NUMERO: 1301

ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Pirazzoli

MATERIA: Fisica I, Prof.Gliozzi

INTRODUZIONE

L'analisi dimensionale può essere utile nel definire le leggi. La fisica è la scienza che studia i fenomeni naturali e ne fornisce un'interpretazione. Un fisico interpreta le relazioni esistenti tra i vari fenomeni. Si usa il metodo scientifico: osservazione, eliminazione dei caratteri superflui, formulazione di ipotesi, costruzione di una teoria che interpreta il fenomeno e permette di fare predizioni e infine c'è la verifica sperimentale della teoria.

La definizione operativa di una grandezza fisica specifica le operazioni da compiere per misurarla.

Le grandezze possono essere misurate direttamente o indirettamente (cioè attraverso altre misure)

velocità ($v = \frac{s}{t}$) — temperatura

In un sistema fisico le relazioni indipendenti sono in numero inferiore rispetto alle grandezze fisiche, derivano da grandezze fisiche e grandezze fisiche fondamentali (non possono essere determinate da altre grandezze). Quando si sceglie una grandezza fondamentale faccio una scelta di un'unità di misura. Le altre grandezze sono quelle derivate.

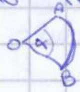
Ogni grandezza fisica ha un'equazione dimensionale. Ad ogni grandezza misurata si associa una dimensione che è indipendente dall'unità di misura con la quale viene espressa.

$$v = \frac{s}{t} \qquad [v]=[L][T]^{-1} \qquad [F] = [M][L][T]^{-2} \qquad F = ma$$

Le grandezze omogenee hanno le stesse dimensioni.

Le grandezze adimensionali sono il rapporto di grandezze omogenee

es. angolo in radianti



$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{OA}$$

Scalari e vettori

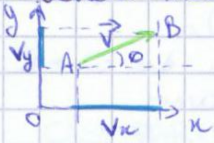
grandezze definite da un unico valore numerico (es. temperatura)

→ definite da valore numerico (modulo), direzione e verso (es. velocità, forza...)

$[\vec{v}, v]$

$\overline{OP}$ = modulo
↗ direzione
↗ verso

Vettori nel piano

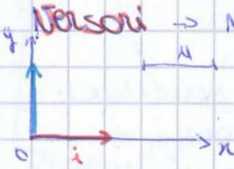


In questo caso il sistema di riferimento è il piano cartesiano
$\overline{AB}$ = modulo
φ = l'angolo da la direzione
> = verso

Il vettore può essere scomposto lungo le direzioni dei due assi (V_x, V_y)

$$\vec{v} = (V_x; V_y) \qquad |\vec{v}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{V_y}{V_x} \qquad V_x = |\vec{v}|\cos\varphi \qquad V_y = |\vec{v}|\sin\varphi$$

Versori → vettori di modulo unitario che ci indicano una direzione e verso ed hanno lunghezza unitaria



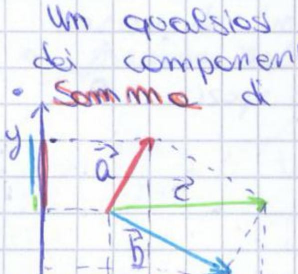
- **Prodotto** di un vettore per uno scalare

Dati uno scalare "c" ed un vettore "$\vec{v}$" si definisce il prodotto $\vec{u} = c \cdot \vec{v}$ ($\vec{v}$ è un versore)

Il vettore $\vec{u}$ è parallelo a $\vec{v}$. Il modulo di $\vec{u}$ è dato da $|\vec{u}| = |c||\vec{v}|$

Un qualsiasi vettore può dunque essere scritto come la somma dei componenti su x e y grazie ai versori.

- **Somma** di due vettori



La regola del parallelogramma insegna la somma di due vettori. Il vettore somma $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ è la diagonale del parallelogramma avente per lati i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$.
Per la dimostrazione sperimentale si usa il teorema di Carnot

INTRODUZIONE ALLA MECCANICA

DINAMICA DI UN PUNTO MATERIALE (assimilo un oggetto ad un punto)

I possibili movimenti sono traslazioni, rotazioni e vibrazioni.
Per descrivere il moto è necessario decidere un sistema di riferimento e un sistema di coordinate che possono essere cartesiane ortogonali o polari.
Un punto materiale muovendosi nello spazio occupa successivamente un'infinità di posizioni successive e il luogo di questi punti si chiama traiettoria.
La velocità è la variazione della posizione lungo la traiettoria nel tempo. L'accelerazione è la variazione della velocità con il tempo.
N.B. La variazione è legata al concetto matematico di derivata cioè il limite del rapporto incrementale.

MOTO UNIDIMENSIONALE

Il punto materiale si muove lungo una retta.

x_0 → diagramma orario

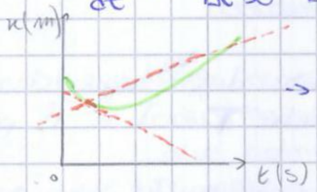
$x(t)$ = legge oraria è il legame tra la posizione e il tempo

$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ → velocità media, da un'informazione globale

$v_i = \frac{dx}{dt}$ → velocità istantanea $\quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad v \cdot dt = dx \qquad \int_{t_0}^{t} dt \cdot v = \int_{t_0}^{t} dx$$

$$\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = \underbrace{x(t) - x(t_0)}_{x(t) - x_0}$$



→ esempio di funzione oraria (spazio/tempo)

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \quad \rightarrow \quad \int_{t_0}^{t} dt \cdot a(t) = \int_{t_0}^{t} dv$$

$$\int_{t_0}^{t} a(t)\,dt = v(t) - v(t_0) \qquad v(t_0) = v_0$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

CASI PARTICOLARI

$x(t) = \text{cost.}$ il corpo è in quiete

$v(t) = \text{cost.}$ moto rettilineo uniforme

$a(t) = \text{cost.}$ moto rettilineo uniformemente accelerato

$$v = \frac{dx}{dt} = \text{cost} = v$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = x_0 + v(t - t_0)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \text{cost} = a$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt = v_0 + a(t - t_0)$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} (v_0 + a(t - t_0))\,dt = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad t = \frac{\Delta v}{a} \qquad x - x_0 = v_0 \cdot \frac{(v - v_0)}{a} + \frac{1}{2} \cancel{a} \frac{(v - v_0)^2}{a^2}$$

$$x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

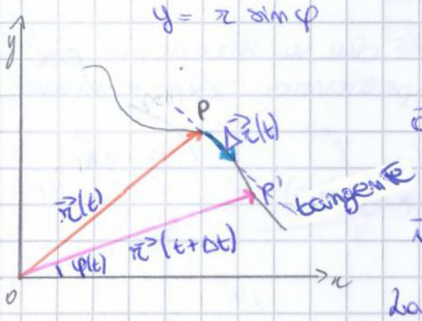
MOTO NEL PIANO

Da una trattazione scalare si passa ad una vettoriale.
Il raggio-vettore è il vettore che individua il punto nel piano (può essere anche individuato da coordinate cartesiane o polari)

relazioni tra coordinate cartesiane e polari

$x = r\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$

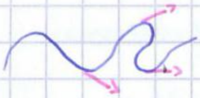
$y = r\sin\varphi \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$



$$\vec{OP} = \vec{r} \qquad \vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow \text{derivata di un vettore}$$

La velocità istantanea in ogni suo punto avrà la direzione della tangente alla curva in quel punto.



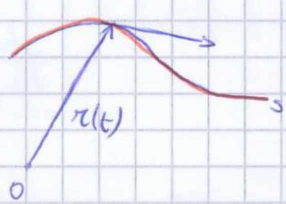
Questa proprietà è intrinseca, cioè non dipende dal sistema di riferimento.

$\vec{v} = v \cdot \hat{u}_t \qquad \hat{u}_t$ è definito in ogni punto

$\Delta\vec{r} \rightarrow d\vec{r}$ al limite per t che tende a zero

$d\vec{r} = ds\,\hat{u}_t$

coordinate intrinseche



$S(t) \rightarrow$ legge oraria di un percorso coordinata curvilinea che dice come lungo la traiettoria cambia la linea

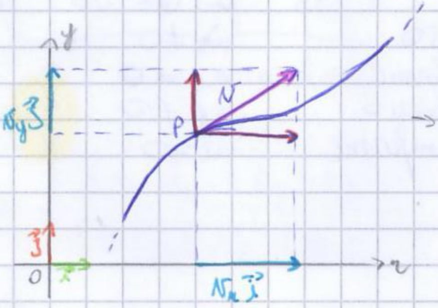
N.B. In coordinate cartesiane i versori sono costanti nel tempo, in direzione, verso e modulo ma non è così per le coordinate polari

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\hat{u}_t \qquad \vec{v} = \frac{ds}{dt}\cdot\hat{u}_t = v\cdot\hat{u}_t$$

VELOCITÀ, coordinate cartesiane

$\vec{r} = \vec{OP} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j}$$

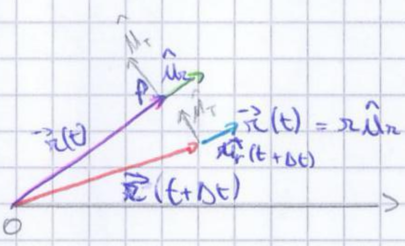


$\rightarrow$ la direzione dei versori $\vec{i}$ e $\vec{j}$ è sempre la stessa

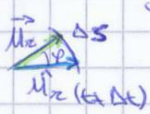
VELOCITÀ, coordinate polari

$\vec{r} = \vec{OP} = r(t)\,\hat{u}_r$

$\hat{u}_r$ è un versore che però cambia direzione (nel piano cartesiano è sempre la stessa)



faccio coincidere le coda



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\hat{u}_r}{dt} \rightarrow \text{derivata di un versore}$$

$$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\hat{u}_r}{\Delta t}$$

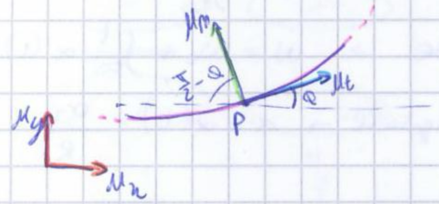
la direzione del vettore della derivata è $\perp \hat{u}_r$ e lo indico con $\hat{u}_N \rightarrow$ normale

$$d\vec{s} = \underbrace{|\hat{u}_r|}_{=1}\,d\varphi\,\hat{u}_N \qquad d\vec{s} = d\hat{u} \qquad |d\hat{u}| = d\varphi \qquad \frac{d\hat{u}}{dt} = \hat{u}_N\frac{d\varphi}{dt}$$

- coordinate cartesiane

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = \frac{d v_x}{dt}\hat{u}_x + \frac{d v_y}{dt}\hat{u}_y = \frac{d^2 x}{dt^2}\hat{u}_x + \frac{d^2 y}{dt^2}\hat{u}_y = a_x \hat{u}_x + a_y \hat{u}_y$$

$$\circledast \quad \underline{v} = \underbrace{v_x}_{\frac{dx}{dt}}\hat{u}_x + \underbrace{v_y}_{\frac{dy}{dt}}\hat{u}_y \qquad\qquad \underline{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + \frac{v^2}{R}\hat{u}_n$$

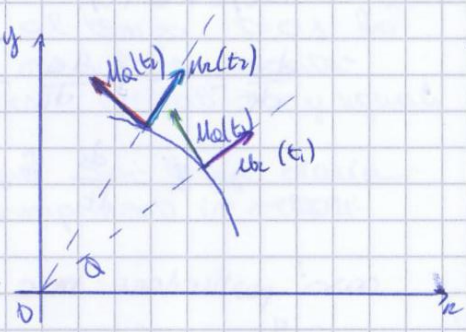


$$a_x = \frac{dv}{dt}\cos\theta - \frac{v^2}{R}\sin\theta$$

$$a_y = \frac{dv}{dt}\sin\theta + \frac{v^2}{R}\cos\theta$$

- coordinate polari

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{dr}{dt}\hat{u}_r}_{①} + \underbrace{r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta}_{②}\right)$$



$$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta \qquad \frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_r$$

