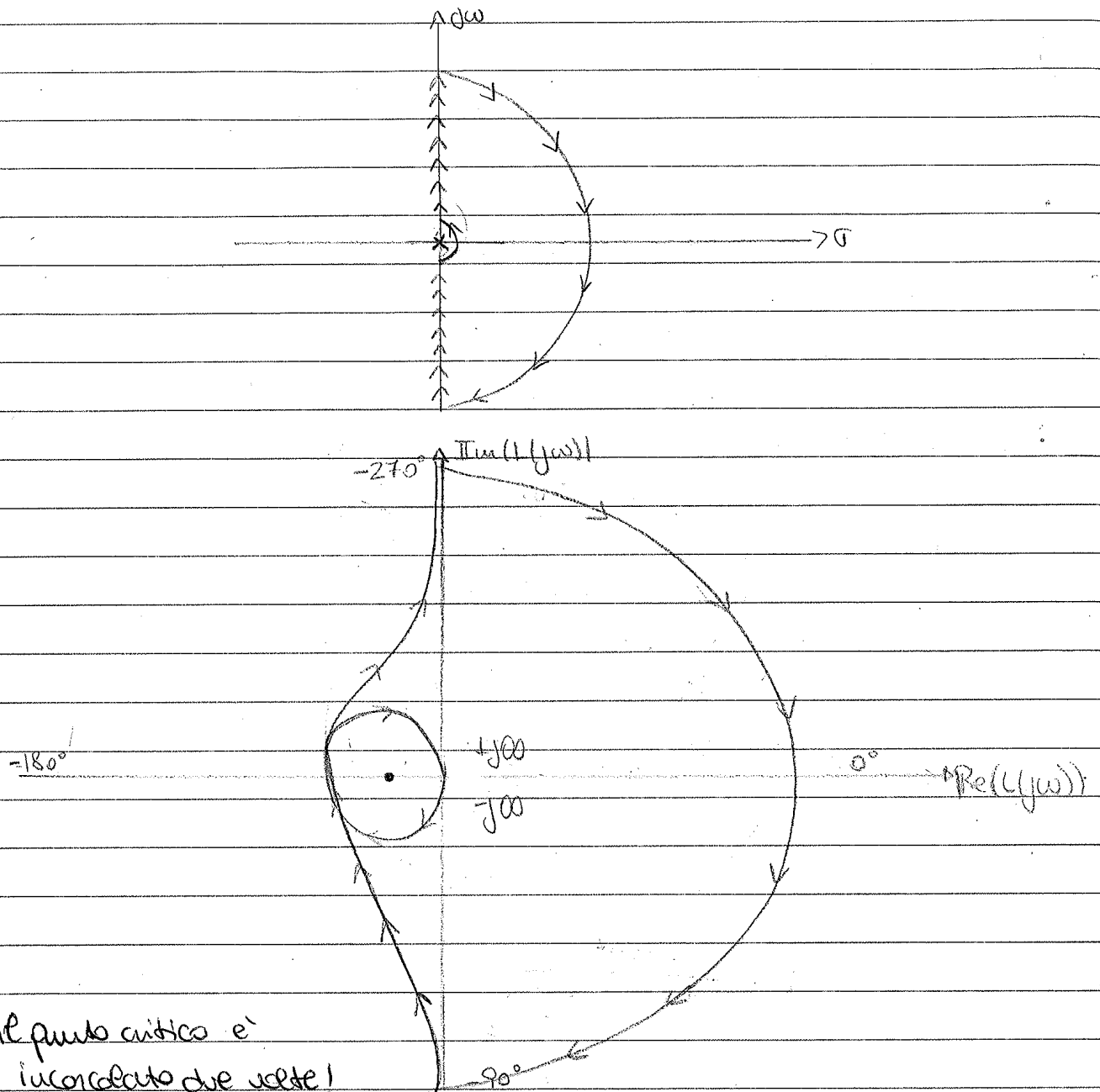
$$\omega_n = \frac{\ln 100/\alpha}{\xi t_{s,5}} = 0,42$$

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{1+4\xi^2 - 2\xi^2} = 0,31 \text{ rad/s}$$

Quindi ho

$\xi \geq 0,59$	}	$\omega_c \geq 0,66 \text{ rad/s}$	penta include
$t_r \leq 3 \text{ s}$			
$\xi \geq 0,59$	}	$\omega_c \geq 0,31 \text{ rad/s}$	↙
$t_s \leq 12 \text{ s}$			
$d_p$		$\omega_c \geq 0,25 \text{ rad/s}$	↙
$d_o$		$\omega_c \leq 1,41 \text{ rad/s}$	limite superiore





Il punto critico è  
incontrato due volte!

È stabilizzabile →  $K_c$  positivo va bene!

Con la funzione ad quello definita, controllo se diagramma  
di Nichols dove è ucciso.

Ucciso e dentro ai cerchi una dalla parte sbagliata

$$|L| = 12 \text{ dB}$$

$$L = -163^\circ$$

## Soddisfaccimento dei requisiti

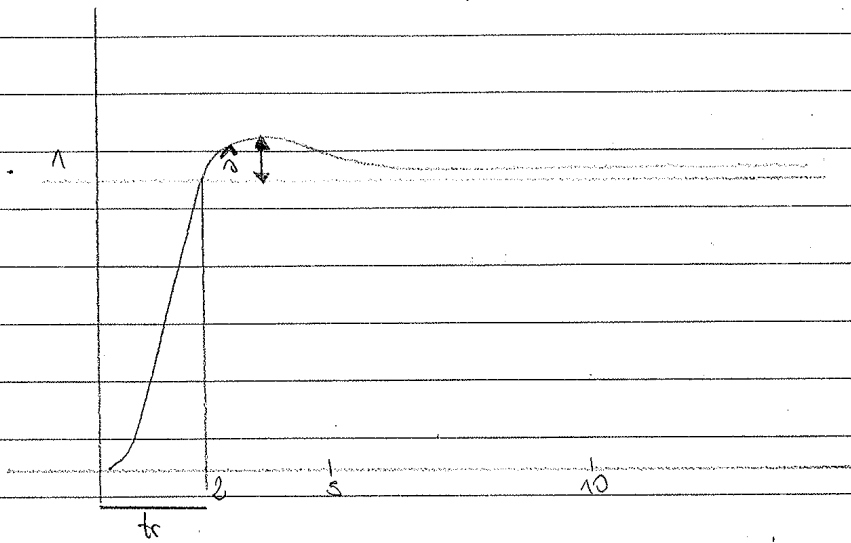


Grafico di

$$T = L/(1+L)$$

La sovallungatura è

$$\hat{\delta} = \frac{1,07 \cdot 1}{1} = 1,07 = 7\%$$

Soddisfa la specifica!

Il tempo di salita è il tempo impiegato per raggiungere la prima volta il valore desiderato. Qui è

$$t_r = 2 \text{ s}$$

e anche questa specifica è soddisfatta

Il tempo di assestamento è il tempo in cui si assesta in un intorno ragionevolmente piccolo della risposta.

Se ho  $t_s, 5\%$  cioè considerare se il segnale entra nella fascia

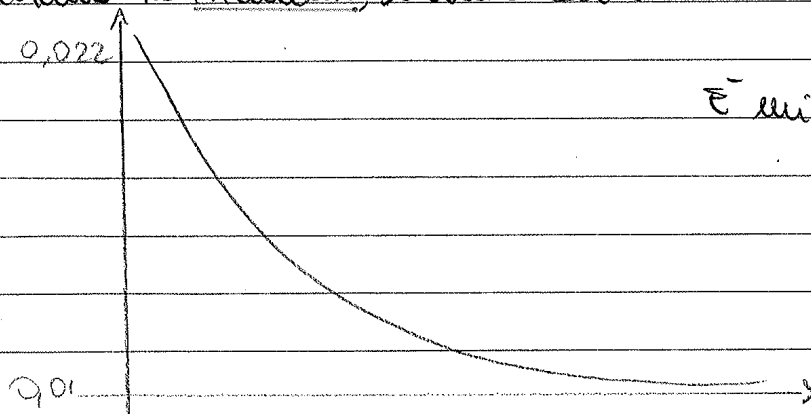
$$(1 - 0,05) \text{ e } (1 + 0,05)$$

$$[0,95; 1,05]$$

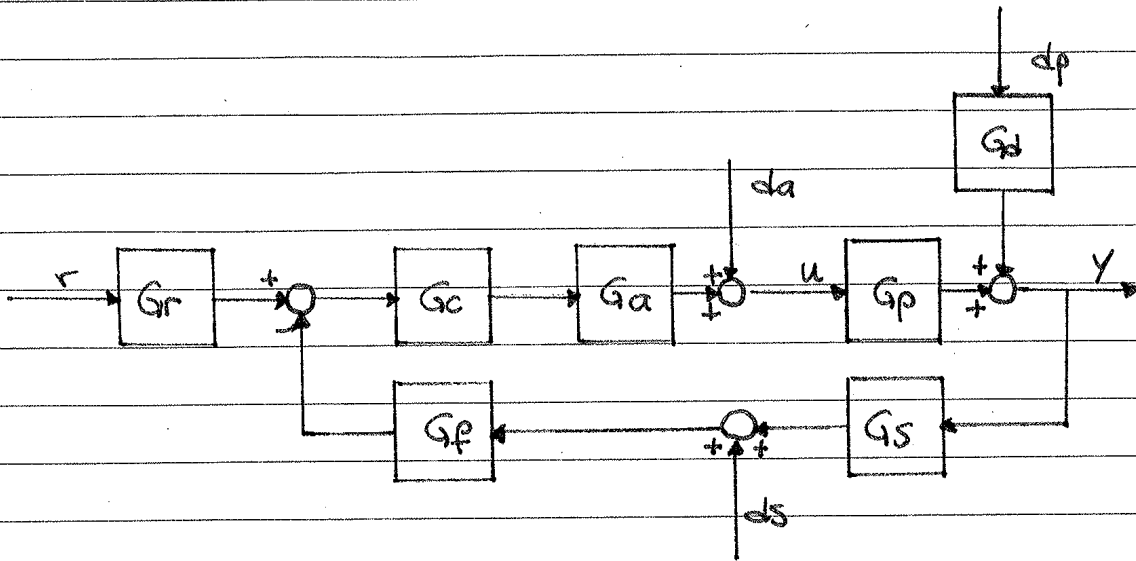
In questo caso, il segnale entra in questa fascia senza più oscillare prima dei 12 s, soddisfacendo la specifica.

## Soddisfaccimento dei requisiti

Dallo schema a sinistra, l'errore da è



$$\bar{\epsilon} \text{ minimo } = 1,5 \cdot 10^{-2}$$



Errore al riferimento  $|e_r^{(0)}| < 3,5 \cdot 10^{-1}$  ( $R_0 = 1$ )

$$G_p = \frac{40}{s^2 + 3s + 4,5}$$

$$h = \mu + p$$

$$l = \mu + 0$$

non ha poli in zero  
una c!

$$\mu = +1$$

$$\mu > 1$$

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = -1,5 + 1,5i \\ p_2 = -1,5 - 1,5i \end{array} \right\}$$

$$\left| \frac{k_d^2 R_0}{K_p K_c G_a} \right| < 3,5 \cdot 10^{-1}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^l G_p = K_p = \lim_{s \rightarrow 0} s^l G_p(s) =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} G_p(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{40}{s^2 + 3s + 4,5} =$$

$$K_p = 8,89$$

$$|k_d^2 R_0| < 3,5 \cdot 10^{-1} / K_p K_c G_a$$

$$|K_c| > \frac{|k_d^2 R_0| \cdot 3,5 \cdot 10^{-1}}{|K_p G_a| \cdot 3,5 \cdot 10^{-1}}$$

$$|K_c| > 3,57$$

con  $\mu > 1$

Errore sinusoidale  $|e_{ds}^{\infty}| \leq 2 \cdot 10^{-4}$

$$ds(t) = q \sin(\omega t)$$

$$|a_{ds}| \leq 10^{-2}$$

$$\omega_0 \geq 50 \text{ rad/s}$$

$$|e_{ds}^{\infty}| = |a_{ds}| \left| \frac{f_{ds}}{s^2 \rightarrow y} \right| \frac{1}{n_{ds}(\omega s^2 + q)}$$

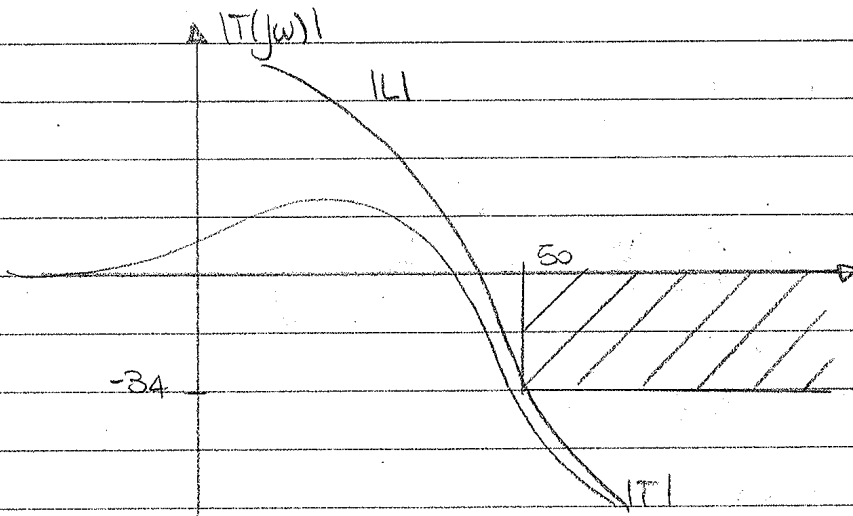
$$= |a_{ds}| \left| \frac{G_p G_c G_a G_p}{1+L} \right|$$

$$= |a_{ds}| \left| \frac{L}{1+L} \right| \frac{1}{G_0}$$

$$|e_{ds}^{\infty}| = |a_{ds}| |T(j\omega)| \frac{1}{G_0}$$

$$|T(j\omega)| = \frac{|e_{ds}^{\infty}|}{|a_{ds}|} = 0,05$$

$$= -33,98 \text{ dB} = \gamma_T^{\text{HF}}$$



$$\omega_c^H = \omega_0 - \frac{\gamma_T^{\text{HF}} / \text{dB}}{40}$$

$$\leq 7,1 \text{ rad/s}$$

$$\omega_0 \leq \frac{\omega_c^H}{2} \leq 3,5 \text{ rad/s}$$

Quindi:

$$d_s \rightarrow \omega_c \leq 3,5 \text{ rad/s}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = 0,626 \\ \tau_r \end{array} \right. \rightarrow \omega_c > 0,804 \text{ rad/s}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = 0,626 \\ \tau_s \end{array} \right. \rightarrow \omega_c > 0,33 \text{ rad/s}$$

L'intervallo ideale è  $\omega_c \in [0,804; 3,5]$ ; prendo come  $\omega_c$  da  $\omega_{c\text{des}} \approx 2,5 \text{ rad/s}$

e imposto il guadagno iniziale come

$$G_c = \frac{K_c}{\beta^m}$$

con  $K_c \geq 3,75$       $\mu = 1$

Suppongo  $K_c$  positivo,  $G_c = \frac{K_c}{\beta}$      ( $K_c = 3,8$ )

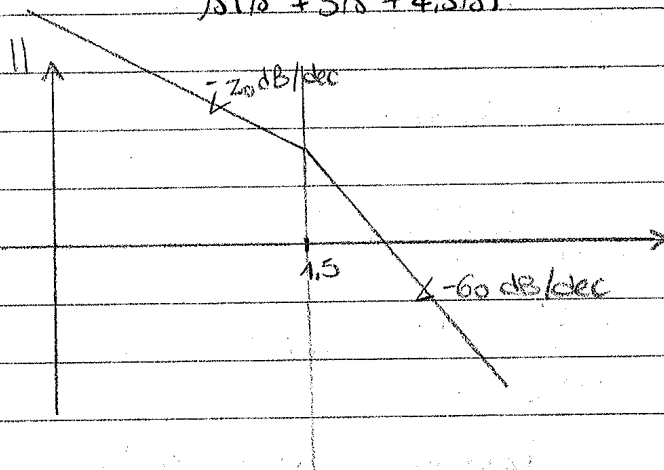
Definita

$$L = G_a * G_f * G_s * G_c * G_p$$

devo valutare il segno di  $K_c$

$$L = \frac{-13,68}{s^3 + 3s^2 + 4,5s} \quad \text{poli } 0, -1,5 + 1,5i, -1,5 - 1,5i$$

$$= \frac{-13,68}{s(s^2 + 3s + 4,5)}$$



la risposta è quella illustrata e  
la

$\omega_c$  si trova a

$$4,27 \text{ dB}$$

$$-142^\circ$$

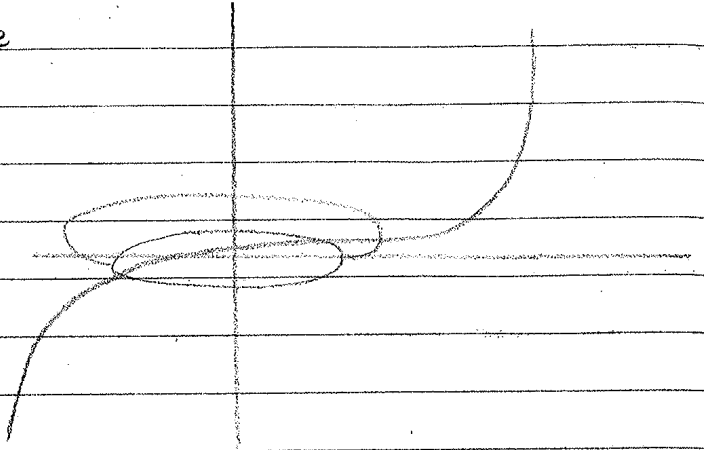
Uso una rete derivativa

$$R_d = \frac{1 + s/z_d}{1 + s/\omega_d z_p}$$

$$z_d = \frac{\omega_c}{\omega_n} = \frac{1,24}{1,45}$$

$$\omega_d = 16$$

$$p_d = \omega_d \times z_d$$



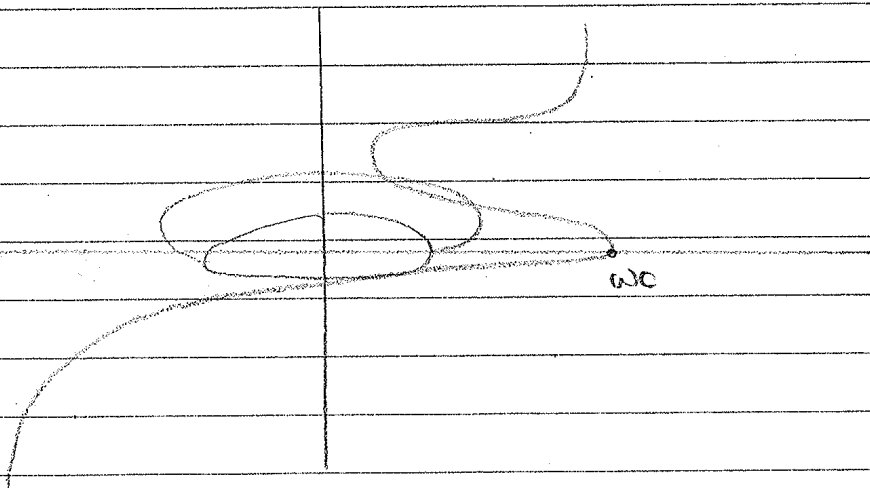
e una integrativa

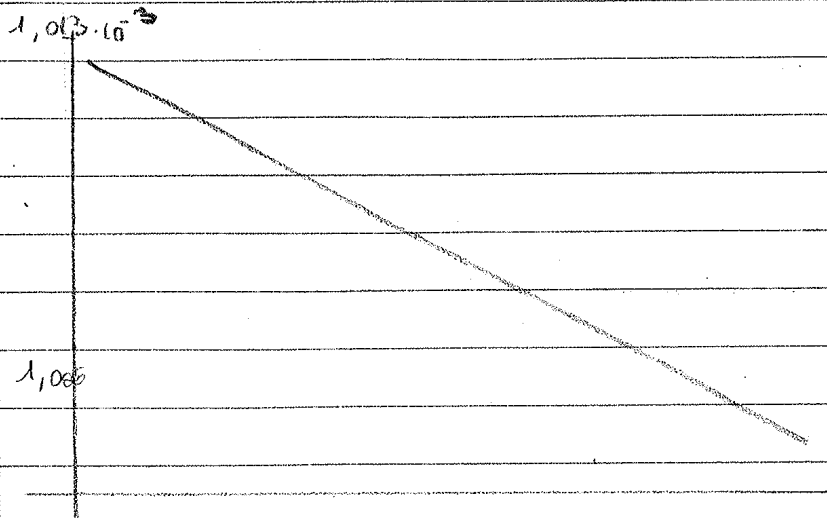
$$R_i = \frac{1 + s/\omega_i p_i}{1 + s/p_i}$$

$$\omega_i = 4$$

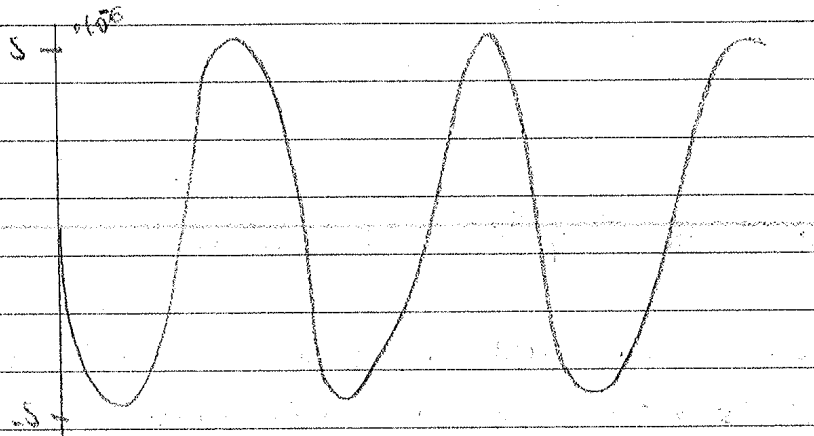
$$p_i = \frac{1,24}{100}$$

$$z_i = \omega_i \times p_i$$

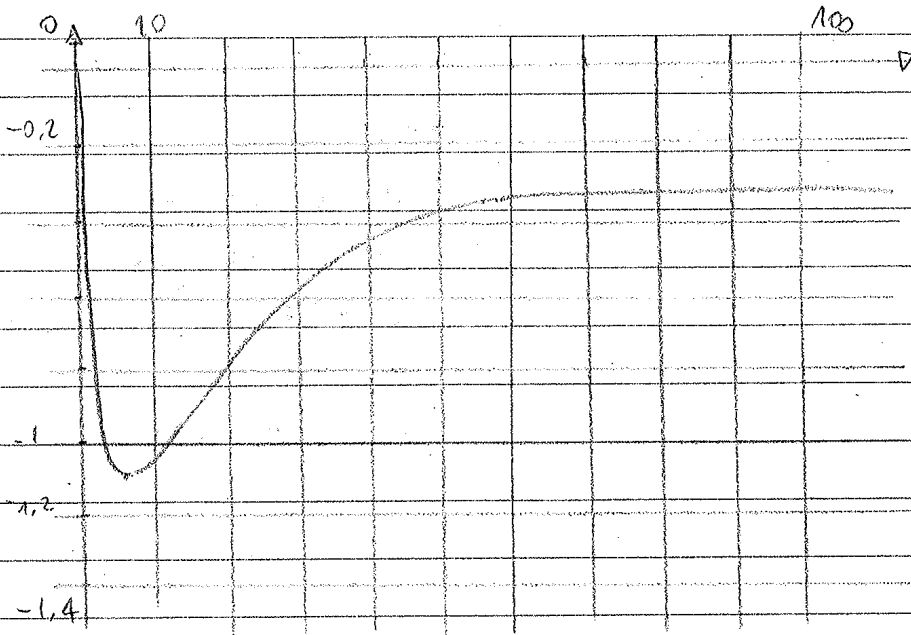




Errore di  
il regale e'  
reupre  
Non e' antinfatto  
P'punto



Errore di  
l'intervallo della  
sinusoide e' intus  
a quello dell'ore



Errore al riferimento  
presto errore a  
assista a 0,3385  
dopo un transitorio  
Con picco di 1,1055  
Soddisfatto

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_p s^{\mu}}{s^{p+\mu} + G_a G_p G_s K_c K_p} D_{ao} =$$

