NUMERO: 1305

ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Samiani

MATERIA: Fisica I + Eserc., Prof.Daghero

IL METODO SCIENTIFICO

1. Schematizzazione → il fenomeno viene ricondotto a un modello più semplice
2. Misurazione →
3. Correlazione
4. Legge
5. Predizione
6. Experimental test

MISURE

Le quantità fisiche fondamentali sono lunghezza, massa e tempo.
unica vera grandezza fondamentale
esprimibile mediante c e t
definito come il percorso

Sistema internazionale di misura

Lunghezza	L	metri (m)
Tempo	T	secondi (s)
Massa	M	Kilogrammi (kg)
Temperatura	Θ	Kelvin (K)
Quantità di sostanza	N	Mole (mol)
Intensità di corrente	I	Ampere (A)
Intensità luminosa	J	Candela (cd)

Quantità geometriche fondamentali

1. Angolo → porzione del piano delimitata da due semirette aventi angolo in comune. L'unità è il radiante

$\theta = \frac{s}{r} \rightarrow [\theta] = \frac{L}{L}$ → l'angolo è un numero puro non una grandezza fisica

2. Angolo solido → porzione di spazio racchiusa in un cono. estensione allo spazio tridimensionale del concetto di angolo piano. l'unità di misura dell'angolo solido è lo steradiante
steradiante → definito come l'angolo solido con vertice al centro di una sfera di raggio r che sottende una calotta sferica di di area uguale a r^2

$\rightarrow \Omega = \frac{\Sigma}{r^2} \rightarrow \frac{L^2}{L^2}$ → numero puro

Grandezze fisiche non fondamentali

Tutte le quantità in un dato sistema possono essere espresse in funzione di quelle fondamentali e le loro unità di misura sono derivate allo stesso modo

Velocità = $\frac{\text{spazio}}{\text{tempo}}$ → $v = \frac{L}{T}$ SI unit m/s

Accelerazione = $\frac{\text{velocità}}{\text{tempo}}$ → $a = \frac{V}{T} = \frac{L}{T^2}$ m/s^2

Forza = massa x accelerazione → $F = M \cdot \frac{L}{T^2}$ $kgm/s^2 = N$

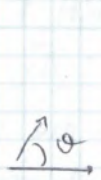
Lavoro = Forza x spostamento → $L = [F] \cdot L$ $N \cdot m$

Prodotto scalare

È possibile definire il prodotto tra due vettori ottenendo un risultato scalare

Prodotto di due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ il cui risultato μ (numero reale) è dato da

$\mu = uv\cos\theta$ → dove θ è l'angolo compreso tra i due vettori (sempre < 180°)



Proprietà algebriche del prodotto scalare

$\forall\, \vec{u}, \vec{v}\ ;\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u} \\ (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w} \\ \lambda\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\lambda\vec{v} = \lambda(\vec{u}\vec{v}) \\ \vec{u} \neq 0 \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{u} = u^2 > 0 \end{cases}$$

$\vec{u} = 0 \Leftrightarrow u \cdot u = u^2 = 0$

Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale di due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ è un terzo vettore $\vec{w}$ tale che

1. La sua direzione è perpendicolare al piano definito da $\vec{u}$ e $\vec{v}$
2. La sua orientazione è data dalla regola della mano destra
3. Il modulo è dato da $w = uv\sin\theta$

Decomposizione di vettori nei suoi componenti

1) La magnitudine (il modulo) del vettore u è dato da → $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

- La componente x del vettore u è la proiezione di u nella direzione di i

$u_x = \vec{u}\, i = (u_x i + u_y j + u_z k)\, i$

- Prodotto scalare in componenti → $\vec{u}\cdot\vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$
- Angolo tra due vettori → $\cos\alpha = \dfrac{u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}{uv}$
- Prodotto di vettori in componenti

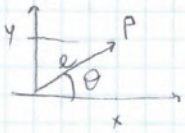
$\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{v}$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = i\,(u_y v_z - v_y u_z) - j\,(u_x v_z - v_x u_z) + k\,(u_x v_y - v_x u_y)$$

- Somma di vettori in componenti

$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x)\, i + (u_y + v_y)\, j + (u_z + v_z)\, k$

COORDINATE POLARI

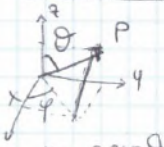


Un punto sul piano può essere identificato dalle coordinate cartesiane (x, y) o dalle coordinate polari (ρ, θ)

$x = \rho\cos\theta$ $\quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$y = \rho\sin\theta$ $\quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

COORDINATE SFERICHE



$P(\rho, \theta, \varphi)$

θ → angolo polare

φ → angolo azimutale

$x = \rho\sin\theta\cos\varphi$ $\quad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\quad \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$y = \rho\sin\theta\sin\varphi$ $\quad \cos\theta = \dfrac{z}{\rho}$

$z = \rho\cos\theta$ $\quad \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

→ sempre nel limite in cui il campione tende a diventare la popolazione

$$\bar{x} = \sum_k \frac{1}{n}\left(\frac{\Delta n_k}{\Delta x}\right)\Delta x \cdot x \longrightarrow \bar{x} = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left(\frac{1}{n}\frac{dn}{dx}\right) x\, dx$$

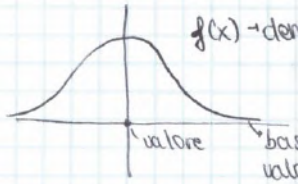
densità di frequenza

densità di probabilità → anche questa è → $f(x)$ normalizzata a 1

$\int_a^b f x\, dx$ → probabilità che un numero misurato cada nell'intervallo preso in esame

Teorema del limite centrale → La somma di un gran numero di variabili indipendenti distribuite in modo casuale è distribuita in modo normale.

La distribuzione normale è una distribuzione definita dalla curva di Gauss



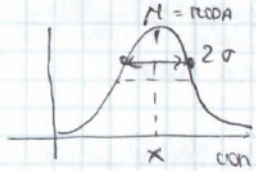
$f(x)$ → densità di probabilità

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

bassa prob che i valori si discostino molto

$\bar{x} = x \pm \Delta x$

densità di frequenza



σ è la distanza tra il valore medio μ e il punto di flesso più vicino

con $x = \mu$ → valore massimo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \qquad \mu = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, x\, dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{dn}{dx}\, x\, dx$$

→ ha la stessa espressione del valore medio di campione

μ → valor medio calcolato sulla popolazione infinita e va confrontato con x medio calcolato su un campione finito

$$\bar{x} = \sum_k \left(\frac{1}{n}\frac{\Delta n_k}{\Delta x}\right)\Delta x\, x_k$$ → sperimentale

$\bar{x} \rightarrow \mu$

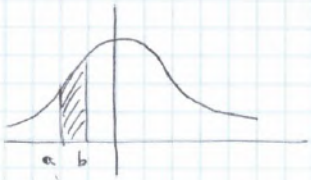
$s \rightarrow \sigma$

→ Il valor medio della popolazione μ è vicino a $\bar{x}$ se il numero di misure è alto

$$s = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

x_i → valore

→ DEVIAZIONE STANDARD che per un numero di misure sufficientemente alto approssima σ (inaccessibile sperimentalmente)



$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f x\, dx$$

probabilità di avere un punto tra a, b

Calcolando la probabilità che un valore capiti tra $\mu \pm \sigma$ trovo che vale 68%.
La probabilità che cada tra $\mu \pm 3\sigma$ è 99%.

→ Facendo infinite misure $X = \mu \pm \sigma$ [X] non facendo infinite misure devo usare gli estimatori di μ e σ

$\mu \cong \bar{x}$ $\qquad \sigma \cong s$ → non dipende dal numero di misure

$$\sigma_{\bar{x}} \cong \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \qquad \boxed{X = \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}}}$$

deviazione standard della media

CINEMATICA

Se il corpo di cui vogliamo descrivere il moto ha dimensioni piccole rispetto alla traiettoria che deve compiere parleremo di punto materiale al quale associeremo una massa

Per poter parlare di moto dobbiamo definire il sistema di riferimento, essendo lo spazio definito in 3 dimensioni avremo bisogno di 3 versori ortonormali

Ogni punto dello spazio può essere identificato da 3 coordinate
$\vec{r}$ sarà il vettore posizione che identifica il punto e che si compone dalla somma delle sue coordinate vettoriali ES $\vec{r}(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$

EQUAZIONE DEL MOTO →

$$\begin{cases} x(t) = x \\ y(t) = y \\ z(t) = z \end{cases}$$

ES $\vec{r}(t) = 3t^2 i + (9t+4)j$ $\quad x = 3t^2$, $y = (9t+4)$, $z = 0$

L'equazione del moto non è la traiettoria che descrive il corpo durante il suo moto ma descrive la traiettoria del moto e indica il modo in cui questa viene percorsa (legge oraria)

ES

1. $\vec{r}(t) = R\,sen(\omega t)i + R\cos(\omega t)j$ → Per ottenere la traiettoria devo eliminare il tempo dalle variabili

$$\begin{cases} x(t) = R\,sen\,\omega t \\ y(t) = R\cos\omega t \end{cases} \quad \begin{cases} x^2(t) = R^2 sen(\omega t) \\ y^2(t) = R^2\cos(\omega t) \end{cases} \rightarrow x^2 + y^2 = R^2$$

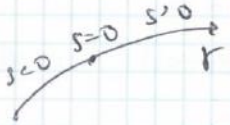
la traiettoria è una circonferenza

2. $\vec{r}(t) = At\,i + (y_0 - Bt^2)j$

$x(t) = At \rightarrow t = \frac{x}{A}$ $\quad y(t) = (y_0 - Bt^2) = y_0 - \frac{Bx^2}{A^2}$ → la traiettoria è una parabola

→ la rappresentazione intrinseca ci consente di scomporre la legge del moto nelle sue due componenti (traiettoria e legge oraria)

1) Definiamo la curva Γ
2) Definiamo il verso di percorrenza della curva
3) definiamo $\underline{s}$ che è il tratto di curva percorso a partire dall'origine



$\vec{r}(t) = \vec{r}(s(t))$

$$\begin{cases} \vec{r}(s) \\ s(t) \end{cases}$$

Dato un sistema di riferimento cartesiano possiamo definire il vettore spostamento come differenza di due vettori posizione in istanti diversi. Questo spostamento non identifica il percorso compiuto ma la distanza minima tra due posizioni durante il nostro percorso

→ Il vettore spostamento serve a determinare la velocità che è il rapporto tra la differenza di due spostamenti e la differenza del tempo

La velocità istantanea (definita in un solo punto) $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(\overset{t_2}{t + \Delta t}) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ → derivata vettore spostamento in funzione del tempo

Per $\Delta t \to 0$ le due posizioni andranno a coincidere

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$ per $ds \to 0$ → v_s rappresenta la velocità scalare che è un numero che può assumere valori positivi e negativi in base al verso di percorrenza della curva

u_T → versore

COORDINATE CARTESIANE → la velocità è espressa dalla derivata in funzione del tempo delle sue componenti spaziali

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(xi + yj + zk) = v_i i + v_j j + v_k k$

MOTO RETTILINEO (unidimensionale)

→ Traiettoria dritta e l'equazione di moto è costituita da una sola equazione che è comunque un'equazione razionale

$\vec{r}(t) = x(t)i$

Velocità media → $\vec{v}_M = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ Velocità istantanea → $v_x = \frac{dx}{dt}$

$$V_M = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} v_t$$

Accelerazione = $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ $dv_x = a_x dt$ $v_x - v_{x0} = a_x (t - t_0)$

Velocità nulla → stato di quiete

Velocità costante → MOTO UNIFORME → $x = x_0 + v_x(t - t_0)$ accelerazione 0

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO → accelerazione non nulla e costante

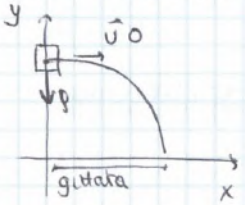
$a_x = \frac{dv_x}{dt}$ → $dv_x = a_x dt$ ⟶ $v_x - v_{x0} = \int_{t_0}^{t} a_x(t')dt$ $v_x(t) = v_{x0} + a_x(t - t_0)$

$v(t) = a_x(t - t_0) = \frac{dx}{dt}$ → $\int_{t_0}^{t} a_x(t - t_0)\,dt = \int_{t_0}^{t} dx$ → $\overset{x(t)}{x} - \overset{x(t_0)}{x_0}$

$x(t) = x_0 + v_{x0}(t - t_0) + \frac{1}{2} a_x (t - t_0)^2$

MOTO 2D

Moto del proiettile



asse x $\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ v_x(t=0) = v_0 \\ a_x = 0 \end{cases}$ $x = x_0 + v_x(t - t_0)$ componente x $x(t) = v_{0x} t$

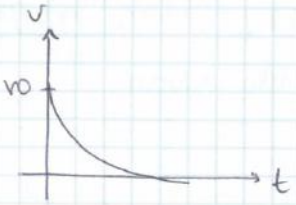
nella direzione x non ci è accelerazione
l'unica accelerazione è verso y

y asse $\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ v_x(t=0) = v_0 \\ a_x = 0 \end{cases}$ $y(t) = h + \underset{\downarrow}{a_y} \frac{t^2}{2}$

$-g$ → diretta verso il basso

le equazioni del moto sono $\begin{cases} x(t) = v_{0x} t \\ y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

Per trovare la traiettoria dobbiamo eliminare il tempo dal sistema



Per sapere dove il corpo si ferma

$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \rightarrow v\frac{dv}{dx} = -bv$ Il meno sta a significare che l'accelerazione dell'attrito viscoso non può mai aumentare la velocità dell'oggetto

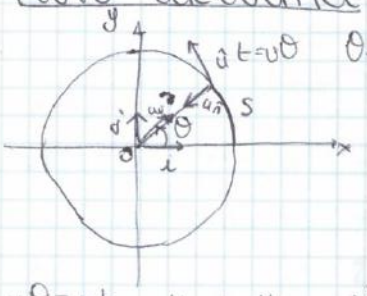
$dv = -b\,dx$

$\int_{v0}^{v} dv = -b\int_{x0}^{x} dx \rightarrow v - v0 = -b(x - x0)$ L'oggetto si ferma quando v si annulla $x^* \rightarrow v(x^*) = 0$

$0 = v0 - b(x^* - x0) \rightarrow x^* = x0 + \frac{v0}{b}$ → punto di arresto

L'accelerazione è legata alla forza che applicata al corpo, la velocità all'energia

MOTO CIRCOLARE



θ = generalmente definito in verso antiorario r = raggio costante

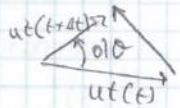
$s = r\theta$ coord intrinseche $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$ cartesiane → s, θ, coordinate polari

$\hat{u}t$ = tangente alla traiettoria $\hat{u}n$ = centripeto diretto verso il centro di curvatura

$\hat{i}, \hat{j}$ → versori delle coordinate cartesiane $\hat{u}_r, u\theta$ = versori coord polari

$u\theta = ut$ $u_N = -u_r$ → In funzione del tempo dei versori può cambiare solo la direzione posiamo solo ruotare

$\frac{d\hat{u}t}{dt} = \frac{d\theta}{dt} u_N$ → derivata angolare del loro spostamento nel tempo



$\frac{u(t+\Delta t) - \hat{u}_t(t)}{\Delta t}$ → per $\Delta t \rightarrow 0$ coincide con $\hat{u}_N$

$\hat{u}_N$ al diminuire dell'angolo coincide con l'arco

$\frac{du_r}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{u}\theta$ $\frac{d\hat{u}\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(-\hat{u}_R)$

$\hat{u}_t = \hat{u}_\theta$ $\hat{u}_N = -\hat{u}_r$ $\frac{d\hat{u}r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{u}_N$ $\frac{d\hat{u}r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{u}\theta$ $\frac{d\hat{u}\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(-u_r)$

→ Calcoliamo formule generali di velocità e accelerazioni in coordinate polari

$\vec{r}(t) = r\,\hat{u}r$ $\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{u}r + r\frac{d\hat{u}r}{dt}$ → variazione direzione del versore → $\frac{dr}{dt}\hat{u}r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}\theta$ velocità in coordinate polari

sia r che $\hat{u}r$ possono variare nel tempo

$\frac{dr}{dt}$ variazione raggio

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2r(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\hat{u}r\right) + \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}\theta\right)$

$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\hat{u}r\right) = \frac{d^2r(t)}{dt^2}\hat{u}r + \frac{dr}{dt}\frac{d\hat{u}r}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{u}r + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{u}\theta$

$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}\theta\right) = \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{u}\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{u}\theta + r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2(-\hat{u}r)$

$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{u}r + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{u}\theta + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{u}\theta + \frac{rd^2\theta}{dt^2}\hat{u}\theta - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{u}r$

$\rightarrow \vec{a}(\theta) = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{u}r + \left[\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{rd^2\theta}{dt^2}\right]\hat{u}\theta$

Nel moto circolare $r = R = cost$

$\vec{v}(t) = R\frac{d\theta}{dt}\hat{u}\theta$ $\vec{a}(t) = -r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{u}r + \frac{rd^2\theta}{dt^2}\hat{u}\theta$ (le derivate di R sono nulle semplifico equazioni generali)

varia modulo di v nel lungo traiettoria varia direzione della velocità

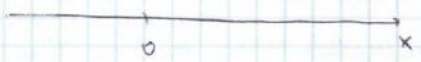
Ogni volta che abbiamo una rotazione, una variazione di direzione abbiamo la presenza di una componente normale, ortogonale

In coordinate intrinseche $\vec{v} = R\frac{d\theta}{dt}\hat{u}t$ $\vec{a}(t) = \frac{rd^2\theta}{dt}\hat{u}t + r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{u}_N$

MOTO ARMONICO

$a_x(t) = -\omega^2 x(t)$ — ω^2: numero positivo

Quando $x>0$ $a_x<0$
Quando $x<$ $a_x>0$



$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ (equazione differenziale di 2 ordine omogenea)

$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ $\quad x(t) = Ae^{\lambda t}$ $\quad dx = A\lambda e^{\lambda t}$ $\quad d^2x = A\lambda^2 e^{\lambda t}$

$\cancel{A}\lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} + \omega^2 \cancel{A} \cancel{e^{\lambda t}}$ $\quad \lambda^2 + \omega^2 = 0$ $\quad \lambda = \pm i\omega$

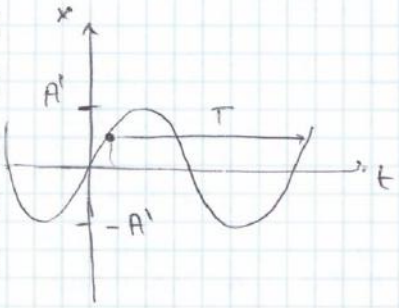
$x(t) = Ae^{+i\omega t} + Be^{-i\omega t}$ $\quad t_0 = 0$ $\quad x(t_0) = 0$

$\rightarrow x(0) = Ae^0 + Be^0 = A + B = 0 \rightarrow B = -A$ $\quad \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} = \sin\alpha \rightarrow$ FORMULA EULERO

$x(t) = A(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$

$x(t) = A2i \sin(\omega t)$ → l'equazione l'ho ricavata considerando che a $t=0$ il corpo si trova a $x=0$

$x(t) = A' \sin(\omega t)$ → equazione del moto di un corpo multiforme la cui accelerazione dipende dalla posizione, è un moto periodico



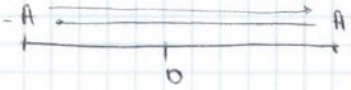
$\sin[\omega(t+T)] = \sin(\omega t)$

$\omega(t+T) = \omega t + 2\pi$

$\cancel{t} + T = \cancel{t} + \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$ PULSAZIONE

Frequenza → numero di oscillazioni in un secondo

$f = \frac{1}{T}$ (s^{-1}) $\quad f = \frac{\omega}{2\pi}$ $\quad \omega = 2\pi f$



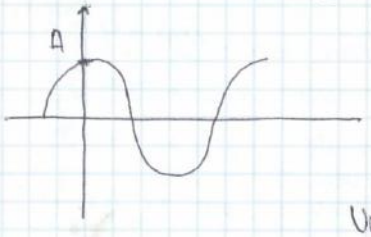
$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$ — ampiezza; FASE; correzione rispetto al fatto che non mi trovo all'origine FASE INIZIALE

Se $\varphi_0 = 0 \rightarrow x(t=0) = 0$

$x(t=0) = A \rightarrow \cancel{A}\sin(\omega t + \varphi_0) = \cancel{A}$ $\quad \sin\varphi_0 = 0 \rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

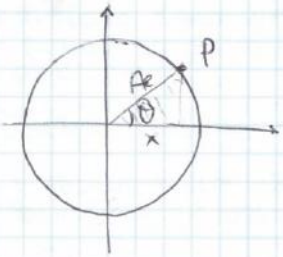
Se faccio partire il cronometro nel momento in cui il corpo si trova in A

$x(t) = A\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \rightarrow x(t) = A\cos\omega t$



→ la curva è la stessa ma traslata perché ho cambiato l'origine

Un moto circolare può essere espresso come composizione di due moti armonici semplici



$\vec{r}(t) = \rho\hat{u}_r$ $\quad \rho = A \rightarrow \vec{r}(t) = A\hat{u}_r$

$x(t) = A\cos\theta(t)$ $\quad \theta(t) = \theta_0 + \omega t$

$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0)$ $\quad y(t) = A\sin(\theta_0 + \omega t)$

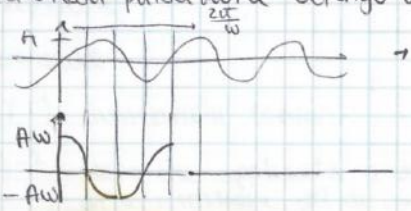
fase iniziale = angolo iniziale

→ Se compongono due moti armonici con la stessa pulsazione ottengo un moto armonico in cui la pulsazione è la relativa

$v(t) = A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$

$v_x(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$

Derivata della posizione rispetto al t



→ c'è uno sfasamento di $\frac{T}{4}$

DINAMICA

→ La dinamica si occupa dell'interazione tra il corpo e l'ambiente e studia le cause che portano il corpo a muoversi.
Il punto cruciale della dinamica è legare l'accelerazione alla forza

Forza → può produrre due tipi di effetti < statici → deformazioni / dinamici → alterano stati di moto

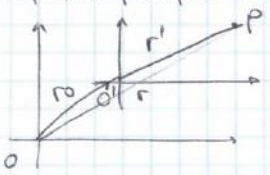
Definizione della forza statica → si misura con il dinamometro, la forza applicata è proporzionale alla deformazione. L'unità di misura della forza è il Newton