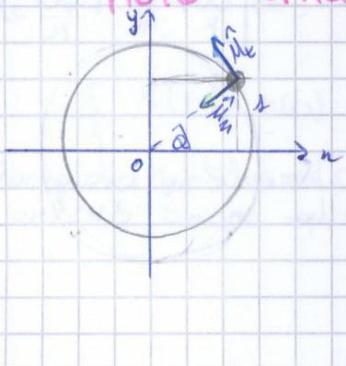
$$① \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\hat{u}_r\right) = \frac{d^2 r}{dt^2}\hat{u}_r + \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\cdot\hat{u}_\theta$$

$$② \quad \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta\right) = \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{u}_\theta - r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_r$$

$$\underline{a} = \underbrace{\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{u}_r}_{\text{acc. radiale}} + \underbrace{\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\hat{u}_\theta}_{\text{acc. trasversa}}$$

	coord. intrinseche	coord. cartesiane
$d\underline{r}$	$ds\cdot\hat{u}$	$dx\cdot\hat{u}_x + dy\cdot\hat{u}_y$
$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt}$	$\frac{ds}{dt}\hat{u}_t = v\hat{u}_t$	$\frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\hat{u}_y$
$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt}$	$\frac{dv}{dt}\hat{u}_t + \frac{v^2}{R}\hat{u}_n$	$\frac{d^2x}{dt^2}\hat{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{u}_y$

MOTO CIRCOLARE



Moto che avviene su una circonferenza di raggio costante dove il punto materiale si muove su essa con velocità e accelerazione variabili nel tempo

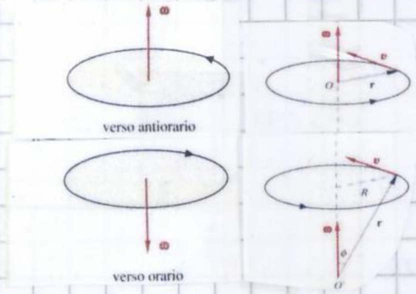
- L'acc. centripeta $\neq 0$
- Nel moto circ. uniforme la componente dell'acc. tangenziale è nulla.
- Il moto circolare può essere descritto per mezzo della legge oraria che descrive la posizione sulla circonferenza.

$|\underline{\omega}| = \frac{d\theta}{dt}$

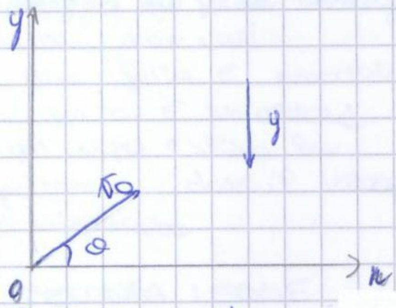
$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r} = \underline{\omega} \wedge \underline{r}$ $\qquad |\underline{\omega} \wedge \underline{r}| = |\underline{\omega}||\underline{r}| \sin\theta = |\underline{\omega}||\underline{r}|$

$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{\alpha} \times \underline{r} + \underline{\omega} \times \underline{v} = \underline{\alpha} \wedge \underline{r} + \underline{\omega} \wedge \underline{v}$ $\qquad \omega = \frac{v}{r}$

$\underline{a} = \underline{\alpha} \times \underline{r} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) = \underbrace{\underline{\alpha} \wedge \underline{r}}_{\text{acc. tang}} + \underbrace{\underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \underline{r})}_{\text{acc. centr.}}$



MOTO PARABOLICO



condizioni iniziali: al tempo $t=0$ ho accelerazione in modulo g, velocità iniziale v_0, posizioni iniziali x e y uguali a zero.
Lo scopo è trovare la legge oraria scomponendo le componenti in vettori.

È il risultato di una composizione di due vettori
- accelerazione costante $\rightarrow \underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2}\hat{u}_x + \frac{d^2 y}{dt^2}\hat{u}_y = a_x \hat{u}_x + a_y \hat{u}_y$
- velocità costante $\rightarrow$

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\hat{u}_y = v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y$$

metto a sistema le due componenti

$$\begin{cases} \text{asse } x \\ \text{asse } y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x(0) = 0 & v_x(0) = v_0 \cos\theta & x(0) = 0 \\ a_y(0) = -g & v_y(0) = v_0 \sin\theta & y(0) = 0 \end{cases}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \rightarrow \text{caso unidimensionale}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_x(0) + \int_0^t a_x(t)\,dt = v_0 \cos\theta \\ v_y(t) = v_y(0) + \int_0^t a_y(t)\,dt = v_0 \sin\theta - gt \end{cases}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + \int_0^t v_x(t)\,dt = v_0 \cos\theta\, t \\ x(t) = x(0) + \int_0^t v_y(t)\,dt = v_0 \sin\theta - gt \end{cases}$$

DINAMICA DEL PUNTO

LEGGI DI NEWTON

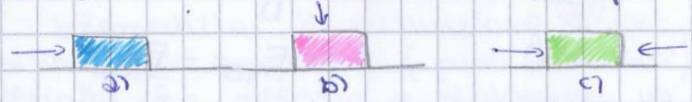
PRIMA LEGGE

Un corpo non soggetto a forze non subisce cambiamenti di velocità, ossia rimane in quiete se già lo era o si muove di moto rettilineo uniforme.

Noto storico: Prima di Newton si pensava che un oggetto avesse bisogno di una forza per mantenere la velocità, in realtà un oggetto che si muove su un piano con attrito sempre minore tende a mantenere la stessa velocità.

Concetto di forza

La variazione di velocità in modulo o direzione è dovuta all'azione di una forza. La forza è una grandezza che esprime e misura l'interazione tra sistemi fisici.
L'assenza di forza non implica l'assenza di moto ma comporta che la velocità non vari.
Ad una forza è associata la nozione di direzionalità e intensità per cui una forza è un vettore.
N.B. Per un corpo esteso ha importanza dove il vettore è applicato.

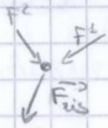


SECONDA LEGGE

L'accelerazione di un oggetto è direttamente proporzionale alla forza risultante agente su di esso ed inversamente proporzionale alla sua massa.

$F = m \cdot a$

È la risultante di tutte le forze presenti.



La massa inerziale è dunque la capacità di un corpo di opporsi all'accelerazione che una data forza imprime.

L'interazione del punto con l'ambiente circostante, espressa tramite la forza, determina l'accelerazione ovvero la variazione di velocità nel tempo.

Quando una forza viene applicata ad un corpo la sua accelerazione ha stessa direzione e stesso verso di F. F si misura in "N" newton
$1 N = 1 Kg \cdot m/s^2$
Un metodo per misurare la forza è attraverso un dinamometro: ho una molla all'interno di un cilindro, fissa da una parte e attaccata ad un oggetto dall'altra. Se imprimo una forza all'oggetto la "freccia" che ho posizionato sulla molla arriva ad uno stadio di equilibrio (quando si eguagliano le due forze) e leggo la forza sulla scala graduata.

$$\vec{F} = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2r}{dt^2}$$

→ questa relazione ci dice che nota la forza possiamo ricavarci le leggi del moto (e dunque la legge oraria).

N.B. È la forza la causa del moto.

$$v = \int_{t_0}^{t} \frac{F}{m}\, dt$$

- La II legge di Newton è una legge dedotta sperimentalmente dall'analisi del punto di un moto soggetto all'azione di una forza
- È una relazione vettoriale
- Vale nei sistemi di riferimento inerziali

IMPULSO

L'impulso di una forza applicata ad un punto materiale provoca la variazione della sua quantità di moto

$$\underline{F}\,dt = d\underline{p} \qquad S = \int_{t_0}^{t} \underline{F}\,dt = \int_{p_0}^{p} d\underline{p} = p - p_0 = \Delta p$$

Teorema dell'impulso (forma integrale della legge di Newton). Dice qual'è l'effetto complessivo dell'applicazione di una forza in un intervallo di tempo finito.

$\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{dt} \Rightarrow F = 0 \Rightarrow p = \text{costante}$ In assenza di forze applicate $\Delta p = 0$ cioè la quantità di moto si conserva

In altre parole, per una particella, in assenza di forze si ha che la velocità del corpo si mantiene costante

6 REGOLE D'ORO per risolvere i problemi

1. Si fa un disegno chiaro che schematizza la situazione fisica spesso sostituendo agli oggetti i loro sistemi fisici equivalenti (punti materiali).
2. Si isola il corpo (punto materiale) che interessa e si disegna un diagramma di corpo libero, indicando ogni forza esterna che agisce sul corpo. Se nel problema sono presenti più corpi, si disegna un diagramma di corpo libero per ognuno di essi.
3. Si sceglie un sistema di coordinate appropriato per ciascun corpo.
4. Si scrive la II legge di Newton $\Sigma \underline{F} = m\underline{a}$ scomponendola lungo gli assi
5. Si risolvono simbolicamente le equazioni così ottenute rispetto alle incognite, usando ogni altra informazione disponibile. Le incognite possono essere le masse, le componenti delle accelerazioni o le componenti di alcune delle forze.
6. Si inseriscono i valori numerici e le relative unità di misura nelle equazioni risolutive.

TIPI DI FORZE

Interazioni principali:
- gravitazionale
- elettromagnetica
- nucleare debole
- nucleare forte

Ponendo uguale a 1 l'interazione forte presente tra due protoni a contatto con la superficie allora le altre hanno le seguenti proporzioni: $10^{-38}, 10^{-2}, 10^{-7}, 1$

Azione dinamica delle forze

TIPO DI MOTO	ACCELERAZIONE	FORZA
rett. unif.	$a = 0$	$F = 0$
uniform. accelerato	$\underline{a} = \text{cost}$	$\underline{F} = \text{cost}$ (il moto è unif. acc. solo in una direzione e costante nelle altre due!)
vario	$\underline{a} = a_T + a_N$	$\underline{F} = ma_T + ma_N = \underline{F}_T + \underline{F}_N$

F_T è la componente della forza responsabile della variazione del modulo della velocità

F_N è la componente della forza responsabile della variazione della direzione della velocità (forza centripeta).

La forza di attrito statico è sempre opposta alla componente parallela alla superficie della risultante delle altre forze applicate, può assumere valori compresi tra zero e $\mu_s N$.

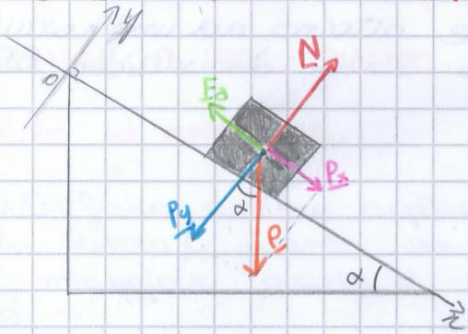
$$f_s \leq f_s^{max} = \mu_s N \qquad 0 < \mu_s < 1$$

La forza di attrito dinamico è sempre opposta alla componente parallela alla superficie della risultante delle altre forze applicate

$$f_d = \mu_d N \qquad 0 < \mu_d < 1$$

- Entro grandi limiti è approssimativamente indipendente dalle superfici a contatto
- È proporzionale alla forza normale
- È praticamente indipendente dalla velocità relativa alle due superfici di contatto.

