NUMERO: 1302 ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Greppi

MATERIA: Fisica I + Temi d'esame + Eserc., Prof.Ghigo

FISICA I

— TEORIA —

- Terza legge di Newton (di azione e reazione)
- Quantità di moto e impulso
  - teorema dell'impulso
  - conservazione della quantità di moto
- Risultante delle forze. Equilibrio. Reazioni vincolari
- Classificazione delle forze (interazioni fondamentali)
  - forza peso (accelerazione di gravità; la sensazione di peso)
  - forza di attrito radente (coefficiente di attrito statico; coefficiente di attrito dinamico)
  - forza elastica
  - forza di attrito viscoso
  - tensione dei fili, carrucole
- Azione dinamica delle forze: forze centripete (esempi: curve sopraelevate, curve su strada piana; equilibrio dinamico)
- Applicazioni a sistemi semplici: piano inclinato, pendolo semplice
- Lavoro. Potenza. Energia cinetica
  - teorema dell'energia cinetica
  - lavoro della forza peso
  - lavoro di una forza elastica
  - lavoro di una forza di attrito radente
- Forze conservative
  - energia potenziale
  - forze non conservative e forze dissipative
- Principio di conservazione dell'energia meccanica
  - lavoro delle forze non conservative
- Relazione tra energia potenziale e forza
  - limitazioni del moto (grafici dell'energia)
- Momento angolare e momento della forza
  - teorema del momento angolare
  - conservazione del momento angolare
  - teorema del momento dell'impulso
  - lavoro in un moto circolare
- Forze centrali
  - definizione di forza centrale
  - moto di un punto materiale in un campo di forze centrali
    - velocità areale
    - richiamo alla seconda legge di Keplero

MOTI RELATIVI

- Sistemi di riferimento. Velocità e accelerazione relative
- Teorema delle velocità relative
  - velocità assoluta, relativa e di trascinamento
  - formule di Poisson
- Teorema delle accelerazioni relative
  - accelerazione assoluta, relativa e di trascinamento
  - accelerazione complementare (o di Coriolis)
- Sistemi di riferimento inerziali. Relatività galileiana
- Sistemi di riferimento non inerziali: forze apparenti (o forze di inerzia)
- Studio di casi particolari:
  - moto di trascinamento rettilineo uniforme (trasformazione galileiana)
  - moto di trascinamento rettilineo accelerato
  - moto di trascinamento rotatorio uniforme
  - il moto rispetto alla Terra

Statica (cenni): equilibrio stabile, instabile, indifferente; esempi

OSCILLAZIONI

Oscillatore armonico semplice: equazione dell'oscillatore armonico, soluzione generale, energia.
Oscillatore armonico smorzato da una forza viscosa: casi di smorzamento forte, critico e debole.
Oscillatore armonico forzato: equazione nel caso di una forzante armonica, impostazione del calcolo e soluzione finale, analisi della risposta in funzione della frequenza forzante, risonanza.

GRAVITAZIONE ed ELETTROSTATICA

Le tre leggi di Keplero
Forza gravitazionale (argomento di Newton)
Massa inerziale e massa gravitazionale (cenni)
Campo gravitazionale: definizione e discussione sull'opportunità dell'introduzione della grandezza 'campo'
Energia potenziale gravitazionale
Velocità di fuga
Potenziale gravitazionale
Teorema di Gauss per il campo gravitazionale: flusso; enunciato del teorema ed esempi in simmetria sferica (sfera omogenea, guscio sferico).
Equazione del moto. Cenni sul procedimento di determinazione della traiettoria (coniche, possibili traiettorie)
Grafici dell'energia: cenni (energia potenziale efficace)
Elettrostatica:
- introduzione sulla fenomenologia degli effetti elettrostatici
- forza di Coulomb
- campo elettrostatico
- energia potenziale e potenziale elettrostatico
- teorema di Gauss per il campo elettrico: enunciato e dimostrazione; angolo solido; applicazione al caso di simmetria cilindrica. (piano indefinito uniformemente carico e doppio strato: vedi esercitazioni)

PROPRIETA' MECCANICHE DEI FLUIDI

Generalità sui fluidi.
Pressione, pressione come funzione scalare del punto, lavoro delle forze di pressione
Equilibrio statico di un fluido
Equilibrio in presenza della forza peso
- legge di Stevino
- principio di Pascal
- studio di casi specifici: barometro di Torricelli, pressione atmosferica e sue variazioni

Principio di Archimede, stabilità dei corpi galleggianti
Fluido ideale e fluido reale (attrito interno, viscosità)
Moto di un fluido: descrizioni euleriana e lagrangiana; regime stazionario; linee di corrente e tubo di flusso; portata; legge di Leonardo.
Teorema di Bernoulli (fluido ideale): enunciato e dimostrazione; studio di casi particolari: condotto a sezione costante inclinato, tubo di Venturi, teorema di Torricelli, paradosso idrodinamico.
Moto di (in) un fluido reale
- Moto laminare (enunciato della legge di Hagen-Poiseuille)
- Moto turbolento o vorticoso (numero di Reynolds, velocità critica)
- Moto in un fluido: paradosso di D'Alembert (fluido ideale); resistenza del mezzo nel caso di moto laminare (legge di Stokes) e turbolento; effetto Magnus; portanza (cenni, profilo d'ala).

TEORIA DELLA MISURA

Dopo una misurazione otteniamo un valore:

ERRORE ASSOLUTO

$$X = X_{Best} \pm \Delta X$$

LEGENDA

X_{Best}, migliore stima di X

ΔX, Errore o incertezza

Avremo un valore di X che dovrà estendersi dopo la virgola fino a raggiungere lo stesso ordine di grandezza dell'errore.
(es: $\Delta X = 0{,}01 \rightarrow X = 2{,}23$
due cifre dopo la virgola)

Errore relativo:

$$\frac{\Delta X}{|X|} \cdot 100 \quad [\%]$$

PROPAGAZIONE DELLE INCERTEZZE

Per una funzione di una variabile:

$$q = f(x)$$

$$q(X_{best} \pm \Delta X) = q(X) \cong q(X_{best}) \pm \left|\frac{dq}{dX}\right| \Delta X$$

Errore propagato:

$$\Delta q = \left|\frac{dq}{dx}\right| \Delta x$$

3) ERRORI STRUMENTALI

- inadeguatezza dello strumento

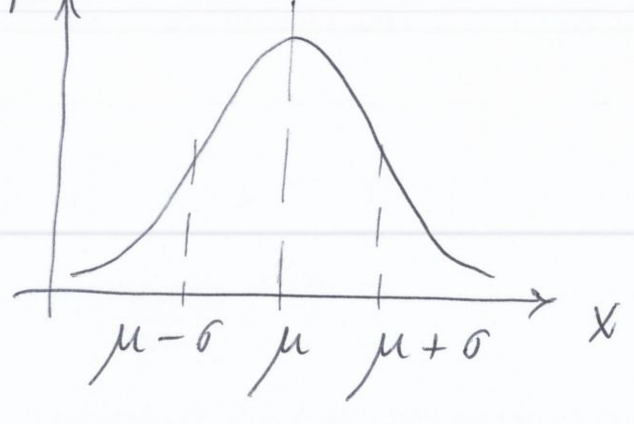
def. ACCURATEZZA, minimizzazione degli errori sistematici

SENSIBILITA' dello STRUMENTO, minima variazione della grandezza misurata che lo strumen= to e' in grado di apprezzare

PRECISIONE (num. dopo la virgola) di una misura, dipende dagli errori.

