



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1315

ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Pecora

MATERIA: Fondamenti di Meccanica Strutturale, Prof.Cornetti

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Pietro Cornetti 4901

ESAME = SCRITTO + ORALE

"Scienza delle Costruzioni" vol 1+2 Carpenteri

"Lezioni di Meccanica strutturale" denzi

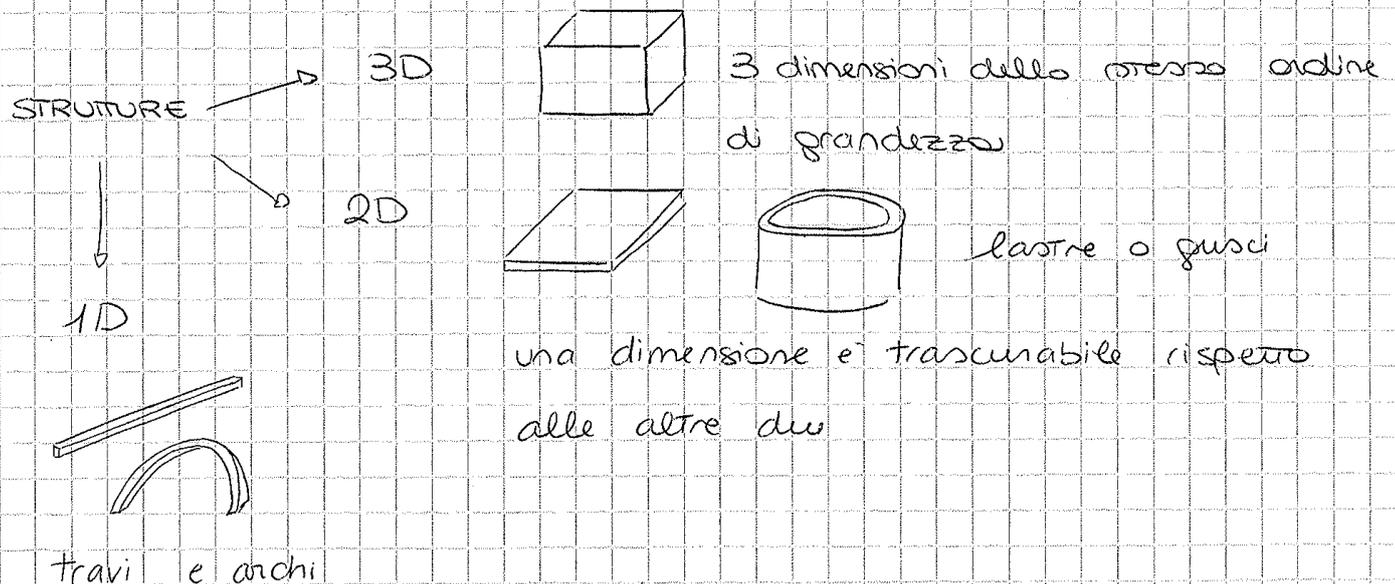
Travatura isostatica → "Calcolo strutture isostatiche"

STRUTTURA - qualsiasi corpo (o insieme di corpi) capace di trasmettere delle forze

- ↳ Problemi strutturali → determinare come le forze si diffondono nella struttura e verificare che la struttura sia in grado di resistere a queste forze
- ↳ determinare gli spostamenti che la struttura subisce per effetto di queste forze e verificare che gli spostamenti non siano in grado di compromettere la struttura

studio della STATICA, non dinamica della struttura

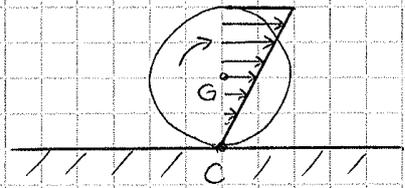
↳ non consideriamo la variabile temporale



$$\frac{d\vec{s}_P}{dt} = \frac{d\vec{s}_O}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} \hat{k} \wedge \vec{OP}$$

$$\{d\vec{s}_P\} = \{d\vec{s}_O\} + \{d\alpha\} \wedge \{P-O\}$$

$$\vec{m}_P = \vec{PP} = \text{vettore spostamento}$$

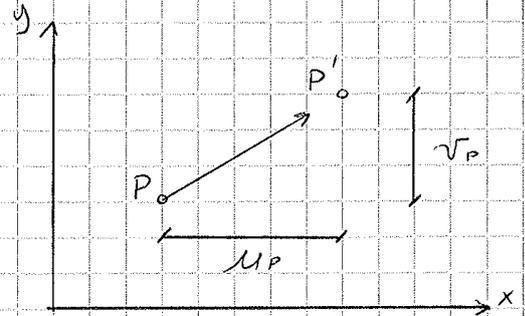


$$d\vec{s}_P \cong u_P \hat{i} + v_P \hat{j} = \vec{m}_P$$

↳ e' uguale (=) se $d\vec{s}_O$ e' un differenziale

$$d\vec{s}_O \cong u_O \hat{i} + v_O \hat{j} = \vec{m}_O$$

$$\vec{m}_O = \vec{m}_P + \phi_z \hat{k} \wedge \vec{OP}$$



hp: piccoli spostamenti (rispetto alle dimensioni geometriche del corpo)

$$(u_P - u_O) \hat{i} + (v_P - v_O) \hat{j} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \phi_z \\ x_P - x_O & y_P - y_O & 0 \end{vmatrix} = \dots$$

$$= (-\phi_z (y_P - y_O)) \hat{i} + (\phi_z (x_P - x_O)) \hat{j}$$

$$\begin{cases} u_P = u_O - \phi_z (y_P - y_O) \\ v_P = v_O + \phi_z (x_P - x_O) \end{cases}$$

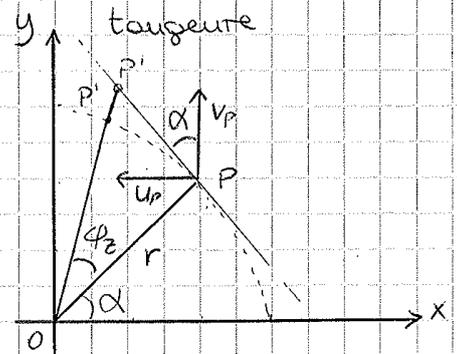
LINEARIZZAZIONE

un corpo nel piano ha 3 gradi di liberta'

$$u_O = v_O = 0 \quad CIR = 0, \quad x_O = y_O = 0$$

$$\begin{cases} u_P = -\phi_z y_P \\ v_P = +\phi_z x_P \end{cases}$$

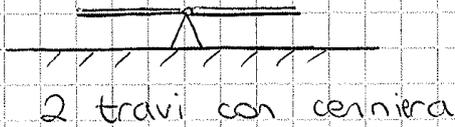
$$\begin{cases} v_P = \overline{PP'} \cos \alpha = \phi_z r \cos \alpha = \phi_z x_P \\ u_P = -\overline{PP'} \sin \alpha = -\phi_z r \sin \alpha = -\phi_z y_P \end{cases}$$



$$PP' \approx PP'$$

x hp gli spostamenti sono infinitesimi

SIMBOLO	NOME	DEF. CINEM	DEF. DINAM	CIR	GRADO
	carrello bielletta	$U_P \neq 0$ $V_P = 0$ $\varphi_P \neq 0$	$H = 0$ $V \neq 0$ $M = 0$	∞ y	1 vincolo semplice
	cerniera	$U_P = 0$ $V_P = 0$ $\varphi_P \neq 0$	$H \neq 0$ $V \neq 0$ $M = 0$	∞ P	2
	doppio pendolo/ pavino	$U \neq 0$ $V = 0$ $\varphi_P = 0$	$H = 0$ $V \neq 0$ $M \neq 0$	all' ∞ in direz y	2
	incastro	$U_P = 0$ $V_P = 0$ $\varphi_P = 0$	$H \neq 0$ $V \neq 0$ $M \neq 0$	∞	3
	doppio doppio pendolo	$U_P \neq 0$ $V_P \neq 0$ $\varphi_P = 0$	$H = 0$ $V = 0$ $M \neq 0$	all' ∞	1
VINCOLI INTERNI		CIRR (relativo)			
	bielletta interna	$U_A = U_B$ $V_A \neq V_B$ $\varphi_A \neq \varphi_B$	$N \neq 0$ $T = 0$ $M = 0$	asse x	1
	pendolo interno	$U_A = U_B$ $V_A \neq V_B$ $\varphi_A = \varphi_B$	$N \neq 0$ $T = 0$ $M \neq 0$	all' ∞ in direz y	2
	doppio pendolo interno	$U_A = U_B$ $V_A \neq V_B$ $\varphi_A = \varphi_B$	$N \neq 0$ $T = 0$ $M \neq 0$	all' ∞ in direz x	2
	cerniera	$U_A = U_B$ $V_A = V_B$ $\varphi_A \neq \varphi_B$	$N \neq 0$ $T \neq 0$ $M = 0$	$A \equiv B$	2
	incastro interno	$U_A = U_B$ $V_A = V_B$ $\varphi_A = \varphi_B$	$N \neq 0$ $T \neq 0$ $M \neq 0$	∞	3

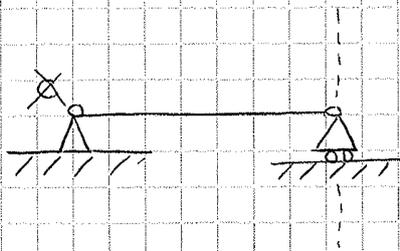


$$\left. \begin{array}{l} g = 6 \\ r = 4 \end{array} \right\} 2 \text{ volte labile}$$

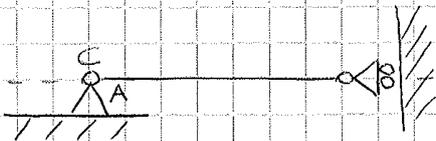


$$\left. \begin{array}{l} g = 3 \\ r = 2 \end{array} \right\} 1 \text{ volta labile}$$

Maldistribuzione vincolare



$$\left. \begin{array}{l} g = 3 \\ r = 2 + 1 = 3 \end{array} \right\} \text{ISO STATICO}$$

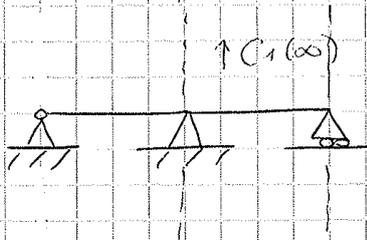


$$\left. \begin{array}{l} g = 3 \\ r = 2 + 1 = 3 \end{array} \right\} \text{LABILE maldistribuzione}$$

la cerniera in A impone che il CIR sia A
 il carrello non è efficace, non è un vincolo effettivo



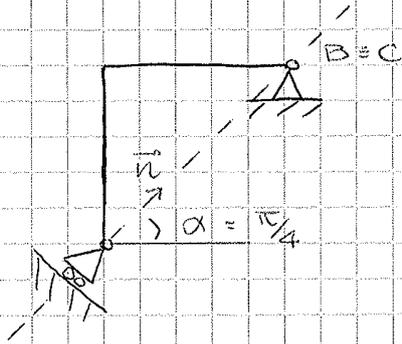
~~CIR~~
 struttura ISO STATICA



maldistribuzione

MALDISPOSIZIONE VINCOLARE

struttura isostatica tranne quando $\alpha = \frac{\pi}{4}$



$$[C] \quad v \times q$$

$$\{M_o\} \quad q \times 1$$

$$\{M_x\} \quad v \times 1$$

se $v < q \Rightarrow$ STRUTTURA (q-v) VOLTE LABILE

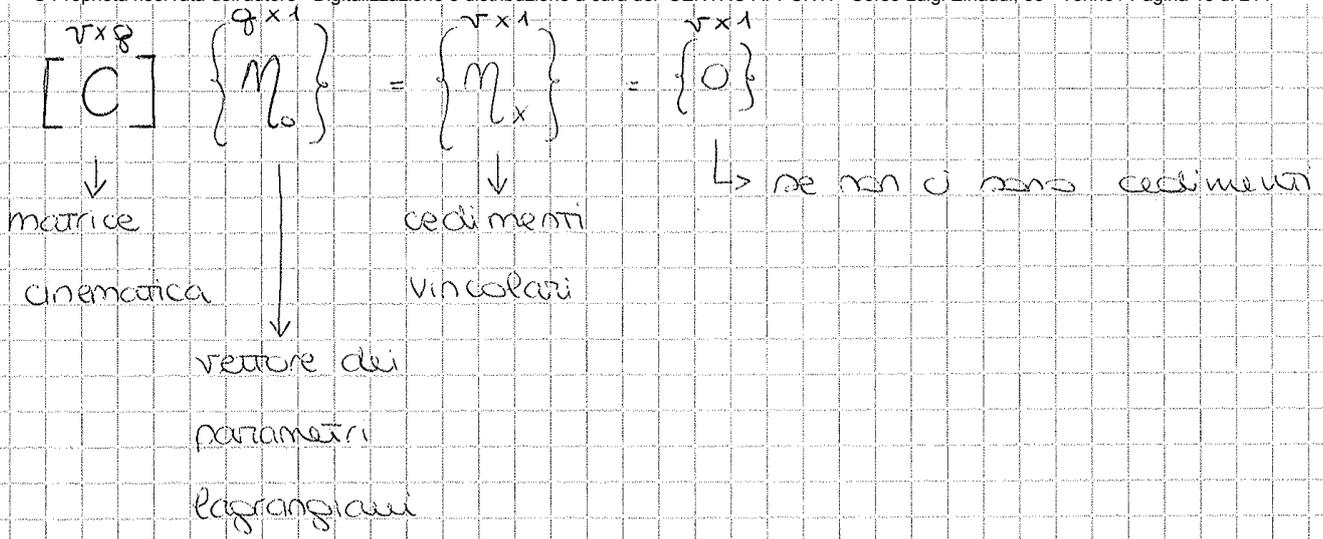
se $v = q \Rightarrow$ STRUTTURA ISOSTATICA o
CINEMATICAMENTE DETERMINATA

se $v > q \Rightarrow$ STRUTTURA IPERSTATICA o
CINEMATICAMENTE IMPOSSIBILE

$\hookrightarrow M_x = \{0\} \Rightarrow$ la soluzione è la soluzione nulla

$\hookrightarrow M_x \neq 0 \Rightarrow$ non c'è soluzione

\Rightarrow le strutture isostatiche possono assorbire cedimenti
vincolari con moti rigidi, le strutture iperstatiche no

