NUMERO: 1320 ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Rossi C.

MATERIA: Fisica Nucleare con Applicaz. Biomediche +riassunti +temi + Eserc., Prof.Lavagno

FISICA NUCLEARE con applicazioni biomediche

andrea.lavagno@polito.it

Il corso si suddivide in 3 PARTI, non completamente separate e distinte:

1) FISICA NUCLEARE DI BASE
2) RADIOATTIVITÀ, FUSIONE, FISSIONE NUCLEARE, PRINCIPI DELLE PARTICELLE ELEMENTARI, ACCELERATORI DI PARTICELLE
3) INTERAZIONE DELLA RADIAZIONE CON LA MATERIA, RIVELATORI, APPLICAZIONI (MEDICINA NUCLEARE)

LIBRI

- KRANE (preferibile) → è il + completo, tratta la parte di fisica nucleare
- POVH → tratta la parte di particelle elementari
- LILLEY → tratta la parte di applicazioni

ESAME

scritto + orale obbligatorio

scritto:
- esercizi numerici
- domande aperte (anche dimostrazioni)

ESEMPI DI DECADIMENTI

1) decadimento alfa

$$^{238}U \rightarrow {}^{234}Th + {}^{4}He$$

$$M_U - M_{Th} - M_\alpha > 0$$

2) decadimento del neutrone

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$M_n - M_p - m_e - m_\nu > 0$$

3) decadimento del carbonio 14

$$^{14}C \rightarrow {}^{14}N + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$M_C - M_N - m_e - m_\nu > 0$$

4) decadimento del muone

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

$$m_\mu - m_e - m_{\nu_e} - m_{\nu_\mu} > 0$$

NUMERO ATOMICO E NUMERO DI MASSA

$$^{A}_{Z}X$$

$X \rightarrow$ elemento

$A = N + Z \rightarrow$ n° di massa

$Z \rightarrow$ n° atomico

$N \rightarrow$ n° di neutroni

massa elettrone convertita in energia $m_e c^2 = 0,5\ MeV$

ATTENZIONE

In tutti i decadimenti, le masse prima e dopo la reazione non sono uguali: il bilancio di massa tra stato finale e iniziale è sempre positivo

Le trasformate di Galileo permettono di passare da un sistema all'altro.
Il tempo è sempre uguale per tutti, è comune ad ogni sistema inerziale.

$$\begin{cases} x' = x - v t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

TRASFORMATE DI GALILEO

$$v_{x'} \xrightarrow{?} v_x$$

$$v_x' = \frac{d x'(t)}{dt'} \equiv \frac{d x'(t)}{dt} \quad ; \quad v_y' = \frac{d y'(t)}{dt} \quad ; \quad v_z' = \frac{d z'(t)}{dt}$$

trasformate per le velocità:

$$\begin{cases} v_x' = v_x - v \\ v_y' = v_y \\ v_z' = v_z \end{cases}$$

L'inversione è banale (ricordando $t = t'$)

$$\begin{cases} x = x' + v t' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = v_x' + v \\ v_y = v_y' \\ v_z = v_z' \end{cases}$$

Calcolando le ~~velocità~~ accelerazioni:

$$\begin{cases} a_x' = a_x \\ a_y' = a_y \\ a_z' = a_z \end{cases} \qquad \boxed{\bar{a}' = \bar{a}}$$

(infatti si parlava di sistemi inerziali)

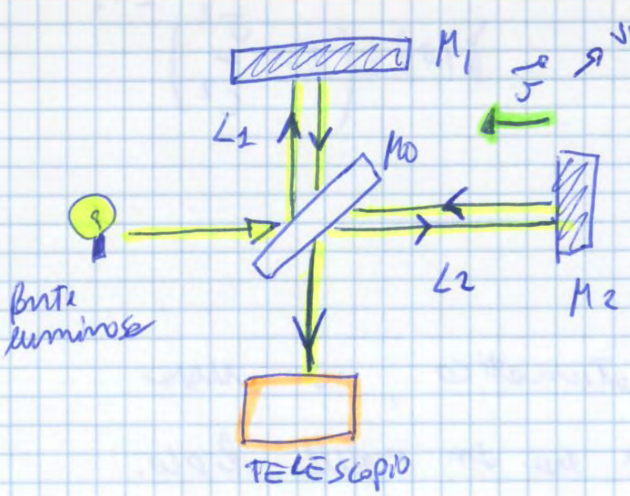
Quindi l'elettromagnetismo non è invariante rispetto a diversi sistemi di riferimento inerziali.

A fine 800, per risolvere questa contraddizione, si suppose che le onde elettromagnetiche fossero un fenomeno a parte, dato che le onde hanno bisogno di un mezzo per propagarsi. Per ipotesi si suppose che anche la luce si dovesse propagare in un mezzo: l'etere (si suppose ~~la~~ l'esistenza di questo mezzo).

L'etere doveva essere solidale con il movimento della Terra, trasportato dalla Terra o con velocità relativa rispetto ad essa.

dal fenomeno di aberrazione (spostamento del telescopio per osservare le stelle) si capì che l'etere doveva avere velocità relativa.

Con l'esperimento di Michelson - Morley (1887) si voleva scoprire l'esistenza o meno dell'etere



Se L_1 e L_2 sono uguali; l'onda fa lo stesso percorso, quindi non c'è interferenza.

Se esistesse un etere in movimento con velocità $\vec{v}$ (cosiddetto vento d'etere) modificherebbe il tempo di percorrenza di un solo percorso (tra L_1 e L_2) e quindi si produrrebbe ~~interferenza~~ interferenza.

mentre la dinamica Newtoniana è sbagliata, è approssimata, vale solo in certi particolari regimi.

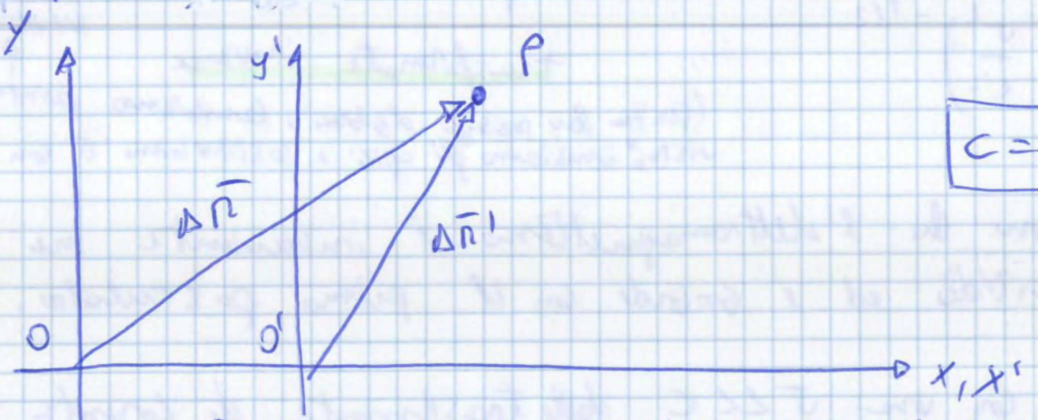
PRINCIPI DELLA RELATIVITÀ

1) Tutte le leggi della fisica sono invarianti in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Quindi l'etere non esiste, l'elettromagnetismo non è una eccezione, è invariante ~~anch'esso~~ anch'esso!

2) La velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento inerziali, indipendentemente dalla velocità dell'osservatore e della sorgente che emette la luce.

Quindi $c = cost.$ in qualsiasi sistema di riferimento inerziale.
La seconda è un'affermazione molto pesante, dato che implica l'esistenza di una costante universale. Conseguenze importanti:



$$\boxed{c = cost.}$$

Il punto P si muove con velocità c in tutti e due i sistemi di rif.

O misura la velocità della luce come $\dfrac{|\Delta\bar{r}|}{\Delta t}$

O' misura la velocità della luce come $\dfrac{|\Delta\bar{r}'|}{\Delta t'}$

Se è valido il secondo principio $\dfrac{|\Delta\bar{r}'|}{\Delta t'} = \dfrac{|\Delta\bar{r}|}{\Delta t}$ quindi

necessariamente $\Delta t \neq \Delta t'$ dato che $\Delta\bar{r} \neq \Delta\bar{r}'$

$$u_x' \overset{?}{\longrightarrow} u_x$$

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'}$$ NB questa volta non possiamo più sostituire t' con t, $t' \neq t$!

Componente x di U del punto P

$dt' \neq dt$ (t' è funzione di t!) $\quad \frac{dt'}{dt} = \left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)\gamma(v)$

$$u_x' = \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{(u_x - v)\cancel{\gamma(v)}}{\left(1-\frac{v u_x}{c^2}\right)\cancel{\gamma(v)}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} = u_x'$$

$$u_y' = \frac{dy'}{dt'} \neq u_y = \frac{dy}{dt}$$

$$u_y' = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \frac{u_y}{\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)\gamma(v)}$$

$$u_z' = \frac{u_z}{\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)\gamma(v)}$$

Se $v \ll c$ otteniamo di nuovo le trasformate di Galileo.

TRASFORMATE PER LA VELOCITÀ:

INVERSE

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{u_x' + v}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}} \\ u_y = \dfrac{u_y'}{\left(1 + \frac{v u_x'}{c^2}\right)\gamma(v)} \\ u_z = \dfrac{u_z'}{(1 + v u_x'/c^2)\,\gamma(v)} \end{cases}$$

DIRETTE

$$\begin{cases} u_x' = \dfrac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \\ u_y' = \dfrac{u_y}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)\gamma(v)} \\ u_z' = \dfrac{u_z}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)\gamma(v)} \end{cases}$$

$$L(v) = \underbrace{\frac{x_2'}{\gamma} + v t_2} - \left(\underbrace{\frac{x_1'}{\gamma} + v t_1}\right)$$

O' si muove con velocità v rispetto ad O

abbiamo visto $x' = (x - v t)\gamma$

in O vediamo l'oggetto in movimento con velocità v

in O' vediamo l'oggetto fermo

$$L(v) = \frac{x_2' - x_1'}{\gamma(v)} = \frac{L(0)}{\gamma(v)}$$

$$\boxed{L(v) = \frac{L(0)}{\gamma(v)}}$$

effetto di contrazione delle lunghezze

$L(v)$ sono minori o uguali di $L(0)$ dato che $\gamma(v) \geq 1$ e uguale per condizioni non relativistiche $\gamma = 1$

2) Per un orologio in moto il tempo scorre più lentamente che per un ~~orolo~~ orologio identico in quiete (dilatazione dei tempi).

Calcoliamo la distanza temporale ~~...~~, un intervallo di tempo tra due fenomeni.

Ad esempio misuriamo 4 secondi tra due lampi di luce quando la sorgente è ferma.

$$\Delta t(0) = t_2' - t_1' \qquad (x_2' = x_1' \text{ dato che la sorgente è ferma})$$

Calcoliamo lo stesso intervallo di tempo tra i due lampi di luce se la sorgente è in movimento. Calcoliamo $\Delta t(v)$ con le trasformate di Lorentz.

$$\Delta t(v) = t_2 - t_1 = \left(t_2' + \frac{v x_2'}{c^2}\right)\gamma(v) - \left(t_1' + \frac{v x_1'}{c^2}\right)\gamma(v)$$

$$\Delta t(v) = (t_2' - t_1')\gamma(v) = \Delta t(0)\gamma(v)$$

$$\boxed{\Delta t(v) = \gamma(v)\,\Delta t(0)}$$ effetto di dilatazione dei tempi

Il puzzle della vita media dei muoni

La Terra è bombardata ogni giorno dallo spazio

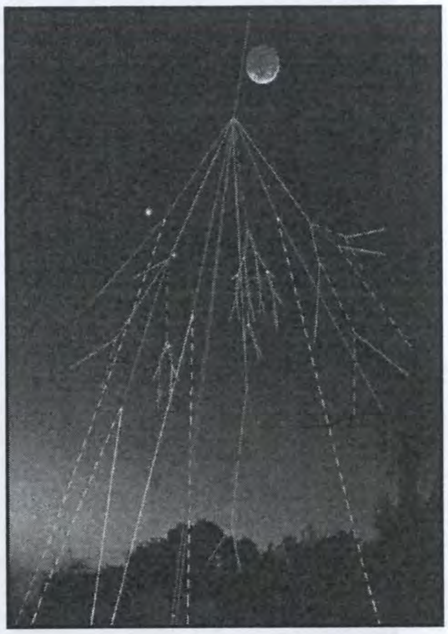
Già dai primi anni del 1900 i Fisici sapevano che la Terra è soggetta quotidianamente a una vera e propria pioggia di particelle di provenienza extraterrestre

Questa radiazione è formata da:
protoni (86%), He (13%), nuclei (1%), elettroni (2%) e pochissimi raggi γ

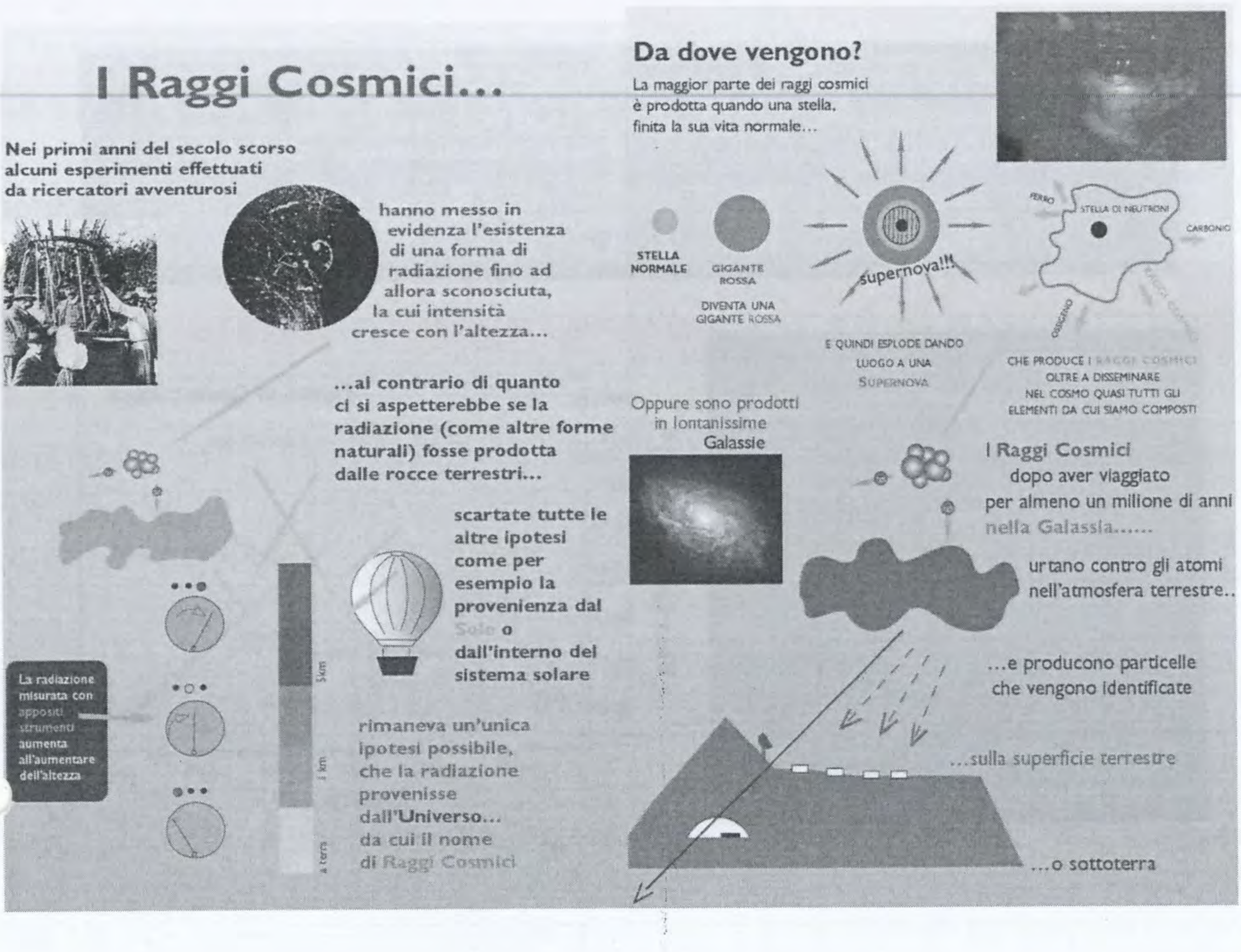
Il nome dato a queste particelle provenienti dal cosmo è:

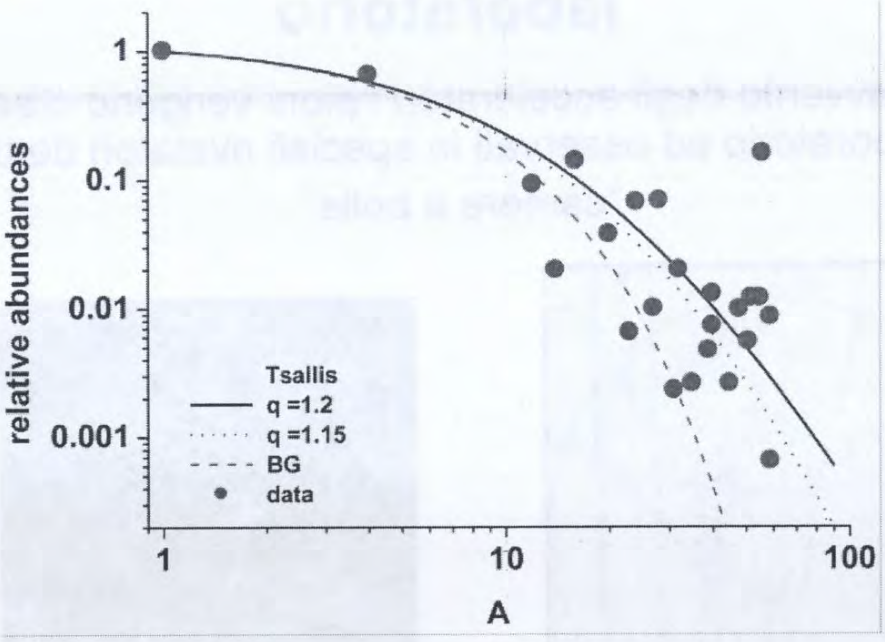
raggi cosmici

L'energia dei protoni va da circa 100 MeV a 10 TeV (e in piccolissima misura anche oltre)



N.B. **Elettronvolt** = 1 *elettronvolt* (eV) equivale all'energia acquisita da un elettrone quando sottoposto a una differenza di potenziale pari a 1 Volt (1MeV = 10^6 eV & 1 TeV=10^{12} eV)





The chemical composition of cosmic rays (relative to hydrogen at 1 TeV)

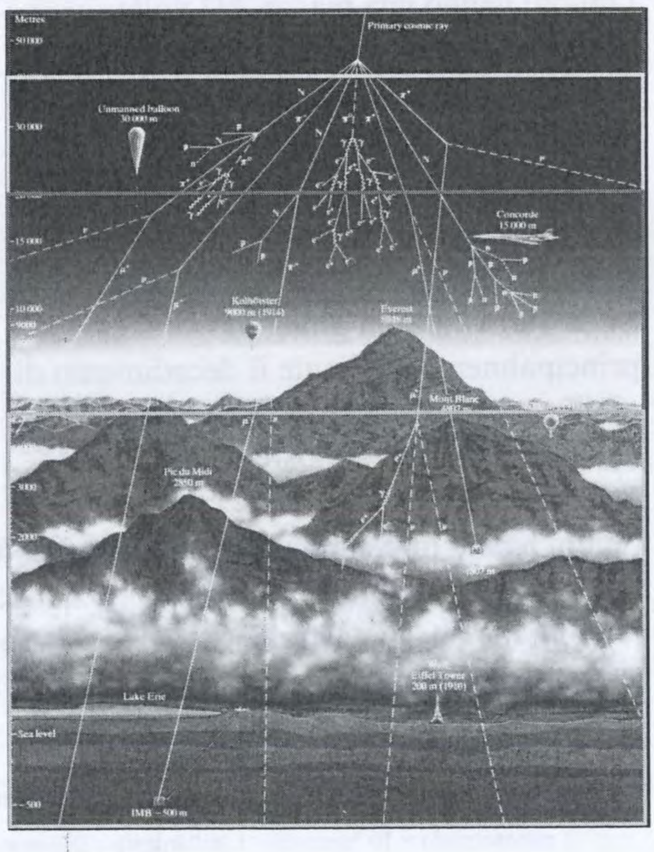
La popolazione di particelle nell'atmosfera

• **A 35 Km slm:** inizio atmosfera, prime interazioni protoni-nuclei dell'aria

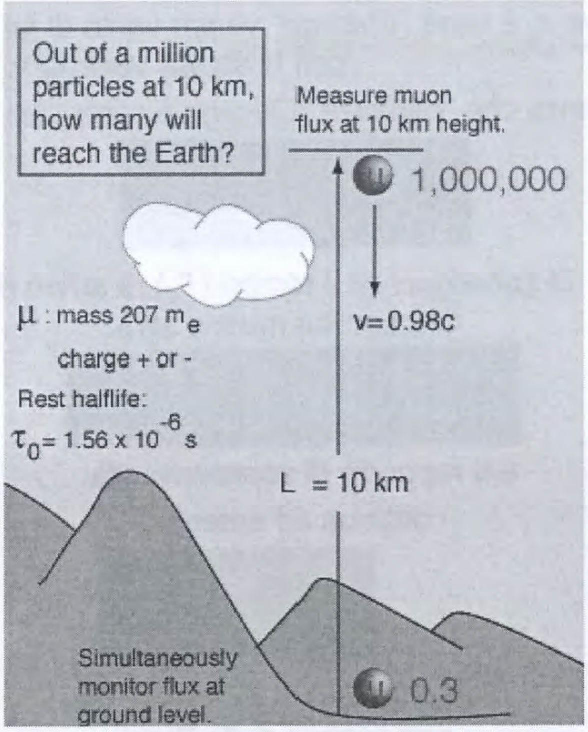
• **tra 20 e 35 km slm:** avvengono i processi descritti, sono presenti in prevalenza protoni e nuclei, i pioni decadono dando vita a muoni, elettroni e γ

• **tra 5 e 20 km slm:** elettroni e γ si convertono gli uni negli altri moltiplicandosi e perdendo energia, costituiscono il grosso del flusso della radiazione

• **dal livello del mare a 5 km slm:** muoni (μ) e neutrini prodotti **PIÙ IN ALTO** sono la maggioranza delle particelle sopravvissute



Come è possibile osservare i muoni sulla terra?



Teoria non-relativistica

Distanza: $L = 10^4$ m

Il tempo necessario al muone per arrivare sulla terra è:

$$T = \frac{L}{v} = 34 \cdot 10^{-6}\, s = 21.8 \cdot \tau_0$$

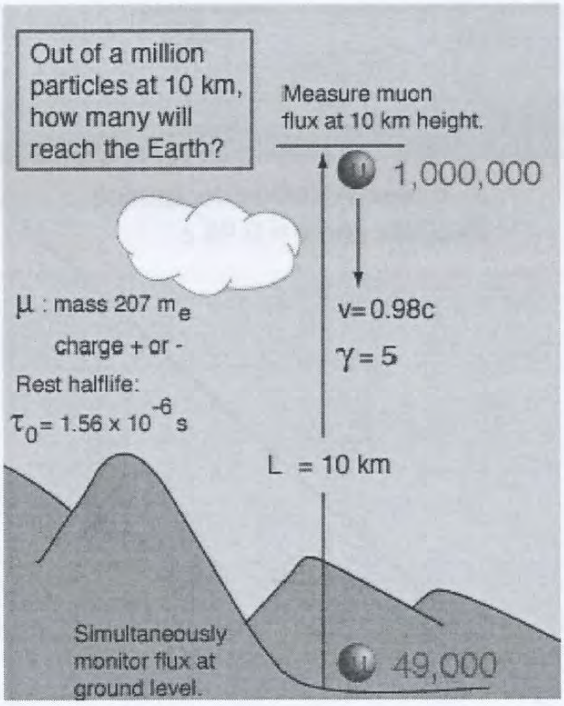
Dove τ_0=1.56 x 10^{-6} s è la vita media dei muoni nel sistema di riferimento a riposo

IL RAPPORTO DI SOPRAVVIVENZA:

$$\frac{I}{I_0} = 0.27 \cdot 10^{-6}$$

Secondo la meccanica classica solo 0.3 muoni su 1.000.000 arriverebbero sulla Terra!!
Non è ciò che si osserva !