Affinché sia un valore finito, devo avere

$$s^{\mu} = \text{costante}$$

$$s^{\mu} = 1$$

$$\mu \geq 0$$

Offro quindi

$$e_{da}^{\infty} = \frac{K_p D_{ao}}{1 + G_a G_p G_s K_c K_p}$$

$$(1 + K_c K_p G_a G_p G_s) e_{da}^{\infty} = K_p D_{ao}$$

$$e_{da}^{\infty} + e_{da}^{\infty} (K_c K_p G_a G_p G_s) = K_p D_{ao}$$

$$e_{da}^{\infty} (K_c K_p G_a G_p G_s) = K_p D_{ao} - e_{da}^{\infty}$$

$$|K_c| = \frac{K_p D_{ao} - e_{da}^{\infty}}{G_a G_p G_s K_p}$$

$$|K_c| \geq 0,0927$$

Per  $\mu \geq 1$  non ho più vincolo su  $K_c$  per parte specifica

Errore residuale  $|e_{dp}^{\infty}| \leq 2 \cdot 10^{-3}$

$$d_p(t) = a_p \sin(\omega_p t)$$

$$|a_p| \leq 16 \cdot 10^{-2}$$

$$\omega_p \leq 0,03 \text{ rad/s}$$

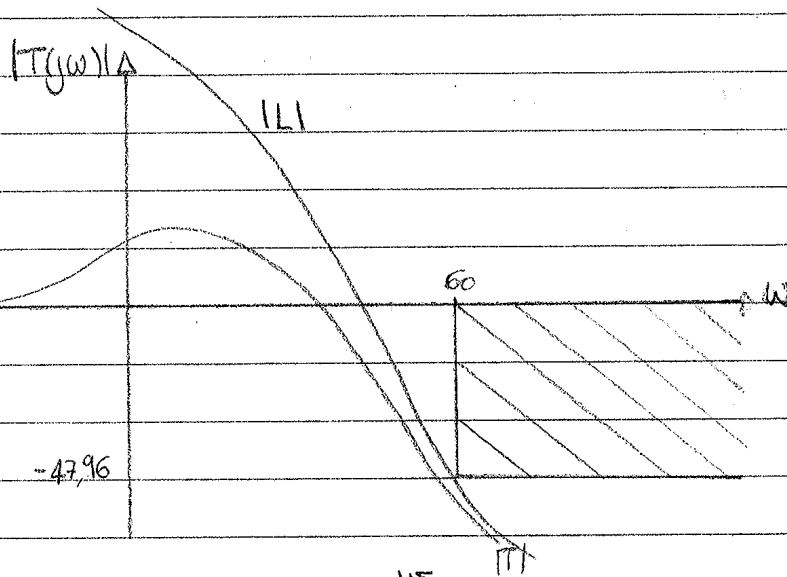
$$|e_{dp}^{\infty}| = |a_p| \left| \frac{f_d t}{d_p \rightarrow y} \right| \sin(\omega_p t + \varphi)$$

non mi interessa ai

fini del modulo

$$|e_{dp}^{\infty}| = |a_p| \left| \frac{G_d(s)}{1+L} \right| = |a_p| \left| \frac{1}{1+L} \right| = |a_p| |S(j\omega_p)|$$





$$\omega_c^H = \omega_n \cdot 10^{\frac{Y_{HF}}{T}} / 40$$

$$= 3,79 \text{ rad/s}$$

$$\omega_c \leq \omega_c^H / 2$$

$$\omega_c \leq 1,89 \text{ rad/s}$$

Specifiche al transmittore

Dalla sovraelevazione ricavo  $\xi$ :

$$\hat{\delta} = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$\ln 0,12 = -\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\sqrt{1-\xi^2} \ln 0,12 = -\pi \xi$$

$$(1-\xi^2)(\ln 0,12)^2 = \pi^2 \xi^2$$

$$-\xi^2 (\ln 0,12)^2 - \pi^2 \xi^2 = -(\ln 0,12)^2$$

$$\xi [(\ln 0,12)^2 + \pi^2] = (\ln 0,12)^2$$

$$\xi = \frac{(\ln 0,12)^2}{(\ln 0,12)^2 + \pi^2} = 0,56$$

Del tempo di salita ricavo una linea guida per  $\omega_c$ :

$$t_r = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} (\pi - \arccos(\xi)) = 2,1$$

La funzione ad anello è

$$L = G_c(s) \cdot G_a \cdot G_p(s) \cdot G_s \cdot G_f$$

dove

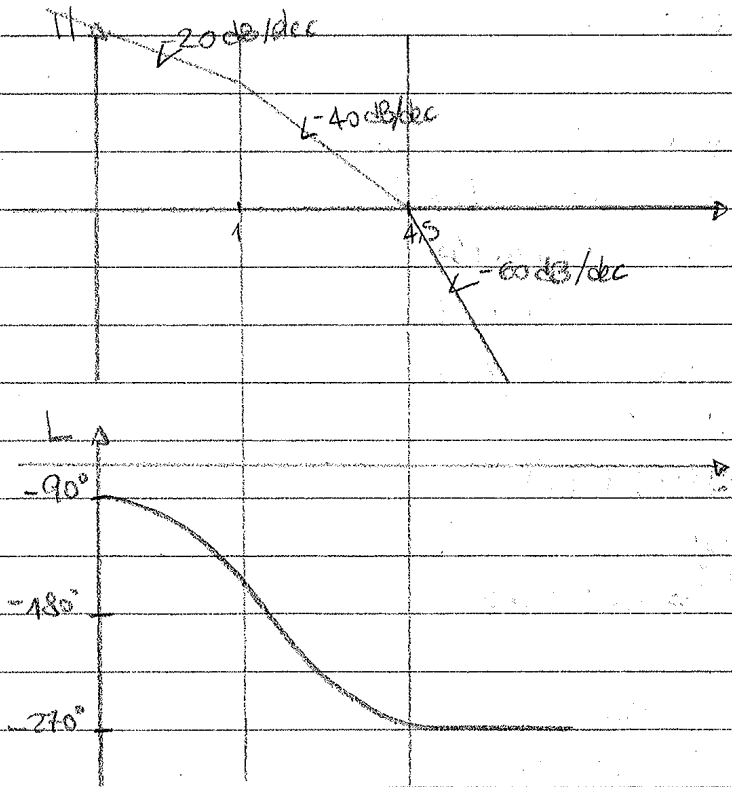
$$G_c = \frac{22}{s}$$

inciso a rapporto il segno di  $K_c$  positivo.

Per controllare il sistema dopo calcolare prima tutte le informazioni di Nyquist incrocia il punto critico, al fine di capire se il sistema è stabile o stabilizzabile.

$$L = \frac{30,8}{s^3 + 5,5s^2 + 4,5s} = \frac{30,8}{s(s+4,5)(s+1)} = \frac{30,8/4,5}{s \cdot (1 + \frac{s}{4,5})(1+s)} = \frac{6,84}{s(1+s/4,5)(1+s)}$$

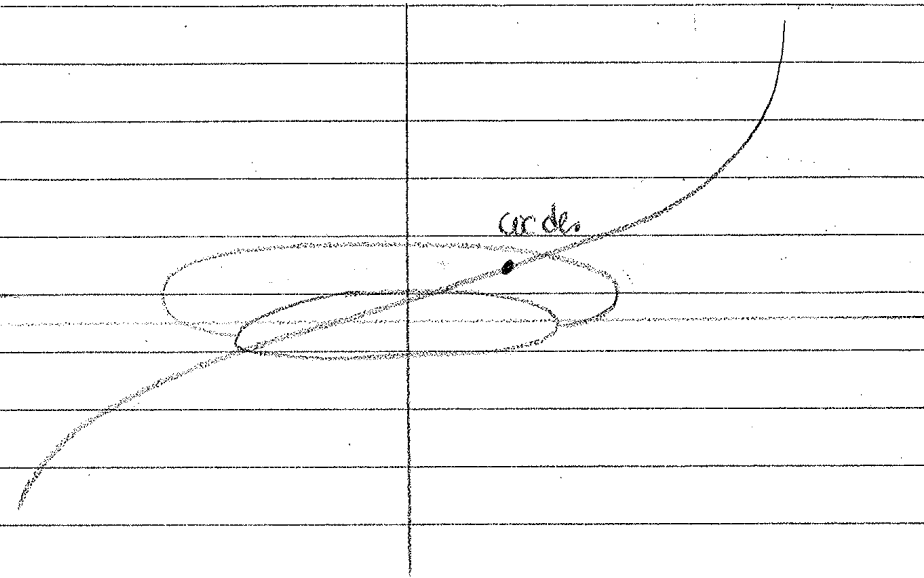
poli: 0; -4,5; -1,0



parte da (1)  $(-90^\circ) - 0 = -90^\circ$

alla (3)  $(-90^\circ) - 0 = -270^\circ$

Se diagramma di Nichols vedo che



L'omega si trova dentro ai cerchi. A omega ho i seguenti valori

$$H \rightarrow 13,2 \text{ dB}$$

$$L \rightarrow -149 \text{ gradi}$$

Rete derivativa con  $\omega_n = 1,8$   $\omega_i = 16$

$$z_d = 0,58$$

$$p_d = 9,24$$

$$R_d = \frac{1 + s/z_d}{1 + s/\omega_i}$$

Rete integrativa

$$\omega_n = 100 \quad \omega_i = 10$$

$$p_i = 0,0104$$

$$z_i = 0,104$$

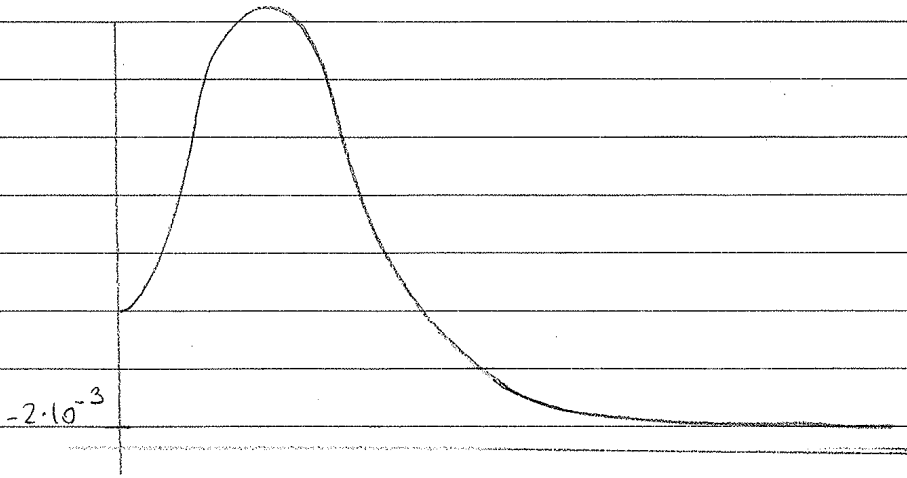
$$R_i = \frac{1 + s/z_i}{1 + s/p_i}$$

le controllare diverse

$$G_c = \frac{K_c}{s} \cdot R_i \cdot R_d$$

portando  $\omega_c$  a 0 dB.

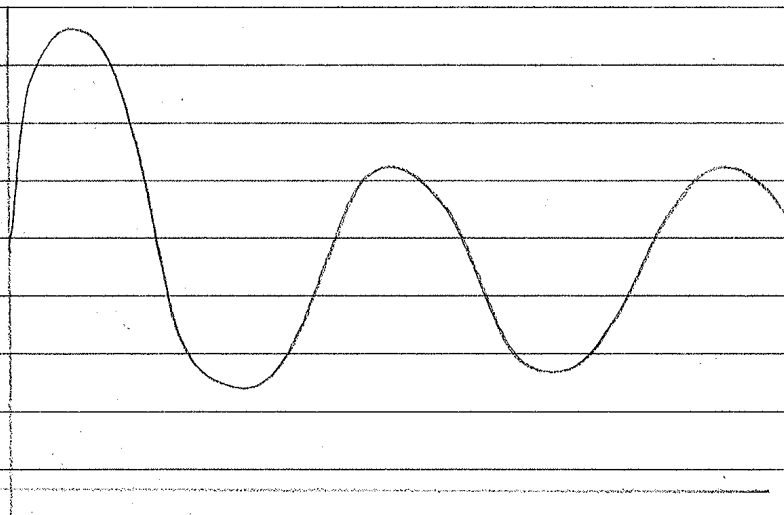
Soddisfacimento dei requisiti



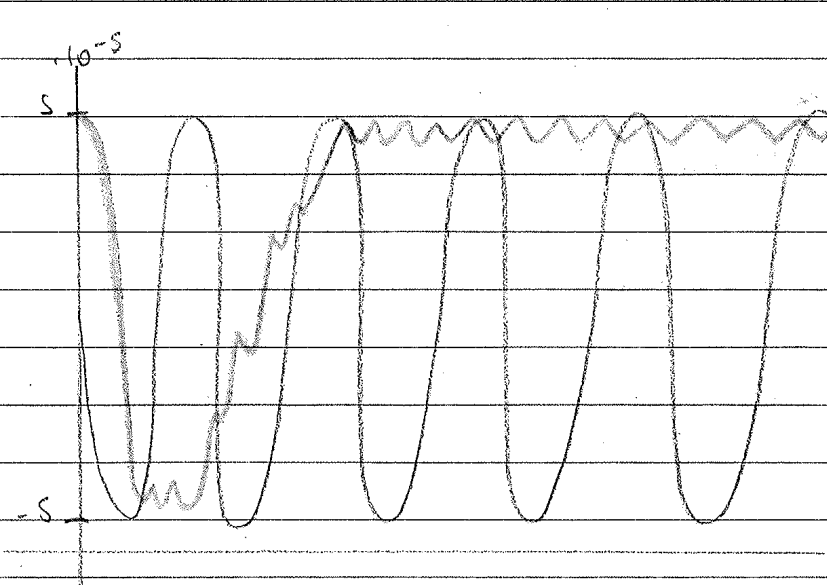
Errore da:  
 dallo schema  
 simulink stesso  
 il grafico a lato

Dato che in questo  
 due errori  $\leq 4,5 \cdot 10^{-3}$

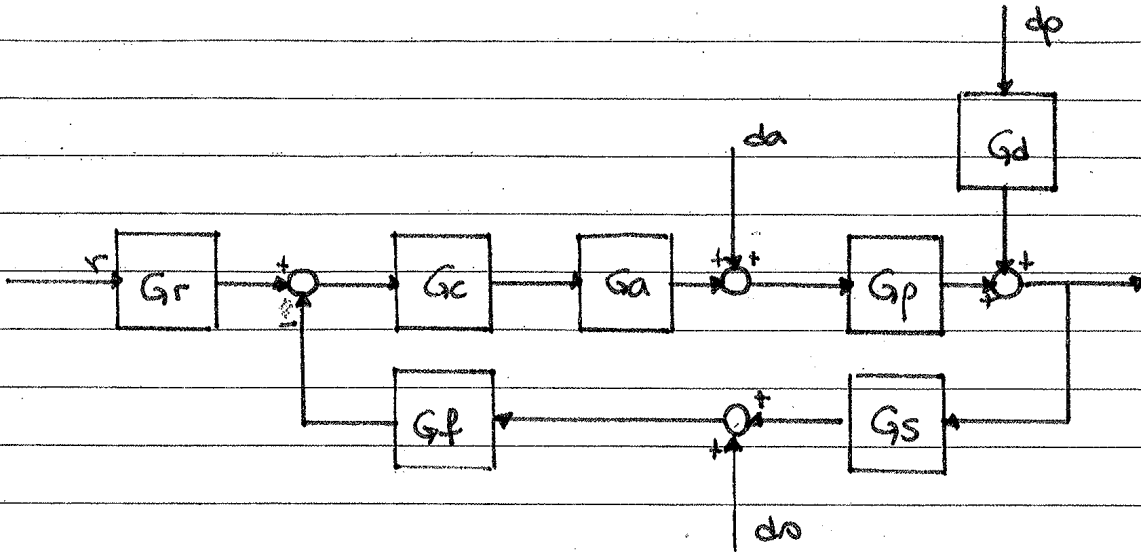
il requisito è soddisfatto!



Errore da:  
 dallo schema  
 simulink stesso  
 il grafico.  
 c'è leggermente rumore  
 a livello



Errore da  
 la misura di  
 compresa tra  
 $5 \cdot 10^{-5}$   
 più piccolo di  
 $8 \cdot 10^{-4}$   
 Satisfatta



Errore al riferimento  $|e_r^{ss}| \leq 2,5 \cdot 10^{-1}$  ( $R_0=1$ )

$$K_d = \frac{G_r}{G_s G_f}$$

$$G_p = \frac{G_r}{G_s K_d}$$

$$G_f = 1$$

$$G_p = \frac{-30}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

$$= \frac{-30}{s(s^2 + 3s + 2)}$$

$$= \frac{-30}{s(s+2)(s+1)}$$

$$= \frac{-15}{s(1+\frac{s}{2})(s+1)}$$

$$p=1$$

$$\left| \frac{K_d^2 R_0}{K_c K_p G_a} \right| \leq 2,5 \cdot 10^{-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} h = \mu + p \\ h = 1 \\ p = 1 \end{array} \right\} \mu \geq 0$$

$$|K_c| \geq \frac{|K_d^2 R_0|}{|K_p G_a| 2,5 \cdot 10^{-1}}$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} s^p G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{-15}{s(1+\frac{s}{2})(s+1)}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-30}{s^2 + 3s + 2} = -15$$

$$|K_c| \geq 44,4 \quad \text{per } \mu \geq 0$$

Assume un valore finito se

$$\mu + p - 1 = 0$$

$$\mu + 1 - 1 = 0$$

$$\mu \geq 0$$

$$|e_{dp}| = \frac{D_{po}}{G_a G_p G_s K_c K_p}$$

$$\left( |e_{dp}| + |e_{dp}| G_a G_p G_s K_c K_p = D_{po} \right) \quad K_c = \left| \frac{D_{po}}{G_a G_p G_s K_p e_{dp}} \right|$$

$$K_c = \frac{D_{po} - |e_{dp}|}{G_a G_p G_s K_p}$$

$$|K_c| \geq 62,963 \quad \text{per } \mu \geq 0$$

Quindi conclude che

$$|K_c| \geq 44,4 \quad \mu \geq 0$$

$$|K_c| \geq 41,67 \quad \mu \geq 0$$

$$|K_c| \geq 62,963 \quad \mu \geq 0$$

quindi con  $\mu \geq 0$ ,  $|K_c| \geq 62,963$

Specifiche al trasmettitore

Dalla caratterizzazione, tempo

$$\hat{A} = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$\ln 0,15 = \frac{-\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\sqrt{1-\xi^2} (\ln 0,15) = -\pi \xi$$

$$(1-\xi^2) (\ln 0,15)^2 = \pi^2 \xi^2$$

$$-\xi^2 (\ln 0,15)^2 - \pi^2 \xi^2 = -(\ln 0,15)^2$$

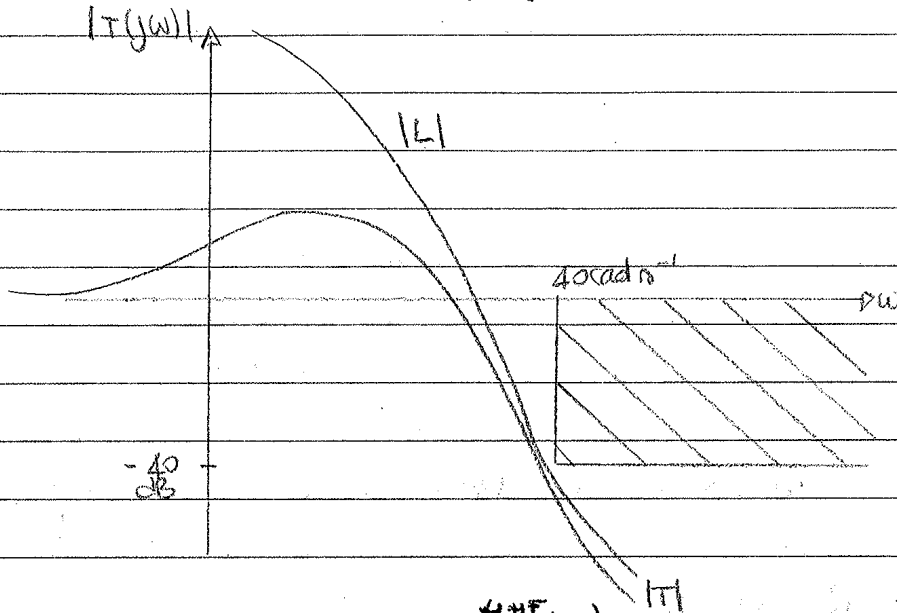
$$\xi^2 [(\ln 0,15)^2 + \pi^2] = (\ln 0,15)^2$$

$$\xi = \frac{(\ln 0,15)^2}{\sqrt{(\ln 0,15)^2 + \pi^2}}$$

$$\xi = 0,517$$

$$|eds| = |as| |T(j\omega_s)| \frac{1}{G_s}$$

$$|T(j\omega_s)| = \frac{|eds| \cdot G_s}{|as|} = 0,01 = -40dB = \gamma_T^{HF}$$



$$\omega_c^H = \omega_s \cdot 10^{(\gamma_T^{HF}/40)}$$

$$= 4 \text{ rad/s}$$

$$\omega_c \leq \frac{\omega_c^H}{2} = 2 \text{ rad/s}$$

quindi...

$$t_r \rightarrow \omega_c \geq 0,546 \text{ rad/s}$$

$$t_s \rightarrow \omega_c \geq 0,32 \text{ rad/s}$$

$$d_s \rightarrow \omega_c \leq 2 \text{ rad/s}$$

$$\omega_c \in [0,546; 2]$$

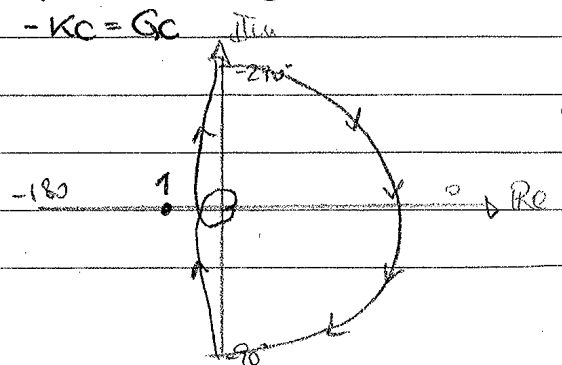
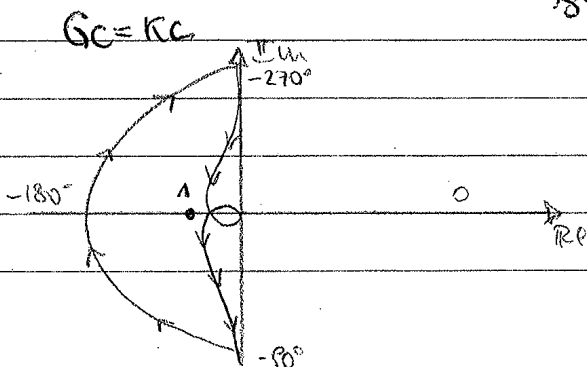
Scelgo  $\omega_{c\text{des}} \approx 1,4 \text{ rad/s}^{-1}$

Il controllore iniziale è:

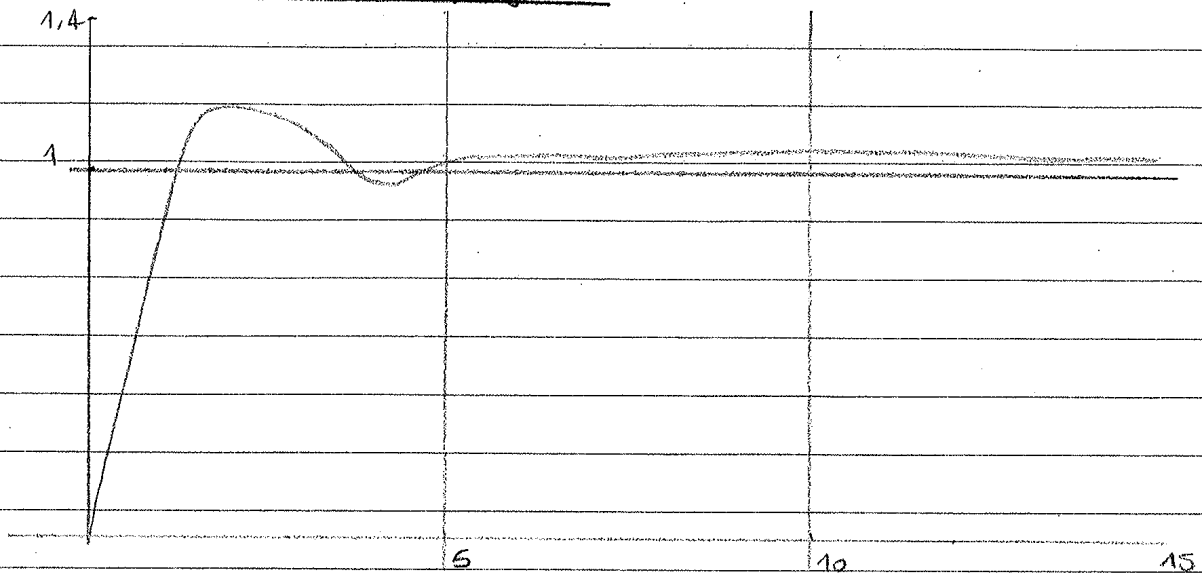
$$G_c = \frac{K_c}{s^H} = K_c$$

positivo o negativo?

$$-K_c = G_c$$



## Soddisfacciamento delle specifiche



La sovraelevazione massima è

$$\hat{\Delta} = \frac{1,08 - 1}{1} = 8\% \rightarrow \text{soddisfa la specifica!}$$

Il tempo di salita è  $t_r = 1,36 \text{ s} \rightarrow \text{soddisfa la specifica!}$

Il tempo d'assottamento è  $t_{s,5\%} = 2,5 \text{ s} \rightarrow \text{soddisfa benissimo la specifica!}$

## Soddisfacciamento dei requisiti



Errore polinomiale  $|e_{da}^{\infty}| \leq 1,6 \cdot 10^{-3}$   
 $d_a = D_{ao} t$   $|D_{ao}| \leq 1,5 \cdot 10^{-3}$

$$e_{da}^{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{G_p}{1+L} \frac{D_{ao}}{s^2} =$$

$$\mu \geq 1$$

$$\frac{K_p D_{ao}}{\beta + K_c K_p G_a G_p G_s} = |e_{da}^{\infty}|$$

$$\beta = 0 \text{ perche } \mu + \rho = 1 (> 0)$$

$$|K_c| \geq \frac{D_{ao}}{|e_{da}^{\infty}| K_p G_a G_p G_s} = 37,5 \text{ per } \mu \geq 1$$