ESEMPIO DI PIANO INCLINATO



1_caso senza attrito

$$\underline{P} + \underline{N} = m\underline{a}$$

$$\begin{cases} mg\cos\alpha - N = 0 \\ mg\sin\alpha = ma \end{cases}$$

2_caso con forza d'attrito radente statico

$$\underline{P} + \underline{N} + \underline{F_a} = 0$$

$$mg\cos\alpha = \underline{N}$$
$$\underline{F_a} = mg\sin\alpha$$

$$F_s < F_s^{max} \qquad F_s < \mu_s N$$

$$mg\sin\alpha < \mu_s mg\cos\alpha \qquad \mu_s > tg\,\alpha$$

quando $\mu_s = tg\,\alpha$
α è l'angolo in cui comincia il movimento

3. caso con forza d'attrito radente dinamico

$$\underline{P} + \underline{N} + \underline{F_a} = m\underline{a}$$

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - \mu_d\, mg\cos\alpha = ma \\ a = g(\sin\alpha - \mu_d \sin\alpha) \end{cases}$$

se $\mu_d = tg\,\alpha \quad a = 0$

Forza di attrito viscoso

La forza di attrito viscoso è la resistenza che un liquido oppone quando un corpo tenta di muoversi all'interno di esso.

$$\underline{F} = -\beta \underline{v} \quad \text{(vado a vedere sul libro)}$$

IL PENDOLO SEMPLICE

$$\begin{cases} T - mg\cos\theta = m a_N = m \frac{v^2}{L} \\ -mg\sin\theta = m a_T = mL\alpha = mL\frac{d^2\theta}{dt^2} \end{cases}$$

(*) Usate coordinate intrinseche

$$\omega^2 = \frac{g}{L}$$

$$-g\sin\theta = L\frac{d^2\theta}{dt^2} \Longrightarrow -\omega^2\sin\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Per angoli piccoli $(\sin\theta \simeq \theta)$ $\sim 7°$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \qquad \theta = \theta_0\sin(\omega t + \varphi)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

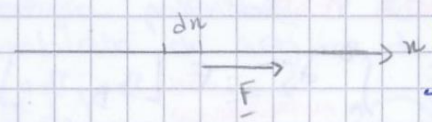
DINAMICA DEL PUNTO

LAVORO ed ENERGIA

Il lavoro fisico avviene applicando una forza che causa uno spostamento
→ si ha lavoro L quando una forza $\underline{F}$ produce uno spostamento.
L è maggiore quanto è maggiore la $\underline{F}$ applicata o lo spostamento prodotto.
Può esserci un lavoro di sollevamento e di trasporto.

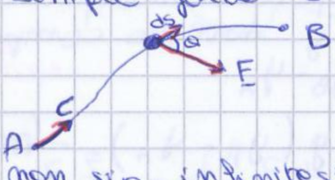
Si definisce lavoro infinitesimo della forza F il prodotto

$$dL = F\,dx$$



} caso unidimensionale

Se lavoriamo nello spazio non sempre forza e spostamento sono paralleli tra loro



$$dL = \underline{F}\cdot d\underline{s} = |F|\cdot|ds|\cdot\cos\theta$$

Nel caso in cui lo spazio percorso non sia infinitesimo ma il tratto di curva che va da A a B si ha che:

$$L_{A\to B} = \int_A^B \underline{F}\cdot d\underline{s} = \int_A^B F\,ds\cos\theta = \int_A^B F_T\,ds$$ INTEGRALE DI LINEA

se $\theta < \frac{\pi}{2}$ $L > 0$

se $\theta > \frac{\pi}{2}$ $L < 0$ $\qquad L_{A\to B} = L_1 + \dots + L_n$

se $\theta = \frac{\pi}{2}$ $L = 0$

POTENZA

Lavoro compiuto in un tempo infinitesimo

$$P = \frac{dL}{dt} = \underline{F}\cdot\frac{ds}{dt} = \underline{F}\cdot\underline{v} = F_T\cdot v$$ POTENZA ISTANTANEA

$$P = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$ POTENZA MEDIA

LAVORO DI UNA FORZA ELASTICA

$\underline{F} = -K\, x\, \underline{u}_x$

$$L_{A\to B} = \int_A^B \underline{F}\cdot d\underline{s} = \int_A^B -K x \hat{u}_x \cdot dx \hat{u}_x = \int_A^B -K x\, dx = -\left(\frac{1}{2}K x_B^2 - \frac{1}{2}K x_A^2\right) =$$

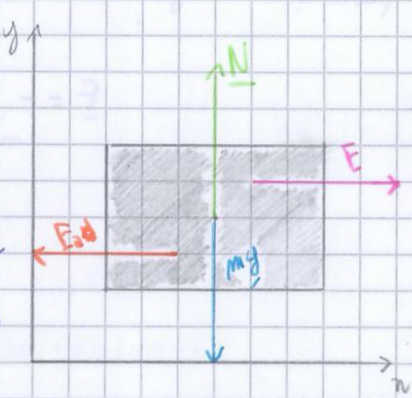
$\hookrightarrow f(B) - f(A)$

$$= -\left(E_{p,B} - E_{p,A}\right) = -\Delta E_p$$

$$E_p = \frac{1}{2} K x^2$$ ENERGIA POTENZIALE ELASTICA

Il moto di una molla è unidimensionale quindi il percorso fatto $d\underline{s}$ è dato solo dalle cordinate $dx \cdot \hat{u}_x$ e la forza $\underline{F}$ agisce anche semplicemente in quella direzione

LAVORO DI UNA FORZA D'ATTRITO RADENTE



$F_{ad} = -\mu_d N \underline{u}_v$

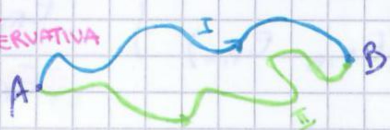
$$L_{A\to B} = \int_A^B \underline{F}_{ad}\, d\underline{s} = \int_A^B -\mu_d N \underline{u}_v\, d\underline{s} = -\mu_d \int_A^B N\, ds \; (*)$$

L'integrale scalare è la lunghezza del percorso da A a B, misurata lungo la traiettoria effettiva del punto materiale. Il lavoro **NON** è esprimibile con una differenza dei valori di una funzione delle coordinate nei punti A e B.

(*) ds è uno scalare poiché qui bisogna tenere conto del percorso e dunque non è possibile definire una funzione che dipenda solo dagli estremi.

Le **forze conservative** sono quelle forze per le quali è definibile una funzione che chiamo Energia potenziale e la cui differenza degli estremi di integrazione cambiata di segno da il lavoro.

$$L_{A\to B} = \int_A^B \left(\underline{F}\, d\underline{s}\right)_{I} = \int_A^B \left(\underline{F}\, d\underline{s}\right)_{II}$$ FORZA CONSERVATIVA



$$\int_A^B \left(\underline{F}\, d\underline{s}\right)_{I} \neq \int_A^B \left(\underline{F}\, d\underline{s}\right)_{II}$$ FORZA NON CONSERVATIVA

Se la forza è conservativa $\int_A^B \underline{F}\, d\underline{s} = -\int_B^A \underline{F}\, d\underline{s}$

Lungo una linea chiusa

$$\int_A^B \left(\underline{F}\, d\underline{s}\right)_{I} - \int_A^B \left(\underline{F}\, d\underline{s}\right)_{II} = \int_A^B \left(\underline{F}\, d\underline{s}\right)_{I} + \int_B^A \left(\underline{F}\, d\underline{s}\right)_{II} = 0 = \int_A^A \left(\underline{F}\, d\underline{s}\right)_{I+II} = \oint \left(\underline{F}\, d\underline{s}\right)$$

La circuitazione del lavoro infinitesimo $\underline{F}\, d\underline{s}$ di una forza conservativa lungo un percorso chiuso è uguale a zero.

ENERGIA POTENZIALE

$L_{A\to B} = -\Delta E_p$ Non esiste una formulazione generale dell'espressione dell'energia potenziale, essa dipende dalla forza a cui si riferisce

$$dL = \underline{F}\, d\underline{s} = \left(F_x \hat{\imath} + F_y \hat{\jmath} + F_z \hat{k}\right)\left(dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}\right) = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz =$$

$$= -dE_p$$

DINAMICA DEI MOTI ROTATORI

In analogia con quanto fatto per la dinamica dei moti traslatori, dove dal concetto di forza si studia la variazione di velocità nel tempo, così ora, passando per il concetto di accelerazione angolare si potrà definire un legame fra queste e le forze applicate.
Ci accorgeremo però subito di una differenza: nei moti rotatori si ottengono effetti diversi a seconda del punto di applicazione della forza.

MOMENTO DI UN VETTORE

Il momento di un vettore $\underline{v}$ applicato nel punto P, rispetto ad un punto O:

$\underline{M}_o = \overline{OP} \times \underline{v}$

Se si sceglie un altro polo

$\underline{M}_o' = \overline{O'P} \times \underline{v}$

$\overline{OP} = \overline{OO'} + \overline{O'P}$

$M_o = \overline{M}_o' + \overline{OO'}\, \underline{v}$

MOMENTO ANGOLARE

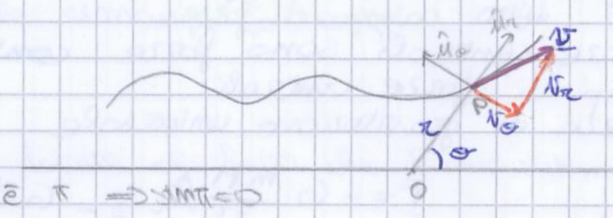
È il momento del vettore quantità di moto

$\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p} = \underline{r} \times m\underline{v}$

coordinate intrinseche

$|\underline{L}| = |\underline{r}||\underline{p}| \sin\alpha = m|\underline{r}||\underline{v}| \sin\alpha$

coordinate polari



$\underline{L} = \underline{r} \times (\underline{v}_r m + \underline{v}_\theta m)$

$\underline{r} \times m\underline{v}_r = 0$ poiché l'angolo è $\pi \Rightarrow \sin\pi = 0$

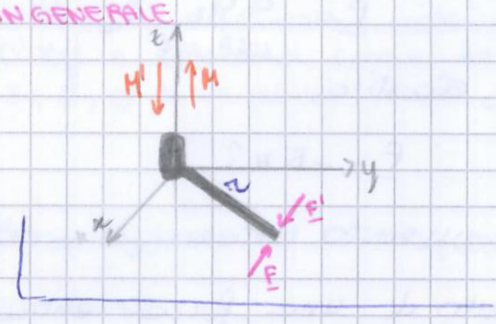
$\underline{L} = \underline{r} \times \underline{v}_\theta m$

$|\underline{L}| = mr^2 \dfrac{d\theta}{dt} = \left[\underset{\text{solo nel moto circ.}}{(mr^2\omega)} \right]$ VALE IN GENERALE

MOMENTO DELLA FORZA

$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}$

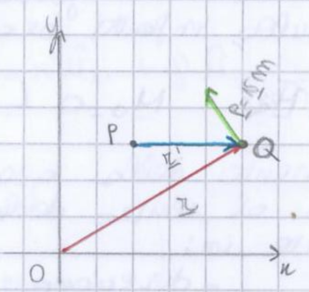
$|\underline{M}| = |\underline{r}||\underline{F}| \sin\theta$



TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE

$$\frac{d\underline{L}}{dt} = \left(\frac{d\underline{r}}{dt} \times m\underline{v}\right) + \left(\underline{r} \times m \frac{d\underline{v}}{dt}\right)$$

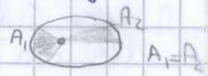
La derivata temporale del momento angolare è uguale al momento della forza se entrambi i momenti sono riferiti allo stesso polo di un sistema fisso.



Vettore posizione e braccio di un momento coincidono solo se il polo è posizionato al centro degli assi. Se ciò avviene ($\Rightarrow$ se vettore posizione e braccio coincidono) $\dfrac{d\underline{r}}{dt} = \underline{v} \Rightarrow \underline{v} \times m\underline{v} = 0$ poiché sono paralleli $\Rightarrow \dfrac{d\underline{L}}{dt} = \underline{r} \times m\dfrac{d\underline{v}}{dt} = \underline{r} \times m\underline{a} = \underline{M} \rightarrow$ per valere la relazione il polo deve essere fisso.