Teoria relativistica: sistema di riferimento della Terra (dilatazione dei tempi)



Poiché i muoni viaggiano ad una velocità v=0.98 c, l'osservatore a riposo sulla Terra lo vedrà vivere un tempo medio:

$$\tau = \gamma\, \tau_0 \qquad \gamma = 5$$

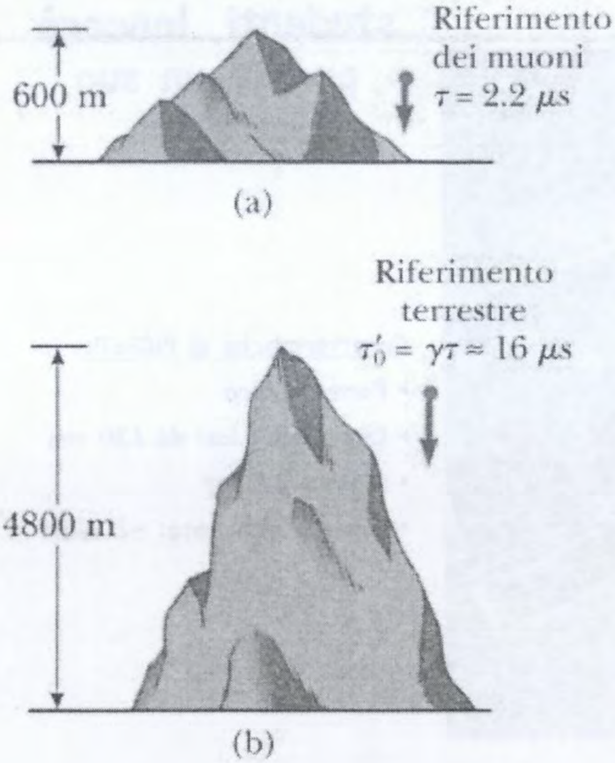
Di conseguenza il tempo (T_T) di arrivo del muone su "Chicago" sarà:

$$T_T = \frac{L}{v} = 34 \cdot 10^{-6}\, s = 4.36 \cdot \tau$$

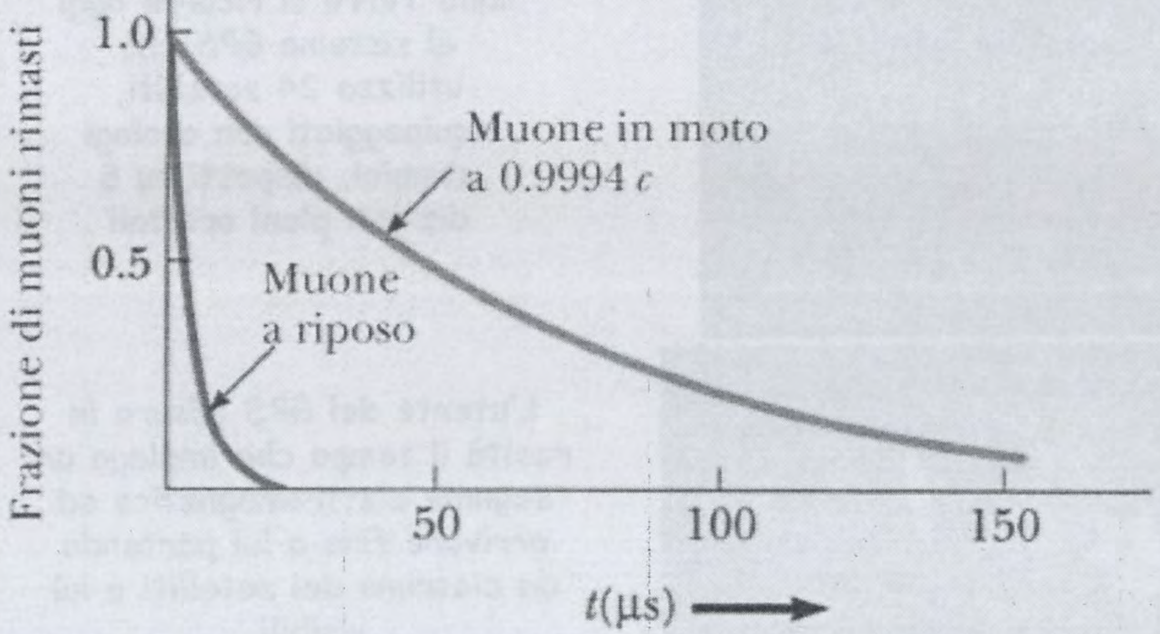
Il rapporto di sopravvivenza:

$$\frac{I}{I_0} = 0.049$$

Su 1.000.000 di muoni 49.000 arriveranno sulla Terra.
I dati sperimentali confermano il calcolo!

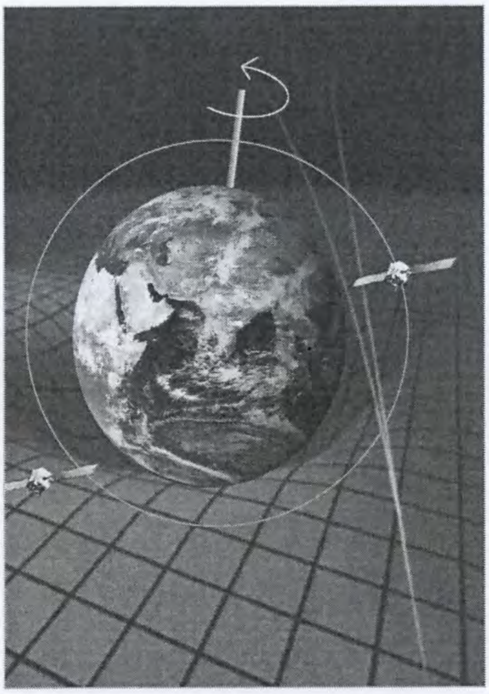


(a) Muoni che percorrono solo 600 m secondo le misure fatte nel loro riferimento proprio, ove la loro vita media è di circa 2.2 μs. A causa della dilatazione dei tempi, la vita media dei muoni misurata dall'osservatore sulla Terra risulta più lunga. (b) I muoni che vanno alla velocità di 0.99 c percorrono circa 4800 m per un osservatore posto sulla Terra.

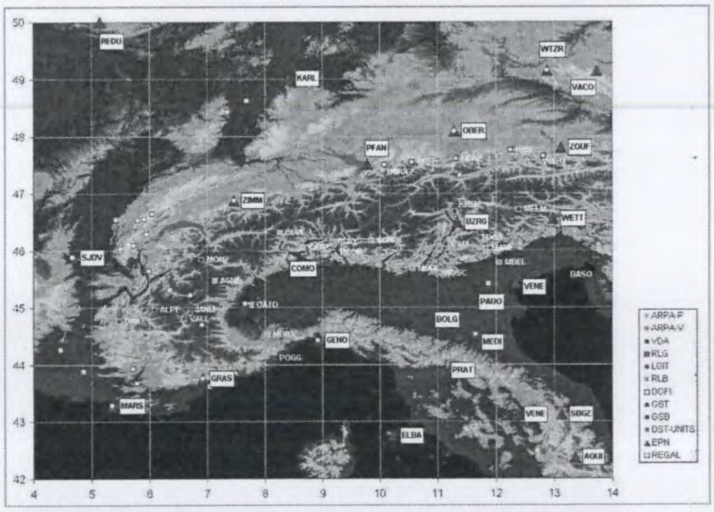


Senza considerare gli effetti relativistici il GPS risulterebbe fortemente impreciso

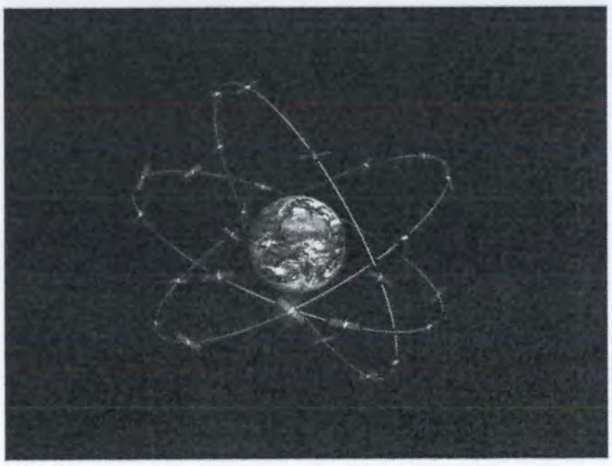
Effetto del campo gravitazionale
Dilatazione dei tempi
Sincronizzazione



Effetto netto relativistico: l'orologio in orbita è più veloce di quello a Terra di 38600 ns al giorno che corrispondono a 11,58 km



Il GPS ha molte applicazioni diverse tra le quali, ad esempio, il monitoraggio delle deformazioni della crosta terrestre



Il GPS sarà presto affiancato, con migliori prestazioni, dal nuovo posizionamento globale europeo denominato GALILEO, che utilizzerà 30 satelliti, distribuiti su 3 piani orbitali, inclinati di 56 gradi rispetto al piano equatoriale

DINAMICA RELATIVISTICA

Nella dinamica newtoniana si ottiene l'equivalenza

massa inerziale = massa gravitazionale

Nella dinamica relativistica questa equivalenza cade!

Prendiamo una particella di massa m in un sistema di riferimento isolato e a riposo: $K=0$, $E_{INT}=0$. Questa particella è descritta da:

$$\begin{cases} K = \frac{1}{2} m v^2 \\ \vec{p} = m \vec{v} \end{cases} \qquad \text{sono accoppiate} \quad K = \frac{p^2}{2m}$$

(equazioni non relativistiche)

Ma non siamo più nel campo delle trasformate di Galileo, le velocità non si compongono semplicemente sommandosi (inoltre vi è una velocità max che non si può superare = velocità della luce)

possiamo quindi pensare la quantità di moto come una funzione di v $f(v)$ più complessa rispetto a v (in modo a includere il 2° principio della relatività)

$$\vec{p} = m \vec{v}\, g(v) \qquad \text{Condizione} \quad g(v=0) = 1$$

Già prima dell'avvento della relatività erano noti decadimenti radioattivi in cui vi era differenza di massa tra stato iniziale e finale e comparsa di energia cinetica.
L'impostazione che si fa è associare una certa energia associata ad una massa m anche se la massa è a riposo.

Per avere l'equivalenza $E = m$ manca una costante con le dimensioni di una velocità al quadrato (per far tornare le unità di misura).
Einstein scelse come costante la velocità della luce

$$E = c^2 m$$

$= \frac{1}{2} m v^2$ energia cinetica classica!

I conti tornano, abbiamo il corrispondente classico quando $\frac{v}{c} \to 0$

RELAZIONE DI CONSERVAZIONE

$$\boxed{K_i + m_i c^2 = K_f + m_f c^2} \iff E_i = E_f$$

~~ESERCIZIO~~

ESERCIZIO

$$\begin{cases} K(v) = mc^2(\gamma(v) - 1) \\ p(v) = \gamma(v) m v \end{cases} \Rightarrow K(p) = ?$$

$$\gamma(v) = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$p^2 = \gamma^2 m^2 v^2 \to p^2 c^2 = c^2 \gamma^2 m^2 v^2 \quad (1)$$

$$K^2 = m^2 c^4 (\gamma^2 - 2\gamma + 1) \quad (2)$$

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} ?$$

$$\underbrace{(1) - (2)}_{} \Rightarrow c^2 p^2 - K^2 = m^2 c^2 (\gamma^2 v^2 - \gamma^2 c^2 + 2\gamma c^2 - c^2)$$

entrambe si riferiscono ad una energia, le possiamo sottrarre

$$p^2 c^2 - K^2 = m^2 c^2 \left[\frac{v^2 - c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + 2\gamma c^2 - c^2 \right] = m^2 c^2 \left[-c^2 + 2\gamma c^2 - c^2 \right]$$

$$= m^2 c^2 2c^2 (\gamma - 1) = 2mc^2 \cdot \underbrace{mc^2(\gamma - 1)}_{K} = 2mc^2 K \Rightarrow \boxed{K^2 + 2mc^2 K = p^2 c^2}$$

Per adesso consideriamo la soluzione positiva:

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

NB Abbiamo visto che se $m \neq 0$, quando $\frac{v}{c} \to 1$, $E \to \infty$

Quindi una particella massiva non può raggiungere una velocità pari a c perché ci vorrebbe una energia infinita e le equazioni divergerebbero.

$$p = m v \gamma \quad (2)$$

$$E = m c^2 \gamma \quad (1)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow v = c^2 \frac{p}{E} = c^2 \frac{p}{\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}} = c \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m^2c^2}{p^2}}}$$

Se $m \neq 0$, v è necessariamente minore c (strettamente minore) ed è minore di un fattore $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m^2c^2}{p^2}}}$

Se $m \neq 0$ $\quad v < c$

Se $m = 0$ $\quad v = c \Rightarrow E \equiv K = pc \Rightarrow p = \frac{E}{c}$

e la luce può essere interpretata in maniera corpuscolare, ma con la condizione che necessariamente $m = 0$

NB $\begin{cases} p = m v \gamma \\ E = m c^2 \gamma \end{cases}$ se $m = 0$, $v = c \Rightarrow \gamma = \infty \to$ sono forme indeterminate!

Se $m = 0 \to v = c$

$$c = \lambda \nu, \quad E_\gamma = h\nu, \quad \underbrace{p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}}_{\text{corrispondenza tra quantità ondulatorie}}$$ e quantità corpuscolari delle onde elettromagnetiche

Esercizio

Si calcoli l'energia del fotone relativo alla luce avente lunghezza d'onda 400 nm (violetto) e a quella di 800 nm (rosso). (Queste sono all'incirca le lunghezze d'onda estreme dello spettro visibile.)

L'energia di un fotone con lunghezza d'onda di 400 nm è:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{400\ \text{nm}} = 3.1\ \text{eV}$$

L'energia di un fotone con lunghezza d'onda di 800 nm è:

$$E = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{800\ \text{nm}} = 1.55\ \text{eV}$$

Esercizio

La lunghezza di soglia dell'effetto fotoelettrico per il potassio è 564 nm. Qual è il lavoro di estrazione φ per il potassio? Qual è l'energia cinetica massima degli elettroni emessi, se si usa luce avente lunghezza d'onda di 400 nm?

Il lavoro di estrazione, pari all'energia minima da fornire perché si verifichi l'effetto fotoelettrico è:

$$\varphi = h\nu = \frac{hc}{\lambda_{\text{soglia}}} = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{564\ \text{nm}} = 2.2\ \text{eV}$$

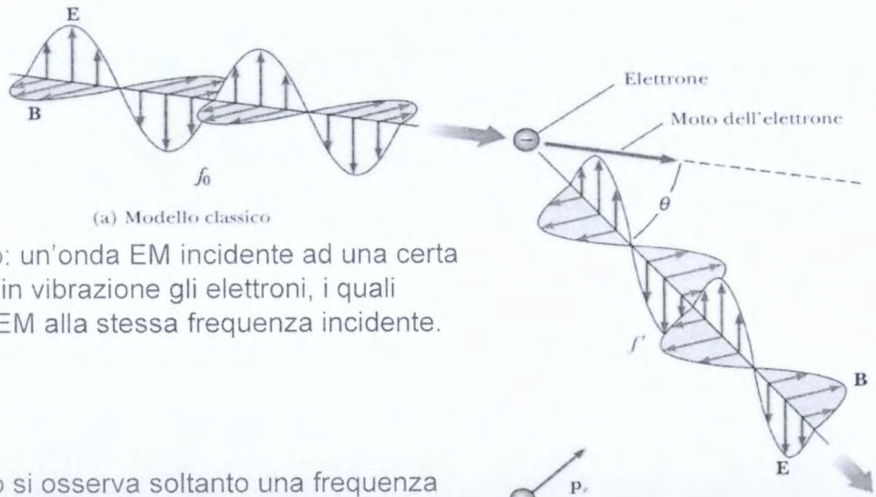
L'energia di un fotone con lunghezza d'onda di 400 nm è:

$$E = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{400\ \text{nm}} = 3.1\text{eV} > 2.2\ \text{eV}$$

per cui l'effetto fotoelettrico può verificarsi e gli elettroni emessi hanno un'energia cinetica non nulla. L'energia cinetica massima degli elettroni emessi è pari a:

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{max} = E - \varphi = (3.1 - 2.2)\ \text{eV} = 0.9\ \text{eV}$$

Effetto Compton (1923)

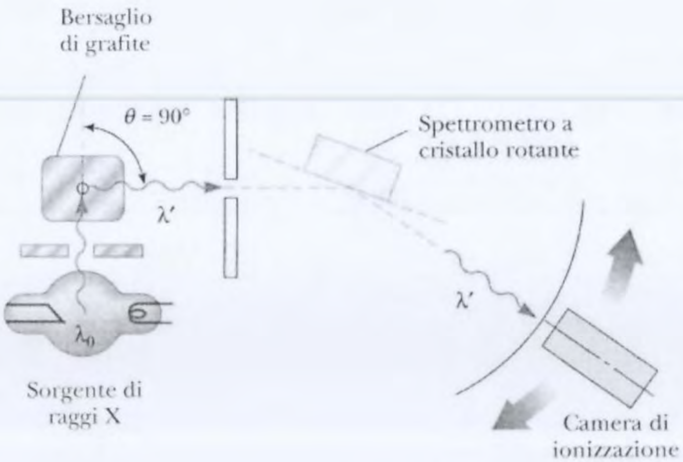


(a) Modello classico

Modello classico: un'onda EM incidente ad una certa frequenza pone in vibrazione gli elettroni, i quali emetteno onde EM alla stessa frequenza incidente.

Ad un dato angolo si osserva soltanto una frequenza di radiazione, diversa dalla radiazione incidente

(b) Modello quantistico

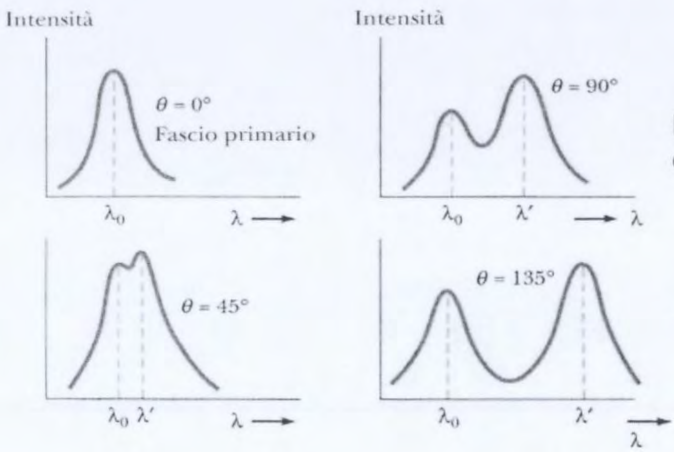


$$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

$$\boxed{\lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\vartheta)}$$

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = 0.00243 \text{ nm}$$

Lunghezza d'onda Compton dell'elettrone



Radiologia: I raggi X vengono diffusi dagli elettroni del corpo in tutte le direzioni

↓

pareti assorbenti, grembiule di piombo per ridurre l'esposizione

$\lambda_0 = \lambda_i = \frac{h}{\nu_i}$, $\lambda' = \lambda_f = \frac{h}{\nu_f}$

Otteniamo

$$\lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta)$$

Si definisce

$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = 0{,}00243\ nm$ lunghezza d'onda Compton dell'elettrone

CORRISPONDENZA TRA ASPETTO CORPUSCOLARE E ONDULATORIO

$m = 0$ $\quad p = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$

La luce ha anche un comportamento corpuscolare.

$m \neq 0$ $\quad \lambda = \frac{h}{p}$ DE BROGLIE

Una particella massiva ha anche un comportamento ondulatorio.

ESERCIZIO

Se

$p = mc \Rightarrow v = ?\ ,\ K = ?$

$K = mc^2(\gamma - 1)$

$p = mv\gamma = mc \Rightarrow v = \frac{c}{\gamma}$

$v = \frac{c}{\gamma} = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{c^2 - v^2} \Rightarrow v^2 = c^2 - v^2 \Rightarrow 2v^2 = c^2$

$v^2 = \frac{c^2}{2} \Rightarrow v = \frac{c}{\sqrt{2}} \Rightarrow \gamma = \sqrt{2}$

$K = mc^2(\sqrt{2} - 1)$

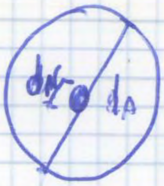
Oppure

$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = \gamma mc^2 \Rightarrow \gamma \quad v$

$\sqrt{m^2c^2c^2 + m^2c^4} = \sqrt{2m^2c^4} = \sqrt{2}\,mc^2 \Rightarrow \gamma mc^2 = \sqrt{2}\,mc^2 \Rightarrow \gamma = \sqrt{2}$

Si capì che l'atomo non poteva essere una carica e una massa uniforme, ma deve una massa concentrata in un nucleo positivo e il resto del volume quasi vuoto.

Rutherford riuscì a calcolare anche il diametro del nucleo e il diametro totale dell'atomo



$$d_N \sim 10^{-14}\,m \simeq 10\,fm$$

$$d_A \sim 10^{-10}\,m$$

NB $1\,fm = 10^{-15}\,m = 10^{-13}\,cm$

La deviazione α è dovuta alle interazioni coulombiane.

Calcoliamo l'energia cinetica delle particelle che sondano il nucleo:

~~ecc ecc~~

NB $\hbar c = 200\,MeV \cdot fm$

$$\bar{\lambda} = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar c}{pc} = \frac{\hbar c}{\sqrt{K^2 + 2mc^2K}} \qquad \begin{cases} \dfrac{\hbar c}{\sqrt{2mc^2K}} & mc^2 \gg K \\ \dfrac{\hbar c}{K} & mc^2 \ll K \end{cases}$$

$$p^2c^2 = K^2 + 2mc^2K$$

Nel caso dell'esperimento di Rutherford $mc^2 \gg K$ dato che

$M_\alpha c^2 \simeq 4000\,MeV$ mentre $K_\alpha = 5 \div 6\,MeV$

Possiamo sondare il nucleo anche con degli elettroni, che hanno massa molto piccola $\to m_e c^2 \simeq 0{,}5\,MeV$

Per sondare abbiamo bisogno di $\bar{\lambda}_e \simeq 1\,fm$

$$\bar{\lambda}_e \simeq \frac{\hbar c}{K_e} \Rightarrow K_e \simeq \frac{\hbar c}{1\,fm} \Rightarrow K_e \simeq 200\,MeV$$

Dobbiamo accelerare gli elettroni con $K_e \simeq 200\,MeV$ per sondare il nucleo $\to$ regime ultrarelativistico $K_e \gg m_e c^2$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 39 di 266

$[\sigma] = [A]$ σ ha le dimensioni di un'area

$\sigma \sim 10^{-28} \, m^2$

Nuova unità di misura: BARN

$1 \text{ Barn} = 1b = 10^{-28} \, m^2$

SEZIONE DIFFERENZIALE

Possiamo calcolare anche una sezione d'urto non totale, ma solo una certa porzione su una certa porzione di angolo solido

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}$$

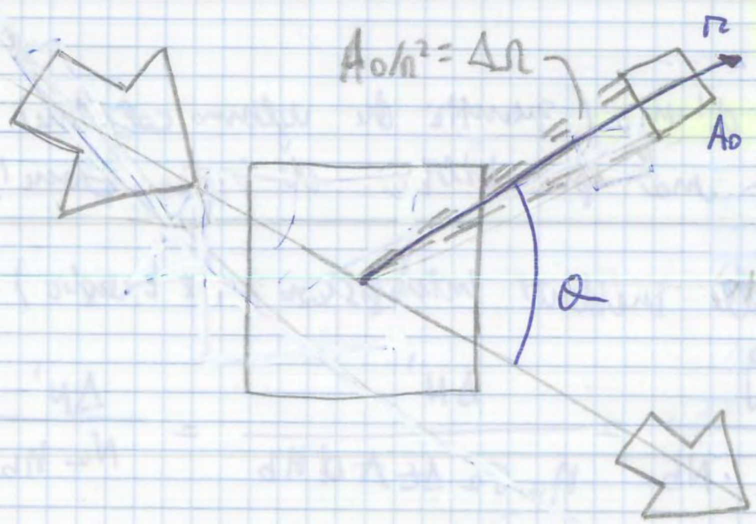
non sono differenziali, sono differenze finite

il $\frac{d}{d}$ è solo indicativo, non ha significato preciso matematico.

Lo si calcola quando si ha un rivelatore che copre solo una parte dell'angolo solido, non riesce a misurare completamente σ.

Per ottenere σ totale, facciamo diverse misure con il rivelatore e poi lo a diversi angoli

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d\cos\theta \, \frac{d\sigma(\theta,\phi)}{d\Omega}$$



$$\int_{\bar{v}_i}^{\bar{v}_f} d\bar{v} = \int_0^{\pi-\vartheta} k_e \frac{z_1 z_2 e^2}{m r^2 \frac{d\phi}{dt}} \bar{u}_r \, d\phi$$

$\rightarrow m r^2 \frac{d\phi}{dt} = L$ momento angolare orbitale

$\parallel$ cost! L_0 si conserva perché la forza elettrica di Coulomb è centrale

MOTO SU UN PIANO

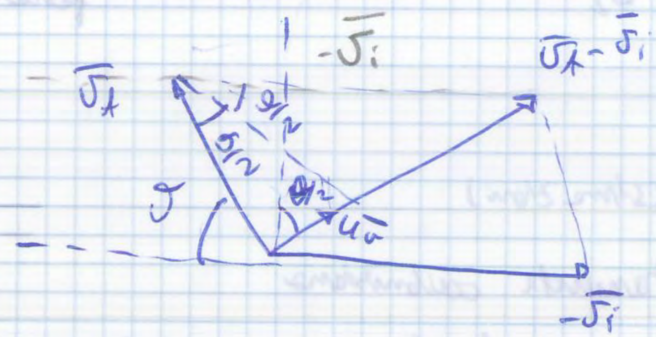
$$\int_{\bar{v}_i}^{\bar{v}_f} d\bar{v} = k_e \frac{z_1 z_2 e^2}{m r^2 \frac{d\phi}{dt}} \int_0^{\pi-\vartheta} u_r \, d\phi$$

$L = m v b$

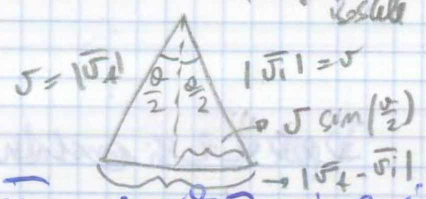
$|\vec{v}_i| = |\vec{v}_f| = v$

$$\int_{\bar{v}_i}^{\bar{v}_f} d\bar{v} = \bar{v}_f - \bar{v}_i = |\bar{v}_f - \bar{v}_i| \, \bar{u}_v = 2 v \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \bar{u}_v$$

triang. isoscele

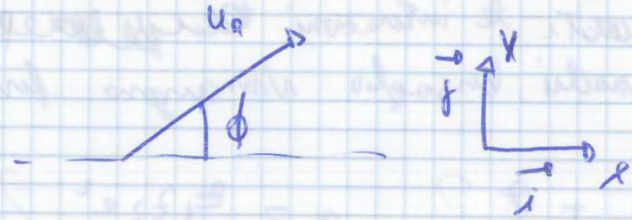


$|\vec{v}_f| = |\vec{v}_i|$



$$\bar{u}_v = \cos\frac{\vartheta}{2} \, \bar{j} + \sin\frac{\vartheta}{2} \, \bar{i}$$

$$\int_0^{\pi-\vartheta} \vec{u}_r(\phi) \, d\phi =$$



$$= \int_0^{\pi-\vartheta} \left[\cos\phi \, \vec{i} + \sin\phi \, \vec{j}\right] d\phi = \cancel{\ldots \vec{i} + (1 - \cos\vartheta)\vec{j}}$$

$$\int_0^{\pi-\vartheta} = \sin\phi \Big|_0^{\pi-\vartheta} \vec{i} + (-\cos\phi)\Big|_0^{\pi-\vartheta} \qquad \bar{\gamma} = \sin\vartheta \, \vec{i} + (1 + \cos\vartheta)\bar{j}$$

$$\begin{cases} \sin\vartheta = 2 \sin\frac{\vartheta}{2} \cos\frac{\vartheta}{2} \\ \cos\vartheta = 2\cos^2\frac{\vartheta}{2} - 1 \end{cases}$$

$$= 2 \sin\frac{\vartheta}{2} \cos\frac{\vartheta}{2} \, \vec{i} + 2\cos^2\frac{\vartheta}{2} \, \bar{j}$$

$$K = \frac{1}{2} \mu v^2$$

massa ridotta se vogliamo considerare il nucleo non fermo

$$\mu = \frac{mM}{m+M}$$ ma $\mu \simeq m$ se $m \ll M$ (il nucleo ha massa molto più grande dell'elettrone)

$$\boxed{b = \frac{a}{2} \cot g\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad a = K_e \frac{Z_1 Z_2 e^2}{K}}$$

$b \to$ parametro d'urto

Se l'energia K è più alta, a è più piccolo, quindi anche b è più piccolo! La particella sonda una regione più vicina al nucleo.

