NUMERO: 1314 ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Canobbio

MATERIA: Analisi Matematica II, Prof.Bacciotti.

1 Ottobre 2013

LEZIONE (1)

RIPASSO

$\mathbb{R}^n$

~~sottoinsieme~~ spazio vettoriale n dimensionale
spazio formato da n-uple dove $x_1, x_2 \dots x_n$ sono numeri reali

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{vettore}$$

$$x_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Distanza di un punto dall'origine → NORMA EUCLIDEA

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

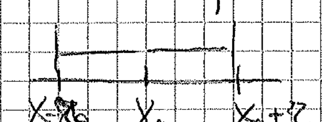
$x_0,\ r > 0$ se $\|x - x_0\| < r$ → cerchio in 2 dimensioni
→ sfera in 3 dimensioni

$B(r, x_0) = \{x : \|x - x_0\| < r\}$ sfera di raggio r e centro x_0

In una dimensione indica un INTERVALLO

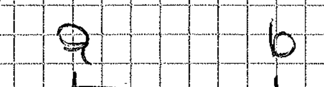
$$B(r x_0) = \{x : \|x - x_0\| < r\}$$

↳ INTORNO



$A \subset \mathbb{R}^n$ $\quad A \neq \emptyset$

$x_0 \in A$



$n = 1$

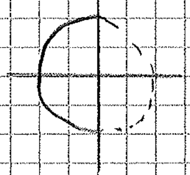
$$a \le x \le b$$

$A \subset \mathbb{R}^n$

- A è <u>APERTO</u> se $\boxed{A = \mathring{A}}$, i punti di frontiera non appartengono ad A, coincide con l'interno.
- A è <u>CHIUSO</u> se $\boxed{A = \bar{A}}$, i punti di frontiera appartengono ad A, coincide con la chiusura.

⤳ Nell'insieme aperto, per ogni piccolo incremento si rimane sempre all'interno di esso

* A è <u>aperto</u> se e solo se (sse) A^c è <u>chiuso</u>
↳ $A \neq \emptyset$



né aperto
né chiuso

⤳ se $A = \emptyset \Rightarrow A^c = \mathbb{R}^n$ <u>aperto</u>
$\Rightarrow$ A è chiuso

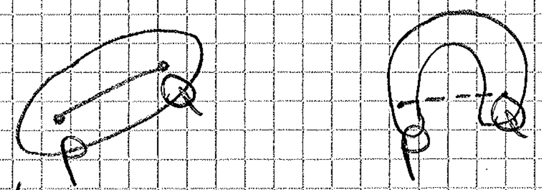
$\text{Int} A \subset A$ se voglio che questa proprietà sia valida
↳ $\text{Int} A = A$ A viene definito aperto

→ l'insieme vuoto e l'intero spazio devono essere considerati sia chiusi che aperti al tempo stesso
- Non ci sono altri insiemi che possono essere considerati tali
- $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ sono gli unici sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ che sono al tempo stesso sia aperti che chiusi

$A \subset \mathbb{R}^n \quad A \neq \emptyset$

⇝ **COMPATTO** se è LIMITATO e CHIUSO

⇝ **CONVESSO** se $P, Q \in A$ il segmento I che unisce P e Q è contenuto in A



↳ **CONVESSO**

Teoria di Integrazione in più variabili

• **Integrale definito**

(concetto di area)

Problema calcolo delle aree → Problema più generale calcolo integrale

↕

calcolo differenziale

Geometria elementare → non permette il calcolo di tutte le aree

↳ aree di rettangoli (e varie scomposizioni)

TERMINOLOGIA

$\mathbb{R}^2$

A → insieme

A → figura piana

↳ ha un'estensione

↳ la sua misura è l'**AREA**

- Ho una successione di rettangoli uno contenuto dentro l'altro

$$A \subset \dots \subset R_n \subset \dots \subset R_2 \subset R_1 \subset R_0$$

- posso associare una successione di numeri (misure)
  → decrescente, inferiormente limitata (numeri ≥ 0)
  → convergente

$$0 \leq m(A) \dots m(R_n) \leq m(R_2) \leq m(R_1) \leq m(R_0)$$

- Prendo un punto di A e costruisco rettangoli all'interno di A
  → plurirettangoli

$$S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset A$$

$$m(S_0) \leq m(S_1) \leq m(S_2) \leq \dots \leq m(S_n) \leq m(A) \leq m(R_0)$$

- successioni di numeri, crescente, superiormente limitata → convergente

$$m(S_n) \leq m(R_n)$$

CONVERGE → tende a un limite

CONVERGE → tende a un limite

$$l_1 \leq l_2$$

→ per il teorema del confronto

$$\lim_n m(S_n) = l_1 \leq l_2 = \lim_n m(R_n)$$

DEFINIZIONE

- A si dice MISURABILE se è possibile costruire le due successioni $\{S_n\}$ e $\{R_n\}$ in modo che $l_1 = l_2$

In tal caso, scriverò

$$m(A) = l_1 = l_2$$

→ area di A

$$T_{\varphi,I} = \{(x,y) : a \le x \le b,\ 0 \le y \le \varphi(x)\}$$

⇝ se questo insieme risulta misurabile allora dirò che φ è integrabile nel senso di Riemann e

$$m(T_{\varphi,I}) = \int_I \varphi(x)\,dx$$

- caso $\varphi(x) \le 0$

  posso definire $g(x) = -\varphi(x) \ge 0$ e posso tornare al caso precedente

$$\int_I \varphi(x)\,dx = -\int_I -\varphi(x)\,dx$$

- caso arbitrario

scompongo la funzione in 2 parti

Definisco:

$$\varphi^+(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } \varphi(x) \ge 0 \\ 0 & \text{se } \varphi(x) < 0 \end{cases}$$

$$\varphi^-(x) = \begin{cases} -\varphi(x) & \text{se } \varphi(x) \le 0 \\ 0 & \text{se } \varphi(x) > 0 \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \varphi^+(x) - \varphi^-(x)$$

$$|\varphi(x)| = \varphi^+(x) + \varphi^-(x)$$

- $f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_I f(x)\,dx \geq \int_I g(x)\,dx$

~~$\forall x \in I$~~

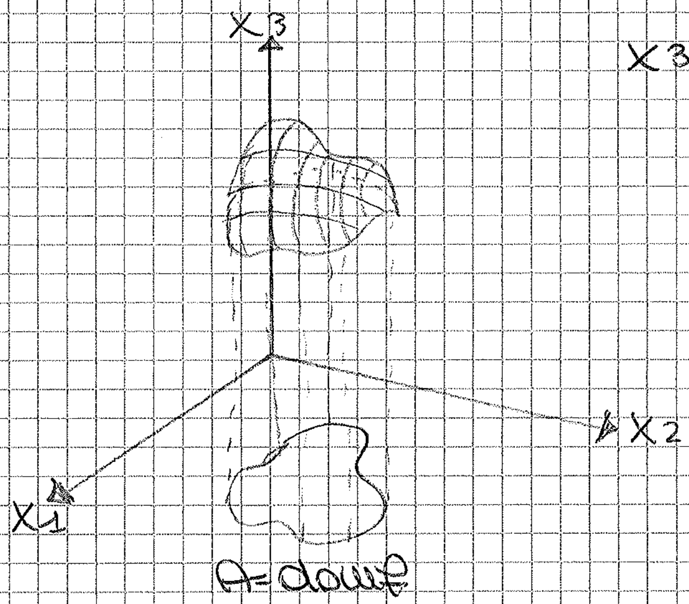
- additività rispetto al dominio

$\forall x \in I \quad a, b, c$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Integrale definito di funzione di due variabili (integrali doppi)

$x_3 = f(x_1, x_2)$



graf f: $\{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in A \quad x_3 = f(x_1, x_2)\}$