È l'analogo della relazione fra $\underline{F}$ e $\underline{p} = m\underline{v}$ $\quad \underline{F} = \dfrac{d\underline{p}}{dt}$

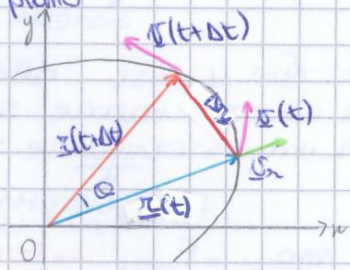
La velocità areale è il segmento che connette il centro della forza con il punto materiale spazza aree uguali in tempi uguali.



Dimostrazione

Si parte da

$|L| = r\, m \frac{d\theta}{dt}$ poiché è un moto nel piano



Consideriamo l'intervallo di tempo Δt nel quale verrà spazzata una certa area. La base del triangolo è approssimativamente $r\,d\theta$ mentre l'altezza è r.

$\Delta A = \frac{\Delta r \cdot r}{2}$ → area triangolo

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \left|\frac{\Delta r}{\Delta t}\right| \frac{r}{2} =$$

$$= \left|\frac{dr}{dt}\right| \frac{|r|}{2} = \underbrace{|r| \frac{d\theta}{dt}}_{\text{raggio vettore scritto in coordinate polari}} \frac{|r|}{2} = \frac{1}{2} |r^2| \frac{d\theta}{dt} = \frac{|L|}{2m}$$

La velocità areale è legata al momento angolare.

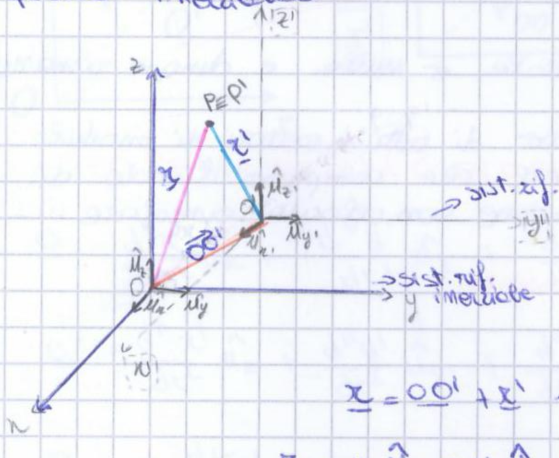
Nel caso di forze centrali, poiché il modulo del momento della quantità di moto è costante, allora la velocità areale è costante.

II LEGGE DI KEPLERO

La traiettoria di un punto che si muove in un campo di forze centrali giace in un piano fisso passante per il centro ed è percorsa in modo tale che la velocità areale rimanga costante.

MOTI RELATIVI

Le forze apparenti sono forze dovute al fatto che il mio sistema non è quello inerziale.



Supponiamo di avere a disposizione due sistemi di riferimento cartesiani Oxyz e O'x'y'z' e vediamo come descrivere r, v, a di un punto materiale P.

OO' posizione di O' rispetto al sistema Oxyz

$r = OO' + r'$ → POSIZIONE

$r = x\,\hat{u}_x + y\,\hat{u}_y + z\,\hat{u}_z \qquad r' = x'\,\hat{u}_{x'} + y'\,\hat{u}_{y'} + z'\,\hat{u}_{z'}$

$OO' = x_{O'}\,\hat{u}_x + y_{O'}\,\hat{u}_y + z_{O'}\,\hat{u}_z$

$v = \frac{dr}{dt} = \frac{d\,OO'}{dt} + \frac{r'}{dt} = v_{O'} + v'$ → VELOCITÀ

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv_{O'}}{dt} + \frac{v'}{dt} = a_{O'} + a'$ → ACCELERAZIONE

EQUAZIONI DOVUTE AL MOTO CON UNA PURA TRASLAZIONE

$$\underline{v} = \frac{dr}{dt} = \frac{dOO'}{dt} + \frac{dr'}{dt} = \frac{dx_{O'}}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy_{O'}}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz_{O'}}{dt}\hat{u}_z + \frac{dx'}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy'}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz'}{dt}\hat{u}_z +$$

$$+ x'\underbrace{\boxed{\frac{d\hat{u}_x}{dt}}}_{\underline{\omega}\times\hat{u}_x} + y'\underbrace{\boxed{\frac{d\hat{u}_y}{dt}}}_{\underline{\omega}\times\hat{u}_y} + z'\underbrace{\boxed{\frac{d\hat{u}_z}{dt}}}_{\underline{\omega}\times u_z} \rightarrow \text{POISSON}$$

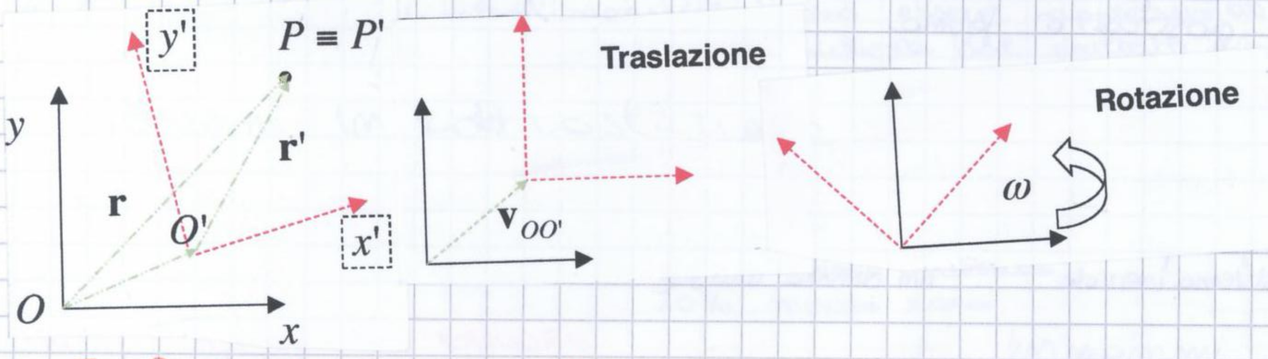
$$\underline{v} = v_{O'} + \underline{v}' + x'(\omega\times\hat{u}_x) + y'(\underline{\omega}\times\hat{u}_y) + z'(\underline{\omega}\times\hat{u}_z) =$$
$$= \underline{v}_{O'} + \underline{v}' + \underline{\omega}\times(x'\hat{u}_x + y'\hat{u}_y + z'\hat{u}_z)$$

TEOREMA DELLE VELOCITA' RELATIVE

$$\underline{v} = v_{O'} + \underline{v}' + (\underline{\omega}\times\underline{r}')$$

$$\underline{v}_t = \underline{v} - \underline{v}' = \underline{v}_{O'} + (\underline{\omega}\times\underline{r}') \rightarrow \text{VELOCITA' DI TRASCINAMENTO}$$

La differenza v_t tra le velocità misurate nei due sistemi di riferimento è chiamata velocità di trascinamento.
Se il punto P fosse fermo nel sistema mobile la sua velocità misurata dal sistema fisso sarebbe pari alla velocità di trascinamento.



TEOREMA DELL'ACCELERAZIONE RELATIVA

$$\underline{a} = \frac{d''x}{dt^2}\hat{u}_x + \frac{d''y}{dt^2}\hat{u}_y + \frac{d''z}{dt}\hat{u}_z \qquad \text{ACCELERAZIONE ASSOLUTA}$$

$$\underline{a}' = \frac{d''x'}{dt^2}\hat{u}_{x'} + \frac{d''y'}{dt^2}\hat{u}_{y'} + \frac{d''z'}{dt^2}\hat{u}_{z'} \qquad \text{RELATIVA}$$

$$\underline{a}_{O'} = \frac{dv_{O'}}{dt} \qquad \text{ORIGINE S.R.}$$

$$\underline{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv_{O'}}{dt} + \boxed{\frac{dv'}{dt}} + \frac{d\omega}{dt}\times\underline{r}' + \boxed{\underline{\omega}\times\frac{dr'}{dt}}$$

$$\underline{v}' = \frac{dx'}{dt}\hat{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\hat{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\hat{u}_{z'}$$

$$\boxed{\frac{dv'}{dt}} = \frac{d''x'}{dt^2}\hat{u}_{x'} + \frac{d''y'}{dt^2}\hat{u}_{y'} + \frac{d''z'}{dt}\hat{u}_{z'} + \frac{dx'}{dt}\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt} =$$
$$= \underline{a}' + (\underline{\omega}\times\underline{v})$$

X LABORATORIO

ERRORE E INCERTEZZA

Nessuna misura da come risultato un valore certo: esiste un errore sempre presente.
Errore non significa sbaglio ma incertezza.
Bisogna imparare ad analizzare l'incertezza in modo da:
- quantificarla
- contenerla

Un'incertezza contenuta può permettere di validare o meno una teoria.
Per contenere l'incertezza si può:
- Impegno nel migliorare le misure
- Interpolazione
- Strumento più accurato

Il risultato di una misura sperimentale è la miglior stima della misura che è la media delle misurazioni che ho fatto. L'intervallo probabile è legato alla precisione dello strumento ed equivale alla dispersione.

miglior stima ± incertezza

$$x_{best} \pm \delta x$$

È importante mettere lo stesso numero di cifre dopo la virgola (o prima), dette cifre significative. Ci sono tre regole fondamentali:
1. Le incertezze sperimentali dovrebbero essere sempre arrotondate a 1 cifra significativa.
2. L'ultima cifra significativa della miglior stima deve essere dello stesso ordine di grandezza dell'incertezza.
3. I numeri usati nei calcoli successivi devono essere approssimati a 1 cifra significativa in più di quella richiesta dal risultato finale.

δx → incertezza assoluta

$\delta x / |x_{best}|$ → incertezza relativa o frazionaria o precisione
↳ può essere espressa in percentuale
precisione: 1% misura accurata
10% misura rozza

PROPAGAZIONE DELL'ERRORE

Per quelle quantità che sono misurate indirettamente in funzione di altre quantità [$f(x, x_2, x_3)$] allora:

$$\delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i \right)^2}$$

derivate parziali

FORMULA DI PROPAGAZIONE DELL'ERRORE

esempio

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \qquad g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \qquad \delta g = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \delta L\right)^2 + \left(-\frac{2 \cdot 4\pi^2 L}{T^3} \delta T\right)^2}$$

$$g = g_{best} \pm \delta g$$

Errori casuali
- sono rilevati dalle misure ripetute
- possono essere trattati statisticamente

Errori sistematici
- non sono rivelati dalle misure ripetute
- non possono essere trattati statisticamente
- si possono riconoscere solo se abbiamo un valore di riferimento.
- errore di parallasse

I valori delle misure ripetute si distribuiscono intorno al valore medio.
la curva gaussiana deve essere traslata:

$$\boxed{f(x) = Ne^{-(x-X)^2/2\sigma^2}}$$

La curva è simmetrica intorno a x=X

La proprietà fondamentale della distribuzione è la condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

La curva gaussiana deve essere normalizzata:

$$N\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-X)^2/2\sigma^2}dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}}$$

N = fattore di normalizzazione

La curva gaussiana è descritta dalla funzione:

$$\boxed{G_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-X)^2/2\sigma^2}}$$

X,σ sono i parametri della curva: è una curva a campana centrata sul valore X e con larghezza pari a 2σ.

Cosa sono X e σ?