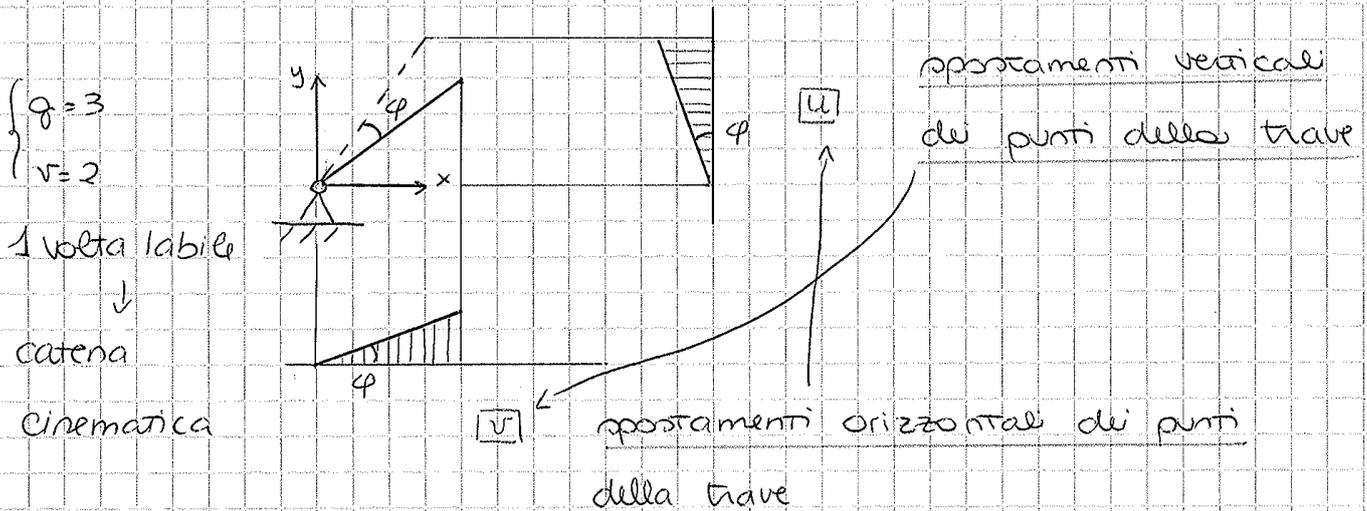


CINEMATISMI

CATENA CINEMATICA - sistema di travi 1 volta labile

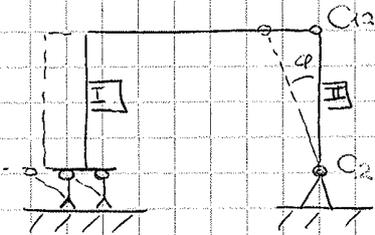
Ⓣ condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di travi costituito da due travi almeno sia una catena cinematica

- ↳ C_i, C_j, C_{ij} sono allineati
 - ↳ C_{ij}, C_{ik}, C_{jk} sono allineati
- ↑
se si hanno almeno 3 travi
- } centri di rotazione cinematica

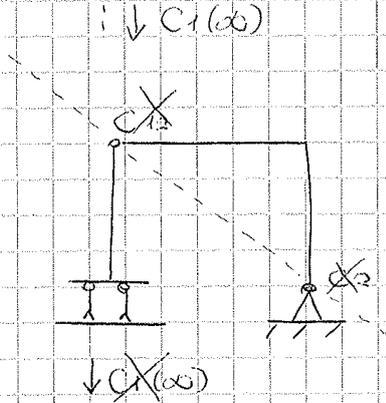


$$\begin{cases} u = -\phi y \\ v = +\phi y \end{cases}$$

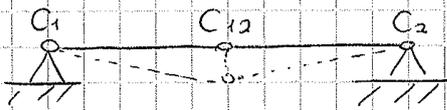
traccio sulla fondamentale orizzontale il diagramma degli spostamenti verticali, su quella verticale il diagramma degli spostamenti orizzontali



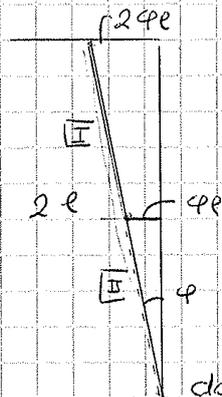
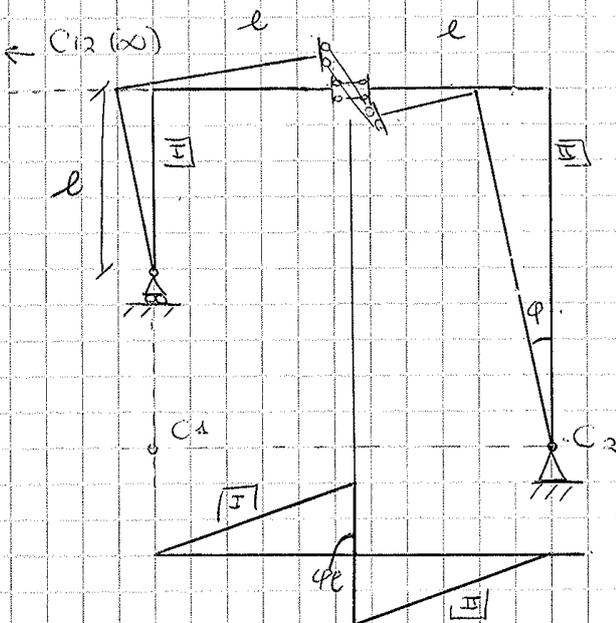
il corpo vincolato con un doppio pendolo può solamente traslare in direzione $\perp \longleftrightarrow$



$$\left. \begin{aligned} q &= 6 \\ v &= 2 + 2 + 2 = 6 \end{aligned} \right\} \text{ISOSTATICA}$$



catena cinematica



$$\left\{ \begin{aligned} q &= 6 \\ v &= 2 + 2 + 1 = 5 \end{aligned} \right.$$

CATENA
CINEMATICA

doppio pendolo interno
relativo a due corpi
collegati internamente

C_{12} è alla retta \perp allo spostamento

PROPRIETÀ- Condizione di equivalenza

Condizione necessaria e sufficiente affinché 2 sistemi di forze siano equivalenti (cioè si possa passare da uno all'altro facendo scorrere le forze lungo la loro retta d'azione e rimpiazzandole con la regola del parallelogramma) è che essi abbiano uguale risultante e uguale momento risultante rispetto a un polo O qualsiasi

- Riduzione a un punto O

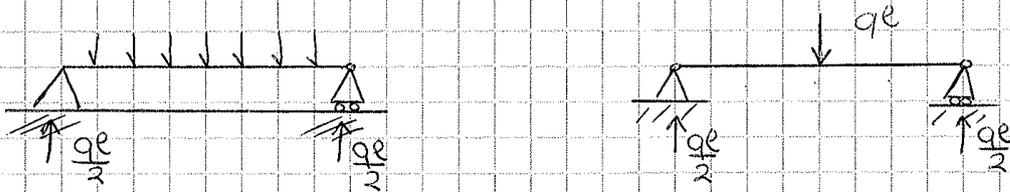
Qualunque sistema di forze è equivalente alla risultante applicata in un punto arbitrario O più una coppia di momenti uguale al momento risultante rispetto a O del sistema dato

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{OP}_i \wedge \vec{F}_i$$

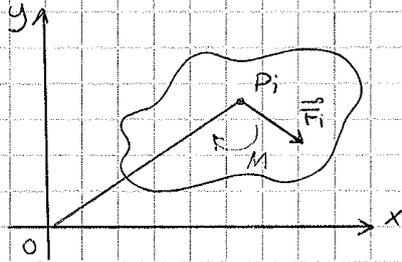
SISTEMI PIANI : se $\vec{R} \neq 0 \exists!$ una retta (= asse centrale) del piano tale che il momento risultante rispetto ai punti della retta sia nullo
 \hookrightarrow se ridotto a un punto appartenente all'asse centrale il sistema equivale alla sola risultante

* Sistemi equivalenti



possiamo sostituire solo all'interno delle condizioni della statica

SISTEMI PIANI



impongo l'equilibrio

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \end{cases}$$

$$\vec{M}_O = \sum_{j=1}^n \vec{M}_j + \sum_{i=1}^n (\vec{OP}_i \wedge \vec{F}_i) \hat{k}$$

2 equazioni alla traslazione

1 equazione alla rotazione

struttura costituita da n corpi

- equazioni di equilibrio $q = 3 \times n$ (3 per ogni corpo)

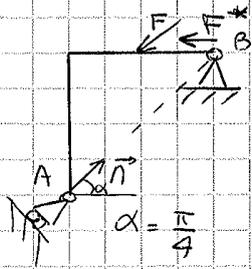
v = reazioni vincolari incognite

$q > v$	<p>o sistema staticamente impossibile (ABILE)</p> <p>o staticamente determinato (ISOSTATICA)</p> <p>o staticamente indeterminato (IPERSTATICA)</p>
$q = v$	
$q < v$	

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & e \cos \alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ V_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{A,n} \\ V_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} [C] \\ \nu \times q \end{matrix} \begin{matrix} \{M_0\} \\ q \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} \{M_x\} \\ \nu \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} \{0\} \end{matrix}$$

Caso degeneri



indeterminato dal punto di vista
cinematico, impossibile dal punto
di vista statico

* se $\leftarrow F$ il sistema è indeterminato

[A] e [C] rango massimo

C	Classificazione cinematica	Classificazione statica	nome comune
$v < q$	INDET.	IMPOSS	LABILE
$v = q$	DET.	DET	ISOSTATICA
$v > q$	IMPOSS	INDET	IPERSTATICA

Dato $\{F_0^a\}$, $\{x^a\}$

hp: $\mathcal{L} = 0$ per qualsiasi sistema di spostamento (b) congruente

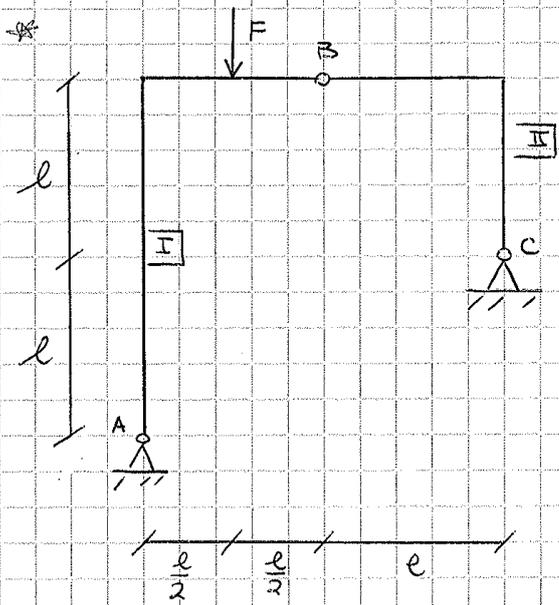
$$[C] \{m_0^b\} = \{m_x^b\}$$

\Leftrightarrow il sistema (a) è equilibrato

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \{F_0^a\}^T \{m_0^b\} + \{x^a\}^T * \{m_x^b\} \stackrel{hp}{=} \\ &= \{F_0^a\}^T \{m_0^b\} + \{x^a\}^T [C] \{m_0^b\} = \\ &= (\{F_0^a\}^T + \{x^a\}^T [C]) \{m_0^b\} = \\ &= (\{F_0^a\}^T + [C]^T \{x^a\}^T) \{m_0^b\} = \\ &= (\{F_0^a\}^T + [C]^T \{x^a\}^T) \{m_0^b\} = 0 \end{aligned}$$

$$[A] \{x^a\} + \{F_0^a\} = \{0\}$$

(a) è un sistema congruente



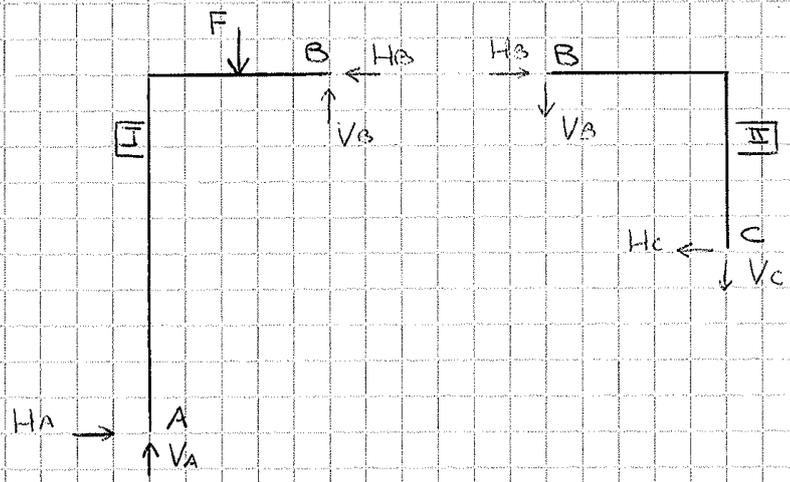
ISOSTATICA ?