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta \, d\theta$$

Ad ogni angolo solido $d\Omega$ corrisponde un angolo θ, che è l'angolo con cui la particella viene deflessa.

Ad una variazione di b, corrisponde una variazione di θ, in particolare se b aumenta, θ diminuisce

$$b \to b + db \iff \theta \to \theta - d\theta$$

Area corona circolare di raggio db : $2\pi b \, db$

$$\frac{2\pi b \, db}{A} = \frac{2\pi \, a \cot g \frac{\theta}{2}}{2A} \cdot \frac{a}{2} \left| - \frac{d\theta}{2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right| =$$

area bersaglio

normalizziamo all'area di tutte le sezioni bersaglio per avere probabilità

contrib

$$= \frac{2\pi a^2 \cos\frac{\theta}{2} \, d\theta}{8 A \sin^3\frac{\theta}{2}} = \frac{2\pi \sin\theta \, d\theta \, a^2}{A \, 16 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{a^2 \, d\Omega}{16 A \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\frac{\text{frazione di area}}{\text{area totale}}$$ = probabilità che la particella venga diffusa secondo un dato angolo solido (singola particella incidente in un singolo nucleo bersaglio)

ESEMPI

1) $K_\alpha = 6\,MeV$

$\theta = 60°$

$^{208}_{82}Pb$

$$b = K_e \frac{2 \cdot 82\, e^2}{2 K_\alpha} \cot g \frac{\theta}{2} = 11,3\, fm$$

NB $K_e \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} = \alpha$

$\hbar c = 197,3\, MeV \cdot fm$

$K_e e^2 = 1,44\, MeV \cdot fm$

2) $K_\alpha = 6\,MeV$

$^{27}_{13}Al$

$\theta = 30°$ $\qquad \left|\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{30°} = 5,42\ barn$

Le formule appena trovate sono valide quando le particelle si avvicinano al nucleo, senza entrare nel volume occupato dal nucleo. Rutherford non poteva variare K_α, quindi non poteva variare il parametro α (la sorgente radioattiva emette particelle α sempre con stessa K_α). Rutherford quindi riuscì solo a dire che il ~~diametro~~ raggio del nucleo è $\leq b$.
La sezione d'urto di Rutherford non rispecchia più i valori sperimentali quando la velocità delle particelle, quindi l'energia cinetica, diventa tale da riuscire a sondare ~~[illegible]~~ il volume del nucleo, non possiamo più considerare le particelle puntiformi, entrano in gioco altre forze.

Proviamo a fare il calcolo della sezione d'urto differenziale nel regime quantistico.

II REGOLA D'ORO DI FERMI

La seconda regola d'oro di Fermi asserisce che vi è una certa probabilità di transizione W dallo stato f allo stato i.

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle \Psi_f | \hat{H}_{int.} | \Psi_i \rangle \right|^2 \rho_f(E')$$

$\rho_f(E')$ = densità degli stati finali $\qquad \hat{H}_{int.} \to \hat{H}$ di interazione coulombiana

Le particelle incidenti che usiamo per sondare la struttura del nucleo sono elettroni!

$$\rho_f(E') = \frac{dn}{dE'}$$

stati compresi tra k e $k+dk$

peso la probabilità che lo stato finale sia possibile

La formula si può ottenere in regime perturbativo: infatti nella formula compare l'H di interazione coulombiana non l'intera Hamiltoniana.

$\langle\Psi_f|$ e $\langle\Psi_i|$ sono stati delle particelle non interagenti

Quindi si passa da uno stato iniziale ad uno stato finale ~~...~~ non interagenti con probabilità W.

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \longrightarrow \vec{p}' = \hbar\vec{k}'$$

Se l'urto è elastico $|\vec{p}| = |\vec{p}'|$, il modulo della quantità di moto non cambia, ma cambia solo la direzione, quindi l'angolo tra $\vec{p}$ e $\vec{p}'$.

dn: numero di stati compresi tra due valori di $\vec{p}$ nello spazio delle fasi.

$$\sigma = \frac{V}{v_a} \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle \psi_f | \hat{H}_{int} | \psi_i \rangle \right|^2 \rho_f (E')$$

$$\sigma = \frac{V}{v_a} \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle \psi_f | \hat{H}_{int} | \psi_i \rangle \right|^2 \frac{dn}{dE'}$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V}{v_a} \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle \psi_f | \hat{H}_{int} | \psi_i \rangle \right|^2 \frac{p^2}{(2\pi\hbar)^3} V \frac{dp'}{dE'}}$$

Entriamo nel calcolo: usiamo elettroni accelerati con $E = 200\,MeV$, ipotizziamo i nuclei fermi e gli urti completamente elastici $(|\vec{p}| = |\vec{p}'|)$

Siamo in regime relativistico $\quad K \gg m_e c^2 = 0{,}5\,MeV$

$K \approx 200\,MeV$

Quindi $\quad p^2c^2 = K^2 + 2mcK$

Possiamo trascurare la massa dell'elettrone a riposo:

$p = \frac{E}{c} \quad$ in prima approssimazione possiamo confondere v_e con c

e

$$\frac{dp'}{dE'} = \frac{dp}{dE'} = \frac{1}{c}$$

Quindi:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2}{\hbar} \frac{2\pi}{c} \left| \langle \psi_f | H_{int} | \psi_i \rangle \right|^2 \frac{E^2}{c^2} \cdot \frac{1}{c} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} =$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2}{(2\pi)^2} \frac{E^2}{(\hbar c)^4} \left| \langle \psi_f | H_{int} | \psi_i \rangle \right|^2}$$

Dobbiamo far comparire $\Delta\phi$ nella formula!

TEOREMA DI GREEN

$$\int (u\Delta v - v\Delta u)\, d^3r = 0$$

$$\Delta\left[e^{\frac{i\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}}\right] = -\frac{q^2}{\hbar^2} e^{\frac{i\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}} \Rightarrow e^{\frac{i\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}} = -\frac{\hbar^2}{q^2}\Delta e^{\frac{i\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}}$$

Quindi

$$\langle\psi_f|H_{int}|\psi_i\rangle = -\frac{e}{V}\frac{\hbar^2}{q^2}\int \phi(r)\,\Delta e^{\frac{i\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}}\, d^3r \overset{GREEN}{=} -\frac{e}{V}\frac{\hbar^2}{q^2}\int \Delta\phi\, e^{\frac{i\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}}\, d^3r =$$

$$\overset{GAUSS}{=} \frac{e}{\varepsilon_0 V}\frac{\hbar^2}{q^2}\int \rho(\vec{r})\, e^{\frac{i\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}}\, d^3r$$

dipende dalla distribuzione delle cariche elettriche del centro diffusore

DEFINIZIONE

$$F(\vec{q}) \triangleq \int \rho(\vec{r})\, e^{\frac{i\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}}\, d^3r$$

TRASFORMATA DI FOURIER DI $\rho(\vec{r})$

$F(\vec{q})$ è denominato FATTORE DI FORMA e descrive la distribuzione delle cariche nel nucleo bersaglio

Se $\rho(r) = \frac{\delta(r)}{2\pi}$ (cioè puntiforme) allora $F(q) = 1$, se $\rho(r)$ è diverso $\Rightarrow F(q) \neq 1$ e va a correggere la sezione d'urto

Ritornando al calcolo iniziale

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\cancel{V^2}}{(2\pi)^2}\frac{E^2}{(\cancel{\hbar}c)^4}\frac{e^2}{\varepsilon_0^2 \cancel{V^2}}\frac{\cancel{\hbar}^4}{q^4}|F(\vec{q})|^2$$

energia elettrone incidente

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} \overset{*}{=} \frac{Z^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\cdot 4\cdot\frac{E^2}{(qc)^4}|F(\vec{q})|^2}$$

Se vogliamo passare in regime non relativistico, allora

$$p = mv \qquad K = \frac{1}{2} m v^2 \qquad E \simeq mc^2$$ perché $mc^2 >> K$!!

$$z^2 e^4 \to (z_1 z_2 e^2)^2$$

Sostituendo nella formula relativistica trovata prima, otteniamo esattamente la sezione d'urto di Rutherford ottenuta con il calcolo classico, con l'unica differenza che vi è in più la correzione $|F(\vec{q})|^2$.

Quindi, quantisticamente e in regime non relativistico otteniamo:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(z_1 z_2 e^2)^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{4E^2}{(qc)^4} |F(\vec{q})|^2 = \frac{z_1^2 z_2^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{E^2 \, 4 |F(\vec{q})|^2}{c^4 (2)^4 p^4 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} =$$

$$= \frac{4 z_1^2 z_2^2 e^4 m^2 \cancel{c^4} |F(\vec{q})|^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \, 16 \, \cancel{c^4} m^4 v^4 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{z_1^2 z_2^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{4}{m^2 v^4} \frac{|F(\vec{q})|^2}{16 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} =$$

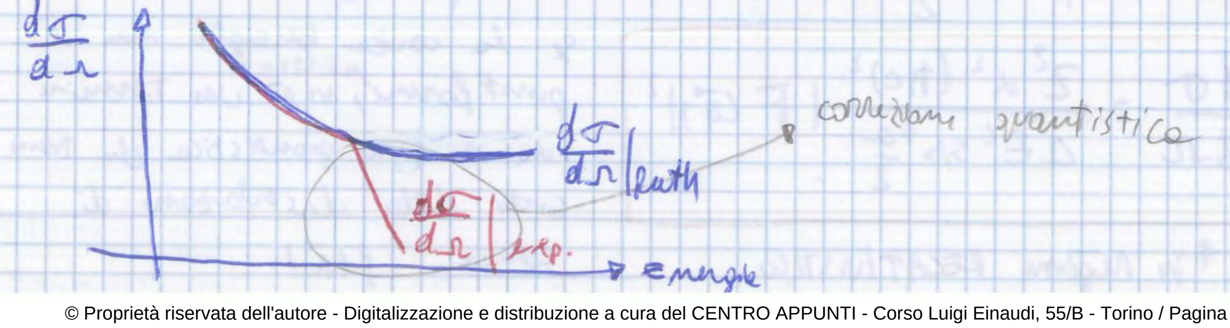
$$= K e^2 \, \frac{z_1^2 z_2}{K^2}^{2} \cdot \frac{1}{16 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} |F(\vec{q})|^2$$

$$\boxed{\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{exp} = \left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{Ruth} |F(\vec{q})|^2}$$

$\overbrace{\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{Ruth}}^{\text{sezione d'urto di particelle a distanza}}$

Se $F(q) = 1$ (densità di carica puntiforme) $\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{Ruth}$

La correzione $F(\vec{q})$ giustifica il grafico delle sezioni d'urto misurate



$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{+\infty} f(r)\, r^2\, dr \right) e^{\frac{iqrx}{\hbar}}\, dx =$$

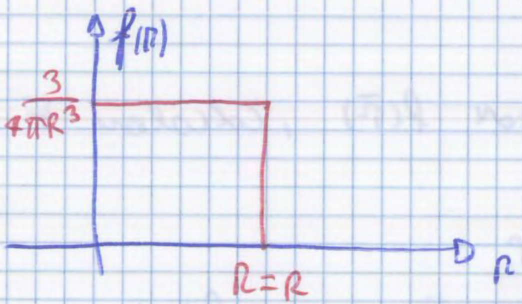
Calcoliamo prima

$$\int_{-1}^{1} e^{\frac{iqrx}{\hbar}}\, dx = 2\left(\frac{e^{\frac{iqr}{\hbar}} - e^{-\frac{iqr}{\hbar}}}{2i\frac{qr}{\hbar}} \right) = 2\,\frac{\sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right)}{\frac{qr}{\hbar}}$$

Quindi

$$F(q) = 4\pi \int_0^{+\infty} f(r)\, \frac{\sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right)}{\frac{qr}{\hbar}}\, r^2\, dr$$

CASO SFERA RIGIDA OMOGENEA



$$\int_0^{+\infty} f(r)\, d^3r = \int_0^{\infty} f(r)\, r^2 dr \int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \int_0^{R} f(r)\, r^2 dr =$$

$$= 4\pi\, \frac{3}{4\pi R^3} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R = 1$$ è effettivamente normalizzato!

possiamo usare la nostra scelta di $f(r)$!

Facendo il calcolo di $F(\vec{q})$ otteniamo:

$$\boxed{F(\vec{q}) = \frac{3}{y^3}\left[\sin y - y\cos y\right]}$$ con $y = \frac{qR}{\hbar}$

Facciamo uno sviluppo per $\frac{qR}{\hbar} \ll 1$ della funzione $F(\vec{q})$

$$F(\vec{q}) = \int f(r)\, e^{\frac{i\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}}\, d^3r = \int f(r) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(i\,\frac{qr}{\hbar}\cos\vartheta\right)^n d^3r =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d\cos\vartheta \int_0^{\infty} r^2\, dr \left[1 + \underbrace{\cancel{\frac{i\,q\,r\cos\vartheta}{\hbar}}}_{0} - \frac{1}{2}\left(\frac{qr}{\hbar}\right)^2 \cos^2\vartheta\right] f(r) =$$

Una funzione dispari integrata in un intervallo simmetrico NON DA CONTRIBUTO

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d\cos\vartheta \int_0^{\infty} r^2 f(r)\, dr}_{\int f(r)\, d^3r \,=\, 1} - \underbrace{2\pi}_{\int_0^{2\pi} d\varphi} \frac{q^2}{\hbar^2} \underbrace{\frac{2}{3}}_{\int_{-1}^{1}\cos^2\vartheta\, d\cos\vartheta \,=\, \frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\infty} r^2 f(r)\, r^2\, dr =$$

NORMALIZZATO!

$$= 1 - \frac{q^2}{6\hbar^2} \underbrace{\int_0^{\infty} 4\pi r^2 f(r)\, r^2\, dr}_{\text{RAGGIO QUADRATICO MEDIO}}$$

$$F(\vec{q}) \simeq 1 - \frac{q^2}{6\hbar^2}\langle r^2\rangle$$

$$\langle r^2\rangle = -6\hbar^2 \frac{dF(q^2)}{d(q^2)}$$

Si definisce parametro t (spessore della pelle del nucleo) quando $\frac{\rho(r)}{\rho(0)}$ scende dal 90% al 10%

DEFINIZIONE

$$t \triangleq r\left(\frac{\rho(r)}{\rho(0)} = 0{,}1\right) - r\left(\frac{\rho(r)}{\rho(0)} = 0{,}9\right)$$

$$\boxed{t = 2\,a \ln 9}$$

t è dell'ordine dei fm

Inoltre

$\Rightarrow$ $R = \cancel{\ldots} = R_0 A^{1/3} = 1{,}07\,\text{fm}\, A^{1/3}$ LEGGE EMPIRICA

Il raggio del nucleo vale è proporzionale, con un fattore di potenza, al numero di massa A.

Per nuclei pesanti la densità $\rho(r)$ nel primo tratto è quasi costante per poi decrescere velocemente a zero. Questo dal punto di vista delle forze nucleari ha un effetto curioso: se aumento A (aggiungo neutroni, aumento le particelle del nucleo) la densità non cambia, quindi le forze nucleari devono essere attrattive e maggiori delle forze elettromagnetiche, inoltre agiscono su uno spazio piccolissimo rispetto alle dimensioni del nucleo. Le forze nucleari sono a corto raggio d'azione, più piccolo del nucleo, dell'ordine dei fm.

Vale

$$M_{nucleo} \simeq A M_A$$

M_A è approssimabile alla massa di un nucleone, perché la massa dell'elettrone è trascurabile (~ 500 eV)

Abbiamo detto che lo spessore del nucleo può essere espresso tramite t

$$t = 2 a \ln 9 \Rightarrow a = \frac{t}{2 \ln 9} \simeq 0,54 \text{ fm}$$

è fissato automaticamente per tutti i nuclei medio-pesanti indipendentemente da A.

$$\langle r^2 \rangle = \int f(r)\, r^2\, d^3 r = 4\pi \int_0^{+\infty} f(r)\, r^4\, dr$$

$$\Rightarrow \sqrt{\langle r^2 \rangle} = r_0' A^{1/3}$$

questa volta con $r_0' = 0,94$ fm (densità)

NB In generale (non per tutti i nuclei) la distribuzione di carica è uguale a quella di massa perché p (protone) e n (neutrone) hanno massa comparabile e tra di loro hanno una interazione molto maggiore dell'interazione coulombiana

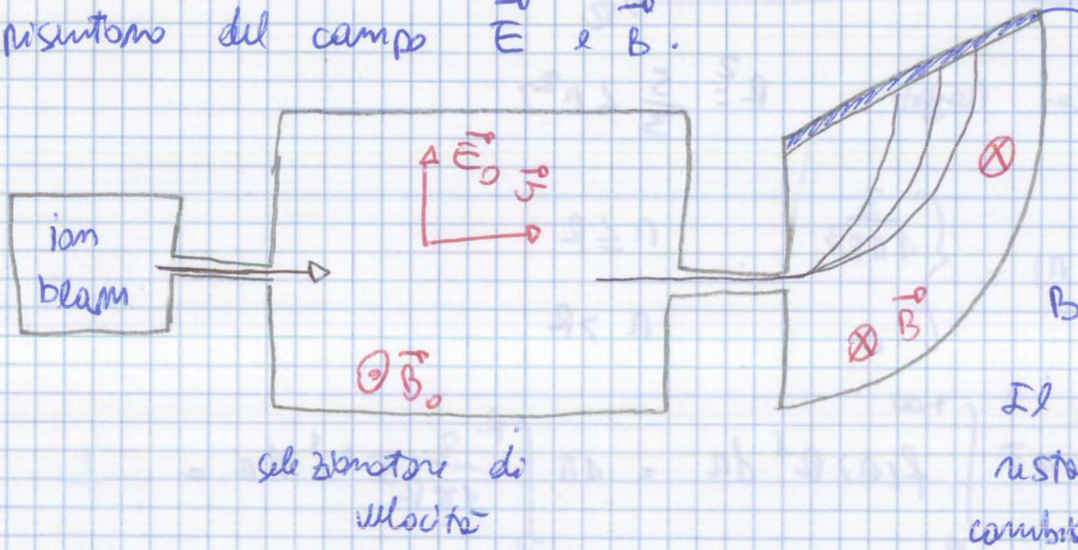
(approfondimento dopo!)

SPETTROMETRO DI MASSA

La massa si misura con lo spettrometro di massa.

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Se abbiamo atomi ionizzati, la loro massa coincide con la massa del nucleo, inoltre hanno carica positiva, quindi risentono del campo $\vec{E}$ e $\vec{B}$.



$B \neq B_0$

Il modulo di v resta costante, cambia solo direzione e verso

$$q v B = M \frac{v^2}{R}$$

moto circolare uniforme

$$\boxed{M = \frac{qR}{v} B = \frac{qRB_0B}{E_0}}$$

La velocità è misurata variando $\vec{E}$ e $\vec{B}$ in modo che la traiettoria sia rettilinea e questo avviene quando la forza elettrica e magnetica hanno lo stesso modulo

$$qE_0 = q v B_0 \Rightarrow \boxed{v = \frac{E_0}{B_0}}$$

$$M_N \simeq A\, M_H$$

La cosa più semplice da pensare è che avendo o la distribuzioni di carica o di massa $M_N \simeq A M_H$

Identifichiamo A come il numero degli oggetti positivi elementari che compongono H^+ e li chiamiamo protoni, quindi:

Vi sono anche evidenze sperimentali:

- Thompson trova atomi con diverse masse ma uguale Z.
- misure con statistica di Bose-Einstein e Fermi-Dirac

ESEMPIO $^{14}_{7}N$ $\quad N_e = A - Z = 7$

$n°$ particelle $= 14 + 7 = 21$

Dovrebbe essere un fermione (tutte le particelle hanno spin semi-intero) invece si comporta come un BOSONE.

I dubbi sulla struttura del nucleo furono fugati completamente da Chadwick nel 1932 con la scoperta del neutrone

SCOPERTA DEL NEUTRONE

$$\alpha + {}^{9}_{4}Be \longrightarrow {}^{12}_{6}C + n$$

α prodotti da una sorgente radioattiva $\rightarrow$ ad esempio ${}^{226}Ra \rightarrow {}^{222}Rn + \alpha$ decadimento α

La reazione produceva una particella neutra, con massa comparabile a quella del protone (essendo neutra era molto difficile da trovare, da individuare).

Considerando $K^{(i)}_{Be} \simeq 0$, per la conservazione dell'energia, e di $\vec{p}$, vale:

$$\begin{cases} M_\alpha c^2 + M_{Be} c^2 + K_\alpha = M_{^{12}C} c^2 + M_n c^2 + \underbrace{\cancel{K_C}}_{\text{trascurabile}} + K_n \\ \vec{p}_\alpha = \vec{p}_C + \vec{p}_n \end{cases}$$

Risolvendo, possiamo ottenere la massa M_n dei neutroni (che compongono la massa del nucleo) $\quad A = \overset{\text{protoni}}{Z} + \overset{\text{neutroni}}{N}$ con $M_p \simeq 938,2$ MeV, $M_n \simeq 939,5$ MeV

Effettivamente ora $Q_N = Ze$. La $f(r)$ stimata è una distribuzione di carica elettrica (quindi dei protoni). Essa può essere confusa anche con la distribuzione di massa perché $M_n \simeq M_p$

DEFINIZIONE

$$\frac{1}{c^2}\boxed{B.E. \overset{def.}{=} M_{Nucleo} - (NM_n + ZM_p)}$$

$$\frac{1}{c^2} B.E. \simeq M_{ATOMICA} - [NM_n + Z(M_p + M_e)]$$

(B.E. è un'energia negativa)

trascuriamo l'energia di legame tra elettroni e nucleo (è << B.E.)

Quando i nucleoni interagiscono, formando il nucleo, diminuiscono la loro massa, in quanto una parte si trasforma in energia di legame (equivalenza massa-energia).
I nucleoni liberi hanno una certa massa, invece ai nucleoni legati si associa una massa efficace minore.

Quindi la $\underbrace{\text{massa}}_{\text{somma delle}}$ dei singoli costituenti liberi è maggiore della massa del nucleo.

Questo perché l'interazione fa diminuire l'energia totale (e data l'equivalenza anche la massa!)

energia di legame media di ogni nucleone nel nucleo: $\frac{|B.E.|}{A}$
energia di legame per particella
|||
diminuzione di una singola massa nucleonica (di ogni nucleone)

Un nucleo è stabile quando non decade in un altro stato in un tempo comparabile con la vita della Terra. La stabilità di un nucleo è relativa, ma lo consideriamo stabile in queste condizioni:
↳ magari un nucleo stabile potrebbe decadere per un tempo > della vita della Terra

(inoltre in media l'interazione p-n è più forte di quelle p-p e n-n)

I nuclei sono stabili per $N = Z = \frac{A}{2}$

Vediamo che l'attrazione p-n o n-p è equivalente, inoltre, per questo fatto, il nucleo tende ad essere simmetrico!
(per nuclei medio-leggeri, vedi grafico)

A sx della regione di stabilità, i nuclei trovano vantaggio nel legarsi tra di loro → FUSIONE NUCLEARE
(in determinate condizioni)

A dx della regione di stabilità, i nuclei trovano vantaggio nel scindersi in due nuclei che risalgono le curve di stabilità
→ FISSIONE NUCLEARE

Il problema dell'interazione nucleare, è che non conosciamo l'andamento, l'espressione dell'interazione nucleare (non abbiamo una funzione che la modellizza).

Possiamo solo approssimarla per via fenomenologica.

Parametrizziamo le energie di legame come somma di più termini, a noi noti, dipendenti da A e Z, cercando di ottenere il grafico sperimentale.

$$M_{\text{ATOMICA}}(A,Z) = \sum_{i=0}^{5} f_i(A,Z)$$

$$f_0(A,Z) = Z(M_p + m_e) + (A-Z)M_n$$

termine libero

i termini superiori $f_1, f_2 \ldots$ rappresentano l'energia di legame

$$f_1(A,Z) = -a_v A$$

→ massimo valore di $\frac{BE}{A}$ (quello del Fe)

rappresenta la zona di stabilità (è importante il volume)

↓ densità costante

→ v sta per volume

$$f_2(A,Z) = +a_{sup} A^{2/3}$$

i nuclei sulla superficie hanno meno primi vicini, sono meno legati

(A < 20)

rappresenta i nuclei leggeri (è importante la superficie)

$$f_0 \simeq cost \rightarrow R = R_0 A^{1/3} \quad V \xrightarrow{R^3} A, \quad S \xrightarrow{R^2} A^{2/3}$$

costanti:
$$\begin{cases} a_v \simeq 15{,}56 \ MeV/c^2 \\ a_{sup} \simeq 17{,}23 \ MeV/c^2 \\ a_{coul} \simeq 0{,}71 \ MeV/c^2 \\ a_{simm} \simeq 23{,}28 \ MeV/c^2 \end{cases}$$

CARATTERISTICHE GENERALI DELLE FORZE NUCLEARI

a) all'interno del nucleo la forza nucleare è assai più intensa delle interazioni elettromagnetiche

b) la forza nucleare ha una componente attrattiva dominante

c) le forze nucleari ha raggio di azione molto limitato (1-2 fm, pari alla distanza media tra i nucleoni in un nucleo)

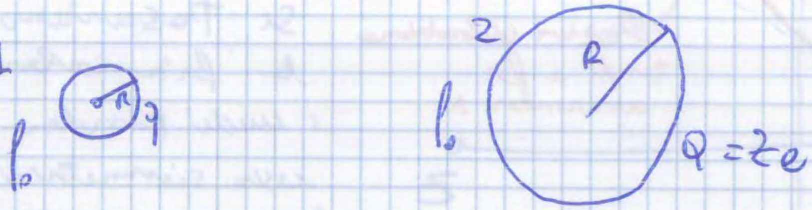
d) le forze nucleari hanno proprietà di saturazione, #

$$b_i = a_i c^2$$

b_i sono collegati alle energie e a_i sono collegati alle masse.