MISURA
- DIRETTA, grandezza e' indipendente
- INDIRETTA, grandezza dipende da altre (ricavo il valore mediante una formula).

Distribuzione normale:



$$P = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(X-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

μ, valore medio

σ, deviazione standard

CINEMATICA DEL PUNTO

Punto → consideriamo un corpo privo di dimensioni.

Cinematica → descrive il moto del corpo.

VETTORI

Prodotto scalare

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

modulo

Occorre scegliere il sistema di riferimento. Avremo una TRAIETTORIA, luogo dei punti occupati dalla particella in movimento.

LEGGE ORARIA, legge che descrive il moto. Es: come varia lo spazio in funzione del tempo.

MOTO RETTILINEO

Avviene lungo una retta, abbiamo un'origine e un verso:

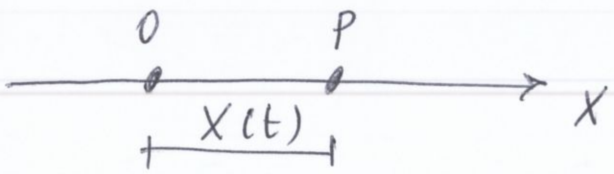


DIAGRAMMA ORARIO

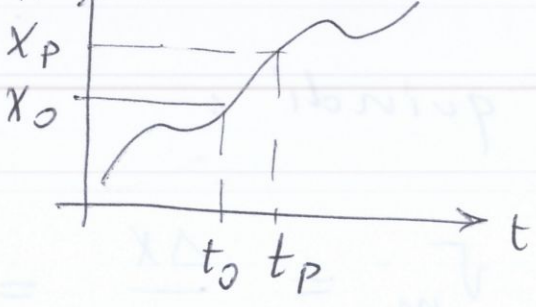


Diagramma orario: mi descrive graficamente la relazione tra le grandezze.

MOTO RETTILINEO UNIFORME

abbiamo che v = cost
quindi può uscire dall'integrale

$$X = X_0 + \int_{t_0}^{t} v\, dt$$

$$= X_0 + v(t - t_0)$$

$$X = X_0 + vt$$

LEGGE ORARIA
MOTO RET. UNIF.
con $t_0 = 0$

Accelerazione media:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

Accelerazione istantanea:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

poiché $v = \frac{x}{t}$

integrando:

$$\int_{t_0}^{t} a\, dt = \int_{v_0}^{v} dv$$

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\, dt$$

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\, dt$$

avendo $a = \text{cost}$, otteniamo

$$v = v_0 + a(t - t_0)$$

essendo che:

$$X = X_0 + \int_{t_0}^{t} v\, dt$$

$$= X_0 + \int_{t_0}^{t} \left[v_0 + a(t - t_0)\right] dt$$

$$= X_0 + v_0(t - t_0) + a\left(\int_{t_0}^{t} t\, dt - \int_{t_0}^{t} t_0\, dt\right)$$

$$= X_0 + v_0(t - t_0) + a\left[\left(\frac{t^2 - t_0^2}{2}\right) - t_0(t - t_0)\right]$$

$$= X_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}\left(t^2 + t_0^2 - 2t_0 t\right)$$

$$X = X_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2$$ LEGGE ORARIA

lanciando verso l'alto il corpo

condizioni iniziali : $v_0 = v_2$
$x_0 = 0$

sale con velocità che decresce progressivamente $v > 0$, $a < 0$, poi si ferma, cioè $v = 0$

$$a = \frac{dv}{dt} = -g$$ quando si ferma.

$$\int_{v_2}^{0} dv = -g \int_{0}^{t_M} dt$$

$$-v_2 = -g t_M$$

$$t_M = \frac{v_2}{g}$$ istante in cui si ferma in aria

abbiamo un moto unif. decelerato :

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)}$$

$x_0 = 0$
$v_0 = v_2$
$v = 0$
$x = x_M$

$$x_M = \frac{v_2^2}{2g}$$ altezza a cui si ferma

con $t \geq t_M$ il corpo cade normalmente con accelerazione g

MOTO ARMONICO SEMPLICE

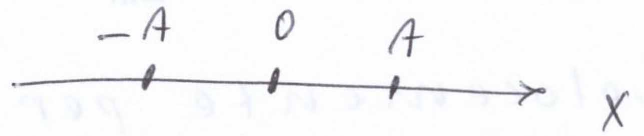
e' un moto vario, legge oraria:

$$X(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

LEGENDA
- A, ampiezza del moto
- $\omega t + \phi$, fase del moto
- ω, pulsazione
- ϕ, fase iniziale

$$-1 \leq \sin(\ldots) \leq 1$$

quindi come estremi dello spostamento avremo A e $-A$:



al tempo $t = 0$ $\quad X(0) = A \sin(\phi)$

Il moto armonico dipende dalla funzione seno. Essendo periodica di 2π, anche il moto risulterà periodico.

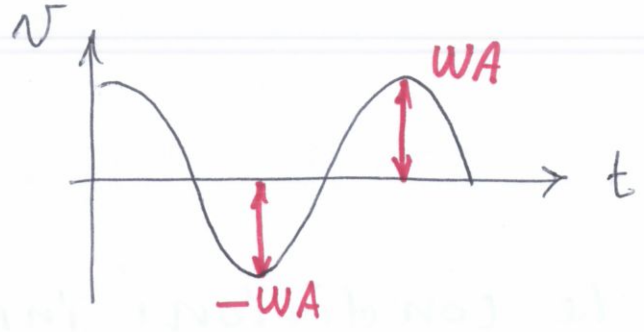
Abbiamo delle oscillazioni di ampiezza A rispetto al centro O.

determiniamo il periodo T:

per intervalli di tempo uguali il punto ripassa nella stessa posizione con velocità uguale

def. di PERIODO

$$T = t' - t$$

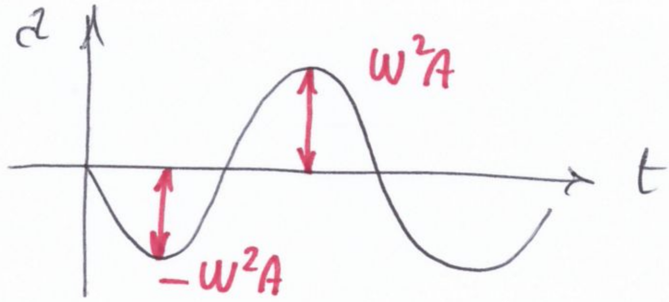


valori compresi

$-\omega A \leq v \leq \omega A$

accelerazione:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi)$$



valori compresi

$-\omega^2 A \leq a \leq \omega^2 A$

l'accelerazione si annulla nel centro di oscillazione e assume il valore massimo in modulo ($\omega^2 A$) agli estremi, dove inverte la velocita'.

Le funzioni sono sfasate tra di loro. velocita' e' sfasata di $\frac{\pi}{2}$ rispetto allo spostamento (e' in QUADRATURA DI FASE).

Accelerazione e' sfasata di π rispetto allo spostamento (e' in OPPOSIZIONE DI FASE).