$$\begin{cases} q = 3 \times 2 = 6 \\ v = 2 \times 3 = 6 \end{cases}$$

Metodi di risoluzione

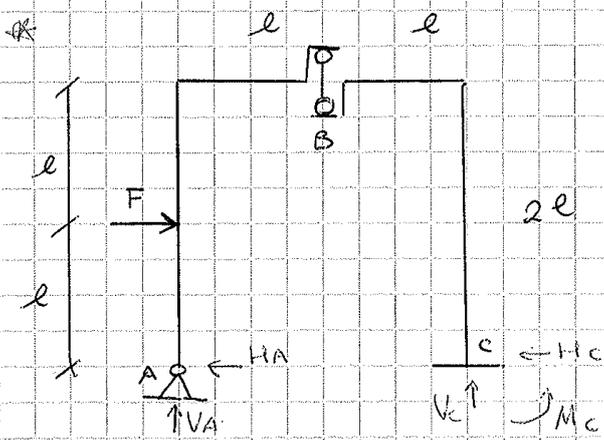
- m. generale
- eq. ausiliarie
- PLV
- m. grafico

Metodo generale - scompongo la struttura nelle parti costituenti



$$\begin{cases} \uparrow V_A + V_B - F = 0 \\ \rightarrow H_A - H_B = 0 \\ \curvearrowright H_B \cdot 2e + V_B \cdot e - F \cdot \frac{e}{2} = 0 \end{cases} \quad \text{I}$$

$$\begin{cases} \rightarrow H_B - H_C = 0 \\ \downarrow V_B + V_C = 0 \\ \curvearrowright V_C \cdot e + H_C \cdot e = 0 \end{cases} \quad \text{II}$$



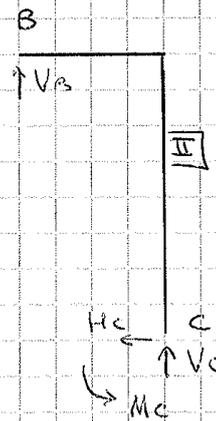
ISOSTATICA?

$$\begin{cases} q = 6 \\ v = 3 + 2 + 1 = 6 \end{cases}$$

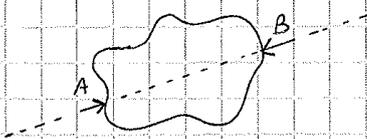
$$\left. \begin{aligned} \uparrow VA + Vc &= 0 \\ \leftarrow HA + Hc - F &= 0 \\ \curvearrowright Vc \cdot 2e + Mc - F \cdot e &= 0 \end{aligned} \right\} 3 \text{ equazioni globali}$$

$$\begin{aligned} \circlearrowleft B_2 \quad Mc + Vc \cdot e - Hc \cdot 2e &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Hc &= 0 \\ HA &= F \quad \leftarrow \\ VA &= -F \quad \downarrow \\ Vc &= F \quad \uparrow \\ Mc &= -Fe \quad \curvearrowleft \end{aligned}$$



Metodo grafico

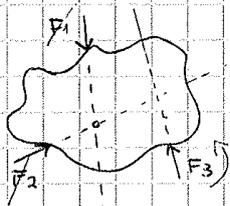


affinché un corpo rispetto a 2 sole forze sia in equilibrio, queste devono avere la stessa direzione, modulo uguale e verso opposto

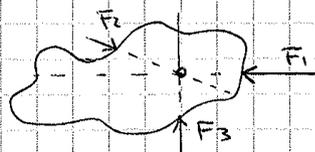
(x la traslazione)

condizione necessaria per l'equilibrio:

F₁, F₂, F₃ devono avere rette d'azione che si intersecano in un punto



no equilibrio

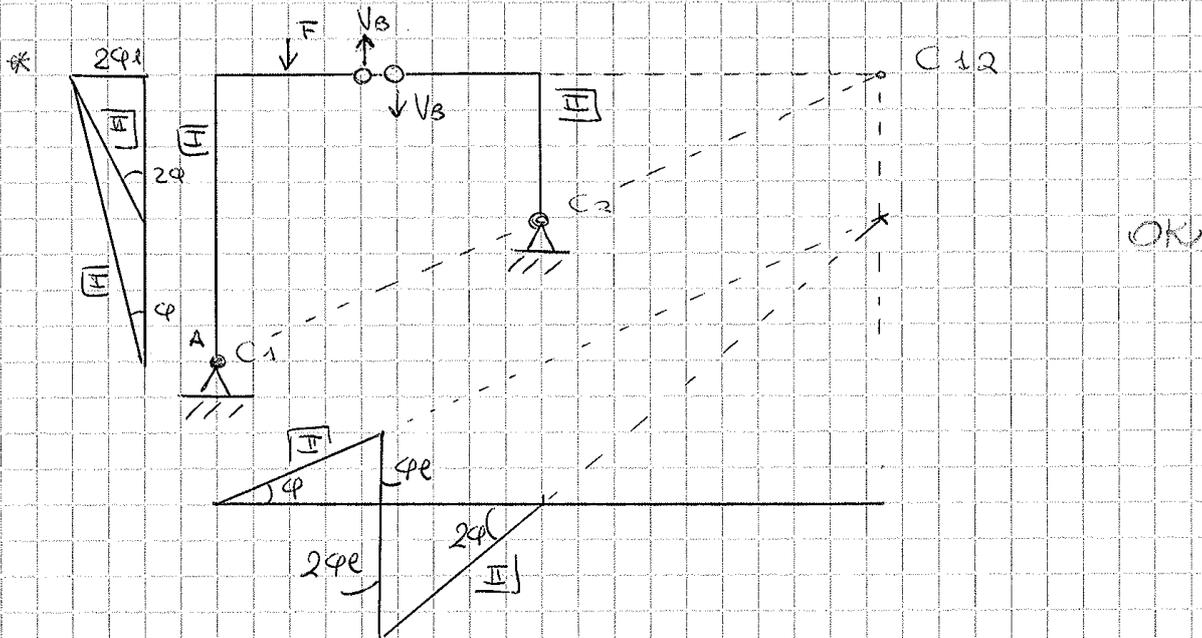


scivo l'equazione $\mathcal{L} = 0$

$$\mathcal{L} = -F \frac{\varphi l}{2} + V_C 3\varphi l = 0 \quad \forall \varphi$$

$$\mathcal{L} = \left(-\frac{F l}{2} + V_C 3l \right) \varphi = 0 \Rightarrow V_C = \frac{F l}{2} \cdot \frac{1}{3l} = \frac{F}{6}$$

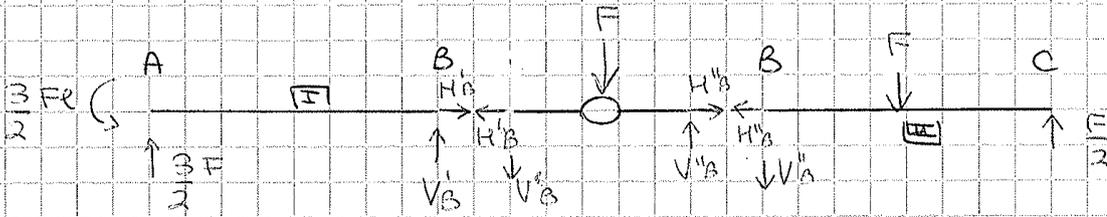
questo metodo si può applicare anche per calcolare le reazioni vincolari interne



$$\mathcal{L} = -F \frac{\varphi l}{2} + V_B \varphi l + V_C 2\varphi l = -\frac{F \varphi l}{2} + V_B 3\varphi l =$$

$$= \varphi \left(-\frac{F l}{2} + V_B 3l \right) = 0 \Rightarrow V_B = \frac{F l}{2} \cdot \frac{1}{3l} = \frac{F}{6}$$

V_A e H_A non compiono lavoro perché il loro pt di applicazione non si sposta



CORPO 1

$$\rightarrow H'_B = 0$$

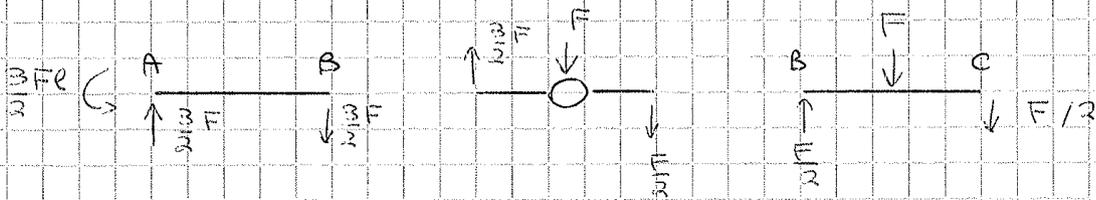
$$\uparrow V'_B + \frac{3}{2}F = 0 \Rightarrow V'_B = -\frac{3}{2}F$$

AL NODO

$$\uparrow -V'_B - F + V''_B = 0$$

$$V''_B = V'_B + F = -\frac{1}{2}F$$

$$\rightarrow H''_B - H'_B \Rightarrow H''_B = 0$$



$$\{M_Q\} = \{M_P\} + [J_P] \{Q-P\} + \dots \text{ (termini di ordine superiore)}$$

$$[J_P] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}_P \rightarrow \text{matrice di numeri} \\ \text{derivate calcolate in } P$$

considero la deformazione

$$[J_P] = \underbrace{\frac{1}{2} ([J_P] + [J_P]^T)}_{\text{matrice}} + \underbrace{\frac{1}{2} ([J_P] - [J_P]^T)}_{\text{matrice}}$$

simmetrica

antisimmetrica

$$[E_P]$$

$$[\varphi_P]$$

$$\{M_Q\} = \{M_P\} + [\varphi_P] \{Q-P\} + [E_P] \{Q-P\}$$

contributo
di traslazione

contributo rotatorio

tenore delle deformazioni

contributo
rotatorio

$$[E] = [J] + [J]^T =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$[E] = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \cdot & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \cdot & \cdot & \epsilon_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

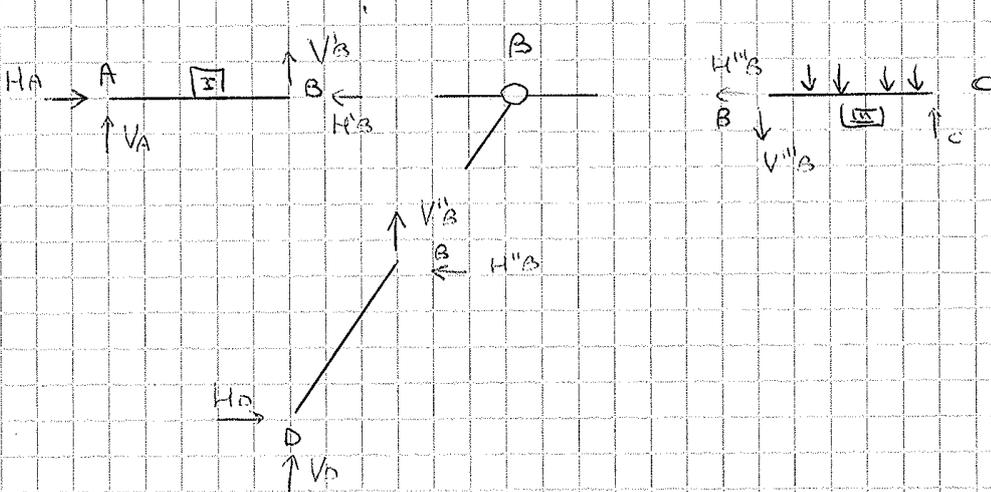
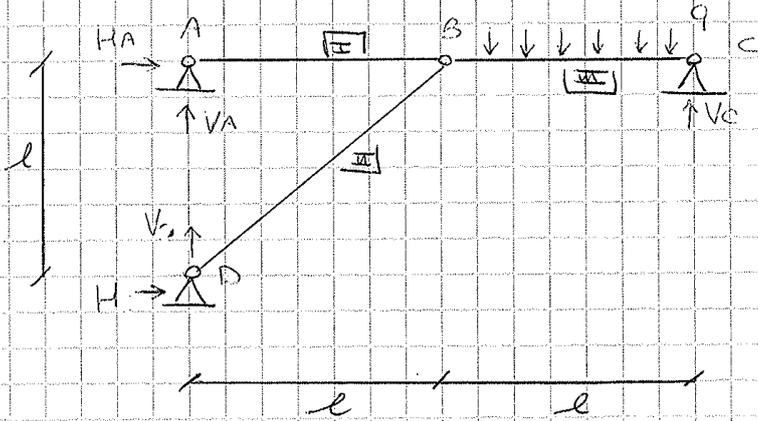
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_P (x_a - x_P)}{x_a - x_P} + \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_P (y_a - y_P)}{y_a - y_P} = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_P + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_P = \gamma_{xy}$$