MODELLO SEMICLASSICO PER IL CALCOLO DI $b_{coulombiano}$

Partiamo da una sferetta carica di raggio R e carica q e vogliamo arrivare ad una sferetta carica di raggio R e carica $Q = Ze$ (le due sferette hanno stesse densità ρ_0)



Possiamo pensare di portare una carica dq sulla superficie della sfera 1 e farlo fino ad arrivare ad una carica Q

$$U = \int_0^Q \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q \, dq}{R(q)}$$

$$\rho_0 = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \rho_0$$

$$R(q) = R\left(\frac{q}{Q}\right)^{1/3} \rightarrow \text{perché?}$$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q^{1/3}}{R} \int_0^Q q^{2/3} \, dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^{1/3}}{R} \frac{3}{5} Q^{5/3}$$

$$U = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{R} = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Z^2 e^2}{\underbrace{R}_{\simeq R_0 A^{1/3}}} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0} \frac{Z^2}{A^{1/3}} = b_{coul} \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

essendo le densità centrali pressoché costanti per tutti i nuclei

e) l'intensità della forza nucleare non può essere misurata direttamente dalle energie di legame osservate nei nuclei in quanto in esse è contenuto il termine di energia cinetica (positivo) confrontabile con il termine di energia potenziale

f) la forza nucleare dipende non soltanto dalla distanza relativa tra due nucleoni ma anche dai gradi di libertà intrinseci: lo spin e la carica

g) l'urto nucleone-nucleone a grandi energie (7200 MeV) mostra che a distanze relative molto piccole l'interazione diventa fortemente repulsiva

$$Z_{min} = \frac{M_n - M_p - m_e + a_{coul} A^{-1/3} + 4 \cdot a_{sym}}{8 a_{sym} A^{-1} + 2 a_{coul} A^{-1/3}}$$

$$M_n - M_p - m_e \simeq 0{,}5\ MeV/c^2 << 4 \cdot a_{sym} \simeq 4 \cdot 23\ MeV/c^2$$

$$a_{coul} \cdot A^{-1/3} << 4 \cdot a_{sym}$$

$$(a_{coul} \simeq 0{,}71\ MeV/c^2)$$

$$Z_{min} \simeq \frac{4 a_{sym}}{8 a_{sym} A^{-1} + 2 a_{coul} A^{-1/3}} = \frac{A}{2} \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{1}{4}\left(\frac{a_{coul}}{a_{sym}}\right) A^{2/3}}_{K}}$$

$$Z_{min} \simeq \begin{cases} \frac{A}{2} & \text{per } K << 1 \\ < \frac{A}{2} & \text{per } K \simeq 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{4} \frac{a_{coulomb}}{a_{sym}} A^{2/3} = 1$$

$$A^{2/3} = \frac{4 a_{sym}}{a_{coulomb}}$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{4 a_{sym}}{a_{coulomb}}\right)^3} = 1475$$

$\Rightarrow K \simeq 1$ se $A = 1475$

NUCLEI PESANTI

$K < 1$ se $A < 1475$

$K << 1$ se $A << 1475$

AD ESEMPIO:

$^{197}_{79}Au \rightarrow \frac{Z}{A} \simeq 0{,}4$

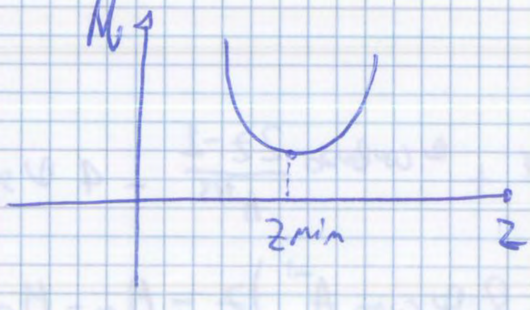
$^{208}_{82}Pb \rightarrow \frac{Z}{A} \simeq 0{,}394$

$^{63}_{29}Cu \rightarrow \frac{Z}{A} \simeq 0{,}46$

A	K
5	0,0225
205	0,2683
405	0,4221
605	0,5527
905	0,722
1105	0,8[illegible]
1405	0,9681
1705	1,1014
1905	1,1859

Se $A = 140$

$Z_{min} = 57{,}8$



$^{140}_{58}Ce$

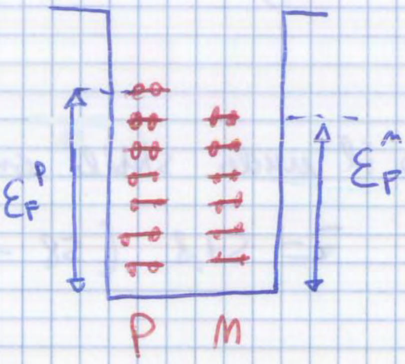
Cerchiamo adesso di giustificare microscopicamente i quattro termini della formula semi-empirica.

Cominciamo con il termine di simmetria

Neutroni e protoni sono particelle dotate di spin semintero $\left(\frac{1}{2}\right)$ e quindi obbediscono alla STATISTICA di Fermi-Dirac.

A $T=0K$ si sistemeranno sui vari livelli energetici in modo tale da obbedire ~~alla statistica~~ al principio di Pauli: ($\equiv$ statistica di Fermi-Dirac)

Consideriamo protoni e neutroni confinati in una buca di potenziale (nucleo).



ε_F^p e ε_F^n = livello di Fermi dei protoni e neutroni

$\varepsilon_F^p \neq \varepsilon_F^n$ se $N \neq Z$

Consideriamo un modello a GAS DI FERMI: protoni e neutroni liberi che si muovono in una buca di potenziale, obbedendo solo al principio di Pauli.

Possiamo calcolare l'energia di Fermi.

$$\sum_i \longrightarrow dn$$

$$dn = \frac{4\pi p^2 \, dp}{(2\pi\hbar)^3} V$$

$\longrightarrow p$ quantità di moto

n° di stati al variare della quantità di moto

Se assumiamo che il volume occupato da protoni e neutroni sia uguali e diciamo che (R_0) è il raggio ~~[illegible]~~ occupato dei protoni e neutroni, allora:

$$V = \frac{4}{3}\pi R_0^3 A \qquad \text{(nucleo approssimato a sfera)}$$

$R_0 = 1{,}21$ fm

Se $N = Z = \frac{A}{2}$ $\quad p_F^n = p_F^p = p_F$

$$\frac{A}{2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_0^3 A}{3\pi^2 \hbar^3} p_F^3$$

$$p_F = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \frac{\hbar c}{R_0 c} \simeq 250 \ \frac{MeV}{c}$$

→ p e n hanno una quantità di moto molto alta solo per il fatto di dover sottostare al principio di Pauli.

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2M} \simeq 33 \ MeV$$

Siamo in regime non relativistico $\quad K \ll Mc^2$

Possiamo ottenere lo stesso risultato con il principio di indeterminazione

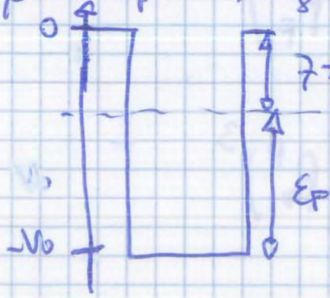
$\Delta x \Delta p \sim \hbar$

$\Delta p \sim \frac{\hbar c}{\Delta x c} \simeq 200 \ \frac{MeV}{c}$

$\Delta x \sim 1$ fm

Otteniamo l'altezza della barriera di potenziale come somma di energia di fermi più energia di legame dei nucleoni

$N = Z$



$7 \div 8$ MeV } → energia di legame

$V_0 \simeq 40$ MeV

$$N = \frac{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A}{3\pi^2 \hbar^3} \left(p_F^{\,n}\right)^3 = \frac{4}{9}\frac{r_0^3 A}{\pi \hbar^3}\left(p_F^{\,n}\right)^3 = \frac{4 r_0^3 A}{9\pi\hbar^3}\left(p_F^{\,n}\right)^3$$

$$p_F^{\,n} = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{1/3} \frac{\hbar}{r_0} \frac{N^{1/3}}{A^{1/3}}$$

$$\langle K_{TOT}\rangle = \frac{3}{10M}\left(\frac{9}{4}\pi\right)^{2/3}\left(\frac{\hbar}{r_0}\right)^2 \left[\frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{2/3}}\right]$$

$\hookrightarrow A = N + Z$

Abbiamo un minimo di $\langle K_{TOT}\rangle$ per $N = Z = \frac{A}{2}$

NB non stiamo considerando interazioni! L'unico ingrediente è il principio di Pauli, per il resto sono particelle libere!

Consideriamo

$$\left.\begin{aligned} N &= \frac{A+\Delta}{2} \\ Z &= \frac{A-\Delta}{2} \end{aligned}\right\} \text{A la teniamo costante! } A = N+Z, \quad \Delta = N - Z$$

$$\left(\frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{2/3}}\right) = \frac{1}{A^{2/3}}\left[\left(\frac{A+\Delta}{2}\right)^{5/3} + \left(\frac{A-\Delta}{2}\right)^{5/3}\right]$$

Consideriamo Δ piccolo rispetto a N e Z $\rightarrow$ sviluppiamo in serie!

$$(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x + \frac{\alpha}{2}(\alpha - 1)x^2 + \dots$$

$\downarrow \frac{\Delta}{A} \ll 1$

$$= \frac{\left(\frac{A}{2}\right)^{5/3}}{A^{2/3}}\left[\left(1+\frac{\Delta}{A}\right)^{5/3} + \left(1-\frac{\Delta}{A}\right)^{5/3}\right] \simeq \frac{A}{2^{5/3}}\left[1 + \cancel{\frac{5}{3}\frac{\Delta}{A}} + \frac{1}{2}\frac{5}{3}\frac{2}{3}\left(\frac{\Delta}{A}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 1 - \cancel{\frac{5}{3}\frac{\Delta}{A}} + \frac{1}{2}\frac{5}{3}\frac{2}{3}\left(\frac{\Delta}{A}\right)^2\right] = \frac{A\,2}{2^{5/3}}\left(1 + \frac{5}{9}\frac{\Delta^2}{A^2}\right) = \frac{A}{2^{2/3}}\left(1 + \frac{5}{9}\frac{\Delta^2}{A^2}\right)$$

~~Bas~~ energia di separazione per un protone (differenza tra energie di legame)

$$S_Z = BA(Z,N) - BA(Z-1,N)$$

$$S_n = BA(Z,N) - BA(Z,N-1)$$

energia di separazione per un neutrone

La differenza tra l'energia di separazione trovata sperimentalmente dovrebbe coincidere con quella prevista dalla formula semiempirica, ma non è così.

Considerano l'energia di separazione tra due protoni e due neutroni:

$$S_{2Z} = BA(Z,N) - BA(Z-2,N)$$

$$S_{2n} = BA(Z,N) - BA(Z,N-2)$$

per non introdurre nella formula il termine di pairing, così viene già considerato non c'è un salto dovuto al δ di pairing passando da A pari ad A dispari

Le discontinuità di energia di separazione per i neutroni si hanno in corrispondenza di $N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$

Se consideriamo l'energia di separazione per i protoni, le discontinuità si hanno in corrispondenza degli stessi numeri $Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$

2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 sono detti "numeri magici".

Come per le energie di ionizzazione, esistono nuclei con energia di legame particolarmente elevata, strutture molto legate, molto superiori alla media → picchi delle energie di separazione per i nucleoni corrispondenti al numero magico

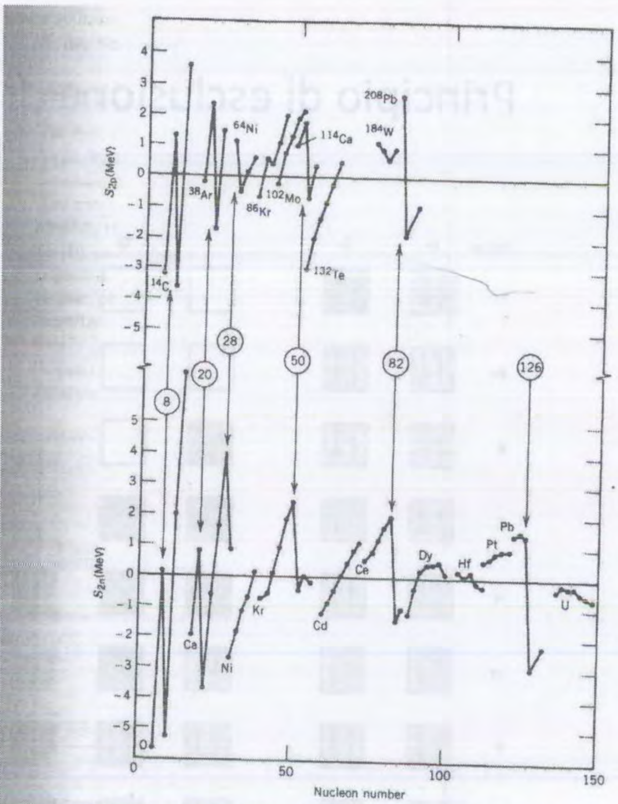
si hanno quando N o Z = ad un numero magico

Esistono nuclei ~~doppiamente~~ ancora più legati, si hanno se N che Z pari a un numero magico → nuclei con numeri doppiamente magico

A differenza degli elettroni con il nucleo, i nucleoni sono legati da un potenziale che non conosciamo (ma che sappiamo che non dipende da tutti i nucleoni, dato che la forza nucleare è a ~~bas~~ corto raggio).

Da questo esperimento capiamo che il potenziale deve essere tale che il riempimento di tutti i livelli energetici deve avvenire in corrispondenza dei numeri magici → riempimento di tutti i livelli ⇒ stabilità massima (in analogia con gli elettroni).

Modello a Shell



$^{4}_{2}He_{2}$, $^{16}_{8}O_{8}$, $^{40}_{20}Ca_{20}$, $^{48}_{20}Ca_{28}$, $^{208}_{82}Pb_{126}$

Nuclei doppiamente "magici"

Figure 5.2 (Top) Two-proton separation energies of sequences of isotones (constant *N*). The lowest *Z* member of each sequence is noted. (Bottom) Two-neutron separation energies of sequences of isotopes. The sudden changes at the indicated "magic numbers" are apparent. The data plotted are differences between the measured values and the predictions of the semiempirical mass formula. Measured values are from the 1977 atomic mass tables (A. H. Wapstra and K. Bos, *Atomic Data and Nuclear Data Tables* 19, 215 (1977)).

discontinuità ! (dovrebbe essere monotono al crescere dei neutroni)

non è monotono

discontinuità in corrispondenza dei numeri magici

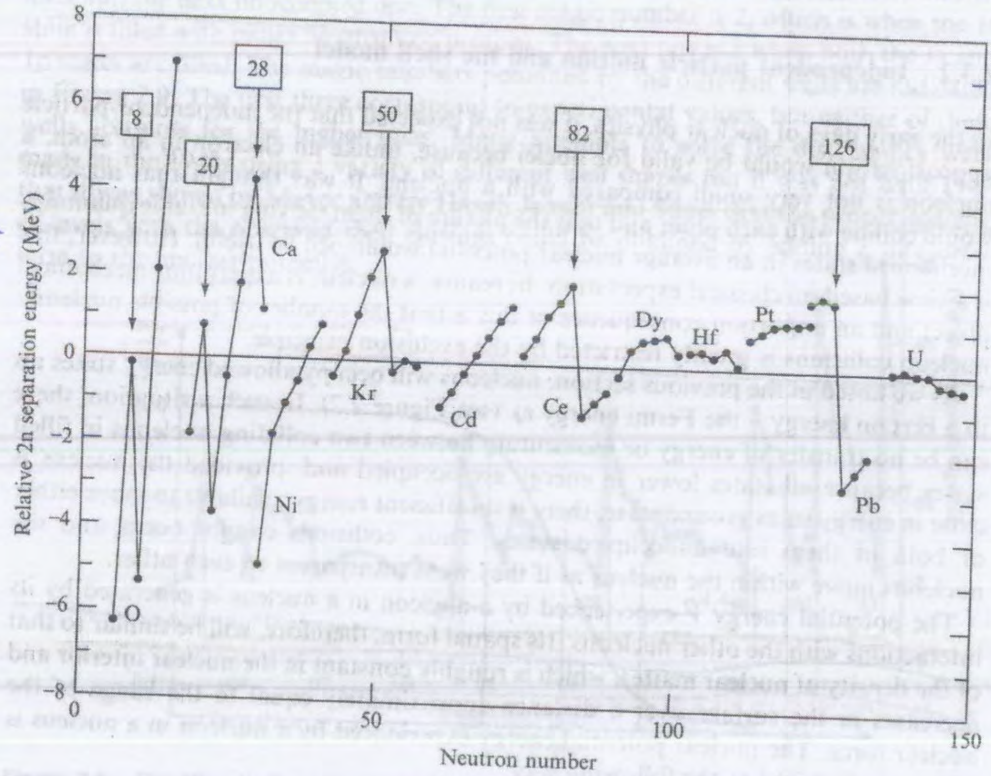


Figure 2.7 The difference between measured two-neutron separation energies and those predicted by the SEMF, plotted against neutron number. The lines connect sequences of isotopes. Discontinuities in the otherwise smooth trend are evident.

Inoltre nuclei doppiamente magici hanno i primi livelli di eccitazione più elevati, ed energie più alte dei nuclei non magici livelli energetici $\quad E_N = \left(N + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$

$N = 2(n-1) + \ell \qquad n = 1, 2, 3, 4$

$N = 2n' + \ell \qquad n' = n-1 = 0, 1, 2, \ldots$

$\ell = 0, 1, 2, 3, \ldots$
$\quad\; s \;\; p \;\; d \;\; f$

$n\ell \rightarrow$ configurazioni spettroscopiche dei livelli
$n\,\ell$ identifica un singolo stato

Parliamo di nucleoni $\rightarrow$ lo spin è fissato! $s = \frac{1}{2}$ $\left(m_s = \pm\frac{1}{2}\right)$

$|\ell, m_\ell, \frac{1}{2}, m_s\rangle$

degenerazione per il singolo livello $\quad 2(2\ell+1) \leftarrow \ell$
(2: spin)

degenerazione totale dei livelli energetici (a fissato N) : d

$$d = 2\sum_{\ell=0}^{N} 2\ell+1$$

N = fissato $\Rightarrow \ell$ va da 0 ad N (da 0 a $n-1$)

$N = 2n' + \ell \qquad (n' = n-1)$

$\ell = N - 2n'$

$$d = 2\sum_{n'=0}^{N/2}\left[2(N-2n')+1\right] = 2\sum_{n=0}^{N/2}(2N+1) - 8\sum_{n'=0}^{N/2} n' = 2(2N+1)\left(\frac{N}{2}+1\right) - 8\cdot\frac{1}{8}N(N+2)$$

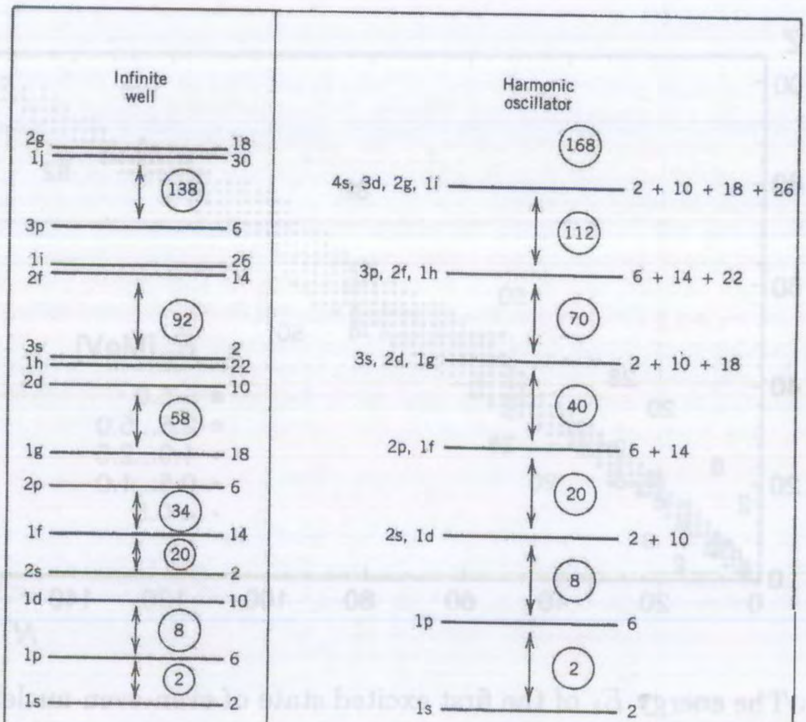
$\ell = 0 \Rightarrow n' = \frac{N}{2}$, $\quad \ell = N \Rightarrow n' = 0$

$$\sum_{n'=0}^{N/2} n' = 0 + 1 + 2 + \cdots \frac{N}{2}$$

$$\frac{N}{2} + \frac{N}{2} - 1 + \cdots + 1 + 0$$

$$\underbrace{\frac{N}{2} + \frac{N}{2} + \cdots + \frac{N}{2} + \frac{N}{2}}_{\frac{N}{2}+1 \text{ termini}} \rightarrow \frac{1}{2}\,\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+1\right) = \frac{1}{8}N(N+2)$$

$$d = \frac{2}{2}(2N+1)(N+2) - N(N+2) = (N+2)(N+1)$$

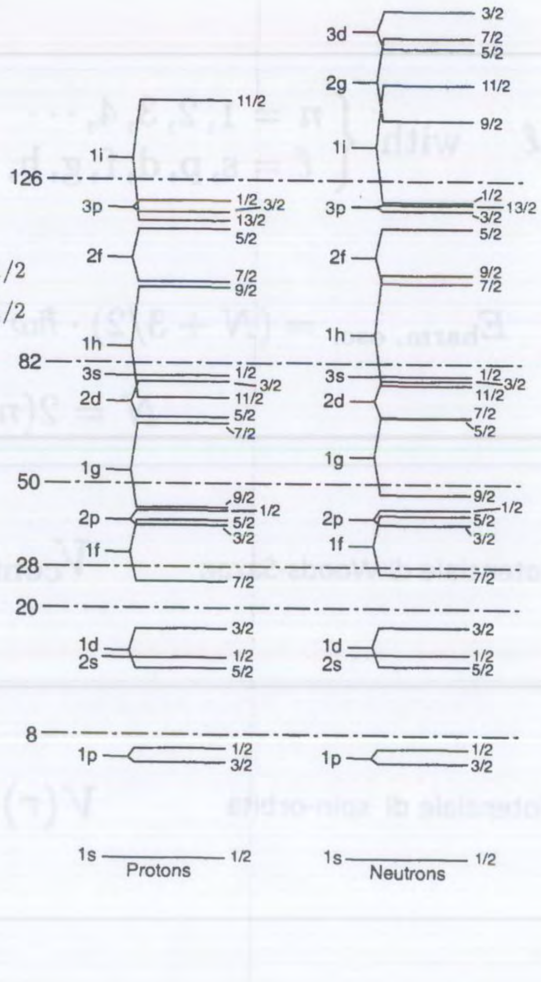


Shell structure obtained with infinite well and harmonic oscillator potentials. The capacity of each level is indicated to its right. Large gaps occur between the levels, which we associate with closed shells. The circled numbers indicate the total number of nucleons at each shell closure.

$$V(r) = V_{\text{centr}}(r) + V_{\ell s}(r)\,\frac{\langle \ell s\rangle}{\hbar^2}$$

$$\frac{\langle \ell s\rangle}{\hbar^2} = \frac{j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)}{2} = \begin{cases} \ell/2 & \text{for } j = \ell + 1/2 \\ -(\ell+1)/2 & \text{for } j = \ell - 1/2 \end{cases}$$

$$\Delta E_{\ell s} = \frac{2\ell+1}{2} \cdot \langle V_{\ell s}(r)\rangle$$



Non riusciamo quindi a riprodurre i numeri magici neanche con il potenziale di Woods-Saxon (come funzione di Fermi).

Introduciamo il potenziale di spin-orbita:

$$\tilde{V}_{ls}(r)\,\vec{l}\cdot\vec{s} = V_{ls}$$

Il potenziale totale è:

$$V(r) = V_{centrale} - \tilde{V}_{ls}(r)\,\vec{l}\cdot\vec{s}$$

uno di quelli studiati prima

$$|l, m_l, \tfrac{1}{2}, m_s\rangle$$

non vanno più bene! Non commutano più con l'Hamiltoniana

invece gli altri vanno bene $[L^2, \vec{L}\cdot\vec{S}] = 0$

$$[S^2, \vec{L}\cdot\vec{S}] = 0$$

Dobbiamo introdurre dei diversi numeri quantici, quindi un nuovo operatore che commuta con l'Hamiltoniana: $\vec{J}$ cioè la somma dei due momenti angolari

$$|J, m_J, l, s\rangle$$

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \Rightarrow J \to 2J+1 = m_J$$

$$J^2 = L^2 + S^2 + 2\,\vec{L}\cdot\vec{S} \qquad |l-s| \leq J \leq l+s$$

$$\vec{L}\cdot\vec{S} = \frac{1}{2}\left(J^2 - L^2 - S^2\right)$$

ma s può solo assumere i valori $\pm\frac{1}{2}$ quindi J assume solo due valori

Passiamo ad un sistema descritto dai numeri quantici $|J, m_J, l, s\rangle$

$$\langle J, m_J, l, s|\,\vec{L}\cdot\vec{S}\,|J, m_J, l, s\rangle \quad \text{possiamo calcolarlo!}$$

I livelli spettroscopici quindi cambieranno! Ne cambieranno da $N=3$ in poi dato che prima avevamo già ottenuto i numeri magici, quindi possiamo dire che l'effetto spin-orbita ancora non si fa sentire, i livelli vengono separati poco, quindi li consideriamo ancora insieme quando contiamo il riempimento.

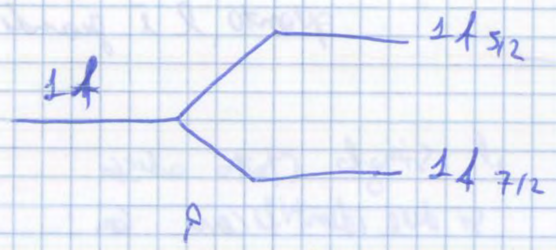
$n \ell_J$

allo stesso modo ritroviamo tutti i numeri magici

si ottiene il n° magico 28

la separazione con $\ell=3$ diventa importante! Confrontabile con le separazioni tra due livelli → interpretato come shell esistente.

$N=3$



C'è uno sdoppiamento grande

riempimento shell quando vengono riempiti questi 3 livelli (vicini tra loro)

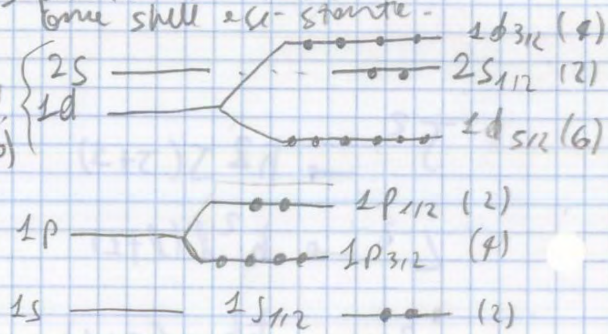


figura 2.9

VEDI GRAFICO LIVELLI ENERGETICI!