LEGGI DI NEWTON

1) Principio di inerzia → Se non c'è attrito un corpo messo in moto si fermerebbe mai, un corpo in moto rettilineo uniforme tende a rimanerci

→ Un corpo non sottoposto a forze persevera nel suo stato di quiete o di moto in cui si trovava
↓
o se la somma delle forze cui è sottoposto è 0 → $\sum \vec{F} = 0$

Il primo principio è una definizione del sistema di riferimento inerziale



$r(t) = r$
↓
$v = 0$
(per O il corpo è fermo)

r0 e r' si spostano (→ il sistema con O' è in movimento)

$r'(t) \rightarrow v = \frac{d\vec{r}}{dt}$ (non vale 0)

$\vec{r} = r_0 + r' \rightarrow r' = r - r_0$ $\quad \frac{d}{dt}(\vec{r} - \vec{r_0}) = -\frac{dr_0}{dt} = -\vec{v}_0$ → Se il treno si muove a 2km/h vede la valigia muoversi a 2km/h in verso opposto

Se il treno accelera anche la velocità apparente della valigia dipende dal tempo → Il 1° principio non è valido per O'

→ Si definisce SRI (sistema di riferimento inerziale) per il quale vale la prima legge di Newton
O è inerziale
O' è inerziale quando si muove di velocità costante rispetto a O

Si chiama SRI un sistema tale per cui se un corpo non è sottoposto a forze o si muove a velocità cost
Una volta identificato uno ne posso trovare infiniti altri

→ Se la forza totale su un certo corpo è zero si può definire un numero infinito di sistemi di riferimento per cui quel corpo è o fermo o si muove di moto rettilineo uniforme

2) Seconda legge di Newton (tutte le leggi della dinamica valgono solo per i sistemi di riferimento inerziali)

$\underbrace{\sum \vec{F}}_{\text{risultante}} = \underbrace{m}_{\text{massa inerziale}}\vec{a}$ → stabilisce una proporzione tra la risultante e l'accelerazione

$\sum \vec{F} \neq 0$ → necessariamente il corpo avrà un'accelerazione e trovo che è legata alla forza

$\vec{F} \rightarrow [1] \rightarrow \bar{a}_1$
$\vec{F} \rightarrow [2] \rightarrow \bar{a}_2$
} stesse forze su corpi diversi ottengo accelerazioni diverse

$\vec{F}$ [ ] → $\bar{a}$
$\vec{F}$ [ ][ ] → $\frac{\bar{a}}{2}$
$\vec{F}$ [ ][ ][ ] → $\frac{\bar{a}}{3}$
→ L'accelerazione è legata a una proprietà del corpo

→ la forza è proporzionale all'accelerazione ma in funzione di una costante (massa) che dipende dal corpo

Inerzia → tendenza del corpo a mantenere lo stato del moto in cui si trova

È sbagliato dire che il primo principio è la spiegazione del secondo, non sono equivalenti.
Con la prima ho definito il SRI

$\sum f_x = ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$ → lo scopo della cinematica è passare dalla forza all'accelerazione

$\sum f_y = ma_y = m\frac{d^2y}{dt^2}$ → Eq. differenziale

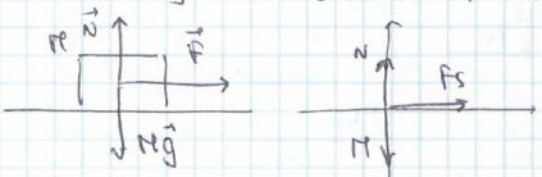
$\sum f_z = ma_z = m\frac{d^2z}{dt^2}$

$[f] = MLT^{-2}$ dimensioni forza

$N = kg\,ms^{-2}$ forza che applicata a un corpo di un kg ma provoca un'accelerazione ~~del~~ di un m/s^2

→ Uno studente spinge una slitta di massa M = 240 kg sulla superficie senza attrito di un lago ghiacciato con una forza orizzontale di modulo F 130 N partendo da fermo.
Lo studente spinge per un tratto di 2,3 m. Qual'è la velocità finale della slitta?

M = 240 kg F = 130 N d = 2,3 m



→ Ricordo che considero punto materiale costruisco diagramma del corpo libero quindi solo le forze applicate sul blocco. Devo scegliere un sistema di assi cartesiani. Scompongo le forze lungo gli assi.

$\Sigma \vec{F} = \vec{N} + \vec{Fs} + M\vec{g} = M\vec{a}$ (secondo principio di Newton) Scrivo le equazioni per le componenti x, y

$N\hat{j} + Fs\,\hat{i} - Mg\hat{j} = Ma_x\hat{i}$ asse x $\begin{cases} Fs = Ma_x \rightarrow a_x = \frac{Fs}{M} \\ N - Mg = 0 \end{cases}$

$(N - Mg)\hat{j} + Fs\,\hat{i} = Ma_x\hat{i}$ asse y

deve essere uguale a 0

$v^2 = v_0^2 + 2a_x(x - x_0)$ $v_f^2 = \cancel{v_0^2} + 2a_x d \rightarrow$

il corpo parte da fermo

$v_f = \sqrt{2d\frac{Fs}{M}}$

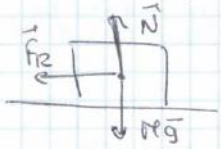
→ $v_f = \sqrt{2 \cdot 2,3\,m \frac{130\,N}{234\,kg}} = v_f = \sqrt{2,5 \frac{kg\,m}{s^2}\frac{m}{kg}} = 1,6\ m/s$

Con il teorema dell'impulso → $J = \Delta\vec{p} = Mv_f - M\cancel{v_0}$ $J = \int_{t_0}^{t_f} F(t)dt = Fs(t_f - t_0)$ non conosco il tempo

→ Una cassa di 360 kg è legata sul piancale di un tram che viaggia alla velocità di 130 km/h. Il guidatore frena fino ad arrivare in 17 s alla velocità di 62 km/h. Quale forza costante agisce sulla cassa durante questo periodo di tempo

M = 360 kg v_i = 120 km/h Δt = 17 s v_f = 62 km/h

→ Parto dalla cinematica per trovare l'accelerazione.
Tutte le informazioni al tram riguardano anche la cassa che è legata.



$\Sigma \vec{F} = M\vec{a}$ $v_f = v_i + a_x(t_f - t_i)$ $a_x = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = -0,95\ m/s$

$v_i = 33,333\ m/s$ (3 cifre sign) $v_f = 17,2\ m/s$

$\Sigma F = Ma$ $\vec{N} + M\vec{g} + \vec{F_R} = M\vec{a}$ $\begin{cases} x: -F_r = Ma_x \rightarrow F_r = -Ma_x = 340\ N \\ y: N - Mg = 0 \end{cases}$

$3,4 \cdot 10^2\ N$ ← solo due cifre

→ Con il teorema dell'impulso

$J = \int_{t_0}^{t_f} \Sigma \vec{F_R}(t)\,dt = \Sigma \vec{F_r}\,\Delta t = \Delta\vec{p} = Mv_f - Mv_i$

$J_x = \Sigma F_x \Delta t = -F_R \Delta t = Mv_{fx} - Mv_{ix}$ $J_y = \Sigma F_y \Delta t = 0$

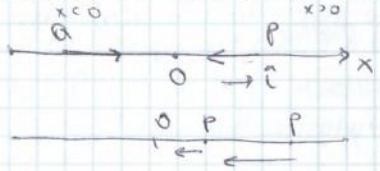
$-F_R = M\frac{(v_{fx} - v_{ix})}{t_f - t_i} = F_R = -M\left(\frac{v_{fx} - v_{ix}}{t_f - t_i}\right)\vec{a}$

Forza elastica

1) direzione costante

2) verso sempre rivolto verso un punto O (centro della forza)

3) modulo ∝ distanza da O



La scelta di porre l'origine in O è arbitraria

Tanto più mi allontano da O tanto maggiore è l'intensità della forza

$\vec{F}$ sempre parallela a $\hat{i}$

$\vec{F}_{el} = -kx\hat{i}$ → forza elastica con origine nel centro della forza

$\Sigma\vec{F} = \vec{F}_{el} = m\vec{a}$ → $-kx\hat{i} = m a_x \hat{i}$ → $-kx = m a_x$

$m a_x + kx = 0$ $\quad a_x + \frac{kx}{m} = 0$ $\quad \frac{d^2x}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$ → Equazione del moto di un corpo che si muove solo per effetto della forza elastica

↓ ricorda il moto armonico → $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

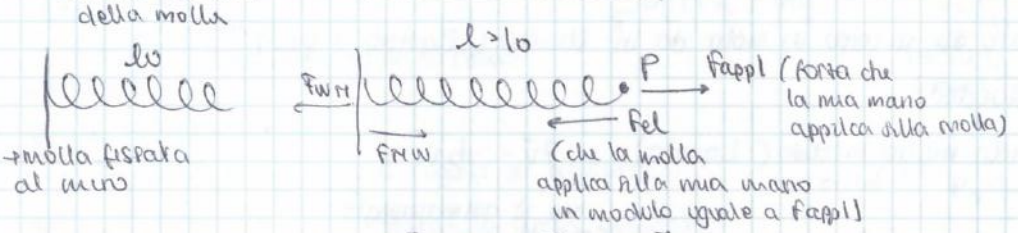
Il dispositivo più comune che applica forza elastica è la molla

l_0 = lunghezza propria (lunghezza molla né allungata né compressa)

$l \neq l_0$ (molla allungata o compressa)

$F_{el} = k|l - l_0|$ → LEGGE DI HOOKE (→ vera per piccole deformazioni)

↓ costante elastica della molla



$F_{el} = \overset{\text{verso opposto a } x}{-}k(\underbrace{l - l_0}_{x})\hat{i}$

$l_0 = x$ faccio coincidere l_0 con l'origine

→ Se la molla è ferma → $\Sigma\vec{F} = 0$ → $\vec{F}_{appl} + \vec{F}_{WM} = 0$

↓ forze applicate alla molla

III legge $\quad \vec{F}_{MW} = -\vec{F}_{WM}$, $F_{appl} = -F_{el}$ $\quad$ II legge $\quad F_{appl} = -F_{WM}$

↓ La molla è in equilibrio

Se $F_{appl} = F_{WM}$ anche F_{MW} e F_{el} devono essere uguali

kx →  ← kx $\quad$ Per accorciarla di un tratto x devo imprimere una forza kx da ambo i lati

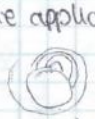
Forze vincolari

Avvengono solo per contatto

FORZA NORMALE → legata alla superficie. La forza normale non è uguale al peso $\quad$ Se la forza normale è 0 non c'è più contatto

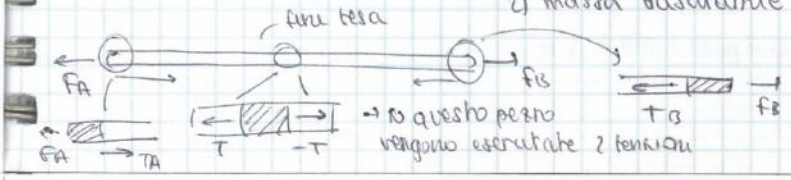
$\vec{N}$ è la forza che la superficie applica per impedire che il corpo sulla superficie cada

Peso apparente → ilide

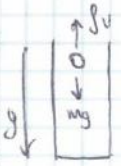


Tensione - si chiama tensione della fune la forza che ogni porzione della fune esercita sulla porzione adiacente

Consideriamo fune ideale → 1) inestensibile
2) massa trascurabile
→ La tensione è la stessa in ogni punto della fune



Se globalmente la fune è ferma ogni sezione è ferma
→ tutte le forze opposte sono uguali
→ tutte le tensioni T in modulo sono uguali ⊛



→ corpo che cade in un contenitore con un fluido

$\Sigma F = m\vec{a}$ $\qquad mg - bv = ma$

$ma_y + bv_y = mg \rightarrow \frac{dv_y}{dt} + \frac{b}{m} v_y = g$ — 1. risolvo eq. omogenea associata; 2. trovo integrale particolare

$v_y(t) = Ae^{-\frac{b}{m}t}$ → omogenea associata $\qquad \frac{dv_y}{dt} = 0 \qquad 0 + \frac{b}{m} v_y = g \qquad v_y = \frac{mg}{b}$ → integrale particolare

$v_y(t) = Ae^{-\frac{b}{m}t} + \frac{mg}{b}$ → soluzione

se $v_y(t=0) = 0 \qquad 0 = A + \frac{mg}{b} \rightarrow A = -\frac{mg}{b}$

→ $v_y(t) = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$ velocità che varia in modo esponenziale

Per $t \to \infty$ la velocità tende asintoticamente a un valore $\frac{mg}{b}$ velocità limite che dipende dalla massa

Se lascio cadere due palline di acciaio di massa diversa non cadono allo stesso tempo

→ Valida in aria per un corpo piccolo pantoforme

$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{mg}{b}\left[-\left(-\frac{b}{m}\right)e^{-\frac{b}{m}t}\right] \rightarrow \frac{\cancel{mg}\cancel{b}}{\cancel{bm}} e^{-\frac{bm}{m}t} = ge^{-\frac{b}{m}t}$ → a $t=0$ è uguale a g

Quando l'accelerazione giunge a zero il corpo si muove con velocità limite

→ Equazione del moto di un corpo esteso e veloce in aria

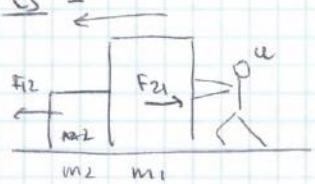
$f_v = \frac{1}{2} D \rho A v^2$ — D: coeff. attrito viscoso; ρ: densità aria; A: Area che è la superficie esposta al fluido

$\frac{1}{2} D \rho A v_L^2 = mg$

$v_L = \sqrt{\frac{2mg}{D\rho a}}$ — v_L: velocità limite

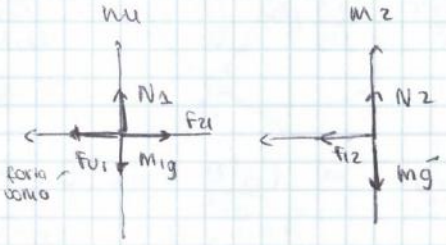
→ Per minimizzare l'attrito devo minimizzare l'area

ES 1



$\vec{a}$ (uguale per le due casse)

→ trovare la forza applicata in assenza di attrito



m_1: $\Sigma f = m\vec{a}$

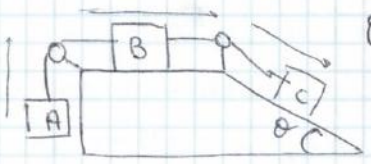
$x \begin{cases} fu_1 - f_{21} = m_1 a \\ N_1 - m_1 g = 0 \end{cases}$

m_2: $\begin{cases} f_{12} = m_2 a \\ N_2 - m_2 g = 0 \end{cases} \qquad f_{12} = f_{21}$

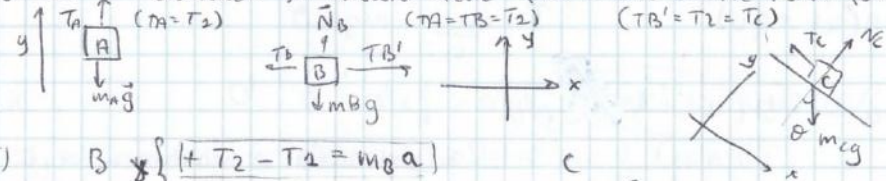
$fu_1 - m_2 a = m_1 a \qquad fu_1 = (m_1 + m_2) a$

ES 2

$m_A = 10$ kg $\qquad m_B = 15$ kg $\qquad m_C = 10$ kg $\qquad$ (→ legate tra loro tramite 2 funi ideali)



$\theta = 30°$ $\qquad$ Calcolare le tensioni delle funi e dire in che verso funziona il moto



scelto il verso gli altri devono essere concordi

$A_y \rightarrow \boxed{T_1 - m_A g = m_A a}$

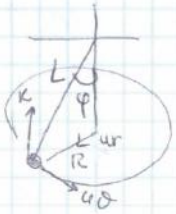
$B \begin{cases} x \; \boxed{+T_2 - T_1 = m_B a} \\ y \; +N_B - m_B g = 0 \end{cases}$

$C \begin{cases} x \; \boxed{-T_2 + m_C g \sin\theta = m_C a} \\ y \; N_C - m_C g \cos\theta = 0 \end{cases}$

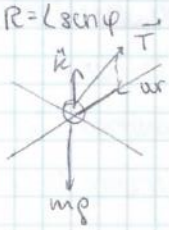
$a_c = \frac{v^2}{L}$ $\quad v = \frac{ds}{dt} = S_{max}\,\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$

→ l'accelerazione è massima quando il coseno vale 1

PENDOLO CONICO



$R = L\sin\varphi$



$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\begin{cases} \hat{u}_\theta & \dots \\ \hat{k} & +T\cos\varphi - mg = 0 \\ \hat{u}_r & -T\sin\varphi = m\frac{v^2}{R} \end{cases}$$

$T\sin\varphi = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$

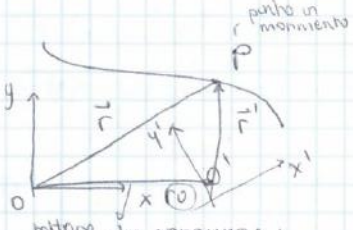
$T = \frac{mg}{\cos\varphi}$

$\frac{mg\sin\varphi}{\cos\varphi} = m\omega^2 L\sin\varphi$ $\qquad \frac{g}{\cos\varphi} = \omega^2 L$

$\omega^2 = \frac{g}{L\cos\varphi}$ $\qquad \cos\varphi = \frac{g}{\omega L}$

Per velo alte relativa l'angolo tende a $\frac{\pi}{2}$

IL MOTO RELATIVO



vettore che congiunge i due osservatori

$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0$

O $\quad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$\vec{r}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}$

$\vec{v}(t)_0 = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$

$\Rightarrow v_x\hat{i} + v_y\hat{i} + v_z\hat{k}$

O' $\quad \vec{r}' = x'\hat{i}' + y'j' + z'k'$

velocità del punto P rispetto all'osservatore O'

$\vec{v}_{P'} = v_{x'}i' + v_{y'}j' + v_{z'}k'$

voglio trovare la relazione tra le due velocità

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx_0}{dt}i + \frac{dy_0}{dt}\hat{j} + \frac{dz_0}{dt}\hat{k} + \left(\frac{dx'}{dt}i + \frac{dy'}{dt}j' + \frac{dz'}{dt}k' + x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + z'\frac{dk'}{dt}\right)$$

per $\hat{O}$ possono cambiare gli assi di O' (capita solo se ruotano)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{v}' + x'(\vec{\omega}\wedge i) + y'(\vec{\omega}\wedge j') + z'(\vec{\omega}\wedge k')$$

$\vec{v}_0$: velocità di O' rispetto a O

$\vec{\omega}\wedge i$: proprietà associativa

→ Per qualunque vettore costante un modulo $\vec{A}$ $\quad \|\vec{A}\| = cost$ $\quad \frac{dA}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{A}$

$\frac{di'}{dt} = \vec{\omega}\wedge i'$

può cambiare in ogni istante, non dice che cambia l'asse di rotazione

→ $\vec{v} = v_0 + v' + \vec{\omega}\wedge x'i' + \vec{\omega}\wedge y'j' + \vec{\omega}\wedge z'k'$

$\vec{v} = v_0 + v' + \vec{\omega}\wedge(x'i' + y'j' + \underbrace{z'k'}_{\vec{r}'})$

→ $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' + \underline{\vec{\omega}\wedge\vec{r}'}$ → TEOREMA DELLE VELOCITÀ RELATIVE

velocità dovuta al fatto che O' sta ruotando di se stesso

$\vec{v} - \vec{v}' = \underline{v_0 + \vec{\omega}\wedge\vec{r}'}$ → VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO velocità rispetto a O di un corpo fermo rispetto a O'

ACCELERAZIONE

O $\quad \vec{a} = a_x i + a_y j + a_z\hat{k}$ $\qquad$ O' $\quad \vec{a}' = a'_x\hat{i}' + a'_y\hat{j}' + a'_z\hat{k}'$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j} + v_{0z}\hat{k}) + \frac{d}{dt}(v'_{x'}i' + v_{y'}j' + v_{z'}k') + \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\wedge\vec{r})$$

$$= a_{0x}\hat{i} + a_{0y}\hat{j} + a_{z0}\hat{k} + \frac{dv_{x'}}{dt}i' + \frac{dv_{y'}}{dt}j' + \frac{dv_{z'}}{dt}k' + v'_x\frac{di'}{dt} + v'_y\frac{dj'}{dt} + v'_z\frac{dk'}{dt} + \frac{d\omega}{dt}\wedge r' + \vec{\omega}\wedge\frac{dr'}{dt}$$

$a_{0x}\hat{i} + a_{0y}\hat{j} + a_{z0}\hat{k}$: l'accelerazione di traslazione che O' ha rispetto a O

→ Il moto per O

$y(t=0) = h$

$y(t) = h + \overset{\text{velocità ascensione}}{v_0 t} - \frac{1}{2} g t^2$ → Il moto è diverso pur essendo uguale l'accelerazione e il tempo di volo

② Moto relativo rettilineo uniformemente accelerato

$\vec{a}_0 \neq 0$ (cost) $\omega = 0$

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$ (→ dal teorema delle velocità relative)

$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$ → O è inerziale O' no per O' non vale 2 principio di Newton

per O → $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$

per O' → $\Sigma F = m(\vec{a}' + \vec{a}_0)$ → $\Sigma F - m\vec{a}_0 = m\vec{a}'$ → non è l'equazione di Newton

Es

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$ $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0'$ $\vec{a} = a' + a_0$

$\begin{cases} x = x' \\ y = y' + y_0 \end{cases}$ → cambia non linearmente nel tempo

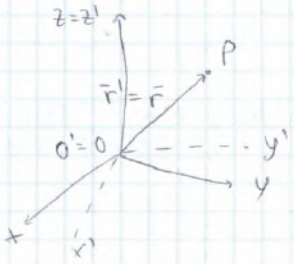
$\begin{cases} v_x = v_{0x}' \\ v_y = v_y' + v_0 \end{cases}$ $\begin{cases} \bar{a}_x = \bar{a}'_x \\ \bar{a}_y = \bar{a}'_y + a_0 \end{cases}$

Per O → $m\vec{g} = m\vec{a}$ $a_y = -g$ → $a'_y = -g - a_0$ → per O' l'accelerazione non è g → se a_0 è positiva l'accelerazione che vede O' è maggiore di g