Perché il risultato di un'esperienza di MISURE RIPETUTE è:

(Valore misurato di x)= $x_{MEDIA} \pm \sigma_{x\ media}$

Ci aspettiamo che:

X = valore vero = MEDIA

σ = dispersione = DEVIAZIONE STANDARD

VERIFICA:

- MEDIA

$$\bar{x} = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-(x-X)^2/2\sigma^2}dx$$

$$\boxed{\mu = X}$$

- DEVIAZIONE STANDARD

$$\sigma_x = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{x})^2 f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \sigma_X = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{x})^2 e^{-(x-X)^2/2\sigma^2}dx$$

$$\boxed{\sigma_X = \sigma}$$

- le misure ripetute rivelano gli errori casuali, che possono essere trattati statisticamente;

- quando il numero di misure N è sufficientemente grande, i dati si distribuiscono intorno al valore medio secondo una curva a campana;

- la curva a campana è descritta dalla curva gaussiana ed è la distribuzione limite per misure ripetute affette solo da errori casuali;

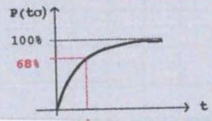
- **la curva gaussiana è centrata intorno al valore vero, che coincide con la MEDIA, e la sua larghezza è la DEVIAZIONE STANDARD.**

ATTENZIONE:

Poiché $\int_a^b f(x)dx$ esprime la PROBABILITA' che una misura cada nell'intervallo compreso tra a e b,

Allora la PROBABILITA' che una misura cada in un intervallo, la cui larghezza è multiplo della DEVIAZIONE STANDARD (tσ) intorno al VALORE MEDIO (X) è data da:

$$\boxed{P(t\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-t}^{t} e^{-z^2/2}dz} \quad \text{FUNZIONE DEGLI ERRORI}$$



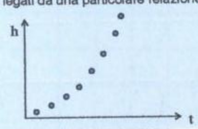
La deviazione standard indica che esiste il 68% di probabilità che i valori cadano entro un valore s dalla media X

Fitting

Dopo aver parlato delle **misure ripetute** della singola misura dobbiamo ora occuparci di uno dei problemi più interessanti della fisica sperimentale:

trovare la relazione che lega due grandezza fisiche fra di loro

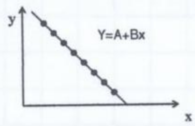
Esempio: Si potrebbe far cadere un sasso da un'altezza variabile *h* e nel contempo misurare il tempo *t* impiegato nella caduta. Si avrebbero così due serie di numeri (h_1,h_2,...,h_N) e (t_1,t_2,...,t_N) legati da una particolare relazione:

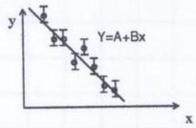


Regressione lineare o fit lineare

Una delle relazioni più interessanti è la quella di tipo lineare: **y=A+Bx**

Se due grandezze avessero fra loro questa relazione allora in un grafico di *y* in funzione di *x* si dovrebbe avere una retta con pendenza *B* e intercetta *A*. Se misurassimo *N* diversi valori (x_1, y_1, ..., x_N) e i corrispondenti (y_1, y_2, ..., y_N) e se le misure non fossero soggette a incertezze, allora ciascun punto dovrebbe giacere esattamente sulla retta





Come però abbiamo già detto le incertezze esistono sempre e il massimo che possiamo aspettarci è che la distanza di ciascun punto dalla retta sia confrontabile con l'incertezza

Fitting

Quando osserviamo un fenomeno sperimentale l'acquisizione di dati relativi all'osservazione del fenomeno fisico in oggetto è affetta da una dispersione attorno al comportamento ideale, che risulta descritto dai modelli analitici o numerici del fenomeno stesso. Al fine di correlare i dati sperimentali con quelli numerici, è necessario utilizzare delle tecniche appropriate per "mediare" l'effetto della dispersione.

Una delle tecniche maggiormente utilizzate per ottenere la curva interpolante da dati sperimentali è quella dei minimi quadrati (least mean square) che si basa sulla minimizzazione della somma dei quadrati degli scarti di ciascuna misura dalla curva approssimante.

Due problemi

1. Stabilita il tipo di relazione che intercorre fra due misure, trovare i valori dei coefficienti A e B che meglio approssimano le *N* coppie di misure (**best fitting**)
2. La relazione trovata è realmente la «vera» relazione che intercorre fra queste due grandezze fisiche?

Risponderemo qui al primo di questi due quesiti

Best fitting

Regressione lineare (metodo dei minimi quadrati).
Date *N* coppie di misure fra cui si ipotizza esistere una relazione lineare del tipo y=A+Bx, i valori di A e B che meglio approssimano le N coppie di misure sono dati dalle seguenti relazioni:

$$\boxed{\begin{aligned} A &= \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{N\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \\ B &= \frac{N\sum xy - \sum x \sum y}{N\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \end{aligned}}$$

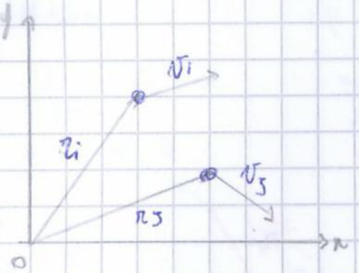
y=A+Bx

Best fitting

L'errore che viene compiuto su questi parametri è dato da:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_A &= \sigma_y\sqrt{\frac{\sum x^2}{N\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}} \\ \sigma_B &= \sigma_y\sqrt{\frac{\sum x^2}{N\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}} \\ \sigma_y &= \sqrt{\frac{1}{N-2}\sum\left(y_i - A - Bx_i\right)^2} \end{aligned}}$$

CENTRO DI MASSA E QUANTITÀ DI MOTO



$$r_{CM} = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i}$$

$$\frac{dr_{CM}}{dt} = \underbrace{v_{CM}}_{\text{VELOCITÀ DEL CENTRO DI MASSA}} = \frac{\sum_i m_i v_i}{\sum_i m_i} = \frac{\overbrace{P}^{\text{QUANTITÀ DI MOTO}}}{\sum_i m_i}$$

Sto considerando un punto che non è uno dei punti del sistema, è un punto ideale con posizione r_{CM}, massa $\sum m_i$ e velocità v_{CM}. Si perdono le informazioni sulle singole particelle a favore di una informazione media sul centro di massa.
La quantità di moto totale del sistema coincide con la quantità di moto del centro di massa considerato come un punto materiale che abbia posizione r_{CM} e velocità v_{CM} e massa $\sum_i m_i$.

$$\frac{d v_{CM}}{dt} = a_{CM} = \frac{\sum_i m_i a_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i F_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M}\sum_i F \quad \text{forze che agiscono sulle particelle iesime}$$

Le forze agenti su un singolo punto materiale sono sia interne che esterne

$$\sum_i F_i = \sum_{i,j} F_{ij} + \sum_i F_i^{(e)} = 0 + R^{(e)} = \left(\sum_i m_i\right) a_{CM} = M a_{CM} \quad \text{EQUAZIONE DEL MOTO DEL CENTRO DI MASSA}$$

Il centro di massa si sposta come un punto materiale in cui è concentrata tutta la massa del sistema su cui agisce la risultante delle forze esterne.

CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$R^{(e)} = \left(\sum_i m_i\right) a_{CM} = \left(\sum_i m_i\right) \frac{dv_{CM}}{dt} = \frac{dP}{dt}$$

se $R^{(e)} = 0$ allora $\frac{dP}{dt} = 0 \Rightarrow P = \text{costante}$

N.B. la conservazione della quantità di moto è vettoriale ma è valida anche solo per le componenti. La quantità di moto dei singoli punti varia, è la somma che rimane costante.

$$P = \text{cost}$$

$$P = m_1 v_1 + m_2 v_2 = K$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1 v_1 + m_2 v_2) = m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0$$

$$F_1 + F_2 = 0 \Rightarrow F_1 = -F_2$$

(*) Questo non implica che le forze abbiano la stessa retta d'azione $\Rightarrow$ NON è il III principio della dinamica

(*) Quando la risultante delle forze esterne è nulla, la quantità di moto totale del sistema rimane costante nel tempo e il CM si muove di moto rettilineo uniforme o resta in quiete ($a_{CM}=0$ $v_{CM}=\text{cost}$)

La risultante delle forze esterne ($R^{(e)}$) è uguale alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema.

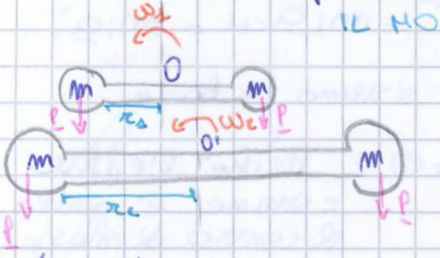
Quando il polo è fisso o coincide con il centro di massa del sistema

$$\frac{dL}{dt} = M^{(e)}$$ se $M^{(e)} = 0$ $\frac{dL}{dt} = 0$

- sistema isolato
- se il momento delle forze esterne è nullo rispetto al polo scelto.

IL MOMENTO ANGOLARE SI CONSERVA

$\frac{dL}{dt} = 0$



$L_{in} = 2\, m r_1^2\, \omega_1$

$L_{fin} = 2\, m r_2^2\, \omega_2$

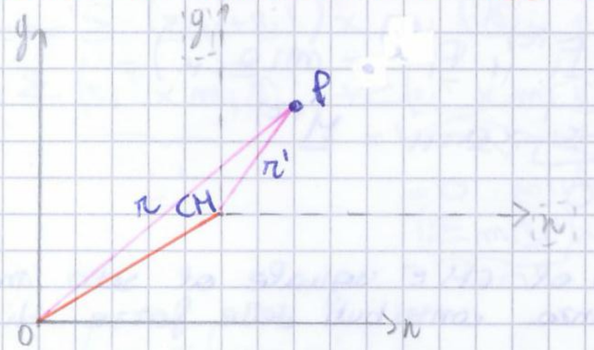
conservazione del momento angolare: se è nullo il momento delle $F^{(e)}$ che agiscono sul sistema M si conserva e si ha quando:

- sistema isolato, anche $P = cost = m v_{CM}$
- $M^{(e)} = 0$ rispetto ad un polo O

$L_{in} = L_{fin}$

$$\omega_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2}\,\omega_1$$

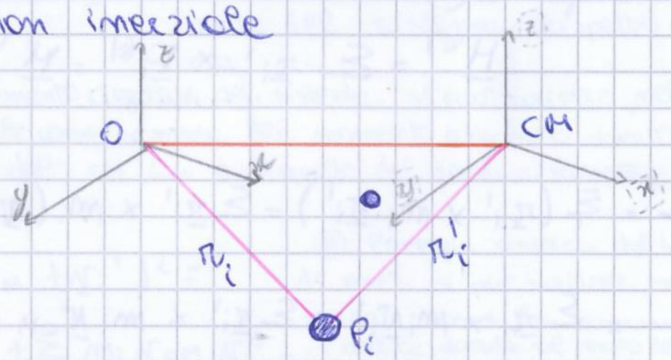
SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA



Consideriamo il centro di massa e prendiamolo come origine di un sistema di riferimento cartesiano con assi ad orientazione fisse rispetto ad un sistema Oxy fisso

- L'origine è nel CM
- Gli assi mantengono la stessa orientazione per cui $\omega = 0$, pura traslazione
- Si tratta di un sistema non inerziale

$$\begin{cases} r_i = r_{CM} + r_i' \\ v_i = v_{CM} + v_i' \\ a_i = a_{CM} + a_i' \end{cases}$$



N.B.

$$\begin{cases} r'_{CM} = 0 \\ v'_{CM} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum m_i r_i' = 0 \\ \sum m_i v_i' = 0 \end{cases}$$

$\sum_i m_i \underline{v}_i = P' = 0$ se calcolato rispetto al sistema inerziale del CM, anche se $m_i v_i' \neq 0$

$\underline{F}' = m\underline{a}' = m(\underline{a} - \underline{a}_0) = m(\underline{a} - \underline{a}_{CM})$

$m_i(\underline{a}_i - \underline{a}_{CM}) = \underline{F}_i - m\underline{a}_{CM} = F_i^{(e)} + F_i^{(I)} - m\underline{a}_{CM} = m_i a_i'$ — F interne

sommando tutti i punti

$R^{(E)} - m\underline{a}_{CM} = \sum m_i \underline{a}_i' = 0$

Inoltre

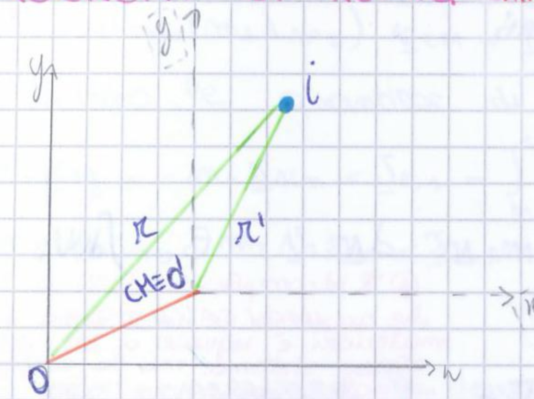
$\sum \underline{r}_i \times (F_i^{(e)} + F_i^{(I)} - m_i\, a_{CM}) = \underline{M}'^{(e)} - \sum m_i \underline{r}_i' \times \underline{a}_{CM} = \underline{M}'^{(e)}$

Il momento risultante rispetto al CM è uguale al solo momento delle forze esterne vere, senza contributi delle forze di inerzia

Cioè il teorema del momento angolare totale vale anche nel sistema (non inerziale) del CM purché come polo si assuma l'origine, cioè il CM. Al calcolo del momento contribuiscono solo le forze esterne (vere)
sistema centro di massa è un sistema privilegiato

TEOREMA DI KONIG

fornisce una relazione tra il valore misurato in un SR inerziale e quello misurato nel sistema del CM.