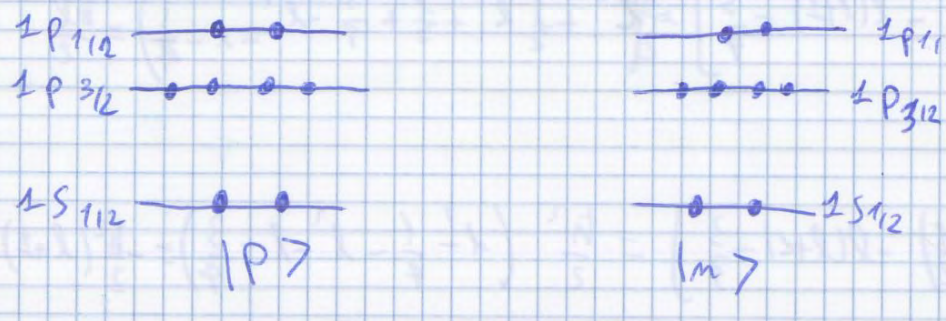
Consideriamo

$^{16}_{8}O_8$ → nucleo doppiamente magico

parità + perché $\ell=0$ (numero dopp. magico)

$J = 0^{(+)}$ → parità

cioè ha parità +, ha momento totale pari 0



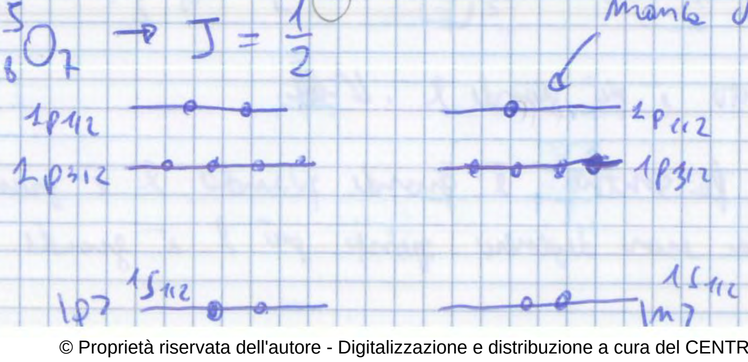
← $2J+1$ posti in ogni livello

$^{16}_{8}O_8$ è molto stabile, infatti la differenza di energia tra due livelli è maggiore rispetto a ^{15}O e ^{17}O che hanno un solo numero magico (vedi grafico)

$^{15}_{8}O_7$ → $J = \frac{1}{2}^{(-)}$ → parità negativa

Manca un ~~protone~~ neutrone → per indicare che è assente si usa $()^{-1}$

$1p_{1/2}^{-1}$



parità → $(-1)^{\ell}$ con $\ell = 1$ (la parità del neutrone in meno)

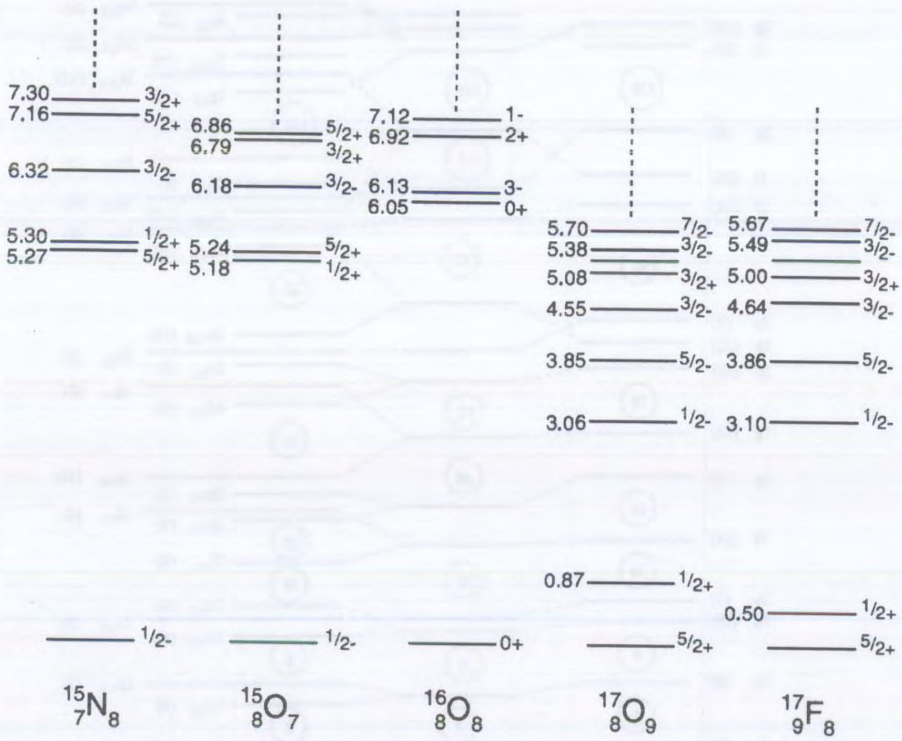
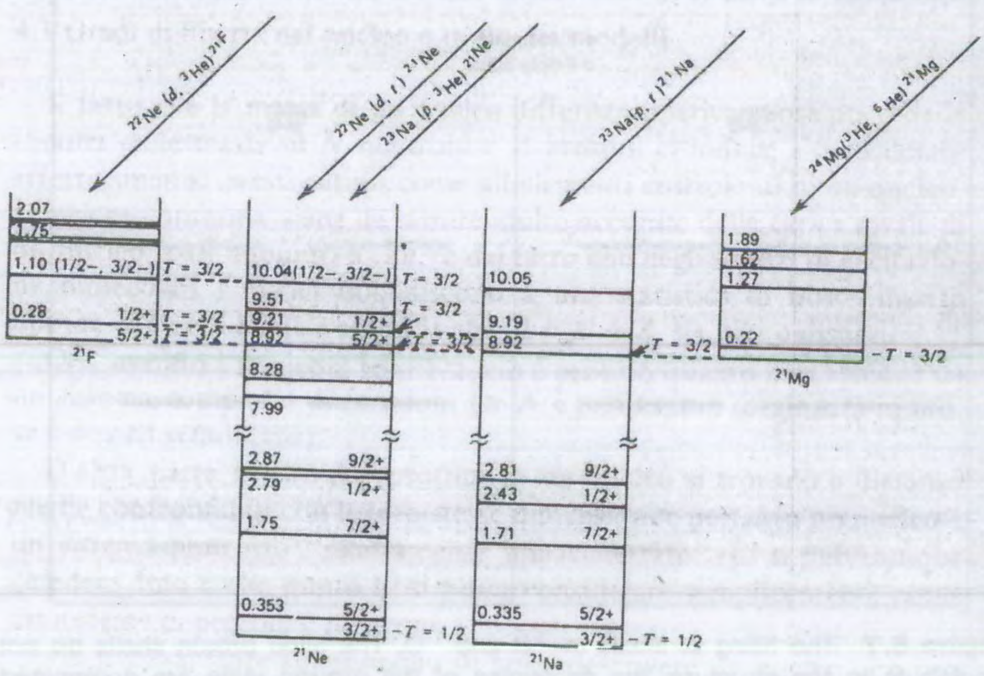


Fig. 17.7. Energy levels of the ^{15}N, ^{15}O, ^{16}O, ^{17}O and ^{17}F nuclei. The vertical axis corresponds to the excitation energy of the states with the various ground states all being set equal, i.e., the differences between the binding energies of these nuclei are not shown.

Indipendenza dalla carica delle forze nucleari



Spettro dei livelli energetici per i nuclei con $A = 21$; per chiarezza di confronto gli stati isobarici ($T = 3/2$) sono posti allo stesso livello (pur avendo energie diverse). (Da De Shalit-Feshbach, John-Wiley and Sons, Inc.).

in generale non sono uguali (c'è qualche cosa sono uguali ma in genere non lo sono)

$\Downarrow$

INDIPENDENZA DALLA CARICA NELLA FORZA NUCLEARE

STATO DEUTONE = 1 NEUTRONE + 1 PROTONE (dal nucleo di deuterio)

$$ {}^{2}_{1}H_{1} \quad , \quad {}^{2}_{1}D $$

Possiamo calcolare l'energia di legame del deutone:

$$ |B.E| = \left[M({}^{1}H) + M_{n} - M({}^{2}_{1}H) \right] c^{2} = 2,2 \text{ MeV} $$

Investighiamo meglio ${}^{2}_{1}H_{1}$, tramite raggi γ

$$ \gamma + {}^{2}_{1}H \rightarrow {}^{1}_{1}H + n $$

oppure viceversa:

$$ n + {}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{2}_{1}H + \gamma $$

$\rightarrow J = 1$

Il nucleo del deuterio ha momento angolare totale pari a 1 (si trova in uno stato che)

$\uparrow$

osservato sperimentalmente

Il nucleo inoltre ha un momento di dipolo magnetico non nullo:

(MAGNETONE DI BOHR $\mu_N = \frac{e\hbar}{2M}$) $\quad \mu_D = 0,857 \mu_N$

Ha anche un momento di quadrupolo elettrico pari a:

$$ Q = 0,288 \text{ fm}^{2} $$

Il quadrupolo elettrico dipende dalla distribuzione della carica elettrica, dipende dalla deformazione del nucleo rispetto alla distribuzione sferica:

$$ Q = \int \rho(r) (3z^{2} - r^{2}) d^{3}r $$

Quindi $g_p^{(s)} = 2{,}79 \cdot 2 = 5{,}58$

MOMENTO MAGNETICO ANOMALO DEL PROTONE!

Capiamo che il protone è una particella NON puntiforme, la carica elementare è distribuita su una regione finita di spazio

NB → $g = 2$ per particelle puntiformi dalla teoria della m. q. relativ.

– momento di dipolo magnetico del neutrone

ci aspettiamo $\mu_n^{(s)} = 0$ dato che il neutrone è una particella neutra

Invece troviamo $\mu_n^{(s)} = -1{,}91\, \mu_N$ $\quad \frac{e\hbar}{2M_N}$

$\mu_n^{(s)} = (0 - 1{,}91)\, \mu_N \qquad g_n^{(s)} = 1{,}91 \cdot 2 \simeq -3{,}83$

MOMENTO MAGNETICO ANOMALO DEL NEUTRONE!

Capiamo che il neutrone è una particella non puntiforme che è composto da cariche elettriche (particelle elementari cariche) la cui somma algebrica dà zero! → quark, ma ci arriviamo dopo

Inoltre capiamo che protone e neutrone sono particelle molto simili, dato che la parte anomala del loro momento magnetico anomalo è comparabile.

Quando in un nucleo ho un protone e un neutrone, per calcolare il momento totale si sommano i momenti di dipolo di protone e neutrone (trascuriamo per adesso il momento angolare orbitale)

$$\begin{array}{rl} 2{,}79\,\mu_N & p \\ -1{,}91\,\mu_N & n \\ \hline 0{,}88\,\mu_N & p+n \end{array}$$

Altri stati possibili $(J=1)$

$^1P_1 \quad \begin{pmatrix} s=0 \\ l=1 \end{pmatrix}$

$^3P_1 \quad \begin{pmatrix} s=1 \\ l=1 \end{pmatrix}$

$^3D_1 \quad \begin{pmatrix} s=1 \\ l=2 \end{pmatrix}$

Ricapitolando:

Vi sono varie evidenze che ci portano a pensare che, per quanto riguarda l'interazione nucleare, protoni e neutroni sono molto simili, hanno uguale interazione. Infatti si nota sperimentalmente che l'interazione

$\left.\begin{matrix} n-n \\ p-p \end{matrix}\right\}$ $\quad {}^{21}_{10}Ne_{11} \quad , \quad {}^{21}_{11}Na_{10}$ ⇒ tramite lo spettro di eccitazione di questi due nuclei

Sono uguali: SIMMETRIA DI CARICA DELLE FORZE NUCLEARI.

Sono invece diverse le interazioni

$p-n \quad {}^{21}_{9}F_{12} \quad , \quad {}^{21}_{12}Mg_{9}$ $\quad$ Ne e F ; Na e Mg

infatti gli spettri di eccitazione dei due nuclei sono diversi

${}^{21}_{10}Ne_{11}$ esiste ed è considerato stabile (è il + stabile dei 4!)

⇒ ha un numero di protoni minore

$\left.\begin{matrix} n-n \\ p-p \\ p-n \end{matrix}\right\}$ non sono tutti e 3 uguali ⇒ PROPRIETÀ DI INDIPENDENZA DELLA CARICA

Applichiamo la formula per μ_{nucleo} ad un nucleo doppiamente magico $\left({}^{16}_{8}O ; J=0^+\right)$

$$\sum_{i=1}^{A}\left(g_l^i \vec{l}_i + g_s^i \vec{s}_i\right) = \underbrace{g_l^p}_{1} \underbrace{\sum_{i=1}^{Z} \vec{l}_i}_{=0} + g_s^p \underbrace{\sum_{i=1}^{Z} \vec{s}_i}_{=0} + g_s^n \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \vec{s}_k}_{=0} = 0$$

Per nuclei doppiamente magici vanno a zero separatamente i 3 termini e il momento di dipolo magnetico totale è quindi uguale a zero!

L'autovalore di isospin dà informazioni sullo stato di protone o neutrone.

L'isospin segue le regole del momento angolare

ISOSPIN $T = \frac{1}{2}$

$$t_z |p\rangle = \frac{1}{2} |p\rangle$$
$$t_z |n\rangle = -\frac{1}{2} |n\rangle$$

definisco $\vec{\tau}$: $T = \frac{\vec{\tau}}{2}$

(analogo di σ per lo spin)

$$\tau_3 |p\rangle = |p\rangle$$
$$\tau_3 |n\rangle = -|n\rangle$$

Possiamo scrivere τ in forma matriciale (matrici di Pauli)

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad |p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau_i \tau_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \tau_k$$

$$\vec{\tau}^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = 3 \mathbb{1}$$

NB

$$\tau_1 |p\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |n\rangle$$

$$\tau_1 |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |p\rangle$$

2 NUCLEONI

stato di due nucleoni $\to$ descrivibile in termini di isospin

$$T = \vec{t}_1 + \vec{t}_2$$

$$T = 1 \begin{cases} 1 & |pp\rangle \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn\rangle + |np\rangle) \\ -1 & |nn\rangle \end{cases}$$

STATO DI TRIPLETTO DI ISOSPIN

0 è una sovrapposizione di due stati $\to \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn\rangle + |np\rangle)$

Uno dei due stati (Ψ_{PP} o Ψ_{SD}) viene scartato dal confronto con il valore sperimentale

Succede sempre che $\mu_D^i(PP) \neq \mu_D^{exp}$

Invece, si ha che $\mu_D(SD) = \mu_D^{exp}$ con opportuni coefficienti, che sono:

$Q_D^2 = 0,04 \Rightarrow 4\%$ probabilità di trovare il deutone in $^3D_1$

$Q_S^2 = 0,96 \Rightarrow 96\%$ probabilità di trovare il deutone in $^3S_1$

(È compatibile con il fatto che $Q \neq 0$)

La natura preferisce $^3S_1$ anche se $^3D_1$ è ugualmente possibile.

Questo ci porta a dire che le forze nucleari sono forze non centrali

[(il momento angolare orbitale non è conservato! posso trovare $L=0$ o $L=2$)

La natura quindi predilige gli stati $|pn\rangle$ disposti in maniera antisimmetrica ($|T=0\rangle$). Le forze nucleari hanno una forte dipendenza dall'isospin.

$$\begin{cases} \Psi_{pp}(1,2) = \Psi^A(\bar{r}_1\bar{s}_1, \bar{r}_2\bar{s}_2)\,|T=1, T_z=1\rangle \\ \Psi_{nn}(1,2) = \Psi^A(\bar{r}_1\bar{s}_1, \bar{r}_2\bar{s}_2)\,|T=1, T_z=-1\rangle \\ \Psi_{pn}(1,2) = \Psi^A(\bar{r}_1\bar{s}_1, \bar{r}_2\bar{s}_2)\,|T=1, T_z=0\rangle \end{cases}$$

$\Psi_{pn}(1,2) = \Psi^S(\bar{r}_1\bar{s}_1, \bar{r}_2\bar{s}_2)\,|T=0\rangle$ ↙ il deutone è in questo stato

L'interazione è più elevata quando si ha $p-n$, una parte spaziale simmetrica, mentre quando la parte spaziale e di spin (e di spin) è antisimmetrica, $p-p$, $n-n$ e $p-n$ hanno mediamente ~~possibile~~ una interazione più o meno identica

Quindi questo potenziale commuta con Π_{z_1}.

Mi aspetto quindi un potenziale (tra due particelle) $\boxed{V(r) = f(r,s)\,\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2}$

questo potenziale soddisfa le evidenze sperimentali riguardanti l'uguaglianza tra le interazioni $n-n$ e $p-p$ perchè commuta con l'operatore che scambia n e p

Inoltre

$$H\psi_{np}^{(T=1)} = E_1 \psi_{np}^{(T=1)}$$

$$H\psi_{np}^{(T=0)} = E_0 \psi_{np}^{(T=0)}$$

Questo termine del potenziale tiene conto che lo stato singoletto ($n-p$ con $T=0$) è mediamente più legato dello stato tripletto ovvero con $n-p$ e $T=1$?

Confrontiamo E_0 e E_1!

$$\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$$

i pedici adesso rappresentano le particelle

$$T^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2\vec{T}_1 \cdot \vec{T}_2$$

$$\vec{T}_1 \cdot \vec{T}_2 = \frac{1}{2}\left(T^2 - T_1^2 - T_2^2\right)$$

$$\frac{\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2}{4} = \frac{1}{2}\left(T^2 - \frac{\tau_1^2}{4} - \frac{\tau_2^2}{4}\right)$$

$$\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 = 2T^2 - \frac{\tau_1^2}{2} - \frac{\tau_2^2}{2}$$

$$\underbrace{\langle T_1 T_2|}_{\text{parte dell'isospin di }\psi!} \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2 |T_1 T_2\rangle = 2T(T+1) - 3 = \begin{cases} 1 & T=1 \quad \text{repulsiva} \\ -3 & T=0 \quad \text{attrattiva} \end{cases}$$

parte dell'interazione che compete all'isospin

NB $\tau^2 = 3\mathbb{1}$

$$\tau_i \tau_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\tau_k$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 107 di 266

ESERCIZIO SULLA SEZIONE D'URTO

$$n + {}^{235}_{92}U_{143} \longrightarrow {}^{140}_{54}Xe_{86} + {}^{94}_{38}Sr_{56} + 2n$$

$$Q = \underbrace{M_n + M_u}_{\text{energia iniziale solo termine di riposo}} - M_{Xe} - M_{Sr} - 2M_n = K_{Xe} + K_{Sr} + K_{n_1} + K_{n_2}$$

$$Q = M_u - M_{Xe} - M_{Sr} - M_n$$

$$|B.E.|_{Xe} + |B.E.|_{Sr} - |B.E.|_u = Q$$

energia che viene liberata

$$|B.E.|_{Xe} = [54\,M_p + 86\,M_n - M_{Xe}]\,c^2$$

$$|B.E.|_{Sr} = [38\,M_p + 56\,M_n - Sr]\,c^2$$

$$|B.E.|_u = [92\,M_p + 143\,M_n - M_u]\,c^2$$

$$Q = |B.E.|_{Xe} + |B.E.|_{Sr} - |B.E.|_u$$

$$Q = -M_n - M_{Xe} - M_{Sr} + M_u$$

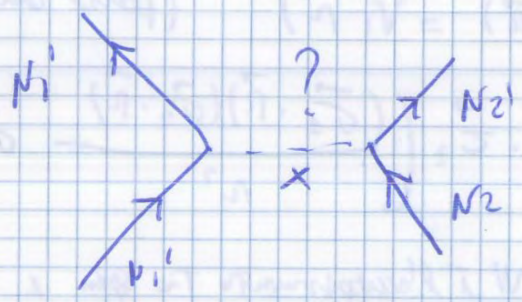
$${}^{235}_{92}U \longrightarrow \frac{Z}{A} = 0{,}392$$

$${}^{140}_{54}Xe \longrightarrow \frac{Z}{A} = 0{,}381$$

$${}^{94}_{38}Sr \longrightarrow \frac{Z}{A} = 0{,}401$$

Vengono prodotti nuclei più leggeri ma con simili $\frac{Z}{A}$ sono nuclei molto radioattivi

N → nucleoni



$m_x \neq 0$

Ma i nucleoni non sono particelle elementari! Non posso usare la QED. Si studia considerando che i nucleoni sono formati da quark → Cromodinamica quantistica: QCD

Possiamo invece pensare di studiare l'interazione nucleare pensando ai nucleoni come particelle elementari (differenze rispetto a e^-: raggio di interazione non infinito, ma finito e $m_x \neq 0$ massa delle particelle che media l'interazione diversa da zero).

NB luce → $m_\gamma = 0$ la luce e qualsiasi particella con massa = 0 non è in quiete per nessun sistema di riferimento, è sempre in moto → stato e spin = 0 (che implica stato di quiete) non possibile.

Possiamo pensare ad una equazione di Schrodinger scritta in termini relativistici

NB in termini relativistici, anche il potenziale dipende dalla quantità di moto (V è indipendente da $\bar{p}$ solo in teorie non relativistiche)

$$E \to -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \qquad \bar{p} \to -i\hbar \bar{\nabla}$$

EQUAZIONE DI SCHRODINGER LIBERA, SENZA POTENZIALE

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\bar{r},t) = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \phi(\bar{r},t) + m^2 c^4 \phi$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(\bar{r},t) = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi(\bar{r},t)$$ equazione di Klein - Gordon

$$\nabla^2 \phi = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi$$ non abbiamo le sorgenti!

massa dei bosoni che mediano l'interazione

Proviamo ad aggiungere un termine (in analogia con il caso $m=0$)

$$\boxed{\nabla^2 \phi = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi - g\,\delta(\bar{r})}$$

$\frac{q}{\varepsilon_0} \to g$ quantifica la quantità dell'interazione!

Risolvendo l'equazione si trova:

$$\phi = \frac{g}{4\pi} \frac{1}{r} e^{-\frac{r}{r_0}}$$ dove $r_0 = \frac{\hbar}{mc}$ $\left(\nabla^2 \phi = \frac{1}{r_0^2} \phi - g\,\delta(\bar{r})\right)$

per piccoli r va come $\frac{1}{r}$

quando r aumenta l'esponenziale manda a zero velocemente ϕ

quanto velocemente? dipende da r_0!

Se $m=0$ $r_0 \to \infty$ $\left(\to e^{-\frac{r}{r_0}} = 1\right)$

più l'oggetto è massivo, più l'interazione è a corto raggio.

Sappiamo, dagli esperimenti risulta che $r_0 \doteq 1 \div 2$ fm

quindi $m_x c^2 \simeq (100 \div 200)$ MeV

L'interazione nucleare quindi è mediata da un ~~oggetto~~ oggetto massivo, che spiega l'interazione nucleare.

Abbiamo perdita di massa durante l'interazione! È accettabile?

→ quindi di energia

Spin

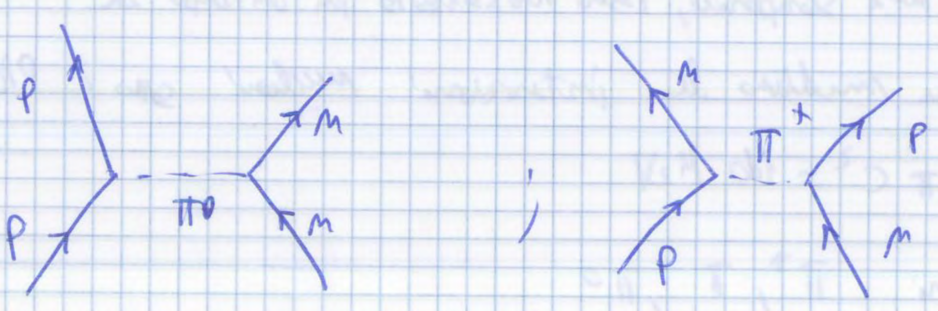
$S = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ BARIONI (p, n)

$S = 0$ MESONI (π)

Lo mesone più leggero = pione

isospin dei pioni = 1

ESEMPIO DI ~~[illegible]~~ POTENZIALE DI SCAMBIO DEI PIONI



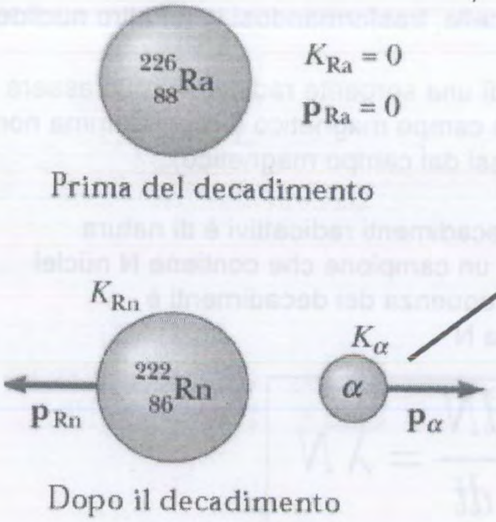
il pione trasporta la quantità di moto ed energia, viene creato e riassorbito in Δt.

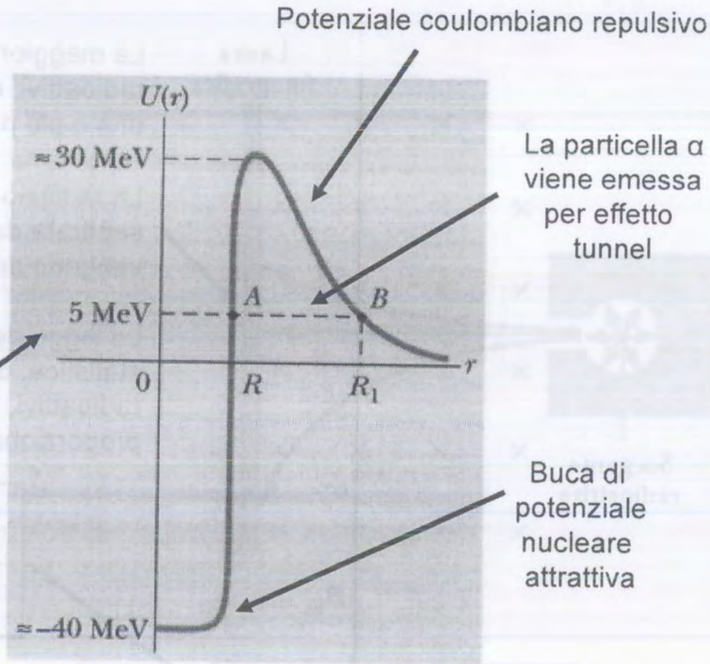
PIONI VIRTUALI → non li vediamo effettivamente, in questo contesto mediano l'interazione

Nelle reazioni nucleari, invece, vediamo i pioni! Li riveliamo sperimentalmente! Vengono creati e non riassorbiti!