$\Sigma F - m\vec{a}_0 = ma_y$ → forza apparente

$ma'_y = \underbrace{-mg}_{\Sigma F} \underbrace{-ma_0}_{\text{forza d'inerzia (apparente non esiste la reazione)}}$

③ SISTEMA DI RIFERIMENTO ROTANTE



$\vec{\omega} = \text{cost}$ $\vec{r}' = \vec{r}'$ ma con componenti diverse

per O → $r = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ per O' ⇒ $r' = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'$ → uguali

per O $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} \rightarrow \vec{v}' + \underline{\vec{\omega} \wedge \vec{r}'}$ Il corpo P si muove rispetto a O' con una velocità v' ma rispetto a O con velocità di trascinamento

$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}') \rightarrow a' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \cancel{\frac{d\omega}{dt} \wedge \vec{r}'} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}'}{dt}$

$\vec{a} = a' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r})$

$\vec{a} = \vec{a}' + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge r'}_{a_T} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}}_{a_\omega}$

accelerazione centripeta

→ Il lavoro dipende dalla traiettoria e non solo dal punto iniziale A e da quello finale B

$$\gamma \int_A^B \vec{F}_T ds \neq \gamma' \int_A^B \vec{F} d\vec{r} \qquad \delta W = \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

Il lavoro infinitesimo può essere positivo o negativo

$\delta W > 0 \leftarrow \bar{F} \cdot d\bar{r} > 0 \qquad \delta W < 0 \leftarrow \bar{F} \cdot d\bar{r} < 0 \qquad dW = 0 \leftarrow \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0$ (forza perpendicolare alla traiettoria)

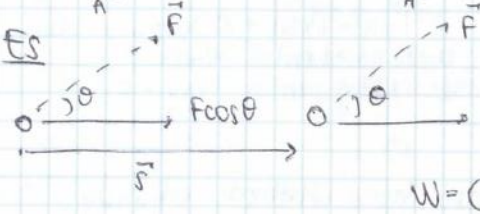
→ È sempre possibile esprimere il lavoro in coordinate cartesiane

$$W_{AB} = \int_A^B \bar{F} d\bar{r} = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z dz$$

Quando nello stesso tempo agiscono più forze il lavoro della forza risultante è uguale alla somma dei lavori ottenuti dalle singole forze

$$W_{AB} = \int_A^B (\Sigma F_i) \cdot d\vec{r} = \Sigma \int_A^B F_i \cdot d\vec{r} = \Sigma W_{AB,i}$$

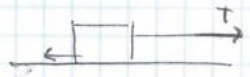
Es



Calcolare il lavoro effettuato da una forza di 45.0 N l'angolo è 50° e lo spostamento 75 m

$$W = (F\cos\theta)s = [(45.0N)\cos 50°](75.0m) = 2.17 \cdot 10^2 J$$

Lavoro effettuato dall'attrito

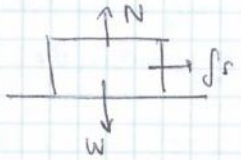


la forza di attrito dinamico si oppone sempre al moto. Quindi il lavoro sarà sempre negativo

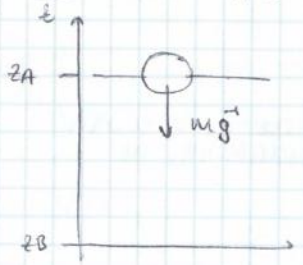
L'attrito statico in generale non produce lavoro perché non c'è spostamento ma ci sono delle eccezioni

Es → una cassa accelerata

Un camion ha un'accelerazione di 1,50 m/s². La massa della cassa è di 120 kg e non scivola. Il modulo dello spostamento è 65 m. Qual è il lavoro totale della cassa da parte di tutte le forze che agiscono su di essa? Qual è la forza che effettivamente causa il lavoro?



Es → Lavoro effettuato dalla forza gravitazionale: moto verticale 1.

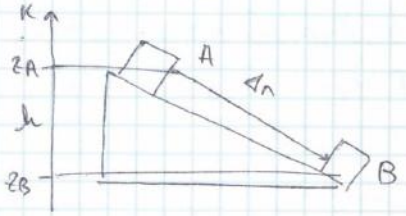


$$W = m\vec{g} \cdot \Delta\vec{r} = -mg\hat{k} \cdot (z_B - z_A)\hat{k}$$

$$W = mg(z_A - z_B) = mgh$$

→ Il lavoro causato dalla forza peso è positivo quando il corpo si muove verso il pavimento (che sta cadendo)
È negativo se lanciamo il corpo verso l'alto (forza e spostamento sono opposti)

Es - Lavoro della forza gravitazionale: piano inclinato

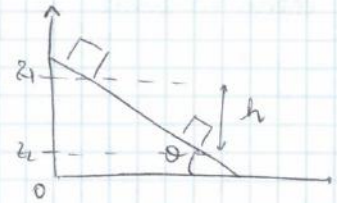


$$W_{AB} = m\bar{g} \cdot \Delta\bar{r} = -mg\hat{k} \cdot \Delta r$$

$\hat{k}\Delta r$ è la proiezione di Δr lungo l'asse z → $\hat{k}\Delta r = \Delta z = z_B - z_A$

$$W_{AB} = m\bar{g}\Delta\bar{r} = -mg(z_B - z_A) = mg(z_A - z_B) \Rightarrow mgh$$

→ L'espressione del lavoro è la stessa del caso precedente



t_1 il cubo è fermo a z_1 $\quad$ $t_2 \rightarrow$ il cubo raggiunge z_2 con $V = V_2$

Sia L la distanza percorsa $\|\Delta \vec{r}\| = L$

Sul cubo di ghiaccio agiscono 2 forze: il peso e la forza normale

→ La forza normale non causa lavoro poiché è perpendicolare allo spostamento

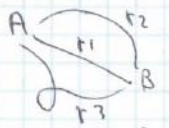
$W_{12} = m\vec{g} \cdot \Delta r = mgL\sin\theta \qquad 2\sin\theta = (z_1 - z_2) = h$

$W_{12} = mgh \qquad E_{k_2} = \frac{1}{2} m v_2^2 = mgh \rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$

FORZE CONSERVATIVE

Consideriamo il lavoro compiuto da una forza agente su un corpo un movimento da A a B

$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$ → In generale il lavoro dipende dal percorso scelto tra A e B



$W_{AB}^{r_1} \neq W_{AB}^{r_2} \neq W_{AB}^{r_3}$

In alcuni casi il lavoro dipende SOLO dalla posizione iniziale e da quella finale e non dal percorso compiuto

$W_{AB} = \int_{A\, r_1}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{A\, r_2}^{B} \vec{F} \cdot dr$ $\quad$ Es forza gravitazionale $W_{AB} = mg(z_A - z_B)$
forza elastica $W_{AB} = \frac{1}{2} k (x_A^2 - x_B^2)$

→ Una forza si dice conservativa se il lavoro compiuto durante lo spostamento da A a B dipende solamente dalla scelta di A e B e non dal percorso che li collega

$W_{AB} = \int_{A\, r_1}^{B} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{A\, r_2}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ $\quad$ Se andiamo da A a B lungo r_1 e torniamo indietro lungo r_2

$W_{AB+BA} = \int_{A\, r_1}^{B} \vec{F}\, d\vec{r} + \int_{A\, r_2}^{B} \vec{F}\, d\vec{r} = \oint_{r_1 + r_2} \vec{F}\, d\vec{r} \rightarrow \int_{A\, r_1}^{B} \vec{F}\, d\vec{r} - \int_{A\, r_2}^{B} \vec{F}\, d\vec{r} = 0$

→ Una forza è conservativa se il lavoro compiuto lungo un qualunque percorso chiuso è zero $\oint \vec{F}\, d\vec{r} = 0$

$\oint_r \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall r \rightarrow \nabla \times \vec{F} = 0 \qquad \nabla \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$

nabla

1) Applicato a una funzione scalare $U(x,y,z)$ indica il gradiente in un determinato punto

$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{dy}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k} = \text{grad}\, U \qquad dU = \nabla U \cdot d\vec{r}$

2) Si ha prodotto scalare con un vettore funzione (x,y,z) da la "divergence" del vettore in un punto

$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \text{div}\, \vec{u}$

3) Si ha prodotto vettoriale con un vettore funzione (x,y,z)

$\nabla \times \vec{F} = 0$ → la forza deve avere rotore 0
prodotto vettoriale

$\nabla \times v \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$ → La relazione $\oint_r \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall r \iff \nabla \times F$ è vera solo se il dominio è ~~strettamente~~ semplicemente connesso

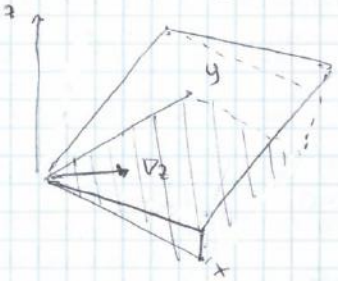
① Ogni forza centrale è conservativa

$\vec{F}_{cent} = f_x \hat{k} \qquad \text{rot}\, \vec{F} = 0 \qquad \begin{cases} \frac{\partial f_z}{dy} = \frac{\partial f_y}{\partial z} & 0 = 0 \\ \frac{\partial f_z}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial z} & 0 = 0 \\ \frac{\partial f_y}{dx} = \frac{\partial f_x}{\partial y} & 0 = 0 \end{cases}$

→ Il rotore è zero però una forza centrale

La componente x non la derivo mai rispetto a x, y mai rispetto a y. ←

es $z = kx + 2ky$ piano inclinato in entrambi i lati

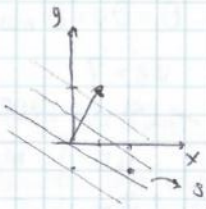


$$\nabla z = \frac{\partial z}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\hat{j}$$

$$\rightarrow k\hat{i} + 2k\hat{j} = k(i + 2j)$$

$kx + 2ky = cost$ → sup equipot

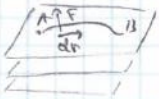
$kx + 2ky = 0 \quad y = -\frac{1}{2}x$



→ Il vettore gradiente punta sempre nella direzione in cui la funzione aumenta in modo massimo

sup equipot perpendicolare al gradiente

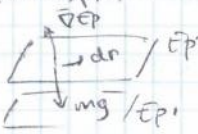
SUPERFICI EQUIPOTENZIALI → luogo geometrico dei punti in cui l'energia potenziale assume lo stesso valore



$E_p = cost$ $\quad \bar{F}\cdot d\bar{r} = -dE_p \quad \bar{F}\cdot d\bar{r} = 0$ se dr è sulla superficie equipotenziale

Questo accade sempre quando la forza è ortogonale alla superficie

forza peso → $F \perp$ sup equipotenziale $\quad \bar{F} = -\nabla E_p$ → anche il gradiente è sempre perpendicolare a S_{Eqp}



$\nabla E_p(x,y,z)$ → punta nella direzione verso cui E_p aumenta di più

la forza gravitazionale punta verso dove E_p diminuisce

$E_{p2} > E_{p1}$ → il gradiente punta verso E_{p2}

$W_{AB} = E_{pA} - E_{pB}$ → l'energia potenziale non è misurabile ma la sua variazione si possono essere definite a meno di una costante additiva

$10_J = (20-10)$
$(25-15)$

$$\int_{x_0}^{x} \bar{F}d\bar{r} = E_{px_0} - E_{px} \qquad E_{px} = E_{px_0} - \int_{x_0}^{x} \bar{F}d\bar{r}$$

peso

$W_{AB} = mgz_A - mgz_B = (mgz_A + c) - (mgz_B + c)$

$E_{pz} = E_p(z_0) + mg(z - z_0)$ → scelgo z_0 come origine degli assi $z_0 = 0 \quad E_p(z_0) = 0$

$E_{pz} = mgz$

forza elastica

$W_{AB} = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 \qquad E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + c \qquad$ se $c = 0 \quad E_p = \frac{1}{2}kx^2$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Un sistema in cui solo forze conservative interne compiono lavoro è un sistema conservativo

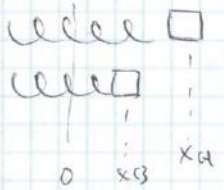
Lavoro totale → $W_{AB} = E_{pA} - E_{pB}$ (→ lo posso scrivere perché le forze sono conservative)

$= E_{kB} - E_{kA}$ → teorema energia cinetica

$E_{pA} - E_{pB} = E_{kB} - E_{kA}$ → $\underbrace{E_{pA} + E_{kA}}_{\text{energia meccanica}} = \underbrace{E_{pB} + E_{kB}}$ → la somma dell'energia è uguale in A e in B

→ Per qualunque trasformazione di un sistema conservativo l'energia meccanica è costante

molla



$V_A = 0 \Rightarrow \begin{cases} E_{k,A} = 0 \\ E_{p,A} = \frac{1}{2}kx_A^2 \end{cases} \qquad x_B = \frac{1}{2}x_A$

$E_{p,B} = \frac{1}{2}kx_B^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{2}x_A\right)^2 = \frac{1}{4}E_{pA}$

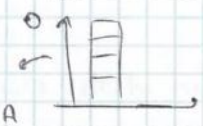
$\cancel{E_{kB}}$ $E_{p,A} + E_{kA} = E_{pB} + E_{kB}$

$E_{kB} = E_{pA} + E_{kA} - E_{pB}$

$E_{kB} = \frac{3}{4}E_{pA}$

$E_m = E_k + E_p$

$E_m = E_k + E_p$



$E_m = E_{p0} + E_{k0}$

$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kx_A^2$

$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,x_A$

SISTEMI NON CONSERVATIVI

$W_{AB} = W_{AB}^{cons} + W_{AB}^{nc}$

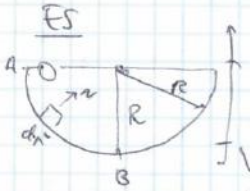
$E_{KB} - E_{KA} = E_{PA} - E_{PB} + W_{AB}^{nc}$

$W_{AB}^{nc} = E_{KB} - E_{KA} - E_{PA} + E_{PB} \rightarrow W_{AB}^{nc} = (E_{PB} + E_{KB}) - (E_{PA} + E_{KA}) \rightarrow E_{MB} - E_{MA} = \Delta E_M$

→ L'energia meccanica in un sistema non conservativo non si conserva ma cambia (dove le forze non conservative compiono lavoro)

L'energia meccanica diminuisce se il lavoro delle forze non conservative è negativo

ES



→ Sasso 0,20 kg scivola all'insaccatiera $R = 0,50$ c'è attrito sistema non conservativo

$W(\vec{N}) = 0$ → N è sempre perpendicolare alla superficie

$W_{peso} = \int_A^B m\vec{g}\,dr = mg(z_A - z_B) = mgR$ → lavoro positivo che tenderebbe a aumentare E_K

Il lavoro del peso è una forza conservativa.

2) Qual è la velocità della pietra quando raggiunge il punto B?

$v_B = ?$ $W_{AB}^{nc} = -0,22\,J$ (→ Il lavoro dell'attrito è sempre negativo)

$\Delta E_M = E_{MB} - E_{MA} \rightarrow mgz_B + \frac{1}{2}mv_B^2 - mgz_A$ (non c'è en. cinetica il corpo parte da fermo in A)

$mg(z_B - z_A) + \frac{1}{2}mv_B^2$

$W_{AB}^{nc} + mg(z_A - z_B) = \frac{1}{2}mv_B^2 \rightarrow W_{AB}^{nc} + mgR = \frac{1}{2}mv_B^2 \rightarrow v_B^2 = \frac{2W_{AB}^{nc}}{m} + 2gR$

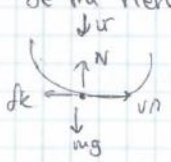
W_{AB} negativo, l'effetto dell'attrito è rallentare la pietra

3) Quali sono le forze costanti sulla pietra?

- L'attrito non è costante perché N cambia

4) Quando la pietra raggiunge B qual è la forza normale su di esso?

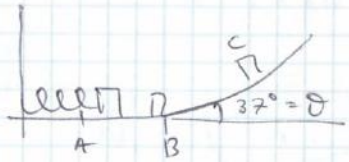
→ Se mi viene chiesta la forza in un punto devo usare la dinamica



$\vec{u_r}$ $\begin{cases} -N + mg = -\frac{mv_B^2}{R} \\ -fK = ma_r \end{cases} \rightarrow N = \frac{mv_B^2}{R} + mg$ → maggiore del peso perché deve anche fare la circonferenza

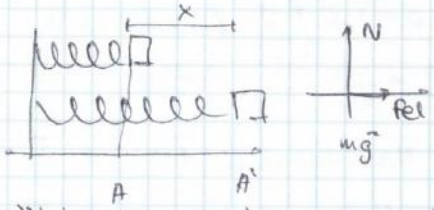
→ Un blocco da 2 Kg viene spinto contro una molla di massa trascurabile ($K = 400\,N/m$)

La molla viene compressa di 0,220 m non c'è attrito



→ Sulla superficie inclinata non c'è attrito

1) Qual è la velocità del blocco quando scorre sulla superficie orizzontale?



$W(Fel) + W(N) + W(m\vec{g}) = \Delta E_K$

$W\Sigma F = \Delta E_K$ $\Sigma F = \vec{F}_{el}$ $\int_A^{A'} \vec{F}_{el}\,d\vec{r} = E_{KA'} - \cancel{E_{KA}}$ (Il corpo è fermo all'inizio)

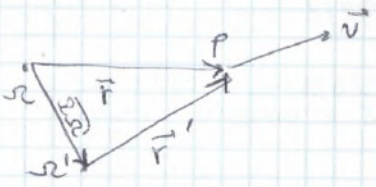
$\rightarrow \frac{1}{2}K(x_A - x_B)^2 = E_{KA'} = \frac{1}{2}mv_{A'}^2$

→ Il teorema dell'energia cinetica vale per qualunque forza, invece il teorema di conservazione dell'energia meccanica vale solo nei sistemi conservativi

→ Tra A e A' l'energia meccanica si conserva perché non c'è attrito → $E_{MA} = E_{MA'}$

$mgz_A + \frac{1}{2}Kx^2 + \cancel{\frac{1}{2}mv_A^2}_{=0} = mgz_{A'} + \frac{1}{2}mv_{A'}^2 \rightarrow \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}mv_A^2$

x è la compressione stesso risultato

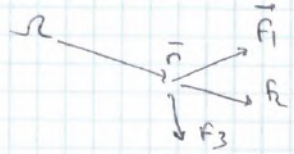


$$\vec r = \overline{\Omega\Omega'} + \vec r\,'$$

$$\vec M_\Omega = (\overline{\Omega\Omega'} + \vec r\,')\wedge \vec v$$

$$\overline{\Omega\Omega'}\wedge v + (\vec r\wedge \vec v) \rightarrow \vec M_{\Omega'}$$

Momento di una forza



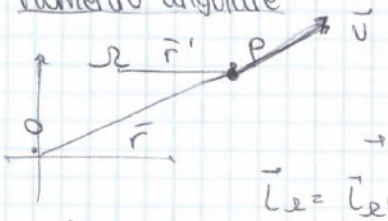
$$M_\Omega = \vec r\wedge \vec F \qquad \vec r = \overrightarrow{\Omega F}$$

$$[M_\Omega] = [F][r] = MLT^{-2}L = ML^2T^{-2} \text{ unità } N\cdot m$$

$$\Sigma \vec M_\Omega = \vec r\,'\wedge F_1 + \vec r\wedge F_2 + \vec r\wedge F_3 = \vec r\wedge(\Sigma F)$$

la somma dei momenti è uguale al momento della somma delle forze

Momento angolare



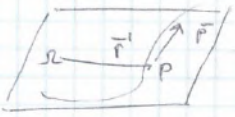
$$\vec L_\Omega = \vec r\,'\wedge \vec p = \vec r\,'\wedge m\vec v$$

$$[L_\Omega] = [p][r] = MLT^{-1}L = ML^2T^{-1} \text{ unità } kg\frac{m^2}{s}$$

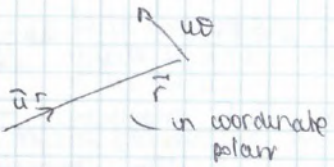
→ L dipende dalla scelta del polo

$$\vec L_\Omega = \vec L_{\Omega'} + \overline{\Omega\Omega'}\wedge \vec p$$

$\|\vec L_\Omega\| =$



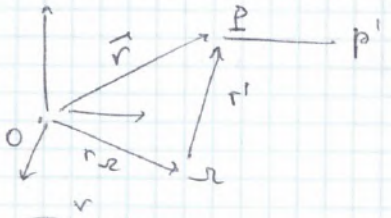
$$r'p\sin\theta \rightarrow mvr'\sin\theta \rightarrow mv_\perp r'$$



$v_\perp$ → velocità trasversa → $r'\frac{d\theta}{dt}$ (dalle c. polari) → $r'\omega$

$$\|L_\Omega\| = mr'(\omega r') = m\omega r'^2$$

Teorema del momento angolare



$$\vec L_\Omega = \vec r\,'\wedge \vec p = \vec r\,'\wedge m\vec v \qquad \frac{d\vec L_\Omega}{dt} = \frac{d\vec r\,'}{dt}\wedge \vec p + r'\wedge \underbrace{\frac{d\vec p}{dt}}_{\Sigma \vec F}$$

$$\vec r = \vec r_\Omega + \vec r\,'$$

$$\vec r\,' = \vec r - \vec r_\Omega$$

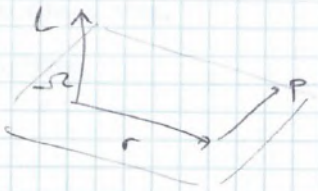
$$\frac{d}{dt}(\vec r - \vec r_\Omega)\wedge p + r'\wedge \Sigma \vec F =$$

$$\underbrace{\frac{d\vec r}{dt}\wedge \vec p}_{=0} - \frac{d\vec r_\Omega}{dt}\wedge \vec p + \Sigma \vec M_\Omega$$ → la somma dei momenti delle forze applicate al punto

$(v \parallel p)$ $\qquad \Sigma \vec M_\Omega - \vec v_\Omega\wedge \vec p$

$$\frac{d\vec L_\Omega}{dt} = \Sigma \vec M_\Omega - \vec v_\Omega\wedge \vec p = 0$$ se a) il polo è fermo b) $\vec p = 0$ c) $\vec v_\Omega \parallel \vec p$

$\Sigma \vec M_\Omega = \frac{d\vec L_\Omega}{dt}$	$\Sigma \vec F = \frac{d\vec p}{dt}$
$\Sigma \vec M_\Omega = 0$	$\Sigma F = 0$
$\vec L_\Omega =$ costante	$\frac{dp}{dt} = 0 \rightarrow p =$ costante