approssimo la tangente dell'angolo al centro

scorrimento angolare

hp: $\epsilon \ll 1$
 $\gamma \ll 1$

piccole deformazioni



$$\begin{aligned} \uparrow \sum V_A + V_B + V_C - ql &= 0 \Rightarrow V_D = \frac{ql}{2} \\ \rightarrow \sum H_A + H_D &= 0 \Rightarrow H_A = -\frac{ql}{2} \\ \text{A) } \sum M_A: H_D l + V_C 2l - \frac{3}{2} ql^2 &= 0 \Rightarrow H_D = \frac{3}{2} ql - 2V_C = \frac{ql}{2} \\ \text{B) } \sum M_B: V_A l &= 0 \Rightarrow V_A = 0 \\ \text{B') } \sum M_B: V_C l - \frac{ql^2}{2} &= 0 \Rightarrow V_C = \frac{ql}{2} \end{aligned}$$

$$\epsilon_n = \hat{n} \cdot \vec{M}_n = \{n\}^T \{M_n\} = \{n\}^T [\epsilon] \{n\} = \eta_{nn}$$

$$\epsilon_m = \{m\}^T [\epsilon] \{m\} = \eta_{mm}$$

n e m si suppongono \perp

$$M_{nm} = \hat{n} \cdot \vec{M}_m = \{m\}^T [\epsilon] \{n\}$$

$$M_{mn} = \hat{m} \cdot \vec{M}_n = \{n\}^T [\epsilon] \{m\}$$

ENDOMORFISMO
SIMMETRICO

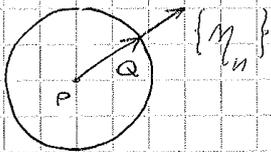
$$\delta_{nm} = \delta_{mn} = M_{nm} + M_{mn} = 2M_{nm}$$

considero la tangente
dell'angolo come il
lato opposto

$$\frac{1}{2} \delta_{nm} = M_{nm}$$

Voglio trovare le direzioni principali

- Esistono direzioni (\hat{n}) rispetto a cui $\vec{M}_n \parallel \hat{n}$?



$$\{M_n\} = [\epsilon] \{n\} \text{ eq. tensoriale}$$

2 vettori sono paralleli quando

$$\{M_n\} = -c \{n\}$$

ha direzione solo lungo
 \hat{n} quindi l'unica componente
è M_{nn}

$$= \epsilon_n [I] \{n\} \text{ confronto uno scalare con}$$

un tensore

matrice dei coefficienti $([\epsilon] - \epsilon_n [I]) \{n\} = 0$

$$\det([\epsilon] - \epsilon_n [I]) = 0 \text{ avrò altre soluzioni oltre a quella nulla}$$

↳ sto calcolando gli autovalori

la soluzione ovvia $n_i = 0$ è impossibile fisicamente
perché andrebbe contro la condizione di normalità dei
vettori direzionali $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$

SISTEMI DI AUTOVETTORI (1,2,3)

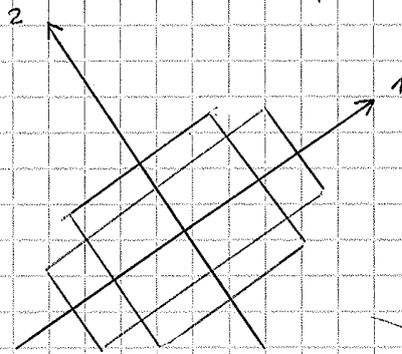
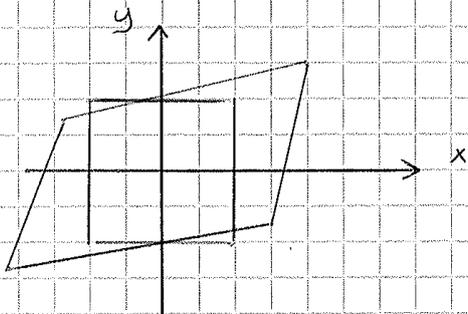
$$\begin{pmatrix} M \\ n_1 \\ M \\ n_2 \\ M \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

$J_I = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$ traccia del tensore

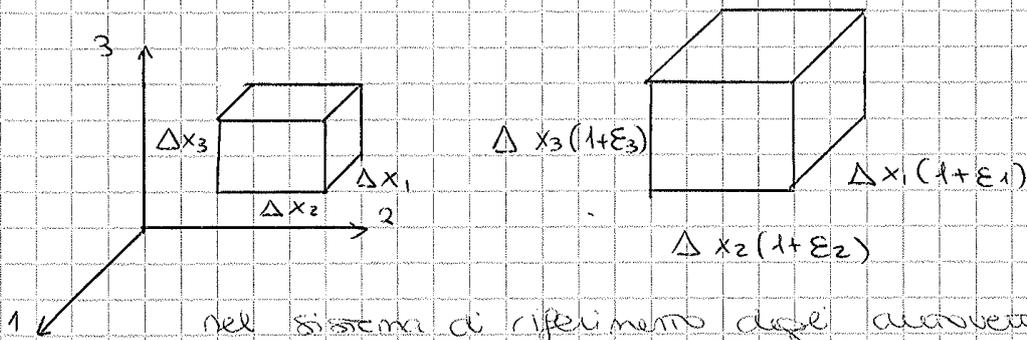
$J_{II} = 0 - \epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon_1 \epsilon_3 - \epsilon_2 \epsilon_3$ parametro di distorsione

$J_{III} = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3$ se $\dots J_{III} = 0 \rightarrow$ stato tensionali

piano



dilatazione volumica



nel sistema di riferimento degli autovettori non ci sono scorrimenti angolari, gli angoli rimangono gli stessi

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 (1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)(1 + \epsilon_3) - \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3}$$

$$(1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)(1 + \epsilon_3) - 1 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_3 + \epsilon_2 \epsilon_3 + \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3$$

per piccole deformazioni $\approx \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = J_I = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$

la dilatazione volumica

deformazioni

non deve essere in base al sistema di riferim.

date le 3 componenti siamo in grado di calcolare ϵ_n in una direzione \rightarrow VICEVERSA???

Direzione 0° \rightarrow $\{n\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \cos(0^\circ) \\ \sin(0^\circ) \end{matrix}$ $\epsilon_x = \epsilon_0$

Direzione 60° \rightarrow $\{n\} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}$ $\frac{\epsilon_x}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \gamma_{xy} + \frac{3}{4} \epsilon_y = \epsilon_{60}$

Direzione 120° \rightarrow $\{n\} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ $\frac{\epsilon_x}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \gamma_{xy} + \frac{3}{4} \epsilon_y = \epsilon_{120}$

per ottenere le 3 componenti del tensore

$$\epsilon_x = \epsilon_0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2\sqrt{3}}{3} (\epsilon_{60} - \epsilon_{120})$$

$$\epsilon_y = \frac{2\epsilon_{60} + 2\epsilon_{120} - \epsilon_0}{3}$$

se $\epsilon_{60} \neq \epsilon_{120}$ $\gamma_{xy} \neq 0 \Rightarrow (x,y)$ non è principale

se $\epsilon_{60} = \epsilon_{120}$ $\gamma_{xy} = 0 \Rightarrow (x,y)$ è principale per la deformazione

se $\epsilon_{60} = \epsilon_{120} = \epsilon_0 \Rightarrow \forall$ sistema è principale

ES $\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_0 = 3 \cdot 10^{-3} \\ \epsilon_{60} = 1,5 \cdot 10^{-3} \\ \epsilon_{120} = -1,5 \cdot 10^{-3} \end{array} \right.$

Calcolare $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$

Risultante \vec{R}

$$R_x = T_x \quad \text{lungo } x \quad \text{TAGLIO}$$

$$R_y = T_y \quad \text{TAGLIO lungo } y \quad \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{componenti che rimangono} \\ \text{nel caso piano} \end{array} \right.$$

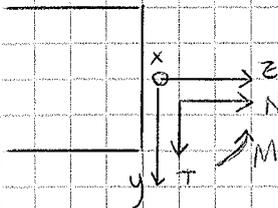
$$R_z = N \quad \text{sforzo normale} \quad \rightarrow$$

Momento risultante \vec{M}

$$M_x = \text{momento flettente attorno } x$$

$$M_y = \text{momento flettente attorno } y$$

$$M_z = \text{momento torcente attorno } z$$



$$T_y = T$$

N

$$M_x = M$$

$$T_x = 0$$

$$M_y = M_z = 0$$

impongo l'equilibrio a destra

$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow -N - \frac{F}{2} = 0 \\ \uparrow T + \frac{F}{2} = 0 \\ \curvearrowright M + \frac{F}{2}e - \frac{F}{2} \cdot \frac{e}{2} = 0 \end{array} \right.$$

calcolo le funzioni $T(s)$, $N(s)$, $M(s) \rightarrow$ funzioni dell'ascissa

curvilinea

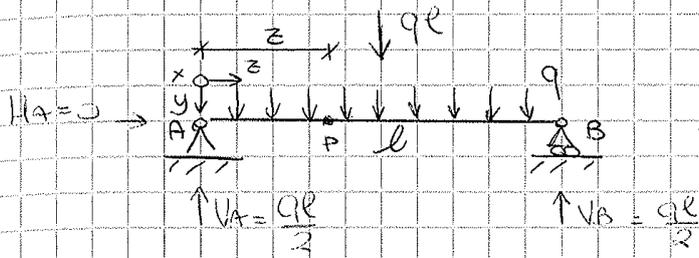
diagrammi delle caratteristiche di

sollecitazione

a livello dei vincoli interni/esterni coincidono con le reazioni

vincolari

* Esempio



$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow H_A = 0 \\ \uparrow V_A + V_B - ql = 0 \\ \textcircled{A} V_B l - \frac{ql^2}{2} = 0 \end{array} \right.$$

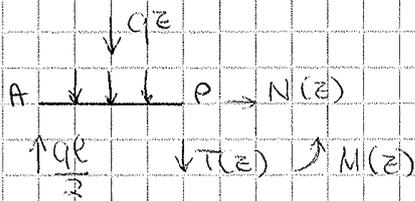
$$\left\{ \begin{array}{l} V_B = \frac{ql}{2} \\ V_A = \frac{ql}{2} \end{array} \right.$$

Diagrammi delle caratteristiche

ISOBA AP

↳ generico $0 < z < l$

in P ho la faccia \oplus (z e' uscente)



} sono funzioni di z
 z e' variabile

$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow N(z) = 0 \\ \uparrow \frac{ql}{2} - ql - T(z) = 0 \quad T(z) = q\left(\frac{l}{2} - z\right) \\ \textcircled{P} M(z) + qz \cdot \frac{z}{2} - \frac{ql}{2} z = 0 \quad M(z) = \frac{q}{2}(lz - z^2) \end{array} \right.$$

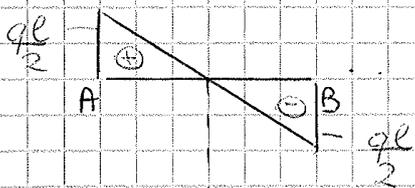


DIAGRAMMA DEL TAGLIO

$$T(0) = \frac{ql}{2}$$

$$T(l) = -\frac{ql}{2}$$

il diagramma e' lineare

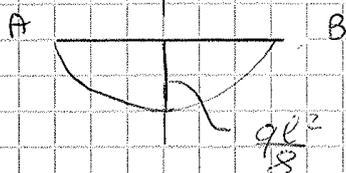
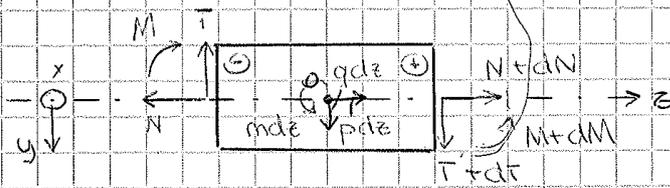