A e ϕ individuano condizioni iniziali:

$$-\omega^2 \int_{x_0}^{x} x\,dx = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2$$

essendo

$$a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$$

da cui ottengo :

$$-\frac{1}{2}\omega^2 (x^2 - x_0^2) = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2)$$

$$v^2(x) = v_0^2 + \omega^2 (x_0^2 - x^2)$$

considerando $\boxed{\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ v_0 &= \omega A \end{aligned}}$ ⚠ condizioni nel centro

$$v^2(x) = \omega^2 (A^2 - x^2)$$

⚠

CONDIZIONE NECESSARIA e SUFF. che un moto sia armonico :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$a = -\omega^2 x$$

⚠

UNITA' DI MISURA

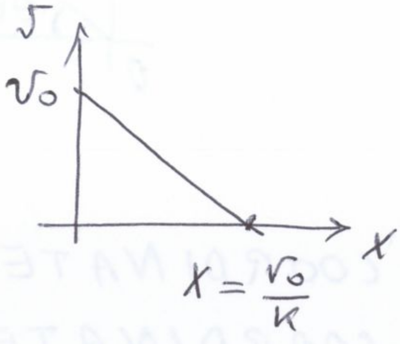
A	[m]
T	[sec]
ν	[1/sec]
fase , $\omega t + \phi$	[rad]
$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$\left[\frac{rad}{s}\right]$

Funzione della posizione:

$$a = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v$$

$$\int_0^x -k\cancel{v}\,dx = \int_{v_0}^{v} \cancel{v}\,dv$$

$$v(x) = v_0 - kx \qquad \text{con } x_0 = 0$$



legge oraria:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

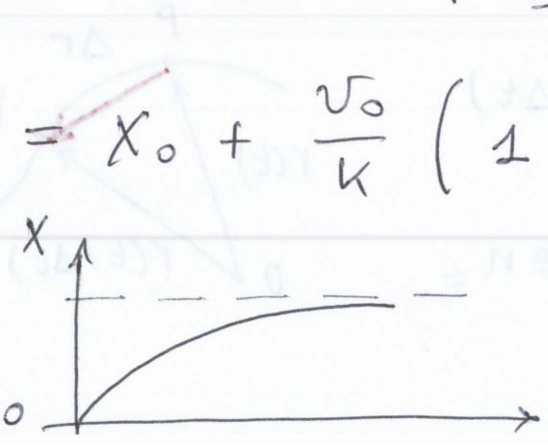
$$x - x_0 = \int_0^t v\,dt$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_0 e^{-kt}\,dt$$

$$= x_0 + v_0 \left[\frac{e^{-kt}}{-k}\right]_0^t$$

$$x(t) = x_0 + v_0\left(\frac{e^{-kt}}{-k} - \frac{1}{k}\right)$$

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$



$t \to \infty$

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{k}\left(1 - \overset{0}{\frac{1}{e^{kt}}}\right)$$

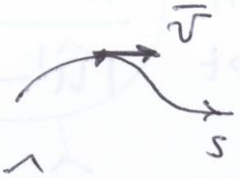
$$= x_0 + \frac{v_0}{k}$$

$$\frac{\bar{r}(t+\Delta t)-\bar{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$ rapporto incrementale

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} \qquad \bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

la direzione del moto coincide con quella della tangente alla traiettoria:

$$\bar{v} = \frac{ds}{dt}\,\hat{u}_T$$



$\hat{u}_T$, versore tangente

traiettoria e velocita' ad essa tangente sono CARATTERISTICHE INTRINSECHE, non dipendono dal sistema di riferimento.

componenti cartesiane

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\hat{u}_y$$

$$= v_x\,\hat{u}_x + v_y\,\hat{u}_y$$

$$\bar{v} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

componenti polari

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cdot \hat{u}_r)$$

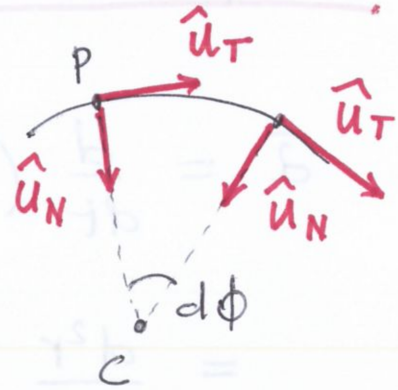
ACCELERAZIONE nel moto piano

Deve esprimere le variazioni di velocità sia come modulo che direzione.

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

$$= \frac{d}{dt}(v \cdot \hat{u}_T) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{d\hat{u}_T}{dt} v$$

$$= \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v \cdot \frac{d\phi}{dt} \cdot \hat{u}_N$$



C, centro di curvature.

Arco di curva ds:

$$ds = R\, d\phi \qquad R = \overline{CP}$$

quindi:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} v$$

sostituendo:

$$a = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\hat{u}_N$$

$$= a_T + a_N$$

LEGENDA

a_T, accel. tangenziale

a_N, accel. centripeta

$$\bar{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{u}_r$$

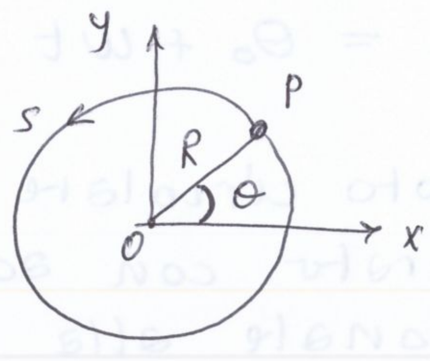
$$+\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right]\hat{u}_\theta$$

MOTO CIRCOLARE

Traiettoria e' una circonferenza
Accelerazione centripeta sempre $\neq 0$

$$\bar{a} = a_N$$

$$\begin{cases} a_T = \dfrac{dv}{dt} = 0 \\ a_N = \dfrac{v^2}{R} \neq 0 \end{cases}$$



in coordinate polari:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos\theta \\ y(t) = R\sin\theta \end{cases} \qquad R = \sqrt{x^2+y^2}$$

velocita' angolare:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}v$$

essendo $ds = R\,d\theta$

Nel moto circolare la velocita' radiale e' nulla, abbiamo solamente la componente tangenziale.

MOTO CIRCOLARE NON UNIFORME

Abbiamo variazione dell'accelerazione centripeta (v non e' costante). Inoltre e' presente anche l'accelerazione tangenziale.

$$\boxed{a_N \neq cost}$$

$$a_T \neq 0 = \frac{dv}{dt}$$

Accelerazione angolare:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt}$$

poiche' $\omega = \frac{v}{R}$

$$= \frac{a_T}{R}$$

dato che $a_T = \frac{dv}{dt}$

sapendo che, integrando:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^{t} \alpha \, dt$$

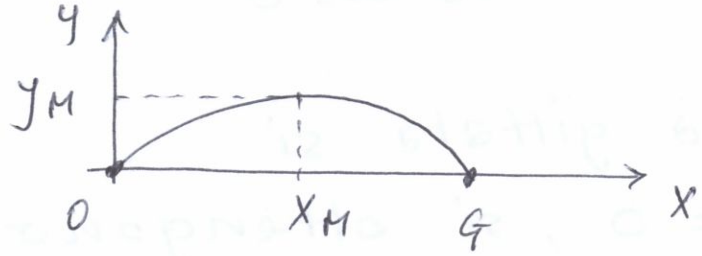
$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha \, dt$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega \, dt$$

Andando a considerare in funzione

MOTO PARABOLICO

moto di un punto P lanciato dall'origine con velocita' v_0 e angolo θ.