Calcoliamo il momento totale rispetto ad O:

$$\underline{L}_O = \sum \underline{r}_i \times m_i \underline{v}_i$$

(*) $\underline{r}_i = \underline{r}_{CM} + \underline{r}_i'$
$\underline{v}_i = \underline{v}_{CM} + \underline{v}_i'$

I per il momento angolare

$$\underline{L}_O = \sum (\underline{r}_{CM} + \underline{r}_i') \times m_i (\underline{v}_{CM} + \underline{v}_i') =$$

$$= \underbrace{\sum (\underline{r}_i' \times m_i \underline{v}_i')}_{\underline{L}'} + \underbrace{\cancel{\sum (\underline{r}_i' \times m_i \underline{v}_{CM})}}_{=0 \text{ poiché } \underbrace{(\sum m_i \underline{r}_i')}_{=0} \times \underline{v}_{CM}} + \underbrace{\cancel{\sum (\underline{r}_{CM} \times m_i \underline{v}_i')}}_{=0 \text{ poiché } \underline{r}_{CM} \times \underbrace{\sum m_i \underline{v}_i'}_{=0 \text{ poiché è la somma di } p' = m v'}} + \underbrace{\sum (\underline{r}_{CM} \times m_i \underline{v}_{CM})}_{\underline{L}_{CM}}$$

$$\underset{\text{polo O}}{\underline{L}_O} = \underset{\text{polo O}}{\underline{L}_{CM}} + \underset{\text{polo O'}}{\underline{L}'}$$

$\underline{L}_{CM}$ → contributo del moto medio: moto del CM
$\underline{L}'$ → contributo del moto interno: moto del sistema rispetto al CM.

Il teorema di Konig ci permette di risolvere separatamente due dinamiche.

(*) il momento angolare del sistema si può scrivere, nel S.R inerziale, come somma del momento angolare dovuto al moto del CM, L_{CM}, e di quello del sistema rispetto al CM

II per l'energia cinetica

$$E_c = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\underline{v}_{CM} + \underline{v}_i')^2 =$$

$$= \sum \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum m_i \underline{v}_{CM} \cdot \underline{v}' =$$

$$= \frac{1}{2} M_{tot} v_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

(*) l'energia cinetica del sistema di punti si può scrivere, nel SR inerziale, come la somma dell'E_c dovuta al moto del CM, E_{CM}, e quella del sistema rispetto al CM

$\frac{1}{2} M_{tot} v_{CM}^2$ → contributo del moto medio: moto del CM
$\sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$ → contributo del moto interno: moto del sistema rispetto al CM

RIASSUNTO

Per quanto riguarda il momento angolare e l'energia cinetica il centro di massa non riassume le proprietà del sistema, a differenza di quanto discusso riguardo a P e $R^{(e)}$. Non è sufficiente conoscere il moto del centro di massa, cioè appunto P e $R^{(e)}$ per ricavare L e E_c ma bisogna anche tenere conto del moto rispetto al centro di massa. Ovvero il moto globale e il moto medio coincidono solo per quanto riguarda la quantità di moto, che è nulla nel moto interno, mentre per quanto riguarda L e E_c abbiamo contributi sia dal moto medio che dal moto interno.

Considero due punti materiali che urtano in assenza di forze esterne

$$\underline{P}_{in} = m_1 \underline{v}_{1,in} + m_2 \underline{v}_{2\,in} = m_1 \underline{v}_{1\,fin} + m_2 \underline{v}_{2\,fin} = \underline{P}\,fin$$

Il moto del centro di massa non viene alterato dall'urto

$$\underline{P}_{CM} = (m_1 + m_2)\, \underline{v}_{CM} = \underline{P}_{in} = \underline{P}_{fin}$$

Variano le quantità di moto per le singole particelle:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \underline{v}_{1\,fin} - m_1 \underline{v}_{1\,in} &= \underline{J}_{2,1} = \int_{t_1}^{t_2} F_{2,1}\, dt \\ m_2 \underline{v}_{2\,fin} - m_2 \underline{v}_{2\,fin} &= \underline{J}_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} F_{12}\, dt \end{aligned}\right] \Longrightarrow \underline{J}_{1,2} = -\underline{J}_{2,1} \rightarrow \text{impulso scambiato}$$

OSSERVAZIONI

Si può conservare la quantità di moto anche in presenza di forze esterne?

È possibile se la durata dell'urto (Δt) è molto piccola e se la forza esterna F^{ext} NON è impulsiva. In tal caso infatti la variazione di quantità di moto dovuta alla forza esterna sarebbe

$$\Delta \underline{P} = \int_{t_1}^{t_2} \underline{F}^{(e)}\, dt = \underline{F}^{(e)}{}_m\, dt \approx 0$$

a) variazione della quantità di moto in un urto

se $\underline{J} = \underline{F}^{ext} \Delta t = 0$

$\Downarrow$

$\Delta P = 0$

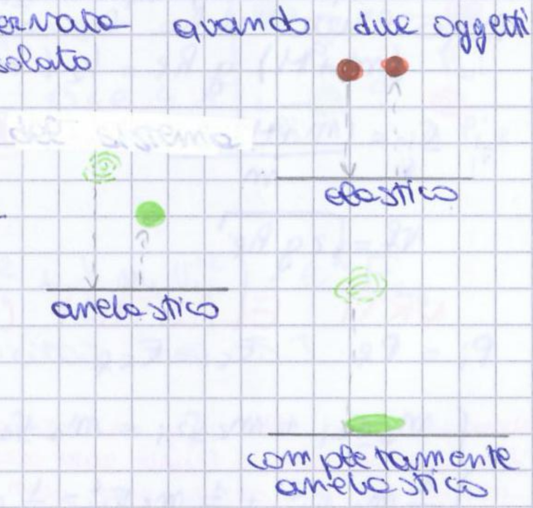
ATTENZIONE! Quando la forza esterna F^{ext} è impulsiva in Δt il ragionamento può non essere corretto, perché la forza può essere confrontabile con la forza di interazione dovuta all'urto.

b) variazione dell'energia meccanica in urto

- l'energia potenziale non varia
- non si può assumere a priori che non vari l'energia cinetica (non è detto che le forze siano conservative)

TIPI DI URTI

La quantità di moto totale è conservata quando due oggetti collidono, a patto che il sistema sia isolato



Urti elastici: l'energia cinetica totale del sistema dopo la collisione è uguale all'energia cinetica totale prima dell'urto.

Urti anelastici: l'energia cinetica totale del sistema NON si conserva dopo la collisione; se gli oggetti rimangono attaccati dopo l'urto la collisione si dice completamente anelastica.

Nel sistema del centro di massa le stesse equazioni si scrivono:

$$\begin{cases} m_1 \underline{v}'_{1i} = -m_2 \underline{v}'_{2i} & m_1 \underline{v}'_{1f} = -m_2 \underline{v}'_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1i} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2i} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1f} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2f} \end{cases}$$

Si avrà che

$$\underline{v}'_{1i} = -\underline{v}'_{1f} \qquad \underline{v}'_{2i} = -\underline{v}'_{2f}$$

Sappiamo inoltre che:

$$\underline{v}_{1i} = \underline{v}'_{1i} + \underline{v}_{CM} \qquad \underline{v}_{1f} = \underline{v}'_{1f} + \underline{v}_{CM}$$

$$\underline{v}_{2i} = \underline{v}'_{2i} + \underline{v}_{CM} \qquad \underline{v}_{2f} = \underline{v}'_{2f} + \underline{v}_{CM}$$

$$\underline{v}_{CM} = \frac{m_1 \underline{v}_{1i} + m_2 \underline{v}_{2i}}{m_1 + m_2}$$

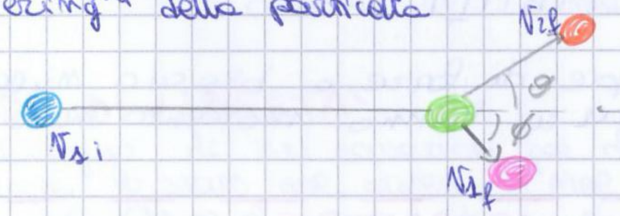
si ottiene

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)\underline{v}_{1i} + 2 m_2 \underline{v}_{2i}}{m_1 + m_2}$$

$$v_{2f} = \frac{(m_2 - m_1)\underline{v}_{2i} + 2 m_1 \underline{v}_{1i}}{m_1 + m_2}$$

URTI ELASTICI (2 DIMENSIONI)

Bisogna aggiungere un'informazione: spesso viene dato l'angolo di "scattering" della particella

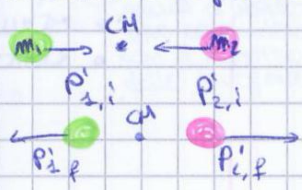


URTI ANELASTICI

Sono i più comuni: si conserva la quantità di moto ma non l'energia cinetica, che viene assorbita durante l'urto e trasformata in altre forme di energia.

Si definisce coefficiente di riduzione la quantità

$$e = -\frac{p'_{1f}}{p'_{1i}} = -\frac{\underline{v}'_{1f}}{\underline{v}'_{1i}} = -\frac{p'_{2f}}{p'_{2i}} = -\frac{\underline{v}'_{2f}}{\underline{v}'_{2i}} \quad (*) \qquad 0 \le e \le 1$$



L'energia cinetica dopo l'urto

$$E'_{cf} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1f} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2f} = e^2 \left(\frac{1}{2} m_1 v'^2_{1i} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2i} \right) = e^2 E'_{ci}$$

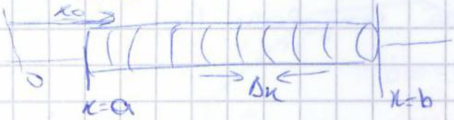
Per ricavare le relazioni fra le velocità nel S.I:

$$v'_{1f} = v_{1f} - v_{CM} = -e$$

(*) Il punto con p'_{1i} nell'istante precedente all'urto vede ridursi a zero la sua q. di moto. Nella fase successiva riacquista la quantità di moto fino al valore p'_{1f} opposto in verso e minore in modulo.

CORPO RIGIDO

Un corpo rigido è formato da un insieme continuo di punti materiali e le distanze tra essi rimane fisse. Diventa la definizione di un oggetto reale esteso.



Le masse diventeranno infinitesime. Possiamo dimenticarci della struttura fine (atomi e molecole) poiché il volume infinitesimo dV che consideriamo è piccolo rispetto alla scala macro (10^{-6} m) ma grande rispetto alla scala atomica (10^{-9} m)

Noi considereremo gli oggetti come corpi con sempre uguale densità.

Le forze interne (forze di coesione che mantengono invariate le distanze tra i punti) hanno le seguenti caratteristiche:

$$\begin{cases} \text{NON hanno risultante } R^{(I)} = 0 \\ \quad " \quad " \quad \text{lavoro } W^{(I)} = 0 \\ \quad " \quad " \quad \text{momento } M^{(I)} = 0 \end{cases}$$

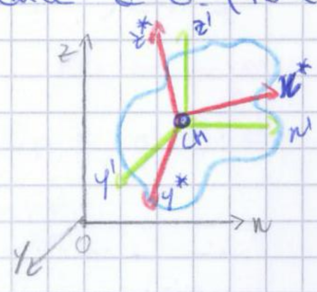
$\underline{R}^{(e)} = m\underline{a}_{CM}$ — Le forze esterne sono responsabili del moto del centro di massa.