DIAGRAMMA DEL MOMENTO

$$M(0) = M(l) = 0$$

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^2}{8}$$

EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO PER TRAVI RETTILINEE



conco di trave di
lunghezza infinitesima dz

sulla trave agira una forza $P, q \rightarrow N/m$
 $m \rightarrow \frac{N}{m}, m$

equazioni di equilibrio

$$\rightarrow \cancel{N} - \cancel{N} + dN + p dz = 0$$

divido per dz

$$\boxed{\frac{dN}{dz} + p = 0}$$

$$\downarrow \cancel{T} - \cancel{T} + dT + q dz = 0$$

$$\boxed{\frac{dT}{dz} + q = 0}$$

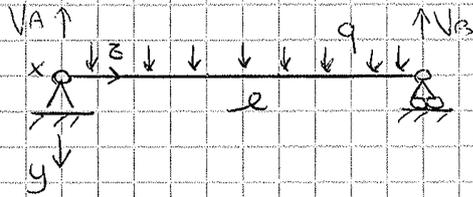
$$\circlearrowleft \cancel{M} - \cancel{M} + dM - T \frac{dz}{2} - (T + dT) \frac{dz}{2} + M dz$$

$$dM - T dz + m dz = 0$$

$$\boxed{\frac{dM}{dz} - T + m = 0}$$

3 caratteristiche della sollecitazione

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dz} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dz} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \\ p \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [D]^* \{Q\} + \{F\} = \{0\}$$



$$\frac{d^2M}{dz^2} = -q \Rightarrow \frac{dM}{dz} = -qz + C_1 \Rightarrow M = -q \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2$$

devo determinare C_1 e C_2 dalle condizioni dei vincoli

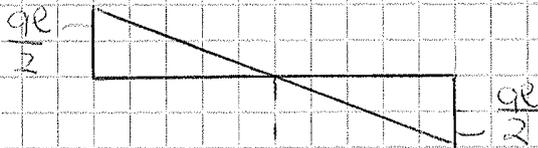
CONDIZIONI AL CONFINO

$$\begin{cases} M(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ M(l) = 0 \Rightarrow -q \frac{l^2}{2} + C_1 l + \cancel{q} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{ql}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{ql}{2}$$

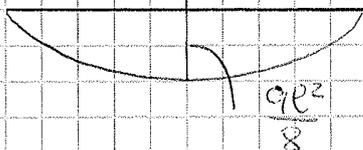
$$\begin{cases} M(z) = -q \frac{z^2}{2} + \frac{ql}{2} z = \frac{qz}{2} (l - z) \\ T(z) = \frac{dM}{dz} = -qz + \frac{ql}{2} = q \left(\frac{l}{2} - z \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M(z) = -q \frac{z^2}{2} + \frac{ql}{2} z = \frac{qz}{2} (l - z) \\ T(z) = \frac{dM}{dz} = -qz + \frac{ql}{2} = q \left(\frac{l}{2} - z \right) \end{cases}$$



$$V_A = T(0) = \frac{ql}{2}$$

$$V_B = T(l) = -\frac{ql}{2}$$

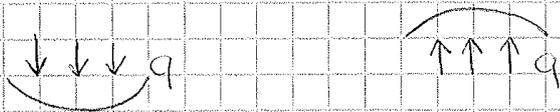


TRACCIAMENTO QUALITATIVO DELLE CARATTERISTICHE DELLE SOLLECITAZIONI

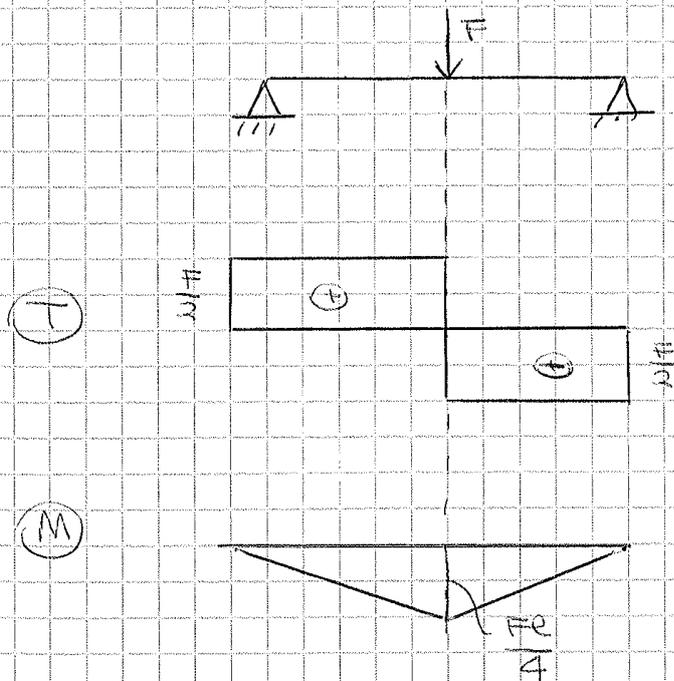
PROPRIETÀ

- 1) dove $T=0$, M è massimo o minimo
- 2) se $q=0$, T è costante, M è lineare
- 3) se $q=cost$, T è lineare, M è parabolico

q definisce la concavità di $M(x)$

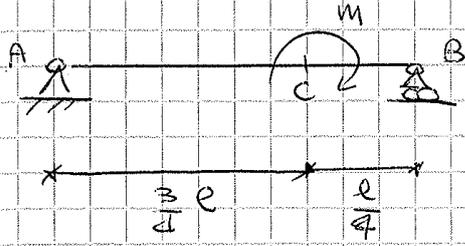


- 4) discontinuità nel carico q , T ha un punto angoloso
- 5) presenza di $F \Rightarrow T$ è discontinuo $\Rightarrow M$ ha un pt angoloso



- 6) Presenza di una coppia concentrata $m \Rightarrow M$ discontinuo

* Esercizio

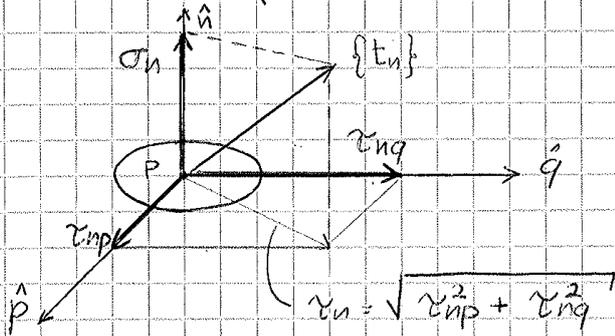


$$\{t_n\} = f(\{r\}, \{u\})$$

la teoria di Cauchy esclude la forza concentrata
 la tensione non si può calcolare, noi valutiamo la
 deformazione

$$\{t_n\} = t_{n_x} \hat{i} + t_{n_y} \hat{j} + t_{n_z} \hat{k} \quad \text{rispetto a una terna } x, y, z \text{ esterna}$$

sistemi di riferimento locale $\hat{p}, \hat{q}, \hat{n}$



scompongo $\{t\}$ in \hat{p} e \hat{q}

componente tangenziale Totale

normale alla giacitura

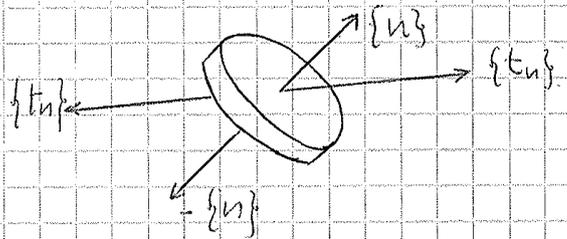
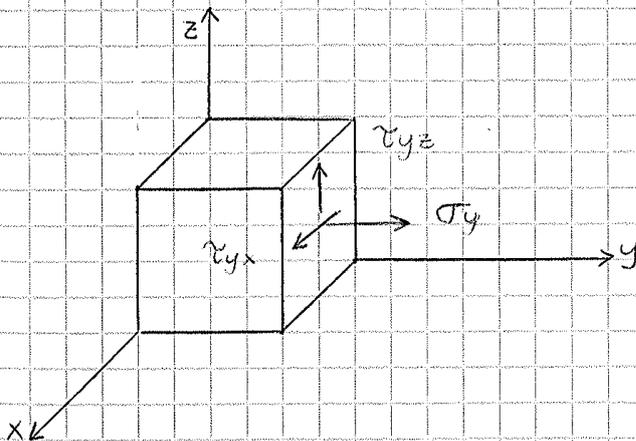
$$\{t_n\} = \underbrace{\sigma_n}_{\text{componente normale}} \hat{n} + \underbrace{\tau_{np} \hat{p} + \tau_{nq} \hat{q}}_{\text{componenti tangenziali}}$$

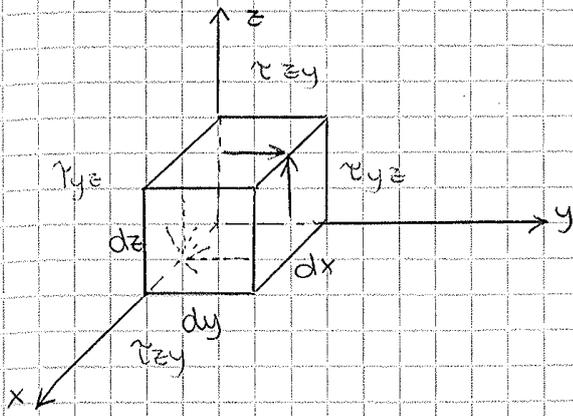
direzione della tensione

rispetto una terna n, p, q locale

conosco lo stato di sollecitazione in un punto quando è noto il vettore tensione su una giacitura

considero un cubetto





eq alla rotazione attorno x

forza che agisce sulla faccia singola
 $+ \tau_{yz} dx dz dy - \tau_{zy} dx dy dz = 0$

attorno y

attorno z

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$



il tensore degli
sforzi è una matrice
SIMMETRICA

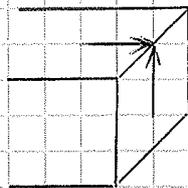
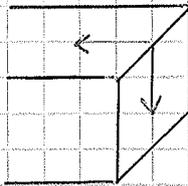
- [σ] simmetrico

- PRINCIPIO DI RECIPROCA'

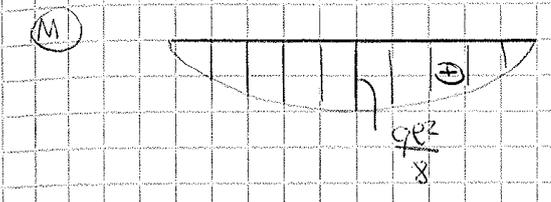
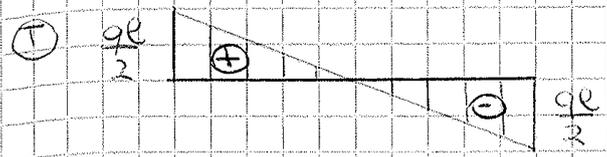
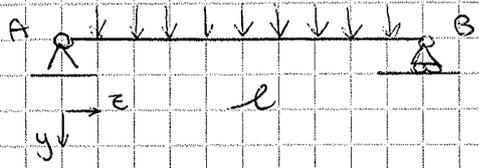
DEWE TENSIONI TANGENZIALI

$$\{m\}^T [\sigma] \{n\} = \{n\}^T [\sigma] \{m\}$$

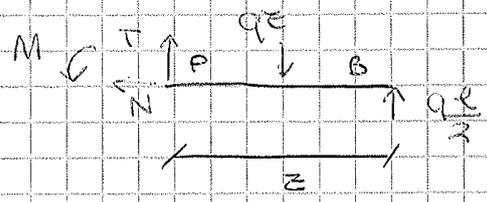
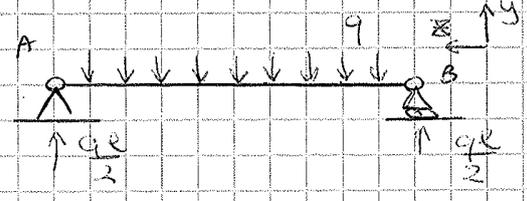
$$t_{nm} = t_{mn}$$



*



scelgo un altro sistema di riferimento

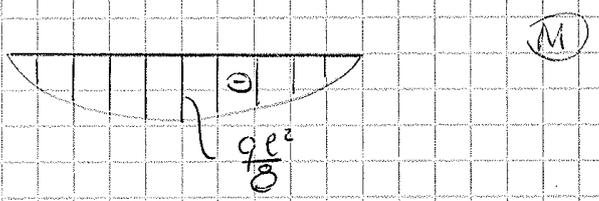
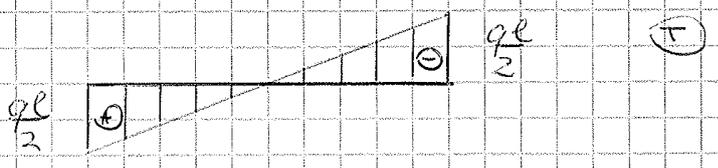


$\rightarrow N = 0$

$\uparrow \frac{q l}{2} - q z + T = 0 \Rightarrow T(z) = q \left(\frac{l}{2} - z \right)$

$\circlearrowleft M + \frac{q l}{2} z - \frac{q z^2}{2} = 0$

$M = - \frac{q z}{2} (l - z)$

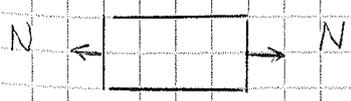
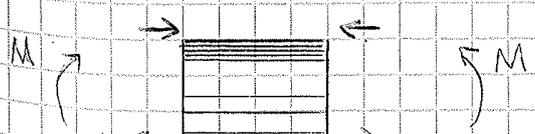


T è positivo se applicato sulla trave la fa ruotare in senso orario

Il momento lo riportano dalla parte delle fibre tese

$N > 0$ ne di trazione

$N < 0$ ne di compressione



3 soluzioni reali

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

tensioni principali

↳ autovalori

ha solamente

tensioni normali e

non tangenziali

1° CASO

$$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3 \Rightarrow \{n_1\} \perp \{n_2\} \perp \{n_3\}$$