$m(S_0) \leq m(S_1) \leq m(S_2) \leq \dots \leq m(S_n) \leq$

↳ monotona crescente, convergente a ℓ_2

⇝ A misurabile in $\mathbb{R}^3$ se esistono successioni di plurirettangoli parallelepipedi $\{S_n\}$, $\{R_n\}$ e

$$\lim_n m(S_n) = \lim_n m(R_n) = m(A)$$

↳ volume

DEFINIZIONE DELL'INTEGRALE DOPPIO

↳ definiti nel senso di Riemann)

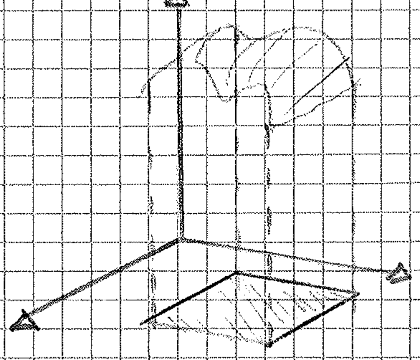
$x_3 = f(x_1, x_2)$

con $\text{Dom} f = \underbrace{[a,b]}_{I} \times \underbrace{[c,d]}_{J}$

↳ rettangolo

∘ caso $f(x_1, x_2) \geq 0$

$$T_{f, I\times J} = \{(x_1, x_2, x_3) ; \ a \leq x_1 \leq b, \ c \leq x_2 \leq d, \ 0 \leq x_3 \leq f(x_1, x_2)\}$$



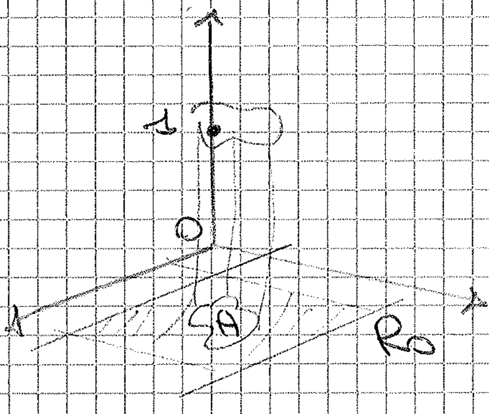
⇝ f è integrabile nel senso di Riemann se $T_{f, I\times J}$ è misurabile e

$$\int_{I\times J} f(x_1 x_2) \, dx_1 dx_2 = m(T_{f, I\times J})$$

$$\varphi_A(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_1,x_2) \in A \\ 0 & \text{se } (x_1,x_2) \in R_0 \setminus A \end{cases}$$

$\rightarrow$ funzione indicatrice

indicatrice di A



Teorema

- $\varphi_A(x_1,x_2)$ è integrabile su R_0 se e solo se A è misurabile in $\mathbb{R}^2$

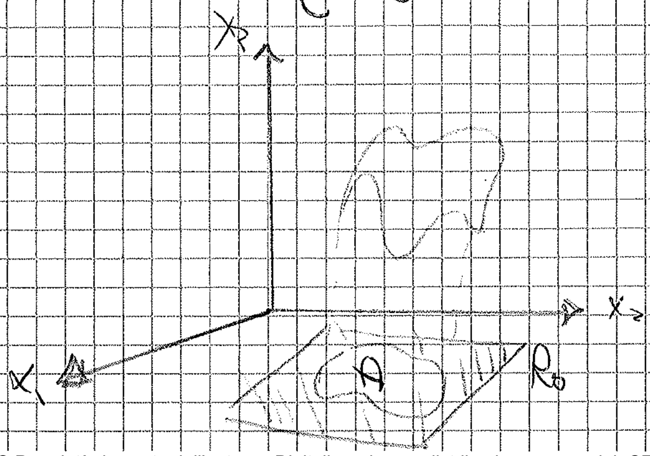
$$\int_{R_0} \varphi_A(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = m(A)$$
(area)

$x_3 = \varphi(x_1,x_2) : A \rightarrow \mathbb{R}$

A misurabile in $\mathbb{R}^2$

se R_0 è un rettangolo tale che $A \subset R_0$

$$\tilde{\varphi}(x_1,x_2) = \begin{cases} \varphi(x_1,x_2) & \text{se } (x_1,x_2) \in A \\ 0 & \text{se } (x_1,x_2) \in R_0 \setminus A \end{cases}$$



- additività rispetto al dominio

A, B misurabili
→ se $m(A \cap B) = 0$

$$\int_{A \cup B} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_A f(x_1 x_2)\, dx_1 dx_2 + \int_B f(x_1 x_2)\, dx_1 dx_2$$

Calcolo degli Integrali Doppi

- caso particolare $A = R$
  → rettangolo

$x_3 = f(x_1, x_2)$ continua
$R = [a, b] \times [c, d]$

I^ fase

→ tengo fissa x_1

$$F(x_1) = \int_c^d f(x_1, x_2)\, dx_2$$

Teorema $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua

II^ fase

$$k = \int_a^b F(x_1)\, dx_1$$

Teorema Integrali Iterati

→ il numero k ottenuto è uguale a

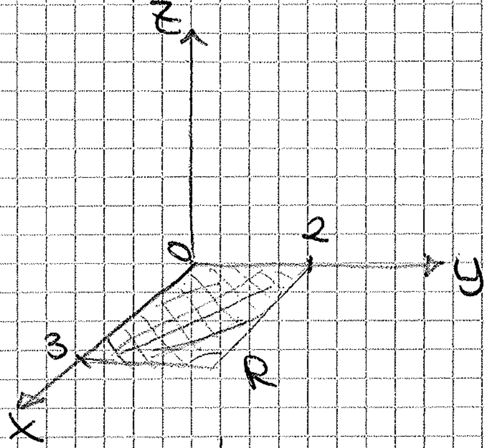
$$\iint_R f(x_1, x_2)\, dx_1, dx_2$$

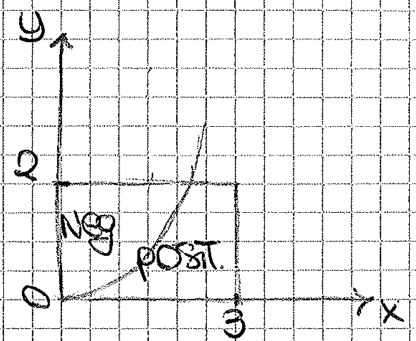
ESERCIZI

1.

$$z = \varphi(x,y) = x^2 - 4y$$

$$R = [0,3] \times [0,2]$$





$$\int_R \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_0^3 \left(\int_0^2 (x^2 - 4y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^3 \left(x^2 y - 2y^2 \right)_0^2 dx = \int_0^3 (2x^2 - 8)\,dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - 8x \right)_0^3 =$$

$$= 18 - 24 = -6$$

↳ bilancio del volume delimitato dal rettangolo del dominio

Nell'altro ordine:

$$\int_0^2 \left(\int_0^3 (x^2 - 4y)\,dx \right) dy = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} - 4xy \right)_0^3 dy =$$

$$= \int_0^2 (9 - 12y)\,dy = 9y - 6y^2 \Big|_0^2 = 18 - 24 = -6$$

3) $R = [a,b] \times [c,d]$

es: $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

se $z = \varphi(x,y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

le formule di riduzione si semplificano

$$\iint_R \varphi(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d (\varphi(x) \cdot \varphi(y))\,dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b \varphi(x) \cdot \left(\int_c^d \varphi(y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b \varphi(x)\,dx \cdot \int_c^d \varphi(y)\,dy$$

SE POSSO FATTORIZZARE LA FUNZIONE POSSO FATTORIZZARE L'INTEGRALE → PRODOTTO DI DUE INTEGRALI

$$A=\{(x,y): a\le x\le b,\ \gamma(x)\le y\le \delta(x)\}$$

TEOREMA

se $\varphi(x,y)$ è continua e integro rispetto a y ottengo

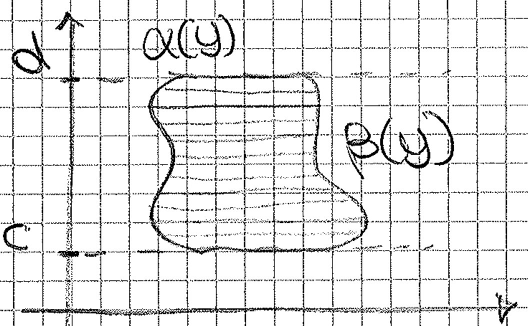
$$F(x)=\int_{\gamma(x)}^{\delta(x)}\varphi(x,y)\,dy$$

allora $F(x)$ è continua e ha senso integrare.