Decadimento alpha

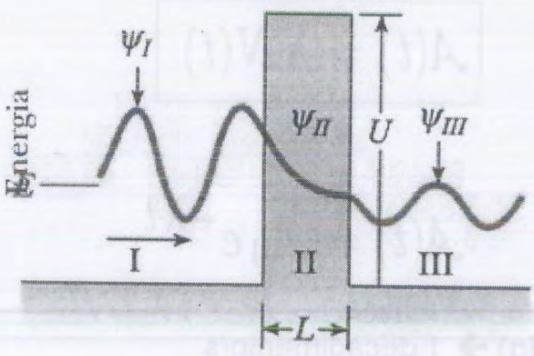
$$^{226}Ra \rightarrow {}^{222}Rn + \alpha$$





$$\boxed{^{238}U \rightarrow {}^{234}Th + {}^{4}He} \quad K_\alpha = 4.25\ \text{MeV} \quad T_{1/2} = 4.47 \cdot 10^9 a$$

Effetto Tunnel



Coefficiente di trasmissione

$$\boxed{T \approx \exp(-2\,C\,L)}$$

$$C = \frac{\sqrt{2m\,(U-E)}}{\hbar}$$

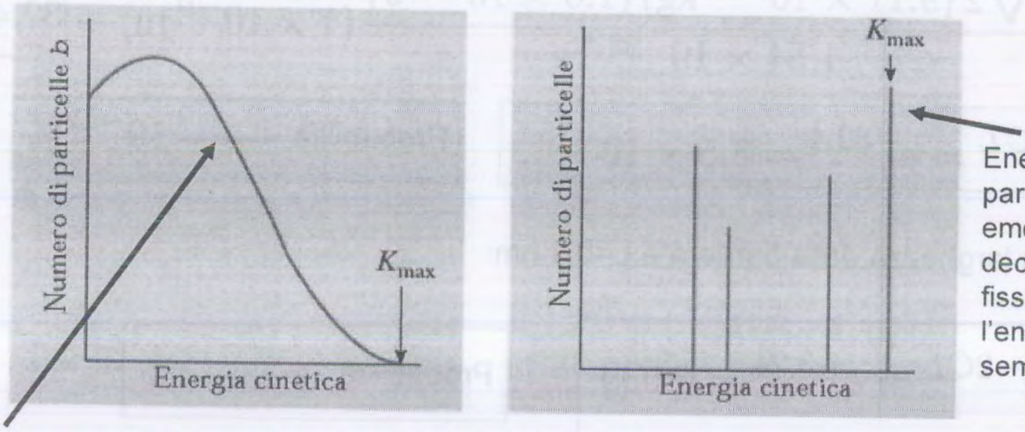
- Diodo tunnel
- Giunzione Josephson
- Decadimenti radioattivi (alpha)
- Microscopio a scansione ad effetto tunnel

Decadimento beta

$$^{32}P \rightarrow ^{32}S + e^- + \bar{\nu}_e \quad (T_{1/2} = 14.3\,\mathrm{d}) \qquad (n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e)$$

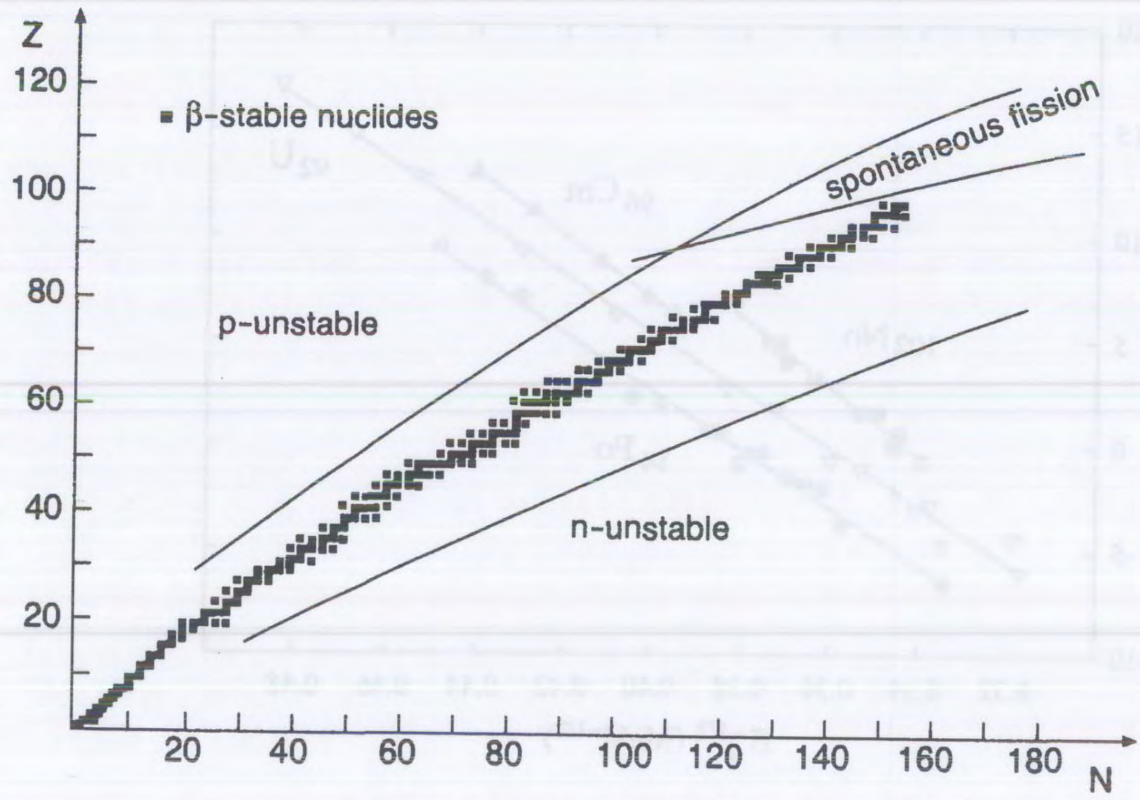
$$^{64}Cu \rightarrow ^{64}Ni + e^+ + \nu_e \quad (T_{1/2} = 12.7\,\mathrm{h}) \qquad (p \rightarrow n + e^+ + \nu_e)$$

La caratteristica fondamentale dei decadimenti beta è che la particella beta emessa non ha sempre la stessa energia cinetica a fissato decadimento radioattivo



Energia delle particelle alpha emesse in diversi decadimenti (a fissato decadimento, l'energia cinetica è sempre la stessa)

Spettro delle particelle beta emesse a fissato decadimento

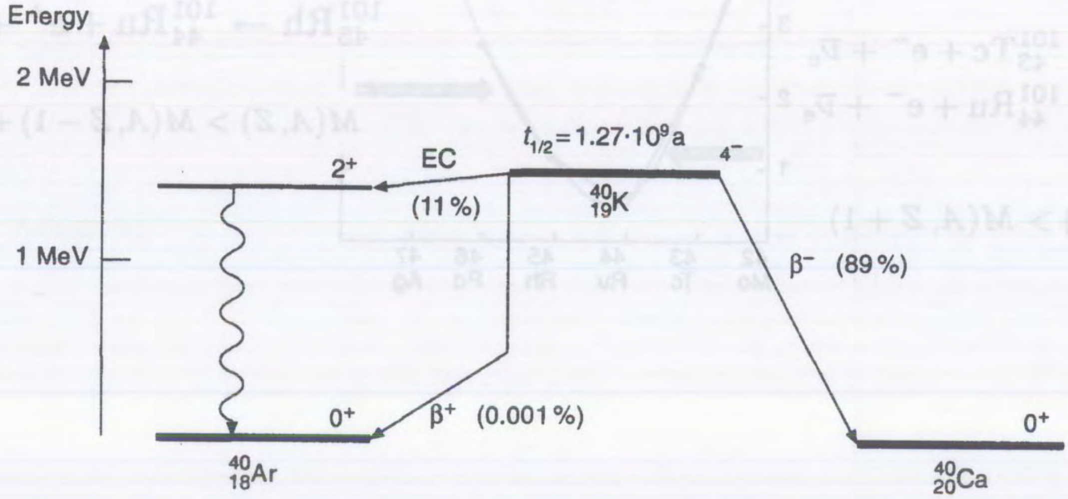


© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 119 di 266

Cattura elettronica

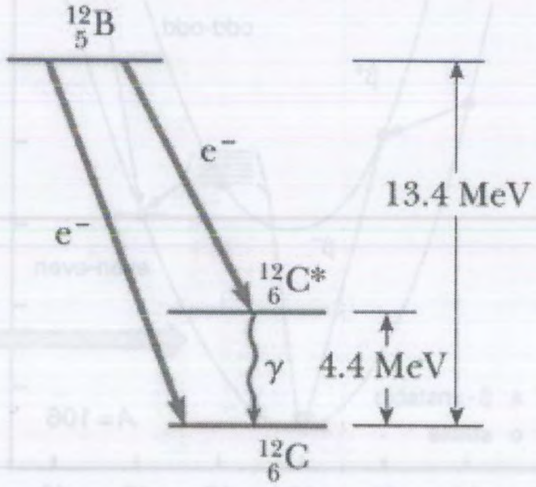
$$p + e^- \rightarrow n + \nu_e$$

$$M(A,Z) > M(A,Z-1) + \varepsilon$$



Decadimento gamma

Frequentemente, un nucleo che subisce un decadimento radioattivo rimane in uno stato energetico eccitato. Può quindi subire un ulteriore decadimento ad uno stato di energia più bassa emettendo un fotone con una energia dell'ordine del MeV (raggi gamma).



REAZIONI NUCLEARI

I decadimenti radioattivi sono una particolare classe di reazioni che avvengono spontaneamente senza bisogno di alcun intervento esterno.

$$Q = \left[\sum_k M_k^{in} - \sum_k M_k^{fin} \right] c^2 = \Delta E_K$$

- Se $Q > 0$ la reazione è ESOTERMICA (avviene spontaneamente) e questa energia appare come un incremento di energia cinetica.
- Se $Q < 0$ la reazione è ENDOTERMICA e questa energia rappresenta un aumento dell'energia a riposo e la reazione può avvenire solo se la particella incidente (reagente) ha una energia cinetica maggiore di $|Q|$.
  L'energia minima affinché la reazione avvenga è detta ENERGIA DI SOGLIA.

DECADIMENTI RADIOATTIVI

I decadimenti radioattivi sono reazioni nucleari con $Q > 0$.
(Vi è la conservazione del numero barionico, cioè del numero di particelle con spin semintero, e della carica)

I decadimenti coinvolgono nuclei instabili che decadono in nuclei più stabili (con maggiore energia di legame) tramite emissione di particelle α, β, γ ($\alpha = {}^4_2He_2$, $\beta^+ = e^+$, $\beta^- = e^-$, γ).
La massa del risultante è sempre inferiore a quella iniziale.

- DECADIMENTO α

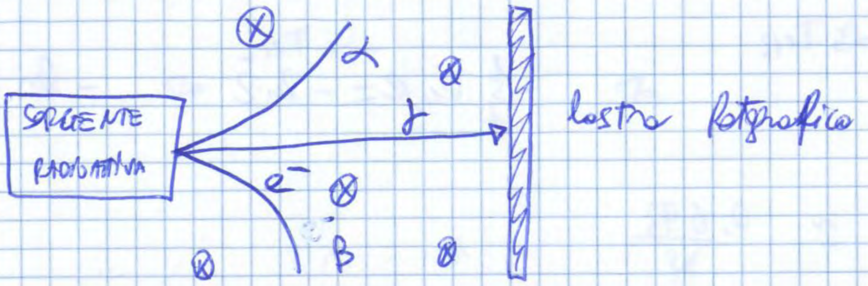
$${}^A_Z X' \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} X + \alpha \qquad \text{con } \alpha = {}^4_2 He$$

- DECADIMENTO β^-

$${}^A_Z Y' \rightarrow {}^{A}_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu}_e$$

($\bar{\nu}$ denota il neutrino associato all'elettrone

γ è una radiazione elettromagnetica nello spettro dei raggi γ.
I tre decadimenti possono anche essere distinti in base alla differente curvatura dei prodotti quando immersi in un campo magnetico.



La legge dei decadimenti radioattivi è di natura statistica: dato un campione che contiene N nuclei radioattivi, la frequenza di decadimenti è proporzionale a N secondo la seguente legge empirica:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$ equazione differenziale del 1° ordine
(il $-$ indica che N diminuisce con t, i nuclei decadono!)

Condizioni iniziali $(t=0)$ $\quad N(0) = N_0$

$$\int_{N_0}^{N(t)} \frac{dN'}{N'} = \int_0^t -\lambda \, dt' \Rightarrow \ln \frac{N(t)}{N_0} = -\lambda t$$

$\lambda \to$ costante di decadimento

$$N(t) = N_0 \, e^{-\lambda t}$$

$[s] = \lambda^{-1}$

s è detta costante di decadimento ed ha un valore caratteristico differente per ogni nucleo radioattivo.
Nelle tabelle generalmente si specifica il tempo di dimezzamento anziché λ. Il tempo di dimezzamento è il tempo massimo affinché N sia dimezzato, quello che il campione impiega per decadere da N a $\frac{N}{2}$.

ATTIVITÀ DEL CAMPIONE RADIOATTIVO (O FREQUENZA DI DECADIMENTO)

= numero di decadimenti per unità di tempo $\Rightarrow A(t) = \lambda N(t)$

$\left(A(t) = \left| \frac{dN}{dt} \right| \right)$

Sostituendo $A(t)$ nella legge di decadimento radioattivo otteniamo

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

La velocità decresce nel tempo, dato che diminuisce il numero di elementi

$[A] = Bq \qquad 1\ Bq = 1$ decadimento/s $\qquad$ (SI)

Per non portarsi dietro potenze elevate si usa il Curie (Ci)

1 Curie = $3{,}7 \cdot 10^{10}$ Bq (rappresenta l'attività di 1g di Ra)

ESEMPI

$^{238}U \to T_{1/2} = 4{,}47 \cdot 10^{9}$ y $\to$ ($T_{1/2}$ comparabile con l'età della Terra)

$^{235}U \to T_{1/2} = 7{,}04 \cdot 10^{8}$ y

$^{232}Th \to T_{1/2} = 1{,}4 \cdot 10^{10}$ y $\qquad$ tutti decadono secondo α!

ESERCIZIO

Supponiamo $t=0$, $N(0) = N_0 = 0$

All'inizio non ci sono nuclei radioattivi di una certa specie - Uso poi un acceleratore di particelle che permette il verificarsi di reazioni nucleari producendo un dato numero N di decadenti.

$\dot{N} = R = \Phi_a N_b \sigma = $ cost. $\qquad N(t) = ?$

Lo ez. all'unità

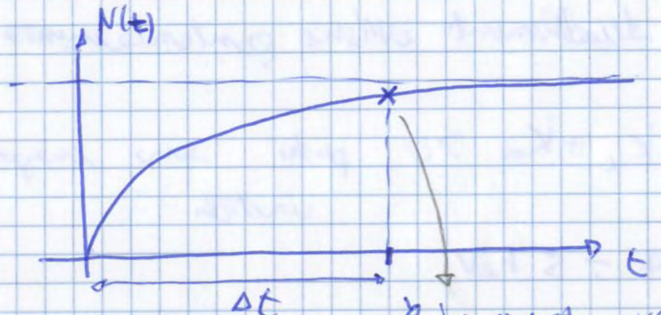
$$\left[\frac{1}{\lambda} R e^{\lambda t}\right]_0^t = N(t)\, e^{\lambda t}$$

$$\frac{R}{\lambda}\left(e^{\lambda t} - 1\right) = N(t)\, e^{\lambda t}$$

$$N(t) = \frac{R}{\lambda} e^{-\lambda t}\left(e^{\lambda t} - 1\right) = \frac{R}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$$

$$\boxed{N(t) = \frac{R}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)}$$

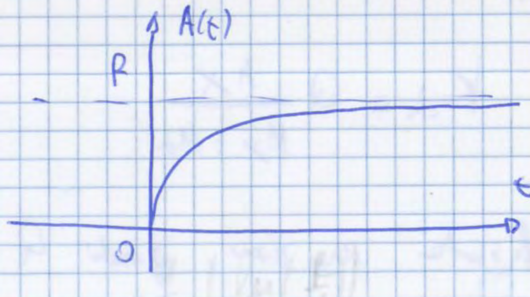
$$\lim_{t \to +\infty} N(t) = \frac{R}{\lambda} \qquad t \to 0 : N(t) = \frac{R}{\lambda}\lambda t + o(t)$$



in questo punto si dice che si è raggiunto l'equilibrio secolare

la specifica varia di caso in caso, in genere è il valore dopo il quale non si registrano variazioni superiori al suo 1%.

$$A(t) = \lambda N(t) = R\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$$



Mettendo i numeri nelle formule trovate si ha:

$$t \simeq \frac{A\, T_{1/2}}{\ln 2 \cdot R} = 1{,}54 \text{ giorni} \qquad t \simeq \frac{A}{\lambda R}$$

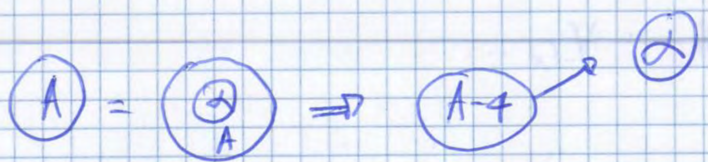
$$Q = |B_E|_X + |B_E|_\alpha - |B_E|_{X'}$$

L'energia di legame in valore assoluto è maggiore nello stato finale

In base alla formula semiempirica di massa il guadagno di energia deriva dal termine coulombiano (il termine di pairing non incide dato che il nucleo resta PARI o DISPARI a seconda dello stato iniziale e neanche il termine di simmetria viene modificato) per nuclei pesanti.

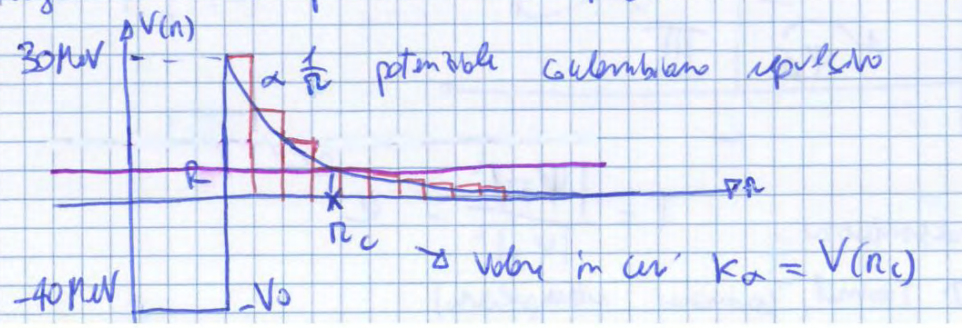
Di conseguenza per i decadimenti α gli A sono dell'ordine dei 200 e non avvengono per $A<150$.

I tempi di dimezzamento, a seconda del nucleo padre, variano dai milioni di anni ai nanosecondi. Ciò è una conseguenza dell'effetto tunnel. Il decadimento infatti avviene per effetto tunnel.



Uno parte a pensare che all'interno del nucleo c'è uno stato fortemente legato tra 2p, 2n (particella α). Possiamo pensare alla particella α come un pezzo di nucleo molto stabile (tra i nuclei leggeri nessuno ha un picco di energia di legame come α, dato che α è un nucleo doppiamente magico) all'interno del nucleo X'.

Si ragiona sulla probabilità di fuoriuscita dal nucleo



Per applicare l'effetto tunnel al caso di decadimenti α, bisogna suddividere il potenziale coulombiano in tante barriere di potenziale rettangolari, sufficientemente fini. Dunque la particella α dovrà attraversare N barriere per effetto Tunnel.

La probabilità di attraversamento dell'intero potenziale sarà il prodotto delle probabilità di attraversamento di ogni singola barriera (eventi indipendenti).

$$T' = \underbrace{e^{-2C_1 \Delta x_1}}_{T_1} \underbrace{e^{-2C_2 \Delta x_2}}_{T_2} \cdots \underbrace{e^{-2C_n \Delta x_n}}_{T_M}$$

$$T = e^{-2\sum_{k=1}^{n} C_k \Delta x_k} = e^{-2G}$$

($G \to$ fattore di Gamov, da Gamov che sviluppò questa teoria)

$$G = \frac{1}{\hbar} \int_R^{R_C} \sqrt{2m\left(V(r) - K_\alpha\right)}\, dr$$

$$R_c : \quad V_c(R_c) = K_\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2(Z-2)e^2}{R_C} = K_\alpha$$

$$R_c = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0 K_\alpha} \qquad V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2(Z-2)e^2}{r}$$

$$G = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mK_\alpha} \int_R^{R_C} \sqrt{\frac{V(r)}{K_\alpha} - 1}\, dr$$

$$\frac{V(r)}{K_\alpha} = \frac{R_C}{r}$$

Quindi il fattore G è inversamente proporzionale alla ~~ecc~~ velocità della particella α.

Tanto più è grande T, tanto maggiore è la probabilità di decadimento nell'unità di tempo. Quindi T è legato a λ.

In realtà λ_{TOT} si ottiene moltiplicando T per la probabilità di trovare la particella α sulla superficie della barriera. Si dimostra però che il termine dominante è sempre quello esponenziale legato a T (la probabilità di trovare la particella sulla superficie da un contributo minore).

$$\lambda \propto T = e^{-2G} \qquad T_{1/2} \propto e^{+2G} = e^{2\pi(Z-2)\alpha c\sqrt{\frac{4mc^2}{2K_\alpha c^2}}}$$

$$T_{1/2} \propto e^{K_\alpha^{-1/2}}$$

Legge empirica che lega $T_{1/2}$ a K_α:

$$\boxed{\ln T_{\frac{1}{2}} = a + bZK_\alpha^{-\frac{1}{2}}}$$

RELAZIONE DI GEIGER - NUTTAL

Questa relazione si conosceva già nel 1911, infatti era noto, dalle osservazioni sperimentali di diversi isotopi di nuclei radioattivi (decadimenti α) a fissato Z avevano un andamento di $\ln T_{1/2}$ come $1/\sqrt{K_\alpha}$, quindi $T_{1/2}$ molto diversi tra loro.

Questo modellino ci spiega come i tempi di dimezzamento tra nuclei con Z uguale risultano essere tanto diversi: essi infatti variano al variare di K_α (K_α dipende dalla reazione! Diversi isotopi, quindi con M_X diversi, danno luogo a decadimenti con K_α diversi, quindi questo influisce sul tempo di dimezzamento)

Il modello che spiega il decadimento α tramite l'effetto tunnel quindi è in accordo con le osservazioni sperimentali e con la legge empirica (porta agli stessi risultati della legge empirica!)

$$A(t) = \frac{0,693}{T_{1/2}} \cdot \underbrace{\frac{1g \cdot N_A}{238,05}}_{\text{N Avogadro}} = 6 \cdot 10^{11} \frac{dec}{g \cdot s}$$

(N di decadimenti per unità di tempo per ogni grammo)

$$P = A(t)\, K_\alpha = 33,6 \, MeV/g$$

potenza istantanea per 1 grammo di Plutonio

$$P = A(t)\, Q\, F_c = 0,6 \, W/g$$

fattore di conversione $= 1,6 \cdot 10^{-13} \frac{J}{MeV}$

La potenza prodotta è piccola, ma è una potenza certa, stimabile, assicurata. Anche se piccola è sufficiente per alcune applicazioni, come pacemaker. ~~...~~ I decadimenti α vengono usati come generatori di corrente elettrica.

Le applicazioni più famose sono quelle in campo aerospaziale:

RTG → generatori termoelettrici a radioisotopi

(Il calore ~~generato~~ generato dalle particelle α, generate dal decadimento, viene convertito dal generatore termoelettrico)

Usati nelle missioni spaziali (APOLLO), e nelle sonde.

ESEMPI NUMERICI

1) $^{238}_{94}Pu \rightarrow ^{234}_{92}U + \alpha$ $\qquad K_\alpha = 5,593 \, MeV$

$T_{1/2} = 87y$

Si vuole usare il Plutonio per alimentare una sonda spaziale che viaggia verso un pianeta. ~~...~~ Ci impiega 7 anni e l'efficienza di conversione del generatore termoelettrico è del $\eta = 5\%$. La potenza minima necessaria è 200W.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 137 di 266

Quindi la probabilità che la particella α attraversi la barriera di potenziale va come

$$T = e^{-2G} \qquad \text{con} \quad G \propto K_\alpha^{-1/2}$$

Tanto più è grande T, tanto più sarà grande la probabilità di decadimento. T è strettamente legato a λ, costante di decadimento:

$$\lambda \propto e^{-2G}$$

$$T_{1/2} \propto e^{+2G}$$

λ dipende anche dalla probabilità di trovare la particella α sulla superficie della barriera (possiamo pensare la particella α come una pallina che va avanti e indietro nella barriera, e quante volte sbatte sulla barriera), ma il termine e^{-2G} è dominante (probabilità di attraversamento).

$$\ln T_{1/2} = a + bZ K_\alpha^{-1/2} \qquad \text{LEGGE EMPIRICA}$$

$\rightarrow$ RELAZIONE DI GEIGER-NUTTAL

In questo modello è predominante l'effetto tunnel. Basta una piccola variazione di K_α (con K risolto), data da diverse masse iniziali e finali, per avere un cambiamento ~~assoluto~~ molto molto grande di $T_{1/2}$!! Questo è dovuto alla presenza di un esponenziale, derivante dall'effetto tunnel. Queste variazioni enormi di $T_{1/2}$ sono ~~[illegible]~~ osservate sperimentalmente e sono la conferma del modello quantistico e del modello che abbiamo visto fino ad ora.

Tuttavia la potenza è sufficiente ad alimentare microcircuiti elettrici per molto tempo.

In fisica medica vengono utilizzati per alimentare pacemaker.