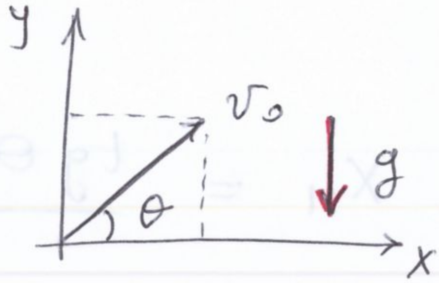
$\overline{OG}$, gittata

abbiamo un'accelerazione costante

$$\bar{a} = \bar{g} = -g\hat{u}_y$$

condizioni iniziali:

$$v_0 \neq 0$$
$$r = 0$$



velocita':

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a\,dt = v_0 - gt\hat{u}_y$$

$$v_x = v_0 \cos\theta$$
$$v_y = v_0 \sin\theta - gt$$

Leggi orarie dei moti proiettati:

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\theta \cdot t \\ y = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

poiche'
moto uniforme
moto unif. accelerato

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

quindi $\sin^2\theta = \cos^2\theta$

$$\theta = 45^\circ$$

$$(X_G)_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

tempo di volo :

distanza X_G a velocità $v_X = v_0\cos\theta$

$$t_G = \frac{X_G}{v_0\cos\theta} = \frac{2v_0\sin\theta}{g} = 2t_M$$

DINAMICA DEL PUNTO

Descrive le cause fisiche del movimento.
Inoltre studia le condizioni di quiete.

3 PRINCIPI DELLA DINAMICA

1) Principio di inerzia.
Un corpo non soggetto a forze non subisce cambiamenti di velocità; resta in uno stato di quiete ($v = 0$) o se era in movimento continua con $v = \text{cost}$ (rett. uniforme).

2) Legge di Newton
Esprime il legame tra forza e stato di moto :

$$\bar{F} = m\bar{a}$$

L'interazione del punto con l'ambiente circostante, espressa mediante $\bar{F}$, determina l'accelerazione del punto, cioè la variazione della sua velocità.

m , massa inerziale
esprime la resistenza a modificare il suo stato di moto.

$$\bar{F}\,dt = d\bar{p}$$

integrando otteniamo l'impulso:

$$\bar{J} = \int_0^t \bar{F}\,dt = \int_{p_0}^{p} d\bar{p} = \Delta\bar{p}$$

$$\bar{J} = \Delta\bar{p}$$

l'impulso di una forza applicata ad un punto materiale provoca la variazione della sua quantità di moto.

con $m = \text{cost}$ $\bar{J} = m\Delta\bar{v}$

$F = \text{cost}$ $\bar{J} = \bar{F}t$

quindi:

$$\Delta\bar{v} = \frac{\bar{F}t}{m}$$

valore medio della forza:

$$\bar{F}_m = \frac{1}{2}\int_0^t \bar{F}\,dt$$

$$\bar{F}_m = \frac{\Delta\bar{p}}{t}$$

conservaz. della q. di moto

In assenza di forze applicate la quantità di moto rimane costante

CLASSIFICAZIONE FORZE

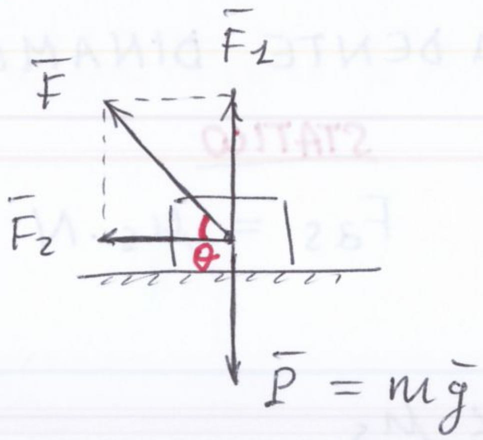
moto vario :

$$\bar{F} = m(a_T + a_N)$$
$$= m\left(\frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\hat{u}_N\right)$$

Forza peso :

$$\bar{P} = m\bar{g} \qquad g = 9{,}8\ \frac{m}{s^2}$$

FORZA DI ATTRITO RADENTE



Il corpo non entra in movimento fino a che
$F_2 > \mu_s N$

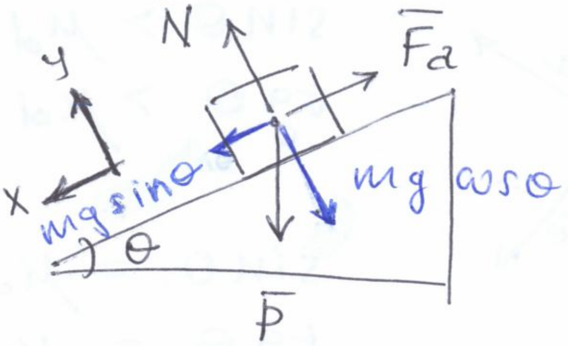
μ_s , coeff. di attrito statico
N , reazione vincolare $\qquad \bar{N} = -m\bar{g}$

equilibrio: $\bar{N} + \bar{P} + \bar{F} = 0$

$$N = P - F_1$$
$$= P - F\sin\theta$$

PIANO INCLINATO

superficie inclinata, corpo in movimento.



lungo x:

$$mg\sin\theta - F_a = ma$$

lungo y:

$$-mg\cos\theta + N = 0$$

$$N = mg\cos\theta$$

condizione di moto:

$$mg\sin\theta > F_a$$

$$mg\sin\theta > \mu_s N$$

$$tg\,\theta > \mu_s$$

condizione di quiete:

$$tg\,\theta \leq \mu_s$$

una volta che si innesca il moto entra in gioco l'attrito dinamico:

$$mg\sin\theta - \mu_d\, mg\cos\theta = ma$$

$$a = g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta)$$

Il moto e' armonico semplice.

Pulsazione :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Periodo :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

la forza di richiamo della molla e' proporzionale alla deformazione fino a che non si raggiunge e si supera il LIMITE DI ELASTICITA' (molla si snerva).

Equazione moto :

$$F = ma = -kx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

soluzione e' nota :

$$x = A\sin(\omega t + \phi)$$

I valori delle costanti A e ϕ si ricavano imponendo le condizioni iniziali.