$\vec L_\Omega =$ cost vettorialmente

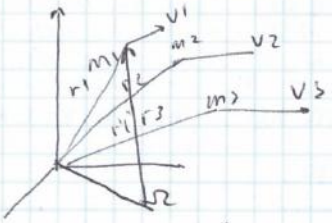
→ Se la somma dei momenti è costante il moto avviene nel piano

forza centrale $\quad F(r) = -f(r)u_r \qquad$ Una forza centrale ha sempre momento nullo

$$\vec r\,'\wedge F = 0 \qquad \vec M_\Omega = 0$$

$$\vec L_\Omega = \text{cost}$$ → Un corpo che si muove per via di una forza centrale si muove in un piano

DINAMICA DEI SISTEMI



$m_i \quad \bar{r}_i \to \bar{v}_i \to \bar{a}_i$

$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$

$\bar{p}_i = m\bar{v}_i$

$L_{i,\Omega} = \bar{r}_i' \wedge p_i$

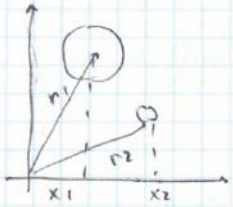
$P = \sum_i p_i = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i$ (la quantità di moto è estensiva)

$EK = \sum_i E_{ki} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ → QUANTITÀ SOMMABILI NEL SISTEMA

$\bar{L}_\Omega = \sum_i \bar{L}_{i,\Omega} = \sum_i \bar{r}_i \wedge \bar{p}_i$

→ Voglio associare al sistema una posizione. Definiamo un punto CENTRO DI MASSA

$\vec{r}_{CM} \overset{def}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i}{\sum m_i} \to \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + m \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots m_n}$ → È una media "pesata" del vettore posizione



$M >> m$

$\bar{r}_{CM} = \frac{M r_1 + m r_2}{M + m}$

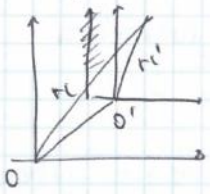
$x_{CM} = \frac{M x_1 + m x_2}{M + m}$

↓

se $M = m \quad x_{CM} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ← Se le due masse sono uguali la media pesata è la metà

Se $M >> m$ il centro di massa sta sempre sulla congiungente ma sarà più vicino a M

→ la posizione del centro di massa è indipendente dal sistema di riferimento

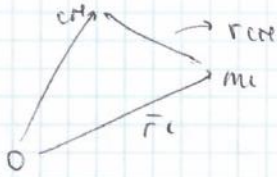


Per O $\bar{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \bar{r}_i}{\sum m_i}$ Per O' $\bar{r}'_{CM} = \frac{\sum_i m_i \bar{r}_i'}{\sum m_i}$

$\bar{r}_{CM} \neq \bar{r}_{CM}'$ $\quad r_i = r_i + \overline{OO'} \to r_i' = \bar{r}_i - \overline{OO'}$

$\bar{r}'_{CM} = \frac{\sum_i m_i (\bar{r}_i - \overline{OO'})}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \bar{r}_i}{\sum_i m_i} - \frac{\sum m_i}{\sum_i m_i} \overline{OO'}$

$\bar{r}'_{CM} = \bar{r}_{CM} - \overline{OO'}$



→ $r_{CM} - r_i$ → Voglio calcolare il vettore che congiunge un punto del sistema al centro di massa

Per O' $\bar{r}'_{CM} - r_i' = (\bar{r}_{CM} - \overline{OO'}) - (\bar{r}_i - \overline{OO'}) = \bar{r}_{CM} - \bar{r}_i$

→ Il centro di massa può non coincidere con alcun punto del sistema

velocità $CM = \frac{d}{dt} \bar{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i v_i}{\sum_i m_i}$ (→ la massa è costante dei singoli corpi)

$P = \sum_i \bar{p}_i = \sum_i m_i \bar{v}_i$ → Quantità di moto del sistema

$\bar{v}_{CM} = \frac{P}{M}$ ← somma delle masse

$\underline{\underline{\vec{P} = M \bar{v}_{CM}}}$ → PRIMO TEOREMA DEL CENTRO DI MASSA

$\vec{a}_{CM} = \frac{d}{dt} \bar{v}_{CM} = \frac{\sum_i m_i a_i}{\sum_i m_i (M)}$ → media pesata delle accelerazioni dei singoli punti

$\bar{a}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i a_i$ $\quad m_i a_i = R_i$ → forza risultante al corpo i-esimo < forze interne / forze esterne

↓

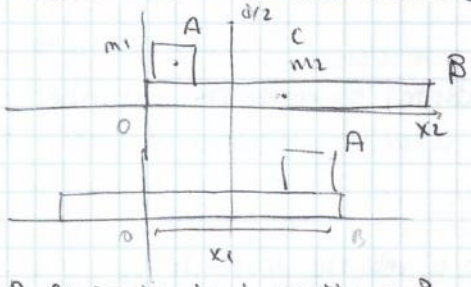
$R_i^{int} + R_i^{est} = \sum_{j \neq i} \bar{F}_{ji} + R_i^{ext}$

→ $\frac{1}{M} \sum_i \left(\sum_{j \neq i} F_{ji} + R_i^{ext} \right) = \cancel{\frac{1}{M} \sum_i \sum_j F_{ji}} + \frac{1}{M} \sum_i \bar{R}_i^{ext}$

è zero, è la somma di tutte ← le forze interne, uguali e opposte, si elidono a vicenda

Es

Un punto materiale A di massa m è posto all'estremità sinistra di una lastra B lunga d e di massa m_2. Il tutto poggia su un piano orizzontale senza attrito.
Sotto l'azione di forze interne A entra in movimento e arriva all'estremità di destra di B.
Dato un asse x con origine nella posizione iniziale di A orientato a destra
→ determinare la coordinata di A quando si trova nell'estremità destra di B.



$P_x = cost$ perché $\sum F_x^{cost} = 0$ $\quad \frac{dP}{dt} = \sum F$

$P_x = M v_{rex} = cost = 0$ il CM è fermo → se non agiscono forze esterne il CM resta fermo

$P_x^i = P_x^f$

$0 = 0$

→ Considero il corpo B come un corpo puntiforme con centro di massa nel centro geometrico

→ A si sposta di d rispetto a B ma anche B si muove

$$X_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1+m_2} x_2^i \rightarrow \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{d}{2}$$

$$X_{CM} = \frac{m_1 x_1^{fin} + m_2 x_2^{fin}}{m_1+m_2} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{d}{2}$$

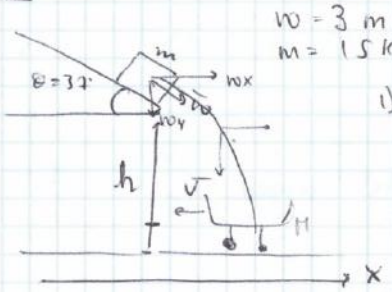
?

$$x_A^f = 2 x_{CM} = \frac{m_2}{m_1+m_2} d$$

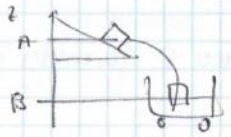
Es

$v_0 = 3\ m/s$ $\quad h = 6\ m$

$m = 15\ kg$ $\quad M = 50\ kg$



1) Qual è la velocità del pacco appena prima che tocchi il carrello?



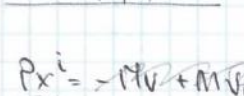
$E_m^A = E_m^B$ → Solo forze conservative sul pacco

$\frac{1}{2} m v_0^2 + mgz_A = \frac{1}{2} m v_B^2 + mgz_B =$

$v_B^2 = v_0^2 + 2g(z_A - z_B) \rightarrow v_0^2 + 2gh$

2) Qual è la velocità del carrello dopo che è caduto il pacco

Sistema → pacco + carrello → Non agiscono forze esterne non conservative



$\sum F_y^{ext} = 0 \rightarrow P_y = cost$

$\sum F_y^{ext} = 0 \rightarrow P_x = cost$

$P_x^i = -Mv + m v_{Bx} = -Mv + m v_0 x$ $\quad P_x^f = -(M+m) v_f$

↓ componente orizzontale velocità

Quantità di moto iniziale

$P_x^i = P_x^f \rightarrow -Mv + m v_{0x} = -(M+m) v_f \rightarrow v_f = \frac{Mv - m v_{0x}}{M+m} = \frac{Mv - m v_0 \cos\theta}{M+m} \sim 3,3\ m/s$

$E_{kc}^i = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 \rightarrow$

$E_{kc}^f = \frac{1}{2}(M+m) v_f^2$

$E_{kc}^f < E_{kc}^i$ → diminuisce per il lavoro negativo dell'attrito tra il pacco e il carrello

Es (SISTEMI A MASSA VARIABILE)

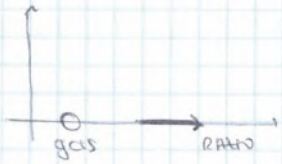
$\frac{dm}{dt}$ (sabbia)

a) $\frac{dp_{sx}^{sabbia}}{dt}$ $\quad$ b) f. attr $\quad$ c) F^{ext} $\quad$ d) Lavoro F^{ext} in 1 sec

e) $\frac{dE_k}{dt}$

a) Variazione nel tempo della quantità di moto della sabbia

$\sum F_x^{est} = 0 \quad P_x = cost$



$\bar{V}_0$ = velocità iniziale

$\bar{v}(t) = v(t)\hat{i}$ $\qquad \bar{v}' = \overset{v_0\hat{i}}{\cancel{\bar{v}}} - V_{ex}\hat{i}$ → velocità del gas

→ $M\frac{dv}{dt}\hat{i} = +\frac{dm}{dt} V_{ex}\hat{i}$ (equazione precedente nel caso $\Sigma F^{ext} = 0$)

$M\frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt} V_{ex}$, spinta in modulo

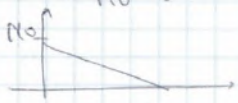
→ Trovare la velocità del razzo dopo che ha espulso una certa massa

$M\frac{dv}{dt} = -\frac{dM}{dt} V_{ex}$ → $\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{M}\frac{dM}{dt} V_{ex}$

$\int_{t_0}^{t} \frac{dv}{dt}\,dt = -\int_{t_0}^{t} \frac{dM}{dt}\frac{1}{M(t)} V_{ex}\,dt$ ⇒ $v(t) - v(t_0) = -\overset{cost}{\cancel{t_0}}\int_{t_0}^{t} \frac{dM}{M}$

→ $v(t) = v(t_0) - V_{ex}\log\left[\frac{M(t)}{M_0}\right]$ → $v(t_0) + V_{ex}\log\left[\frac{M_0}{M(t)}\right]$

→ se $\frac{dM}{dt}$ costante



$M(t) = M_0 - K(t - t_0)$ La massa al tempo t sarà sempre inferiore a M_0

$v(t) = v_0 + V_{ex}\log\left[\frac{M_0}{M_0 - K(t-t_0)}\right]$ $\qquad a = \frac{dv}{dt} = V_{ex}\frac{K}{M_0 - Kt}$ → l'accelerazione diminuisce nel tempo anche se dM è costante

2) Se $\Sigma F^{ext} \neq 0$

$\Sigma F^{ext} \simeq Mg$ $\qquad M\frac{d\bar{v}}{dt} = Mg - \frac{dm}{dt}\bar{v}' = Mg - \frac{dM}{dt}\bar{v}'$

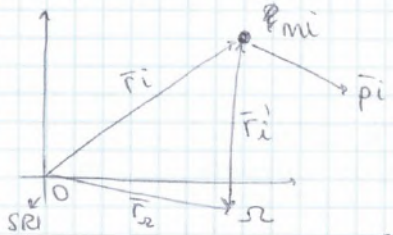
$\frac{d\bar{v}}{dt} = g + \frac{1}{M}\frac{dM}{dt}\bar{v}'$ $\xrightarrow[\text{integrando}]{}$ $\bar{v}(t) = \bar{v}_0 + \bar{v}'\log\frac{M(t)}{M_0} + \bar{g}(t - t_0)$

$\bar{g} = -g\hat{k}$ $\qquad \bar{v}' = -V_{ex}\hat{k}$ $\qquad v_z(t) = V_{ex}\ln\left[\frac{M_0}{M_t}\right] - g(t - t_0)$

↓ accelerazione dovuta al fatto che la massa varia nel tempo

MOMENTO DEL SISTEMA

$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = -\bar{v}_\Omega \wedge \bar{p} + \Sigma\bar{M}_\Omega$ → per un singolo corpo



$\vec{L}_{\Omega i} = \bar{r}_i' \wedge \bar{p}_i = \bar{r}_i' \wedge m_i\bar{v}_i$

$\vec{L}_\Omega = \sum_{i=1}^{n}\vec{L}_{\Omega i} = \Sigma\bar{r}_i' \wedge m_i\bar{v}_i = \Sigma\bar{r}_i \wedge \bar{p}_i$

$\frac{dL_\Omega}{dt} = \Sigma\frac{d\bar{r}_i'}{dt} \wedge \bar{p}_i + \sum_i \bar{r}_i' \wedge \frac{d\bar{p}_i}{dt}$

$\bar{r}_i = \bar{r}_\Omega + \bar{r}_i'$ → $\bar{r}_i' = \bar{r}_i - \bar{r}_\Omega$

$\sum_i \frac{d}{dt}(\bar{r}_i - \bar{r}_\Omega) \wedge \bar{p}_i + \Sigma\bar{r}_i \wedge (\bar{R}_i^{int} + \bar{R}_i^{est})$

$R_i^{int} = \sum_{j \neq i}\bar{F}_{ji}$

→ $\frac{dL_\Omega}{dt} = \cancel{\sum_i \bar{v}_i \wedge \bar{p}_i} - \overset{v_\Omega \wedge \Sigma p_i}{\sum_i \bar{v}_\Omega \wedge \bar{p}_i} + \underbrace{\sum_i \bar{r}_i' \wedge \bar{R}_i^{est}}_{\Sigma_i M_{\Omega i}^{ext}} + \cancel{\sum_i \bar{r}_i' \wedge \sum_j \bar{F}_{ji}}$ → i momenti delle forze si elidono a vicenda

$\frac{dL_\Omega}{dt} = -v_\Omega \wedge \bar{P} + \Sigma\bar{M}_\Omega^{est}$

$\bar{p}_i = \cancel{m_i\bar{v}_i}$ $\qquad \bar{v}_\Omega \wedge \bar{P} = 0$ $\qquad$ a) $\bar{v}_\Omega = 0$ $\qquad$ b) $\bar{P} = 0$ → centro di massa è fermo

c) $\Omega = CM$ → $\bar{v}_{CM} \wedge \bar{P} = \bar{v}_{CM} \wedge M\bar{v}_{CM}$ $\qquad$ d) $\bar{v}_\Omega \parallel \bar{v}_{CM}$

⇒ $\frac{dL_\Omega}{dt} = \Sigma\bar{M}_\Omega^{est}$ → SECONDA EQUAZIONE CARDINALE

TEOREMI DI KÖNIG

1° Teorema

$\vec{L_O} = \sum \vec{r_i} \wedge m_i v_i$

dal sistema di riferimento inerziale usando O come polo.

$\cancel{\vec{L_{CM}} = \vec{L_O} +}$ $\vec{L_O} = \vec{L_{CM}} + \vec{r_{CM}} \wedge \vec{P}$

$\vec{L_O} = \vec{L'_{CM}} + \underline{\vec{r_{CM}} \wedge \vec{P}}$

momento nel centro di massa

del centro di massa

SRI $\quad EK = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$

$v_i^2 = \vec{v_i} \cdot v_i \rightarrow \sum_i \frac{1}{2} m (\vec{v_i}' + \vec{v_{CM}})(\vec{v_i} + \vec{v_{CM}}) \rightarrow$

$\sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} M v_c^2 + \sum_i \underline{m_i v'_i \cdot v_c}$ → Termine nullo $(m_i v'_i = 0)$

→ $K = K' + \frac{1}{2} M v_c^2$ → TEOREMA DI KÖNIG PER L'ENERGIA CINETICA

L'energia cinetica di un sistema di riferimento S (inerziale) si può sempre scrivere come la somma di due parti

1. L'energia K' calcolata in un sistema di riferimento con origine nel centro di massa e in traslazione rispetto a S
2. Il termine $\frac{1}{2} M v_c^2$ che rappresenta l'energia cinetica che avrebbe nel riferimento S un punto materiale di massa uguale alla massa totale del sistema e coincidente con il centro di massa

→ la relazione vale solo se gli assi del sistema di riferimento S' mantengono orientazione costante nel tempo

IL TEOREMA LAVORO-ENERGIA PER I SISTEMI

Calcoliamo il lavoro associato a un sistema di particelle. Per ciascun punto abbiamo

$dW_i = \vec{F_i} dr = \vec{F_i}^{int} dr + \vec{F_i}^{ext} dr = dW_i^{int} + dW_i^{ext}$

$W = \sum_i \int_A^B F_i dr = \sum \left(\int_r F_i^{int} dr + F_i^{ext} dr \right) = W^{int} + W^{ext}$ → Il contributo delle forze esterne non scompare

F_i → forza risultante sull'iesima particella → $dW = F_i dr_i = m a_i dr_i = m \frac{dv_i}{dt} \frac{dr_i}{dt} dt = m \vec{v_i} d\vec{v}$

$\underline{W} = \sum_i \int_A^B F_i d\vec{r_i} = \sum_i \int_A^B m v_i dv_i = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \Big|_A^B = \underline{EK_B - EK_A}$

→ La variazione dell'energia cinetica del sistema è uguale al lavoro effettuato da tutte le forze agenti sulle particelle del sistema, sia interne che esterne

ENERGIA MECCANICA

→ Se le forze interne sono conservative, possiamo definire l'energia potenziale associata a queste

$W^{int} = -\Delta E_p$ → In questo caso → $W = W^{int} + W^{ext} = -\Delta E_p + W^{ext} = \Delta E_k$

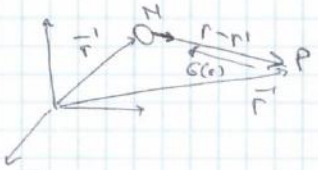
→ $W^{ext} = \Delta E_p + \Delta E_k = \Delta E_m$

Se il sistema è isolato, la forza risultante è zero e si verifica la conservazione dell'energia meccanica

$\Delta E_m = \Delta E_p + \Delta E_k = 0$

→ Il verso del campo è anche il verso della forza agente su una carica prova posta nel campo

Se la massa non è nell'origine $\qquad r-r' =$ versore × modulo



$$\vec{G}(r) = \frac{-fM}{\|r-r'\|^2} \cdot \frac{r-r'}{\|r-r'\|}$$ versore diretto da $\hat{u}_r$

$$\vec{G}(\vec{r}) = \frac{-fM}{\|r-r'\|^3} \cdot (r-r')$$ → generalizzazione di quanto scritto prima

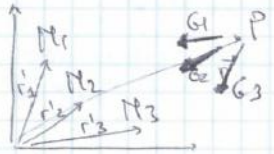
$$\vec{E}(r) = k\frac{Q}{\|r-r'\|^3} \cdot (r-r')$$

→ Per visualizzare un campo si utilizzano le linee di campo tangenti in ogni punto al vettore campo

→ L'intensità di campo è identificabile con il numero di linee che attraversano una superficie unitaria

→ La direzione delle linee di campo è la direzione che avrebbe la forza esercitata su una carica positiva

Principio di sovrapposizione → Il campo di un punto P generato da più sorgenti puntiformi è la somma dei campi creati dalle singole sorgenti

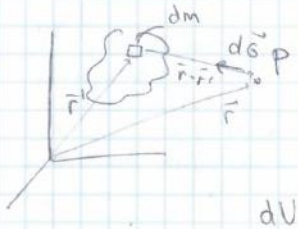


$$G(r) = \vec{G}_1(\vec{r}) + \vec{G}_2(r) + \vec{G}_3(r)$$

$$= \frac{-fM_1}{\|r-r'\|^3}(r-r'_1) - f\,M_2 \ldots$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{-fM_i}{\|r-\vec{r}'_i\|^3}(r-\vec{r}'_i)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} = \frac{kQ_i}{\|\vec{r}-\vec{r}'_i\|^3}(\vec{r}-\vec{r}'_i)$$



$\rho = \frac{dm}{dV}$ → densità di massa $\quad \rho(\vec{r}')$

$$d\vec{G} = \frac{-f\,dm}{\|r-r'\|^3}(r-r') \longrightarrow \vec{G}(r) = \int_V \frac{-f\,\rho(\vec{r}')\,dV}{\|r-r'\|^3}(r-r')$$ → campo generato da distribuzione di carica non puntiforme

dm

$dV = dx'\,dy'\,dz'$ → coordinate cartesiane

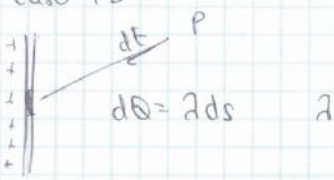
$dV = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$ → coordinate sferiche

$$\vec{E}(r) = \int_V \frac{k\,\rho_c(\vec{r}')\,dV}{\|r-r'\|^3}(r-\vec{r}')$$

$dQ = \rho_c\, dV$ ↳ densità di carica

$\sigma = \frac{dQ}{dS}$ → se la carica è distribuita su una superficie abbiamo la distribuzione superficiale σ

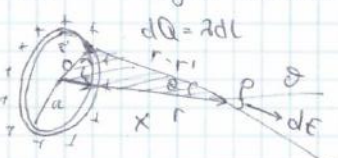
caso 1D



$dQ = \lambda\, dS \qquad \lambda = \frac{dQ}{dS}$

$$d\vec{E} = \frac{k\lambda\, dl}{\|r-r'\|^3}(r-r') \qquad \vec{E}\int_L \frac{k\,\lambda(\vec{r}')\,dl}{\|r-r'\|^2}(r-r')$$

Es Voglio calcolare il campo, abbiamo una distribuzione lineare



$dQ = \lambda\, dl \qquad \|r\| = x \qquad dE = \frac{k\lambda\, dl}{\|r-r'\|^2}(r-r')$

$x = \|r-r'\|\cos\theta \longrightarrow \cos\theta = \frac{x}{\|r-r'\|}$

$dE_x = dE \cdot i = dE\cos\theta$

$\|r-r'\| = \sqrt{a^2+x^2}$

$$dE_x = \underbrace{\frac{k\lambda\, dl}{\|r-r'\|^2}(r-r')}_{dE} \cdot \frac{x}{\|r-r'\|}$$

$dE\cos\theta$

$$dE = \underbrace{\frac{k\lambda\, dl}{\|r-r'\|^2}}_{\text{modulo}} \cdot \underbrace{\frac{r-r'}{\|r-r'\|}}_{\hat{u}_r} \longrightarrow dE_x = \frac{k\lambda\, dl\, x}{\|r-r'\|^3} \rightarrow \frac{k\lambda\, dl\, x}{(\sqrt{a^2+x^2})^3}$$ variabile di integrazione

$W_{AB} = \int_A^B f \cdot dr = E_p^A - E_p^B$

caso gravitazionale (1 massa puntiforme o sferica)

$f = -\gamma \frac{mM}{r^2} \hat{u}_r \qquad W_{AB} = \int_A^B -\frac{\gamma m M}{r^2} \underbrace{u_r \cdot dr}_{dr} = -\gamma m M \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr = -\gamma m M \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$

$-\frac{\gamma m M}{r_A} + \frac{\gamma m M}{r_B} = E_p^A - E_p^B$

$E_p^A = -\frac{\gamma m M}{r_A} + c \qquad E_p^B = -\frac{\gamma m M}{r_B} + c$

$\boxed{E_p(r) = -\frac{\gamma m M}{r} + c}$ → grav $\qquad E_p(r) = \frac{k q Q}{r} + c$ → elettr

→ Se pongo $E_p = 0$ per $r = R$

$E_p(R) = -\frac{\gamma m M}{R^2} + c = 0 \qquad c = +\frac{\gamma m M}{R^2} \qquad E_p(r) = -\frac{\gamma m M}{R} + \frac{\gamma m M}{R}$

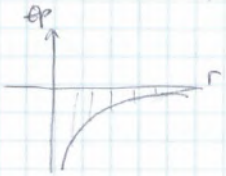
$E_p(r) = -\gamma m M \left(\cancel{\frac{R-r}{rR}} \; \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) = \gamma m M \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) = \gamma m M \left(\frac{r-R}{rR} \right)$

se $r \gtrsim R$

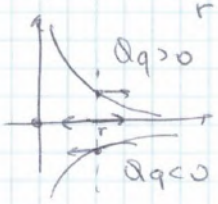
$E_p = \frac{\gamma m M}{R^2} h = m \underbrace{\frac{\gamma M}{R^2}}_{g} h \qquad g = G(R)$

→ Pongo $E_p(r) = 0$ per $r = \infty$

$E_p(r) = -\frac{\gamma m M}{r} + c \qquad \lim_{r \to +\infty} E_p = c = 0 \qquad E_p = -\frac{\gamma m M}{r}$ → sempre negativa



$E_p(r) = k \frac{Qq}{r}$



$Qq > 0$ → forza repulsiva en. potenziale sempre positiva

$Qq < 0$ → forza attrattiva

$\vec{F} = -\nabla E_p \qquad \vec{F} = f_r(r) \hat{u}_r$

$\nabla E_p = \frac{d}{dt} E_p(r) u_r$

Consideriamo un sistema di due particelle che si muovono sulla stessa traiettoria

ELASTICA 1D

Se la collisione è elastica, il momento lineare e l'energia cinetica si conservano entrambi.