La potenza è costante per molti anni perché il tempo di dimezzamento è molto grande!! (87Y)

I decadimenti radioattivi vengono utilizzati soprattutto in campo aerospaziale → RTG (generatori termoelettrici a radioisotopi)

↓

missioni spaziali, sonde, Apollo 14

L'energia termica viene convertita in energia elettrica

ESERCIZIO (tema d'esame)

$$^{238}_{94}Pu \rightarrow {}^{234}_{92}U + \alpha \qquad K_\alpha = 5{,}593\ MeV$$

$$T_{1/2} = 87Y$$

Viaggio di $\Delta t = 4Y$ con efficienza di conversione da energia termica ad elettrica: $\eta = 5\%$

Si vuole arrivare sul pianeta dopo 4 anni con una potenza minima di $P_m = 200W$. Quanto plutonio dobbiamo caricare sulla sonda al decollo? $M_{Pu}(0) = ?$

Si calcola prima l'attività $A = \lambda N$

ATTIVITÀ dopo 4 ANNI $\lambda N_0 e^{-\lambda \Delta t}$

$$P(t=4Y) = \lambda N_0 e^{-\lambda \Delta t} K_\alpha \cdot \eta\, F_c \geq P_m$$

F_c ↓ fattore di conversione $\left(\frac{J}{MeV}\right)$

$$N_0 \geq \frac{e^{\lambda \Delta t} \cdot 200W}{\lambda\ 0{,}05\ 5{,}593\ MeV\, F_c} = 1{,}83 \cdot 10^{25} \text{ (nuclei di } {}^{238}Pu)$$

DECADIMENTI β

$\beta^-)$ $\quad {}^A_Z X' \rightarrow {}^A_{Z+1} X + e^- + \bar{\nu}_e \qquad (n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e)$

$\beta^+)$ $\quad {}^A_Z X' \rightarrow {}^A_{Z-1} X + e^+ + \nu_e \qquad (p \rightarrow n + e^+ + \nu_e)$

$\varepsilon)$ $\quad e^- + {}^A_Z X' \rightarrow {}^A_{Z-1} X + \nu_e \qquad (e^- + p \rightarrow n + \nu_e)$

I decadimenti β avvengono per nuclei leggeri

È più facile studiare il decadimento β^-, dato che il positrone e^+ reagisce subito con la materia, decade subito,

ANNICHILAZIONE : $e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$

Per il decadimento del neutrone allo stato libero $n \rightarrow p + e^-$, si ha: (il protone + leggero del neutrone!)

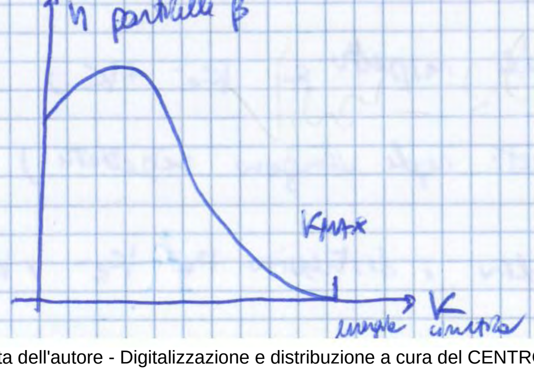
NB mentre il neutrone decade nel protone anche allo stato libero, il protone no! Il protone decade solo se vi è un vantaggio energetico, quindi se l'energia di legame del nucleo figlio è maggiore (non avviene allo stato libero)

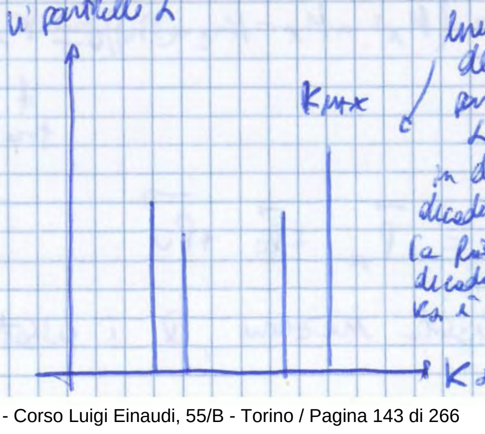
$\tau_n = 886\ s \simeq 14{,}76\ min$

$T_{1/2} = 10{,}2\ min$

Se studiamo gli elettroni che vengono emessi in un decadimento β^-, troviamo che la particella β emessa (elettrone) non ha sempre la stessa energia cinetica a fissato decadimento (a differenza del decadimento α). (decadimento β → nuclei medio-leggeri)

Confrontiamo i grafici





Energia delle particelle α emesse in diversi decadimenti (a fissato decadimento, Kα è la stessa

$Q \simeq K_{e^-} + K_\nu$

e^- e il neutrino si prendono tutta l'energia a disposizione.

Q è fisso, ma può variare la distribuzione di questa energia tra elettrone e neutrino.

Calcolando Q, possiamo avere una stima indiretta della massa del neutrino.

Facciamo una misura sperimentale (quando K_e è massima)

$$K_e|_{MAX} \simeq Q \quad (K_\nu \simeq 0)$$

Per molti anni si è pensato che $m_\nu = 0$, perché calcolando K_e, si trovava proprio Q (all'interno della precisione strumentale), quindi: Q senza il contributo di m_ν

$$K_e|_{MAX} \simeq Q = (M_{x'} - M_x - m_e)\, c^2 \Rightarrow m_\nu \simeq 0$$

Dal punto di vista concettuale è bene capire che la massa del neutrino non è zero, ma nelle applicazioni si considera come una particella a massa nulla (la massa è così piccola da essere praticamente trascurabile).

Il neutrino è un effetto relativistico:

$$K_\nu = E_\nu \simeq h\nu \qquad p_\nu = \frac{E_\nu}{h} \quad ?$$

I neutrini sono difficili da rilevare perché hanno una sezione d'urto molto bassa. I neutrini interagiscono pochissimo con la materia, gli esperimenti durano anni.

È possibile distinguere ν_e e $\bar{\nu}_e$?

ESPERIMENTI CHE HA FATTO STORIA (REINES - COWEN 1950)

1) REINES - COWEN 1950

$$\bar{\nu}_e + p \to n + e^+$$

Avevano bisogno di neutroni e andarono vicino ad un reattore a fissione.

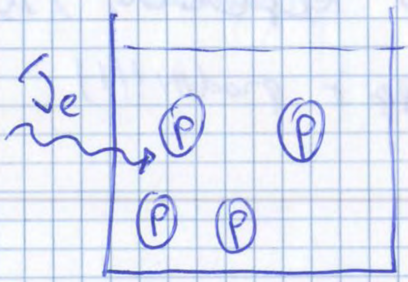
Con i neutroni ottennero una sorgente di neutrini dal decadimento del neutrone:

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$$

I neutrini venivano fatti interagire con un'enorme tanica di idrogeno (quindi protoni).

Il flusso di neutrini era di $\phi_{\bar{\nu}} = 10^{13}\ cm^{-2}\ s^{-1}$

tanica = scintillatore liquido



Con una probabilità molto bassa (ma abbiamo tantissimi $\bar{\nu}_e$) il neutrino interagisce con i protoni.

Quando interagiscono viene emesso un positrone. Se viene emesso un positrone, esso interagisce con gli elettroni dell'idrogeno e quasi istantaneamente vengono prodotti 2 raggi γ

$$e^+ + e^- \to 2\gamma$$

raggi γ emessi con stessa energia e quantità di moto uguale ma opposta.

$$K_\gamma \simeq 0,5\ MeV$$

Vi è quindi un segno tangibile del fatto che il neutrino ha interagito.

ANNICHILAZIONE

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$$

Conservazione dell'energia $2m_e c^2 = h\nu_1 + h\nu_2$

Conservazione della quantità di moto $\vec{0} = \vec{p_1} + \vec{p_2} \Rightarrow \vec{p_1} = -\vec{p_2}$

NB evidenza della natura corpuscolare della luce

I due fotoni vengono emessi con $\vec{p}$ uguale e opposto

$$|\vec{p_1}| = \frac{h\nu_1}{c} = |\vec{p_2}| = \frac{h\nu_2}{c} \Rightarrow \nu_1 = \nu_2 = \nu$$

$$2m_e c^2 = 2h\nu \Rightarrow h\nu = m_e c^2 = 0{,}5\,MeV$$

massa a riposo di $e^{\pm}$

L'energia del singolo raggio γ ha valore uguale alla massa a riposo dell'elettrone (= a quella del positrone)

$$\nu = \frac{m_e c^2}{h} = \frac{0{,}5\,MeV}{h}$$ la frequenza è fissata

— o — o —

Calcoliamo il Q di un decadimento β

β^-) $Q_{\beta^-} = [M_N(^A_Z X') - M_N(^A_{Z+1} X) - m_e]c^2$

masse nucleari

ma nelle tabelle abbiamo la massa atomica

$$Q_{\beta^-} = [M_A(^A_Z X') - Z\cancel{m_e}]c^2 - [M_A(^A_{Z+1} X) - (\cancel{Z+1})m_e]c^2 - \cancel{m_e c^2}$$

$$Q_{\beta^-} = [M_A(^A_Z X') - M_A(^A_{Z+1} X)]c^2$$

trascuriamo l'energia di legame degli elettroni (piccola rispetto ai MeV delle masse)

Quando A è pari, se parto da pari-pari, ottengo un nucleo dispari-dispari dopo il decadimento (e viceversa). Per A pari, il termine di pairing è diverso da zero (ho due parabole diverse per nuclei pari-pari o dispari-dispari). Anche qui possiamo capire quali sono i nuclei stabili.

I decadimenti avvengono spontaneamente perché portano un nucleo, che non è stabile, verso il minimo della parabola (nucleo stabile e fissato A). DECADIMENTO β^+ → verso sinistra
DECADIMENTO β^- → verso destra

Il Cadmio per decadere dovrebbe fare un doppio decadimento β^+, che è fortemente (molto) improbabile. Nuclei del genere hanno un tempo di vita molto lungo anche se sono instabili e sono considerati stabili proprio perché il decadimento è molto improbabile.

I nuclei

$$\underbrace{{}^{40}_{19}K \quad e \quad {}^{64}_{29}Cu}_{\text{possono decadere } \beta^+ \text{ o } \beta^-}$$

fonte di radioattività naturale

Per quanto tempo devo tenere in frigo il cinghiale affinché il cinghiale risulti non più radioattivo?

$A_0 = 5600$ Bq

$$A(t_F) = \frac{A_0}{10} = A_0\, e^{-\lambda_{137} t_F}$$ (assumiamo che le cause sia Chernobyl)

$t_F \to$ tempo in frigo

$$e^{\lambda_{137} t_F} = 10$$

$$t_F = \frac{T_{1/2}^{137}}{0,693} \ln 10 \simeq 100\,Y$$

ESERCIZIO

Metodo di datazione con il ^{14}C (altra applicazione del decadimento β)

$^{14}C \to T_{1/2} = 5730$ anni

↓

datazione di sostanze organiche (dal punto di vista archeologico)

$^{12}_{6}C$ stabile — nucleo simmetrico stabile!

$^{14}_{6}C$ instabile, decade β^- (diminuisce il n° di neutroni)

$$^{14}_{6}C \to {}^{14}_{7}N + e^- + \bar{\nu}_e$$

nell'atmosfera terrestre nelle molecole di anidride carbonica

$$\frac{N(^{14}C)}{N(^{12}C)} = 1{,}3 \cdot 10^{-12}$$ considerato costante in buona approssimazione, per un caso fortuito!

Infatti in un certo Δt si ha un numero quasi uguale di ^{14}C che decadono e di ^{14}C prodotti dai raggi cosmici che arrivano sull'atmosfera

Nei decadimenti α non vi sono stati finali che non hanno nulla a che fare con lo stato iniziale, infatti li abbiamo modellati come dissociazione del nucleo in un nucleo figlio e una particella α.

Nei decadimenti β invece ci sono stati finali che non hanno nulla a che fare con lo stato iniziale, vengono fuori infatti prodotti positroni, ~~neutroni~~ elettroni e neutrini che non esistevano nello stato iniziale → è un indizio che l'interazione è di natura diversa rispetto all'interazione nucleare chiamata interazione forte → è presente interazione debole.

Una proprietà generale ci dice che se in un decadimento ~~debole~~ vengono coinvolte particelle dette Leptoni, quindi è un decadimento debole, la parità non è conservata.

↓

decadimenti β

$$\begin{pmatrix} e^- \\ \mu^- \\ \tau^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad \text{LEPTONI}$$

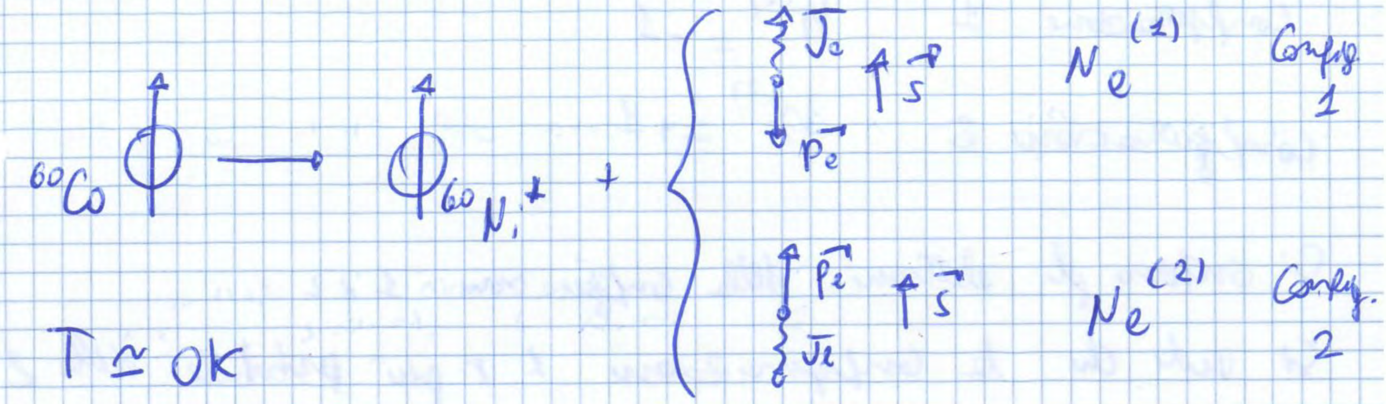
DECADIMENTI α → interazione nucleare forte

DECADIMENTI β → interazione nucleare debole

Yang e Lee nel 1956 si propongono di verificare la VIOLAZIONE DELLA PARITÀ.

Parità → operatore P di parità $\qquad P\,\Psi(\bar{r}) = \Psi(-\bar{r})$

Si invertono le coordinate



$T \simeq 0K$

$N_e^{(i)}$ = n° di elettroni nella configurazione i.

DIREZIONE DI RIFERIMENTO: quella dello spin $\uparrow \vec{S}$

L'operatore di parità sulla quantità di moto da $\vec{p}$ in da $-\vec{p}$: $P(\vec{p}) = -\vec{p}$

Processo di inversione di parità = processo di inversione spaziale

L'operatore di ~~...~~ parità applicato allo spin, non lo modifica

$$P(\vec{S}) = \vec{S}$$

$\vec{S}$ vettore di tipo assiale (non si modifica se si modificano le coordinate)

$\vec{p}$ vettore di tipo polare (cambia se cambiano le coordinate)

ELICITÀ

$$h = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{S} \cdot \vec{p}|}$$

è uno pseudo-vettore

è una delle proprietà fondamentali delle particelle elementari

h da cambio segno per inversione delle coordinate spaziali, quindi quando applichiamo l'operatore di parità.

DECADIMENTI GAMMA

Avviene quando un nucleo eccitato ritorna nello stato non eccitato emettendo raggi γ.
L'energia dello stato iniziale meno l'energia dello stato finale dà approssimativamente l'energia del raggio γ.

$$^{A}_{Z}X' \longrightarrow {}^{A}_{Z}X + \gamma$$

CONSERVAZIONE ENERGIA $\quad M_{X'}c^2 = M_X c^2 + K_X + K_\gamma$, con $K_\gamma = E_\gamma$ $(m_\gamma = 0)$

CONSERVAZIONE QUANTITÀ DI MOTO $\quad \vec{O} = \vec{P}_X + \vec{P}_\gamma$

Il rinculo del nucleo X è trascurabile $\Rightarrow v_X << v_\gamma$

$$K_X = \frac{P_X^2}{2M_X} = \frac{P_\gamma^2 c^2}{2M_X c^2} = \frac{E_\gamma^2}{2M_X c^2}$$

questa quantità è molto piccola

ESEMPIO

$E_\gamma \approx 2\ MeV$, $A = 50$; $K_X \approx 43\ eV$

K_X è 5 ordini di grandezza minore di E_γ!

$$E_\gamma \simeq (M_{X'} - M_X)c^2 = Q$$

Le lunghezze d'onda ~~frequenze~~ della radiazione emessa è dell'ordine di quelle dei raggi γ! (Energie dell'ordine dei MeV)
Sono onde fortemente ionizzanti! Ionizzano la materia quando entrano a contatto con essa.

$(E = h \cdot \nu > 12,4\ eV) \longrightarrow$ onde ionizzanti

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 159 di 266

Si definisce quantità di energia equivalente

$$1\ Sv = 1\ Gy \cdot FQ = 100\ rem \qquad (Sv \to \text{Sievert})$$

Dose equivalente raccomandata (escluse le sorgenti naturali): 2 mSv

RADON

Il Radon è la principale fonte di radiazioni naturali.

Il Radon è un gas nobile.

Non è pericoloso perché le particelle α prodotte percorrono solo pochi centimetri e basta un foglio di carta o schermarle, è pericoloso quando viene inalato, quando è dentro l'organismo e decade nell'organismo.

Quando c'è un terremoto, vi è un picco di emissioni di raggi α, dato che il Radon è contenuto nelle rocce.

ESERCIZIO

Tecnico di laboratorio esposto a radiazioni nucleari:

- $M = 70\ Kg$
- esposto ad una sorgente di $^{60}_{27}Co$ per $\Delta t = 4\ h/d$ (ore al giorno)

$$^{60}_{27}Co \xrightarrow{\gamma} \begin{cases} 1,33\ MeV \\ 1,17\ MeV \end{cases}$$

decade con due raggi γ: doppia emissione

In totale emette 2,50 MeV.

$$A_{Co} = 40\ mCi$$

$$1\ Ci = 3,7 \cdot 10^{10}\ Bq$$

Calcolo fatto nella RADIOPROTEZIONE in un laboratorio

INTERAZIONE DELLA RADIAZIONE CON LA MATERIA

Il rapporto di area è $\frac{S_{NUCLEO}}{S_{ATOMO}} \simeq \frac{10^{-28}\ m^2}{10^{-20}\ m^2} \simeq 10^{-8}$

Quando le particelle incidenti entrano in contatto con la materia, vi è una perdita graduale dell'energia che produce ionizzazione, cioè rottura del legame atomico.

Se $m_0 c^2 \big|_{p,\alpha,c} \gg K$ è come una "palla di cannone" che

→ particelle pesanti cariche: p, α, ioni

scalza gli elettroni, ionizza gli atomi. La perdita di energia è graduale. Ci vogliono molte ionizzazioni per far perdere tutta l'energia.

particelle leggere: e

Se $m_e c^2 < K$ la situazione è radicalmente diversa! La particella leggera incidente cede tantissima energia cinetica in un urto frontale con un altro elettrone. La particella incidente può addirittura fermarsi e cedere tutta l'energia cinetica. La particella incidente ha una perdita brusca di energia per frenamento

→ BREMSSTRAHLUNG (perdita di energia per radiazione)

γ $\qquad$ γ se è frenato bruscamente emette onde e.m.

Questo fenomeno esiste per urti di particelle pesanti ma è trascurabile!
Vogliamo calcolare la perdita di energia massima considerando in prima approssimazione gli elettroni liberi.

La quale differenza di energia data persa dalla particella incidente viene acquisita dall'elettrone colpito.

$$\Delta K\big|_{MAX} = \frac{\Delta p^2}{2\, m_e}$$

urto frontale (classicamente)

$$\begin{cases} \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M v'^2 + \frac{1}{2} m_e v_e^2 \\ M v = M v' + m_e v_e \end{cases}$$

$$\int F_y \, dx = \frac{Z e^2}{2\pi b \varepsilon_0} = \frac{2 Z e^2}{4\pi \varepsilon_0 b}$$

$$\int F_y \, dx = \int F_y v \, dt$$

v approssimativamente costante
$\gg v$ delle particelle pesante nel mezzo

$$p_e = \int F_y \, dt \simeq \frac{2 Z e^2}{4\pi \varepsilon_0 b v}$$

stima della quantità di moto acquistata dall'elettrone per l'interazione con le particelle pesante

$$\frac{p_e^2}{2m_e} = \frac{2 Z^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 b^2 v^2 m_e}$$

Abbiamo studiato l'interazione con un singolo elettrone nella materia.

Ogni materiale è caratterizzato da una certa densità di elettroni

(n° elettroni per unità di volume $= nZ = \frac{\rho N_A}{A} Z = Z \cdot n°$ atomi)

quantità di elettroni nel volumetto infinitesimo $db\,dx$:

$$n Z \, 2\pi b \, db \, dx$$

particella carica pesante; degli atomi della materia

$$-\frac{dK}{dx} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{2 z^2 e^4 n Z}{(4\pi\varepsilon_0)^2 b^2 v^2 m_e} 2\pi b \, db$$

$b_{min} \to$ valore limite di E che si può trasferire (non andiamo a $E \to \infty$)

$b_{max} \to$ vi è un b per il quale l'energia non è sufficiente per la ionizzazione

$$-\frac{dK}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4 n Z}{(4\pi\varepsilon_0)^2 v^2 m_e} \cdot \ln\left(\frac{b_{max}}{b_{min}}\right)$$

$$-\frac{dK}{dx} \propto z^2$$, ma inversamente $\propto$ al all'energia cinetica

CURVA DI BRAGG

Rappresenta il n di ionizzazioni in funzione della distanza percorsa nel mezzo. La particella carica entra nel mezzo e perde energia gradualmente, ionizzando gli atomi. Entra in profondità. Ionizzando perde ~~la sua~~ energia e la sua velocità diminuisce. Ad un certo punto, ~~fino~~ ad un certo valore di energia (ad una certa velocità), ~~da~~ la probabilità di ionizzazione va bruscamente a zero: la particella è arrivata al minimo valore di T alla quale avvengono le ionizzazioni. Nell'intorno di T_{min} vi è un massimo di ionizzazioni, il numero cresce rapidamente e dopo il picco le ionizzazioni vanno rapidamente a zero → PICCO DI BRAGG

Possiamo calcolare il valore medio della distanza percorsa nel mezzo dalla particella:

$$\bar{R} = \int_0^R dx = \int_{K_0}^{0} \frac{dx}{dK}\, dK = \int_0^{K_0} \left(-\frac{dK}{dx}\right)^{-1} dK \simeq C \int_0^{K_0} K\, dK \simeq C' K_0^2$$

$\left(-\frac{dK}{dx}\right) \propto \frac{1}{v^2}$ — trascuriamo il termine logaritmico

Dal punto di vista empirico:

$$-\frac{dK}{dx} \approx C_2 K^{-\alpha}$$

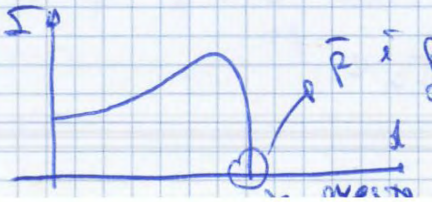
$\alpha \neq 1$ perché c'è il termine logaritmico

$$\alpha \simeq 0{,}8$$

Il termine logaritmico diminuisce α!

$$\bar{R} \sim K_0^{1+\alpha}$$

NB



$\bar{R}$ è poco dopo questo punto! $\bar{R}$ → energia cinetica = 0 particella ferma

dopo questo punto la particella perde energia finché la trasferisce e gli è ma non riesce a ionizzarli. Dato che $\Rightarrow$ loro è molto piccola, si ferma poco dopo questo punto.

questa distanza $\simeq \bar{R}$

μ dipende dal mezzo e dagli effetti fisici che avvengono nel mezzo

$$\mu = \mu_C + \mu_\tau + \mu_p$$

coefficiente di attenuazione lineare

μ_C → effetto di Compton
μ_τ → effetto fotoelettrico
μ_p → produzione di coppie

3 fenomeni che fanno perdere energia!

effetto Compton e effetto fotoelettrico agiscono in maniera molto simile ma l'effetto Compton avviene ad alte energie, con elettroni liberi.

A basse energie prevale l'effetto fotoelettrico, poi prevale l'effetto Compton e per alte energie ($E \geq 1$ MeV) compare l'effetto di produzione di coppie: $\gamma \to e^+ + e^-$

$$I = I_0 e^{-\mu x} = I_0 e^{-\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\rho x}$$

$\frac{\mu}{\rho}$ = coefficiente di attenuazione di massa

ρ = densità volumica di massa

PRODUZIONE DI COPPIE ELETTRONE - POSITRONE

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

Il fotone da luogo ad ~~una~~ una eccitazione di stati ad energia negativa → occupati dagli elettroni → passano ad uno stato ad energia positiva → occupati dai positroni

$$-(-e) = e^+$$

$$-(-m_0 c^2) = m_0 c^2$$

NB ~~...~~ la materia è stabile, non decade, perché gli stati a E negativa sono tutti occupati da elettroni: decadimento avviene ~~...~~ quando si passa ad uno stato a E negativa

Conservazione energia $\quad h\nu = K_{e^-} + K_{e^+} + 2 m_e c^2$

Conservazione quantità di moto $\quad \bar{P}_\gamma = \bar{P}_{e^-} + \bar{P}_{e^+}$

ESERCIZI

~~$M = 85 Kg$~~

1) Un operaio con $M = 85 Kg$ ha ingerito $m_{Pu} = 2,5 mg$ (^{239}Pu)

$T_{1/2} = 24'100 Y$

Il Pu decade α, con $K_\alpha = 5,2 MeV$, $FQ = 13$

Il Pu risiede nel corpo per $\Delta t = 12 h$. Stimiamo che il 95% delle particelle α rimange nel corpo. Vogliamo stimare la dose biologica che l'operaio riceve.