Errore polinomiale  $|e_{dp}^{\infty}| \leq 1,0 \cdot 10^{-2}$   
 $d_p = D_{po} t$   $|D_{po}| \leq 8,0 \cdot 10^{-3}$

$$\mu \geq 1 \quad |e_{dp}^{\infty}| = \frac{D_{po} K_p}{K_p G_a G_p G_s}$$

$$|K_c| \geq \frac{D_{po}}{|e_{dp}^{\infty}| G_a G_p G_s} = 32$$

Errore sinusoidale  $|e_{ds}^{\infty}| \leq 0,2 \cdot 10^{-4}$

$$d_s(t) = a \sin(\omega_s t)$$

$$|a_s| \leq 10^{-3}$$

$$\omega_s \geq 20 \text{ rad s}^{-1}$$

$$|e_{ds}^{\infty}| = |a_s| \left| \frac{G_p G_a G_c G_p}{1+L} \right| \sin(\omega_s t + \varphi)$$

$$|e_{ds}^{\infty}| = |a_s| \left| \frac{L}{1+L} \right| \frac{1}{G_s}$$

$$|1| \quad |1| = \frac{|e_{ds}^{\infty}| G_s}{|a_s|} = M_T^{HF} = 0,01 = -40 \text{ dB}$$

Da  $t_r$  ricavare una specifica per  $\omega_c$

$$t_r = \frac{1}{\omega_u \sqrt{1-\xi^2}} (\pi - \arccos(\xi))$$

$$\omega_u = \frac{1}{t_r \sqrt{1-\xi^2}} (\pi - \arccos(\xi))$$

$$= 1,23 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\omega_c = \omega_u \sqrt{1+4\xi^4 - 2\xi^2} = 0,96 \text{ rad s}^{-1}$$

Da  $t_s$  ricavare un'altra specifica per  $\omega_c$

$$t_s = \frac{1}{\omega_u \xi} \ln\left(\frac{100}{\delta}\right)$$

$$\omega_u = \frac{\ln(100/\delta)}{t_s \xi} = 1,448 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\omega_c = \omega_u \sqrt{1+4\xi^4 - 2\xi^2} = 1,12 \text{ rad s}^{-1}$$

Quindi

$$\mu \geq 1 \quad |K_d| \geq 34,7$$

$$\mu \geq 1 \quad |K_c| \geq 37,5$$

$$\mu \geq 1 \quad |K_c| \geq 32$$

Scelgo  $\mu$  maggiore e il corrispondente  $|K_c|$  maggiore

$$\mu \geq 1 \quad |K_d| \geq 37,5$$

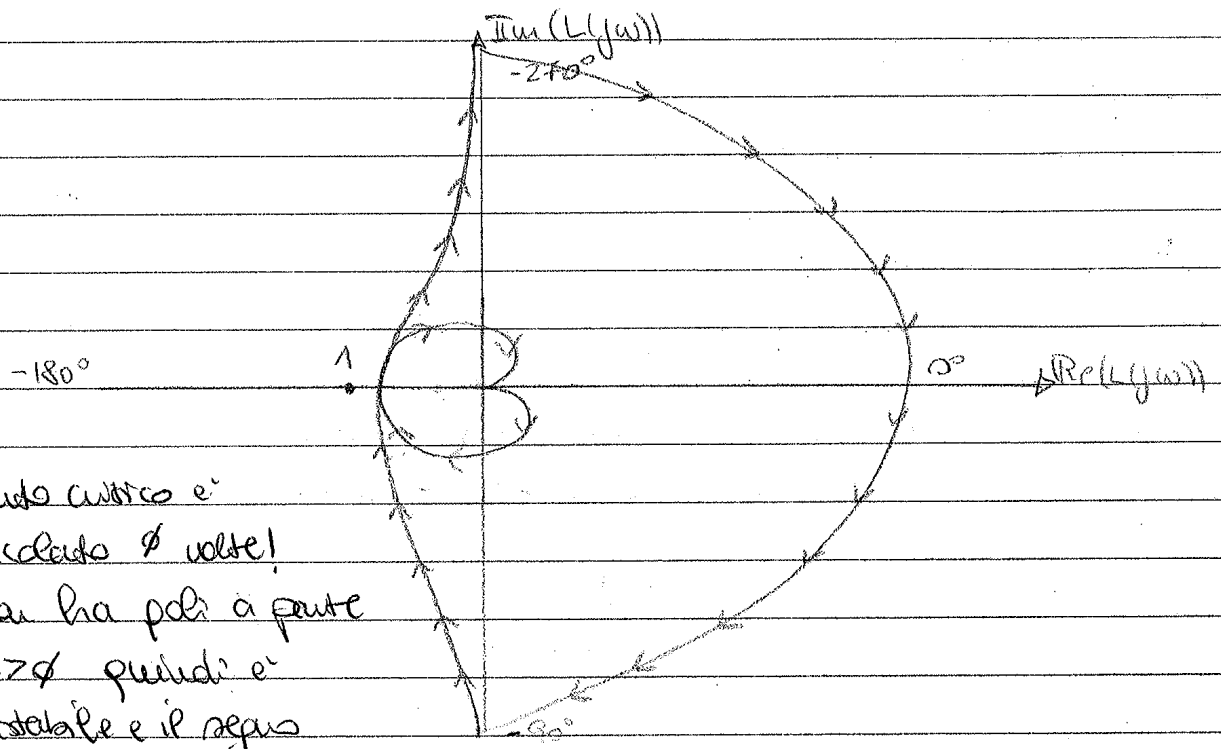
L'intervallo per  $\omega_c$  da cui è

$$d_s \rightarrow \omega_c \leq 100$$

$$t_s \rightarrow \omega_c \geq 0,96$$

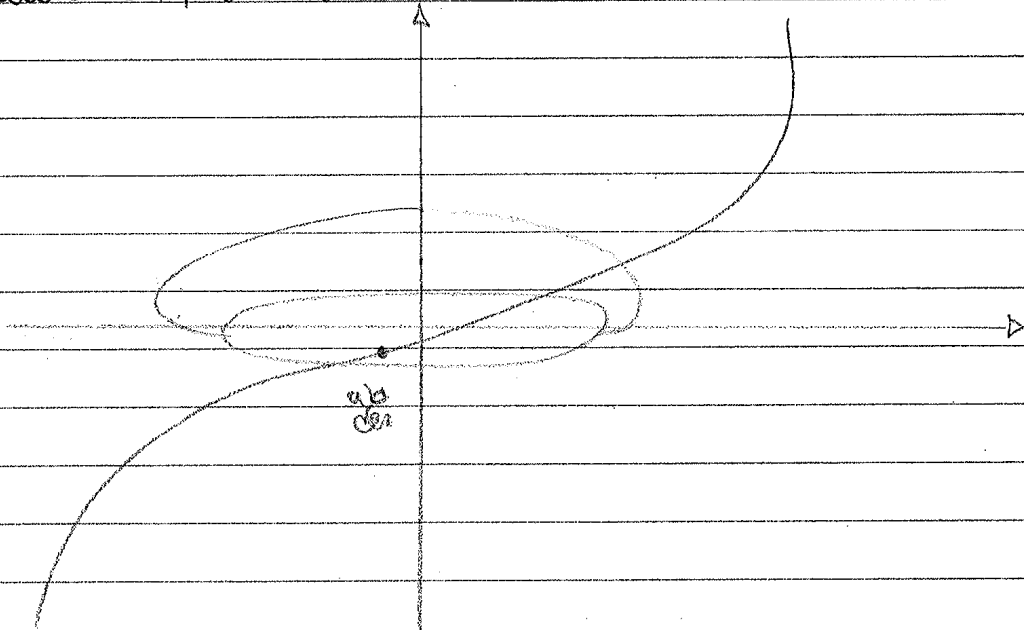
$$t_s \rightarrow \omega_c \geq 1,12$$

$$\omega_c \in [1,12; 100] \text{ rad s}^{-1}$$



Il punto critico è  
 incontrato 2 volte!  
 Gp non ha poli a parte  
 Re > 0 quindi è  
 già stabile e il segno  
 va bene.

Il diagramma di Nichols è



Specifiche al transitorio

Della sovrallempazione, ricavare  $\xi$  per i picci  $T_p$  e  $s_p$

$$\hat{s} = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\ln 0,25 = \frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$(\ln 0,25)(\sqrt{1-\xi^2}) = -\pi\xi$$

$$(\ln 0,25)^2(\sqrt{1-\xi^2}) = \pi^2\xi^2$$

$$(\ln 0,25)^2 - (\ln 0,25)^2\xi^2 = \pi^2\xi^2$$

$$+\xi^2 [(\ln 0,25)^2 + \pi^2] = +(\ln 0,25)^2$$

$$\xi = \sqrt{\frac{(\ln 0,25)^2}{(\ln 0,25)^2 + \pi^2}} = 0,404$$

$$T_p = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$= 1,354$$

$$s_p = \frac{2\xi\sqrt{2+4\xi^2} + 2\sqrt{1+8\xi^2}}{\sqrt{1+8\xi^2} + 4\xi^2 - 1}$$

$$= 1,646$$

Dal tempo di salita  $t_r$  ricavare una specifica per  $\omega_n$  e quindi  $\omega_c$

$$t_r = \frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} (\pi - \arccos(\xi))$$

$$\omega_n = \frac{\pi - \arccos(\xi)}{t_r\sqrt{1-\xi^2}} = 144,74$$

$$\omega_c = \omega_n\sqrt{1+4\xi^4-2\xi^2} = 123,31$$

Per unici vincoli che ho, sono

$$\mu \geq 1 \quad K_c \text{ qualunque}$$

$$\omega_c \geq 123,31 \text{ rad/s}$$

Inizio a progettare il controllore:

$$G_c = \frac{K_c}{s^2} = \frac{K_c}{s}$$

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Biomedica — Politecnico di Torino  
**CONTROLLI AUTOMATICI (19AKSMV)**  
**Esercitazione n. 1**

**Problema 1**

Data la seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -20 & -8 & 10 \\ -16 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

determinarne:

1. la trasposta  $A^T$ , il rango  $\rho(A)$  e l'inversa  $A^{-1}$  verificando che  $A \cdot A^{-1} = I$ ;
2. gli autovalori  $\lambda$  in modo "diretto", utilizzando il comando `eig`, e, successivamente come radici del polinomio caratteristico (comandi `roots` e `poly`) confrontando i risultati;
3. gli autovettori, confrontando il risultato con quello ottenuto analiticamente.

**Problema 2**

Dopo avere verificato che esiste un'unica soluzione, risolvere sia con l'utilizzo del comando "\ " sia con l'inversione della matrice  $A$ , il seguente sistema di equazioni lineari:

$$Ax = b$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 8 \\ -6 & 5 & 1 \\ 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 48 \\ -12 \\ 24 \end{bmatrix}$$

**Problema 3**

Dati i numeri complessi:

$$x = 3 - j5 \quad y = 5 + j4 \quad z = 8 \cdot e^{j(2/3)\pi}$$

calcolare parte reale (comando `real`), parte immaginaria (comando `imag`), modulo (comando `abs`), fase (comando `angle`) e complesso coniugato (comando `conj`) dei seguenti numeri complessi:

$$x^2 \quad xy \quad z * x/y$$

**Problema 4**

Date le seguenti funzioni del tempo:

$$y_1(t) = \cos(2t) + \sin(2t) \quad y_2(t) = t \cos(2t)$$

tracciarne i grafici nell'intervallo temporale  $0 \leq t \leq 10$  s presentandoli:

Corso di Laurea Magistrale in Ing. Biomedica — Politecnico di Torino  
Anno Accademico 2013/2014  
**CONTROLLI AUTOMATICI (19AKSMV)**  
**Esercitazione di laboratorio n. 2**

**Problema**

Con riferimento al modello del sistema respiratorio presentato in Fig. 1, svolgere i seguenti punti:

- 1) Scrivere le relazioni ingresso-stato-uscita.
- 2) Trovare le funzioni di trasferimento:  $Q/P_{ao}$ ,  $V/P_{ao}$ ,  $P_A/P_{ao}$ ,  $P_{aw}/P_{ao}$ .
- 3) Disegnare i diagrammi di Bode del modulo e della fase della risposta in frequenza delle f.d.t. trovate al punto 2.
- 4) Trovare l'ampiezza e la fase di  $Q$ ,  $V$ ,  $P_A$  e  $P_{aw}$  nei seguenti casi:
  - (4.a) il ventilatore genera una pressione  $P_{ao}$  di forma sinusoidale con ampiezza pari a 2.5 cmH<sub>2</sub>O e frequenza pari 15 cicli di respirazione al minuto che coincide, approssimativamente, con la normale frequenza di respirazione a riposo.
  - (4.b) il ventilatore genera una pressione  $P_{ao}$  di forma sinusoidale con ampiezza pari a 2.5 cmH<sub>2</sub>O e frequenza pari 30, 60, 120, 240, 480, 960 cicli di respirazione al minuto.
- 5) Disegnare una rappresentazione a schema a blocchi idoneo alla simulazione tramite Simulink.
- 6) Simulare il comportamento del sistema respiratorio nelle condizioni specificate ai punti (4.a) e (4.b) e verificare i risultati ottenuti al punto 4. Visualizzare l'andamento delle pressioni più significative paragonandole con la pressione di ingresso  $P_{ao}$ . Visualizzare, inoltre, l'andamento temporale del flusso  $Q$  e del volume d'aria  $V$  entranti nel sistema.
- 7) Studiare la stabilità interna.
- 8) Studiare la stabilità esterna delle f.d.t. calcolate al punto 2).

Comandi MATLAB utili per lo svolgimento dell'esercitazione:

- logspace
- bode

### Alcuni risultati

Equazioni di ingresso - stato - uscita:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (7)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{aw}(t) \\ P_A(t) \\ Q(t) \\ V(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{aw}(t) \\ P_A(t) \\ Q(t) \\ V(t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_p C_s} & \frac{1}{R_p C_s} & \frac{1}{C_s} & 0 \\ \frac{1}{R_p C_1} & -\frac{1}{R_p C_1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_c} & 0 & -\frac{R_c}{L_c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -400 & 400 & 200 & 0 \\ 20 & -20 & 0 & 0 \\ -100 & 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

dove  $C_1 = \frac{C_l C_w}{C_l + C_w}$ .

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_c} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

1. Assumere come ingressi del sistema  $r(t) = \bar{r} = 16.66667$  mU/min e  $\Gamma(t) = \bar{\Gamma} = 0$  e determinare l'insieme  $\bar{x}$  di tutti gli stati di equilibrio corrispondenti a tale ingresso verificando, in particolare, che risulta

$$\bar{x} = [ 81 \quad 15 \quad 0 ]^T \in \bar{X} \quad (4)$$

2. Determinare la rappresentazione in variabili di stato:

$$\begin{cases} \delta \dot{x}(t) = \tilde{A} \delta x(t) + \tilde{B} \delta u(t) \\ \delta y(t) = \tilde{C} \delta x(t) + \tilde{D} \delta u(t) \end{cases} \quad (5)$$

del sistema linearizzato nell'intorno del punto di equilibrio  $(\bar{x}, \bar{u})$ .

3. Costruire uno schema SIMULINK idoneo a simulare, nel dominio del tempo, il modello di Bergmann e simularlo in presenza dell'ingresso  $u(t) = \bar{u}$  e condizioni iniziali nulle. Verificare che, trascorso un tempo sufficientemente lungo, il sistema raggiunge lo stato di equilibrio  $x(t) = \bar{x}$ .
4. Costruire uno schema SIMULINK idoneo a simulare, nel dominio del tempo, il sistema linearizzato e simularlo in presenza dell'ingresso  $\delta u(t) = [\delta r(t) \quad \delta \Gamma(t)]^T$  con  $\delta r(t) = 0$  e assumendo per  $\delta \Gamma(t)$  il profilo di tasso di assorbimento del glucosio corrispondente ad un pasto contenente 50 g di glucosio (file Sim\_pasto\_50g.mdl) e condizioni iniziali  $\delta x(0) = [ 9 \quad 0 \quad 0 ]^T$ .
5. Costruire uno schema SIMULINK che, in presenza dell'ingresso  $u(t) = \bar{u} + \delta u(t)$  con  $\delta u(t)$  come al punto precedente, permetta di confrontare il comportamento del sistema non lineare, partendo dalla condizione iniziale  $x(0) = [ 9 + 81 \quad 15 \quad 0 ]^T$ , con quello del sistema linearizzato a fronte dell'ingresso  $\delta u(t)$  e condizioni iniziali  $\delta x(0) = [ 9 \quad 0 \quad 0 ]^T$ .



svolgere i seguenti punti

1. Tracciare il diagramma di Bode.
2. Tracciare il diagramma polare.
3. Tracciare il diagramma di Nyquist.

### Problema 2

Si consideri lo schema di controllo rappresentato in Fig. 1.

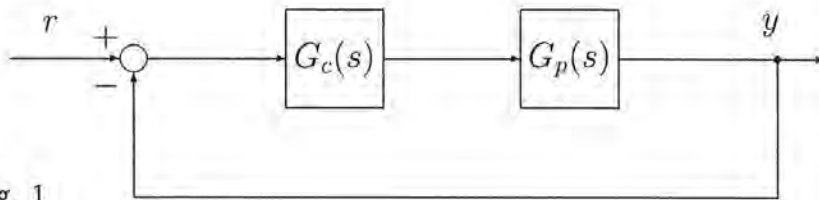


Fig. 1

La funzione di trasferimento  $G_p(s)$  sia data dalle funzioni  $H(s)$  dell'esercitazione di laboratorio n.5,  $G_c(s) = K$ . Per ciascuna di tali funzioni:

1. Valutare la stabilità esterna del sistema retroazionato per  $K = 1$  utilizzando il criterio di Nyquist. Nel caso in cui il sistema sia instabile, indicare il numero di poli con parte reale positiva.
2. Valutare la stabilità esterna del sistema retroazionato al variare di  $K \in \mathfrak{R}$  utilizzando il criterio di Nyquist; nei casi in cui esistono valori di  $K$  per cui il sistema retroazionato risulta instabile indicare il numero di poli instabili.

### Problema 3

Ripetere il Problema 2 nel caso in cui il sistema di controllo abbia retroazione positiva.

Analizzare le seguenti specifiche riguardanti il comportamento in regime transitorio del sistema retroazionato, evidenziando il loro legame con le opportune grandezze nel dominio della frequenza della funzione di anello  $L(s)$ .

√ Tempo di salita:  $t_r \leq 3$  s;

√ Tempo di assestamento:  $t_{s, 5\%} \leq 12$  s;

√ Sovraelongazione nella risposta ad un segnale di riferimento a gradino:  $\hat{s} \leq 10\%$ ;

$|u(t)| \leq 12, \forall t \geq 0$ .

**Problem P1 — Given**

$$G_p(s) = \frac{25}{s^3 + 3.3s^2 + 2s}$$

$$G_s = 1$$

$$G_a = 0.095$$

$$G_r = 1$$

$$G_d(s) = 1;$$

$$d_a(t) = D_{a0}; \quad |D_{a0}| \leq 5.5 \cdot 10^{-3};$$

$$d_p(t) = a_p \sin(\omega_p t), \quad |a_p| \leq 2 \cdot 10^{-2}, \quad \omega_p \leq 0.02 \text{ rad s}^{-1}$$

$$d_s(t) = a_s \sin(\omega_s t), \quad |a_s| \leq 10^{-1}, \quad \omega_s \geq 40 \text{ rad s}^{-1}.$$

**Specifications**

- ✓ Steady-state gain of the feedback control system:  $K_d = 1$
- ✓ Steady-state output error when the reference is a ramp ( $R_0 = 1$ ):  $|e_r^\infty| \leq 1.5 \cdot 10^{-1}$
- ✓ Steady-state output error in the presence of  $d_a$ :  $|e_{d_a}^\infty| \leq 1.5 \cdot 10^{-2}$
- ✓ Steady-state output error in the presence of  $d_p$ :  $|e_{d_p}^\infty| \leq 5 \cdot 10^{-4}$
- ✓ Steady-state output error in the presence of  $d_s$ :  $|e_{d_s}^\infty| \leq 5 \cdot 10^{-4}$
- ✓ Rise time:  $t_r \leq 3 \text{ s}$
- ✓ Settling time:  $t_{s, 5\%} \leq 12 \text{ s}$
- ✓ Step response overshoot:  $\hat{s} \leq 10\%$

**Problem P2 — Given**

$$G_p(s) = \frac{40}{s^2 + 3s + 4.5}$$

$$G_s = 1$$

$$G_a = -0.09$$

$$G_r = 1$$

$$G_d(s) = 1;$$

$$d_a(t) = D_{a0}; \quad |D_{a0}| \leq 8.5 \cdot 10^{-3};$$

$$d_p(t) = D_{p0}t; \quad |D_{p0}| \leq 3 \cdot 10^{-3};$$

$$d_s(t) = a_s \sin(\omega_s t), \quad |a_s| \leq 10^{-2}, \quad \omega_s \geq 50 \text{ rad s}^{-1}.$$

**Specifications**

- Steady-state gain of the feedback control system:  $K_d = 1$
- Steady-state output error when the reference is a ramp ( $R_0 = 1$ ):  $|e_r^\infty| \leq 3.5 \cdot 10^{-1}$
- Steady-state output error in the presence of  $d_a$ :  $|e_{d_a}^\infty| \leq 1.75 \cdot 10^{-2}$
- Steady-state output error in the presence of  $d_p$ :  $|e_{d_p}^\infty| \leq 1 \cdot 10^{-3}$
- Steady-state output error in the presence of  $d_s$ :  $|e_{d_s}^\infty| \leq 2 \cdot 10^{-4}$
- Rise time:  $t_r \leq 2.5 \text{ s}$
- Settling time:  $t_{s, 5\%} \leq 10 \text{ s}$
- Step response overshoot:  $\hat{s} \leq 8\%$

### Some results from given problems

#### Problem P1

$$\left\{ \begin{array}{l} |e_r^\infty| \leq 1.5 \cdot 10^{-1} \Rightarrow \mu \geq 0, \quad |K_c| \geq 5.614 \\ |e_{d_n}^\infty| \leq 1.5 \cdot 10^{-2} \Rightarrow \mu \geq 0, \quad |K_c| \geq 3.8596 \\ \zeta \geq 0.59 \\ T_{po} \leq 1.049 = 0.41 \text{ dB} \\ S_{po} \leq 1.361 = 2.7 \text{ dB} \\ t_r \leq 3 \Rightarrow \omega_c \geq 0.66 \text{ rad/s} \\ t_s \leq 12 \Rightarrow \omega_c \geq 0.31 \text{ rad/s} \\ |e_{d_r}^\infty| \leq 5 \cdot 10^{-4} \Rightarrow M_S^{LF} \approx -32 \text{ dB}, \omega_c \geq 0.25 \text{ rad/s.} \\ |e_{d_s}^\infty| \leq 5 \cdot 10^{-4} \Rightarrow M_T^{HF} \approx -46 \text{ dB}, \omega_c \leq 1.4 \text{ rad/s.} \end{array} \right.$$

#### Problem P2

$$\left\{ \begin{array}{l} |e_r^\infty| \leq 3.50 \cdot 10^{-1} \Rightarrow \mu \geq 1, \quad |K_c| \geq 3.5714 \checkmark \\ |e_{d_n}^\infty| \leq 1.75 \cdot 10^{-2} \Rightarrow \mu \geq 0, \text{ since } \mu \geq 1 \Rightarrow |e_{d_n}^\infty| = 0 \text{ and no constraints on } |K_c| \text{ can be derived.} \\ |e_{d_p}^\infty| \leq 1.00 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \mu \geq 1, \quad |K_c| \geq 3.75 \\ \zeta \geq 0.63 \\ T_{po} \leq 1.024 = 0.21 \text{ dB} \\ S_{po} \leq 1.33 = 2.5 \text{ dB} \\ t_r \leq 2.5 \Rightarrow \omega_c \geq 0.81 \text{ rad/s} \\ t_s \leq 10 \Rightarrow \omega_c \geq 0.33 \text{ rad/s} \\ |e_{d_s}^\infty| \leq 2 \cdot 10^{-4} \Rightarrow M_T^{HF} \approx -34 \text{ dB}, \omega_c \leq 3.5 \text{ rad/s.} \end{array} \right.$$

#### Problem P3

$$\left\{ \begin{array}{l} |e_r^\infty| \leq 1.5 \cdot 10^{-1} \Rightarrow \mu \geq 1, \quad |K_c| \geq 21.429 \\ |e_{d_n}^\infty| \leq 4.5 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \mu \geq 0, \text{ since } \mu \geq 1 \Rightarrow |e_{d_n}^\infty| = 0 \text{ and no constraints on } |K_c| \text{ can be derived.} \\ \zeta \geq 0.56 \\ T_{po} \leq 1.078 = 0.65 \text{ dB} \\ S_{po} \leq 1.39 = 2.9 \text{ dB} \\ t_r \leq 2 \Rightarrow \omega_c \geq 0.972 \text{ rad/s} \\ t_s \leq 8 \Rightarrow \omega_c \geq 0.498 \text{ rad/s} \\ |e_{d_r}^\infty| \leq 2 \cdot 10^{-3} \Rightarrow M_S^{LF} \approx -38 \text{ dB}, \omega_c \geq 0.54 \text{ rad/s.} \\ |e_{d_s}^\infty| \leq 8 \cdot 10^{-4} \Rightarrow M_T^{HF} \approx -48 \text{ dB}, \omega_c \leq 1.9 \text{ rad/s} \end{array} \right.$$

#### Problem P4

$$\left\{ \begin{array}{l} |e_r^\infty| \leq 2.5 \cdot 10^{-1} \Rightarrow \mu \geq 0, \quad |K_c| \geq 44.4 \\ |e_{d_n}^\infty| \leq 1.0 \cdot 10^{-2} \Rightarrow \mu \geq 0, \quad |K_c| \geq 41.6 \\ |e_{d_p}^\infty| \leq 1.5 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \mu \geq 0, \quad |K_c| \geq 62.963 \\ \zeta \geq 0.52 \\ T_{po} \leq 1.13 = 1.1 \text{ dB} \\ S_{po} \leq 1.45 = 3.2 \text{ dB} \\ t_r \leq 3.5 \Rightarrow \omega_c \geq 0.55 \text{ rad/s} \\ t_s \leq 14 \Rightarrow \omega_c \geq 0.32 \text{ rad/s} \\ |e_{d_s}^\infty| \leq 5 \cdot 10^{-4} \Rightarrow M_T^{HF} \approx -40 \text{ dB}, \omega_c \leq 2 \text{ rad/s.} \end{array} \right.$$

**Problema 2**

Si considerino le funzioni già proposte nelle esercitazioni No. 4 e No. 5, e si supponga che ognuna di esse possa essere considerata la f.d.t. dell'impianto  $G_p(s)$  di un sistema di controllo in cui il controllore sia  $G_c(s) = K_c$ . Scegliere il segno di  $K_c$  che consente la stabilizzazione del sistema di controllo mediante reti dinamiche.