∃ una base autonormale

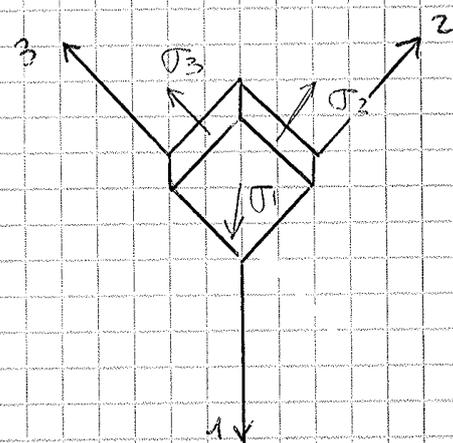
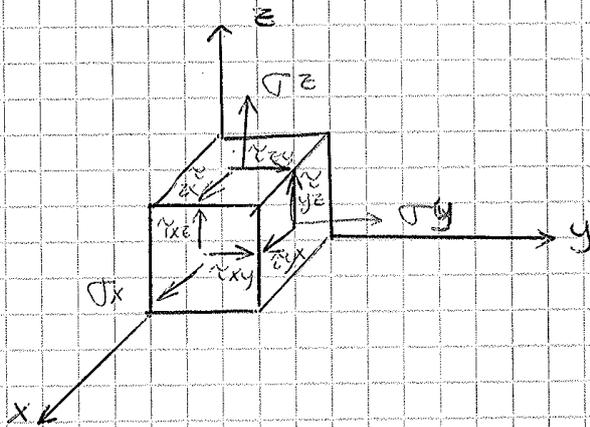
2° CASO

$$\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3 \Rightarrow \{n_3\} \text{ è direzione principale}$$

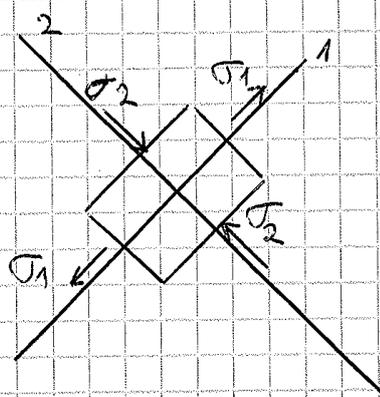
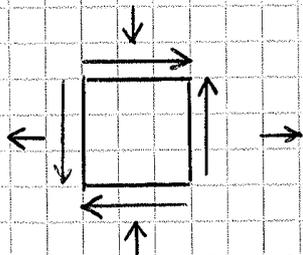
∀ direzione $\perp \{n_3\}$ è direzione principale

3° CASO

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \Rightarrow \forall \text{ direzione è principale}$$



al variare della normale le tensioni sulle facce cambiano
 tra $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ c'è il valore massimo delle tensioni



termini noti \rightarrow

$$N_1^2 = \begin{vmatrix} \sigma_n^2 + \tau_n^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_n & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

\Rightarrow proprietà dei determinanti

$$\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3)$$

$$= \begin{vmatrix} \sigma_n^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_n & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tau_n^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ 0 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3)$$

$$= \frac{(\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) + \tau_n^2(\sigma_2 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3)}$$

$$\begin{cases} N_1^2 = \frac{(\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) + \tau_n^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \geq 0 \\ N_2^2 = - \frac{(\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_3) + \tau_n^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \geq 0 \\ N_3^2 = \frac{(\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) + \tau_n^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \geq 0 \end{cases}$$

c'è soluzione se $N_1^2 \geq 0$

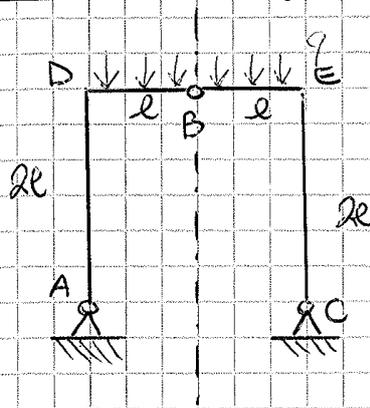
$$N_2^2 \geq 0$$

$$N_3^2 \geq 0$$

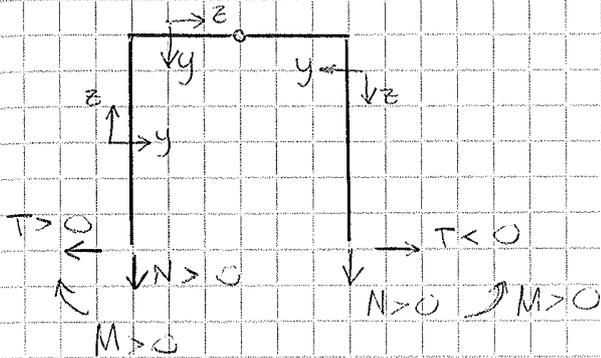
decido che $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

i 3 denominatori sono > 0

$$\begin{cases} (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) + \tau_n^2 \geq 0 & C_1 \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0 \right) & R_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \\ (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_3) + \tau_n^2 \leq 0 & C_2 \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0 \right) & R_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \\ (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) + \tau_n^2 \geq 0 & C_3 \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right) & R_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \end{cases}$$



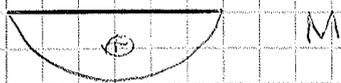
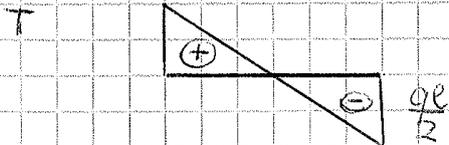
struttura arco a cerniera
 simmetrica con carico simmetrico
 ↳ posso risolverne metà



Per strutture simmetriche
caricate simmetricamente
N e M sono simmetrici,
T e' antisimmetrico

$$T = dM$$

↳ dispari ↳ pari



Calcolo analitico di tensioni e direzioni principali

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_n \end{vmatrix} = 0 \quad \text{per calcolare gli autovalori}$$

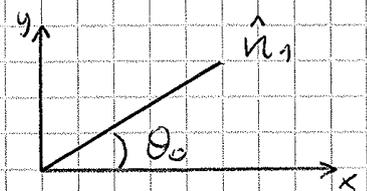
$$\sigma_n [(\sigma_x - \sigma_n)(\sigma_y - \sigma_n) - \tau_{xy}^2] = 0 \quad [\sigma_x \sigma_y - \sigma_x \sigma_n - \sigma_y \sigma_n + \sigma_n^2]$$

$$\sigma_n [\sigma_n^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_n + \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2] = 0$$

$$\sigma_n = 0 = \sigma_3$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4\sigma_x \sigma_y + 4\tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\sigma_x \sigma_y - 4\sigma_x \sigma_y + 4\tau_{xy}^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\sigma_x \sigma_y + 4\tau_{xy}^2}$$

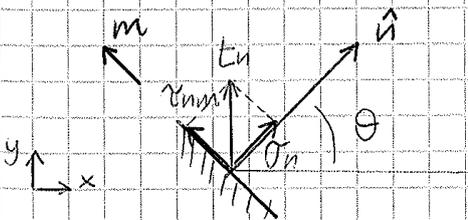
$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$



calcolo n_1

$$(\sigma_x - \sigma_1)n_{1x} + \tau_{xy}n_{1y}$$

$$\tan \theta = \frac{n_{1y}}{n_{1x}}$$



$$n = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$m = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

una giacitura è principale quando è nulla la tensione tangenziale imposta $\tau_{nm} = 0$

$$\tau_{nm} = \vec{m} \cdot \vec{t}_n = \{m\}^T \cdot \{t_n\} = \{m\}^T [\sigma] \{n\} = 0$$

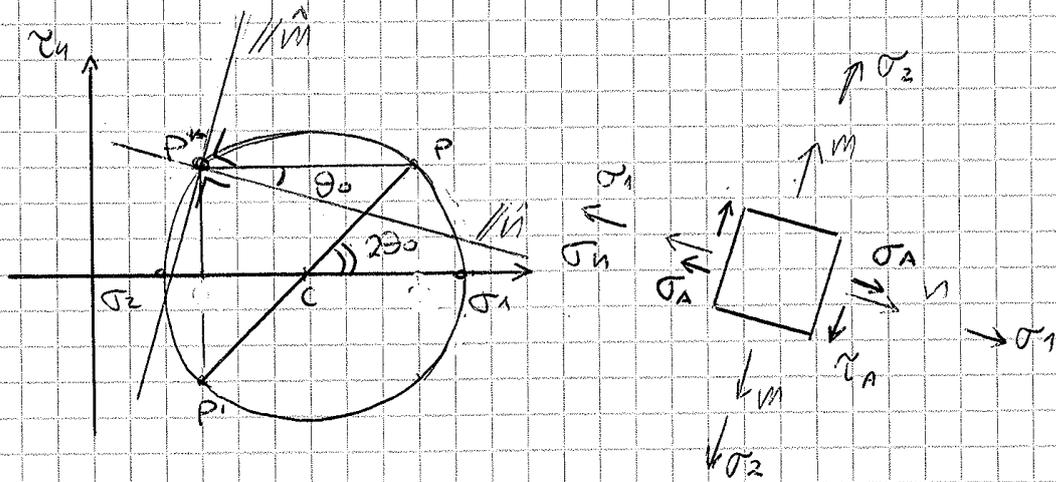
$$R = CP = CP' =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Traccio da P l'orizzontale e da P' la verticale

↳ Trovo P*

Le componenti del vettore tensione in sono date dalle coordinate del punto di intersezione tra il cerchio e la retta per P* // \hat{n}



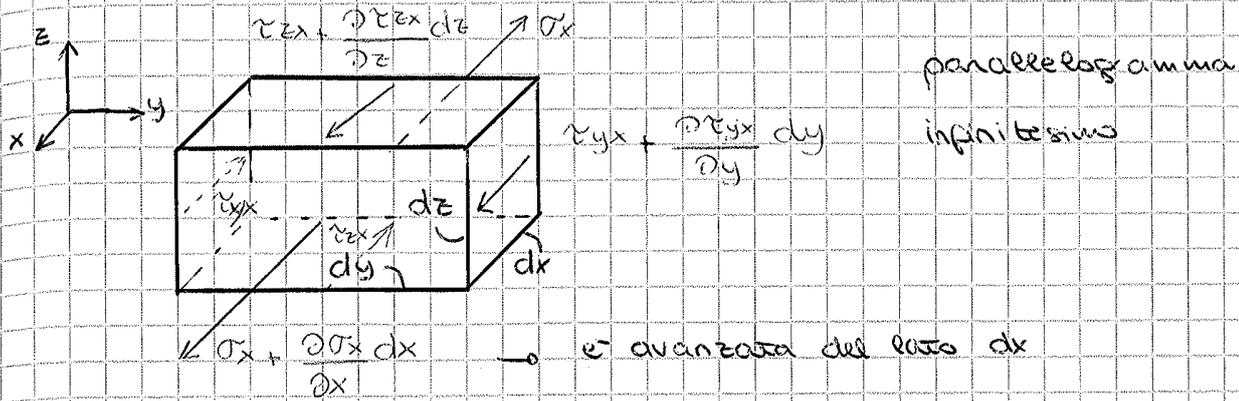
$$\tan(2\theta_0) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \overline{OC} \mp R$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO



dim 1

EQUILIBRIO

area

$$\begin{aligned}
 & \left(\cancel{\sigma_x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \cancel{\sigma_x} dy dz + \left(\cancel{\tau_{yx}} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz + \\
 & - \cancel{\tau_{yx}} dx dz + \left(\cancel{\tau_{zx}} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \cancel{\tau_{zx}} dx dy + \\
 & + \cancel{\sigma_x} dx dy dz = 0
 \end{aligned}$$

specifico per il volume

$$\begin{cases}
 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \cancel{\sigma_x} = 0 & \nearrow \text{equilibrio lungo } x \\
 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \cancel{\sigma_y} = 0 \\
 \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \cancel{\sigma_z} = 0
 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \dots \\ \dots \\ \gamma_{xy} \\ \dots \\ \dots \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} & 0 & \frac{\partial w}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

operatore
matriciale ∇

cinematico $\{\epsilon\} = [D] \{M\}$
 $6 \times 1 \quad 6 \times 3 \quad 3 \times 1$

$\forall P \in V$

operatore
matriciale
differenziale
cinematico

EQ. INDEFINITA DI EQUILIBRIO

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

EQVAZIONI STATICHE

$[D]^T \{\sigma\} + \{F\} = \{0\} \quad \forall P \in V$
 $3 \times 6 \quad 6 \times 1 \quad 3 \times 1 \quad 3 \times 1$

gli operatori differenziali sono uno il trasposto dell'altro

$$\begin{aligned}
 [A] \{x\} + \{F_0\} &= \{0\} && \text{statica} \\
 8 \times 1 & \quad 1 \times 1 & \quad 8 \times 1 & \quad 8 \times 1 \\
 [C] \{M_0\} &= \{M_x\} && \text{cinematica} \\
 1 \times 8 & \quad 8 \times 1 & \quad 1 \times 1 & \quad 8 \times 1
 \end{aligned}$$