$\underline{M}_0^{(e)} = \dfrac{d\underline{L}_0}{dt}$ — I momenti delle forze esterne sono responsabili delle rotazioni intorno ad O (punto fisso oppure centro di massa del sistema).

$W_{AB}^{(e)} = E_{c,B} - E_{c,A}$ — Il lavoro delle forze esterne varia l'energia cinetica del sistema.

GRADI DI LIBERTA'

Si ha bisogno di 3N equazioni per descrivere il moto e dunque individuare lo stato del sistema. Nel caso del corpo rigido 3N si riduce a 6. (N è il numero dei punti materiali indipendenti).

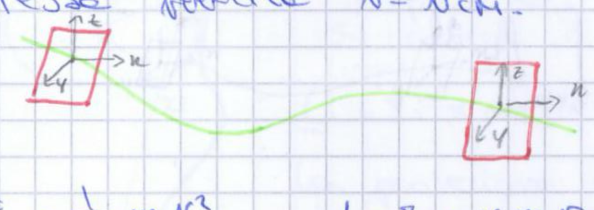


SISTEMA	G. LIBERTA'
corpo rigido	6
punto materiale	3
N punti indipendenti	3N
punto vincolato su una linea	1
punto vincolato su un piano	2
2 punti vincolati ad avere la stessa distanza	5

(*) Il numero di gradi di libertà deve coincidere con il numero delle incognite

PURA TRASLAZIONE

Tutti i punti del corpo rigido descrivono traiettorie uguali, con la stessa velocità $v = v_{CM}$.



$\underline{P} = m\underline{v}_{CM}$

$\underline{R}^{(e)} = m\underline{a}_{CM}$

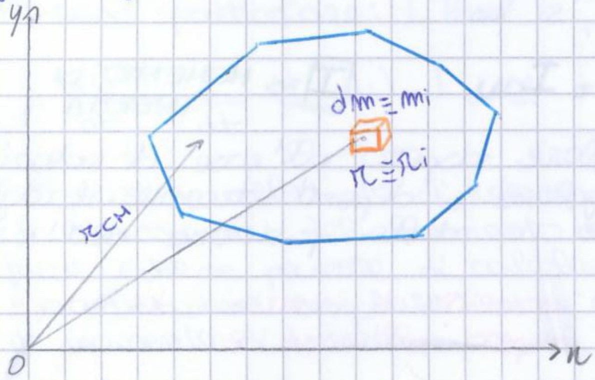
si comporta come un punto materiale

$E_c = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$ $\quad \underline{L} = \underline{r}_{CM} \times m\underline{v}_{CM}$

$$\begin{cases} E_c' = 0 \\ L' = 0 \end{cases}$$ non c'è movimento rispetto al centro di massa

CENTRO DI MASSA DI UN CORPO RIGIDO

Definiamo il centro di massa di un sistema di punti materiali la seguente grandezza:



$$r_{CM} = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i}$$

$$r_{CM} = \frac{\int r\, dm}{\int dm}$$

$dm = \rho\, dV$ → volume occupato da dm

$$r_{CM} = \frac{\int_{vol} r \rho\, dV}{\int_{vol} \rho\, dV} = \frac{\int_{vol} r\, dV}{\int_{vol} dV} = \frac{\int_{vol} r\, dV}{\text{Volume totale}}$$

Punto di applicazione della forza peso

Consideriamo un corpo continuo sottoposto alla forza peso e supponiamo che si possa considerare g = costante per tutti i "dm".
Su ogni "dm" agirà una forza peso. "dm" → $g \cdot$ "dm"
La risultante di tutte queste forze parallele fra di loro è:

$$\int g \cdot \text{"}dm\text{"} = g \int dm = mg$$

→ Tale forza è applicata nel centro di gravità o baricentro.
→ Il baricentro coincide con il centro di massa del sistema quando il vettore g si può considerare costante.

Momento della forza peso

Momento rispetto al polo fisso:

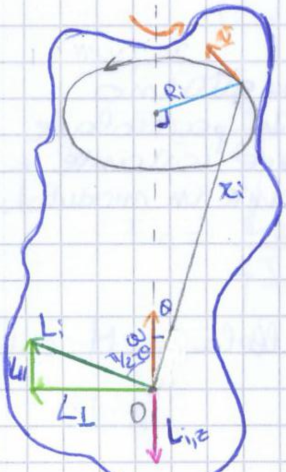
$$\underline{M} = \int \underline{r} \times \underline{g}\, dm = \left(\int \underline{r}\, dm\right) \times \underline{g} = m \underline{r}_{CM} \times \underline{g} = \underline{r}_{CM} \times m\underline{g}$$

Energia potenziale gravitazionale

$$E_p = \int g \, \overset{h}{z} \cdot dm = g \int z\, dm = mg z_{CM}$$

Se il corpo è libero ed agisce solo la forza peso la traiettoria del CM è verticale rettilinea o parabolica a seconda delle condizioni iniziali

Rotazioni rigide attorno a un asse fisso



Asse di rotazione z. Velocità angolare ω.
Il polo sull'asse z.
Si calcoli il momento angolare nel punto P_i

$$\underline{L}_i = \underline{r}_i \times m_i \underline{v}_i \longrightarrow |L_i| = m_i r_i v_i = m_i r_i R_i \omega \quad (1)$$

La proiezione del momento angolare L_i sull'asse di rotazione z, ovvero il momento angolare assiale:

$$|L_{i,z}| = |L_i| \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta_i\right) = |L_i| \sin(\theta_i) = m_i r_i \sin(\theta_i) R_i \omega =$$

$$= m_i R_i^2 \omega \quad (2)$$

(*) $r_i \sin\theta_i = R_i$

EQUAZIONI DEL MOTO

a) caso particolare: $L \parallel \omega$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \omega) = I_z \alpha \implies M^{(e)} = \frac{dL}{dt} = I_z \alpha$$

Equazione del moto di rotazione: la conoscenza del momento delle forze esterne permette di calcolare l'accelerazione angolare se è noto il momento di inerzia.

$$\alpha = \frac{M}{I_z}$$

$$\omega = \omega_0 + \int_0^t \alpha \, dt$$

$$\theta = \theta_0 + \int_0^t \omega \, dt$$

Se $M = 0$, il corpo rimane in quiete o si muove con moto circolare uniforme

$$\alpha = 0, \quad \omega = \omega_0, \quad \theta = \theta_0 + \omega t$$

(*) Sia α che M son $\parallel$ all'asse di rotazione, cioè a ω.

Se $M = \text{cost}$, il moto è circolare uniformemente accelerato

$$\alpha = \text{cost} \quad \omega = \omega_0 + \alpha t \quad \theta = \theta_0 + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

Se $M = M(t)$, il moto è circolare vario

$$\alpha = \frac{M}{I_z} \quad \omega = \omega_0 + \int_0^t \alpha \, dt \quad \theta = \theta_0 + \int_0^t \omega \, dt$$

b) Caso generale: L non è $\parallel \omega$

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \omega) = I_z \alpha \implies M_z = I_z \alpha$$

cioè vale solo per la componente assiale e poi rimane l'altra componente, che non porta a variazioni di α ma è responsabile dei moti di precessione:

$$\frac{dL_\perp}{dt} = M_\perp$$

Calcolo dell'energia cinetica di un corpo rigido per la rotazione intorno ad un asse fisso (caso particolare)

$$E_{cin} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{m} \sum_i m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

(*) anche E_c dipende dal moment d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione

$$E_c = \frac{L^2}{2 I_z} \quad \text{se } L \parallel \omega$$

$$E_c = \frac{L_z^2}{2 I_z} \quad \text{quando } L \text{ non è } \parallel \omega$$

TABELLA SINOTTICA

MOTO TRASLATORIO		MOTO ROTATORIO	
Spostamento infinitesimo	$d\underline{x}$	Spostamento angolare infinitesimo	$d\underline{\theta}$
velocità	$\underline{v} = \frac{d\underline{x}}{dt}$	velocità angolare	$\underline{\omega} = \frac{d\underline{\theta}}{dt}$
accelerazione	$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt}$	accelerazione angolare	$\underline{\alpha} = \frac{d\underline{\omega}}{dt}$
Quantità di moto	$\underline{p} = m\underline{v}$	momento angolare	$\underline{L} = \underline{r} \times m\underline{v} = I\underline{\omega}$
forza	$\underline{F} = m\,\underline{a}$	Momento di una forza	$\underline{M} = I\,\underline{\alpha}$
Energia cinetica	$E_c = 1/2\, m v^2$	Energia cinetica	$E_c = 1/2\, I\, \omega^2$
Lavoro	$W = \int \underline{F}\, d\underline{s}$	Lavoro	$W = \int \underline{M} \cdot d\underline{\theta}$
Potenza	$\underline{F} \cdot \underline{v}$	Potenza	$\underline{M} \cdot \underline{\omega}$

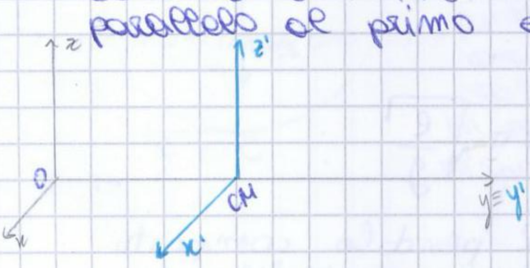
TEOREMA DI HUYGENS - STEINER

Spesso il momento d'inerzia viene calcolato rispetto ad un asse di simmetria che nella maggior parte dei casi passa per il centro di massa. Se si scelgono altri assi, per cui non valgono le condizioni di simmetria calcolare gli integrali può essere particolarmente difficile. Il teorema afferma che:

il momento d'inerzia di un corpo di massa m rispetto ad un asse che si trova ad una distanza d dal centro di massa del corpo è dato da

$$I = I_c + m d^2$$

dove I_c è il momento d'inerzia del corpo rispetto ad un asse parallelo al primo e passante per il centro di massa



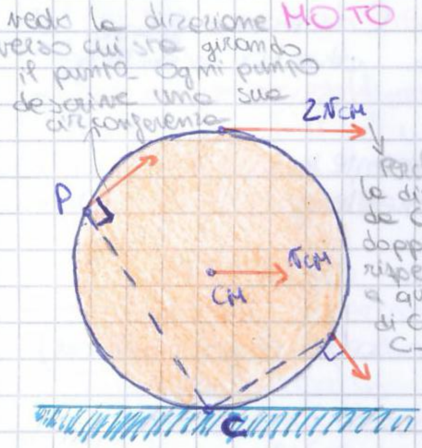
$$x = x' \quad y = y' + d \quad z = z'$$

Il momento d'inerzia di un punto generico P_i rispetto all'asse z è dato da

$$m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

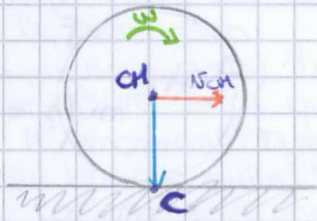
$$I = I_c + m d^2$$

MOTO DI PURO ROTOLAMENTO



È un moto roto-traslatorio in cui però ho un vincolo, imposto dalla presenza del terreno. Questo impone un legame fra il moto rotatorio e quello traslatorio che non sono più indipendenti l'uno dall'altro.
Se le velocità fossero tutte parallele e uguali fra loro l'oggetto scivolerebbe sul piano però senza ruotare. Se invece il corpo rotolasse, ma il punto di contatto avesse velocità non nulla, si direbbe che il corpo rotola e striscia.
In questo caso il piano è un vincolo per l'oggetto.