$P = P' \Rightarrow P_x = P_x' \qquad K = K'$

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \end{cases}$$

→ Se sono conosciute le velocità iniziali, la soluzione del sistema di equazioni è data dalle velocità finali

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2} \qquad v_2' = \frac{2 m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2}$$

Se la massa 2 inizialmente è ferma comincia a muoversi con la velocità v_1 mentre m_1 si ferma

Caso 1. masse uguali $m_1 = m_2 = m$

$v_1' = \frac{2 m_2 v_2}{m_1 + m_2} = v_2 \qquad v_2' = \frac{2 m_1 v_1}{m_1 + m_2} = v_1$ → le velocità si scambiano con l'urto

Caso 2. masse molto diverse $m_1 \ll m_2$

$m_1 = m \qquad m_2 = M$

$v_1' \approx -\frac{M v_1 + 2 M v_2}{M} = -v_1 + 2 v_2 \qquad v_2' \approx \frac{M v_2}{M} = v_2$ → la massa maggiore resta praticamente indisturbata

→ Se $m_2 = M$ è inizialmente fermo ($v_2 = 0$)

$v_1' = -v_1 \qquad v_2' = 0$

→ Se $m_1 = m$ è inizialmente fermo ($v_1 = 0$)

$v_1' \approx 2 v_2 \qquad v_2' = v_2$

Se la collisione è descritta dal sistema di riferimento del centro di massa.

$P = P' = 0$ → valore finale $\qquad p_1 + p_2 = p_1' + p_2' = 0 \qquad m_1 v_1 = -m_2 v_2 \qquad m_1 v_1' = -m_2 v_2'$

La conservazione dell'energia cinetica nel SRCM

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

→ $v_1' = \pm v_1 \qquad v_2' = \pm v_2$ Il segno + indica il caso in cui non avviene l'urto

$v_1' = -v_1 \rightarrow p_1' = -p_1$

$v_2' = -v_2 \rightarrow p_2' = -p_2$

Nel SRCM la velocità e il momento lineare di ogni particella hanno lo stesso modulo prima e dopo l'urto.

La velocità rispetto al SRL può essere ottenuta sommando V_{CM} alle velocità di ogni particella

URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO 1D

Se l'urto è perfettamente anelastico le due masse rimangono attaccate

→ Solo il momento lineare si conserva $\quad P = P' \rightarrow P_x = P_x'$

$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$ c'è solo una velocità finale

$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{(m_1 + m_2)}$

→ Siccome la quantità di moto si conserva, anche la velocità del centro di massa si conserva!

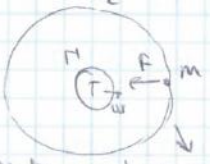
Il moto del centro di massa non è turbato dalla collisione

ENERGIA MECCANICA (Caso gravitazionale)

orbita circolare attorno alla Terra

$E_m = E_k + E_p$ → Scelgo un SR solidale alla Terra

$= \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{mM}{r}$



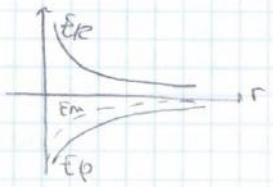
$\sum \vec{F} = ma$ $\quad \vec{F}_g = m\vec{a}$ $\quad \vec{F}_G = -\gamma \frac{mM}{r^2} \hat{u}_r = -m \frac{v^2}{r} u_r$

$\gamma \frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r}$ → $v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}}$ → la velocità è determinata dal raggio
fissato il raggio è trovata v

Moto circolare uniforme (se l'unica forza è la forza centrale, non compie lavoro non cambia E_k non può non essere uniforme)

→ $\frac{1}{2} m \gamma \frac{M}{r} - \gamma \frac{mM}{r} = -\frac{1}{2} \gamma \frac{mM}{r}$ → Energia meccanica a un satellite che si muove su orbita circolare

$E_m = \frac{1}{2} \gamma \frac{mM}{r} - \gamma \frac{mM}{r} = -\frac{\gamma mM}{2r}$ → Dato il raggio è definita E_k, E_p, E_m

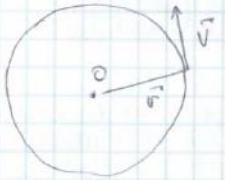


→ Vale solo per orbite circolari $\quad W^{n.c} = \Delta E_m$

Se il satellite cambia velocità cambia anche il raggio

$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v}$

centro orbita

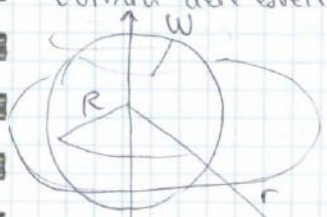


$L_O = rmv \rightarrow rm\sqrt{\frac{\gamma M}{r}} \rightarrow \sqrt{\gamma M m^2 r}$ anche il momento angolare è def dal raggio

→ A quale quota deve essere messo in orbita un satellite per essere geostazionario (resta sempre ~~stesso~~ sopra lo stesso luogo geografico)

Per far sì che ciò avvenga si deve trovare a livello equatoriale e deve orbitare con la stessa velocità della Terra

L'orbita deve essere circolare per avere velocità costante



$\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\quad v = \omega r = \frac{2\pi r}{T}$ → deve avere stessa velocità di rotazione della Terra

$\sum F = ma$ $\quad \gamma \frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \rightarrow \gamma \frac{M}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$ $\quad \frac{\gamma M}{4\pi} = \frac{r^3}{T^2}$

$r = \left(\frac{\gamma M}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} T^{2/3} \sim$ ~~42000~~ 42000 km

2 legge di Keplero

$h = r - R = 36000$ km

Velocità di fuga → minima velocità da dare a un corpo lanciato dalla Terra per non subire dell'attrazione gravitazionale

$E_m = E_k + E_p$ $\quad E_m = \cancel{E_k} + E_p$ (→ a distanza infinita) $= 0$

$\frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{mM}{R}$ $\quad v^2 = \frac{2\gamma M}{R} = 11,2$ km/s

LEGGI DI KEPLERO

1° legge di Keplero → tutti i pianeti seguono orbite ellittiche di cui il Sole occupa uno dei due fuochi

2° legge di Keplero → Il vettore che unisce il Sole ad ogni pianeta spazza aree uguali in tempi uguali

(cost → velocità areale costante

3° legge di Keplero → Il quadrato del periodo di rivoluzione è proporzionale al cubo del semiasse maggiore della sua orbita $\frac{a^3}{T^2} = \text{cost}$

DINAMICA DEI CORPI RIGIDI

→ Un corpo rigido è un sistema di punti o un corpo continuo in cui le distanze tra i punti del sistema non possono cambiare

È sempre un modello nessun corpo è perfettamente indeformabile

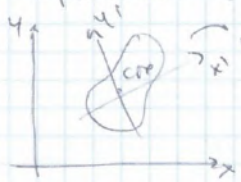
1. teorema energia cinetica sistema $W = \cancel{W^{int}} + W^{est} = \Delta EK$ Per un corpo rigido contano solo le forze esterne

2. Teorema di König $EK = EK^{*} + EK_{CM}$

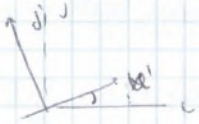
SR^{*}_{CM} → può essere associata solo a una rotazione

Parametri per stabilire la posizione di un corpo rigido

- 3 parametri (x_{CM}, y_{CM}, z_{CM})



non è il sistema di riferimento del CM perché il SRCM non ruota



$\hat{i}' \cdot \hat{i} = \cos(\hat{i}'\hat{i}) = \alpha_x$ $\quad \hat{i}' \cdot \hat{j} = \beta_y$ $\quad \cos(\hat{i}\hat{j})$

$\hat{i} \cdot \hat{k} = \gamma_x$

$\alpha_x, \gamma_x, \beta_x$ → componenti $\hat{i}$

$\begin{cases} \|\hat{i}\| = 1 \\ \|\hat{j}\| = 1 \\ \|\hat{k}\| = 1 \end{cases}$ $\quad \alpha^2_x + \beta^2_x + \gamma^2_x = 1$ $\quad \alpha^2_y + \beta^2_y + \gamma^2_y = 1$ $\quad \alpha^2_z + \beta^2_z + \gamma^2_z = 1$ $\qquad \hat{i} \cdot \hat{j}' = 0$

- 9 coseni direttori

↓

dalle varie condizioni quelli indipendenti sono solo 3

gradi di libertà 3 → CM
3 → angoli

TRASLAZIONE RIGIDA

- Tutti i punti del corpo descrivono la stessa traiettoria
- Ogni segmento rimane parallelo a se stesso

In ogni punto $V = V_{CM}$

I coseni direttori sono costanti

$P = M V_{CM}$

$EK = EK_{CM} = \frac{1}{2} m V^2_{CM}$

MOMENTO ANGOLARE → $L_O = r_{CM} \wedge P + \cancel{L_{CM}'}$

$\Sigma F = M a_{CM}$ → $\Sigma F = \frac{dP}{dt}$ der $\qquad \Sigma \bar{M} = \frac{d\bar{L}}{dt} = \cancel{V_{CM} \wedge P} + r_{CM} \wedge \frac{dP}{dt}$

$\Sigma M = r_{CM} \wedge \Sigma F$

ROTAZIONE

- La velocità angolare è uguale per tutti i punti
- Le velocità dei singoli punti non sono tutte uguali

$\vec{v}_i = \omega \wedge r_i$ → $\|v_i\| = \omega r_i \sin\theta_i = \omega r_i$

velocità tangenziale

x_{CM}, y_{CM}, z_{CM} → costanti

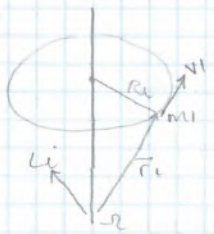
→ Servono 3 equazioni scalari (quelle dei coseni direttori)

$P > 0$

$\vec{L}_O = L_{CM}' + \cancel{r_{CM} \wedge P}$

$\vec{EK} = EK' + \cancel{EK_{CM}}$

$\Sigma \bar{M}_O = \frac{d\bar{L}}{dt}$

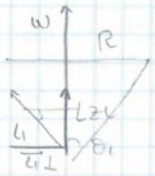


$\vec{L_i}$ non è parallelo all'asse $\vec{\omega}$

$L_i = \|\vec{L_i}\| = r_i m_i v_i \times (\sin\theta = 90°)$

$\vec{v_i} = \vec{\omega} \wedge \vec{r_i}$ $\quad v_i = \omega r_i \sin\theta_i = \omega R_i$

$L_i = r_i m_i R_i \omega$ non dipende da dove metto il polo



$\vec{L_{iz}} = L_{iz}\hat{k}$ → momento angolare assiale

$\vec{L_i} = \vec{L_{iz}} + \vec{L_{i\perp}}$

$L_{iz} = L_i \sin\theta_i = m_i R_i \omega r_i \sin\theta_i = m_i R_i^2 \omega$

↳ non dipende dalla scelta del polo

$\cdot L_{iz} = L_{iz}\hat{k}$

$m_i = cost$

$R_i = cost$

$m_i R_i^2 \vec{\omega}$

$\vec{L_{iz}}$ è proporzionale a $\vec{\omega}$, può cambiare solo in modulo

<u>Momento angolare totale</u>

$\vec{L} = \Sigma_i \vec{L_i} = \Sigma \vec{L_{iz}} + \Sigma \vec{L_{i\perp}}$

$= \vec{L_z} + \vec{L_\perp}$

$\vec{L_z} = \Sigma_i \vec{L_{iz}} = (\Sigma_i m_i R_i^2)\vec{\omega} = I_z \vec{\omega}$

→ dipende da come la massa è distribuita intorno all'asse

→ momento d'inerzia del corpo → corrispettivo angolare della massa inerziale

$I_z = \Sigma_i m_i R_i^2 = \int_M dm R^2$

→ le unità del momento di inerzia sono $kg\,m^2$

$\Sigma \vec{M_e} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ $\quad \Sigma M_z = \frac{dL_z}{dt}$ ← $\frac{d}{dt}(I_z\omega) = \frac{dI_z}{dt}\omega + I_z\frac{d\omega}{dt} = I_z\alpha_z$

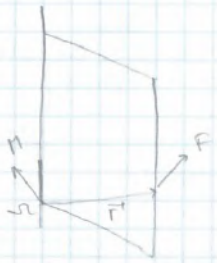
I_z per un corpo rigido è costante

$\Sigma M_\perp = \frac{dL_\perp}{dt}$

$\boxed{\Sigma M_z = I_z\alpha}$ (→ simile $\Sigma F = m\vec{a}$) $\quad \Sigma \vec{M_z} = I_z\vec{\alpha}$

non compaiono tutti i momenti ma solo le componenti z

contiene tutta l'informazione al moto di rotazione



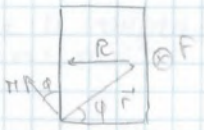
$M_\Omega = \vec{r} \wedge \vec{F}$

$M_z = M_\Omega \cos\varphi$

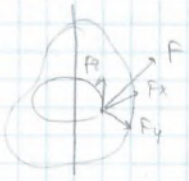
$= rF\cos\varphi$

$= F r\cos\varphi$

$= FR$ → Il momento M_z non dipende dal polo



→ Quello che conta è la distanza dall'asse è invariante dalla posizione (non dipende dal polo)



F_z non ha effetto al moto di rotazione

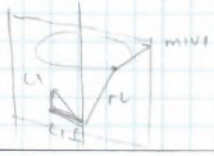
↳ il momento

→ Il momento della forza radiale non ha alcun effetto al moto

→ Solo le forze tangenziali influenzano il moto → Il momento delle forze tangenziali è lungo z

Se $\Sigma M_z = 0 \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow \omega = cost$

<u>Analizzo $L_\perp$</u>



Il piano è quello che contiene l'asse e r_i e contiene $L_\perp$

$L_\perp$ ruota come ruota il corpo

→ $\vec{L_\perp} = \Sigma \vec{L_{i\perp}}$ ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$

$L_z = I_z \omega$ → per qualunque corpo

corpo simmetrico $\bar{L} = I_z \bar{\omega}$ corpo qualunque $\bar{L}_z = I_z \bar{\omega}$

$E_K = \frac{1}{2} I_z \frac{L_z^2}{I_z^2} = \frac{L_z^2}{2I_z}$ $E_K = \frac{p^2}{2m}$

→ Teorema dell'energia cinetica

$W = \cancel{W^{int}} + W^{est} = \Delta E_K$

$\delta W = dE_K$

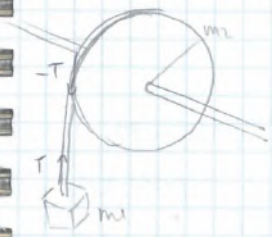
$= d\left(\frac{1}{2} I_z \omega^2\right) = \frac{1}{\cancel{2}} I_z \cancel{2}\omega\, d\omega = I_z \omega d\omega \longrightarrow \alpha dt$ ($\omega \to \frac{d\theta}{dt}$)

$\delta W = I_z \frac{d\theta}{dt} \alpha\, dt = \underline{\underline{I_z \alpha}}\, d\theta = \Sigma M_z \cdot d\theta$

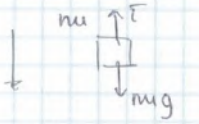
$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \Sigma M_z\, d\theta$

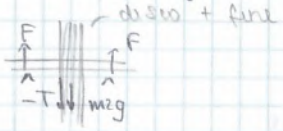
Es

Un disco omogeneo di massa m e raggio r può ruotare lungo un asse orizzontale



$I_z = \frac{1}{2} m_2 r^2$



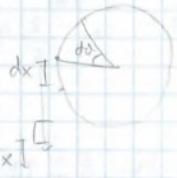


$\Sigma F = m_1 a$ $\Sigma F = 0$

$+m_1 g - T = m_1 a$ $2F - m_2 g - T = 0$

$\Sigma M_z = I_z \alpha$ $\underline{\overset{a}{i}\overset{c}{c} = \text{uscente}}$

$\boxed{rT = I_z \alpha}$ $\boxed{\alpha = \frac{a}{r}}$



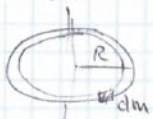
$d\theta = \frac{dx}{r}$ $\omega = \frac{U}{r}$ $\alpha = \frac{a}{r}$

MOMENTO D'INERZIA

1) $I_z = \sum_i m_i R_i^2$

$I_z = \int dm R^2$ $dm = \rho dV$ $R^2 \int dm = mR^2$

anello



raggio R
massa m

$dm = \lambda dl$ $\lambda = \frac{dm}{dl}$

$I_z = \int \lambda dl R^2 = I_z = \int dm R^2$ $R^2 \int \lambda dl = R^2 \lambda \int dl = R^2 \underbrace{\lambda 2\pi R}_{\text{massa totale}} = MR^2$

→ Il momento di inerzia di un anello che ruota attorno al suo asse, tutti i punti hanno la stessa distanza dall'asse

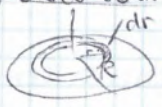
2) Cilindro a parete sottile (senza base)

→ Il risultato è come quello dell'anello perché tutti i punti sono a distanza R dall'asse

$I_z = \int dm R^2 = R^2 m$

→ La dimensione del corpo parallela all'asse non ha alcuna importanza per il momento di inerzia

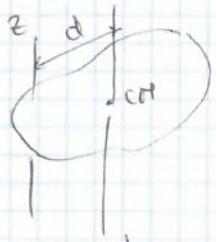
3) Disco sottile



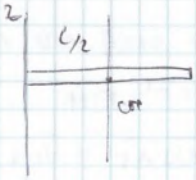
$dm = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$

$I_z = \int dm r^2 = I_z = \int \sigma 2\pi r dr \cdot r^2 = \cancel{2}\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = \cancel{2}\pi\sigma \frac{R^4}{\cancel{4}\,2} = \frac{1}{2} R^2 (\pi\sigma R^2)$

$\cancel{A} = \underline{m = \sigma\pi R^2}$ → $\frac{1}{2} m R^2$

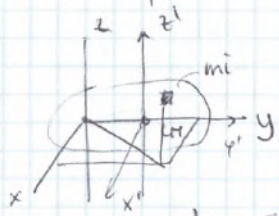


$I_z = I_{CM} + md^2$



$I_z = I_{CM} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$

$\frac{1}{12}mL^2 + \frac{mL^2}{4} = \frac{1+3}{12}mL^2 = \frac{1}{3}mL^2$



$I_{zi} = m_i \cdot R_i^2 = m(x_i^2 + y_i^2)$

$x_i = x'_i \qquad y_i = y'_i + d$

$I_{zi} = m_i\left[x'^2_i + (y'_i + d)^2\right] = m_i x'^2_i + m_i y'^2_i + 2m_i y'_i d + m_i d^2$

$I_z = \Sigma I_{zi} = \Sigma_i m_i(x'^2_i + y'^2_i) + 2\underbrace{\cancel{\Sigma m_i y'_i}}_{y_{CM}=0} d + \Sigma_i m_i d^2 = \Sigma_i m_i R_i'^2 +$

$I_{CM} + md^2$

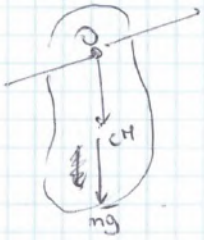
TEOREMA DI KÖNIG

$EK = \frac{1}{2}I_z\omega^2 = \frac{1}{2}(I_{CM} + md^2)\omega^2 = \underbrace{\frac{1}{2}I_{CM}\omega^2}_{EK'} + \underbrace{\frac{1}{2}Md^2\omega^2}_{EK_{CM}}$