**Problema 3**

Si consideri il sistema di controllo riportato sopra per il Problema 1.

DATI

$$G_p(s) = \frac{1.8}{s^2 + 2.6s + 1.2}$$

$$G_s = 0.5 ;$$

$$G_a = 0.1;$$

$$G_r = 1;$$

$$G_d(s) = 1;$$

$$d_a(t) = D_{a0}t; \quad |D_{a0}| \leq 1.5 \cdot 10^{-3};$$

$$d_p(t) = D_{p0}t; \quad |D_{p0}| \leq 8.0 \cdot 10^{-3};$$

$$d_s(t) = a_s \sin(\omega_s t), \quad |a_s| \leq 10^{-3}, \quad \omega_s \geq 20 \text{ rad s}^{-1}.$$

SPECIFICHE

- √ Guadagno stazionario del sistema di controllo:  $K_d = 4$ .
- √ Errore in regime permanente sull'uscita per un riferimento a rampa  $r(t) = 0.25t$ ,  $|e_r^\infty| \leq 12 \cdot 10^{-1}$ .
- √ Errore in regime permanente sull'uscita a causa del disturbo  $d_a$ :  $|e_{d_a}^\infty| \leq 1.6 \cdot 10^{-3}$ .
- √ Errore in regime permanente sull'uscita a causa del disturbo  $d_p$ :  $|e_{d_p}^\infty| \leq 1.0 \cdot 10^{-2}$ .
- √ Errore in regime permanente sull'uscita a causa del disturbo  $d_s$ :  $|e_{d_s}^\infty| \leq 0.2 \cdot 10^{-4}$ .
- √ Tempo di salita:  $t_r \leq 2 \text{ s}$ .
- √ Tempo di assestamento:  $t_{s, 5\%} \leq 4 \text{ s}$ .
- √ Sovraelongazione nella risposta ad un segnale di riferimento a gradino:  $\hat{s} \leq 15\%$ .

Corso di Laurea Specialistica in Ing. Biomedica — Politecnico di Torino  
 Anno Accademico 2013/2014

**CONTROLLI AUTOMATICI (19AKSMV)**  
**Homework n. 8 — Simulazione di compito d'esame n. 1**  
**Docente: Diego Regruto**

<b>Matricola</b>	<b>Cognome</b>	<b>Nome</b>
<b>e-mail</b>	<b>telefono</b>	

Si consideri il sistema di controllo schematizzato in Fig. 1. Il segnale  $u$  è il comando,  $y$  l'uscita,  $r$  è il riferimento,  $d_a$  è un disturbo additivo sull'attuatore,  $d_p$  è un disturbo additivo sull'uscita,  $G_s$  è il guadagno del trasduttore,  $d_s$  è un disturbo additivo sul trasduttore. La funzione di trasferimento tra il disturbo  $d_p$  e l'uscita è  $G_d(s)$ .

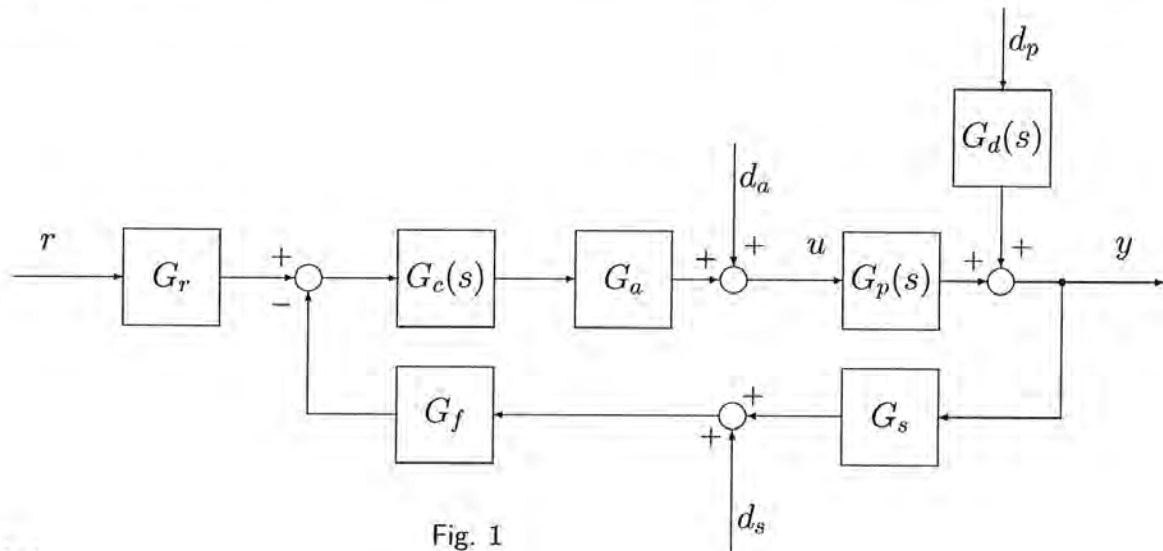


Fig. 1

**DATI**

$$G_p(s) = \frac{-38.3517}{(s - 30.34)(s + 30.34)}$$

$G_s = 555.89$  V/m, (Trasduttore del segnale di uscita).

$G_a = 0.4$  A/V, (Attuatore).

$G_r = 1$  (Trasduttore del riferimento).

$G_d(s) = 1$ .  $G_f = 1$ .  $d_a(t) = 0$ .  $d_p(t) = 0$ ;

$d_s(t) = 0$ .

**SPECIFICHE**

Errore in regime permanente sull'uscita per un riferimento a gradino  $|e_\infty^r| = 0$  m;

Tempo di salita:  $t_r \leq 0.015$  s.

Sovraelongazione nella risposta ad un segnale di riferimento a gradino:  $\hat{s} \leq 25\%$ .

Quando il riferimento è un'onda quadra a valor medio nullo, valore massimo 0.1 e frequenza 0.25 Hz:

Valore massimo della segnale in uscita dall'attuatore  $\leq 4$ .

Corso di Laurea Magistrale in Ing. Biomedica — Politecnico di Torino  
 Anno Accademico 2013/2014  
**CONTROLLI AUTOMATICI (19AKSMV)**  
 Homework n. 9 — Simulazione di compito d'esame n. 2  
 Docente: Diego Regruto

Matricola	Cognome	Nome
e-mail		telefono

Si consideri il sistema di controllo schematizzato in Fig. 1. Il segnale  $u$  è il comando,  $y$  l'uscita,  $r$  è il riferimento,  $d_1$  è un disturbo additivo sull'attuatore,  $d_2$  è un disturbo additivo sull'uscita,  $G_t$  è il guadagno del trasduttore di posizione,  $d_t$  è un disturbo additivo sul trasduttore. La funzione di trasferimento tra il disturbo  $d_2$  e l'uscita è  $G_d(s)$ .

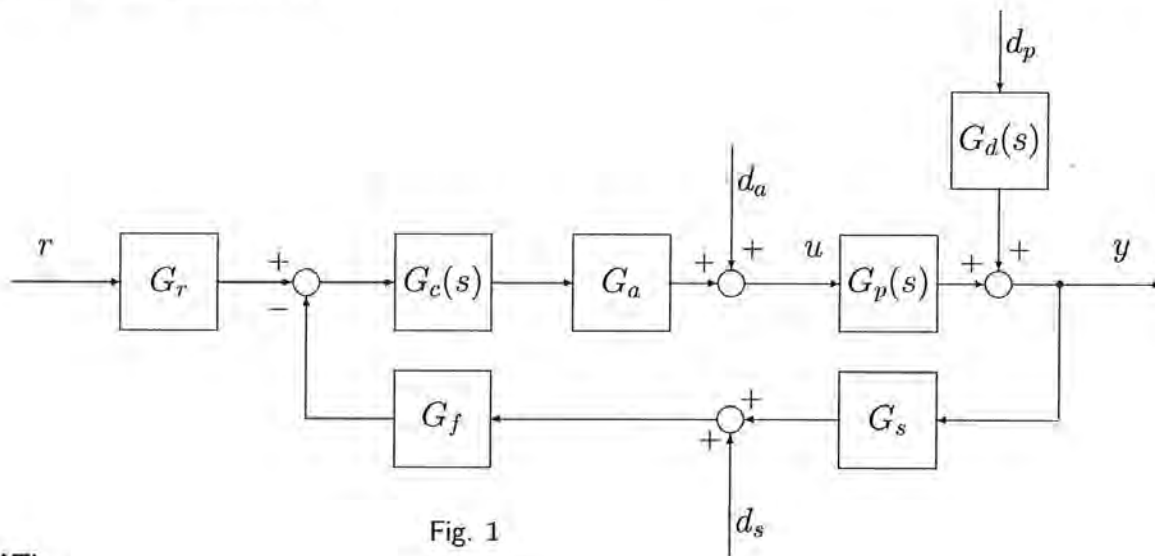


Fig. 1

DATI

$$G_p(s) = \frac{10^6}{s^2 + 500s}$$

$G_s = 1$  (Trasduttore del segnale di uscita).

$G_a = 3$  (Attuatore).

$G_r = 1$  (Trasduttore del riferimento).

$G_d(s) = 1$ .

$d_a(t) = D_{a0}$ ;  $|D_{a0}| \leq 8.5 \cdot 10^{-3}$ .

$d_p(t) = a_p \sin(\omega_p t)$ ,  $|a_p| \leq 6 \cdot 10^{-2}$ ,  $\omega_p \leq 10 \text{ rad s}^{-1}$ .

$d_s(t) = 0$ .

SPECIFICHE

Guadagno stazionario del sistema retroazionato:  $K_d = 2$ .

Errore in regime permanente sull'uscita a causa del disturbo  $d_a$ :  $|e_{\infty}^{d_a}| = 0$ .

Errore in regime permanente sull'uscita a causa del disturbo  $d_p$ :  $|e_{\infty}^{d_p}| \leq 6 \cdot 10^{-4}$ .

Tempo di salita: il più breve possibile. *3/50*

Tempo di assestamento: il più breve possibile. *12/150*

Sovraelongazione nella risposta ad un segnale di riferimento a gradino:  $\hat{s} \leq 8\%$ .

Quando  $r(t) = 1$ , per  $t \geq 0$ , deve essere  $|u(t)| \leq 12, \forall t \geq 0$ . *lo prendo in considerazione*



## COS'E' UN SISTEMA?

In generale è l'insieme di più parti (anche astratte) che interagiscono tra loro al fine di raggiungere un obiettivo o di svolgere una certa funzione.

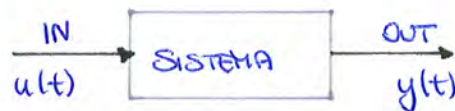
Un esempio di sistema è il PAZIENTE, le cui componenti si possono considerare come:

- organi
- funzioni fisiologiche

Anche un processo fisiologico è un SISTEMA, come ad esempio la respirazione.

Come applico un sistema ad un processo

- 1) modello in termini matematici il sistema fisico (come la respirazione);
- 2) lo porto ad essere un sistema astratto;
- 3) applico gli strumenti di un sistema continuo;
- 4) soluzione del problema specifico



Posso avere più sistemi interconnessi tra loro.

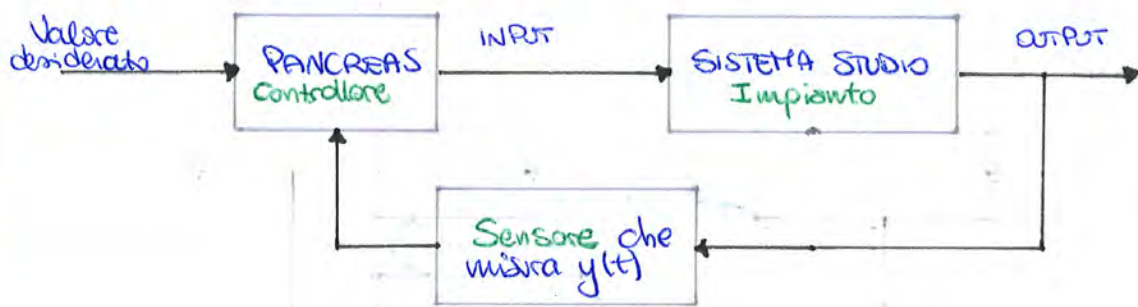
$u(t)$ , gli ingressi, sono segnali e, in un generico processo fisico sono le cause, le eccitazioni esterne che portano a produrre le uscite  $y(t)$ , ovvero gli effetti.

Ad esempio:



Un altro esempio può essere lo studio, nel caso di un diabetico, la migliore strategia nel fornire insulina dall'esterno. Vanno calibrate sia le quantità che la tempistica. L'approccio classico prevede di procedere un po' a tentativi basandomi





La grandezza "concentrazione del glucosio nel sangue" viene monitorata all'interno del paziente. Questa misura avviene istante per istante. Dato che sia previsto il valore giusto, il pancreas confronta  $y(t)$  ottenuto con il valore desiderato e quindi genera un ingresso in quantità opportuna per regolare la glicemia.

È un sistema di regolazione automatica, che nel paziente sano avviene in modo inconsapevole.

COME I SISTEMI, ANCHE I SISTEMI DI CONTROLLO POSSONO ESSERE APPLICATI IN OGNI SETTORE.

È necessario avere un sensore che misuri istante per istante, deve un monitoraggio. Sono stati sviluppati sensori impiantabili (e non) che misurano la glicemia ogni 2-5 minuti.

C'è poi un attizzatore che produce fisicamente l'ingresso del sistema, in questo schema è implementato nell'impianto. Qui  $u(t)$  è l'insulina e la pompa è l'attizzatore.

È anche importante sapere quanto deve essere la quantità di insulina da iniettare, con che andamento nel tempo.

Progettare il sistema di controllo vuol dire progettare il controllore, che mette in relazione  $y(t)$  e valore desiderato per determinare  $u(t)$ . Questo però vuol dire disporre.



I segnali manipolabili  $u(t)$  sono grandezze cui noi, dall'esterno, interveniamo sul sistema ma di cui io posso decidere il valore.

I disturbi  $d(t)$  sono impressi a tutti gli effetti ma non sono manipolabili.

In alcuni casi la differenza tra  $u(t)$  e  $d(t)$  non è così ovvia!  
Nel paziente diabetico, il disturbo è il pasto che il paziente assume (e il glucosio in esso).

Installo un sensore d'ingresso  $z(t)$ ; ma un sensore è un transduttore (d'ingresso un segnale elettrico proporzionale al livello di glucosio), posso commettere errori di misura e il modello con un segnale che il rumore di misura (in ingresso nel sensore). Il sensore può avere limiti fisici.

Nel caso ideale  $z(t) = y(t)$ . Oppure  $z(t) = \lambda y(t)$ , dove  $\lambda$  è una costante. Posso avere  $z(t)$  che è data da  $y(t)$  perturbata da  $d_s(t)$ .

$y(t)$  va così simile a  $r(t)$  a fronte del fatto che ci sono disturbi e controlli; da qui progetto in modo opportuno il controllore.

Un fattore che limita le prestazioni è l'incertezza di modello:

- 1) ho ricavato le equazioni corrette ma i parametri fisici non sono noti in modo esatto;
- 2) l'errore è fatto prendendo scampo le equazioni.

Se il modello è scadente, devo migliorarlo. Se ho il modello migliore e tengo conto delle incertezze, progetto il controllore in modo **robusto**, ovvero garantire che le specifiche di controllo siano certe anche con un modello inaccurato.

I disturbi spesso non sono predicibili.

Un caso particolare del tracking è il **SET POINT**: il segnale  $r(t)$  è una costante, come la regolazione della temperatura di una stanza.



## QUALI SONO GLI OBIETTIVI FONDAMENTALI DA FORSI QUANDO SI PROGETTA UN SISTEMA DI CONTROLLO?

### ① STABILITÀ

L'obiettivo di livello  $\phi$  è che il sistema sia stabile (e necessario ma non sufficiente). È stabile se a fronte di qualsiasi ingresso limitato che agisce dall'esterno sul sistema di controllo, tutte le grandezze all'interno del sistema rimangono limitate.

Un sistema è instabile se, dati segnali limitati, esso esplosa e va à infinito.

Assicurare la stabilità non è banale

### ② PRESTAZIONI

Sono vincoli opposti al comportamento delle grandezze. I vincoli vanno a riflettere i limiti fisici del sistema di controllo:  $y(t)$  non deve superare certi limiti ma neanche essere sottodimensionale

### ③ ROBUSTEZZA

Voglio che stabilità e prestazioni siano garantite anche con incertezza di modello dato che il modello è un'approssimazione.

## RAPPRESENTAZIONE MATEMATICA del SISTEMA

La prima rappresentazione del sistema è la descrizione nello spazio di stato.

Le equazioni si chiamano INGRESSO STATO USCITA oppure DELLO SPAZIO di STATO.

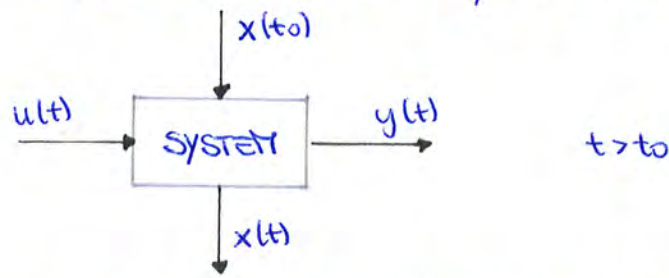
Qualsiasi sistema fisico può essere descritto da una coppia di equazioni di questo tipo, quindi lo descrivo con un sistema di equazioni differenziali del I° ordine:

$$\begin{array}{l} \text{EQUAZIONI di} \\ \text{STATO} \end{array} \quad \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t))$$

a cui aggiungo un altro sistema di equazioni algebriche

$$\begin{array}{l} \text{EQUAZIONI} \\ \text{USCITA} \end{array} \quad y(t) = g(t, x(t), u(t))$$

↳ il secondo gruppo di equazioni ci dice che l'effetto dell'uscita dipende da come sono variate queste variabili.



L'INGRESSO NON AGISCE DIRETTAMENTE SULL'USCITA!

Se siamo la derivata come un rapporto incrementale

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t-\Delta t)}{\Delta t} = \text{derivata}$$

allora

$$\frac{x(t) - x(t-\Delta t)}{\Delta t} \sim f(t, x(t), u(t))$$

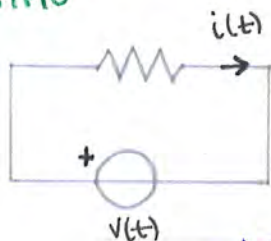
e posso scrivere

$$x(t) = x(t-\Delta t) + f(t, x(t), u(t)) \Delta t$$

Questo vuol dire che quando applico al sistema un segnale di ingresso, il valore che ho delle variabili di stato all'istante  $t$  non dipende solo da  $u(t)$  fornito ma DIPENDE ANCHE DAI VALORI PASSATI!

Per poter descrivere un sistema, devo poter ammettere che questo abbia una certa **MEMORIA**. Non tutti i sistemi sono tali per cui  $y(t)$  o le variabili dipendono solo dai valori  $u(t)$  dati.

### ESEMPIO



Alla resistenza applico un ingresso attraverso un generatore di tensione  $v(t)$  e suppongo di voler monitorare la corrente  $i(t)$ .

Modello il sistema:

$$\begin{aligned} y(t) &= i(t) && \text{uscita} \\ u(t) &= v(t) && \text{ingresso} \end{aligned}$$



La rappresentazione di stato si compone di:

Equazione di stato  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{C} u(t)$

Equazione di uscita  $y(t) = x(t) = x(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt$   
 Ha MEMORIA!

Analizzo l'equazione costitutiva

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt$$

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t u(t) dt$$

$$v(t) = \frac{q(t)}{C}$$

Se conosco  $i(t)$  immessa, per conoscere  $v(t)$ ,  
 devo sapere quanta carica ho immessa  
 sulle piastre C

### SISTEMA DINAMICO

Questo sistema dipende da tutti gli ingressi passati!

- ! Le variabili di stato mi descrivono lo stato interno del sistema; se le conosco, mi permettono di avere informazioni sul sistema in quel momento, come dimenticare i valori passati.

Devo conoscere:

- la variabile a  $t_0$
- come va la variabile da  $t_0$  a  $t$

### SISTEMI LINEARI DINAMICI

Sono composti da equazioni lineari dello spazio o dello stato. Quando  $f$  e  $g$  sono lineari, le derivate di  $x$  sono descritte da una combinazione lineare di  $x$  e  $u$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad \text{equazione di stato}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad \text{equazione di uscita}$$

e tempo invariante perché  $A, B, C, D$  non dipendono da  $t$ , il sistema si definisce LTI.

## TRASFORMATA di LAPLACE

La trasformata di Laplace parte da un'equazione differenziale e da un'equazione più semplice.

Data  $f(t)$ , diciamo TRASFORMATA di LAPLACE

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

questa nuova funzione dipende da  $s$  (che è un numero complesso), detta variabile complessa. Si definisce come:

$$s = \sigma + j\omega$$

dove  $\sigma$  è la parte reale

$\omega$  è la parte immaginaria

È una funzione univoca. C'è un'ANTI TRASFORMATA che mi porta da  $F(s)$  a  $f(t)$ :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(s) e^{st} ds$$

Le proprietà della trasformata sono:

1) la linearità: se ho due funzioni nel tempo combinate linearmente, posso combinarle linearmente anche nel dominio  $s$ .

2) ritardo temporale: data una funzione  $f(t)$  e un ritardo temporale  $T$ , posso scrivere

$$\mathcal{L}\{f(t-T)\} = F(s) e^{-Ts}$$

3) derivata: data  $f(t)$  e nota  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ , si definisce

$$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s) - f_0$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f^{(n-1)}(0) - s^{n-2} f^{(n-2)}(0) - \dots$$

4) integrale:

$$\mathcal{L}\left\{\int f(t)\right\} = \frac{F(s)}{s}$$



Sostituisci  $x(s)$  in  $y(s)$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

e poi antitrasformo con una  $L^{-1}\{\}$

I SEGNALI più usati sono:

1) delta di Dirac  $\delta(t)$

L'impulso corrisponde ad un segnale che ha supporto concentrato in 0: vale 0 ovunque tranne in 0, dove ha intensità infinita.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = 1 \quad \text{impulso unitario}$$

L'impulso rappresenta una forza applicata istantaneamente.

2) gradino unitario  $E(t)$

Per  $t < 0$ , la funzione è nulla, mentre per  $t \geq 0$ , vale 1.

È fondamentale nei sistemi di controllo (come ad esempio il controllo della temperatura di una stanza)

3) Segnali polinomiali come

→ la funzione rampa  $t E(t)$

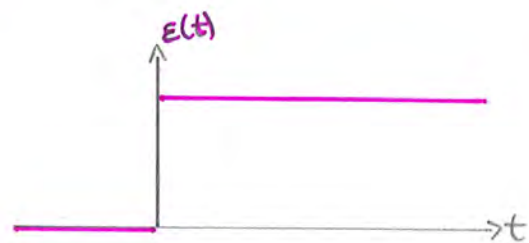
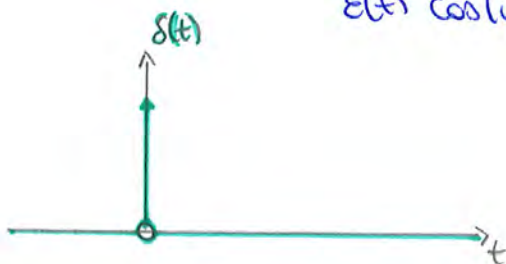
→ la funzione parabolica  $\frac{t^2}{2} E(t)$

4) Segnali periodici

Si considerano  $\sin$  e  $\cos$  una tra  $+\infty$  e  $-\infty$  ma moltiplicati per la funzione gradino. Prima di 0 valgono 0 e da 0 in poi coincidono con le funzioni seno o coseno.

$$E(t) \sin(\omega t)$$

$$E(t) \cos(\omega t)$$



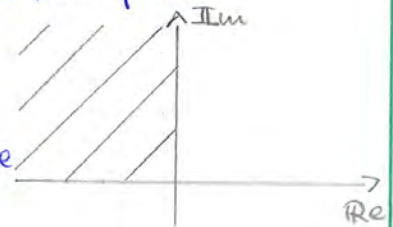
### TEOREMA del VALORE INIZIALE

Supponendo di avere una funzione  $f(t)$  di cui calcoliamo  $F(s)$  e di volere calcolare il limite per  $t \rightarrow 0$ , sotto opportune condizioni:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) \cdot s$$

La condizione per entrambi i teoremi è che il limite esista e sia finito.