$[A]^T = C$

$\{x\} \Leftrightarrow \{\sigma\} \quad \{M_x\} \Leftrightarrow \{\epsilon\}$

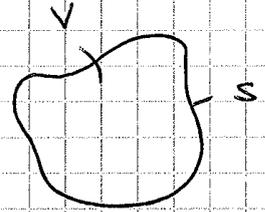
Principio dei lavori virtuali per un corpo deformabile

dim

- Considero un sistema ^(a) di forze e tensioni $\{F_a\}, \{P_a\}, \{\sigma_a\}$ staticamente ammissibile (= equilibrato)

$$[\partial]^T \{ \sigma_a \} + \{ F_a \} = 0 \quad \forall P \in V$$

$$[N]^T \{ \sigma_a \} = \{ P_a \} \quad \forall P \in S$$



- Considero un sistema (b) di spostamenti e deformazioni $\{M_b\}, \{E_b\}$ cinematicamente ammissibile (= congruente)

$$\{ E_b \} = [\partial] \{ M_b \} \quad \forall P \in V$$

⇒ allora il lavoro

$$L_{v, ext} = L_{v, int}$$

$$L_{v, ext} = \int_V \{ F_a \}^T \{ M_b \} dv + \int_S \{ P_a \}^T \{ M_b \} ds$$

Lavoro virtuale perché i due sistemi non hanno nulla in comune, non sono collegati tra loro

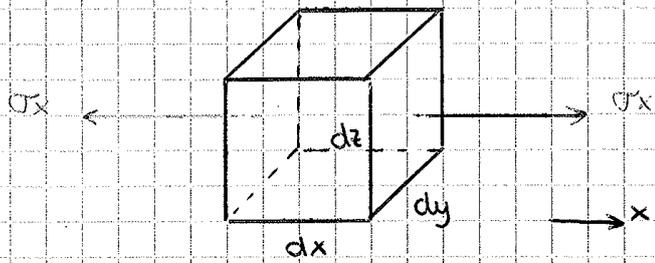
$$\int_V \{ F_a \}^T \{ M_b \} dv = \int_V (\sigma_x u + \sigma_y v + \sigma_z w) dv =$$

$$= - \int_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) u + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) v + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) w \right] dv$$

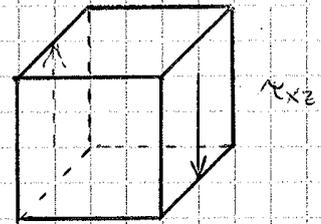
$$\int_S \{ P_a \}^T \{ M_b \} ds = \int_S (P_x u + P_y v + P_z w) ds =$$

$$= \int_S \left[(\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z) u + (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z) v + (\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z) w \right] ds =$$

↑
GAUSS

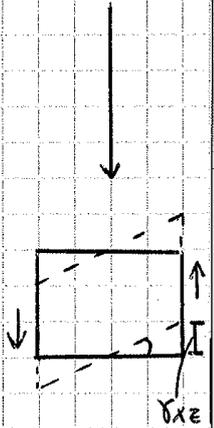


$$\sigma_x dy dz \mathbf{e}_x dx = \sigma_x \mathbf{e}_x dv$$



$$\tau_{xz} dy dz \delta x z dx = \tau_{xz} \delta x z dv$$

se lo spostamento congruente è rigido $\Rightarrow \epsilon = 0$



Un campo di forze $\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$ è detto **CONSERVATIVO**
 e la forma differenziale $\vec{F} d\vec{P}$ è detta esatta $d\vec{P} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$
se \exists una funzione $f(x, y, z)$ detta potenziale tale che

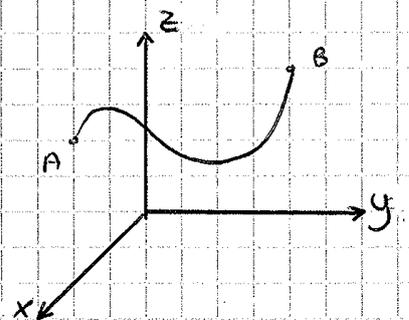
$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = F_y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = F_z$$

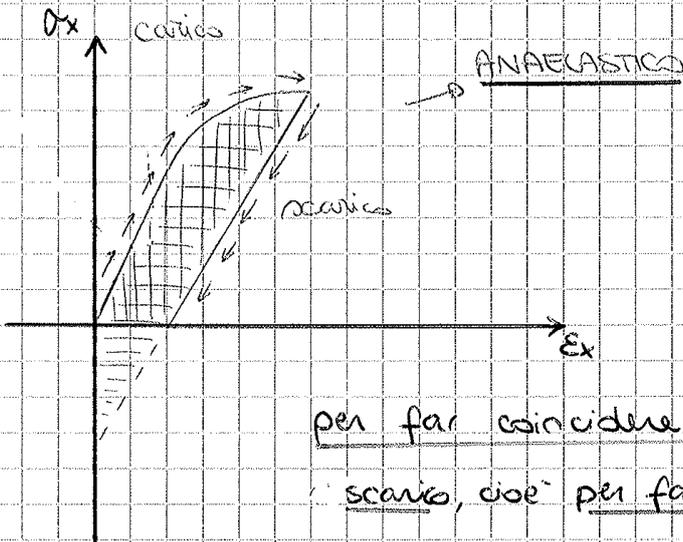
$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{L} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = df$$

$$L = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{P} = \int_A^B df = f(B) - f(A)$$



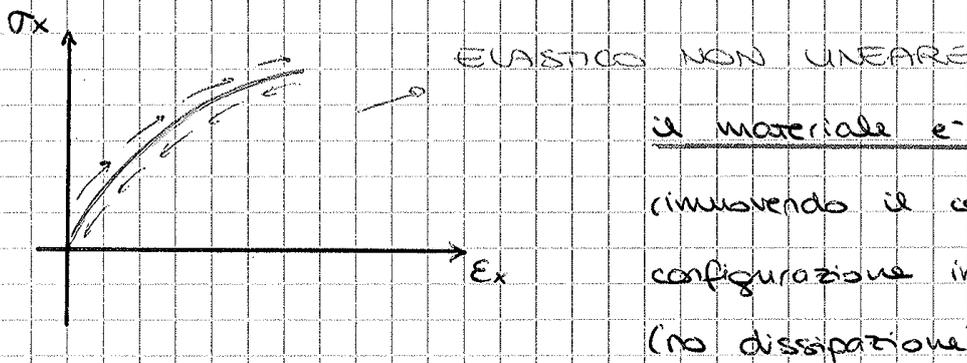
Il lavoro di deformazione per passare dallo stato indeformato a uno stato deformato è pari al potenziale $\phi(\epsilon)$

$$L = \int_{\epsilon_0}^{\epsilon} \{\sigma\}^T \{d\epsilon\} = \phi(\epsilon) - \phi(\epsilon_0)$$

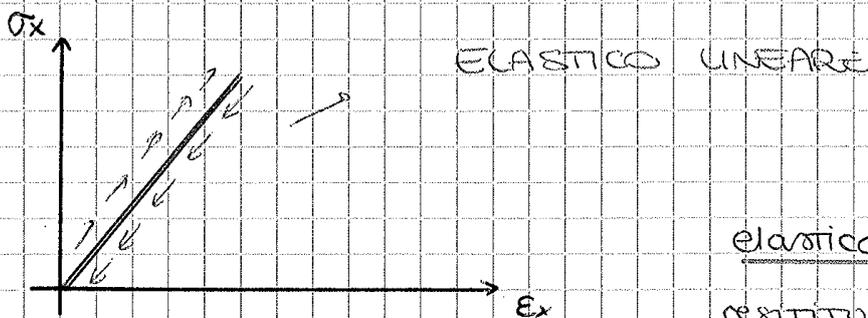


non è un materiale conservativo, dopo lo scarico rimane una deformazione residua, il lavoro è l'area compresa dalle curve

per far coincidere la retta di carico con quella di scarico, cioè per far in modo che al materiale non rimanga alcuna deformazione dobbiamo imporre una altra tensione, e quindi un altro lavoro



il materiale è conservativo, rimuovendo il carico si ritorna alla configurazione iniziale (no dissipazione)



nello scarico, l'energia elastica viene totalmente restituita e non ha dissipazione di energia

ELASTICITA' LINEARE $\rightarrow \Phi = \frac{1}{2} \{ \epsilon \}^T [H] \{ \epsilon \} =$
 $= \frac{1}{2} \{ \epsilon \}^T \{ \sigma \} = \frac{1}{2} \{ \sigma \}^T \{ \epsilon \} = \frac{1}{2} \{ \sigma \}^T [H]^{-1} \{ \sigma \}$

$\frac{d\Phi}{d\epsilon} = \{ \sigma \} = [H] \{ \epsilon \} \rightarrow \{ \epsilon \} = [H]^{-1} \{ \sigma \}$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xy}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xz}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{yz}} \end{pmatrix}$$

matrice simmetrica: 21 termini liberi

$$[H] \{ \epsilon \} = \{ \sigma \}$$

6x6 6x1 6x1

legame

elastico - lineare

legge costitutiva

$\Rightarrow \{ \epsilon \} = [H]^{-1} \{ \sigma \}$

lo stato indiformato deve rappresentare il minimo assoluto di Φ e non solo un pt. stazionario, quindi la matrice Hessiana è definita positiva

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{xy}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{xz}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{yz}} \end{pmatrix}$$

$$[H]^{-1} \{ \sigma \} = \{ \epsilon \}$$

EQ. INDEFINITE DI EQUILIBRIO

$\rightarrow [D]^{-1} \{ \sigma \} + \{ \gamma \} = \{ f \}$
 3x6 6x1 3x1 3x1

6 incognite, 3 equazioni

3 volte internamente iperstatico

(staticamente indeterminato)

parto dall'equazione della matrice

$$\underline{\underline{\phi}} = \phi(\{ \epsilon \}) = \frac{1}{2} \{ \sigma \}^T \{ \epsilon \}$$

$$\frac{\frac{N}{m^2}}{m^3} = \frac{J}{m^3}$$

↳ $\frac{J}{m^3}$ LAVORO X UNITA' DI VOLUME

$$\underline{L}_{v, ext} = L_{v, int}$$

↳ $\frac{J}{m^3}$

$$L \rightarrow \int_V \{ \sigma \}^T \{ \epsilon \} dv \rightarrow \int_V$$

↳ integro nel volume

⊕ Clapeyron

corpo linearmente elastico
soggetto a forze di volume $\{ \sigma \}$
e a forze di superficie $\{ P \}$.

$\{ \eta \}$ = campo di spostamenti che
si genera nel corpo al termine
del processo di carico

[Non vale x processi di
carico impulsivi]

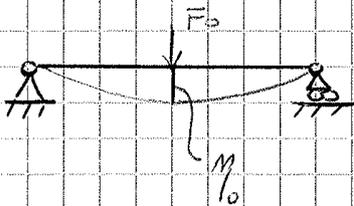
ϕ = lavoro per unita' di volume
 L = lavoro assoluto

TEOREMI ENERGETICI

→ ⊕ di Clapeyron (Il lavoro di deformazione sviluppato dalle forze esterne) d'energia elastica immagazzinata in un corpo (hpl elasticita' lineare) e' pari alla meta' del lavoro che le forze esterne compirebbero se fossero presenti con il loro valore finale fin dall'inizio del processo di carica

applico il PLV

$$\frac{1}{2} \int_V \{ \sigma \}^T \{ \eta \} dv + \frac{1}{2} \int_S \{ P \}^T \{ \eta \} ds = \frac{1}{2} \int_V \{ \sigma \}^T \{ \epsilon \} dv = \int_V \phi dv = L_{def}$$



$$L_{def} = \frac{1}{2} F_0 \eta_0$$

$$L_{def} = \int_0^{\eta_0} F(\eta) d\eta = \frac{1}{2} F_0 \eta_0$$

↳ valore finale

se applico il carico in maniera quasi statica (le forze crescono gradualmente)

$$b+a \rightarrow L_{b+a}$$

$$L_b + L_a + L_{ba}$$

$$L_{a+b} = L_a + L_b + L_{ab}$$

$$L_{b+a} = L_b + L_a + L_{ba}$$

$$L_{ba} = \int_V \{P_b\}^T \{M_a\} dv + \int_S \{P_b\}^T \{M_a\} ds$$

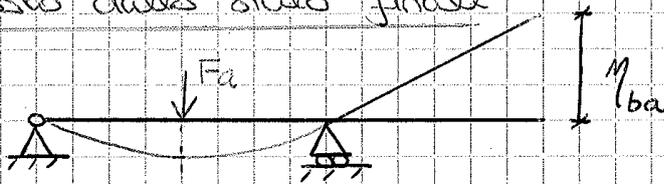
per l'ipotesi di elasticità $L_{a+b} = L_{b+a} \Rightarrow$

$$L_{ab} = L_{ba}$$

il L_{TOT} di deformazione dipende

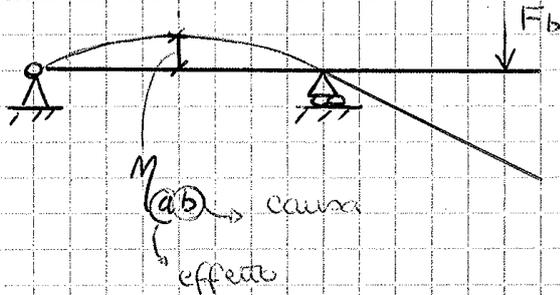
uguaglianza dei lavori reciproci

solo dallo stato finale



$$\text{se } F_a = F_b = 1$$

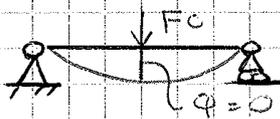
$$M_{ab} = M_{ba}$$



$$F_a M_{ab} = F_b \eta_{ba}$$

Se $L_{ab} = L_{ba} = 0$ i sistemi (a) e (b) sono detti energeticamente ortogonali, in questo caso vale la sovrapposizione degli effetti

$$L_a + L_b + \cancel{L_{ab}} = L_{a+b} \quad \text{anche per il lavoro di deformazione}$$