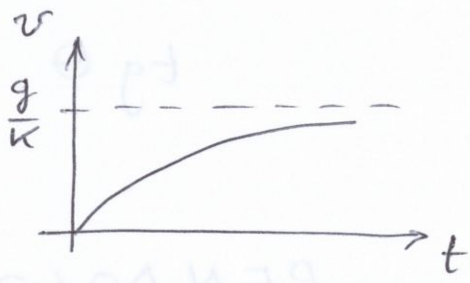
Integrando:

$$\int_0^t dt = \int_0^v \frac{1}{g-kv}\,dv$$

$$t = -\frac{1}{k}\left[\ln(g-kv)\right]_0^v$$

$$t = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{g-kv}{g}\right)$$

velocità:



$$v(t) = \frac{g}{k}\left(1-e^{-kt}\right)$$

$$v_{\underset{t\to\infty}{max}} = \frac{g}{k} \qquad \text{con } k = \frac{b}{m}$$

FORZE CENTRIPETE

F_N ortogonale alla traiettoria, che risulta curvilinea.

$$F_N = m a_N = m\frac{v^2}{R}$$ R, raggio di curvatura

In presenza di attrito statico, veicolo che percorre una curva:

$$F_a \leq \mu_s N \qquad m\frac{v^2}{R} \leq \mu_s m g$$

Equilibrio : $m\bar{g} + \bar{T}_F = m\bar{a}$

lungo N : $\begin{cases} T_F - mg\cos\theta = m a_N \\ -mg\sin\theta = m a_T \end{cases}$

lungo T :

$$\frac{a_T}{L} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \alpha$$ da accelerazione angolare α

$$a_T = L\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad a_N = \frac{v^2}{R}$$

otteniamo, andando a sostituire:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

per oscillazioni piccole $\sin\theta \simeq \theta$:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

EQ. DIFFERENZ. DEL MOTO DEL PENDOLO

coincide con quella del moto armonico semplice :

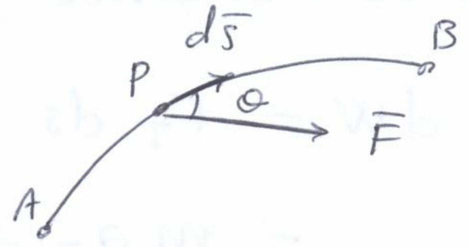
$$\omega^2 = \frac{g}{L} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Il periodo T e' indipendente dall'ampiezza delle oscillazioni (piccole)

$v = v_{max}$ quando $\theta = 0$ ⚠

LAVORO - POTENZA - EN. CINETICA

Lavoro della forza $\bar{F}$ compiuto durante lo spostamento da A a B:



$$W = \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_A^B F\cos\theta \cdot ds = \int_A^B F_T \cdot ds$$

Tre casi possibili:

1) $\theta = \frac{\pi}{2}$, $W = 0$ nullo
2) $\theta < \frac{\pi}{2}$, $W > 0$ lavoro MOTORE
3) $\theta > \frac{\pi}{2}$, $W < 0$ lavoro resistente

Il lavoro e' pari alla somma dei lavori delle singole forze agenti, ciascuno dei quali puo' essere positivo, negativo o nullo.

Potenza:

E' il lavoro per unita' di tempo.

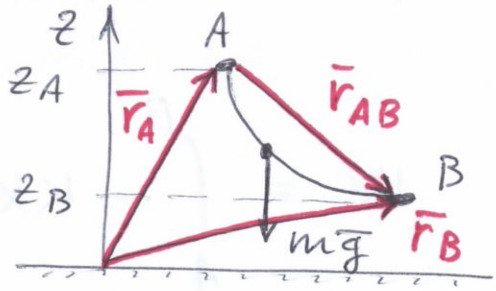
$$P = \frac{dW}{dt} = \bar{F}\frac{d\bar{s}}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{v} = F_T \cdot v$$

Questa e' la potenza istantanea.
Potenza media:

$$P_m = \frac{W_{TOT}}{t}$$

LAVORO DELLA FORZA PESO

calcoliamo il lavoro della forza peso per uno spostamento generico.



$$W = \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

$$= \bar{F} \int_A^B d\bar{s}$$

$$= m\bar{g} \cdot \bar{r}_{AB}$$

$\bar{F}$ e' costante $(m\bar{g})$

$\bar{r}_B - \bar{r}_A = \bar{r}_{AB}$

Il peso ha solo componente lungo l'asse z. Quindi analizzando le forze lungo quell'asse:

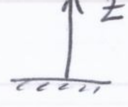
il vettore $z_A - z_B$ e' rivolto verso il basso

$$W = -mg\left[-(z_A - z_B)\right] = -mg\,(z_B - z_A)$$

$$= -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p$$

E_p, energia potenziale della forza peso

$$E_p = mgh$$



LAVORO FORZA DI ATTRITO RADENTE

Il lavoro e' pari a:

$$W = \int_A^B \bar{F}_{ad} \cdot d\bar{s}$$

$\hat{u}_v$ concorde e parallelo a $d\bar{s}$

$$= \int_A^B -\mu_d N \hat{u}_v \cdot d\bar{s} = -\mu_d N \int_A^B ds$$

$\int_A^B ds$ e' la lunghezza del percorso, la traiettoria.

Il lavoro della forza di attrito radente e' sempre negativo, e' lavoro RESISTENTE

c'e' dipendenza dalla traiettoria, la forza e' NON CONSERVATIVA,
Non e' possibile definire un'energia potenziale.

L'energia cinetica diminuisce lungo il percorso. In B la velocita' e' < che in A.

Lunghezza percorso da A a B:

$$S_{AB} = \frac{E_{KA}}{\mu_d N}$$

poiche' $W = E_{KB} - E_{KA}$
ma con attrito in B
$v = 0$ quindi $E_{KB} = 0$
$W = -E_{KA}$

$S_{AB} = \int_A^B ds$

$\Delta E_p > 0$ quindi $E_{PB} > E_{PA}$

il lavoro e' negativo l'energia in B e' maggiore. quindi bisogna fornire lavoro esterno per compiere il processo.

Forze non conservative sono DISSIPATIVE.

CONSERVAZIONE EN. MECCANICA

se agiscono forze CONSERVATIVE sono valide:

$$\begin{cases} W = \Delta E_K = E_{KB} - E_{KA} \\ W = -\Delta E_p = E_{PA} - E_{PB} \end{cases}$$

quindi:

$$\boxed{E_{KA} + E_{PA} = E_{KB} + E_{PA}}$$

Somma en. cinetica e potenziale sotto l'azione di forze conservative si CONSERVA!

Il lavoro complessivo e' dato da

$$W = W_c + W_{nc}$$

c, conservative
nc, non cons.

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz$$

Incremento dell'en. potenziale lungo ogni direzione.

$$F_x \cancel{dx} + F_y \cancel{dy} + F_z \cancel{dz} = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \cancel{dx} - \frac{\partial E_p}{\partial y} \cancel{dy} - \frac{\partial E_p}{\partial z} \cancel{dz}$$

$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases} \qquad \bar{F} = -\text{grad}(E_p)$$

quando il gradiente dell'en. pot. e' nullo, individuiamo una superficie EQUIPOTENZIALE ($E_p = \text{cost}$)

La forza associata all'en. pot. e' normale, in ogni punto, alla sup. Equipotenziale. Il verso della forza indica da che parte diminuisce E_p.