$$\int_a^b\left(\int_{\gamma(x)}^{\delta(x)}\varphi(x,y)\,dy\right)dx=\iint_A\varphi(x,y)\,dx\,dy$$

↳ formula di riduzione più generale

ORIZZONTALMENTE CONVESSO



$\alpha(y), \beta(y)$ CONTINUE

$\forall y\in[c,d]$

$\boxed{\alpha(y)\le\beta(y)}$

$$A=\{(x,y): c\le y\le d,\ \alpha(y)\le x\le\beta(y)\}$$

$$\iint_A\varphi(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d\left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}\varphi(x,y)\,dx\right)dy$$

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{3}{2}\left(1-2x^2+x^4\right)+e^x-x^2e^x\right]dx =$$

$$=\left(\frac{3}{2}x-x^3+\frac{3}{10}x^5+e^x\right)\Bigg|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}x^2e^x\,dx =$$

$$\boxed{\begin{aligned}\int_{-1}^{1}x^2e^x\,dx &= x^2e^x-\int 2xe^x\,dx = \\ &= x^2e^x-2\left[xe^x-e^x\right]\end{aligned}}$$

$$\left(\frac{3}{2}x-x^3+\frac{3}{10}x^5+e^x-x^2e^x+2xe^x-2e^x\right)\Bigg|_{-1}^{1}=$$

$$\left(\frac{3}{2}-1+\frac{3}{10}+\cancel{e}-\cancel{e}+\cancel{2e}-\cancel{2e}\right)-$$

$$-\left(-\frac{3}{2}+1-\frac{3}{10}+\cancel{e^{-1}}-\cancel{e^{-1}}-2e^{-1}-2e^{-1}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{10}-1+\frac{3}{2}+\frac{3}{10}-1+4e^{-1}=3-2+\frac{3}{5}+4e^{-1}=\frac{5+3}{5}+\frac{4}{e}=\frac{8}{5}+\frac{4}{e}$$

- se la funzione è pari

$$\varphi(x,y) = \varphi(-x,y)$$

$$B_1 = B \cap \{x \geq 0\}$$

$$\int_B \varphi(x,y)\,dx\,dy = 2\int_{B_1} \varphi(x,y)\,dx\,dy$$

Basta integrare su metà dominio e moltiplicare per 2

- B vert. convesso

vale per funz. dispari/pari rispetto a y

CAMBIAMENTI DI COORDINATE

- formule di sostituzione per integrali semplici

$$\int_a^b f(x)\,dx = \qquad x = \varphi(t)$$

$\hookrightarrow$ continua e derivabile

$$\varphi(t) : [c,d] \rightarrow [a,b]$$

$$= \int_c^d f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

viene modificata la x, ma i valori della funzione restano invariati

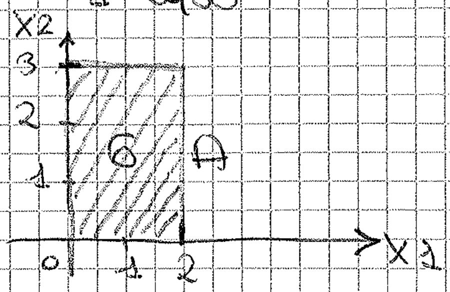
$\downarrow$

l'area dei plurirettangoli

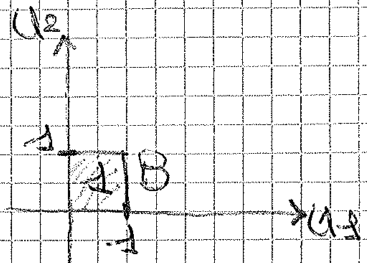
$\varphi'(t)$ compensa la deformazione degli intervalli

→ GIUSTIFICAZIONE DELLA FORMULA

∘ I° CASO



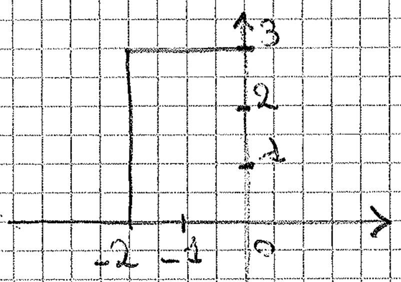
$$T:\begin{cases} x_1 = 2u_1 \\ x_2 = 3u_2 \end{cases} \qquad T^{-1}:\begin{cases} u_1 = \dfrac{x_1}{2} \\ u_2 = \dfrac{x_2}{3} \end{cases}$$



$$JT = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \det(JT) = 6$$

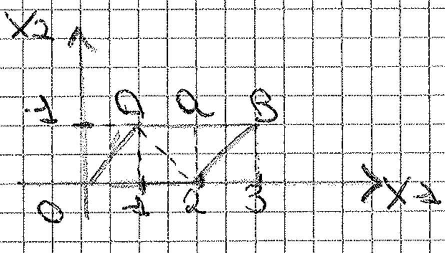
$$\downarrow$$

$$6B = A$$



il det. viene −6, ma prendo il valore assoluto, quindi il valore dell'area rimane invariato

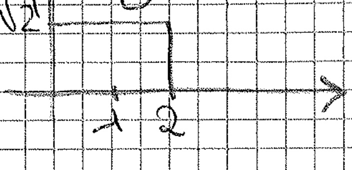
∘ II° CASO



$m(A) = 2$

per "raddrizzare"

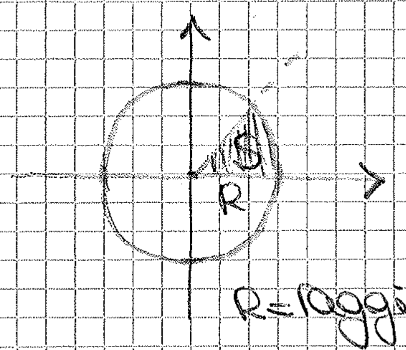
$$T^{-1}:\begin{cases} u_1 = x_1 - x_2 \\ u_2 = \sqrt{2}\,x_2 \end{cases} \qquad T:\begin{cases} x_1 = u_1 + \dfrac{u_2}{\sqrt{2}} \\ x_2 = \dfrac{u_2}{\sqrt{2}} \end{cases}$$



$m(B) = 2\sqrt{2}$

• PASSAGGIO A COORDINATE POLARI

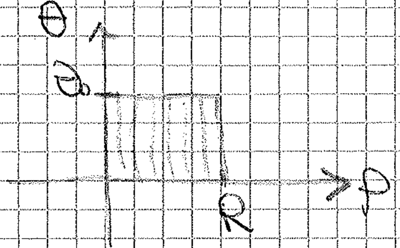
$$T: \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$



$0 < \rho \leq R$

$0 \leq \theta \leq \theta_0$

R = raggio



$$JT = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho$$

• COORDINATE ELLITTICHE

$$T: \begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases} \qquad \det JT = ab\rho$$

INTEGRALI TRIPLI

$x_4 = f(x_1, x_2, x_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

↳ dominio

con grafico $\mathbb{R}^4$

Trapezoide associato:

$T_f : \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : 0 \leq (x_4) \leq f(x_1, x_2, x_3)\}$

↳ IPER-RETTANGOLI   prodotto di 4 intervalli

$\vec{R} = [a_1 b_1] \times [a_2 b_2] \times [a_3 b_3] \times [a_4 b_4]$

15 Ottobre 2013

FORMULE DI RIDUZIONE PER INTEGRALI TRIPLI

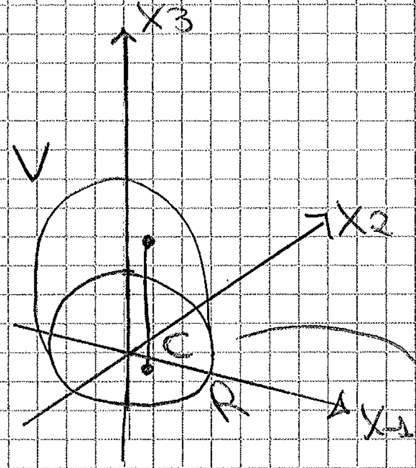
- Ricondurlo a 3 integrali semplici da calcolare in sequenza

2 metodi:

- Integrazione per fili
- Integrazione per strati

METODO PER FILI

Es: calcolare volume di una sfera



$x_1^2+x_2^2+x_3^2=R^2$

$x_3^2=R^2-x_1^2-x_2^2$

$x_3=\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2}$

integro rispetto al punto e poi devo farlo per tutto il dominio C.