Il limite esiste ed è finito se, data  $F(s)$  funzione reale razionale, le sue radici del denominatore hanno tutte parte reale negativa, ovvero a sinistra del semipiano



### FUNZIONE di TRASFERIMENTO

Applico la trasformata di ~~Fourier~~<sup>Laplace</sup> all'equazione di stato e di uscita tramite la linearità e le derivate

$$X(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1} x_0}_{\text{condizioni iniziali}} + \underbrace{(sI - A)^{-1} B U(s)}_{\text{ingresso}}$$

⇓  
ovvero la trasformata della risposta libera dello stato

Anche la trasformata di  $y(t)$  è data da un termine per la risposta libera e uno per la forzata:

$$C(sI - A)^{-1} = H_f(s)$$

$$C(sI - A)^{-1} \cdot B + D = H(s)$$

$H(s)$  è detta funzione di trasferimento del sistema.

Nel momento in cui le condizioni iniziali sono nulle (condizione di riposo), tramite  $H(s)$  posso ricostruire il comportamento del sistema stesso perché l'uscita dipende solo dall'ingresso e da  $H(s)$ .



Studia gli zeri sono le radici del numeratore, i poli sono le radici del denominatore.

esempio (copiare da pasts)

Il denominatore è ottenuto dal polinomio caratteristico di A, le radici sono le radici del polinomio caratteristico di A (ovvero gli autovalori di A)

Posso scrivere la funzione come:

$$H(s) = K_{os} \frac{(s-z_1)(s-z_2) \dots (s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2) \dots (s-p_n)}$$

Così è scritta in funzione di:

$z_1 \dots z_m \rightarrow$  gli zeri

$p_1 \dots p_n \rightarrow$  i poli

$K_{os}$  guadagno che si calcola come

$$H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{n-m} H(s)$$

Oppure come

$$H(s) = K \frac{\left(1 - \frac{s}{z_1}\right) \left(1 - \frac{s}{z_2}\right) \dots \left(1 - \frac{s}{z_m}\right)}{s^r \left(1 - \frac{s}{p_1}\right) \left(1 - \frac{s}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{s}{p_{n-r}}\right)}$$

dove ci sono r poli e K è il dc-gain

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} s^r H(s)$$

se  $r=0$ , K si ottiene calcolando  $H(0)$ .

$$\begin{aligned}
 y(t) & \text{ sarà } \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} \\
 & = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s+3} + \frac{7}{s-4}\right\} = \\
 & = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s+3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{s-4}\right\} = \quad \left. \begin{array}{l} \text{per la} \\ \text{linearità} \end{array} \right\} \\
 & = 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + 7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} = \quad \left. \begin{array}{l} \text{sempre per linearità,} \\ \text{polto fuori le} \\ \text{costanti} \end{array} \right\} \\
 \mathcal{E}(t) = \frac{1}{s} & \quad \left. \begin{array}{l} \text{utilizzo la proprietà dello} \\ \text{traslazione in } s \end{array} \right\} \\
 & = 5\underbrace{\mathcal{E}(t)} e^{-3t} + 7\underbrace{\mathcal{E}(t)} e^{4t} \\
 & = y(t)
 \end{aligned}$$

Se i poli sono distribuiti, ma le radici distribuite sono  $r$ , alcune hanno molteplicità algebrica diversa da 1 (e la chiamo  $\mu_i$ )  
 Vale l'espansione ma è più complicata

$$y(s) = \frac{(s+3)}{(s+1)^3(s-2)^2 \cdot s}$$

$$y(s) = \sum_{k=1}^3 \frac{R_{1,k}}{(s-p_1)^k} + \sum_{k=1}^2 \frac{R_{2,k}}{(s-p_2)^k} + \frac{R_3}{(s-p_3)}$$

$(p_1 = -1) \qquad (p_2 = 2) \qquad (p_3 = 0)$

$$\mu_1 = 3$$

$$\mu_2 = 2$$

$$= \sum_{k=1}^3 \frac{R_{1,k}}{(s+1)^k} + \sum_{k=1}^2 \frac{R_{2,k}}{(s-2)^k} + \frac{R_3}{s}$$

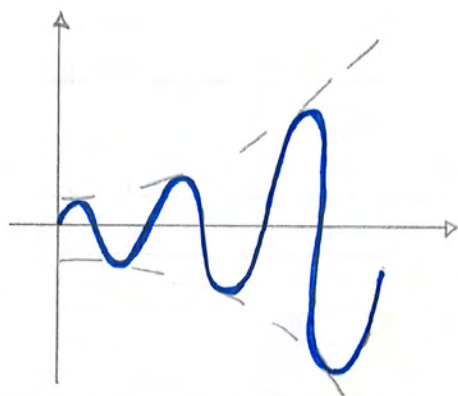
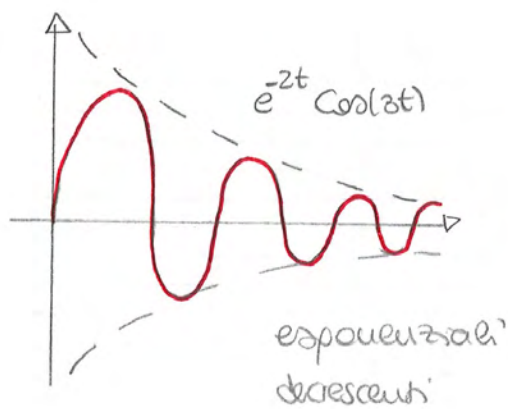
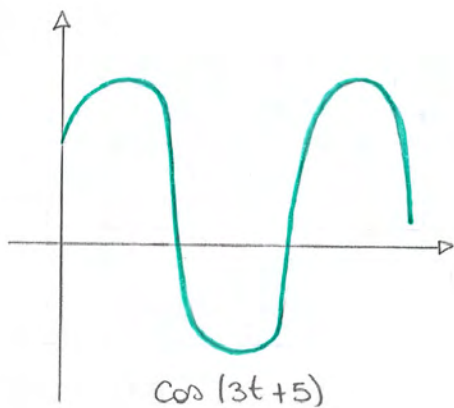
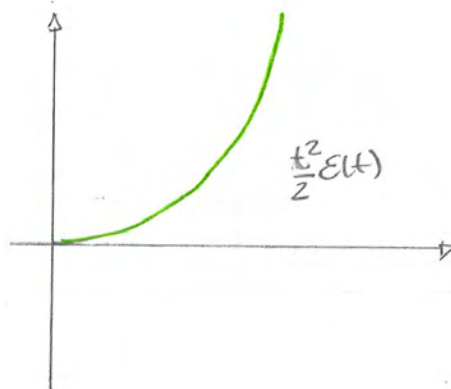
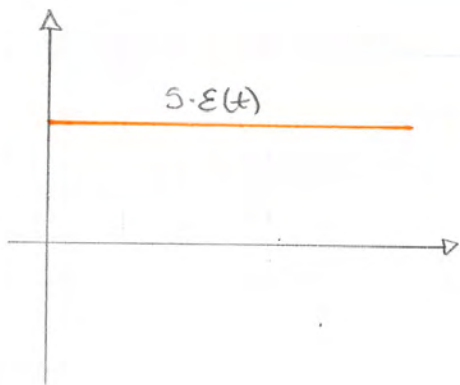
Sviloppo quindi le sommatorie

$$= \frac{R_{1,1}}{(s+1)} + \frac{R_{1,2}}{(s+1)^2} + \frac{R_{1,3}}{(s+1)^3} + \frac{R_{2,1}}{(s-2)} + \frac{R_{2,2}}{(s-2)^2} + \frac{R_3}{s}$$

Calcolo  $R_i$

de  $\mu_2 = 2$

$$R_{i,1} = \frac{d}{ds} \left[ (s-p_i)^2 F(s) \right] \Big|_{s=p_i}$$





Questa si può scampare in libera e forzata.  
 Con riferimento alla risposta dello stato, si definisce la  
 nozione di **STABILITÀ INTERNA** di un sistema LTI. Si studia  
 un concetto di stabilità che ci aiuta a capire il comportamento  
 delle variabili di stato.

**UN SISTEMA LTI È INTERNAMENTE STABILE SE LA SUA RISPOSTA LIBERA  
 È LIMITATA PER OGNI  $t$  QUALSIASI SIANO LE CONDIZIONI INIZIALI.**  
 ↳ VICEVERSA NON È VERO!

Si introduce anche quello di **STABILITÀ ASINTOTICA**.

**UN SISTEMA LTI È ASINTOTICAMENTE STABILE SE LA RISPOSTA  
 LIBERA CONVERGE A  $\phi$  PER OGNI POSSIBILE VALORE DELLE  
 CONDIZIONI INIZIALI.**

La stabilità INTERNA non implica stabilità ASINTOTICA; la  
 risposta non converge a  $\phi$  per tutti i valori.

Un sistema LTI asintoticamente stabile è anche internamen-  
 te stabile.

So che un sistema asintoticamente stabile ha una  
 risposta che converge a  $\phi$ , quindi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \phi$$

Se la risposta fosse lineare dappertutto posso ammettere  
 che la stabilità asintotica implichi presso interno una  
 $\Re$  di essere un asintoto verticale non scendere così.

Questo ipotetico asintoto per noi c'è: le soluzioni di un  
 sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti  
 costanti godono di continuità.

**ESISTONO DEI CRITERI**

Il primo riguarda la stabilità interna e ci dice che un  
 sistema è internamente stabile se e solo se vengono  
 soddisfatte le seguenti condizioni:

Queste soluzioni si ricavano dall'osservazione dell'evoluzione temporale di un generico sistema LTI.

La risposta è sempre la somma di opportuni termini; l'esponenziale gioca un ruolo chiave perché converge o diverge più velocemente delle altre. All'esponente di tutti questi esponenziali risulta sempre tutti gli autovalori di  $A_0$  al più un certo insieme di costi.

Per questo motivo, per valutare se converge o diverge, mi basta valutare il segno della parte reale degli autovalori di  $A$ . Questo segno determina univocamente l'andamento degli esponenziali e l'andamento qualitativo della risposta del sistema.

? Se ho gli autovalori, so che posso avere solo  $e^x$  oppure  $t^b \cdot e^x$  ma non ho termini oscillatori in  $\cos$  e  $\sin$ .

ESEMPLO: Controllo di una temperatura in una stanza.

Voglio arrivare a  $20^\circ\text{C}$  da  $15^\circ\text{C}$  in modo graduale e voglio evitare oscillazioni tipo

17 - 23 - 18 - 22 - etc...

Chiedere a Paolo



Posso subito concludere che il sistema NON è asintoticamente stabile perché le radici non sono tutte a parte  $Re < 0$ .

Non ho radici positive quindi non posso concludere immediatamente che sia internamente instabile.

Devo fare altri controlli, guardo le condizioni:

- 1) le radici devono avere parte Re nulla o negativa ✓
- 2) devo focalizzare l'attenzione sulle molteplicità delle radici a parte Re nulla.

Sì c'è una molteplicità pari a 2 ( $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ) ~

La **MOLTEPLICITÀ** cui cui le radici compaiono nel polinomio caratteristico è sempre maggiore o uguale alla molteplicità cui cui compaiono nel polinomio minimo.

↓  
 re azioni  
 $\lambda_1 = -5$   
 $\lambda_2 = 0$   
 $\lambda_3 = -9$   
 ↳ è internamente stabile senza dubbio.

Queste radici sono del polinomio caratteristico non minimo

### COME CALCOLO LA RISPOSTA LIBERA dello STATO

Se

$$(sI - A)^{-1} \cdot x_0$$

è la risposta libera dello stato, vedo a partire con che molteplicità la radice compare nel polinomio minimo.

Quando come è fatto  $(sI - A)^{-1}$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & s+5 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2(s+5)} \begin{bmatrix} s(s+5) & 0 & 0 \\ 0 & s(s+5) & 0 \\ 0 & s & s^2 \end{bmatrix}$$

Metto in evidenza tutto ciò che posso e lo porto fuori; ciò che rimane è il polinomio caratteristico

AFFINCHÉ UN SISTEMA SIA BIBO, QUESTA CONDIZIONE DEVE VALERE PER TUTTI I POSSIBILI SEGNALE INGRESSO-USCITA.

Come trovare un criterio relativamente semplice?

$$y(s) = \underline{[C(sI - A)^{-1}B + D]} u(s)$$

Se la stabilità BIBO deve valere per tutti gli ingressi, allora quello che diciamo è la funzione di trasferimento  $H(s)$ .

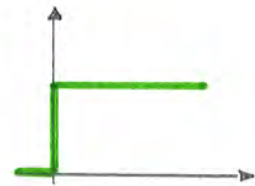
Supponiamo

$$H(s) = \frac{N_H(s)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)\dots(s+p_n)}$$

L'uscita forzata è

$$y(s) = H(s)u(s)$$

Supponiamo per semplicità che  $u(s) = \frac{1}{s}$



Quindi:

$$y(s) = H(s) \frac{1}{s} = \frac{N_H(s)}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)\dots(s+p_n)}$$

A questo punto devo calcolare l'autotrasformata tramite parti semplici e avo'

$$\frac{R_1}{(s+p_1)} + \dots + \frac{R_n}{(s+p_n)} + \frac{R_{n+1}}{s}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{ha la forma dell'ingresso}}$

La risposta è quindi una somma di esponenti

$$R_1 e^{-p_1 t} + R_2 e^{-p_2 t} + \dots + R_n e^{-p_n t} + \underline{R_{n+1} \cdot \mathcal{E}(t)}$$

questo termine va bene perché è limitato come l'ingresso



Ripartendo dal fatto che un sistema asintoticamente stabile è anche internamente stabile ma non viceversa, si vanno a stabilire le relazioni tra queste stabilità e la BIBO stability.

### RELAZIONE ASINTOTICA-BIBO:

Per la stabilità BIBO, i poli di  $H(s)$  devono avere parte Re negativa.

Per la stabilità asintotica, gli autovalori di  $A$  devono avere parte Re negativa.

Dato che

$$H(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]$$

il suo denominatore avrà

$$(sI - A)^{-1} \text{ qualcosa.}$$

Sicuramente a denominatore potrà avere il polinomio caratteristico, e non è detto che sia completo.

I poli di  $H(s)$  sarà un sottoinsieme (al più completo) degli autovalori di  $A$ .

SE IL SISTEMA LTI È ASINTOTICAMENTE STABILE È ANCHE BIBO STABILE!

Non posso concludere il contrario. Potrebbe avere come autovalori di  $A$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -5 \\ \lambda_2 = +8 \end{cases} \rightarrow \text{quindi non è asintoticamente stabile}$$

ma con  $H(s)$  come

$$H(s) = \frac{7(s-8)}{(s+5)(s-8)} \quad \text{ed è BIBO STABILE!}$$

A cosa serve questa semplificazione? So che l'uscita è una combinazione lineare degli stati più qualcosa che dipende dall'ingresso. Non è detto che tutti gli stati intervengano a definire l'uscita.



## LINEARIZZAZIONE

Un sistema può essere descritto da equazioni ingresso-stato-uscita non lineari dove  $x$  è espressione non lineare funzione di  $x$  e  $u$  mentre  $y$  è una funzione non lineare di  $x$  e  $u$ .

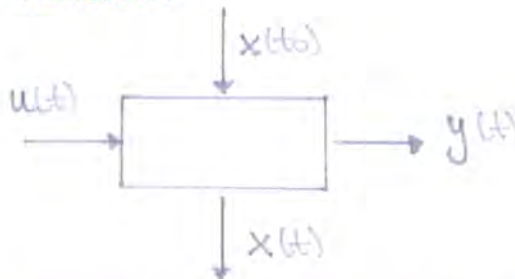
Il fatto che il sistema possa essere descritto da equazioni lineari tempo invarianti o richieda diverse equazioni non lineari dipende da che condizioni studio e lavoro il sistema.

Riprendiamo il caso del paziente diabetico di tipo I. Mi interessa discutere la relazione tra insulina, concentrazione di glucosio nel sangue e altre grandezze. Se lo studio in letteratura sono stati fatti molti modelli. Quello che vedo è che i modelli di fatto non sono lineari.

È vero che il sistema ha bisogno di equazioni lineari, ma proprio quando l'obiettivo è costruire un sistema di controllo per condizionare un comportamento, ho in mente un buon pezzo funzionamento. Come ricavare un modello semplice?

↓  
LINEARIZZANDO

Abbiamo un sistema



Conosciamo delle condizioni iniziali per cui le variazioni e le uscite evolvono nel tempo.

Da risolvere devo risolvere il sistema di equazioni non lineari:

tutti i punti  $\bar{x}$  di equilibrio.

Se sono quei punti dove  $x(t)$  è costante per ogni  $t$ , allora la derivata vale  $\phi$ .

Prendo le equazioni e

al posto di  $dx$  sostituisco  $\phi$

al posto di  $x$  sostituisco  $\bar{x}$

al posto di  $u$  sostituisco  $\bar{u}$

Otengo che gli equilibri sono tutti i valori  $\bar{x}$  che soddisfanno l'equazione

$$\phi = f(\bar{x}, \bar{u})$$

risolvendo questa equazione trovo i punti di equilibrio.

Posso calcolare il valore dell'uscita all'equilibrio prendendo la seconda equazione e sostituisco  $\bar{u}$  imposta e  $\bar{x}$  appena trovata.

Se il sistema fosse LTI, faccio esattamente gli stessi conti ma la struttura della soluzione varrebbe come prima.

### ESEMPLO: Levitatore Magnetico

Il problema è mantenere in equilibrio, in levitazione magnetica, un corpo (come una pallina).

Posso sfruttare l'attrazione da magnete: ho un magnete attorno al quale avvolgo un solenoide su cui passa una corrente tramite cui regolo il campo.

Si genera una forza attrattiva di natura magnetica che tenderà ad attrarre o a respingere questo corpo.

Questo sistema è instabile: prendo un po' la pallina in condizione iniziale o casca o si attira del tutto.

Bisogna progettare un sistema di controllo in feedback:

osservando attraverso un sensore ottico dove è la pallina e attraverso un sistema chiuso, si regola in modo intelligente la corrente per compensare e stabilizzare il sistema.



Esprimiamo la derivata della seconda variabile  $x_2 = \ddot{z}$

$$\dot{x}_2 = \dot{\ddot{z}}$$

ricavo  $\ddot{z}$  da

$$u\ddot{z} = uy - k \frac{u^2}{x_1^2}$$

$$\ddot{z} = g - \frac{k}{u} \cdot \frac{u^2}{x_1^2}$$

quindi

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = g - \frac{k_1}{u} \cdot \frac{u^2}{x_1^2} \end{cases}$$

La prima è lineare, la seconda no perché dipende dalla potenza dell'ingresso che dipende da  $x_1$ .

Siccome è instabile e ne voglio fare un sistema di controllo, prendo se la posso considerare un sistema LTI. L'uscita vorrebbe essere l'uscita univariata dalla pallina: il fotodiodo manda i fasci infrarossi e legge una tensione proporzionale alla posizione verticale:

$y$  = tensione fornita dal sensore,  
funzione lineare della posizione  
del tipo  $y = k_2 x + k_3$

Vado a porre

$$f(x, u) = 0$$

$f$  è vettoriale in genere

la prima equazione è  $\bar{x}_2 = 0$

la seconda è  $g - k \frac{u^2}{x_1^2} = 0$

$$\begin{cases} x_1 = \bar{x}_1 \\ u = \bar{u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{x}_1 = \sqrt{\frac{k_1}{g}} |u| \end{cases}$$

È uno stato di equilibrio e determinato da posto vettore di 2 valori.

Sostituendo in  $y$  il mio l'uscita di equazione.

$$f(x, u) = \bar{v} + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x}) + \left. \frac{df}{du} \right|_{u=\bar{u}} (u - \bar{u}) + \bar{x}$$

$$\underbrace{f(x, u) - f(\bar{x}, \bar{u})}_{\dot{x} - \dot{x}^i} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x}) + \left. \frac{df}{du} \right|_{u=\bar{u}} (u - \bar{u})$$

$$\underbrace{\dot{x} - \dot{x}^i}_{\delta \dot{x}} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}} \delta x + \left. \frac{df}{du} \right|_{u=\bar{u}} \delta u$$

Dato che ho n x  
variabili di stato e

p u ingressi, dovrò

calcolare tutte le possibili  
derivate.

Supponiamo di avere un sistema fatto con:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x, u) \\ \dot{x}_2 = f_2(x, u) \end{cases}$$

ognuna di queste equazioni può dipendere da tutte le variabili  
di stato.

Per linearizzare, devo fare una per una.

$$\delta \dot{x}_1 = \left. \frac{df_1}{dx_1} \right|_{x=\bar{x}} (x_1 - \bar{x}_1) + \left. \frac{df_1}{dx_2} \right|_{x=\bar{x}} (x_2 - \bar{x}_2) + \left. \frac{df_1}{du} \right|_{u=\bar{u}} (u - \bar{u})$$

Quindi:

$$A = \begin{bmatrix} \left. \frac{df_1}{dx_1} \right|_{x=\bar{x}} & \dots & \left. \frac{df_1}{dx_n} \right|_{x=\bar{x}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{df_n}{dx_1} \right|_{x=\bar{x}} & \dots & \left. \frac{df_n}{dx_n} \right|_{x=\bar{x}} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \left. \frac{df_1}{du} \right|_{u=\bar{u}} & \dots & \left. \frac{df_1}{du} \right|_{u=\bar{u}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{df_n}{du} \right|_{u=\bar{u}} & \dots & \left. \frac{df_n}{du} \right|_{u=\bar{u}} \end{bmatrix}$$



## RAPPRESENTAZIONE DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA

Lo studio della stabilità di un sistema di controllo richiede nozioni dello studio della risposta in frequenza di un sistema lineare.

Per risolvere un sistema LTI ho preso le equazioni

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Ho dato un input noto e ho osservato con e fatto l'andamento di  $x(t)$  nel tempo, risolvendo le equazioni.

L'uscita si può sempre scorporare in

→ risposta libera (che considera solo le condizioni iniziali);

→ risposta forzata (dipendente dall'ingresso);

Ipotizziamo di avere un sistema asintoticamente stabile, quindi anche BIBO stabile; cosa succede per  $t$  che tende a  $\infty$ ?

La risposta libera (sia dello stato che dell'uscita) va a  $\phi$  perché è fatta solo da esponenziali.

La risposta forzata è fatta in generale da una somma di esponenziali: eventualmente forzati da potenze di  $t$ ; a questa sommatoria si aggiunge un termine che ha la stessa forma dell'ingresso. La parte dovuta agli esponenziali tenderà a  $\phi$  e rimane quindi la parte con la stessa forma dell'ingresso.

Se in ingresso metto una rampa, in fase iniziale avrò variazioni ma pian piano che  $t$  aumenta, l'uscita diventa simile ad una rampa. Questo è vero finché il sistema è asintoticamente stabile, altrimenti gli esponenziali non andrebbero a  $\phi$ .

Se fosse internamente stabile, persisterebbero ma non andrebbero a  $\phi$ . Se fosse internamente o esternamente instabile non avrò la forma dell'ingresso.



- in transitorio breve;
- raggiunge qualcosa di sinusoidale che mantiene l'ampiezza e ha uno sfasamento;

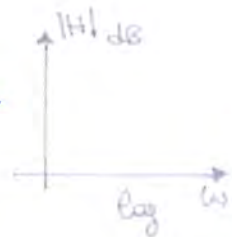
In frequenza è fondamentale studiare  $H(s)$  quando  $s$  sostituisco  $j\omega$ . Se faccio variare  $\omega$  da 0 a  $\infty$ , analizzo tutto il comportamento del sistema. Noti  $|H|$  e  $\angle H$ , si descrivono, a regime, il sistema, pulsando su la sinusoidale.  $H(j\omega)$  va da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$  e richiama risposta in frequenza. Ho diverse possibilità per rappresentare  $H(j\omega)$  graficamente. Potrei dividere parte  $\mathbb{R}$  e parte  $\mathbb{I}$  oppure come descrizione polare ( $|H(j\omega)|e^{j\angle H}$ )

### DIAGRAMMA di BODE

DESCRIVE MODULO E FASE IN TERMINI di VARIAZIONE  
 AV VARIARE di  $\omega$ .

Nel diagramma del modulo  $|H|$ :

- asse x: pulsazione  $\omega$  scala logaritmica
- asse y:  $|H|$  in dB



Nel diagramma della fase  $\angle H$ :

- asse x: pulsazione in rad/s
- asse y:  $\angle H$  in gradi



Scrive la funzione trasferimento in forma di costanti di tempo:

$$H(s) = K \frac{(1 + \frac{s}{z_1})(1 + \frac{s}{z_2}) \dots (1 + \frac{s}{z_m})}{s^r (1 + \frac{s}{p_1})(1 + \frac{s}{p_2}) \dots (1 + \frac{s}{p_{n-1}})}$$

K guadagno statico

$|H|$

di due parte il diagramma ( $\omega = \sigma^+$ )

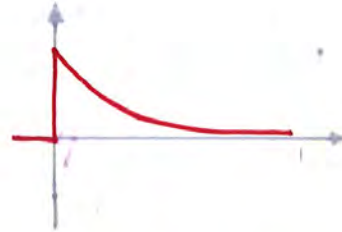
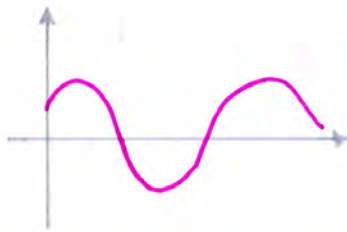
se  $r=0$ ,  $|H(j)| = K$

se  $r > 0$ , ho poli in 0 quindi  $|H(j)| = \infty$

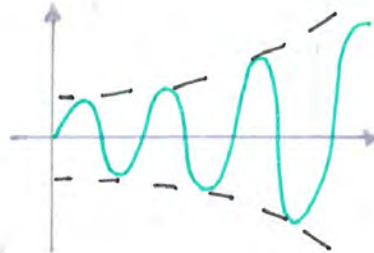
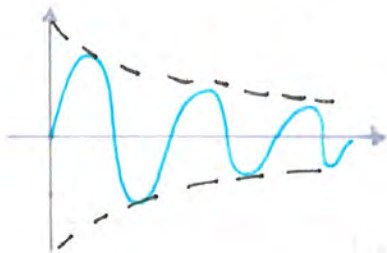
se  $r < 0$ , ho zeri in 0 quindi  $|H(j)| = 0$

Lo smorzamento varia fra 0 e 1.

per  $\zeta < 1$  ho una risposta vera e propria  
 per  $\zeta = 1$  degenera in un polinomio con due radici  
 reali coincidenti; non ho termini oscillatori  
 ma esponenziali.