FORZA PESO:

$E_p = mgh$

FORZA ELASTICA:

$E_p = \frac{1}{2} k x^2$

MOMENTO DELLA FORZA

$$\bar{M} = \bar{F} \times \bar{r}$$ forza per il braccio

se si cambia polo (da O a O'):

$$\bar{M}_{O'} = \bar{M}_O + \overline{OO'} \times \bar{F}$$

Teorema del momento angolare:

se calcoliamo la variazione nel tempo del momento angolare di un punto materiale P in movimento

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} + \bar{r} \times \frac{d\bar{v}}{dt} m$$

supponendo che il polo sia fermo allora $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}$ ma $\bar{v} \times \bar{v} = 0$

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{r} \times \frac{d\bar{v}}{dt} m$$

$$= \bar{r} \times m\bar{a} = \bar{r} \times \bar{F}$$ e' il momento

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M}$$

Lavoro in un moto circolare:

$$W = \int_A^B F_T \, ds = \int_{\theta_A}^{\theta_B} r \cdot F_T \, d\theta = \int_{\theta_A}^{\theta_B} M \, d\theta$$

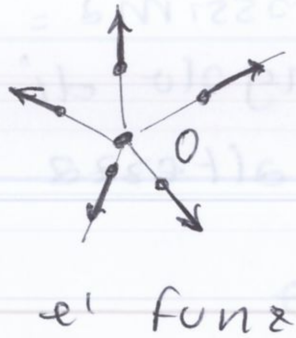
UNITA' DI MISURA

$$\boxed{\bar{L} \quad \left[\frac{kg\, m^2}{s} = N\, m\, s\right]}$$

FORZE CENTRALI

una forza centrale e' una forza agente in una certa regione dello spazio, con le seguenti proprieta':

- in qualsiasi punto la sua direzione passa per un punto fisso detto CENTRO DI FORZA



- il modulo e' funzione solamente della distanza dal centro.

$\hat{u}_r$ versore direzione $\overline{OP}$

$\overline{OP} = \bar{r}$ $\qquad$ $F > 0$ REPULSIVA

$\bar{F} = F \hat{u}_r$ $\qquad$ $F < 0$ ATTRATTIVA

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{L}{m}$$ essendo $L = cost$ anche $\frac{dA}{dt} = cost$

La traiettoria di un punto che si muove in un campo di forze centrali giace in un piano fisso, passante per il centro, ed e' percorsa in modo tale che la velocita' areale $\frac{dA}{dt} = cost.$

poiche' $L = cost$

seconda legge di keplero

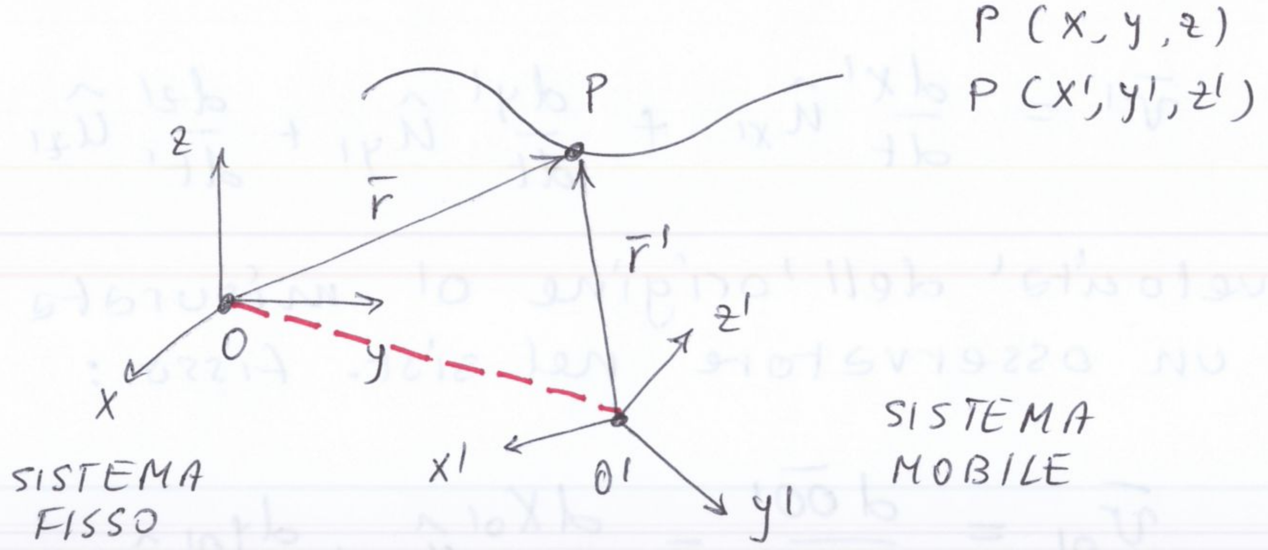
pianeti descrivono le loro orbite attorno al sole con velocita' areale costante.

MOTI RELATIVI

⚠ le leggi fisiche non dipendono dal sistema di riferimento.
Non esiste un sistema privilegiato

Teorema delle velocità relative

consideriamo un punto P in movimento lungo una generica traiettoria:



Vogliamo ricavare una relazione tra la posizione, la velocità e l'accelerazione del punto P.

$$\bar{r} = \overline{OO'} + \bar{r}'$$

$\bar{r} = (x, y, z)$

$\bar{r}' = (x', y', z')$

$\overline{OO'} = (x_{O'}, y_{O'}, z_{O'})$

$$\frac{d\overline{OO'}}{dt} = \bar{v}_{O'}$$

$$\frac{d\bar{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x'\hat{u}_{x'} + y'\hat{u}_{y'} + z'\hat{u}_{z'}\right)$$

$$= \frac{dx'}{dt}\hat{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\hat{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\hat{u}_{z'}$$

$$+ \frac{d\hat{u}_{x'}}{dt}\cdot x' + \frac{d\hat{u}_{y'}}{dt}\cdot y' + \frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}\cdot z'$$

quindi risulta:

$$\bar{v} = \bar{v}_{O'} + \bar{v}' + \frac{d\hat{u}_{x'}}{dt}\cdot x' + \frac{d\hat{u}_{y'}}{dt}\cdot y' + \frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}\cdot z'$$

⚠ in $\frac{d\bar{r}'}{dt}$ compaiono anche le derivate dei versori $\rightarrow \frac{d\bar{r}'}{dt} \neq \bar{v}'$

I versori del sistema O' dipendono dal tempo, poiché il sistema è mobile

Formule di POISSON:

$$\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} = \bar{\omega} \times \hat{u}_{x'}$$

$$\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} = \bar{\omega} \times \hat{u}_{y'}$$

$$\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt} = \bar{\omega} \times \hat{u}_{z'}$$

Rispetto al sistema mobile,
ACCELERAZIONE RELATIVA:

$$\bar{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2}\hat{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\hat{u}_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\hat{u}_{z'}$$

Accelerazione dell'origine O' misurata rispetto al sistema fisso:

$$\bar{a}_{O'} = \frac{d\bar{v}_{O'}}{dt}$$

Derivando rispetto al tempo il teorema delle vel. relative:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\bar{v}'}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt}\times\bar{r}' + \frac{d\bar{r}'}{dt}\times\bar{\omega}$$

$$\bar{v} = \bar{v}_{O'} + \bar{v}' + \bar{\omega}\times\bar{r}'$$

calcoliamo:

$$\frac{d\bar{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}\hat{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\hat{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\hat{u}_{z'}\right)$$

derivata di un prodotto

$$= \bar{a}' + \bar{\omega}\times\bar{v}'$$

calcoliamo:

$$\bar{\omega}\times\frac{d\bar{r}'}{dt} = \bar{\omega}\times\bar{v}' + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}')$$ esplicitando $\frac{d\bar{r}'}{dt}$

SIST. DI RIFERIMENTO INERZIALI. RELATIVITA' GALILEIANA

def sistema di rif. inerziale e' un sistema in cui vale rigorosamente la legge di inerzia, cioe' un punto non soggetto a forze non altera il suo stato di moto o di quiete.