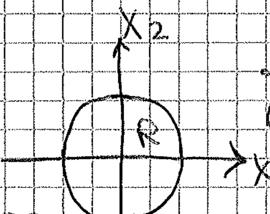
si fissa 1 punto nel piano $x_1 x_2$

$$\iiint_V 1\, dx_1\, dx_2\, dx_3 =$$

$$\iint_C \left(\int_0^{\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2}} 1 \, dx_3\right) dx_1\, dx_2 =$$

$$\iint_C \sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2} =$$

Passo alle coordinate polari



$\begin{cases} x_1=\rho\cos\theta \\ x_2=\rho\sin\theta \end{cases}$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\, d\rho\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{3}\left(R^2-\rho^2\right)^{3/2}\Big|_0^R\right)d\theta =$$

- In generale:

$$\iiint_V f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 =$$

2 metodi:

① $$\iint_D \left(\int_a^b f(x_1, x_2, x_3)\, dx_3 \right) dx_1\, dx_2$$

- Integrale semplice all'interno

② $$\int_a^b \left(\iint_{D_{x_3}} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2 \right) dx_3$$

- Integrale semplice all'esterno

- Si ottiene lo stesso risultato se lo si può calcolare sia per fili che per strati.

CAMBIAMENTI DI COORDINATE

Lineari, affini

$u = Px$ $\qquad$ $u = Px_0 + q$ $\qquad$ ⤳ vettori

Coordinate cilindriche

$\underbrace{x_1, x_2}_{\downarrow}, x_3$

COORDINATE POLARI

- Si fissa un piano e per le 2 variabili si utilizzano le coordinate polari

- In generale:

$$\iiint_V \varphi(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(u_1, u_2, u_3) \\ x_2 = \varphi_2(u_1, u_2, u_3) \\ x_3 = \varphi_3(u_1, u_2, u_3) \end{cases}$$

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
invertibile
C^1 e con inversa C_1

$T: V' \to V$

$$\iiint_{V'} \varphi(\varphi_1(u_1, u_2, u_3), \varphi_2, \dots) \, |\det(J_T)| \, du_1\, du_2\, du_3$$

- Se fisso la funzione a 1 con l'integrale triplo calcolo il volume

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 1$$

Solido di Rotazione

- Teorema che vale sempre e permette la riduzione

Geometria delle masse

- Baricentro, centro di massa
  ↳ media di come sono distribuite le masse

- Momenti di inerzia
  ↳ resistenza del corpo a entrare in rotazione

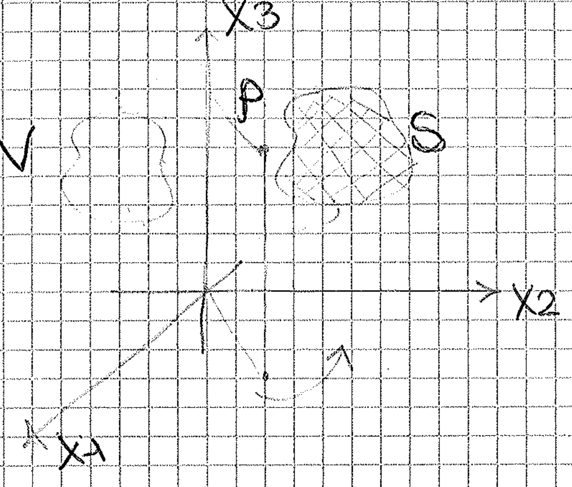
Se A è un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^3$ (x_1, x_2, x_3) supponendo "massa" uniforme e di densità unitaria il BARICENTRO è il punto di coordinate (g_1, g_2, g_3)

18 ottobre 2013

Solidi di Rotazione

Ripasso

piano → sezione meridiana della figura



x_3 = asse di rotazione

piano $x_2 x_3$

$x_2 \geq 0$

ρ = distanza di un punto generico dalla figura S → ρ rimane invariata

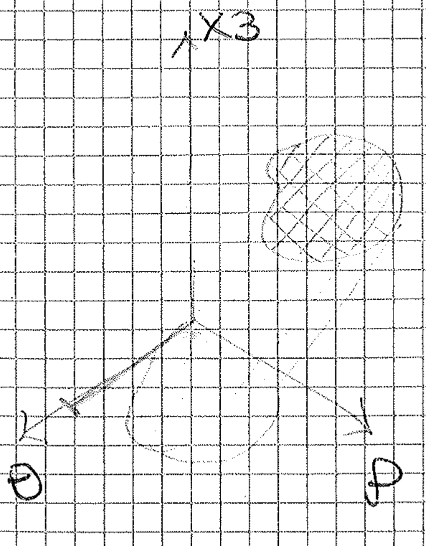
$$\iiint_V dx_1\, dx_2\, dx_3 = 2\pi \iint_S x_2\, dx_2\, dx_3$$

DIMOSTRAZIONE:

- passaggio a coordinate cilindriche

$$= \iiint_{V'} \rho\, d\rho\, d\theta\, dx_3$$

$$V' = \left\{ (\theta, \rho, x_3) : 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ (\rho, x_3) \in S \right\}$$



cilindro con direttrice // a θ

integro per fili

INTEGRALI CURVILINEI

↳ (generalizzazione dell'integrale orientato)

↓ DUE TIPI:

→ integrali curvilinei di campi scalari

→ integrali " di linea di campi vettoriali

RICHIAMI

CONCETTO DI CURVA

• 2 modi distinti di rappresentare una curva

$x^2+y^2=1$ $\qquad \begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]$

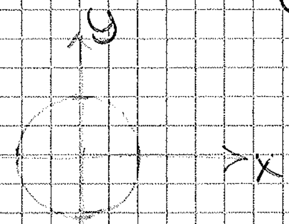
↓

① FORMA CARTESIANA O IMPLICITA

② RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA

↓ dà maggiori informazioni rispetto a ①

↓ ES: t = tempo → so la posizione rispetto al tempo e al tipo di moto



CURVA PARAMETRICA IN $\mathbb{R}^n$

$\gamma(t): I\subset\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^n$

↳ aperto

assegnare una curva = assegnare un vettore

$$\gamma(t)=\begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \gamma_2(t)\\ \vdots\\ \gamma_n(t)\end{pmatrix}$$

$x_1=\gamma_1(t)$

$x_2=\gamma_2(t)$

$\vdots$

$x_n=\gamma_n(t)$

SENSO DI PERCORRENZA INDOTTO DALL'IMMAGINE

↓

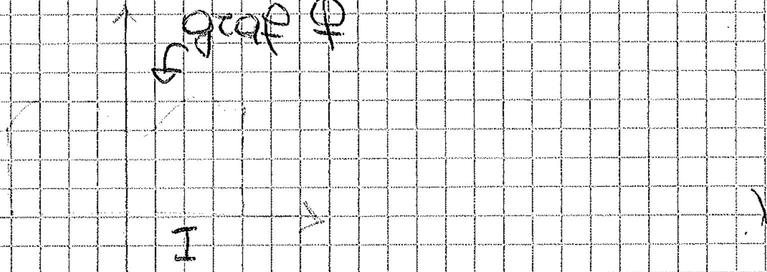
SOSTEGNO

DEF: una curva $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ si dice REGOLARE se:

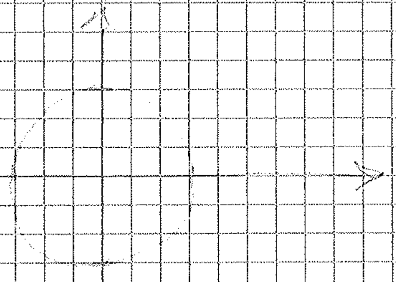
① γ è di classe C^1

② $\gamma'(t)\neq 0 \quad \forall t\in[a,b]$

$\varphi: I\to\mathbb{R}$ $\quad I\subset\mathbb{R}$ intervallo



$$\begin{cases} x=t \\ y=\varphi(t) \end{cases} \quad t\in I$$



$$* \begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]$$

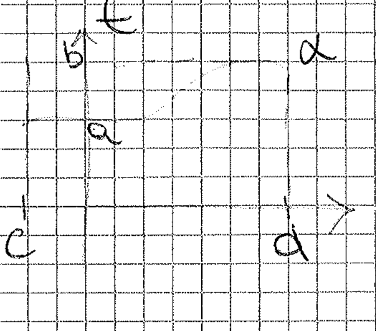
$$\begin{cases} x=\sin t \\ y=\cos t \end{cases}$$

$$* \begin{cases} x=\cos(2t) \\ y=\sin(2t) \end{cases} \quad t\in[0,\pi]$$

* uguale curva
↳ forma geometrica del sostegno

DEF: RAPPRESENTAZIONI PARAMETRICHE EQUIVALENTI

$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ $\qquad t \to$ parametro



$t=\alpha(\tau)$

$\gamma(\alpha(\tau)) = (\gamma\circ\alpha)(\tau)$

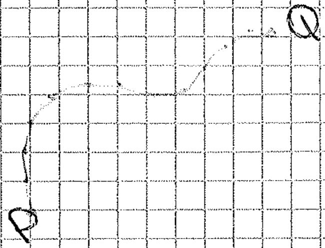
$\delta(\tau) = [c,d]\to\mathbb{R}^n$

Lunghezza di una curva

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

regolare e semplice

$\|P-Q\| = $ lungh.



divido punto per punto e approssimo con una linea spezzata

derivata = velocità

$\downarrow$

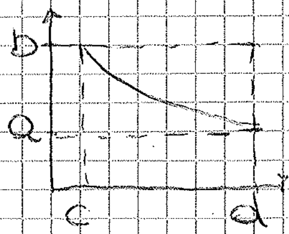
velocità · tempo = spazio percorso

<u>DEF:</u> Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ curva regolare e semplice si dice LUNGHEZZA DELLA CURVA (ℓ_γ)

$$\ell_\gamma = \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2} = \|\gamma'(t)\|$$

$$\ell_\gamma = \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2}\, dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$$

→ caso $x'(y) < 0$



$x(c) = b$
$x(d) = a$

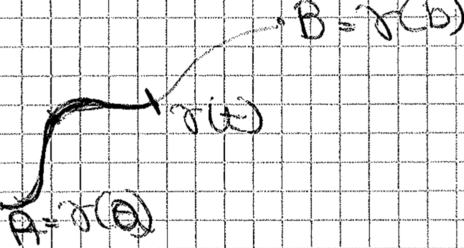
$$-\int_b^a \sqrt{\ldots}$$

$$= \int_a^b \sqrt{\ldots} = l_\gamma$$

→ il meno porta al capovolgimento dell'ordine delle variabili di integrazione

$\gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{(\gamma_1'(\theta))^2 + \ldots + (\gamma_n'(\theta))^2}\, d\theta$$



$s(a) = 0$

$s(b) = l_\gamma$

$\sigma = s(t) : [a,b] \to [0, l_\gamma]$ CRESCENTE

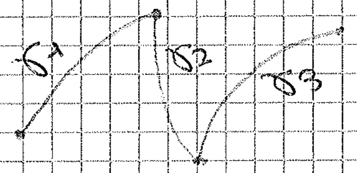
$s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$ funz. strettamente crescente

→ PARAMETRO INTRINSECO o PARAMETRO DI ARCO
↳ definito dalla curva

$\cancel{\ldots} = (\gamma \circ s^{-1})(\sigma) = \varphi(\sigma)$

Curve regolari a tratti

γ continuità, vi sono un numero finito di punti dove non c'è la derivata

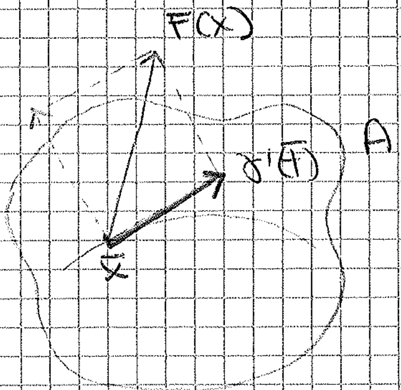


Integro su ciascun tratto e poi sommo i contributi
↓
additività rispetto al dominio di integrazione

INTEGRALE DI LINEA DI UN CAMPO VETTORIALE
II° TIPO

$F: A \longrightarrow \mathbb{R}^n$
↓
aperto di $\mathbb{R}^n$

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$



$\bar{x} = \gamma(\bar{t})$

$$F(\bar{x}) \cdot \frac{\gamma'(\bar{t})}{\|\gamma'(\bar{t})\|} =$$

↳ voglio un versore, così ottengo la componente tangente della $F(x)$

$$F(x) \cdot \mathbf{t}(\bar{t}) = F(\gamma(\bar{t})) \cdot \mathbf{t}(\bar{t})$$

$\bar{x} = \gamma(\bar{t})$

↓
funzione che dipende da t
↓
CAMPO SCALARE
↳ posso integrare

25 Ottobre 2013

$z = \varphi(x,y)$ $\qquad \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)$

$: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)$

$$\operatorname{grad} \varphi(x,y) = \underset{\text{NABLA}}{\nabla} \varphi(x,y) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$$

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F: \begin{pmatrix} \varphi_1(x,y) \\ \varphi_2(x,y) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{JACOBIANA}$$

$$\underset{\text{vettore di operatori}}{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \underset{\text{scalare}}{\varphi}$$ operatore differenziale con proprietà di un vettore

si può estendere a $\mathbb{R}^n$, l'importante è che la funzione sia scalare.

La Jacobiana si applica a campi vettoriali ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)

se $\text{rot} F = 0$ F si dice IRROTAZIONALE

Rotore è un vettore di $\mathbb{R}^3$

Posso parlare di rotore anche in $\mathbb{R}^2$ aggiungendo una 3ª funzione posta uguale a zero

$$F: \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1, x_2) \\ \varphi_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$ ultima componente $= 0$

Rotore ⇝ prime 2 componenti $= 0$, $3 \neq 0$

- DIVERGENZA

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$ genera un campo scalare

$$\text{div} F = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}$$

Derivate parziali di ogni funzione rispetto alla variabile con stesso indice

⇝ si riferisce alla densità, il livello di compressione delle particelle di un fluido

$\text{div} F = 0$ fluido scorre normalmente
F si dice INCOMPRESSIVA

$$\text{div} F = \underbrace{\nabla \cdot F}_{\text{prodotto scalare}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 164

DEF:

Sia $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ CONTINUA

dom $f = A$, aperto

$$F = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

UN campo scalare

$g: A \to \mathbb{R}$ di classe C^1 si dice un POTENZIALE di F su A se:

$$F(x_1, \dots, x_n) = \text{grad}\, g(x_1, \dots, x_n) \quad \forall (x_1, \dots x_n) \in A$$

ES:

- $F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\quad g(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2}$

  $\to$ ammette potenziale $\qquad \to$ è un POTENZIALE di F

- $F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ $\quad g(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$