$\omega_n$  è la pulsazione naturale dei poli; la pulsazione  
 caratteristica di queste soluzioni



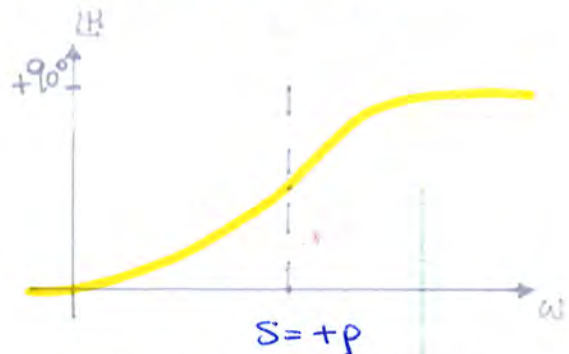
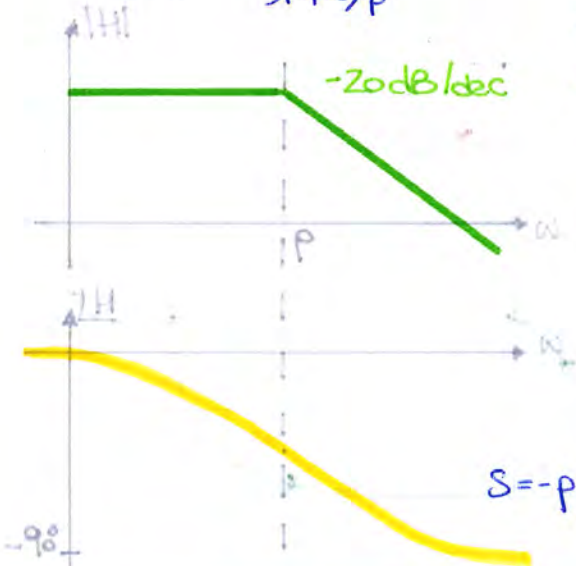
Scegliendo di decomporre il polinomio con poli complessi coniugati  
 in termini di  $\zeta$  e  $\omega_n$ , si può scrivere  $H(s)$  in costanti di  
 tempo più facilmente.

→ **ESEMPIO**

$$H(s) = \frac{K}{1+s/p}$$

$$K_{dB} = 20 \log(K)$$

Non ho poli né zeri nell'origine  
 quindi  $|H(j\omega)| = K_{dB}$



Ho un unico polo a  $\text{Re} < 0$  che  
 fa perdere fase in modo continuo

— **DIAGRAMMI POLARI** vedi SLIDE 4 —



Quindi per fare un diagramma di Nyquist servono due piani complessi, per qualsiasi tratto in cui ho decomposto il percorso di Nyquist, ottengo un diverso tratto del diagramma.

<p>Semi-asse <u>Im POSITIVO</u></p>	<p><u>RISPOSTA POLARE</u> della risposta in frequenza (analogo al diagramma polare)</p>
<p>Semi-asse <u>Im NEGATIVO</u></p>	<p>Si come <math>H(j\omega) = H^*(j\omega)</math> lo possiamo tracciare come <u>SIMMETRICO</u> del <u>DIAGRAMMA POLARE</u> rispetto all'asse reale</p>
<p><u>SEMICERCHIO</u> nel piano sd: <math>R \rightarrow \infty</math></p>	<p><u>Punto</u> che deriva dal calcolo di <math>H(j\omega)</math> prendendo <math>\omega \rightarrow \infty</math></p>
<p><u>SEMICERCHIO</u> infinitesimo nel piano S in senso <u>antiorario</u> ↓ <u>CONTORNO</u></p>	<p><u>SEMICERCHIO</u> di <math>R \rightarrow \infty</math> in senso <u>ORARIO</u> ↓ <u>DIAGRAMMA</u></p>



### POLI A PARTE REALE NULLA

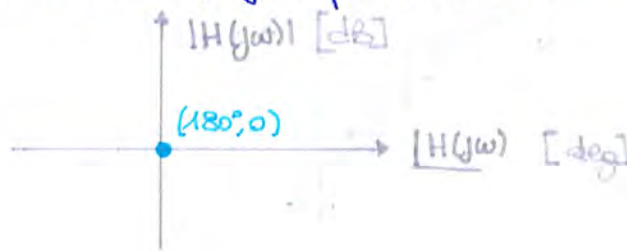
Quando  $H(s)$  ha poli con parte reale nulla, cioè ha poli sull'asse immaginario è necessario modificare il contorno di Nyquist come segue: indico con delle X sull'asse Im tutti i poli a parte reale nulla, dopo che si traccia il contorno. Per poi scelta in contorno una X su Im, traccio un semicerchio di raggio infinitesimo in senso antiorario.



## DIAGRAMMA di NICHOLS

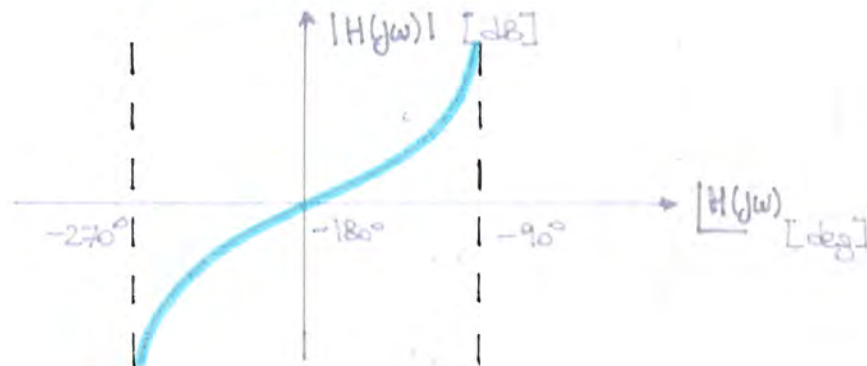
Rappresentano il modulo e la fase della risposta in frequenza  $H(j\omega)$  in un unico grafico. Rappresenta cioè la variazione della fase  $\angle H(j\omega)$  in funzione del modulo  $|H(j\omega)|$  al variare dei valori di  $\omega \in \mathbb{R}^+$ . È utile utilizzare i diagrammi di Bode per partire a tracciare i diagrammi di Nichols.

L'origine di questi diagrammi è  $(-180^\circ, 0)$ . Questo diagramma è la rappresentazione di  $H(j\omega)$  per valori di  $\omega$ .



### → ESEMPIO

$$H(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$



### ~ BODE con POLI COMPLESSI CONIUGATI

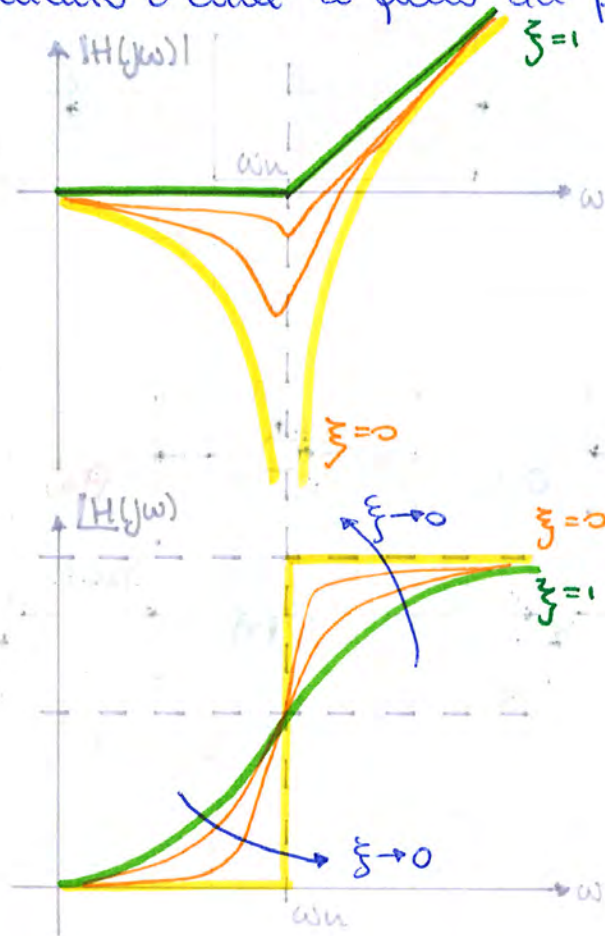
$$H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)} = \frac{K}{(s-p_1)(s-p_2)} \quad K \in \mathbb{R}$$

Conviene scrivere il denominatore nella seguente forma:  
 $p_2 = p_1^*$

$$H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)} = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

## ~ BODE con ZERI COMPLESSI CONIUGATI

Il comportamento è duale a quello dei poli:



Il contributo di poli e zeri complessi coniugati nel diagramma di Nyquist e in quello polare è conseguenza del contributo che questi danno al diagramma di Bode.



TUTTE LE GRANDEZZE (eguali) dell'ANELLO di CONTROLLO RIMAN-  
GONO **LIMITATE**.

Bisogna ricavare le CONDIZIONI sotto le quali il sistema soddisfa la definizione precedente. Per far ciò ci si avvale della **Sovrapposizione** degli EFFETTI in quanto i blocchi del sistema godono tutti delle proprietà di linearità. Quindi verifica che le grandezze sull'anello rimangono limitate applicando **UNO ALLA VOLTA** i segnali esterni limitati. Siccome vale la **sovrapposizione degli effetti**, le grandezze sull'anello devono rimanere limitate comunque prenda l'ingresso esterno limitato applicato singolarmente.

Se si verifica che, mettendo uno alla volta gli ingressi, le grandezze dell'anello rimangono limitate, allora è impossibile che mettendo le grandezze e quindi tutte insieme le grandezze dell'anello vadano a  $\infty$ .

Inizio a considerare SOLO IL SEGNALE di RIFERIMENTO e considero sotto quale condizione l'uscita rimane limitata a fronte di un  $r(t)$  limitata:

**1° CONDIZIONE** Devo studiare se il sistema è BIBO STABILE.  
Quindi **TUTTI I POLI della  $H(s)$  DEVONO ESSERE CON PARTE REALE STRETTAMENTE NEGATIVA.**

Chiedere se la  $y(t)$  rimane limitata a fronte di  $r(t)$  limitato significa chiedersi se il sistema è **ESTERNAMENTE** stabile o **BIBO STABILE**, cioè tutti i poli della funzione di trasferimento del sistema devono avere i poli con  $\text{Re} < 0$ .

Nel caso di unico ingresso  $r(t)$  avrò che nel dominio della frequenza

$$Y(s) = P(s) U(s) \rightarrow U(s) = C(s) e(s)$$

$$\downarrow$$

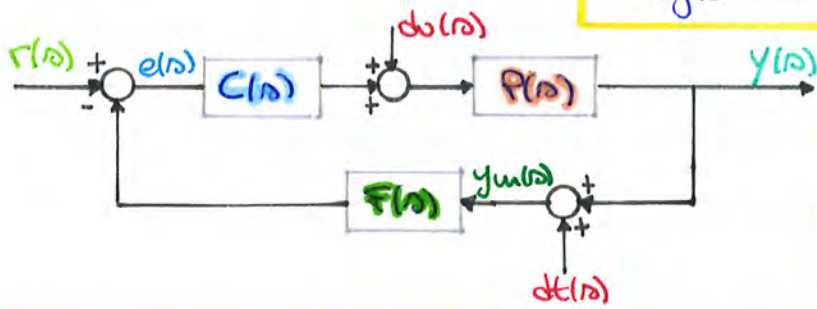
$$e(s) = r(s) - F(s) Y_m(s)$$



reale negativa (strettamente).

Ingressi:  $r, dt, du$   
 Segnali ad quello:  $y_m, u, e$

Se io verifico che posto grandezze interne rimangono limitate a fronte delle 3 grandezze esterne  $r, dt, du$  allora dimostro che qualsiasi grandezza interna è limitata a fronte di un ingresso esterno limitato.



$C(s)$  funzione di trasferimento del blocco C.

$P(s)$  funzione di trasferimento del blocco P.

$F(s)$  funzione di trasferimento del blocco F.

La funzione di trasferimento di posto sistema di controllo semplificato è una **MATRICE** di funzioni di trasferimento fatta così

$$\begin{bmatrix} e \\ u \\ y_m \end{bmatrix} = \frac{1}{1+PCF} \begin{bmatrix} 1 & -PF & -F \\ C & 1 & -CF \\ FC & P & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \\ dt \end{bmatrix}$$

$L(s) = C(s)P(s)F(s)$  è detta **FUNZIONE ad ANELLO**

Più in generale è definita come il prodotto delle funzioni di trasferimento dei blocchi presenti sull'anello.

I blocchi che non fanno parte dell'anello non entrano in gioco nel calcolo della funzione ad anello.

$S(s) = [1 + L(s)]^{-1}$  è detta **FUNZIONE di SENSITIVITA'**

$T(s) = 1 - S(s)$  è detta **FUNZIONE di SENSITIVITA' COMPLEMENTARE**



La CONDIZIONE ① deriva dal fatto che i poli di tutte le funzioni di trasferimento in  $T(s)$  sono radici dell'equazione  $1 + L(s) = 0$ . Questa condizione è necessaria ma non sufficiente.

La CONDIZIONE ② è necessaria in quanto ogni funzione di trasferimento di  $T(s)$  ha anche un termine al numeratore che potrebbe essere semplificato con il denominatore. Inoltre  $P(s)$ ,  $F(s)$  e  $C(s)$  sono funzioni di trasferimento che possono finire al denominatore della funzione di trasferimento di  $T(s)$ . In questo modo è possibile che aggiungiamo un polo a parte reale positiva, eliminando la condizione di Bode stabilità. Si dimostra che se la 2° condizione non è verificata allora almeno uno tra  $P(s)$ ,  $C(s)$  e  $F(s)$  è INSTABILE.

Ogni funzione di trasferimento può essere modellata con un analogo circuito elettronico, che implementa esattamente quella funzione in  $s$ .

- 1) Dato il controllore andare a verificare la CONDIZIONE ② è immediato, in quanto verifico che, facendo il prodotto PCF non avvengano cancellazioni problematiche (instabili (ovvero zeri e poli con parte reale positiva o nulla)).
- 2) Quando il controllore non ci viene dato, garantire che questo soddisfi la CONDIZIONE ② è automatico perché, siccome  $F(s)$  e  $P(s)$  sono date, devo solo evitare di inserire in  $C(s)$  zeri e poli instabili.

In entrambi i casi, che  $C(s)$  sia data o meno, la CONDIZIONE ② non è problematica.

COME VERIFICO LA CONDIZIONE ①?

- 1) Dato il controllore, la verifica della condizione è banale in quanto, conoscendo  $F(s)$ ,  $P(s)$  ed anche  $C(s)$  ne faccio il prodotto  $L(s)$ . Dopodiché calcolo  $1 + L(s) = 0$



Se il diagramma di Nyquist attraversa il punto critico  $-1+j0$ . Allora il sistema è **INSTABILE** perché l'equazione  $1+L(s)=0$  ha delle radici immaginarie pure (con parte reale nulla)  $\rightarrow$  Se vai sopra dal punto critico hai le radici a parte reale nulla!

Il teorema di Nyquist fornisce una condizione di BIBO STABILITÀ del sistema retroazionato. Garantendo la condizione ① e la ②, il sistema di controllo è **intrinsecamente stabile**. Garantendo solo la condizione ① non è garantito solo la **BIBO STABILITY**.

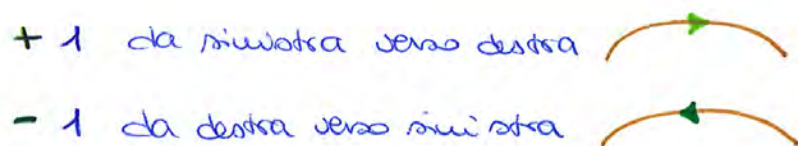
La condizione ① è verificata quando

- $N = -P_{ol}$  il numero di incrociamenti attorno al punto critico è uguale a  $-P_{ol}$   
 $P_{ol} = \phi$
- tutte le radici dell'equazione  $1+L(s)=\phi$  hanno parte reale negativa;
- il sistema retroazionato è BIBO stabile.

### Come calcolare N

È il numero di rotazioni nette, ovvero la differenza tra il numero di rotazioni in senso orario e quelle in senso antiorario:

- traccia il diagramma di Nyquist di  $L(j\omega)$ ;
- traccia una retta che parte dal punto critico in una direzione qualsiasi che un po' fuori dal diagramma di Nyquist;
- percorro tale retta allontanandomi dal punto critico, ogni volta che si incrocia una circonferenza del diagramma si avra'





## SPECIFICHE DI PRESTAZIONE

Quando formulò un problema di controllo devo elencare e formalizzare una serie di requisiti che descrivono ciò che un aspetto del sistema di controllo che intendo progettare.

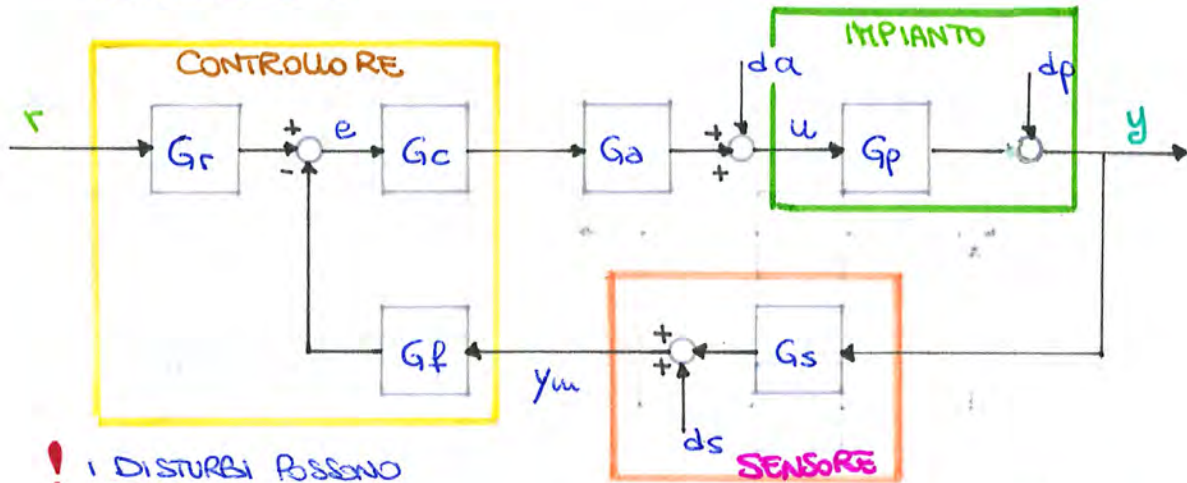
Il **REQUISITO ZERO** è garantire che il sistema sia stabile, nel mentre devo verificare che il sistema rispetti le specifiche di prestazione, assegnate da un committente o che ho cercato di tradurre io dal problema originario.

La tecnica per eccellenza nella progettazione di sistemi di controllo è la **SINTESI PER TENTATIVI NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA**. È la tecnica più efficiente per progettare il sistema di controllo in retroazione, purché il sistema da controllare sia descrivibile da un sistema LTI, anche detta **LOOP SHAPING**.

Sostanzialmente si basa sulla seguente idea: si prendono tutti i requisiti di prestazione e di stabilità assegnati e li si cerca di tradurre in dei vincoli sulle risposte in frequenza della funzione ad anello  $L(s)$ . Dopodiché, determinati i vincoli, il processo consiste nell'andare a determinare/progettare un controllore in modo che la risposta in frequenza di  $L$  risponda e soddisfi opportunamente tutti i vincoli assegnati. Da qui il nome "loop shaping", cambiare la forma del controllore in modo che  $L(s)$  rispetti i vincoli assegnati. Alcuni vincoli saranno traducibili in formule, altri in grafici.

In alcuni casi, sebbene i disturbi non siano amplificabili, alcuni di questi possono essere misurati con opportuni sensori.

Ogni blocco rappresenta un sottosistema che può essere descritto da una funzione di TRASFERIMENTO poiché ogni blocco è LTI.



! I DISTURBI POSSONO AGIRE OVUNQUE

- $G_c$  controllore a cascata
- $G_f$  blocco in feedback
- $G_r$  prefiltro

- $G_p$  impianto
- $G_a$  attvatore
- $G_s$  sensore

PRIMA  
CLASSE  
di  
SPECIFICHE  
di PRESTAZIONE

Ipotizzo che il sistema di controllo sia soggetto al solo SEGNALE di RIFERIMENTO che considero essere FOLNOMIALE. le seguenti assunzioni non fanno perdere generalità ma aiutano a semplificare i calcoli.

Assumo che

$$\begin{cases} G_r = 1 \\ G_a = \text{costante} \end{cases}$$

perché prendo si costruisce un sistema di controllo si sa cosa si vuole fare all'attvatore. Se l'attvatore è scelto bene è modellizzabile come una costante dentro un certo range di frequenze. la banda è sufficientemente lunga rispetto alle dinamiche e alle variabili del sistema.



**IMPIANTO**

$$G_p(s) = \frac{K_p}{s^p} \prod_d \left( \frac{1 + \frac{s}{z_d}}{1 + \frac{s}{\omega_d p_d}} \right) \prod_i \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_i p_i}}{1 + \frac{s}{p_i}} \right)$$

Forma in Costanti di tempo

Si hanno due reti:

- RETE INTEGRATIVA-RITARDATRICE **LAG NETWORK**  
 il polo è a frequenza più bassa rispetto allo zero
- RETE DERIVATRICE-ANTICIPATRICE **LEAD NETWORK**  
 lo zero è sempre a più bassa frequenza rispetto al polo

Il controllore ha  $\mu$  **POLI** (se  $\mu > 0$ ) o  $\mu$  **ZERI** (se  $\mu < 0$ ) a  $s=0$  ed il suo guadagno GENERALIZZATO STAZIONARIO  $K_C$  è

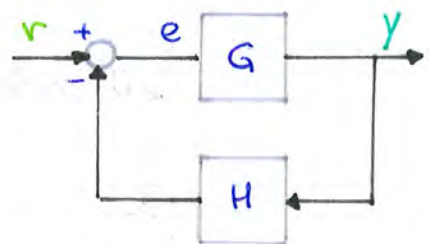
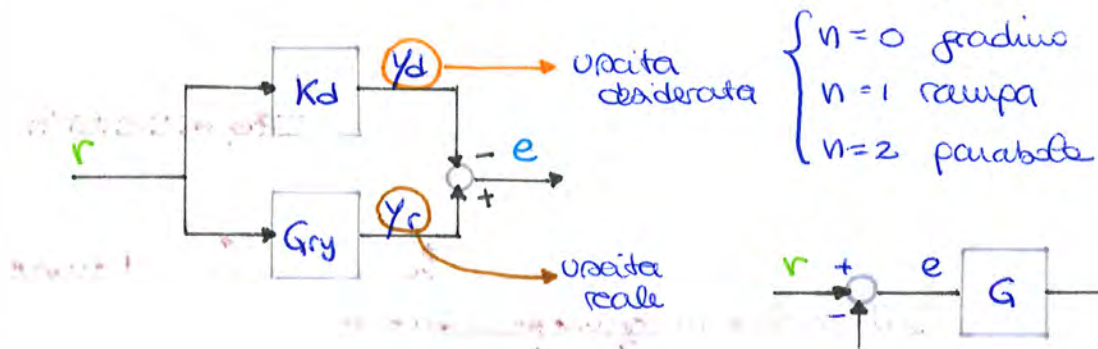
$$\lim_{s \rightarrow 0} s^\mu G_C(s) = K_C$$

L'impianto ha  $p$  **POLI** (se  $p > 0$ ) o  $p$  **ZERI** (se  $p < 0$ ) a  $s=0$  ed il suo guadagno stazionario generalizzato è  $K_p$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^p G_p(s) = K_p$$

Considero la classe di  $r(s)$  **POLINOMIALI**

$$r(t) = R_0 \frac{t^n}{n!} \mathcal{E}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} r(s) = R_0 \frac{1}{s^{n+1}}$$



$e_r^\infty$  è l'errore di inseguimento del riferimento a  $t \rightarrow \infty$  cioè in regime permanente.

$$e_r^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t)$$

Da adesso assumo che

$$H = \frac{1}{K_d}$$

è sempre possibile da dimostrare

$$\left( \begin{array}{l} K_d = \text{costante} = \\ = \text{RAPPORTO DI SCALA} \end{array} \right)$$

fatta questa assunzione cerco di capire come parametricamente che il sistema di controllo sia di un certo tipo? avere H

Considero la trasformata di Laplace dell'errore di inseguimento  $e_r(t)$

$$e_r(s) = Y_r(s) - K_d r(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} r(s) - K_d r(s) = \frac{K_d^2 r(s)}{K_d + G}$$

$$G_{re}(s) = \frac{e_r(s)}{r(s)} = \frac{K_d^2 D_G(s)}{K_d D_G(s) + N_G(s)}$$

Considero il sistema precedentemente introdotto con tutte le assunzioni fatte. Calcolo  $y(s)$  in funzione di  $r(s)$  spegnendo tutti i segnali che agiscono sull'esterno

$$y(s) = G_p(s) G_a G_c(s) e$$

caso l'uscita del

mio sistema in

funzione del riferimento

(spegni tutti i segnali

di disturbo)

$$\rightarrow e = [r(s) - G_p y_m]$$

$$\rightarrow y_m = G_s y(s)$$

$$\rightarrow y(s) = G_p(s) G_a G_c(s) [r(s) - G_p G_s y(s)]$$

$$\rightarrow y(s) [1 + G_p G_a G_c G_p G_s] = G_p G_a G_c r$$



Sistemi di tipo h

$$r(t) = R_0 \frac{t^h}{h!} \varepsilon \Rightarrow |e_r^\infty| \leq K < \infty$$

Siccome abbiamo espresso l'errore nel dominio della frequenza, come facciamo a traslare il seguente risultato

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e_r(t)| \leq K \text{ nel dominio della frequenza?}$$

Possiamo sfruttare il teorema del valore finale che dice che

$$e_r^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot e_r(s)$$

Chiediamo quindi che

$$\lim_{s \rightarrow 0} |s \cdot e_r(s)| < \infty$$

ovvero

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot e_r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_e(s) \frac{R_0}{s^{h+1}} =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} G_e(s) \frac{R_0}{s^h} = e_r^\infty(s)$$

Posto che l'errore che voglio rendere limitato lo posso avere come  $\lim_{s \rightarrow 0} G_e(s) \frac{R_0}{s^h}$ , COME DEVE ESSERE FATTA

$G_e(s)$  affinché il valore del limite sia limitato?