Bisogna quindi verificare di essere in presenza di un sist. inerziale.

In un sistema inerziale la legge di Newton ha l'espressione piu' semplice: le forze a primo membro sono vere e la risultante e' proporzionale all'accelerazione misurata in quel sist.

quindi:

$$\bar{v}_{O'} = cost \qquad \bar{a}_{O'} = 0 \qquad \bar{\omega} = 0$$

Ricaviamo:

$\bar{a} = \bar{a}'$ ACCELERAZIONI SONO UGUALI

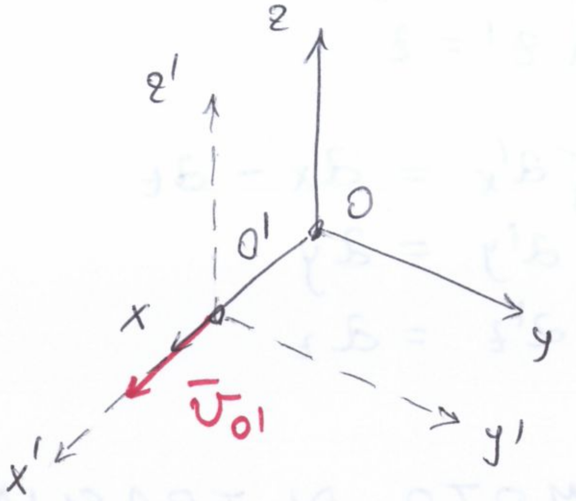
⚠ Definito un sist. di rif. inerziale, tutti gli altri sistemi in moto rettilineo uniforme rispetto a questo sono anch'essi inerziali.

MOTO DI TRASCINAM. RETT. UNIFORME

Due sist. inerziali in moto rett. unif. l'uno rispetto all'altro.

consideriamo il caso semplice:

$$\bar{r}' = \bar{r} - \overline{OO'}$$



$$\begin{cases} x' = x - v_{O'} t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

per la velocita'

$$\bar{v}' = \bar{v} - \bar{v}_{O'}$$

$$\begin{cases} \bar{v}_x' = v_x - v_{O'} \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases}$$

essendo sist. inerziali

$$\bar{a} = \bar{a}'$$

MOTO DI TRASCINAM. RETT. ACCELERATO

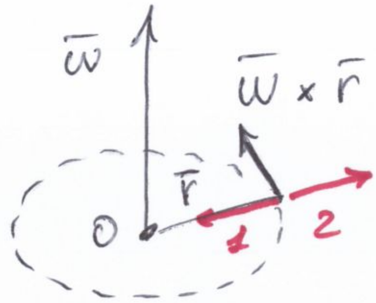
stessa cond. geometrica di prima. supponiamo che O' abbia acc. cost.

$\bar{a}_{O'} = \bar{a}_t$ e un vel. iniziale v_{in}

$$x_{O'} = v_{in} \cdot t + \frac{1}{2} a_t \cdot t^2$$

$$v_{O'} = v_{in} + a_t \cdot t$$

supponiamo di avere un punto materiale su un disco, con attrito nullo tra punto e piano.
Il punto rimane fermo mentre il disco gira sotto il punto.
Se il punto lasciasse traccia osserveremmo una circonferenza.



Per l'osservatore O il punto e' in quiete, per O' descrive un moto circolare uniforme.

1 $\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$

2 $-\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$

O' ruota con velocita' ang. costante.

sistema O :

$\bar{v} = 0 \qquad \bar{a} = 0$

sistema O' :

$\bar{v}' = -\bar{\omega} \times \bar{r}$

$\bar{a}' = -\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) - 2\bar{\omega} \times (-\bar{\omega} \times \bar{r})$

$= \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$

DINAMICA DEI SIST. DI PUNTI MAT.

SISTEMI DI PUNTI. FORZE INT. e EST.

Consideriamo ora un sistema di n punti materiali ($n > 1$), interagenti tra loro e con il resto dell'universo.

Forze agenti sull'i-esimo punto:

$$\bar{F}_i = \bar{F}_i^{(E)} + \bar{F}_i^{(I)}$$

$\bar{F}_i^{(E)}$, forze esterne

$\bar{F}_i^{(I)}$, forze interne, cioè esercitate dagli altri $n-1$ punti.

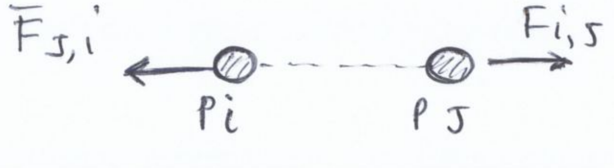
Il moto del punto è determinato da $\bar{F}_i$.

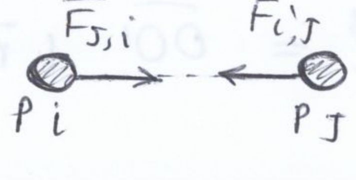
Alle forze interne si applica la III legge di NEWTON, o principio di azione e reazione.

$$\bar{F}_{i,j} \xrightarrow{\text{genera}} \bar{F}_{j,i} \quad \text{uguale e contraria}$$

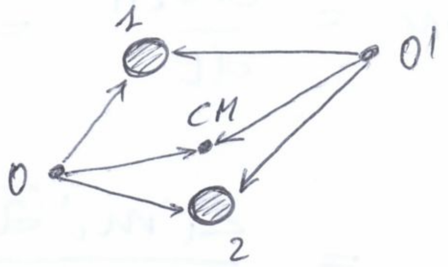
Forza applicata
dal punto i-esimo
sul punto j-esimo

possono essere attrattive o repulsive





ma vale anche:



$$\bar{r}_i' = \overline{OO'} + \bar{r}_i$$

$$\bar{r}'_{CM} = \frac{\Sigma_i m_i \bar{r}'_i}{\Sigma_i m_i}$$

$$= \frac{\Sigma_i m_i (\overline{OO'} + \bar{r}_i)}{\Sigma_i m_i} = \frac{\Sigma_i m_i \bar{r}_i}{\Sigma_i m_i} + \overline{OO'}$$

$$= \bar{r}_{CM} + \overline{OO'}$$

Se gli **n** punti sono in movimento la posizione del centro di massa varia:

$$\bar{v}_{CM} = \frac{d\bar{r}_{CM}}{dt} = \frac{\Sigma_i m_i \frac{d\bar{r}_i}{dt}}{\Sigma_i m_i}$$

$$= \frac{\Sigma_i m_i \bar{v}_i}{\Sigma_i m_i} = \frac{\bar{P}_{TOT}}{m_{TOT}}$$

$$\bar{P}_{TOT} = \Sigma_i m_i \bar{v}_i = m_{TOT} \bar{v}_{CM}$$ quantità di moto del centro di massa

$$m_{TOT} = \Sigma_i m_i$$

Analogamente ricaviamo l'accelerazione:

Inoltre, si può osservare che:

$$\bar{R}^{(E)} = m_{TOT}\,\bar{a}_{CM}$$

$$= m_{TOT}\frac{d\bar{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}(m_{TOT}\cdot\bar{v}_{CM})$$

$$= \frac{d\bar{P}_{TOT}}{dt}$$

Il moto del centro di massa e' deter=minato solamente dalle forze esterne.

$$\bar{P}_{TOT} = m_{TOT}\cdot\bar{v}_{CM}$$ Quantità di moto del CDM

CONSERVAZIONE DELLA Q. DI MOTO

Se la risultante delle forze esterne e' nulla, cioe' il sistema di punti e' isolato, non soggetto a forze esterne

$\bar{a}_{CM} = 0$ $\quad \bar{v}_{CM} = cost$ $\quad \bar{P}_{TOT} = cost$

la quantità di moto totale rimane costante nel tempo e il CDM si muove di moto rett. uniforme o resta in quiete.