  $\to$ è un potenziale

- $F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

  se un potenziale c'è deve essere di questa forma:

  $$g(x_1, x_2) = -x_1 x_2 + \varphi(x_2) \to ?$$

  $$\frac{\partial g}{\partial x_2} = -x_1 + \varphi'(x_2) = x_1$$

  $$\varphi'(x_2) = 2x_2$$

  campo che NON ammette potenziale

  non sono il gradiente di niente

29 Ottobre 2013

TEOREMA

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad F(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}$

$\text{dom} F = A$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

CONTINUO

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \text{dom}\, g = A$

POTENZIALE DI F se

$g \in C^1(A)$ e $\nabla g(x) = F(x) \quad \forall x \in A$

se $\exists\, g$ potenziale di F, allora F si dice CAMPO CONSERVATIVO

Se $F \in C^1(A)$ e se è conservativo, allora

$$\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x_i} \quad \forall i,j \;\; i \neq j \quad \forall x \in A$$

CONDIZIONE NECESSARIA

$n=2 \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \qquad n=3 \quad \text{rot}\, F = 0$

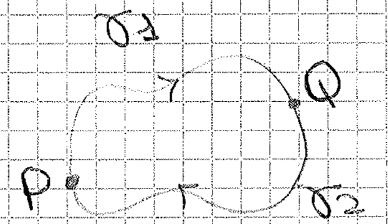
è IRROTAZIONALE

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$g(\gamma(t)): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione composta

Proprietà di indipendenza dal cammino
Dipende solo dal punto di partenza e di arrivo, non dal cammino percorso

Se γ è CHIUSA e F è CONSERVATIVO, se spezzo in due la curva scegliendo un punto intermedio della curva



$\gamma_1: [P,Q] \quad \gamma_2 [Q,P] \qquad -\gamma_2 [P,Q] \to -\gamma_2 = \gamma_1$

$$\int_{\gamma_1} F \cdot \mathbf{t} = \int_{-\gamma_2} F \cdot \mathbf{t} = -\int_{\gamma_2} F \cdot \mathbf{t}$$

$$\int_{\gamma_1} F \cdot \mathbf{t} + \int_{\gamma_2} F \cdot \mathbf{t} = 0$$

per additività del dominio
γ_1 e γ_2 sono 2 pezzi di una curva

$\downarrow$

$$\int_{\gamma} F \cdot \mathbf{t} = 0$$

Se F gode della proprietà seguente: $\int_\gamma F \cdot \mathbf{t} = 0$ $\forall \gamma$ CHIUSA GIACENTE IN A, allora vale la proprietà di indipendenza dal cammino

$\oint F \cdot \mathbf{t}$ <u>CIRCUITAZIONE</u> = integrale di linea di F nel caso di curve chiuse

$\forall A$ <u>aperto</u>

Teorema

Sia F un campo vettoriale continuo con dom $F = A$ aperto, connesso.
Supponiamo che $\forall P_0, P_1 \in A$ e $\forall$ coppia di curve δ, γ tali che:

$\gamma [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$\delta [c,d] \to \mathbb{R}^n$

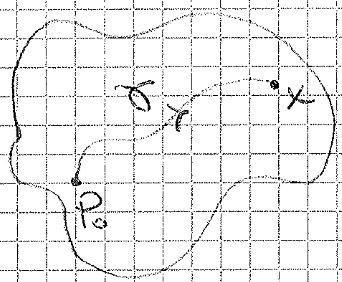
$\gamma(a) = \delta(c) = P_0$, $\gamma(b) = \delta(d) = P_1$

$$\int_\gamma F \cdot t = \int_\delta F \cdot t$$ propr. indipendenza dal cammino

Allora F è CONSERVATIVA, ammette potenziale
↓
condizione sufficiente

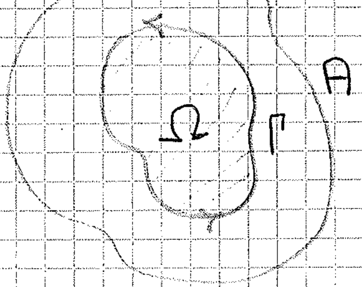
DIM

F conservativo $\to$ si può costruire potenziale



$\int_\gamma F \cdot t =$ $\to$ ottengo un numero che dipende da x, ma non da γ
↓
$= g(x) : A \to \mathbb{R}^n$ $\quad \nabla g = F$

- $\Omega \cup \Gamma \subset A$ $\rightarrow$ IPOTESI



- Vale la formula seguente:

$$\int_\gamma F \cdot t = \iint_{\Omega \cup \Gamma} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(x_1,x_2) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(x_1,x_2) \right) dx_1 \, dx_2$$

$\rightarrow$ Importante il senso di percorrenza della curva, se si cambia, viene cambiato segno al primo integrale, invece il secondo rimane invariato

COMMENTI

- $F(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1,x_2) \\ \varphi_2(x_1,x_2) \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \text{rot}\, F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ estendo a $\mathbb{R}^3$

— ∘ — ∘ —

- $G(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \varphi_2(x_1,x_2) \\ -\varphi_1(x_1,x_2) \end{pmatrix}$ campo ortogonale a F

$$F \cdot G = \varphi_2 \varphi_1 - \varphi_2 \varphi_1 = 0$$

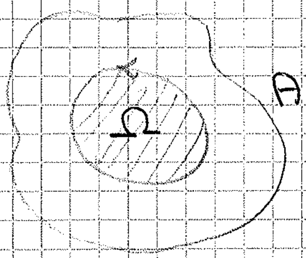
$$\text{div}\, G = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}$$

— ∘ — ∘ —

- Per il primo membro basterebbe che γ sia contenuta in A, per il secondo che tutto il dominio di integrazione sia contenuto in A.

$\forall \gamma$, sostegno contenuto in A

$\Omega_\gamma \subset A$



-> fig senza applicare Green

↓

la circuitazione è zero -> esiste il potenziale

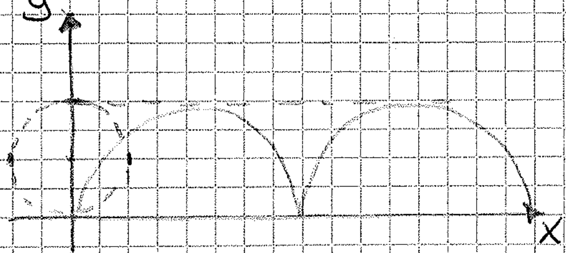
- Applicazione del teorema (non legato a campi conservativi)

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{2} \\ \frac{x_1}{2} \end{pmatrix} \qquad A = \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{2}$$

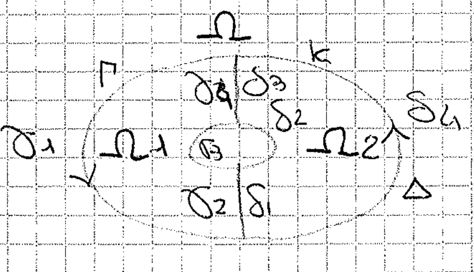
$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = 1$$

$$\oint_\gamma F \cdot t = \iint_{\Omega \cup \Gamma} 1 \, dx_1 dx_2 = m(\Omega \cup \Gamma)$$



$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$ CICLOIDE

area calcolabile grazie al teorema di Green.



$$\int_\gamma F \cdot t = \iint_{\Omega_1 \cup \Gamma} \dots$$

$$\int_\delta F \cdot t = \iint_{\Omega_2 \cup \Delta} \dots$$

sommo membro a membro

$$\int_\alpha F t + \int_\beta F \cdot t = \iint_{\Omega \cup k} \dots \qquad \begin{cases} \alpha = \gamma_1 \cup \delta_4 & \text{curva esterna} \\ \beta = \gamma_3 \cup \delta_2 & \text{curva interna} \end{cases}$$

- curva esterna ha senso di percorrenza opposto a quello della curva interna
- si può applicare il th. di Green, ma non i campi conservativi, ma la curva esterna deve avere senso antiorario e quella interna orario.
- regola di orientamento: → "omino" che percorre la curva deve avere alla sua sinistra l'area compresa tra le curve