$EK_{CM} = \frac{1}{2}mv^2_{CM}$

IL PENDOLO FISICO

Qualunque oggetto fisico vincolato a un asse che si muove



$\vec{L} \nparallel \vec{\omega}$

$L_z = I_z\omega$

$\Sigma\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

$\Sigma M_z = \frac{dL_z}{dt} = I_z\alpha$

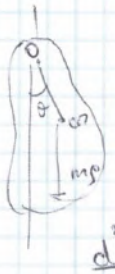
Se il corpo è simmetrico

$\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

$\vec{L} = I_z\vec{\omega}$

$\Sigma\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

$\Sigma\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I_z\vec{\alpha}$



$\Sigma\vec{M}_O = \vec{r}_{CM} \wedge m\vec{g}$

z = uscente

$\Sigma M_{Oz} = -r_{CM}mg\sin\theta = -mgh\sin\theta$

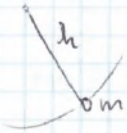
$\Sigma M_{Oz} = I_z\alpha = I_z\frac{d^2\theta}{d\theta^2} \rightarrow -mgh\sin\theta = I_z\frac{d^2\theta}{dt^2}$

$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z}\sin\theta = 0 \qquad \sin\theta \simeq \theta$ → per piccole oscillazioni

$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgh}{I_z}\right)\theta = 0$ $\qquad \omega^2 = \sqrt{\frac{mgh}{I_z}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgh}}$

ω^2 → pulsazione = cost

pendolo semplice

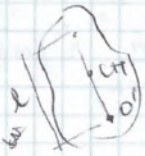


$I_z = mh^2 \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{mh^2}{mgh}} = T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$

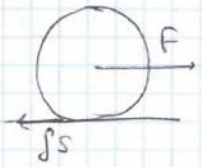
lunghezza ridotta → lunghezza che deve avere un pendolo semplice per oscillare con lo stesso periodo di un determinato pendolo fisico

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgh}} \qquad l = \frac{I_z}{mh}$

pendolo semplice — pendolo fisico



$T_O = T_{O'}$



Corpo messo in moto da una forza agente all'asse

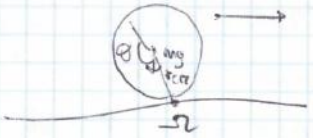
Corpo messo in moto da un momento entrante

$\Sigma F_x = m a_{CM}$

$f_s = m a_{CM}$

Se un corpo naggia a velocità angolare costante rotolando non c'è bisogno di una forza di attrito

ATTRITO VOLVENTE



$\bar{M}_\Omega = \bar{r}_{CM} \wedge m\bar{g}$ → Il momento è frenante è come se il momento rallentasse la rotazione e la traslazione

$M_\Omega = \bar{r}_{CM}\, mg \sin\theta$

$= \underline{R} mg \underline{\sin\theta} = mgh$ → braccio della forza peso

$M_\Omega = N\underline{h}$ → coefficiente di attrito volvente non è adimensionale

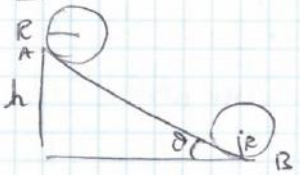
→ Nel caso di un corpo perfettamente rigido $h=0$

$\delta W = M_\Omega d\theta < 0$ → Lavoro negativo

Se devo mantenere un corpo reale in moto a velocità costante devo comunque spingerlo un po', devo sempre applicare un piccolo momento per compensare il momento di attrito volvente dovuto al fatto che il corpo o la superficie un po' si deforma
Se non applico un momento applico una forza

→ Se il corpo è perfettamente rigido non serve alcuna forza per mantenerlo a velocità costante

Es



→ Trovare la velocità finale del CM supponendo che sia
1) un cilindro
2) una sfera
3) un cilindro cavo

→

La forza di attrito c'è per farlo rotolare ma non compie lavoro quindi il sistema è conservativo

→ Posso applicare conservazione E_m

$E_m^A = mg(h+R)$

$E_m^B = mgR + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

$\omega = \frac{v}{R}$ → Energia cinetica = di traslazione + rotazione
↓
Teorema di König

$E_m^A = E_m^B$

$mgh + mgR = mgR + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{I}{R^2}v^2 \longrightarrow mgh = v^2\left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\frac{I}{R^2}\right)$

$$v^2 = \frac{2mgh}{\left(m + \frac{I}{R^2}\right)}$$

a) cilindro pieno $I = \frac{1}{2}mR^2 \longrightarrow v = \sqrt{\frac{mgh}{m + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{R^2}}} = \sqrt{\frac{4}{3}gh} < \sqrt{2gh}$ → Velocità finale minore rispetto a se non rotolasse

b) sfera $I = \frac{2}{3}mR^2 \longrightarrow v = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$

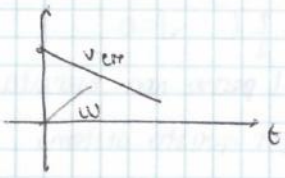
c) cilindro cavo $I = mR^2 \longrightarrow v = \sqrt{gh}$

→ Il corpo che arriva più velocemente all'estremità del piano è quello con momento di inerzia più piccolo

$V_{CM}(t^*) = V_{CM}^0 - \mu_k g t$

$\omega(t) = 0 + \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{R} t$

$t^* = \frac{2}{7}\frac{V_{CM}^0}{\mu_k g} \rightarrow \frac{2}{7}\frac{J}{\mu_k m g}$



$t^* \Rightarrow V_{CM}(t^*) = \omega(t^*) R$

comincia a rotolare

URTI TRA CORPI ESTESI

→ la conservazione del momento angolare non implica la conservazione dell'energia cinetica

- $\Sigma F^{ext} = 0 \longrightarrow \vec{P} = cost$ $\qquad \Sigma F_x^{ext} = 0 \longrightarrow P_x = cost$
- $\Sigma M^{ext} = 0 \longrightarrow \vec{L} = cost$

Se le forze esterne non sono impulsive ⇒ $\vec{P}$ è $\cong$ costante $\left(\int F^{ext} dt \ll \int F^{int} dt\right)$

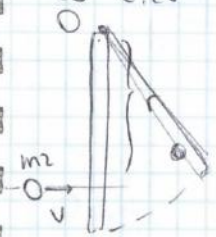
Se i momenti esterni non sono impulsive $\int M^{ext} dt \ll \int M^{int} dt \rightarrow \vec{L} \cong cost$

non vale se il corpo rigido è vincolato perché generalmente le forze vincolari sono impulsive.

Se trovo un polo rispetto al quale il momento delle forze esterne è zero allora $\vec{L}$ rispetto a quel polo si conserva

→ Se l'urto è elastico $E_K = cost$

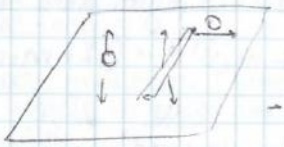
Es 6.28



asta m_1, l
pallina $m_2, \vec{v}$

→ E_K non si conserva
→ $\vec{P}$ non si conserva
→ $\vec{L}_O = cost$

Determinare il moto del sistema sapendo che l'urto è completamente anelastico



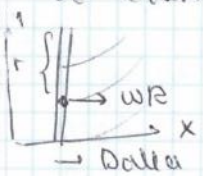
Il momento delle forze esterne prima dell'urto = 0

→ Anche la forza vincolare, se scelgo O come polo ha momento nullo

$\vec{L}_O = L_z \vec{\omega}$? $\qquad \boxed{L_{Oz} = L_z \omega}$ $\qquad$? uscente

$L_z^i = (\vec{r}_2 \wedge m_2 \vec{v})_z = m_2 v r$ braccio

L_z^f (Posso scriverlo come somma dei momenti angolari pallina e sbarretta)

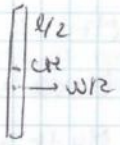


$L_z^{f\,pallina} = m_2 \omega r^2 = m_2 r^2 \omega$ $\qquad$ momento di inerzia di corpo puntiforme

$+ \frac{1}{3} m_1 l^2 \omega \qquad L_z^f = m_2 r^2 \omega + \frac{1}{3} m_1 l^2 \omega = \left(m_2 r^2 + \frac{1}{3} m_1 l^2\right)\omega$

→ Dalla conservazione di L_z

$m_2 v r = \left(m_2 r^2 + \frac{1}{3} m_1 l^2\right)\omega \rightarrow \omega = \frac{m_2 v r}{m_2 r^2 + \frac{1}{3} m_1 l^2}$



→ Trovare l'impulso della reazione vincolare

$\vec{J} = \Delta \vec{p} \longrightarrow J_y = 0$

$P_{iniziale} = m_2 \vec{v} = m_2 v \hat{i} \qquad P_{finale} = m_2 \omega R \hat{i} + m_1 \omega \frac{l}{2} \hat{i}$

$\Delta P = \left(m_2 \omega R + m_1 \omega \frac{l}{2}\right) i - m_2 v \hat{i}$

$J_x = m_2 \omega R + m_1 \omega \frac{l}{2} - m_2 v$ → sostituisco ω che ho trovato

$$J_x = m_2 v \frac{\left(m_1 \frac{l}{2} r - \frac{1}{3} m_1 l^2\right)}{\frac{1}{3} m_1 l^2 + m_2 r^2}$$

Se $m_1 = m_2 = m$

$$J_x = m v l \frac{\left(\frac{1}{2} r - \frac{1}{3} l\right)}{\frac{1}{3} l^2 + r^2} \qquad J_x > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} r > \frac{1}{3} l \rightarrow r > \frac{2}{3} l$$

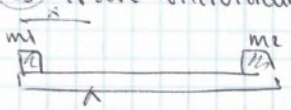
Tenderebbe a spostarsi

Se la sbarretta viene colpita qui l'impulso è positivo

STATICA

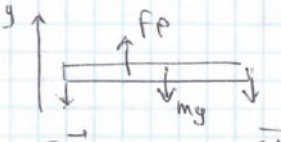
condizioni di equilibrio $\begin{cases} \Sigma F^{ext} = 0 \\ \Sigma M^{ext} = 0 \end{cases}$

es trave orizzontale



lunghezza L

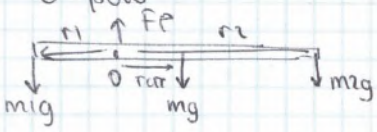
$\Sigma F^{ext} = 0$ (alla trave) $\quad \Sigma M^{ext} = 0$



$\Sigma F = 0$ $\quad$ asse x $\{ 0 = 0$; asse y $\{ F_p - (m + m_1 + m_2) g = 0$

$\Sigma \vec{M} = 0 \qquad \vec{M}_\Omega = \vec{M}_{\Omega'} + \vec{\Omega\Omega'} \wedge \Sigma \vec{F} = 0 \qquad \vec{M}_\Omega = \vec{M}_{\Omega'}$

O = polo $\qquad$ asse z uscente



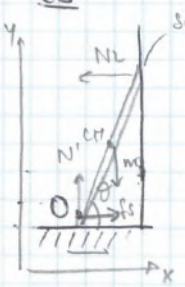
$m_1 g r_1 k - m_2 g r_2 k - m g r_{cm} k$

$m_1 g r_1 - m_2 g r_2 - m g r_{cm} = 0$

$m_1 g x - m_2 g (L - x) - mg \left(\frac{L}{2} - x \right) = 0$

$x = \frac{(m + m_2)}{(m + m_1 - m_2)} \frac{L}{2}$ → Valore che x deve avere affinché il sistema sia in equilibrio

Es



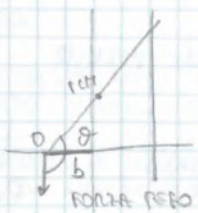
$L, m, \lambda = cost$ $\quad$ pavimento scabro (μ_s) $\quad$ Muro liscio

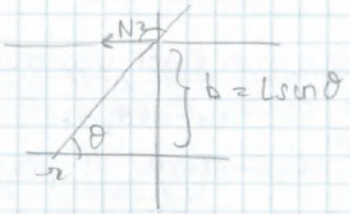
$\Sigma \vec{F} = 0$ $\quad$ asse x $\{ f_s - N_2 = 0$ → Condizione di equilibrio

$\Sigma \vec{M} = 0$ $\quad$ asse y $\{ N' - mg = 0$

$\begin{cases} f_s = N_2 \\ N' = mg \end{cases}$

Tutte le forze giacciono sul piano del foglio
Il polo si sceglie in modo che il maggior numero di forze abbia momento nullo





$\Sigma \vec{M} = 0 \qquad$ z uscente

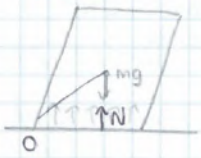
$\cancel{-mg \frac{L}{2} \sin\theta_1 + N_2 L \sin\theta_2}$ → non utilizzo 2 angoli

$-mg \frac{L}{2} \cos\theta + N_2 L \sin\theta = 0$

→ Qual è il ~~massimo~~ ~~angolo θ che~~ minimo angolo θ per cui la scala non cade

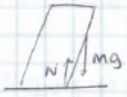
$mg \frac{L}{2} \cos\theta = N_2 L \sin\theta \qquad \frac{1}{2} mg \cos\theta = f_s \sin\theta \qquad f_s \le \mu_s N_1 \rightarrow f_s \le \mu_s mg$

$f_s = \frac{mg \cos\theta}{2 \sin\theta} \le mg\mu_s \qquad \cot g\, \theta \le 2\mu_s$



$\Sigma \vec{F} = 0 \qquad N = mg$

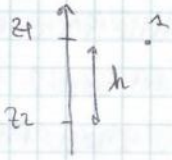
$\Sigma \vec{M} = 0$



N è una forza di contatto non può stare fuori dalla superficie

Per $\bar{F} = dm g \Rightarrow f = g$

$$\bar{\nabla} p = \rho \bar{g} \rightarrow \begin{cases} \frac{dp}{dx} = \rho g x = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g y = 0 \\ \frac{dp}{dz} = \rho g z \rightarrow \boxed{\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g} \end{cases}$$

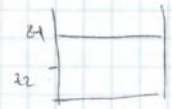


$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \rightarrow dp = -\rho g dz$$

$$\int_1^2 dp = -\rho g \int_1^2 dz$$

$$p(z_2) - p(z_1) = -\rho g (z_2 - z_1) = \rho g h$$

$p(z_2) = p z_1 + \rho g h \rightarrow$ <u>legge di Stevino</u>

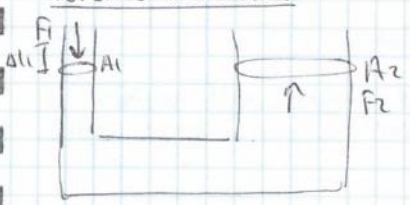


$p(z_2) = p_{atm} + \rho g h$ (→ Ogni 10 metri di liquido 1 atm di pressione in più) $\frac{\cancel{\rho} h g}{\cancel{5}}$

LEGGE DI PASCAL → Se in una qualunque posizione viene incrementata la pressione l'incremento si propaga in tutto il liquido (applicazione nel torchio idraulico)

$p = p_0 + \rho g h \rightarrow p + dp = p_0 + dp + \rho g h$

<u>Torchio idraulico</u>



$p_1 = \frac{F_1}{A_1}$ → Questa pressione si propaga in tutti i punti

$F_2 = p A_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$ → fattore moltiplicatore della forza

Il guadagno della forza è pagato con un prezzo: la corsa del pistone ΔL_1 è maggiore di ΔL_2

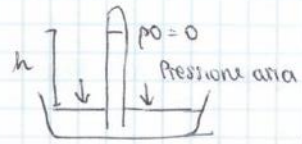
→ Se il pistone 1 scendendo sposta un volume di liquido pari a $\Delta V = A_1 \Delta L_1$ lo stesso volume va a innalzare il pistone 2 di una quantità

$$\Delta L_2 = \frac{\Delta V}{A_2} = \frac{A_1}{A_2} \Delta L_1 \quad (\Delta L_2 < \Delta L_1)$$

Trascurando ogni effetto dissipativo il lavoro $L_1 = F_1 \Delta L_1$ $\quad L_2 = F_2 \Delta L_2 = \frac{A_2}{\cancel{A_1}} F_1 \frac{\cancel{A_1}}{A_2} \Delta L_1 = L_1$

Il barometro a mercurio e la <u>pressione atmosferica</u>

Il barometro a mercurio inventato da Torricelli consiste in un lungo tubo di vetro chiuso a una estremità che è stato riempito con del mercurio e poi rovesciato in una vaschetta piena di mercurio.



lo spazio sopra la colonna di mercurio è occupato solo da mercurio vapore, la sua pressione è trascurabile sicché la p_0 alla superficie della colonna è 0

→ la pressione atmosferica è uguale all'altezza della colonna di mercurio

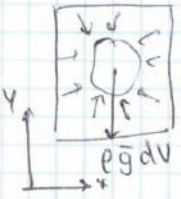
$p_{atm} = \rho g h$ Al livello del mare 0,76 m $\quad p_{atm} = 1{,}013 \cdot 10^5$ Pa

Se il fluido è comprimibile, ad esempio un gas la sua densità può variare e la dipendenza della pressione dalla posizione verticale è diversa da quella data e segue la relazione →

$$p(z) = p_0 - \frac{\rho_0}{p_0} g (z - z_0)$$

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

Consideriamo un volumetto di fluido a riposo



→ Per la 2ª legge di Newton $\Sigma \bar{F} = 0$

$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_{p,y} - \rho V g = 0 \rightarrow \Sigma F_{py} = \rho V g$

→ Se sostituiamo il volume di fluido con un corpo reale di uguale volume la pressione del fluido circostante non cambia

$\Sigma F_{py} = \rho V g$

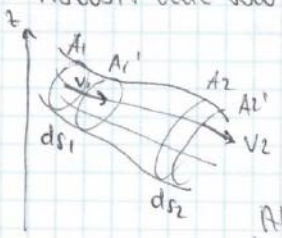
→ Ogni corpo immerso in un fluido riceve da questo una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del volume di fluido spostato (con "fluido spostato" si intende una quantità di fluido avente volume uguale a quello della parte di corpo immersa nel fluido stesso)

Se il fluido è comprimibile (es un gas) e ha un flusso stazionario la condizione $dm_1 = dm_2$ è ancora verificata ma questa volta ρ non è più costante. In queste condizioni

$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \rightarrow \rho A v = \rho Q$ portata di massa $\frac{dm}{dt} = \rho A v$ SI unit = kg/s

TEOREMA DI BERNOULLI

L'equazione di Bernoulli esprime la conservazione dell'energia meccanica per fluidi incomprimibili e non viscosi. Vale solo per flussi stazionari



→ Applichiamo il teorema delle forze vive al fluido in una sezione del tubo di flusso.

Al tempo t consideriamo il fluido tra A_1 e A_2. Siano v_1 e v_2 le velocità del fluido che attraversa A_1 e A_2 rispettivamente.

Al tempo $t + dt$ il flusso scorre tra A_1' e A_2' si è spostato da A_1 e A_2 di uno spostamento $ds_1 = v_1 dt$ e $ds_2 = v_2 dt$

Lavoro della forza gravitazionale + Lavoro delle forze di pressione = Variazione di energia cinetica

$dW_g = -dU$ $\qquad F_1 = p_1 A_1 \quad F_2 = p_2 A_2 \qquad dK = K_2 - K_1$

$= U_1 - U_2 = (\underbrace{\rho dV}_{dm}) g (z_1 - z_2)$ $\qquad dW_p = F_1 ds_1 - F_2 ds_2$ $\qquad dK = \frac{1}{2}(\rho dV)[v_2^2 - v_1^2]$

lavoro negativo (la forza ha verso opposto allo spostamento)

$= p_1 A_1 ds_1 - p_2 A_2 ds_2 = (p_1 - p_2) dV$

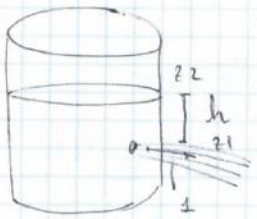
$\rightarrow \underbrace{\rho dV g (z_1 - z_2)}_{dW_g} + \underbrace{(p_1 - p_2) dV}_{dW_p} = \underbrace{\frac{1}{2}\rho dV [v_2^2 - v_1^2]}_{dK}$

$= \rho g z_1 + p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

→ In un flusso stazionario di un fluido non viscoso e incomprimibile la pressione, la velocità del fluido e l'altezza dei due punti sono relazionati da:

$$\boxed{p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = cost}$$

ES



Il barile è aperto al di sopra. Trovare la velocità del liquido che abbandona il barile dal foro

→ Applichiamo Bernoulli

$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad p_1 = p_2 = p_{atm}$

$v_1 = 0$

$\rho g \underbrace{(z_2 - z_1)}_{h} + \frac{1}{2}\rho v^2 = 0 \longrightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$

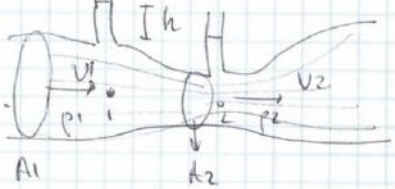
ES

1) $A_1 v_1 = A_2 v_2 \rightarrow v \propto \frac{1}{A}$ → la velocità è maggiore dove l'area è minore

2) Se z è cost $\rightarrow p + \frac{1}{2}\rho v^2 = cost$ (→ Per un tubo orizzontale)

→ La pressione è maggiore dove la sezione è più larga

Tubo di Venturi → utilizzato per misurare la velocità del flusso nel tubo

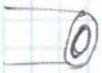


→ Il tubo è orizzontale $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

→ Per la continuità $A_1 v_1 = A_2 v_2 \longrightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$

$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho \left(\frac{A_1}{A_2} v_1\right)^2$

$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right] \longrightarrow \rho g h = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]$

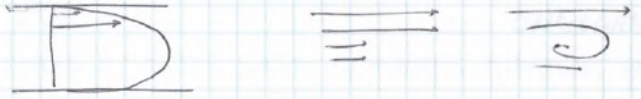


$\langle v \rangle = \frac{1}{S}\int v(r)\,dS \rightarrow \langle v \rangle = \frac{Q}{S} \longrightarrow \langle v \rangle = \frac{R^2}{8\eta L}(P_1 - P_2)$ → per aumentare la velocità o aumento il raggio o la differenza di pressione

La diff di pressione per mantenere il fluido a v cost $\frac{p_1 - p_2}{L} = \frac{8\eta \langle v \rangle}{R^2}$

→ Un fluido viscoso può anche non essere in moto laminare, tutto quanto detto vale fino a quando non si creano dei vortici. Moto turbolento

A produrre la transizione tra moto stazionario e moto turbolento è la velocità.