$G_e(s)$  DEVE AVERE ALMENO h ZERI NELL'ORIGINE: **1° condizione**

Audando a vedere come è fatta  $G_e$ , le radici del suo numeratore corrispondono con le radici del denominatore

di  $G(s)$ . Quindi,  $G(s)$  deve avere h poli in  $s=0$ : **2° condizione**

Se  $G(s)$  non ha h poli in  $s=0$  allora  $G_e(s)$  non ha

h zeri in  $s=0$ .

Questo risultato ci dice che progettando correttamente il controllore

(in termini di  $G_e(s)$  e  $G(s)$ ) possiamo far sì che il sistema

sia di un certo tipo. **GARANTITO** PERÒ CHE L'ERRORE SIA

LIMITATO, SE VOGLIAMO **GARANTIRE CHE ABIA UN DETERMINATO**

**VALORE** ALLORA DOBBIAMO PROCEDERE COSÌ:

→ **ESEMPIO**

$$r(s) = \frac{R_0}{s^{h+1}}$$

data  $\Rightarrow h=2$

$$\text{e } |e_r^\infty| \leq 7 \cdot 10^{-3}$$

data

$$G_p = \frac{k_p}{s} \pi(\dots) \pi(\dots)$$

$\rightarrow p=1$  quindi per avere errore limitato ( $\mu+p=h$ ) con  $h=2 \rightarrow \mu=1$

Devo scegliere  $k_c$  tale che

$$\left| \frac{k_d R_0}{\beta k_d + k_c k_p G_a} \right| \leq 7 \cdot 10^{-3}$$

ricordo  $\mu+p=2$

$$\downarrow$$

$$\beta=0$$

$\hookrightarrow$  da questa disuguaglianza  
mi calcolo  $k_c$  (tutti gli  
altri termini sono noti)

Se  $e_r^\infty$  deve essere  $\neq 0$ , allora prendo  $\mu > 1$ .

**CONSIDERAZIONI**

- Formalmente il risultato  $\infty$  non si potrebbe ottenere per il lim  $\lim_{s \rightarrow 0}$  perché quando  $\mu+p < h$  NON si può applicare il teorema dei valori finali perché:

$$\text{data } e_r(s) = G_r(s) \frac{R_0}{s^{h+1}} = \left[ \frac{G_r(s)}{s^h} \right] \frac{R_0}{s}$$

La funzione  $\frac{G_r(s)}{s^h}$  ha  $\begin{cases} \mu+p \text{ zeri in } s=0 \\ h \text{ poli in } s=0 \end{cases}$

se  $\mu+p > h$  allora

$\frac{G_r(s)}{s^h}$  NON è BIBO STABILE, e se posto accade non posso applicare il teorema del valore finale.

Tuttavia il risultato a cui siamo andati è **comunque** corretto perché se  $\mu+p > h$ ,  $e_r^\infty(s)$  **DIVERGE!**



Questo è vero, in quanto per imporre che l'errore sia nullo, imponiamo che  $\mu + p > r$ .

$\mu + p$  = numero totale di poli nell'origine della funzione L ed è il numero di poli nell'origine della catena diretta.

Quindi  $\mu + p$  corrisponde al tipo di sistema.

Se si vuole avere un errore d'infinitesimo nullo, allora

$$\mu + p > r$$

Le specifiche di prestazione dovute al infinitesimo portano a vincolare il numero di poli nell'origine del controllore ( $\mu$ ). Portano a vincolare anche il modulo del guadagno stazionario generalizzato del controllore  $K_G$ .

### SPECIFICHE DI PRESTAZIONE RELATIVE AI DISTURBI

Il ragionamento è analogo a quello fatto per il segnale d'infinitesimo, essenzialmente, in questo caso si suppone  $r(s)$  e considero acceso uno dei disturbi. Da ciascun disturbo ottengo delle specifiche su  $\mu$  e  $K_G$ . Alla fine, per il principio di sovrapposizione degli effetti, metterò insieme tutte le specifiche e considererò le più stringenti.

Considero un **DISTURBO POLINOMIALE**

$$d(t) = D_0 \frac{t^h}{h!} \varepsilon(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} d(s) = \frac{D_0}{s^{h+1}}$$

Il sistema di controllo rimane invariato. Possiamo, con tutte le caratteristiche precedentemente introdotte, con tutte le funzioni di trasferimento con le stesse strutture ( $G_C(s)$  e  $G_P(s)$ ...)

$$G_r = 1$$

$$G_a = \text{costante}$$

$$G_f = \text{costante}$$

$$G_s = \text{costante}$$



Per ciò, quando spegno tutti i segnali e applico solo il disturbo, tutto ciò che vedo in uscita è l'ERRORE.

L'errore sull'uscita dovuto al disturbo quindi è proprio uguale al contributo del disturbo sull'uscita.

QUESTO È VALIDO PER QUALSIASI TIPO DI DISTURBO.

L'ERRORE a REGIME PERMANENTE è

$$e_d^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e_d(t)$$

e cambia a seconda di dove è piazzato il disturbo.

Il procedimento che segue è valido per qualsiasi tipo di disturbo in qualsiasi punto del sistema.

**$d_p$  = disturbo applicato all'uscita dell'impianto**

Per calcolare  $e_{dp}$  partiamo dal presupposto che  $e_{dp} = Y_{dp}$ .

Partiamo quindi a ricavare  $Y_{dp}$ , supponendo spenti tutti i segnali eccetto  $d_p$ .

$$Y_{dp} = d_p + G_p G_a G_c (-1) G_p G_s Y_{dp}$$

$$Y_{dp} = d_p - \underbrace{G_p G_a G_c G_p G_s}_L Y_{dp} \quad \text{funzione ad anello}$$

$$Y_{dp} [1 + L] = d_p \rightarrow Y_{dp} = \frac{1}{1+L} d_p$$

$S =$  funzione di retroazione

$$Y_{dp} = S d_p \rightarrow e_{dp} = S d_p$$

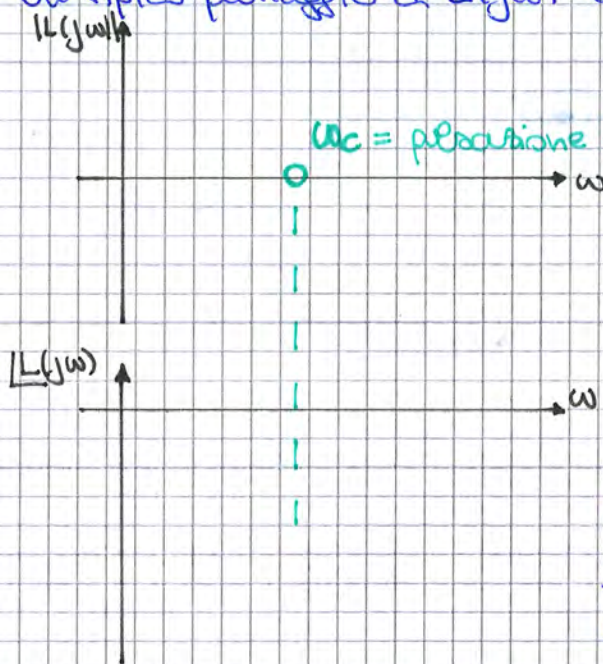
$$e_{dp}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e_{dp}$$

applico il teorema dei valori finiti

$$e_{dp}^\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s S_p(s) =$$



Un tipico plottaggio di  $L(j\omega)$  è il seguente:



$\omega_c =$  posizione di **CROSSOVER** dove la fase alle porte, il modulo di  $L$  attraversa  $0$  dB

$$\omega_c \cdot |L(j\omega_c)| = 1$$

$$(|L(j\omega_c)|_{dB} = 0)$$

È importante garantire che la fase abbia valori sufficientemente elevati nell'intorno di  $\omega_c$ .

Il comportamento della fase in  $\omega \approx \omega_c$  è determinante per la stabilità del sistema di controllo. In base al valore della risposta in frequenza possiamo distinguere determinati range di frequenza:

- $\omega \ll \omega_c$       **LOW** FREQUENCY range
- $\omega \gg \omega_c$       **HIGH** FREQUENCY range
- $|\omega \approx \omega_c|$     **MEDIUM** FREQUENCY range

A LF, tipicamente si ha  $|L(j\omega)| \gg 1$  mentre a HF si ha  $|L(j\omega)| \ll 1$ .

Abbiamo già visto che il sistema di controllo è stabile se non ci sono cancellazioni nel semipiano positivo e se

$$P_{ce} = N + P_{pe}$$

Per coefficienti di distorsione assumo  $P_{de} = 0$ ; in questo caso

$$P_{de} = N$$

quindi per avere  $P_{de} = 0$ , devo avere  $N = 0$ : il diagramma di Nyquist non ricade il punto critico



Essendo  $S = \frac{1}{1+L}$  e  $T = 1 - S = \frac{L}{1+L}$

LF	HF
$ L  \rightarrow \infty$	$ L  \rightarrow 0$
$ S  \rightarrow 0$	$ S  \rightarrow 1$
$ T  \rightarrow 1$	$ T  \rightarrow 0$

Per  $\omega = \omega_c$ ,  $S(j\omega)$  e  $T(j\omega)$  si incrociano.

Se  $|L(j\omega_c)| = 1$ , si dimostra che

$$\left| \frac{L}{1+L} \right| = \left| \frac{1}{1+L} \right|$$

$|L| = 1$  e questo accade in  $\omega = \omega_c$

Definire la RISPOSTA in frequenza di un sistema di controllo può anche definire le

### SPECIFICHE DI PRESTAZIONE DI DISTURBI SINUSOIDALI

Assumo di avere un rumore di misura del segnale SINUSOIDALE  $d_o$ . Tipicamente può essere ad alta frequenza, quindi lo studio con la precisione che non è fissata ma che varia in un certo range di valori ( $\omega_s \neq \infty$ ,  $\omega_s =$  lower bound del range). Analogamente a prima, vedo a limitare l'effetto di  $d_o$  all'uscita. Il comportamento è analogo al precedente o vedo considero lo stesso sistema di controllo generico, con le medesime funzioni di trasferimento ( $G_c(s), G_p(s), \dots$ )

$$d_o = a_s \sin(\omega_s t)$$

$$\forall \omega_s \gg \omega_s$$

$|e_{d_o}^{\omega_s}| = |y_{d_o}^{\omega_s}| \leq f_s$

$f_s > 0$

data  $a_s$  e  $\omega_s$

$d_o$  è il segnale

sinusoidale che agisce a **alte frequenze**.

#### ERRORE del disturbo

All'uscita, considerando accesso solo  $d_o$  e per tutti gli altri segnali.

Siccome  $d_o$  è un disturbo di cui io voglio minimizzare/annullare gli effetti, allora

$|e_{d_o}^{\omega_s}|$  il suo errore a regime permanente è dato da tutto ciò



$$|T(j\omega)| \leq \frac{pG_n}{\omega_0} = M_T^{HF}$$

Deve essere quindi:

$$|T(j\omega)| \leq M_T^{HF}$$

$\forall \omega \geq \omega_0$

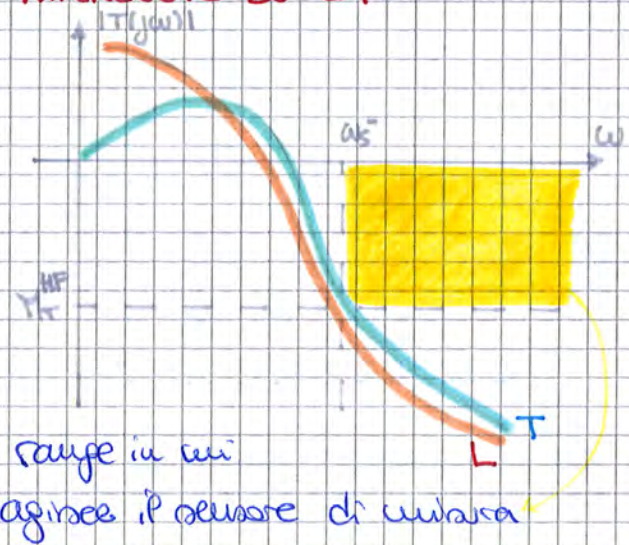
**QUESTO VINCOLO COME SI RIFERISCE SU L?**

Siccome per HF  $\omega \gg \omega_0$

$$|T(j\omega)| \approx |L(j\omega)|$$

imporre quel vincolo su T  
 significa imporre circa lo  
 stesso vincolo su L

$$|L(j\omega)| \leq M_T^{HF}$$



**SPECIFICHE di PRESTAZIONE per dp SINUSOIDALE**

Il comportamento e' analogo al precedente essenzialmente  
 cambia solo la funzione di trasferimento  $M_{dp} \rightarrow y$

$$dp = a_p \sin(\omega_p t)$$

$$\forall \omega_p \leq \omega_p^t$$

dato  $\omega_p^t$  e  $a_p$

$$|e_{dp}^o| = |y_{dp}^o| \leq p_p$$

$$p_p > 0$$

$dp$  e' il segnale

sinusoidale che agisce

a **basse frequenze**

Applicando il teorema della  
 risposta armonica

$$|e_{dp}^o| = |y_{dp}^o| =$$

$$= |a_p| \underbrace{|S(j\omega)|}_{M_{dp \rightarrow y}} |\sin(\omega_p t + \varphi)| \leq p_p$$

$$M_{dp \rightarrow y} = \frac{1}{1+L}$$

$$|a_p| |S(j\omega)| \leq p_p$$

$$|S(j\omega)| \leq \frac{p_p}{a_p} = M_S^{LF}$$



Il primo passo per progettare un sistema di controllo è ANALIZZARE le specifiche e tradurre in **vincoli** di progetto, dove questi possono essere:

- vincoli alla **STRUTTURA DEL CONTROLLORE** (in riferimento o distributo polinomiale), ovvero il numero di zeri/poli nel controllore e i vincoli al valore assoluto di  $K_c$ ;
- vincoli alla **FORMA DELLA RISPOSTA in frequenza della FUNZIONE ad ANELLO**, che ottengo traducendo specifiche relative a disturbi di tipo sinusoidale.

Bisogna capire gli aspetti interessanti della risposta transitoria e capire se c'è un segnale specifico che caratterizza bene il comportamento transitorio del sistema dinamico.

Si fa sempre riferimento al segnale gradino **ELT** perché andare ad assegnare e tradurre specifiche di transitorio è in genere complicato e può essere tanto più complicato a seconda di come viene inserito il segnale esterno nell'anello.

Ci si riferisce sempre al caso in cui è applicato come riferimento. Si può dimostrare che **le caratteristiche della risposta in transitorio del sistema di controllo non dipendono, almeno qualitativamente, dal punto in cui si inserisce il segnale esterno.**

**Uso quindi ELT** come RIFERIMENTO perché mette bene in evidenza il comportamento transitorio del sistema.

La presenza dei modi della risposta dipende dalle caratteristiche del sistema.

Quando applico un ingresso e calcolo l'uscita, ottengo la **COMBINAZIONE** dei modi opportunamente pesati a seconda del valore dei residui.

Pesi però dipendono da molte cose e da come è fatto il segnale di input che va al sistema. Quindi il segnale che va, deve caratterizzare bene il transitorio.



Una caratteristica è la **SORSAELONGAZIONE MASSIMA** della risposta, ovvero il massimo che viene raggiunto in transitorio.

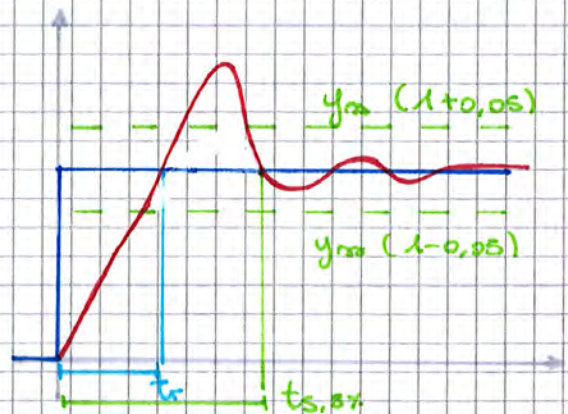
Un'altra è la **velocità** con cui il sistema raggiunge il regime permanentemente, questa viene definita da due parametri.

Perché due? Se guardo l'insieme di risposte precedenti non è immediato dire quale sia il più veloce: quella che arriva prima al valore desiderato ma quella che si arresta prima.

Questi due parametri sono

①  **$t_r$  tempo di risalita**

ovvero il tempo impiegato per raggiungere la prima volta il valore che la funzione avrà a regime permanentemente;



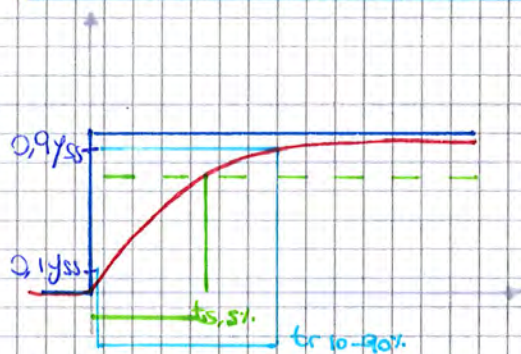
②  **$t_s$  tempo di arrestamento**

ovvero dopo quanto si arresta in un intorno ragionevolmente piccolo della risposta.

Definisco una fascia di tolleranza, ad esempio  $\pm 5\%$ :

$t_{s,5\%}$  è il tempo di arrestamento al 5% ovvero dove entra una pa' una esce più dalla fascia del 5%.

Cosa succede a  $t_r$  in un sistema sottomorzato?



Non posso determinare  $t_r$  come prima. Inoltre la sorsaelungazione è  $\phi$ .  
 $t_s$  è invece definito.

Dato che per definizione  $t_r$  sarebbe

de  $10\%$ , cambio la definizione.

Definisco  $t_r$  come il tempo necessario a passare da  $10\%$  a  $90\%$  della risposta

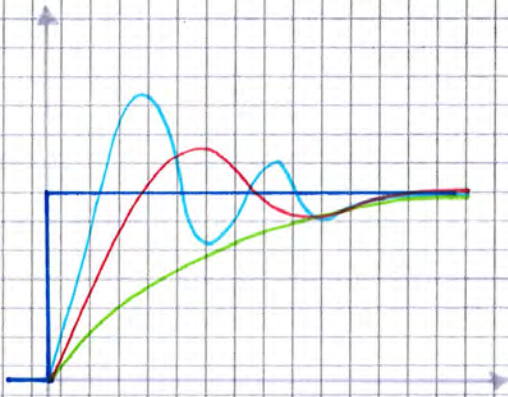


Questo è fatto da:

- numeratore costante;
- denominatore polinomio del 2° ordine con coppia di poli complessi coniugati con  $\text{Re} < 0$ , poli di stabili;
- $K_c = 1$ .

### COME È FATTA LA RISPOSTA?

$$T(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$



Raggiungiamo forte l'ingresso con errore Nullo ( $K_c = 1$ )

A seconda di  $\omega_n$  e  $\xi$  caratterizza la risposta se è sovra o sottosmorzata, più o meno veloce, dato che:

$\omega_n$  determina la velocità della risposta

$\xi$  determina quanto oscilla e la sovraesagerazione.

Trovate  $\omega_n$  e  $\xi$  forse ricavare  $\hat{\sigma}$ ,  $t_r$  e  $t_{0.9}$  dato che sono esprimibili

Come:

$$\hat{\sigma} = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$t_r = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} (\pi - \arccos(\xi))$$

$$t_{0.9} = \frac{1}{\omega_n \xi} \ln\left(\frac{100}{\sigma}\right)$$



**COME CARATTERIZZO  $T_p$  e  $S_p$**  se  $T$  è un prototipo del 2° ordine?

Prendo  $T$ , sostituisco  $s$  con  $j\omega$ , calcolo il massimo e ottengo  $T_p$  come

$$T_p = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = f_{Tp}(\xi)$$

analogaemente caratterizzo  $\omega_B$

$$\omega_B = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2 + \sqrt{2-4\xi^2 + 4\xi^4}} = f_{\omega_B}(\xi, \omega_n)$$

Posso fare la stessa cosa per la funzione  $S$  e ricavare  $S_p$ :

$$S_p = \frac{\Delta \left( \frac{2\xi}{\omega_n} + \frac{S}{\omega_n^2} \right)}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} \Delta + \frac{\Delta^2}{\omega_n^2}}$$

Alla fine voglio avere dei vincoli su  $L$ , che unisce  $S$  e  $T$

La  $\hat{\Delta}$  dipende solo da  $\xi$  e la stessa cosa è vera per  $T_p$  e  $S_p$  dato che posso esprimere  $S_p$  come:

$$S_p = \frac{2\xi\sqrt{2+4\xi^2} + 2\sqrt{1+8\xi^2}}{\sqrt{1+8\xi^2} + 4\xi^2 - 1}$$

Da  $S_p$  e  $T_p$  ricavo che, assegnata una specifica su  $\hat{\Delta}$ , per accettare un' basta settare opportunamente  $\xi$ .

Fissato  $\xi$ ,  $t_r$  e  $t_s$  dipendono solo da  $\omega_n$  e presto vale anche per la pulsazione di crossover  $\omega_c$ .

Ipotizziamo la generica specifica in risposta transitoria

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\Delta} < 10\% \\ t_r < 0,5\Delta \\ t_s, 1\% \leq 1,5\Delta \end{array} \right.$$

Data  $\hat{\Delta}$  posso trovare quanto deve valere  $\xi$ .

$$\hat{\Delta} = e^{+\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$



Posso trovare  $\omega_c$  anche da  $t_s$ , i.e. con un ragionamento analogo.

Quindi prendo per il massimo tra le  $\omega_c$  ottenute!

Sceglio la fissazione di crossover, ovvero quella che voglio che abbia  $L$ .

Dovendo essere

$$\omega_c \geq 3,94 \text{ rad/s}$$

sceglierò

$$\omega_c = 4 \text{ rad/s}$$

Ora devo studiare come deve essere fatta  $L$  perché  $T$  abbia un picco massimo di margine di fase o uguale a  $\bar{\phi}_p$  e abbia lo stesso picco di margine o uguale a  $\bar{\phi}_p$ :

$$\max_{\omega} |S(j\omega)| \leq \bar{\phi}_p$$

$$\max_{\omega} |T(j\omega)| \leq \bar{\phi}_p$$

So la risposta in frequenza di  $T$  in funzione della risposta in frequenza di  $L$ :

$$T(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)}$$

posso scrivere  $T$  come un complesso:

$$T = M e^{j\phi} \quad \begin{cases} \text{dove } M \text{ è il modulo} \\ \phi \text{ è la fase} \end{cases}$$

Anche  $L$  è complesso ma mi conviene sempre scriverlo come

$$L = U + jV \quad \begin{cases} \text{dove } U \text{ è } \Re \\ V \text{ è } \Im \end{cases}$$

Impiego quindi:

$$T = \frac{L}{1+L}$$

che posso scrivere come:



## QUAL'E' IL SIGNIFICATO?

Se ho  $\hat{\delta} \leq 10\%$ , implica  $\max_w |T(j\omega)| \leq T_p = 1,05$ .

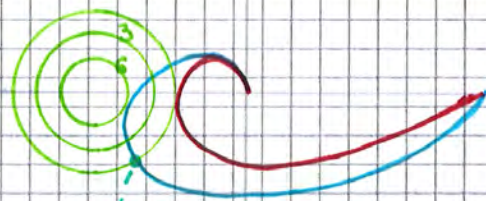
Se il massimo in  $\omega$  deve essere  $\leq 1,05$ , allora

$$|T(j\omega)| \leq T_p = 1,05 \quad \forall \omega$$

Il controllore deve essere tale per cui ha una particolare forma  $\rightarrow$  **QUALE?**

\* IIR

Ma vuol dire che  
 $T_p$  aumenta, i  
 cerchi crescono uno  
 dentro l'altro.



punto IP  
 modulo vale  $T_p$

DEVO PROGRAMMARE UN CONTROLLORE  
 TALE PER CUI LA FUNZIONE AD  
ANELLO NON ENTRA NEI CERCCHI

Posso ripetere il ragionamento su  $S$  e il suo pacco:

$$\frac{1}{(1+u)^2 + v^2} = M_s^2 = \text{costante}$$

$$(u-1)^2 + v^2 = \frac{1}{M_s^2}$$

quindi il cerchio ha

$$\begin{cases} C = (-1, 0) \\ r = \frac{1}{M_s} \end{cases}$$

Per rispettare la specifica, la funzione ad anello deve passare dall'**ESTERNO** del cerchio di competenza.