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = t \end{cases} \qquad t \in [x_2^0, x_2]$$

$$\gamma_2'(t) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

DEVO CALCOLARE $\int_\gamma F \cdot t = g(x)$

$$g(x_1, x_2) = \int_{\gamma_1} F \cdot t + \int_{\gamma_2} F \cdot t = \int_{\gamma_1} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{\gamma_2} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \varphi_1 \qquad \downarrow \varphi_2$$

II° METODO

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

2) $\mathbb{R}^2$ = dominio F : è semplicemente connesso

1) $$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$$

$$g(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = x$$

$$g(x, y) = xy + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy + \varphi(y)) = x + \varphi'(y)$$

CONFRONTO

$$\cancel{x} + \varphi'(y) = \cancel{x} \qquad \varphi'(y) = 0 \qquad \varphi(y) = k$$

Devo avere due curve che hanno i vettori tangenti linearmente indipendenti, se non non creano il piano tangente

$u_1 \to \sigma(u_1, \bar{u}_2) \to \frac{\partial \sigma}{\partial u_1}$ vettore tangente alla 1ª

$u_2 \to \sigma(\bar{u}_1, u_2) \to \frac{\partial \sigma}{\partial u_2}$ vettore tangente alla 2ª

- $$\text{rango}\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial u_1} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial u_2} \end{pmatrix} = 2 \quad \forall (u_1, u_2) \in A$$

- σ iniettiva = SUPERFICIE SEMPLICE

SOSTEGNO = immagine di σ

Per una superficie non si stabilisce ~~...~~ il senso di percorrenza, ma il senso di attraversamento che coincide con l'orientamento di essa.
Per determinare l'orientamento devo guardare il vettore normale alla superficie

$\underbrace{\text{vettore normale}}$ calcolato facendo il prodotto vettoriale dei due vettori tangenti

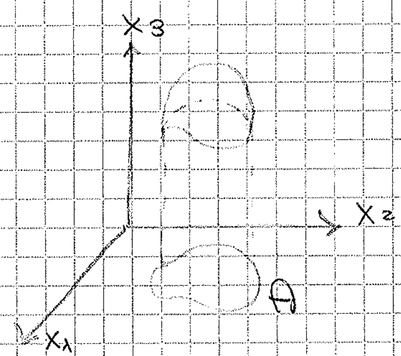
$$\|N\| = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2} > 0$$

$$P = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3})$$

$$N(P) \cdot \begin{pmatrix} x - \overline{x_1} \\ x - \overline{x_2} \\ x - \overline{x_3} \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow \text{piano tangente}$$

$$I_1 (x_1 - \overline{x_1}) + I_2 (x_2 - \overline{x_2}) + I_3 (x_3 - \overline{x_3}) = 0$$

$$x_3 = \varphi(x_1, x_2) \in C^1$$



$x_1 = u_1$

$x_2 = u_2$

$x_3 = \varphi(x_1, x_2)$

grafici di funzioni danno superfici regolari

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_2} \end{pmatrix} = 2$$

$$I_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}$$

$$I_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}$$

$$I_3 = 1$$

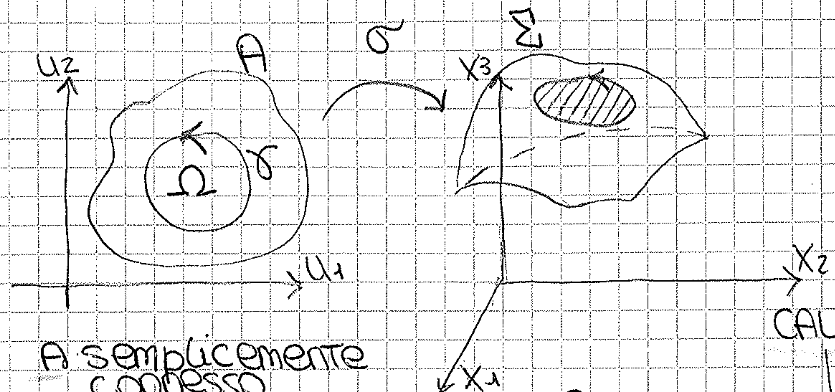
12 Novembre 2013

Integrale superficie | Integrali curve

1° campi scalari
2° campi vettoriali

$\sigma : A \to \mathbb{R}^3$
aperto di $\mathbb{R}^2$

arco di curva
$\gamma : I \to \mathbb{R}^m$
aperto



A semplicemente connesso

γ : curva chiusa semplice regolare a tratti antiorario

$\Omega \subset A$

$\Omega \cup \gamma = K \subset A$

CALOTTA (immagine di K)
↳ restrizione di σ a K

$\sigma|_K$

$(\partial\sigma)(t) = \sigma(\gamma(t))$
Bordo della calotta è una curva regolare in $\mathbb{R}^3$, chiusa, orientata

Integrali di superficie di un campo scalare

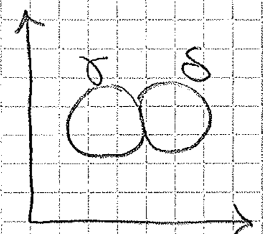
$\varphi : V \to \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^3$ continuo

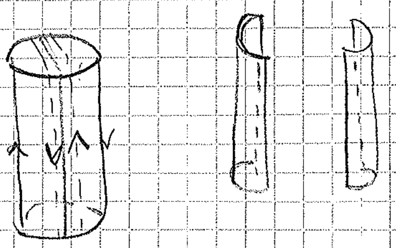
DEF:

$$\int_\sigma \varphi \, dS = \underbrace{\iint_K \varphi(\sigma(u_1,u_2)) \overbrace{\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2}}^{\|N\|} \, du_1 \, du_2}_{\text{INTEGRALE DOPPIO}}$$

$N(u_1,u_2)$ = vettore normale
$= (I_1, I_2, I_3)$

Posso scomporre il cilindro in 2 regioni ottenendo 2 curve e 2 superfici

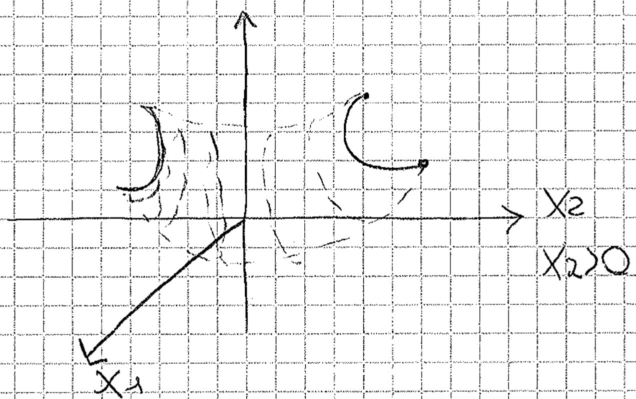




$$\int_\gamma + \int_\delta$$

TEOREMA DI GULDINO PER LE SUPERFICI DI ROTAZIONE

X_3 = asse di rotazione



$\gamma_1(t) = 0$

$\gamma_2(t) > 0$

$\gamma_3(t)$

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$

BARICENTRO $G(g_1, g_2, g_3)$

densità di massa uniforme e costantemente $= 1$

$$g_1 = \frac{\int_\gamma x_1 \, dS}{\int_\gamma dS} \qquad g_2 = \frac{\int_\gamma x_2 \, dS}{\int_\gamma dS} \qquad g_3 = \frac{\int_\gamma x_3 \, dS}{\int_\gamma dS}$$

curva piana $\to g_1 = 0 \to$ baricentro sta sullo stesso piano

L'area della superficie di rotazione (completa) è data da:

$$S = 2\pi \int_\gamma x_2 \, dS = 2\pi \, l_\gamma \, g_2$$

$\hookrightarrow$ lungh. della curva

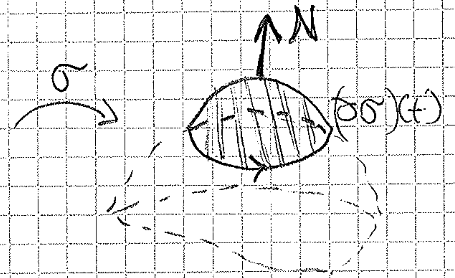
$\mathbb{R}^3$

Teorema di Stokes
(del rotore)