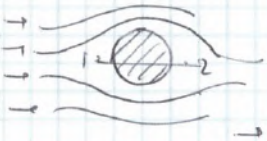


Grande differenza di velocità tra uno straterello e un altro

Il moto laminare diventa turbolento quando il numero di Reynolds supera un valore critico

$\mathbb{R} = \frac{\rho v R}{\eta}$ $\mathbb{R} \approx 1200$

Resistenza



$z_1 = z_2$ In 1 e in 2 $v = 0$
$v_1 = v_2$
$p_1 = p_2$ → Se il fluido è ideale non c'è nessuna forza sulla pallina

→ Paradosso di D'Alambert (per il fluido ideale)

Fluido reale

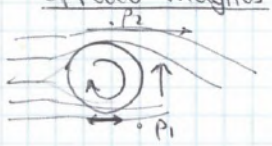
1. moto laminare (vel corpo piccola o vel fluido piccola)

$F = C_1 \eta v (l)$ Per una sfera $F = 6\pi \eta v r$ → formula di Stokes

2. moto turbolento

$F = \frac{1}{2} C_1' \rho S \eta v^2$

Effetto magnus



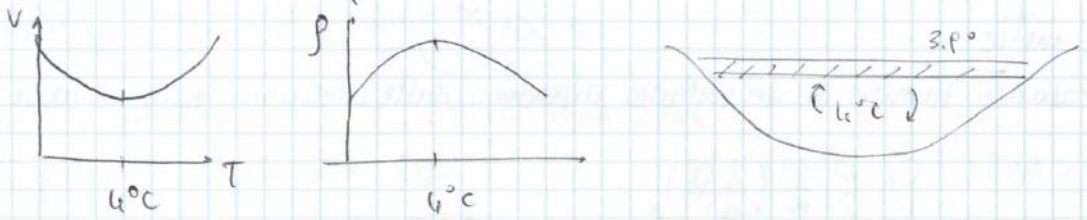
$v_2 > v_1$ $p_2 < p_1$

$$\begin{cases} \Delta x = \alpha x_0 \Delta T \\ \Delta y = \alpha y_0 \Delta T \\ \Delta z = \alpha z_0 \Delta T \end{cases}$$

→ Per un solido isotropo

$$V = V_0 (1 + 3\alpha \Delta T)$$

Espansione termica acqua



CALORE

→ Calore è trasferimento di energia generato da una differenza di temperatura

→ Definizione operativa del calore

1) lo strumento che serve a misurare il calore è il calorimetro

→ Se nella provetta metto qualcosa di molto freddo tende a scaldarsi assorbendo calore dall'acqua e ghiaccio

· Calore assorbito dal corpo → aumento volume ghiaccio
Allora aumenta il volume e il mercurio viene spinto giù
$\Delta V > 0$

· Se il ghiaccio fonde volume diminuisce mercurio sale $\Delta V < 0$

→ Assumo che il calore è proporzionale a ΔV $\quad Q \propto \Delta V$

$Q > 0$ $\quad \rightarrow$ $\qquad$ $Q < 0$ $\quad \leftarrow$

2) Criterio di confronto

→ Se il corpo A causa ΔV_A, B causa ΔV_B. Allora $Q_A = Q_B \iff \Delta V_A = \Delta V_B$

3) Criterio di addizione

→ Un corpo C scambia un calore $Q_C = Q_A + Q_B$ se $\iff \Delta V_C = \Delta V_A + \Delta V_B$

→ Definiamo unità del calore come il calore ceduto al calorimetro da un grammo di acqua distillata, la cui temperatura passa da 15,5 °C a 16,5 °C = <u>1 caloria</u>

C'è una corrispondenza esatta tra lavoro e calore $\quad 1\,cal = 4,180\,J$

CALORE SPECIFICO E CAPACITÀ TERMICA

La variazione della temperatura di un sistema causata dalla somministrazione di calore dipende dalla massa del sistema e dal materiale che lo compone

→ In generale il quantitativo di calore richiesto per cambiare la temperatura di un corpo di massa m da T_i a T_f è

$$Q = mc(T_f - T_i) \qquad c = \text{calore specifico del materiale}$$

Per un cambiamento infinitesimo di temperatura $\delta Q = mc\,dT \rightarrow c = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT}$

→ Se T aumenta $Q > 0$

→ se $dT < 0$ allora $Q < 0$

l'unità SI per il calore specifico $[c] = \frac{J}{kg\,K}$ $\quad$ c dipende dalla temperatura ed è costante in dati intervalli di T

$$Q = m \int_{T_1}^{T_2} c(T)\,dt$$

- Il lavoro infinitesimo non è un differenziale esatto

$\cancel{dW} \rightarrow \delta W$ sia il calore sia il lavoro dipendono dalla trasformazione

PRIMA LEGGE DELLA TERMODINAMICA

1. $\delta Q > 0$  $\delta W > 0$ 2. $\delta W < 0$  $\delta Q < 0$

$\delta W > 0 \rightarrow$ espansione $\delta W < 0$ compressione

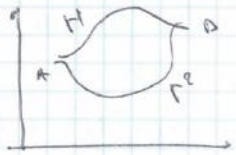
1. $\delta W > 0$, $\delta Q > 0$ se $\delta Q = \delta W$ $|\delta Q| > |\delta W|$
   È presente un "avanzo di energia"
   l'energia la ritroviamo come energia termica, cinetica. (Il sistema o si scalda o cambia fase)

2. $\delta W < 0$, $\delta Q < 0$ $|\delta W| > |\delta Q|$

$\delta Q - \delta W = dU \rightarrow$ energia interna. La differenza di energia interna non dipende dalla trasformazione è un vero differenziale

$\Delta U = U_B - U_A = \int_A^B dU$ → La variazione di energia interna è uguale allo scambio di energia come calore o come lavoro

$\boxed{\Delta U = Q - W} \rightarrow$ Primo enunciato



$U_B - U_A = Q_{AB}^{\Gamma^1} - W_{AB}^{\Gamma^1}$

$U_B - U_A = Q^{\Gamma^2} - W^{\Gamma^2}$

Es $\delta Q > 0$ → 5 J $\delta W > 0$ → 3 J $dU = 2J$

- U è una funzione di stato nelle coordinate termodinamiche. La sua variazione è uguale allo scambio netto di energia del sistema con l'ambiente

$U_A = U_B$ $Q - W = 0 \rightarrow Q = W$

$\Delta U = Q - W \rightarrow$ non pone alcun limite alla conversione di calore in lavoro

Se $\Delta U = 0 = U_B - U_A$

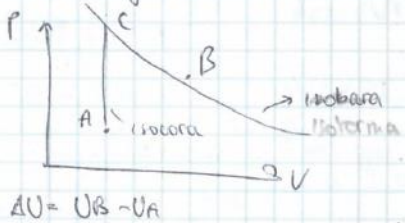
$W_{AD}^{\forall \Gamma} = Q_{AD}$ se A e B hanno la stessa U

→ L'energia interna è legata al sistema ed è definita a meno di una costante. Quello che misura è la differenza

Energia interna di un gas ideale

$\Delta U = 0$ ↓ a T cost L'energia interna per un gas ideale dipende solo dalla temperatura, non dipende dalla pressione e dal volume

n moli gas ideale



$\Delta U = U_B - U_A$

AC $V = cost$ $W_{AC} = 0$ $\Delta U_{AC} = U_C - U_A = Q_{AC} = n C_V (T_C - T_A)$

CB $T = cost$ $T_B = T_C$
↓
$\Delta U = 0$ $U_B - U_C = 0$

$AC + CB = \cancel{U_C}\ U_B - \cancel{U_C} + \cancel{U_C} - U_A = n c_V (T_B - T_A)$

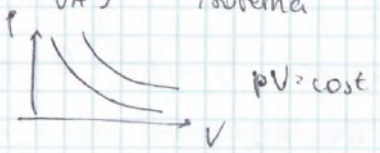
$\Delta U = U_B - U_A = n C_V (T_B - T_A) \rightarrow$ per un gas ideale

$dU = n c_V dT$

$Q_{AB} = nRT \int \frac{dV}{V} \rightarrow nRT \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$ → Calore scambiato durante una trasformazione isoterma

→ se $V_B > V_A$ $Q > 0$

se $V_B < V_A$ $Q < 0$

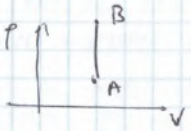


$pV = cost$

Isocore $V = cost$

$\downarrow$

$\delta W = 0$

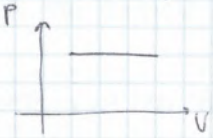


$\delta U = \delta Q$ $\delta U = n c_v dT$

$V = cost$ $PV = nRT$ $\frac{P}{T} = cost$

Isobare $p = cost$

$\boxed{\frac{V}{p} = cost}$



$\delta Q = n c_p dT$ se rev $\delta W = p dV$

$dU = n c_v dT$

ENTALPIA

$H = U + pV$ → variabile di stato

· H dipende solo da T (per un gas ideale)

$H = U(T) + pV \rightarrow U(T) + nRT$

→ $dH = dU + dpV = dU + pdV + Vdp$

se reversibile $= \underbrace{dU + \delta W}_{\delta Q} + Vdp$

$\delta Q + Vdp$

$dH = dU + d(pV) = n c_v dT + nR dT = n(c_v + \overset{\text{Mayer}}{R}) dT \rightarrow n c_p dT$

$\Delta H = H_2 - H_1 = n c_p (T_2 - T_1)$

Per ~~gas~~ processo isobaro (rev) gas perfetto

$dH = n c_p dT$ → sempre vero

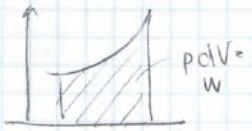
$\delta Q = n c_p dT$ Nel caso della trasformazione isobara la variazione infinitesima di entalpia è uguale al calore scambiato

$c_p = \frac{1}{n} \frac{dH}{dT}$

Per una trasformazione generica (gas ideale)

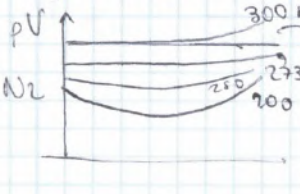
$\begin{cases} dU = n c_v dT \\ dH = n c_p dT \end{cases}$

$dU = \delta Q - \delta W \xrightarrow{rev} \delta Q - p dV$



GAS REALI

- gas ideale $pV = nRT$ $\frac{pV}{nRT} = 1$



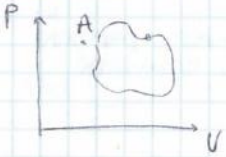
per gas ideale a T costante

$\frac{pV}{nRT} = 1 + c_1 p + c_2 p^2 + \dots$

coefficienti del viriale

SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

$\Delta U = Q - W$ → 1° Principio



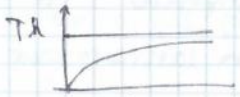
$\Delta U = 0$ $\quad \oint dQ - \oint \delta W = 0$ In una macchina ciclica calore totale = lavoro totale

Qc = Il primo principio impedisce il moto perpetuo di prima specie → Se una certa macchina fa lavoro, produce calore, ma non pone limiti alla possibilità di trasformare calore in lavoro.

Sorgente di calore → un corpo o un sistema capace di assorbire o cedere calore senza cambiare la sua temperatura (o sistema che deve avere calore specifico molto alto)

La sorgente è rappresentata dal diagramma PV dall'isoterma.

Perchè lo scambio di calore tra sorgente e sistema sia reversibile è necessario che il sistema e la sorgente siano alla stessa T



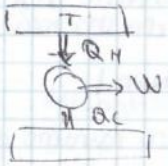
la T della sorgente resta costante
la T del corpo aumenta

generalmente non è reversibile

→ Per immaginare che un corpo che si raffredda lo faccia attraverso una trasformazione reversibile devo assumere che il corpo ceda quantità infinitesime di calore a infinite sorgenti diverse.

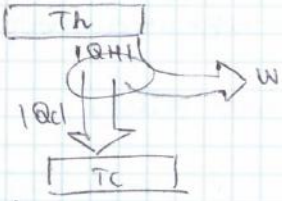
Macchina termica → Sistema che compie operazioni cicliche per trasformare calore in lavoro

$\Sigma Q = W$



→ 1 è il numero minimo di sorgenti
Possibile dal primo principio
Il secondo principio nega ciò (n. min di sorgenti ?)

$Q_H + Q_C = W \rightarrow |Q_H| - |Q_C| = W$



$|Q_H| = |Q_C| + W$

Rendimento $= \eta = \frac{W}{Q_{ass}} = \frac{|Q_H| - |Q_C|}{|Q_H|} = 1 - \frac{|Q_C|}{|Q_H|}$ Il rendimento sarebbe 1 solo se $|Q_C|$ fosse 0

$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_H}$

$T_h > T_c$

Ciclo reversibile

$W > 0$
$Q > 0$

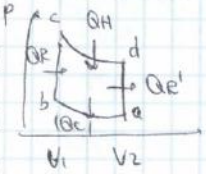
↓
macchina termica

$W < 0$
$Q < 0$

Macchina frigorifera

CICLI NOTEVOLI

→ ~~Ciclo di Otto~~ Ciclo di Stirling →



(AB) $Q_{AB} = Q_C = W_{AB} = nRT_c \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$ $\quad \Delta U_{AB} = 0 \quad Q_{AB} - W_{AB} = 0$

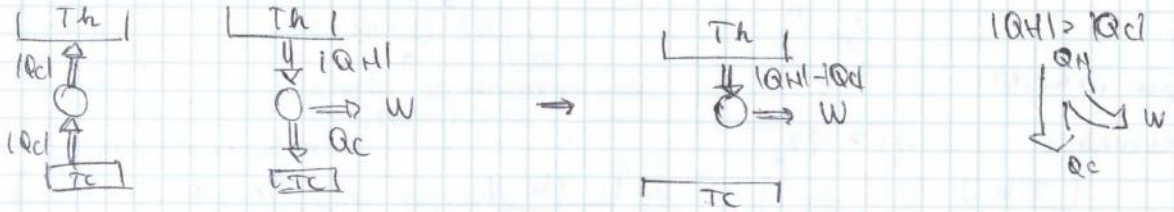
(BC) $W_{BC} = 0 \quad Q_{BC} = nc_V(T_H - T_C) = -Q_R$

(CD) $Q_H = Q_{CD} = nRT_H \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$

(DA) $W_{DA} = 0$
$Q_{DA} = nc_V(T_C - T_H) = Q_R$

$\eta = \frac{W}{Q_{ass}} = \frac{W_{AB} + W_{CD}}{Q_H} \Rightarrow \frac{Q_C + Q_H}{Q_H} = 1 + \frac{Q_C}{Q_H}$ $\quad \eta = 1 + \frac{nRT_c \ln\frac{V_1}{V_2}}{nRT_h \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$

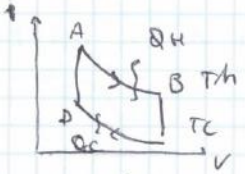
Clausius falso



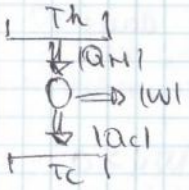
La macchina complessiva è un ciclo monotermo in cui $W>0$
Il ciclo è impossibile

La falsità di Clausius implica la falsità di Kelvin Plank.

CICLO DI CARNOT



→ Due isoterme e due adiabatiche per un gas perfetto



→ Non è una schematizzazione ha veramente 2 sorgenti

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_H|} = \frac{|Q_H| - |Q_c|}{|Q_H|} = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_H|}$$

$$Q_H = Q_{AB} = W_{AB} = nRT_h \ln\frac{V_B}{V_A} > 0$$

$$Q_c = Q_{CD} = nRT_c \ln\frac{V_D}{V_C} < 0$$

$$\eta = 1 - \left|\frac{nRT_c \ln\frac{V_D}{V_C}}{nRT_h \ln\frac{V_B}{V_A}}\right| =$$

DA Adiabatica $TV^{\gamma-1} = cost$ $\quad T_C V_D^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1}$

BC = " $\quad T_H V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$

$T_C V_D^{\gamma-1} = T_H$

$$\eta = 1 - \frac{T_C}{T_A}$$

Il rendimento del ciclo di Carnot dipende dalla temperatura delle sorgenti

Ciclo di carnot inverso

$$K = \frac{1-\eta}{\eta} \qquad K = \frac{T_C}{T_H - T_C}$$

Teorema di Carnot

→ Qualunque macchina che lavora tra 2 temperature arbitrarie non può avere un rendimento maggiore di quello ~~[illegible]~~ di un ciclo reversibile di Carnot che lavora tra le stesse due temperature

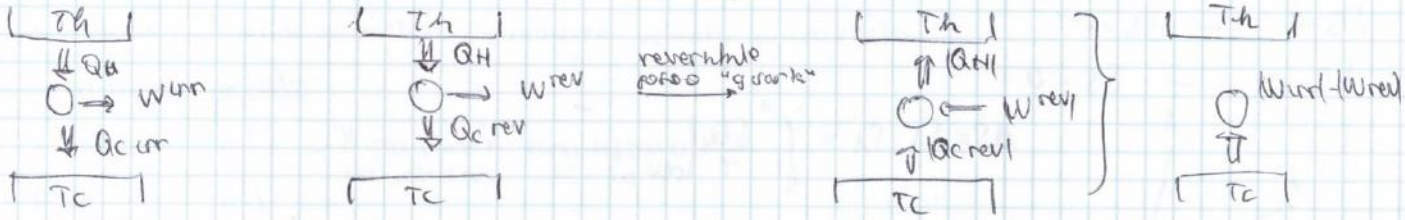
Date T_H e T_C $\quad \eta \le \eta_{carnot}$

Corollario → Tutte le macchine reversibili che lavorano tra le stesse due temperature T_h e T_c hanno lo stesso rendimento

Macchina reversibile T_H, T_C = η carnot indipendentemente dal fluido lavorante $= 1 - \frac{T_C}{T_h}$

Dim (per assurdo)

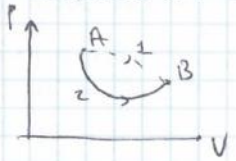
Supponiamo che esista una macchina irreversibile $\eta_{irr} > \eta_{rev}$



Impossibile

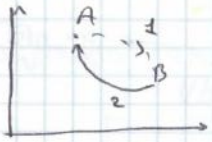
→ Non è vero che la macchina irreversibile può avere rendimento magg di quella reversibile

ENTROPIA E IRREVERSIBILITÀ



$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{\delta Q}{T}\Big|_{rev}$$

→ Inverto la trasformazione 2 (reversibile)



$\oint \frac{\delta Q}{T} \le 0$ → Teorema di Clausius $\quad \int_A^B \frac{\delta Q}{T}_{(1)} + \int_B^A \frac{\delta Q}{T}_{(2)} < 0$

$$\int_A^B \frac{\delta Q}{T}\,irr + \underbrace{\int_B^A \frac{\delta Q}{T}\,rev}_{S_A - S_B} < 0 \Rightarrow \int_A^B \frac{\delta Q}{T}\Big|_{irr} + S_A - S_B < 0 \rightarrow \int_A^B \frac{\delta Q}{T}\Big|_{irr} < S_B - S_A$$

1. Dati 2 punti A, B la differenza di entropia $S_B - S_A = \int_A^B \frac{\delta Q}{T}\Big|_{rev} > \int_A^B \frac{\delta Q}{T}\Big|_{irr}$

Se faccio l'integrale di $\int \frac{\delta Q}{T}$ nel caso di una trasformazione irreversibile non ottengo la differenza di entropia

2. Per ~~calcolare~~ verificare attraverso la differenza di entropia ~~di~~ se una trasformazione è irreversibile, inverto una trasformazione reversibile che va da A a B e se ottengo che i valori dei rispettivi integrali sono diversi (min) allora la trasformazione di partenza è irreversibile

Trasformazione qualunque → $\int_A^B \frac{\delta Q}{T} \le S_B - S_A$ $\begin{cases} = rev \\ < irr \end{cases}$

→ Nelle trasformazioni irreversibili la variazione di entropia è maggiore, ~~espressa~~ rispetto a quella associata agli scambi di calore

<u>~~irr~~ adiabatica</u>

$\int_A^B \frac{\delta Q}{T} = 0 \le S_B - S_A \rightarrow S_B - S_A \ge 0$

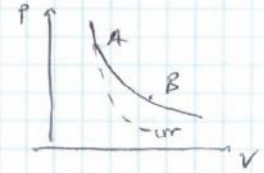
In una tr adiabatica dove non c'è scambio di calore
se tr è rev non c'è variaz di entropia
se tr è irr non si scambia comunque calore ma la variaz di entropia non è nulla.

→ L'universo è un sistema termodinamico adiabatico

$\Delta S_u = \Delta S_{sist} + \Delta S_{amb}$ $\qquad \Delta S_u \ge 0$ → PRINCIPIO DELL'AUMENTO DI ENTROPIA

→ Per qualunque trasformazione l'entropia dell'universo aumenta $\qquad \Delta S_u = 0$ rev $\quad \Delta S_u > 0$ irr

Nella realtà tr ~~o~~ rev non esistono



adiabatica reversibile → isoentropica

adiab $\int_A^B \frac{\delta Q}{T} = 0$

se rev $\int_A^B \frac{\delta Q}{T} = S_B - S_A$

$S_B - S_A = 0$

adiabatica irr ≠ isoentropica
→ L'entropia non può essere costante

→ Chiamiamo <u>macrostato</u> →

microstato → l'insieme delle posizioni e velocità delle singole molecole

→ Tanto più il macrostato è ordinato tanto meno combinazioni di microstati possono generare il macrostato

~~Tanto più è ordinato un sistema~~ Il numero di microstati che possono realizzare il macrostato è associato al disordine.