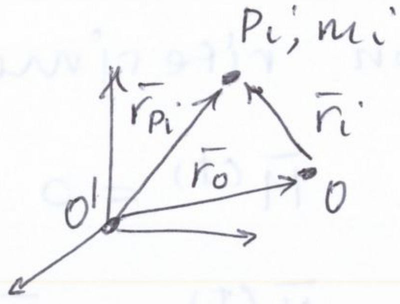
Consideriamo due punti isolati:

Bisogna tener conto che non necessariamente il polo O deve coincidere con l'origine e può non essere fisso.

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \Sigma_i \frac{d\bar{r}_i}{dt} \times m_i \bar{v}_i$$

$$+ \Sigma_i \bar{r}_i \times m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt}$$

osservando che:



$$\bar{r}_{P_i} = \bar{r}_0 + \bar{r}_i$$

$$\frac{d\bar{r}_{P_i}}{dt} = \frac{d\bar{r}_i}{dt} + \frac{d\bar{r}_0}{dt}$$

$$\frac{d\bar{r}_i}{dt} = \bar{v}_i - \bar{v}_0$$

essendo sistema di riferimento inerziale

inoltre:

$$m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} = m_i \bar{a}_i = \bar{F}_i = \bar{F}_i^{(E)} + \bar{F}_i^{(I)}$$

quindi, andando a sostituire:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \Sigma_i (\bar{v}_i - \bar{v}_0) \times m_i \bar{v}_i$$

$$+ \Sigma \bar{r}_i \times (\bar{F}_i^{(E)} + \bar{F}_i^{(I)})$$

il termine $-\bar{v}_O \times M_{TOT}\,\bar{v}_{CM}$
è nullo nei seguenti casi:

1) il polo O è fisso nel sistema di riferimento inerziale,

$$\bar{v}_O = 0$$

2) il CDM è in quiete nel sistema di riferimento inerziale,

$$\bar{v}_{CM} = 0$$

3) il polo O coincide con il CDM,

$$\bar{v}_O = \bar{v}_{CM} \xrightarrow{\text{quindi}} \bar{v}_O \times \bar{v}_{CM} = 0$$

4) $\bar{v}_O \parallel \bar{v}_{CM}$

quando quel termine è nullo:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M}^{(E)}$$

TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE

forze interne non portano contributi!

Conservazione del momento angolare

quando $\bar{M}^{(E)} = 0$

$$\bar{L} = \text{cost}$$

si conserva

$$\bar{r}_i = \bar{r}'_i + \bar{r}_{CM}$$

Dal teorema delle vel. relative, moto di trascinamento traslatorio:

$$\bar{v}_i = \bar{v}'_i + \bar{v}_{CM} \qquad \omega = 0$$

$\bar{v} = \bar{v}' + \bar{v}_{O'} + \bar{\omega} \times \bar{r}'$ TEO. VELOCITA' RELATIVE

considerando raggio vettore e velocità dal punto di vista del sist. del CDM:

$$\bar{r}'_{CM} = 0 \qquad \bar{v}'_{CM} = 0$$

quindi:

$$\Sigma_i m_i \bar{r}'_i = 0$$

$$\Sigma_i m_i \bar{v}'_i = 0$$

poiché
$$\bar{r}'_{CM} = \frac{\Sigma_i m_i \bar{r}'_i}{\Sigma_i m_i}$$

$$\bar{v}'_{CM} = \frac{\Sigma_i m_i \bar{v}'_i}{\Sigma_i m_i}$$

di conseguenza:

$$\bar{P}'_{TOT} = \Sigma_i m_i \bar{v}'_i = 0$$

Essendo il sist. del CDM NON inerziale

$$-m_i \bar{a}_t = -m_i \bar{a}_{CM}$$

$$\bar{F}_i^{(I)} + \bar{F}_i^{(E)} - m_i \bar{a}_{CM} = m_i \bar{a}'_i$$

$=0$ poiché $v'_i = 0$

per ogni punto

Applicando la sommatoria:

conseguenza:

⚠ Il teorema del momento angolare vale anche nel sistema del CDM, che e' non inerziale, purchè il CDM sia il polo del sistema.

TEOREMI DI KÖNIG

stabiliscono le relazioni fra i momenti angolari e le energie cinetiche di un sistema di punti materiali valutati in un sist. inerziale ($\bar{L}$, E_k) e nel sist del CDM ($\bar{L}'$, E'_k).

Teorema di könig per il mom. angolare

Prendiamo come polo l'origine del sistema inerziale:

$$\bar{L} = \Sigma_i \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i$$

$$= \Sigma_i (\bar{r}'_i + \bar{r}_{CM}) \times m_i (\bar{v}'_i + \bar{v}_{CM})$$

svolgendo il prodotto si osserva:

$$\bar{L} = \bar{L}' + \bar{r}_{CM} \times \underset{TOT}{m} \bar{v}_{CM} = \bar{L}' + \bar{L}_{CM}$$

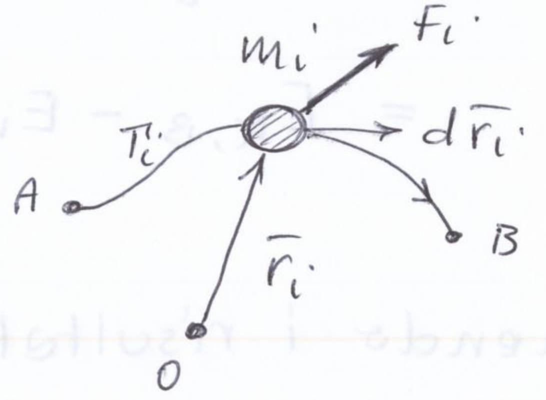
$\bar{L}' = \Sigma_i \bar{r}' \times m_i \bar{v}_i'$

commento:

I teoremi sfruttano il CDM per mettere in evidenza la scomposizione del momento angolare e dell'en. cinetica.

TEOREMA DELL'EN. CINETICA

calcoliamo il lavoro associato al moto di un sistema di punti materiali



$$dW_i = F_i \cdot d\bar{r}_i$$

$$= (\bar{F}_i^{(E)} + \bar{F}_i^{(I)}) \cdot d\bar{r}_i$$

$$= dW_i^{(E)} + dW_i^{(I)}$$

sommando tutti i punti e integrando lungo le traiettorie T_i:

$$W = W^{(E)} + W^{(I)}$$

Questa volta il contributo delle forze interne non scompare.

$dW^{(I)}$ e' formato da:

$$\bar{F}_{i,j} \cdot d\bar{r}_j + \bar{F}_{j,i} \cdot d\bar{r}_i$$

$$= \bar{F}_{i,j} (d\bar{r}_j - d\bar{r}_i) = \bar{F}_{i,j} \cdot d\bar{r}_{i,j}$$