Questo passo di progetto è più semplice se fatto nel piano di Nichols.



Quindi: prendo passo da  $(t \rightarrow \infty)$  o  $(s \rightarrow 0)$ , il controllo si comporta come

$$G_c = \frac{K_c}{s^m}$$

Vincolando il modulo di  $K_c$ .

Posso applicare la sovrapposizione degli effetti alle specifiche.  $\mu$  deve essere il piccolo possibile per accentuare le specifiche di prestazione.

Da i vari  $\mu$ , vedo per a prendere il più grande che ho alle diverse specifiche.

Se ho:

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = 2$$

prendo  $\mu_2$  perché soddisfa anche la prima specifica

Mi focalizzo su  $K_c$  delle specifiche con il  $\mu$  "finale"; ovvero, supponendo di avere

$$\mu_1 = 0 \quad |K_c| > 7$$

$$\mu_2 = 1 \quad |K_c| > 3,5$$

$$\mu_3 = 0 \quad |K_c| \text{ qualunque}$$

$$\mu_4 = 1 \quad |K_c| > 0,8$$

la  $\mu$  scelta è  $\mu = 1$  quindi scelgo

$$|K_c| > 3,5$$

~~La seconda tipologia di specifiche riguarda i riferimenti sinusoidali.~~

Non devo usare il teorema del valore finale: mettendo in ingresso un segnale sinusoidale, in regime permanente tutti i segnali sinusoidali e non esiste il limite per  $t \rightarrow \infty$ .

Se metto in ingresso a un sistema LTI una sinusoidale, in uscita trovo ancora una sinusoidale di cui si calcolano fase e ampiezza. Ricavo delle condizioni alla funzione di trasferimento che legano ingresso e uscita.



Se dal diagramma di Nyquist vedo che il sistema è instabile, devo modificare il diagramma per garantire la stabilità: cambio il numero di incrociamenti del punto critico, aggiungendo zeri e poli.

Se  $K_c > 0$ , il sistema sarà stabile o stabilizzabile.

Se  $K_c < 0$ , il sistema sarà instabile e non stabilizzabile.

Supponiamo di prendere  $K_c > 0$ , ma si può il numero di poli a parte  $\text{Re} \neq 0$  stesso un sistema instabile...

Devo capire se introducendo le reti dinamiche posso stabilizzare il sistema, facendo in modo che il numero di incrociamenti sia tale da renderlo stabile.

Ipotesi di cui scelto opportunamente il segno di  $K_c$ . Se  $K_c$  non è vincolato, posso avere vincoli su  $\mu$  alla fine della traduzione delle specifiche. Come scelgo il modulo?

Se non ho altre specifiche metto **1**. Se dalle specifiche invece devo che deve essere vincolato, ad esempio

$$|K_c| > 5$$

in studio il segno e scelgo un valore poco più grande ma non troppo:

$$K_c = 5,2$$

$$\text{o } K_c = 5,5$$

ma anche 6 potrebbe andare bene.

Fisso questo valore e vado a vedere se le reti dinamiche effettivamente mi servono.

↳ mi servono se vado solo  $\frac{K_c}{s^u}$  ma garantisco stabilità e specifiche

Devo visualizzare la situazione reale sul diagramma di Nichols.



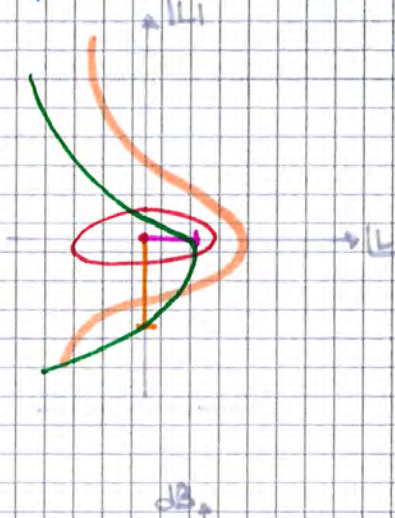
Perché è importante quanto? Per le differenze di modello, garantisce di margini unitari del margine di fase  $M_p$  (ad esempio  $50^\circ$ ) e del margine di guadagno  $M_g$  (esempio  $7\text{ dB}$ ).

Nel caso in pratica,  $L_2$  ha

$$M_p - 130^\circ$$

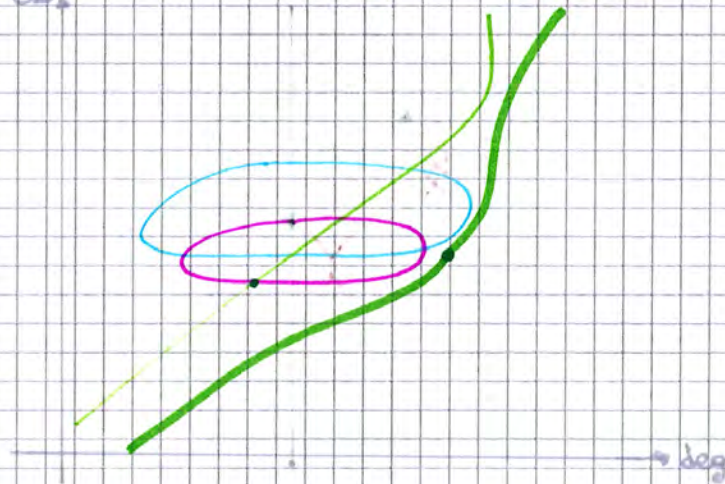
$$M_g - 7\text{ dB}$$

QUESTO NON BASTA! Garantendo  $M_p$  e  $M_g$  non basta in assoluto perché potrei avere questo andamento.



Allora definiremo delle sguavate circolari da cui stare fuori ottengo sistemi, in via di transizione, peggiori.

Garantire i margini è legato al problema di garantire una  $\Delta$  non più grande di un certo valore.



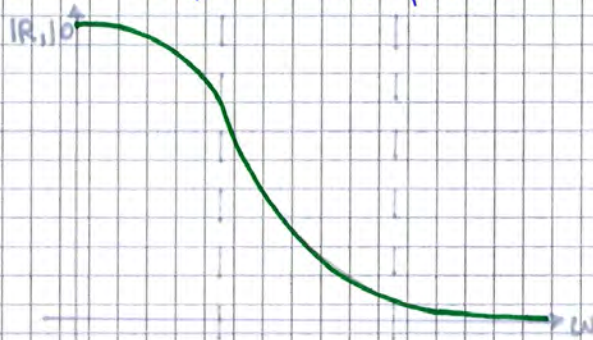
COME È FATTA LA LEAD NETWORK? È una funzione di trasferimento unito con poli e zeri

$$\begin{cases} z_0 = z_0 \\ p_0 = \mu_0 z_0 \end{cases} \text{ con } \mu_0 > 1$$

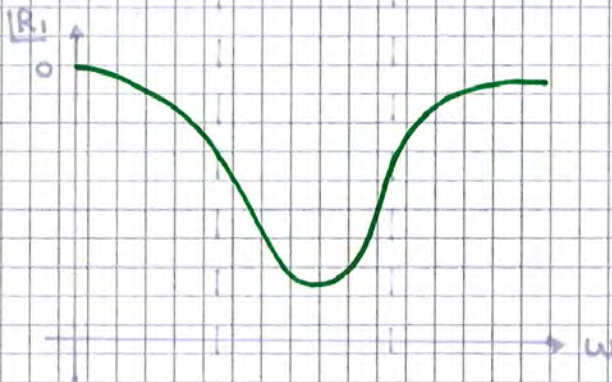
Proprio la rete dinamica vuol dire regolare il valore di  $\mu_0$  e  $z_0$ .



La sua risposta in frequenza è:

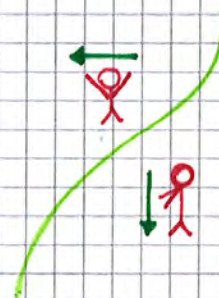


parte da  $\phi$  e con il polo scende di 20 dB e si arresta a  $\phi$ .



La fase parte da 0 e arriva a  $-90^\circ$  e risale a 0.

L'effetto della lag network è quello di abbassare il modulo e "scavare" un buco nella risposta in frequenza della fase.



Ho due casi:

- ① la curva è nei cerchi  $\rightarrow$  aumento la fase tramite una rete **LEAD** (non LAG),
- ② la curva è fuori dai cerchi  $\rightarrow$  non serve diminuire la fase.

La perdita di fase della rete **LAG** NON SERVE. Questa rete integrativa serve solo a diminuire il modulo nei problemi in cui il  $|Kc|$  risulta vincolato.



Come definire una matrice

le da un nome

`fx >> A =`

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -20 & -8 & 10 \\ -16 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

`fx >> A = [-1 2 -2; -20 -8 10; -16 -1 3]`

[ ] vuol dire che è una matrice

sono gli elementi della riga separati da uno spazio e poi ; per dire che passo alla riga successiva oppure vado a capo

Da INVIO e mi visualizza la struttura dati della matrice

`fx >> A = [-1 2 -2; -20 -8 10; -16 -1 3]`

A =  
 -1 2 -2  
 -20 -8 10  
 -16 -1 3

Posso definire un vettore riga

`fx >> K = [-7, 11, 13];`

`fx >> K` INVIO

K =  
 -7 11 13

! Se non da INVIO non visualizza.

Se continuo senza

INVIO e non mi da

ERRORS vuol dire

che è andato a buon fine

Attenzione: Matlab è case sensitive  $A \neq a!$

Posso definire un vettore colonna

`fx >> F = [-54; -113]`

`fx >> F` INVIO

F =  
 -54  
 -113

Ma anche per uno scalare

`fx >> p = [59] INVIO`

p =  
 59

↳ Dato che è uno scalare posso non mettere [ ]



Le precisioni hanno una certa precisione, alcune sono molto robuste. Ogni calcolo è svolto con la massima precisione possibile ma non visualizza tutte le cifre decimali possibili.

`fx >> format long`

```
ans = 1,0000000000001 ... ..
      ... ..
      ... ..
```

`fx >> format short`

```
ans =
      1,000 ... ..
      ... ..
      ... ..
```

Come determino gli autovalori

In modo diretto

`fx >> autvA = eig(A)`

`autvA =`

2,000

-3,000

-5,000

In modo indiretto: gli autovalori sono radici del polinomio caratteristico

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

il grado del polinomio corrisponde a quanti coefficienti ha il polinomio

Ad esempio:

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^3 - 15\lambda^2 - 2\lambda + 9$$

`fx >> p = [1 3 -15 -2 9]`

`fx >> radp1 = roots(p)`

`radp1 = ...`

`...`



## ES. 2 SISTEMA RESPIRATORIO

### Come è fatto?

È costituito da una serie di organi (vie respiratorie). Lo scopo è portare  $O_2$  all'interno dell'organismo; questo  $O_2$  deve raggiungere la circolazione e va raccolta  $CO_2$  per portarla all'esterno.

L' $O_2$  è fondamentale per funzioni e reazioni.

Le vie aeree partono dalla bocca e dal naso, viene introdotta dell'aria. A seconda dell'attività che stiamo facendo, il meccanismo meccanico fa sì che l'aria in ingresso abbia una ben determinata pressione all'interno delle vie aeree. Quest'aria fluisce attraverso la trachea, arriva ai bronchi che si dividono in rami minori (bronchioli). Questi terminano nei polmoni dove ci sono gli alveoli. Gli alveoli sono come i contenitori finali all'interno dei quali va a finire l'aria. Qui avviene lo scambio tra  $O_2$  e  $CO_2$ .

Perché tutto funzioni perfettamente, è importante che l' $O_2$  arrivi nei polmoni ad una ben determinata pressione: né troppo elevata per non danneggiare gli alveoli, né troppo bassa altrimenti lo scambio con la circolazione non avviene in modo efficiente.

Posso costruire un modello matematico del sistema respiratorio di un paziente sano e quindi procedere al rilevare le risposte del sistema prendo e sottoposto a certi test.

Si può usare come banco di prova per individuare altre patologie che si manifestano in altri pazienti.

Questo modello si può usare per progettare sistemi di ventilazione meccanica o respirazione assistita.

### Come modello matematicamente il sistema?

Si va a consultare la letteratura scientifica del caso, si ricavano articoli e modelli.

A noi il modello interessa per capire quando lavora bene il modello del ventilatore meccanico.

Può essere messo in analogia con un sistema fluido - d'acqua (un sistema di tubi). Sostanzialmente posso descrivere tenendo in considerazione alcuni effetti: per esempio (le vie aeree spargano parziale resistenza).



Attraverso l'inerzia si stabilisce un flusso d'aria - Costante

$\rightarrow Q$

Per modello il fatto che ne aree centrali e superiori offrono una certa resistenza al passaggio  $\rightarrow R_c$

queste ne aree in modo da trappolano aria  $\rightarrow C_s$

L'aria che prosegue incontra ancora della resistenza al passaggio

$\rightarrow R_p$

Alla fine l'aria giunge nei polmoni, dove vedo il contenitore flessibile come l'effetto di due cedevolezza in serie  $\rightarrow C_e, C_w$

Una è dovuta alla cedevolezza degli alveoli, l'altra è quella toracica.

Si stabilisce ai capi la pressione alveolare  $P_A$ . Si indica con

$P_{aw}$  la pressione ai capi di  $C_s$

Le VARIABILI DI STATO sono

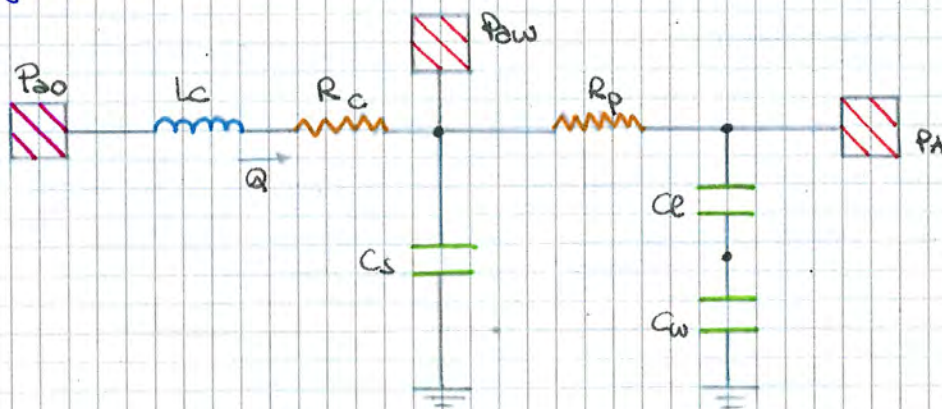
$\rightarrow$  tensioni ai capi dei condensatori

$\rightarrow$  correnti negli induttori

(dopo è spiegato meglio perché)

Quindi:  $P_A, P_{aw}$  e  $Q$

L'ingresso è  $P_{ao}$



Posso osservare che

$$C_i = \frac{C_e \cdot C_w}{C_e + C_w}$$

ed è l'effetto complessivo per i polmoni.

Per descrivere un generale sistema fisico per parte da un'equazione ingresso-uscita tempo variante, non lineare

{ equat? }

Questo circuito è lineare, i suoi componenti non variano nel tempo. È un sistema LTI!



Si fissa una scelta.

Tutte le volte che il mio sistema è di tipo elettrico o si è ricaricabile, allora posso sempre scegliere come  $x$  tutte le tensioni ai capi dei condensatori e tutte le correnti che fluiscono attraverso gli induttori.

Le uniche grandezze da entrare con le derivate fanno sono le variabili di stato

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

In un circuito elettrico, chi porta in ballo le derivate sono i condensatori, dove:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i$$

e gli induttore, dove:

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} \cdot v$$

In un problema che non è di natura elettrica, cosa si fa?

↓  
classe dei sistemi meccanici

Nei sistemi meccanici, sempre ragionando nello stesso modo, una scelta che va sempre bene per le variabili di stato è: tutte le posizioni delle masse (o delle inerzie) e le velocità di tutte le masse. → SISTEMA MECCANICO IN TRASLAZIONE

tutte le posizioni angolari delle inerzie e tutte le velocità angolari delle inerzie. → SISTEMA MECCANICO IN ROTAZIONE

Definisco quindi il VECTORE delle VARIABILI di STATO

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{aw} \\ P_A \\ Q \end{bmatrix}$$

passa su  $C_s$   
 passa su  $C_i$   
 passa su  $L_c$

Si cerca ora di sapere le matrici  $A, B, C$  e  $D$ .

Devo sapere per ora 3 equazioni; parto dalle prime variabili di stato e cerco di esprimere la  $\frac{d}{dt}$  di  $x_1$  come combinazione lineare delle variabili di stato stesse e degli ingressi



$$\frac{dP_{aw}}{dt} = \frac{1}{C_S} \left( Q - \frac{P_{aw} - P_A}{R_p} \right) =$$

$$\frac{dP_{aw}}{dt} = \frac{1}{C_S} Q - \frac{P_{aw}}{C_S R_p} + \frac{P_A}{C_S R_p}$$

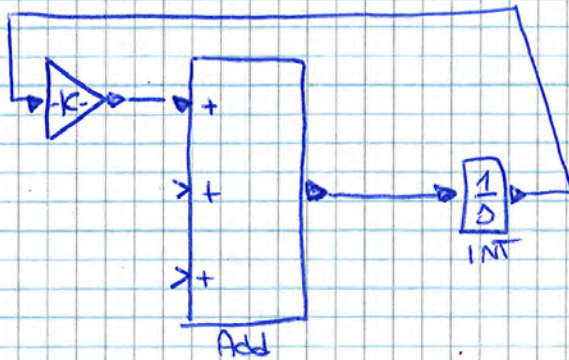
Come decido il volume totale?  
Può essere un'incognita.



Nel rettangolo, PARALLELIZZO, OGNUNO

$$-1/(R_p * C_s) \quad (= K)$$

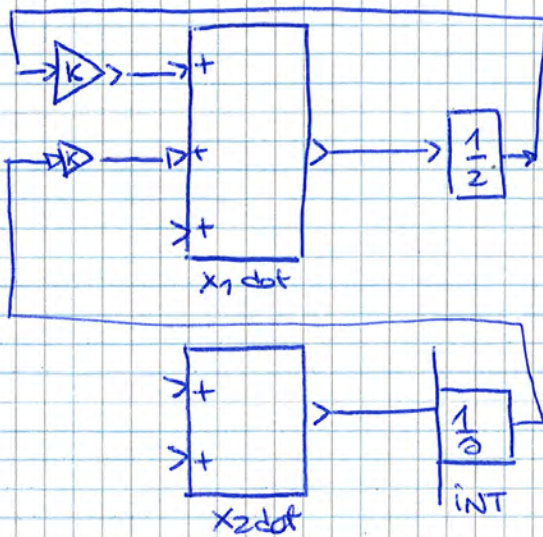
perché i valori possono variare da paziente a paziente



Passo ora al secondo termine:  $\dot{x}_2$  prendo dalla seconda equazione

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{R_p C_1} x_1 + \frac{-1}{R_p C_1} x_2 \quad (+ \phi x_3 + \phi x_4 + \phi u(t))$$

Mi serve quindi un altro sommatore per 2 ingressi



integrando  $\dot{x}_2$   
otengo  $x_2$  per il primo accumulatore

$x_2$  nella prima  $\Sigma$  ha un coefficiente:  $1/(R_p * C_s)$

Passo a  $x_3$ , ottenuta nella terza equazione

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{L_c} x_1 - \frac{R_c}{L_c} x_3 + \frac{1}{L_c} u \quad (+ \phi x_2 + \phi x_4)$$



Crea uno scope anche per  $x_2$  e  $x_3$  ( $y_2$  e  $y_3$ )

Posso simulare, dando un ingresso opportuno.

Come attribuisco valori ai parametri. Torneo al workspace di Matlab

```
fx >> Rc = 1;
      Rp = 0.5;
      e via dicendo
```

una ogni volta devo riscrivere.


Faccio un mini script

↳ Apro un nuovo file da Matlab e lo salvo (parametri\_pz) % commento

```
Rc = 1;
Rp = 0.5;
Ce = 0.2;
Cw = 0.2;
Cs = 0.005;
Lc = 0.01;
C1 = (Ce * Cw) / (Ce + Cw)
```

% questi sono i  
parametri base  
del paziente

e salvo.

lo faccio partire  (vedo di metterlo nella stessa cartella dove salvo simulink)

Il mio ingresso è  $P_{ao}$ , la pressione di ingresso per le vie respiratorie.

1° caso  $P_{ao}$  ha forma sinusoidale con ampiezza = 2,5 = A (cm H<sub>2</sub>O)  
freq = 15 cicli/min = f

questo vuol dire che

$$u = 2,5 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

dato che  $\omega = 2\pi f$

$$u = 2,5 \sin(0,5\pi t)$$

f va in Hz  
(cicli/sec)

$$f = \frac{15}{60} = 0,25 \text{ Hz}$$

non c'è sfasamento  
perché lo do io l'input  
e lavorando in un  
LTI decido io dove è  
l'origine

Come lo applico? Torneo a simulink

↳ library → Sources e ho tutti i tipi di segnali

applicabili come ingresso

↳ Sine waves



$f_x \Rightarrow c = \text{eye}(4)$

*%matrice diagonale 4x4*

$C =$   
 $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

$f_x \Rightarrow D = \text{zeros}(4,1)$

*%matrice di 4x1 di 0*

$D =$   
 $\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$

$f_x \Rightarrow s = \text{tf}('s')$

*%definisce una funzione di trasferimento s*

Transfer function:

$D$

$f_x \Rightarrow H = C * (S * \text{eye}(4) - A)^{-1} * B + D$

# 1 ..

# 2

# 3

# 4

*% ottengo la matrice H(s) per un sistema di un ingresso e 4 uscite -> vettore colonna*

Come ne prendo una?

$f(x) \Rightarrow H_1 = H(1)$

*% ed estraggo la prima*



$G_b$  e  $I_b$  sono riferiti ad un tempo sufficientemente lontano dall'ultimo pasto (e sono costanti).

Le loro potenze non sono i valori basali ma il valore a cui schizzano subito dopo i pasti e, il tempo (molto lungo) per tornare ai valori basali.

Le equazioni ci dicono che:

$$\rightarrow \dot{G}(t) = -p_1(G(t) - G_b) - \beta(t)G(t) + \Gamma(t)N_s$$

La derivata della glicemia è proporzionale alla differenza fra glicemia e valore basale, dipende dal glucosio del pasto.

$$\rightarrow \dot{I}(t) = -n I(t) + r(t)/V$$

l'insulina dipende anche dalle velocità infusionali dell'esterno

$$\rightarrow \dot{\beta}(t) = -p_2 \beta(t) + p_3(I(t) - I_b)$$

Le derivate delle variabili non possono essere scritte come combinazioni lineari fra le variabili e gli ingressi:

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu \rightarrow \text{Non posso linearizzare!}$$

Devo linearizzare queste equazioni!

L'obiettivo del sistema di controllo è regolare il andamento di [glucosio] per mantenerlo vicino a  $G_b$ .

Cerco com'è fatto lo stato di equilibrio che corrisponde a questo stato di funzionamento e linearizzo in quell'intorno.

Considero gli ingressi

$$\begin{cases} \bar{r} = 16,66667 \text{ mU/min} \\ \bar{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad [\text{a ingresso pasto non c'è assorbimento}]$$

Calcolo il punto di equilibrio

corrisponde ad una particolare soluzione stazionaria delle equazioni differenziali in cui le variabili sono costanti e quindi le loro derivate sono nulle.

Impiego equazione per equazione che le derivate delle variabili d' stato siano nulle.



A si ottiene come

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \end{array} \right] \Bigg|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \quad \begin{cases} x_1 = g(t) \\ x_2 = I(t) \\ x_3 = \beta(t) \end{cases}$$

$$f_1(x, u) = g(t) \quad f_2 = I(t) \quad f_3 = \beta(t)$$

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \end{array} \right] \Bigg|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$$

quindi  $\tilde{A} = \left[ \begin{array}{ccc|c} -p_1 - \cancel{p_1} 0 & \emptyset & -g(t) & \\ \emptyset & -n & \emptyset & \\ \emptyset & +p_3 & -p_2 & \end{array} \right] \Bigg|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$

Devo valutare in  $\begin{cases} x=\bar{x} \\ u=\bar{u} \end{cases}$  ma qui non compaiono i greci

quindi sostituisco a  $\beta(t)$  e  $g(t)$  i valori trovati per  $\bar{x}$   
 ovvero  $\bar{\beta} = 0$  e  $g(t) = 81$ .

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|c} -p_1 & \emptyset & -81 & \\ \emptyset & -n & \emptyset & \\ \emptyset & +p_3 & -p_2 & \end{array} \right]$$

B si ottiene come

$$B = \left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_p} & \end{array} \right] \Bigg|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$$



$$0 = \left[ \frac{\partial f}{\partial u_1} \quad \frac{\partial f}{\partial u_2} \right] \Big|_{\substack{x = \bar{x} \\ u = \bar{u}}}$$

Si vede che l'equazione è lineare e non dipende dagli ingressi

$$\tilde{D} = [0 \quad 0]$$