$S = K \ln(W)$ → num di microstati che realizza un dato macrostato

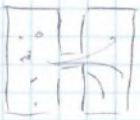
<u>Entropia di un gas perfetto</u>

A $(p_A \; V_A \; T_A)$ → I parametri sono sufficienti per calcolare $S_B - S_A$
↓
B $(p_B \; V_B \; T_B)$

ENERGIA INUTILIZZABILE

→ Quando la trasformazione è irreversibile una parte di energia non riesco a utilizzarla come lavoro e viene dissipata come calore

Es 1 Espansione libera di Joule

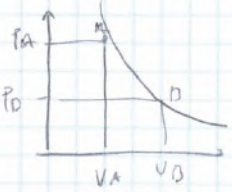


$V_i = V$
$V_f = 2V$

$W = 0$ $\quad \Delta S_u = \cancel{\Delta S_{amb}} + \Delta S_{sist}$

gas perfetto $\quad \Delta S_{sist} = nc_v \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + nR\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$

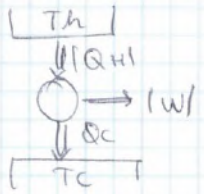
→ Per ottenere lavoro dalla trasformazione il gas deve "spingere" qualcosa non espandersi nel vuoto



$W_{AB} = Q_{AB} = nRT\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = T \cdot nR\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = T\Delta S_u$

↓ lavoro che avrei potuto ottenere se la trasformazione fosse stata reversibile = Energia inutilizzabile

Es 2



$W = |Q_H| - |Q_C|$ $\quad$ Per macchina rev $= W = \eta^{rev}|Q_H| = \left(1 - \frac{T_C}{T_H}\right)|Q_H|$

$W = Q_H + Q_C$

$E_{inut} = W^{rev} - W_{irr} \rightarrow \left(1 - \frac{T_C}{T_H}\right)Q_H - Q_H - Q_C = -\frac{T_C}{T_H}Q_H - Q_C = -T_C\left(\frac{Q_H}{T_H} - \frac{Q_C}{T_C}\right)$

→ Calcoliamo la variazione di entropia dell'universo

$\Delta S_u = \cancel{\Delta S_{sist}} + \Delta S_{amb} = \Delta S_H + \Delta S_C = -\frac{|Q_H|}{T_H} + \frac{|Q_C|}{T_C} = -\frac{Q_H}{T_H} - \frac{Q_C}{T_C} = -\left(\frac{Q_H}{T_H} + \frac{Q_C}{T_C}\right)$

$E_i = T_C \Delta S_u$ → to l'energia inutilizzabile è sempre data da ΔS_u moltiplicata per la più bassa delle ~~due~~ temperature coinvolte

Es 7

Uno studente cede calore a una massa di ghiaccio a 0°C di 350g fino a farlo fondere

$t_s = 75°C$ $\quad T_c = 0°C \rightarrow T = 273,15\ K$

$\Delta S_{acqua} = \int \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T}\int \delta Q = \frac{Q}{T} = \frac{mL_f}{T} =$ $\quad L_f \rightarrow 33,5 \cdot 10^4\ \frac{J}{kg}$

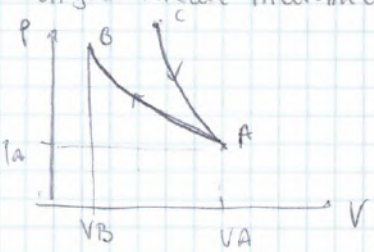
$\Delta S_w = 428\ J/K$ $\quad \Delta S_s = -\frac{mL_f}{T_s} = -383,4\ J/K < 0$

$\Delta S_u = \Delta S_s + \Delta S_w \geq 0$

$\Delta S_u = 35,6\ J/K > 0$

Es 14.30 R

Un gas ideale biatomico



(A) $p_1 = 1$ bar $\quad V_A = 20 \cdot 10^{-3}\ m^3 \quad T_A = 188\ K$

(B) $\quad V_B = 5 \cdot 10^{-3}\ m^3$

(C)

$Q_{BC} = 4,56\ kJ$

W_2, η? $\quad$ BC è reversibile?

(AB) $Q_{AB} = W_{AB} = nRT_A\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$ $\quad$ (BC) $Q_{BC} = 4,56\ J$

(CA) $Q_{CA} = 0$

$\Delta U_{A-A} = 0$ $\quad Q_{TOT} = W_{TOT}$ $\quad Q_{TOT} = Q_{AB} + Q_{BC} + \cancel{Q_{CA}}$

$Q_{TOT} = nRT_A\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + Q_{BC} = -2772$ $\quad \eta = \frac{L}{Q_H} = \frac{L}{Q_{TC}}$

c) Calcolare velocità e accelerazione istantanea a t_1 e t_2

$v(t=2s) = 24\ cm/s$

$v(t=1s) = 6\ cm/s$

$a(t=2s) = 24\ cm/s^2$

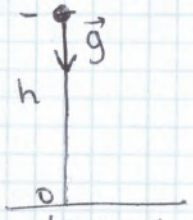
$a(t=1s) = 12\ cm/s^2$

d) Verificare che la velocità media calcolata nel punto b non è la media aritmetica delle velocità istantanee a t_1 e t_2 ma è uguale alla media integrale delle velocità tra gli istanti t_1 e t_2

$$v_m = \frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1} \neq \frac{v(t_2)+v(t_1)}{2}$$

$$\searrow \int_{t_1}^{t_2} \frac{v(t)\,dt}{t_2-t_1}$$

→ Determinare la profondità di un pozzo sapendo che il tempo tra l'istante in cui si lascia cadere un sasso con velocità iniziale nulla e quello in cui si ode il rumore è $t^* = 4{,}8\ s$
Se trascuri la resistenza dell'aria e si assuma la v del suono 340 m/s



fondo del pozzo

$g = 9{,}8\ m/s^2$ $\qquad y_0 = h$

$y(t) = y_0 + v_{y0}t + a_{y0}\frac{t^2}{2}$ → legge oraria per moto unif accelerato

$y = h - g\frac{t^2}{2}$ neg

perchè si muove verso il basso

$y'(t) = v_{suono}\, t$

seconda eq oraria

t^* è la somma del tempo che l'oggetto impiega per arrivare al fondo + quello che l'aria impiega a risalire

$$\begin{cases} t_1' = \frac{h}{v_{suono}} \\ t_1 + t_2 = t^* \\ \frac{t_2^2}{2} g = h \end{cases}$$

$t^* = t + \frac{h}{v_{suono}} \rightarrow t_2 = t^* - \frac{h}{v_{suono}}$ $\qquad \left(t^* - \frac{h}{v_{suono}}\right)^2 \frac{g}{2} - h = 0$

$$\frac{h^2 g}{v_{suono}^2 2} - \frac{2t^* hg}{v_{suono}\, 2} - h + \frac{t^* g}{2} = 0$$

→ Il sistema ammette due soluzioni ma solo è l'altezza giusta devo imporre che l'altezza sia sufficientemente grande per permettere che il fenomeno avvenga

$s = t^* v_{suono} > h$ $\qquad$ Quindi prenderò la radice con il segno meno dell'equazione

dunque moltiplico per $g/2$

$$\frac{1}{v_{suono}^2} h^2 - 2\left(\frac{t^*}{v_{suono}} - 2\right) h + t^{*2} = 0$$

$$h^2 - 2v_{suono}(t^* - v_{suono})\, h + (v_{suono})^2 t^{*2} = 0$$

$$h^2 - (2\cdot 340)(4{,}8 - 340)\, h + (340)^2 (4{,}8)^2 = 0$$

$$h^2 = (2\cdot 340)(4{,}8-340) \pm \frac{\sqrt{[(2\cdot 340)(4{,}8-340)]^2 - 4\,(340)^2(4{,}8)^2}}{2} =$$

$$-227{,}936 \pm \frac{(-10{,}65)}{2}$$

[c.a 100]

LEGGE ORARIA

→ MOTO ~~RETTILINEO~~ UNIFORME

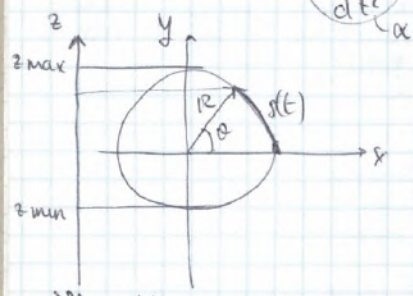
$x(t) = x_0 + v_0 t$ $\quad s(t) = s_0 + v_0 t$ $\quad s \to \theta$

$\theta(t) = \theta_0 + \frac{d\theta}{dt} t$ $\quad \omega_0$

→ MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$v = v_0 + at$ $\quad x = x_0 + vt + \frac{at^2}{2}$ $\quad x \to \theta$

$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{d^2\theta t}{dt^2} \frac{t^2}{2}$ $\quad \alpha$ $\rightarrow$ $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2$



$s(t) = \theta(t) R$ $\quad v(t) = \omega(t) R$ $\quad$ → In coordinate polari

$a(t) = \alpha(t) R$

→ la legge oraria è quell'equazione scalare che ci da informazioni solo su come percorriamo la traiettoria

→ Il problema della meccanica è conoscere le accelerazioni

→ La proiezione del moto circolare su un'asse è il MOTO ARMONICO in cui il corpo si ritrova alla stessa posizione in un arco di tempo detto periodo

$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$

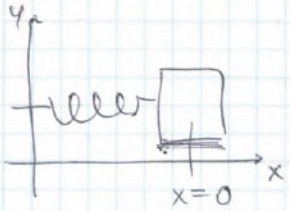
$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ $\quad a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$ $\quad \rightarrow a(t) = -\omega^2 x(t)$

$A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$ $\quad -\omega^2 \underbrace{A \sin(\omega t + \varphi_0)}_{x(t)}$

→ Per trovare un'equazione dove non compare il tempo moltiplico lo spazio per 'ω' e ne prendo il quadrato → $\omega^2 x(t) = \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$, $v^2(t) = \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$ } sommo membro a membro

→ Sommo → $\omega^2 x^2 + v^2 = \omega^2 A^2$

Es 8



Supponendo che non vi siano attriti il moto diventa perpetuo (non esiste nella realtà fisica)

→ Calcolare frequenza moto e ampiezza oscillazione

$x(t_1) = 0,112\ m$ $\quad v(t_1) = 13,6\ m/s$ $\quad a(t_1) = -0,123\ m/s^2$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ $\quad f = \frac{1}{T}$ $\quad f = \frac{\omega}{2\pi}$

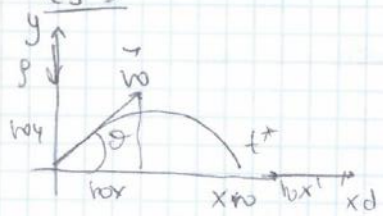
→ Dall'equazione del moto $a + \omega^2 x = 0$ $\quad a(t_1) + \omega^2 x(t_1) = 0$ $\quad \omega = \sqrt{-\frac{a(t_1)}{x(t_1)}}$

$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0,167\ Hz$

→ Per trovare A utilizzo la 2 equazione

$\omega^2 x + v^2 = \omega^2 A^2$ $\quad A = \sqrt{\frac{x - v^2}{\omega^2}}$

Es 3



$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\theta\, t \\ y(t) = v_0 \sin\theta\, t - g\frac{t^2}{2} \end{cases}$$

$g = 9{,}8\ m/s^2 \qquad v_0 = 16\ m/s \qquad \theta = 37°$

$x'(t) = x_d - v_{0x}' t \qquad x_G \Rightarrow y(t^*) = 0 = \left(v_0 \sin\theta - g\frac{t}{2}\right) t$

$t^* = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}$ → sostituisco questo tempo a x → $\frac{2 v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$

→ $x'(t^*) = x_G = x_d - v_{0x}' t^* \qquad v_{0x}' = \frac{x_d - x_G}{t^*} \Rightarrow x_d - \frac{2 v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} =$

DINAMICA

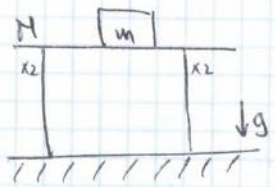
i) $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ — Valida quando la massa del corpo rimane inalterata
In un sistema non inerziale $\vec{a}$ è somma di accelerazioni reali e fittizie

→ Se la somma delle forze è nulla, l'accelerazione è nulla quindi il corpo procede con v costante

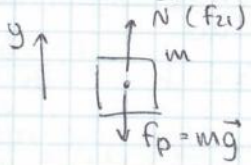
ii) Tutti i corpi che interagiscono producono delle reazioni

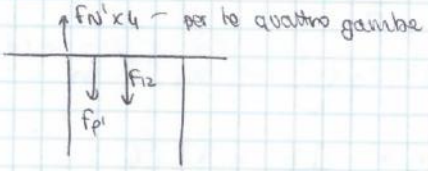
$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Es 1 Un corpo di massa m2 poggiato al centro di un piano di un tavolo quadrato a quattro gambe di massa M=20 kg a sua volta poggiato al pavimento orizzontale. Calcolare le forze applicate al tavolo e al pavimento



$g = 9{,}81\ m/s^2$





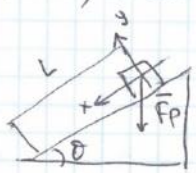
m $\begin{cases} F_{21} - F_p = 0 \end{cases} \rightarrow |F_{21}| = m_1 g$

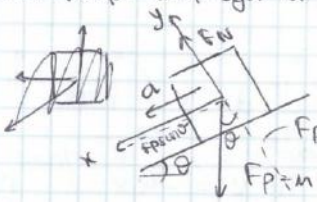
M $\begin{cases} 4F_n - F_{12} - F_{p1} = 0 \end{cases} \rightarrow 4F_n = F_{12} + F_{p1} = m_1 g + m_2 g$

$F_n = \left(\frac{m_1 m_2}{4}\right) g$

Es 2

Una massa m è lasciata scivolare lungo un piano liscio (no attrito) inclinato ($\theta = 30°$) da una certa altezza, $L = 2m$. Quanto tempo impiega il corpo per raggiungere la base del piano





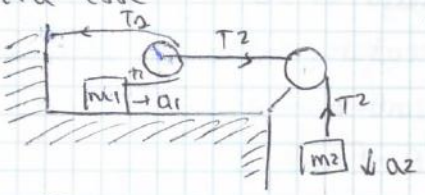
$\begin{cases} x: F_p \sin\theta = m\vec{a} \\ y: F_n - F_p \cos\theta = 0 \end{cases}$ → trovare l'accelerazione

$\vec{a} = \frac{F_p \sin\theta}{m} \rightarrow \frac{\cancel{m} g \sin\theta}{\cancel{m}}$ → accelerazione non nulla costante (moto uniformemente accelerato)

$x(t) = x_0 + \underset{\text{nulla}}{v_0 t} + a\frac{t^2}{2} = -L + g \sin\theta \frac{t^2}{2} = 0$ → per raggiungere la base

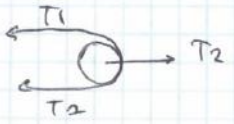
$t^* = \sqrt{\frac{2L}{g \sin\theta}}$

→ Una massa m_1 posta su un piano liscio orizzontale è collegata a una massa m_2 come la figura. Se a_1 e a_2 sono le accelerazioni delle masse m_1, m_2 si determini la relazione tra esse

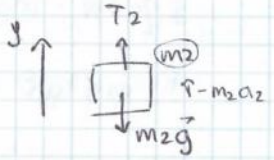


→ La carrucola senza massa e privi di attriti
filo inestensibile

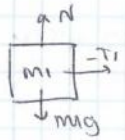
$T_1, T_2 > 0$ — I due oggetti non possono avere la stessa accelerazione



$T_2 = 2T_1$



$T_2 - m_2 g = m_2 a_2$



$T_1 = m a_1$

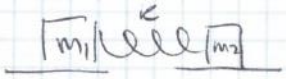
$$\begin{cases} T_2 = 2T_1 \\ T_2 - m_2 g = -m_2 a_2 \\ T_1 = m_1 a_1 \end{cases}$$

$2T_1 - m_2 g = -m_2 a_2$

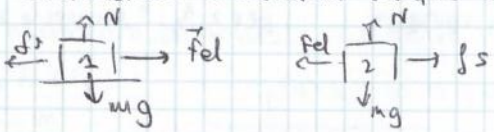
$2m_1 a_1 - m_2 g = -m_2 a_2$ $\qquad a_1 = \frac{m_2}{2m_1} a_2 + \frac{m_2}{2m_1} g \Rightarrow \frac{m_2}{2m_1}(g - a_2)$

8) Due punti materiali di masse $m_1 = 1{,}5$ kg e $m_2 = 1{,}8$ kg sono collegati tra loro da una molla di costante elastica $k = 50$ N/m; la molla è a riposo $\mu_1 = 0{,}4$ $\mu_2 = 0{,}2$

Calcolare quanto si può allungare la molla mantenendo il sistema sempre in condizioni di equilibrio statico



$F_{el} = -\Delta x k$



→ Se non vogliamo che i corpi si muovano l'attrito statico deve essere maggiore di Fel

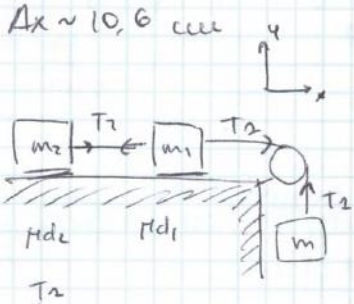
$$\begin{cases} f_s^{max} \le \mu_s N & \text{STATICO} \\ f_d = \mu_d N & \text{DINAMICO} \end{cases}$$

$$F_{el} < \min\{\vec{f}_{s1}, f_{s2}\} = \min\left\{\frac{\mu_{s1} m_2 g}{k}, \frac{\mu_{s2} m_2 g}{k}\right\}$$

$\Delta x k <$

$\Delta x \sim 10{,}6$ cm

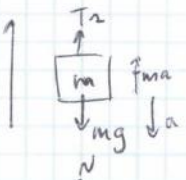
9)



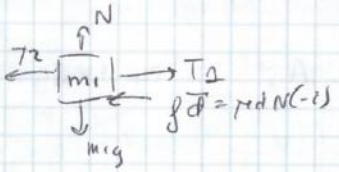
→ Relazione tra le masse affinché i corpi si muovano di corpo uniforme

$m_1 = 8$ kg $\quad m_2 = 6$ kg $\quad$ → calcolare T_1 e T_2

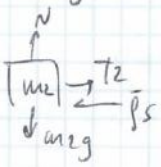
$\mu_1 = 0{,}3 \quad \mu_2 = 0{,}5$ $\quad$ → Ad un certo istante m si stacca il filo tra $m_1 - m_2$ rimane teso?



$T_1 - mg = -ma$



$T_1 - T_2 - \mu_{d1} m_1 g = m_1 a$



$T_2 - \mu_{d2} m_2 g = m_2 a$

$$\begin{cases} T_1 - mg = -ma \\ T_1 - T_2 - \mu_{d1} m_1 g = m_1 a \\ T_2 - \mu_{d2} m_2 g = m_2 a \end{cases}$$

$a = 0$

$T_1 = mg \qquad mg - T_2 - \mu_{d1} m_1 g = 0 \rightarrow T_2 = mg - \mu_{d1} m_1 g \qquad \cancel{mg} - \mu_{d1} m_1 \cancel{g} - \mu_{d2} m_2 \cancel{g} = 0$

$m = \mu_{d1} m_1 + \mu_{d2} m_2$ → Affinché il moto sia uniforme (con $a = 0$)

→ Risolvere eq di corpo libero senza m e T_1, solo con T_2 e verificare che $T_2 > 0$

5. Un ascensore sale con un'accelerazione di 1,22 m/s². Nell'istante in cui la sua velocità è uguale a 2,44 m/s un bullone cade dal soffitto dell'ascensore (2,74 m dal pavimento dello stesso)

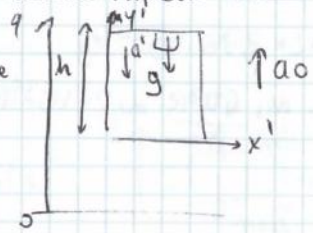
a) tempo di caduta del bullone

b) Distanza percorsa dal bullone rispetto alla tromba dell'ascensore

$$\begin{cases} \bar{r} = \bar{r}' + \overline{OO'} \\ \bar{v} = \bar{v}' + \bar{v}_{OO'} \\ \bar{a} = \bar{a}' + \bar{a}_{OO'} \end{cases}$$

→ rel generale relazionale

$\bar{a} \to g$, $\bar{a}' \to ?$



$a' = -\bar{a}_0 + \bar{g}$

$a'_y = -a_0 - g = -(a_0 + g)$

$y'(t) = y'_0 + \cancel{v_{0y}'t} + a_y' \frac{t^2}{g} \to y'(t) = h - (a_0 + g)\frac{t^2}{2} \to t = \sqrt{\frac{2h}{a_0+g}} \approx 0,7\ s$

$y(t) = y_0 + v_0 t + g\frac{t^2}{2} \to y(t) - y_0 \to \Delta y = v_{0y} t + g\frac{t^2}{2}$

v_0 → rel ascensore

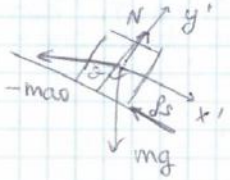
$\Delta y = v_{0y} t + g\frac{t^2}{2} = -0,6\ m$

Es 1

→ Si nota che il punto sia in quiete rispetto al piano. Calcolare in funzione di θ e μs la condizione che deve soddisfare a. Tutto il sistema è in movimento

→ Studiare il caso in cui μs = 0 (piano liscio)

→ Sistema di riferimento non inerziale



$x': \ -f_s + F_p \sin\theta - m a_0 \cos\theta = m a'$ → eq. per il blocchetto ammettendo che possa muoversi

$$\begin{cases} x' = -f_s + mg\sin\theta - m a_0 \cos\theta = 0 \\ \quad \text{il corpo è fermo} \\ y' = N - F_p \cos\theta - m a_0 \sin\theta = 0 \end{cases}$$

$f_s = mg\sin\theta - m a_0 \cos\theta$

$f_s \geq 0 \to g\sin\theta \geq a_0 \cos\theta$

$\underline{a_0} \leq g\tan\theta$ → l'accelerazione deve essere piccola (acc. piano inclinato)

$N = mg\cos\theta + m a_0 \sin\theta$

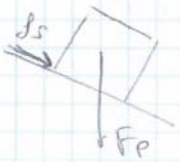
$f_s \leq \mu_s N \to \cancel{m}g\sin\theta - \cancel{m}a_0\cos\theta \leq \mu_s(\cancel{m}g\cos\theta + \cancel{m}a_0\sin\theta)$ (tan)

$g\tan\theta - a_0 \leq \mu_s g + \mu_s a_0 \tan\theta$

$-(1 - \mu_s\tan\theta)a_0 \leq (\mu_s - \tan\theta)g$

$\underline{a_0} \geq \frac{\tan\theta - \mu_s}{1 + \mu_s\tan\theta} g$

→ Affinché il blocco rimanga fermo deve essere compresa tra i due valori trovati



→ Caso in cui il piano va talmente veloce da lasciare indietro il corpo $(-f_s)$

$a_0 \geq g\tan\theta$ $\qquad a_0 \leq \frac{\tan\theta + \mu_s}{1 - \mu_s\tan\theta} g$

$\frac{\tan\theta - \mu_s g}{1 + \mu_s\tan\theta} \leq a_0 \leq \frac{\tan\theta + \mu_s}{1 - \mu_s\tan\theta} g$ → condizione per cui il blocco non si muove né verso l'alto né verso il basso