Sia V un insieme aperto di $\mathbb{R}^3$ e sia $F: V \to \mathbb{R}^3$ campo vettoriale di classe C^1. Sia

$\sigma|_K$ una CALOTTA di $\mathbb{R}^3$

e sia $(\partial\sigma)(t)$ il bordo della calotta



$$\int_{\partial\sigma} F \cdot t = \int_{\sigma} \operatorname{rot} F \cdot n$$

È un'estensione del teorema di Green

Potenziale - Vettore

F è il potenziale-vettore di G se:

$$\exists F : \text{rot} F = G$$

La scelta della calotta non influisce sul calcolo dell'integrale, basta che abbia alcuni requisiti:
- deve avere il bordo della curva scelta
- orientamento concorde con quello della curva

Quello che importa è come è fatto il bordo, non come i punti del bordo vengono uniti tramite la calotta

- Soluzione del problema dei campi conservativi in $\mathbb{R}^3$ è il th. di Stokes

- $\mathbb{R}^3$

se F è conservativo (cioè se ammette potenziale) allora $\text{rot} F = 0$ sul dominio.

DEF

$A \subset \mathbb{R}^3$ aperto, connesso, semplicemente connesso

SEMPLICEMENTE CONNESSO: se per ogni curva chiusa regolare a tratti, semplice con sostegno contenuto in A, esiste una calotta regolare con sostegno contenuto in A e il cui bordo sia γ.

Sia F un campo vettoriale definito da V

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\sigma_i} F \cdot n =$$

- calcolo il flusso per ogni parte

flusso > 0 se esce

flusso < 0 se entra

$$= \int_V \operatorname{div} F \, dx_1 dx_2 dx_3$$

(vale nelle condizioni di prima)

- flusso laminare ⇒ div = 0

$\mathbb{R}^n$ $\quad F(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

vettori della base canonica $e_1, \dots, e_n$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x, \dots)\, e_i$$

$$\omega = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x_1, \dots, x_n)\, dx_i$$ → FORME DIFFERENZIALI

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \sum_i \varphi_i(\gamma(t))\, \gamma_i'(t)\, dt = \int_\gamma F t$$

$x_1 = \gamma_1(t)$

$\vdots$

$x_n = \gamma_n(t)$

$$\gamma_i'(t) = \frac{dx_i}{dt}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 164

· CHIUSA se $\text{rot} F = 0$

se dom. semplic. connesso
IL $\text{rot} F = 0$ se e solo se è ESATTO il diff.

19 Novembre 2013

SERIE DI FUNZIONI → Taylor, → Fourier
↓
numeriche

RICHIAMO: successione

$\varphi : \underset{n}{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$

$y = \varphi(n) = y_n \qquad \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$\lim_{n \to \infty} y_n = \ell \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall n \geq N \; |y_n - \ell| < \varepsilon$ • succ. convergente
$\forall M > 0 \; \exists N : \forall n \geq N \quad y_n \geq M$ • succ. divergente
• $\lim \nexists$

Successioni monotone

$\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ monotona → crescente, → decrescente

$n_2 > n_1 \Rightarrow y_{n_2} > y_{n_1}$

cioè alla più piccola L che soddisfa la condizione

TEOREMA

se $\{y_n\}$ monotona crescente

(I) la successione CONVERGE se la successione è limitata superiormente $(\exists L > 0 : \forall n \; y_n \leq L)$ $\lim_{n \to \infty} y_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} y_n$

(II) la successione DIVERGE a $+\infty$ quando non limitata superiormente

Una serie è una sorta di successione → le userò per approssimazioni ad es. di un $\int$

$(1+x+\dots+x^n)(1-x) = 1+x+\dots+x^n-x-x^2-\dots-x^{n+1}$

tutti i termini si cancellano, i termini moltiplicati per 1 hanno il loro corrispondente nei termini moltiplicati per $-x$

RESTA SOLTANTO $1-x^{n+1}$ $x \neq 1$

$$S_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$ se $x=1 \rightarrow S_n = n+1$ diverge

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

(I) se $|x|<1$ la serie CONVERGE e la somma $S = \frac{1}{1-x}$

(II) se $x \geq 1$ la serie DIVERGE POSITIVAMENTE $S=+\infty$

(III) se $x=-1$ $\sum (-1)^n = 1-1+1 \dots$ S_n oscilla tra i valori 0 e 1 quindi il limite non esiste. La serie è INDETERMINATA

(IV) se $x<-1$ oscilla $\rightarrow$ la serie è INDETERMINATA

SERIE ARMONICA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

---

se si tagliano, o si aggiungono o si sostituiscono dei termini della serie (in numero finito) il comportamento non cambia [cambiano le somme parziali, ma non il comportamento al limite]

SERIE SOMMA

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ posso fare la SERIE SOMMA devono iniziare con lo stesso indice

$\downarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) \longrightarrow$ corrisponde alla somma dei limiti

- converge se sia a_n che b_n convergono e converge alla somma dei due limiti

$$\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

22 Novembre 2013

Serie Numeriche

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione ~~termini~~ numeri reali
TERMINE GENERALE

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ SERIE

$= \lim_{n\to\infty} S_n$

$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ succ. ridotte

$S_n = S_{n-1} + a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

$S_0 = a_0$

CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA

$\lim_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

NON SUFFICIENTE

ES:
$a_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ serie TELESCOPICA

- Condiz. necessaria può andare ad escludere la convergenza
- non sono sicuro che la propr. sia verificata, ho bisogno di condizioni sufficienti

$S_{n+1} = a_0 + a_1 + \dots + a_{n+1}$

$$S_n \leq S_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\downarrow$

MONOTONA CRESCENTE

Le succ. monotone crescenti o convergono o divergono $+\infty$

se $\{S_n\}$ è LIMITATA SUPERIORMENTE / $\{S_n\}$ NON è LIMITATA SUPERIORMENTE

DIM (1)

$\{S_n\}$ SOMME PARZ. DI $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$\{\sigma_n\}$ SOMME PARZ. DI $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

$$\left.\begin{array}{l} S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \\ \sigma_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n \end{array}\right\} \text{monotone crescenti}$$

$$\Rightarrow S_n \leq \sigma_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

IPOTESI $\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \sigma \in \mathbb{R}$

$$\sigma_n \leq \sigma \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$S_n \leq \sigma \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Posso concludere che anche S_n è superiormente limitata $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge a $S \leq \sigma$

$\downarrow$

per il criterio del confronto dei limiti.

$$\lim_{n \to \infty} S_n \leq \lim_{n \to \infty} \sigma_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad a_n = \frac{1}{n^2} \geq 0$$

tende + velocemente a 0 rispetto a $\frac{1}{n}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

- CONVERGE

$$\sum b_n \begin{cases} \to \text{convergente} \\ \to \text{maggiorante} \end{cases}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

TELESCOPICA

$$\to a_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}$$

$$S_3 = \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$S_n = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} \ldots - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = 1$$

CONVERGE A 1

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{\underbrace{n(n-1)}} \qquad n \geq 2$$

denom. + piccolo $\to$ frazione più grande

$\downarrow$

converge

Per il criterio del confronto a_n converge

$\frac{1}{n}$ INFINITESIMO CAMPIONE per $n \to \infty$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (l+\varepsilon)^m a_{n_0} \quad \text{CONVERGE}$$

CRITERIO DELLA RADICE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

se $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$ CONVERGE

se $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = l > 1$ DIVERGE

~~29 Novembre 2013~~

~~$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ CONDIZIONI SUFFICIENTI DI CONVERGENZA TERMINI POSIT~~

26 Novembre 2013

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad a_n \geq 0$$

- criterio del confronto
  - radice

- criterio nuovo:

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \qquad b_n > 0 \quad \forall n = 0, 1, \ldots$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

supponiamo che tale limite ESISTA e sia FINITO

(I) (II)