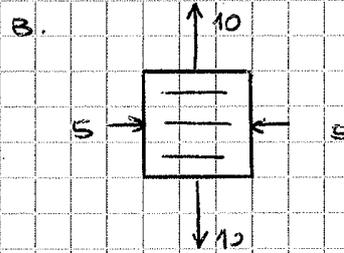
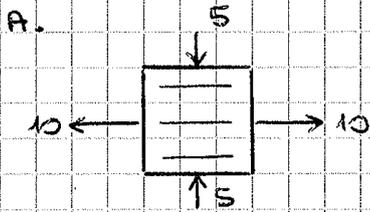


la deformata deve essere per forza simmetrica

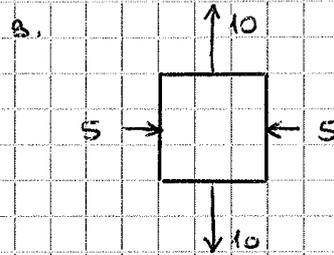
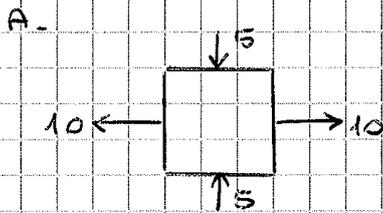
sistemi energeticamente ortogonali

$$F_a \cdot 0 = m \cdot 0 \quad \text{in C la rotazione è nulla}$$

$$\hookrightarrow \text{in C lo spostamento è nullo}$$



$\Phi(A) \neq \Phi(B)$ se il materiale è anisotropo



$\Phi(A) = \Phi(B)$ se il materiale è isotropo

d'energia elastica non dipende dal sistema di riferimento

$$\Phi = C_1 J_I^2 + C_2 J_{II}$$

→ costanti caratteristiche del materiale

$$J_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$J_{II} = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_x \sigma_z - \sigma_y \sigma_z$$

legge costitutiva elastica, lineare, isotropa

$$\Phi(\{\epsilon\})$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [H] \{\epsilon\} = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T \{\sigma\}$$

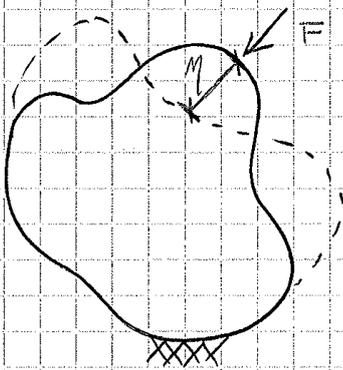
$$\{\sigma\} = [H] \{\epsilon\}$$

Alte
pulsar!
☺

$$\{\epsilon\} = [H]^{-1} \{\sigma\}$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & \frac{1}{E} & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$$

il legame tra tensioni e deformazioni è costituito da due parametri



F e M non possono essere discordi

$$L_{def} = \int_V \phi dv = \frac{1}{2} F M > 0$$

$$\phi > 0$$

[H] è definita positiva
↳ [H]⁻¹

$$\phi = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [H]^{-1} \{\sigma\} = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [H] \{\epsilon\}$$

una forma quadratica è sempre positiva se la matrice associata [H] definita positiva → i determinanti dei minori principali devono essere positivi

$$E > 0 \quad \frac{1}{E^2} - \frac{\nu^2}{E^2} > 0 \Rightarrow 1 - \nu^2 > 0 \Rightarrow -1 < \nu < 1$$

$$\frac{1}{E^2} (1 - 3\nu^2 - 2\nu^3) > 0$$

$$\hookrightarrow (1 - 2\nu)(1 + \nu)^2 > 0 \Rightarrow \nu < \frac{1}{2}$$

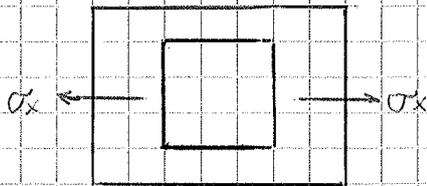
$$\Rightarrow -1 < \nu < \frac{1}{2}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} > 0$$

↳ modulo elastico tangenziale

anche lo stato non sollecitato deve rappresentare un minimo assoluto

$-1 < \nu < 0$?



$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$

$\epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$

G = rigidità del
solido oppone agli
scorrimenti angolari

$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$

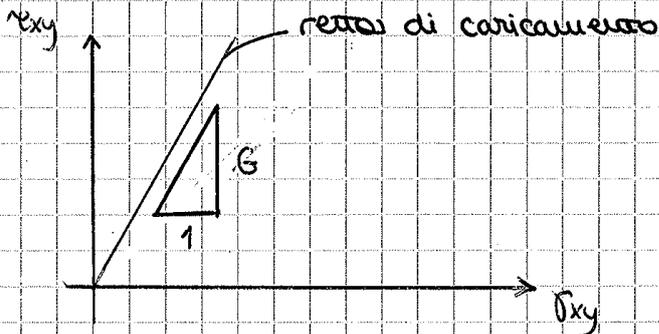
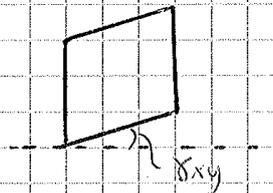
$\gamma_{xy} \neq 0 \rightarrow \tau_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{G}$

$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$



non si dilata \rightarrow scorrimento angolare

le dimensioni sono unitarie



$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$

G = modulo di elasticità tangenziale

$\tau_{xy} = 0 \Leftrightarrow \gamma_{xy} = 0$

corpo linearmente elastico e isotropo:

le direzioni principali del tensore degli sforzi coincidono con le
direzioni principali del tensore delle deformazioni

\rightarrow se E, G, ν sono costanti su tutto il corpo il materiale è
detto omogeneo

\rightarrow

E	ν
-----	-------

acciaio 210000 N/mm² 0,3

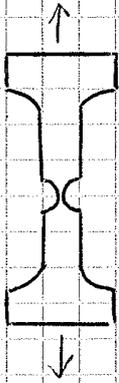
CLS 30000 N/mm² 0,15

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

\hookrightarrow calcestruzzo

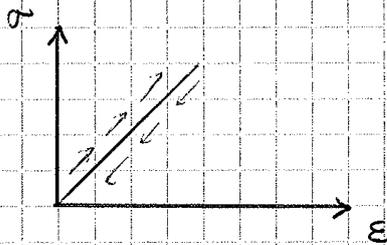
il materiale plastico restituisce un po' di energia → rimane una deformazione residua ϵ_p

il materiale duttile scarica l'energia sul volume e deformazioni rimangono plastiche



materiale duttile (acciaio dolce)

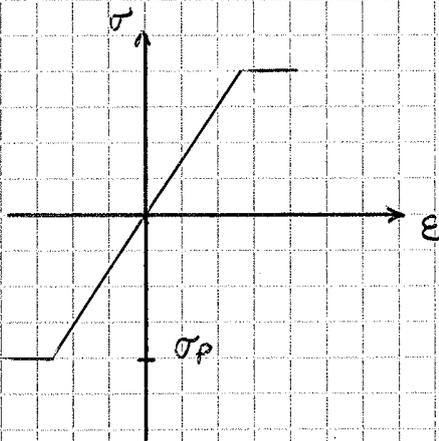
Materiale fragile



rottura improvvisa

dissipazione superficiale

CRITERI DI RESISTENZA



vogliamo che la nostra struttura lavori in ambito elastico-lineare

UNIASSIALE

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_1 \neq 0$$

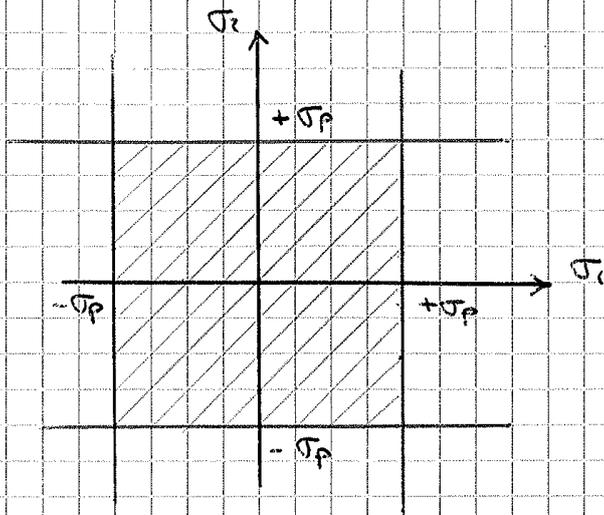
$$|\sigma_1| < \sigma_p$$

stato tensionale piano $\sigma_3 = 0$

$\sigma_{eq} < \sigma_p$

$|\sigma_1| < \sigma_p$

$|\sigma_2| < \sigma_p$

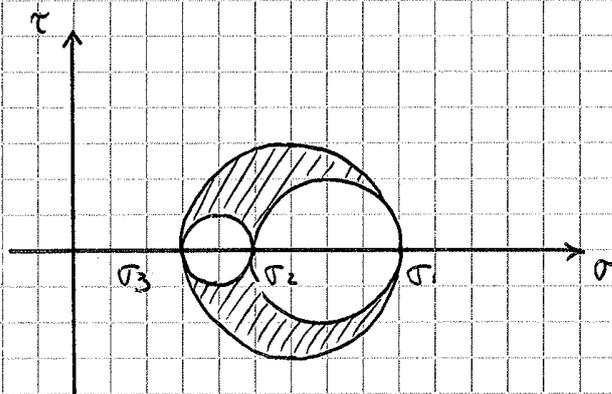


Evidenza sperimentale: la sovrapposizione idrostatica non ha influenza sullo snervamento del materiale

o Criterio di Tresca o delle massime tensioni tangenziali

limite per τ

$\tau_{max} < \tau_p$



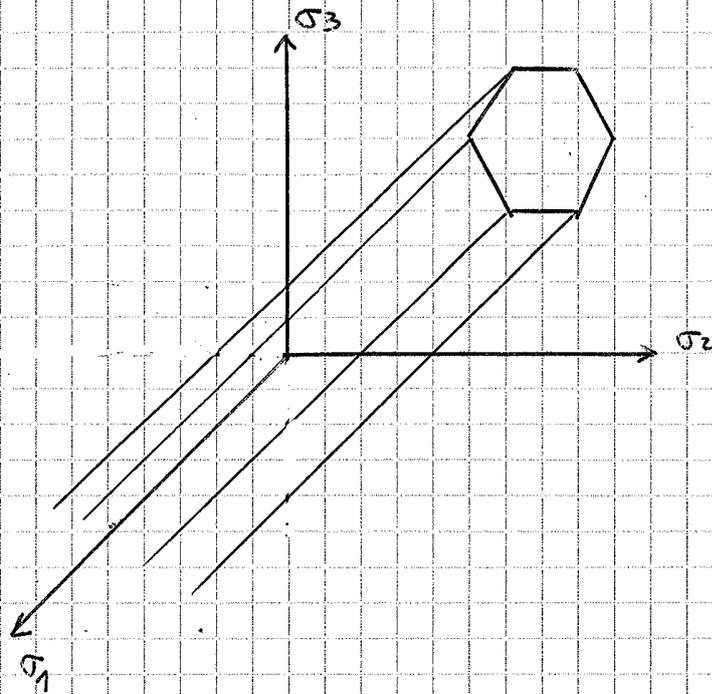
$\tau_{max} = \frac{1}{2} \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \}$

se $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

$\tau_{max} = \frac{|\sigma_1|}{2} < \tau_p$ } $\tau_p = \frac{\sigma_p}{2}$

tensione tangenziale di snervamento

Il criterio di Tresca considera le tensioni tangenziali responsabili dello snervamento che subisce il materiale quando è soggetto a uno stato tensionale triassiale



• Criterio di resistenza energetico

Criterio di Beltrami

$$\phi < \phi_p$$

• Criterio di Von Mises o della massima energia di distorsione

$[\sigma] = [\sigma^i] + [\sigma^d]$ scompone in una componente idrostatica e una deviatorica

$$[\sigma^i] = \begin{pmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

$$[\sigma^d] = \begin{pmatrix} \sigma_x - \bar{\sigma} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \bar{\sigma} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \bar{\sigma} \end{pmatrix}$$

$\phi^d < \phi_p^d$ potenziale di riferimento

Il Criterio di Von Mises considera responsabile della crisi puntuale del materiale l'energia di deformazione relativa al tensore deviatorico