Nell'intervallo $\Delta t = 12 h \ll T_{1/2}$ si può considerare costante la massa del Plutonio.

$$N(\Delta t) = N_0 \, e^{-\lambda \Delta t}$$

n° atomi all'istante Δt

n° decadimenti $N_0 - N(\Delta t)$

$$N_0 = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \, mol^{-1} \quad 2,5 \cdot 10^{-3} \, g}{244 \, g/mol} = 6,2 \cdot 10^{18} \text{ ATOMI}$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

$$N_0 - N(\Delta t) = 2,5 \cdot 10^{11}$$

$$E_k = 0,95 \cdot 2,5 \cdot 10^{11} \cdot 5,2 \, MeV \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} \frac{J}{MeV} \simeq 0,2 \, J$$

$$DOSE = \frac{E_k}{M} = 2,3 \, mGy$$

DOSE EQUIVALENTE $= 2,3 \, mGy \cdot 13 \simeq 30 \, mSv$

RIVELATORI DI PARTICELLE

Il meccanismo di base è sempre lo stesso per i vari rivelatori di particelle: si manda un fascio di particelle accelerate da un acceleratore su un bersaglio incognito per sondarlo e ~~studiarlo~~ studiarne le proprietà, grazie allo ~~studio~~ studio del fascio dopo l'urto, rivelato da un rivelatore. Le particelle devono avere una energia tale che $\underbrace{\lambda = \frac{h}{p}}_{\text{relazione di De Broglie}}$ per poter sondare il bersaglio.

tempo morto in genere $\sim \mu s$

RIVELATORI A GAS

CAMERA DI IONIZZAZIONE

Arriva una particella ionizzante all'interno di un gas: provoca ionizzazioni nel gas che vengono rivelate e studiate. La ionizzazione produce elettroni e ioni che migrano rispettivamente verso anodo positivo e catodo negativo (il gas è immerso in un campo elettrico)

La risposta di questo rivelatore è molto debole.

La differenza di potenziale applicata al gas è piccola.

La corrente prodotta è direttamente proporzionale all'energia delle particelle incidenti

CONTATORE PROPORZIONALE

È un rivelatore a gas diverso dalla camera di ionizzazione perché il potenziale è maggiore: gli ioni vengono maggiormente accelerati e sono a loro volta in grado di dare ionizzazioni, quindi viene amplificato il segnale. Il vantaggio sta nel fatto che il segnale è più leggibile, la corrente è più intensa, anche se la corrente misurata è ancora ~~proporzionale~~ direttamente proporzionale all'energia ~~di~~ cinetica delle particelle incidenti (se il campo non è troppo grande)

CONTATORE GEIGER

Il potenziale è ancora più elevato, abbiamo un segnale molto nitido, ma si perde l'informazione legata all'energia della part. incidente.

APPLICAZIONE MEDICA

RADIOGRAFIA → utilizzo di raggi X (radiazione esterna, vengono mandati dall'esterno sul corpo)
Si ottengono immagini studiando l'attenuazione delle radiazioni nella materia.
La variazione di intensità (flusso: energia per unità di tempo per unità di superficie) è proporzionale alla profondità di penetrazione.

$$\frac{dI}{I} = -\mu\, dl \Rightarrow \ln\left(\frac{I_1}{I_2}\right) = \int_1^2 \mu\, dl$$

Nel corpo i raggi X incontrano materie non omogenee, con μ diverse! (μ = coefficiente di attenuazione)
μ dipende fortemente dalla densità e da Z (numero atomico).
Vi è un attenuazione maggiore per ossa e organi con Z elevato, ad esempio $Ca\ (Z = 20)$; noi siamo fatti in prevalenza di acqua (Z prob.
Se si vuole fare un immagine di organi che sono racchiusi da ossa, la radiografia non funziona. Bisogna immettere radiazioni dall'interno → IMMAGINI CON RADIAZIONE INTERNA
Si possono riconoscere le cellule tumorali perché consumano più zucchero.
PMT → fotomoltiplicatore

Iodio:

$^{131}_{56}I$ ~~^{123}I~~ $^{123}_{56}I$

$T_{1/2} = 8\, d$

decade β^-; $^{131}X_e \rightsquigarrow \gamma$ (360 keV)
↓
energia media 200 keV
Iodio → scarto dei prodotti di fissione
Non va bene dal punto di vista diagnostico! Si rilevano raggi γ
Viene utilizzato dal punto di vista terapeutico
bombardando le cellule malate: IODOTERAPIA → 22 μSv per kBq

prodotto in laboratorio con un ciclotrone
non decade β! Decade γ

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 175 di 266

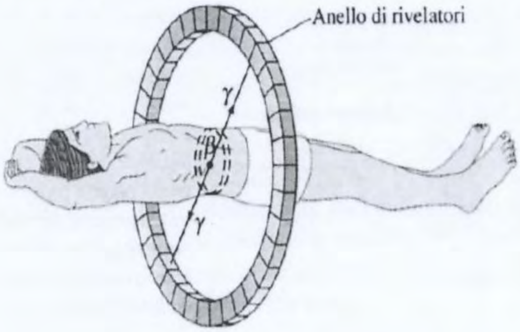
Tomografia a emissione di positroni (PET)

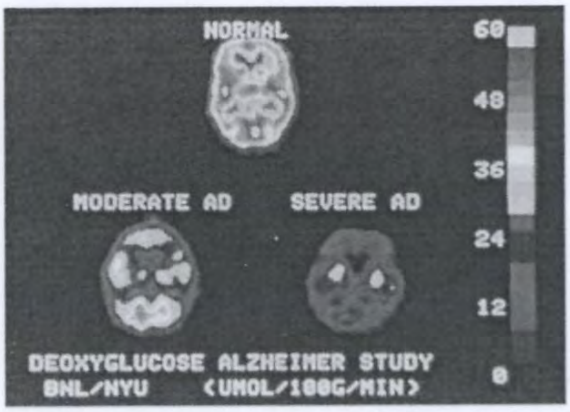
Si utilizzano degli emettitori di positroni come: $\boxed{{}^{11}_{6}\mathrm{C},\ {}^{13}_{7}\mathrm{N},\ {}^{15}_{8}\mathrm{O},\ {}^{18}_{9}\mathrm{F}}$

Questi isotopi vengono incorporati nelle molecole che, inalate o iniettate, si accumulano nell'organo o nella regione del corpo da studiare. Quanto un nuclide di questo tipo decade β, il positrone emesso percorre al massimo pochi millimetri prima di urtare un elettrone. Nella collisione positrone ed elettrone annichiliscono emettendo due raggi gamma, ciascuno con energia di 510 keV e con versi opposti.

$$\boxed{e^{+} + e^{-} \rightarrow 2\gamma}$$

Poiché i fotoni sono diretti sulla stessa area in versi opposti, vengono rivelati simultaneamente dagli anelli dei rivelatori che si trovano attorno al paziente, permettendo di stabilire (mediante tecniche di elaborazione tomografica) la reale posizione del radioisotopo che li ha emessi.





Scansione PET del cervello di una persona anziana sana e quella di un paziente con malattia di Alzheimer. Le regioni chiare contengono concentrazioni più alte di glucosio radioattivo, ad indicare un tasso più alto del metabolismo e quindi aumento dell'attività cerebrale.

~~degradogna~~ Coulombiano (i protoni ~~sono~~ più lontani). Anche il termine di volume non cambia.

Queste variazioni possono dare un contributo positivo o negativo.

Se la trasformazione è vantaggiosa, il nucleo non si arresta in questa trasformazione e si ~~stacca~~ scinde in due nuclei:

$$\left.\begin{aligned} E_S &= a_S A^{2/3} \\ E_C &= a_C Z^2 A^{-1/3} \end{aligned}\right\} \text{sfera}$$

superficie di un ellissoide prolato $S = 2\pi \left[b^2 + ab \frac{k}{\sin k} \right]$

$$k = \arccos\left(\frac{b}{a}\right)$$

Si sviluppa questa S in serie (ci fermiamo a ε^2)

$$\left.\begin{aligned} E_S &= a_S A^{2/3}\left(1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2 + \dots\right) \\ E_C &= a_C Z^2 A^{-1/3}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{5} + \dots\right) \end{aligned}\right\} \text{ellissoide}$$

$$\Delta E = (E_S + E_C)_{\text{elliss}} - (E_S + E_C)_{\text{sfera}} = \frac{\varepsilon^2}{5}\left(2a_S A^{2/3} - a_C Z^2 A^{-1/3}\right)$$

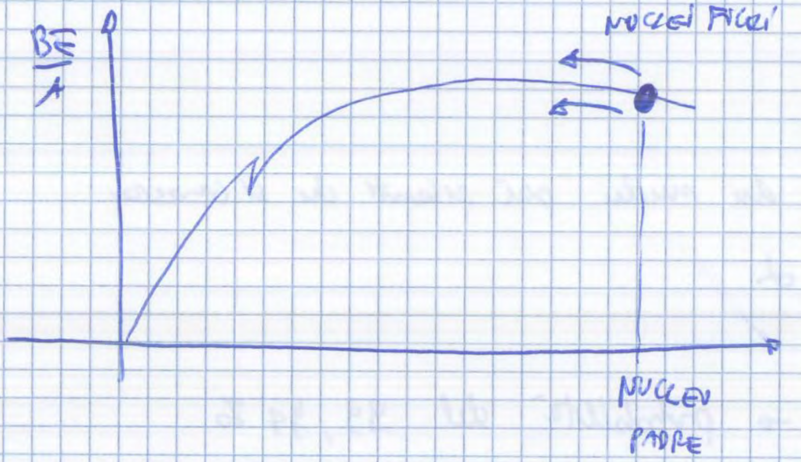
Se $\Delta E < 0$ la deformazione è conveniente, non si ferma più $\to$ il nucleo si scinde $\to$ FISSIONE SPONTANEA

$$2a_S A^{2/3} < a_C Z^2 A^{-1/3}$$

$$\frac{Z^2}{A} > \frac{2a_S}{a_C} \simeq 49 \qquad \left(\frac{2a_S}{a_C} \text{ numero ben definito e costante}\right)$$

Per questi valori di Z e A la fissione è spontanea.

V'è un vantaggio nella separazione dei due nuclei, ma il processo non avviene spontaneamente.



* NB Si usano neutroni lenti! n "termico" con energia cinetica $k_n \simeq 9025\ eV$ (pari a $k_B T$ a $T = 25°$)

Quando il nucleo viene bombardato da un neutrone*, il nucleo va in uno stato eccitato, che ha una geometria deformata.

$$n + {}^{235}U \rightarrow {}^{236}U^* \qquad E^* = 6,4\ MeV$$

i neutroni vengono assorbiti!

Lo stato eccitato ~~perch~~ permette di superare la barriera di potenziale: il processo è meno stabile e il nucleo si scinde.

La fissione dipende anche dalla struttura del nucleo bombardato.

$$n + {}^{238}U \rightarrow {}^{239}U^* \qquad E^* = 4,8\ MeV$$

E^* è inferiore alla precedente

E^* non è tale da superare la barriera di potenziale: si diseccita e torna in uno stato stabile (prossimo a quello sferico).

1) ${}^{233}_{92}U$, ${}^{235}_{92}U$, ${}^{239}_{94}Pu$, ${}^{241}_{94}Pu$ → per questi nuclei la probabilità di fissione con neutroni lenti è alta

2) ${}^{232}_{90}Th$, ${}^{238}_{92}U$, ${}^{240}_{94}Pu$, ${}^{242}_{94}Pu$ → per questi nuclei la probabilità di fissione con neutroni lenti è ZERO

I frammenti prodotti dalla fissione non sono prevedibili.

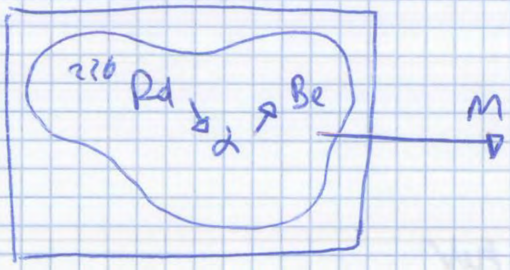
Nel grafico che rappresenta i frammenti prodotti, appaiono si notano due picchi. Questo grafico è solo sperimentale, fenomenologico, non ha ancora spiegazione microscopica.

I neutroni termici possono essere prodotti tramite reazioni; la più famosa è quella relativa alla scoperta del neutrone:

$$\alpha + Be = {}^{4}_{2}He + {}^{9}Be \to {}^{12}C + n$$

$Q = 5,7\ MeV$

Le particelle α in genere vengono prodotte dal decadimento del ${}^{226}Rd$.



Se non sono schermati con piombo, i neutroni escono (interagiscono poco con la materia)

Il valore medio di K_n è $\langle K_n \rangle \simeq MeV$

Se fosse una singola reazione prodotta in laboratorio, si avrebbe sempre stessa energia cinetica, ma gli α non hanno sempre stessa velocità dato che gli nuclei sono tutti vicini, non siamo nello spazio vuoto (gli α vengono rallentati)

Bisogna rallentare i neutroni: serve un oggetto di massa comparabile.

Il protone non va bene perchè interagisce con il neutrone, entra in gioco la forza nucleare → si forma il deutone.

In genere vengono rallentati con acqua pesante (isotopi pesanti dell'idrogeno) o carbonio. γ Con nuclei leggeri rallentare abbastanza i neutroni e dalle sezioni d'urto dei nuclei.

REATTORI A FISSIONE

problematiche → bisogna arricchire artificialmente ^{235}U per portarlo da 0,7 % (percentuale in natura) al 3%

PROCESSO DI ARRICCHIMENTO

(centrifuga per separare i nuclei più leggeri, ma ci sono anche altri metodi)

problematiche relative ai neutroni:

- ~~fughe~~ fughe di neutroni → escono dal reattore, bisogna confinarli
- energia dei neutroni → bisogna rallentarli → barre di controllo con acqua pesante e carbonio
- metodo per fermare la reazione se sta divergendo → si usa la cattura dei neutroni, con nuclei con sezione d'urto di assorbimento di neutroni molto grande → CADMIO (sempre in barre di controllo)

Le reazioni di fissione liberano calore.

Il problema maggiore è lo smaltimento delle scorie, che sono radioattive.

I nuclei prodotti hanno un eccesso di neutroni e decadono β o β.

Inoltre il combustibile nucleare ^{235}U è limitato

$$n + {}^{238}U \longrightarrow {}^{239}U \xrightarrow{\beta^-} {}^{239}Np \xrightarrow{\beta^-} {}^{239}Pu$$

^{239}Pu è un nucleo fissionabile. Decade anche α ma $T_{1/2} = 2,4 \cdot 10^4 y$ e quindi non è rilevante, ~~[illegible]~~ il n° di nuclei ^{239}Pu rimane costante in un reattore a fissione il passo successivo è:

$$ {}^{2}_{1}H + p \rightarrow {}^{3}_{2}He + \gamma \qquad Q = 5,49 \text{ MeV} $$

ulteriore fusione:

$$ {}^{3}_{2}He + {}^{3}_{2}He \rightarrow {}^{4}_{2}He_{2} + p + p $$

doppiamente magico

salto di energia di legame

ho bisogno di due coppie delle reazioni precedenti

In totale

$$ \boxed{4p \rightarrow {}^{4}He + 2e^{+} + 2\gamma} $$

Il positrone è nel mezzo: mezzo altamente ionizzato

la materia è in uno stato di plasma (l'agitazione termica è di gran lunga superiore all'energia di legame dell'elettrone nell'idrogeno)

$$ e^{+} + e^{-} \rightarrow 2\gamma $$

Energia prodotta:

$$ 0,42 \times 2 = 0,84 \text{ MeV} $$
$$ 1,02 \times 2 = 2,04 \text{ MeV} $$
$$ 5,49 \times 2 = 10,98 \text{ MeV} $$
$$ 12,86 \times 1 = 12,86 \text{ MeV} $$
$$ \overline{26,72 \text{ MeV}} $$

Tanto più Z è elevato, tanto più è sfavorito energeticamente avvicinare i due nuclei, ~~tanto che~~ vincere la repulsione coulombiana e far intervenire le forze nucleari.

$M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}\ Kg$

$\mathcal{L} = 4 \cdot 10^{26}\ W$

$Q_{4p \to \alpha} = 26{,}2\ MeV$

$$\dot{N}_p = \frac{4 \cdot 4 \cdot 10^{26}\ W}{26{,}2\ MeV \cdot 10^{-13}\ J/MeV} \simeq 0{,}4 \cdot 10^{39}\ \frac{n\ \text{atomi}}{sec}$$

↓

n di atomi che vengono bruciati al secondo nelle fusioni

↓ ^1H
protoni

$M_{\alpha} = 4{,}0026034\ u$ $\quad (1u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ Kg)$

$M_H = 1{,}0078254\ u$

$4M_H - M_{\alpha} = 0{,}048 \cdot 10^{-27}\ Kg$ ↓

è la perdita di massa di una fusione

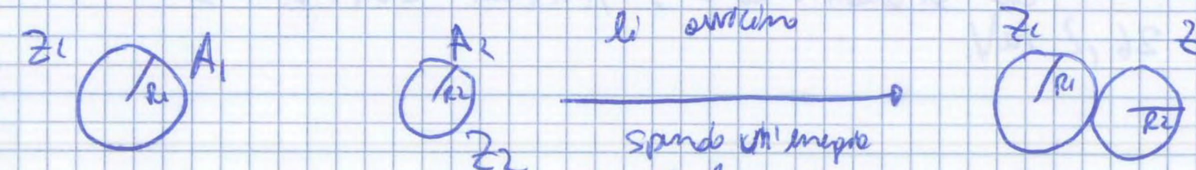
$$0{,}048 \cdot 10^{-27}\ Kg \ \frac{0{,}4 \cdot 10^{39}\ \frac{N^o p}{s}}{4}$$

$\Delta M = 0{,}48 \cdot 10^{10}\ Kg/s$

Come avvengono le reazioni di fusione?

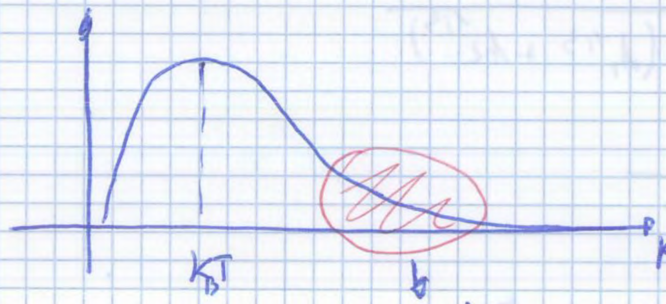
Ragioniamo classicamente.

Possiamo pensare che i nuclei interagiscano secondo la forza nucleare quando sono a contatto



Se ragioniamo da un punto di vista classico, il processo di fusione nucleare non dovrebbe mai avvenire nel sole, perché le temperature non sono sufficienti.

Entrano in gioco effetti quantistici e di termodinamica statistica (distribuzione di Maxwell-Boltzmann) che rendono possibile la fusione.



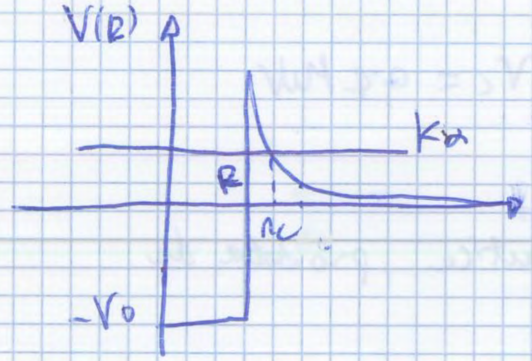
c'è una coda con particelle con energia cinetica ben superiore a K_BT

I due protoni per venire a contatto devono superare la barriera di potenziale coulombiana

probabilità di attraversamento di una barriera di potenziale

$$T = e^{-2G} \longrightarrow G = \frac{1}{\hbar}\int_R^{r_c}\sqrt{2m|E-V|}\,dr$$

$E=K$



$$G \simeq \frac{\pi\alpha\, 2(Z-2)}{v/c}$$

per il decadimento α

In questo caso invece: $G = \dfrac{\pi\alpha Z_1 Z_2}{v/c}$

Ci aspettiamo una sezione d'urto di fusione strettamente legata a T:

$$\sigma \propto e^{-2G}$$

La dipendenza di σ ~~dalla~~ dall'energia viene parametrizzata così:

$$\sigma(E) = \underbrace{\frac{S(E)}{E}}_{\text{parametrizzata così per facilitare il confronto con le misure sperimentali}} \underbrace{e^{-\left(\frac{E_0}{E}\right)^{1/2}}}_{\text{effetto tunnel}}$$

$S(E)$ fattore estrinseco

dipende debolmente dall'energia

$S(E) \simeq S_0 \simeq cost.$

Dato che $\lambda = \frac{h}{p} \rightarrow \lambda \propto \frac{1}{v}$

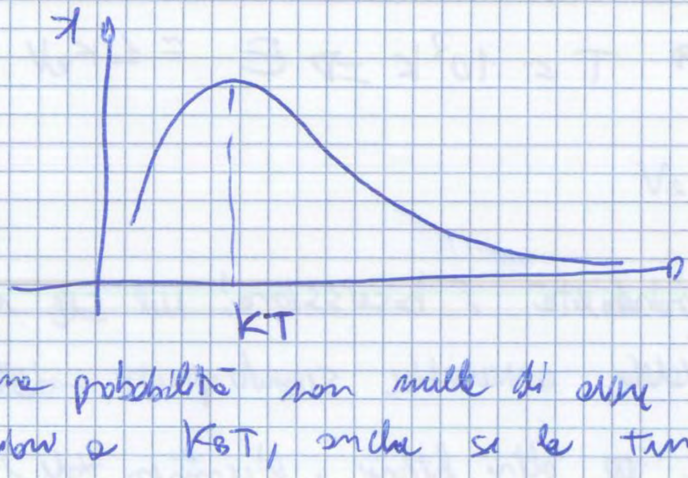
Considerando l'aspetto geometrico della sezione d'urto (probabilità di centrare il bersaglio), quindi dipendente dalle dimensioni del bersaglio, si ha:

$$\sigma \propto \lambda^2 \rightarrow \sigma \propto \lambda^2 \propto \frac{1}{v^2} \propto \frac{1}{E}$$

— ◦ — ◦ — ◦ —

L'energia cinetica media non è l'energia di tutte le particelle

DISTRIBUZIONE DI MAXWELL BOLTZMANN

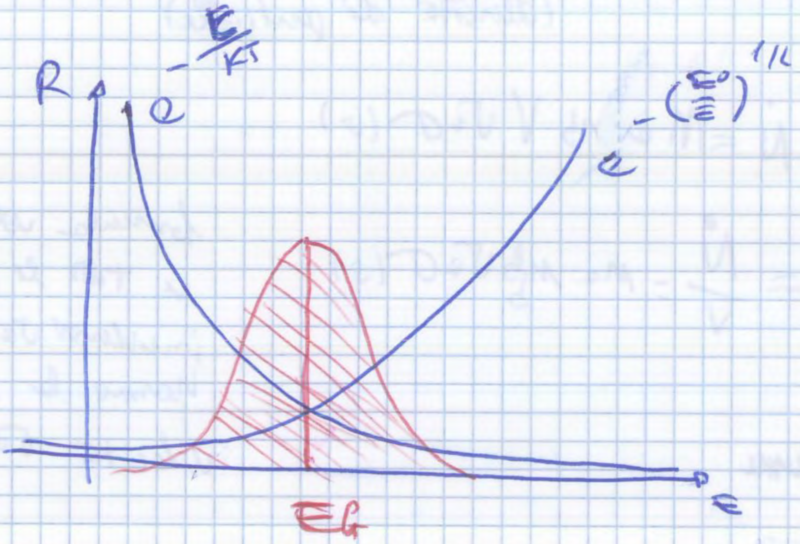


C'è una probabilità non nulla di avere particelle con energia molto superiore a $K_B T$, anche se la temperatura del sistema è T.

Le particelle nella coda hanno energia molto alta, ma più alta di $K_B T$, cioè del valor medio, e sono in grado di superare la barriera di potenziale. Anche se questi protoni sono pochi rispetto a quelli ad energia $K_B T$, ma esistono e danno luogo alla fusione.

$$= \left(\frac{8}{\pi m}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{KT}\right)^{3/2}\int_0^{\infty} S(E)\, e^{-\left(\frac{E_0}{E}\right)^{1/2}-\frac{E}{KT}}\, dE$$

$S(E) \simeq S_0$



facendo il prodotto tra i due esponenziali si ottiene il picco.

$E_G \to$ valore di energia per il quale si ha la massima probabilità di fusione.

Nel picco in rosso ci sono le energie in cui è possibile la fusione.

$$E_G \;\Big|\; \frac{d}{dE}\left[\frac{E}{KT}+\left(\frac{E_0}{E}\right)^{1/2}\right]=0$$

$$\frac{1}{KT}-\frac{E_0^{1/2}}{2E_G^{+3/2}}=0$$

E_G è il valore tale per cui la derivata dell'argomento dell'esponenziale è nulla

$$\frac{E_G^{3/2}}{KT}=\frac{E_0^{1/2}}{2} \Rightarrow E_G=\left[\frac{1}{4}(KT)^2E_0\right]^{1/3}$$

$E_G \to$ massimo del picco di Gamov.

<u>ESEMPIO</u>

$p+p$, $T=2\cdot10^7 K$, $E_0=493 keV$, $KT=1{,}7 keV$

$E_G=7{,}2 keV$

L'energia liberata è difficile da sfruttare perché i 17,59 MeV (Q della reazione) se li prende il neutrone, che è una particella neutra e interagisce poco con la materia! Il neutrone percorre molto spazio senza rilasciare l'energia.

$$Q = 17{,}6\ \text{MeV} \to K_n \simeq 14\ \text{MeV}$$

Inoltre, sempre a causa del neutrone con elevata K_n, c'è un problema di schermatura!

~~Energia e temperatura~~

La temperatura a cui avviene la fusione è di circa 20 KeV (la si calcola valutando il picco di Gamow)

Inoltre vi è una perdita di energia a causa degli elettroni: gli elettroni vengono accelerati e frenati nel plasma e perdono energia irradiando onde elettromagnetiche → effetto Bremsstrahlung

Quindi bisogna arrivare ad una temperatura per la quale l'energia prodotta dalle reazioni nucleari è maggiore delle perdite di energia per Bremsstrahlung (in modo che le reazioni avvengano con guadagno energetico)

$Z^2 T$, D-T → $T > T_{br}$

T_{br} → temperatura per cui le perdite per B e l'energia prodotta dalle reazioni sono uguali!

n° di particelle DT per unità di volume

$M_D M_T \langle \sigma v \rangle Q \cdot \tau$
→ energia per unità di volume

Vedi grafico che compara le perdite dovute al bremsstrahlung con la potenza in uscita dalle reazioni nucleari (T_{br} → intersezione tra le due curve)

$\ast\ M_D M_T \langle \sigma v \rangle Q \cdot \tau$ energia liberata dalla reazione per unità di volume in un certo intervallo di tempo

in corrispondenza di τ abbiamo una energia cinetica data da un modello cinetico:

$\ast\ \frac{3}{2} k_B T (M_D + M_T + 2M_e)$ → energia per unità di volume costo per mantenere il plasma ad una temperatura T