Il caso particolare che andiamo a studiare è quello per cui il punto di contatto ha velocità nulla: in questo caso si parla di puro rotolamento.
In un Δt con $t \to 0$ dunque in un "dt" infinitesimo il punto C è fisso.
Un moto di puro rotolamento può essere visto come un moto rotatorio del corpo che nell'istante infinitesimo "dt" ruota con velocità ω attorno all'asse passante per C.



La velocità in un punto del corpo rigido avrà una direzione ortogonale alla congiungente passante per l'asse di rotazione e il punto in cui è calcolata.
In generale in un moto roto-traslatorio avevamo detto che un punto, osservato da un sistema di riferimento solidale col pavimento, ha velocità:

$$\underline{v}_P = \underline{v}_O + \underline{\omega} \wedge OP \Rightarrow \underline{v}_P = \underline{v}_{CM} + \underline{\omega} \wedge \underline{r}$$

E in particolare $\underline{v}_C = 0 \Rightarrow 0 = \underline{v}_{CM} + \underline{\omega} \wedge \underline{r} \Rightarrow \underline{v}_{CM} = -\underline{\omega} \wedge \underline{r}$

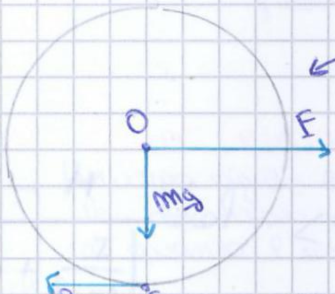
Un moto di puro rotolamento è caratterizzato dal fatto che velocità del centro di massa e velocità angolare non sono indipendenti ma legate dalla relazione:

$$\underline{v}_{CM} = -\underline{\omega} \times \underline{r} \Rightarrow |\underline{v}_{CM}| = \omega r \Rightarrow |\underline{a}_{CM}| = \alpha r$$

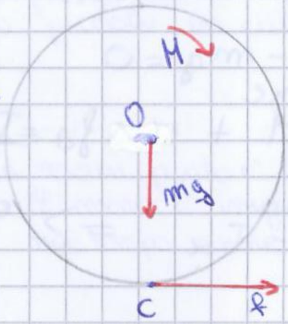
Cioè si tratta di un corpo in cui il CM procede con una velocità v_{CM} e intanto il corpo ruota attorno al CM con velocità angolare ω.

EQUAZIONI DEL MOTO

2 casi:



| forza costante
momento costante |



punto per punto avrò una f di attrito statico che punta in maniera discorde rispetto al moto.

In conclusione

- In assenza di forze e momenti si ha una roto-traslazione uniforme (v e ω costanti, a_{CM} e α nulle)
- Le situazioni descritte sono fra le più semplici.
- La forza di attrito statico non compie lavoro.

ATTRITO VOLVENTE

Si osserva sperimentalmente che un corpo che rotola senza strisciare sopra un piano orizzontale si arresta dopo un certo tempo.
La causa è l'attrito volvente
- Un momento $M_v = \eta m g$ che si oppone al moto
- η, coefficiente di attrito volvente, [m]
- per vincere il momento dovuto all'attrito bisogna applicare su un corpo di raggio r una forza di trazione

$$F > (\eta m g)/r$$

Trasferimento di impulsi e momento angolare su un corpo rigido

Abbiamo visto che negli urti fra le particelle si conserva la quantità di moto, purché non siano presenti forze impulsive esterne. Nel caso dei corpi rigidi spesso sono presenti vincoli (si pensi al classico caso dell'asta vincolata o ad un oggetto appoggiato su un piano). In questo caso le reazioni vincolari possono essere impulsive e la quantità di moto potrebbe non conservarsi. Se si calcola il momento angolare prendendo il polo nel vincolo (in modo tale da avere braccio nullo) si potrebbero annullare i momenti delle forze ed avere la conservazione del momento angolare. Nel seguito studiamo il trasferimento di una forza impulsiva ad un corpo rigido in varie condizioni.

- Impulso angolare e teorema dell'impulso

$$\underline{F}\, dt = d\underline{p} \implies \underbrace{\underline{J} = \int_{t_0}^{t} \underline{F}\, dt = \int_{p_0}^{p} d\underline{p} = p - p_0 = \Delta p}_{\text{Teorema dell'impulso}}$$

se non ci sono forze applicate $\Delta p = 0$

MOMENTO DELL'IMPULSO ANGOLARE

$$\underline{M}\, dt = d\underline{L} \implies \int_{t_0}^{t} M\, dt = \int_{p_0}^{p} (r \wedge F)\, dt = r \wedge J = \Delta L$$

MOMENTO DELL'IMPULSO

passo portare il raggio fuori dal segno di integrale perché la variazione avviene in un tempo molto piccolo, in cui r rimane costante.

CORPO RIGIDO LIBERO (pendolo composto)

Un corpo rigido libero è un corpo rigido in cui nessun punto è vincolato. Valgono le due equazioni $R = m a_{CM}$ e $M = dL/dt$. Il moto è in generale complicato in quanto l'asse di rotazione può variare nel tempo anche rispetto al corpo.

Asta non vincolata:

$$v_{CM} = \frac{J}{m} \qquad d \times J = L_{CM} = I_{CM}\, \omega = \frac{1}{12} m \ell^2 \omega \to \omega\ \frac{12\, d J}{m \ell^2}$$

Asta vincolata: $\omega = \dfrac{3 r J}{m \ell^2}$

L'asta continua a ruotare con velocità angolare costante mentre il CM percorre una traiettoria parabolica nel piano verticale.

Quando il corpo urtato è vincolato, durante l'urto il sistema di vincoli può esercitare una forza risultante R e un momento risultante M. L'effetto complessivo nel breve intervallo di tempo è dato dall'impulso delle forze e dall'impulso angolare uguali rispettivamente alla variazione della quantità di moto e alla variazione del momento angolare del sistema.

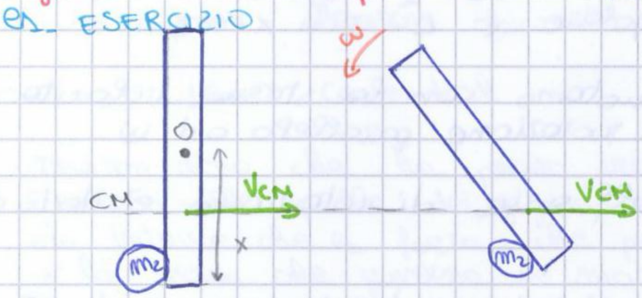
$$\underline{J} = \int \underline{R}\, dt = \Delta \underline{p}$$

$$\underline{r} \times \underline{J} = \int \underline{M}\, dt = \Delta \underline{L}$$

(*) Essendo la quantità di moto e il momento angolare grandezze vettoriali è possibile che si conservino solo alcune componenti

solo forze interne	$\Delta \underline{p} = 0$	$\Delta \underline{L} = 0$
forze esterne non impulsive	$\Delta \underline{p} = 0$	$\Delta \underline{L} = 0$
forze esterne impulsive	$\Delta \underline{p} = \underline{J}$	$\Delta \underline{L} = J$ angolare

ES. ESERCIZIO



Un'asta è ferma sopra un piano orizzontale liscio; la massa è m_1, la lunghezza l. Un punto materiale di massa m_2 e velocità v perpendicolare all'asta colpisce l'asta ad una distanza x dal centro O e vi rimane attaccato. Determinare la velocità lineare e quella angolare del sistema dopo l'urto.

Durante l'urto si esercitano solo forze interne per cui si conservano sia la quantità di moto sia il momento angolare.

$\Delta p = cost$

$$m_2 \underline{v} = (m_1 + m_2)\, \underline{v}_{CM} \qquad \underline{v}_{CM} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\, \underline{v} \qquad x_{CM} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\, x$$

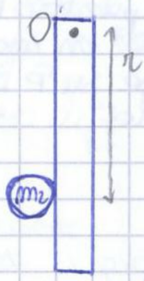
Prima e dopo l'urto il CM si muove lungo la linea tratteggiata con velocità v_{CM}.

$\Delta L = cost$

$$(x - x_{CM})\, m_2 \underline{v} = I \omega \qquad I = \frac{1}{12} m_1 l^2 + m_1 x_{CM}^2 + m_2 (x - x_{CM})^2$$

$$\omega = \frac{(x - x_{CM})\, m_2 \underline{v}}{\frac{1}{12} m_1 l^2 + m_1 x_{CM}^2 + m_2 (x - x_{CM})^2} = \frac{m_2 x \underline{v}}{(m_1 + m_2)\frac{l^2}{12} + m_2 x^2}$$

Se il polo fosse ad un estremo?



Durante l'urto si esercita una forza impulsiva dovuta al vincolo, per cui non si conserva la quantità di moto ma si conserva il momento angolare.

$$r m_2 v = I \omega \qquad I = \frac{1}{3} m_1 l^2 + m_2 r^2 \qquad \omega = \frac{m_2 r v}{\frac{l^2}{3} m_1 + m_2 r^2}$$

Durante l'urto Δp varia per effetto dell'impulso J delle forze vincolari

$$\underline{J} = \Delta \underline{P} = \underline{p_f} - \underline{P_i}$$

$$\underline{P_i} = m_2 \underline{v}_{CM}$$

$$\underline{P_f} = m_2 r \omega\, \underline{u_v} + m_1 \omega \frac{l}{2}\, \underline{u_v}$$

GRAVITAZIONE

Si interessa dell'interazione tra masse.
Quando una tra esse è molto maggiore non si considera più ma si considerano solo le forze centrali esercitate da essa sulle altre.

antichità — sistema tolemaico

1473-1543 — Rivoluzione copernicana

1546-1601 — Brahe

1571-1630 — Keplero capisce di dover cambiare S.I.

1642-1727 — Newton formula la legge

1731-1810 — Cavendish

si sapeva circa l'orbita ma c'erano stelle che prima andavano avanti poi indietro ma ~~grazie~~ risolve ai calcoli di Brahe che aveva ini. a studiare i moti dei corpi celesti

Newton disse che ha potuto vedere più lontano degli altri perché è salito sulle spalle dei giganti ovvero i suoi predecessori.
Lui intuisce che la forza che provoca la caduta dei corpi sulla Terra è la stessa che governa il moto dei pianeti attorno al Sole e della Luna attorno alla terra. L'effetto è diverso perché diverse sono le distanze.
Consideriamo il sistema Terra-Luna e supponiamo il moto della Luna circolare uniforme. conoscendo la distanza Luna-Terra (R_{TL}) e il periodo (T) di rivoluzione della Luna attorno alla Terra

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \qquad v=\frac{2\pi R_{TL}}{T} \implies a=\frac{v^2}{R_{TL}}=\frac{4\pi^2 R_{TL}}{T^2}$$

Newton valutò il rapporto dell'accelerazione di gravità sulla crosta terrestre e l'accelerazione centripeta della Luna:

$$g/a = 3603$$

E notò che questo valore era molto prossimo a quello che si ha facendo il rapporto fra i raggi dell'orbita lunare e il raggio della terra (dove viene calcolato g)

$$\frac{R^2_{TL}}{R^2_T} = 3634$$

Ne deduce che le due accelerazioni stanno nello stesso rapporto degli inversi dei quadrati delle distanze

$$g:a=\frac{1}{R_T^2}:\frac{1}{R_{TL}^2} \implies a \propto \frac{1}{r^2} \implies F \propto \frac{m}{r^2}$$

LEGGI DI KEPLERO

I LEGGE
Tutti i pianeti descrivono attorno al Sole delle orbite di forma ellittica. Il Sole occupa uno dei due fuochi, comune a tutti i pianeti.

II LEGGE
Il raggio vettore di un pianeta, ossia il segmento che congiunge il centro del Sole con il centro del pianeta, copre aree uguali in tempi uguali

CONFERMA DELLA LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

La validità della legge di gravitazione universale ha molte conferme fra cui: consideriamo un oggetto sulla crosta terrestre che sarà attratto da una forza pari a:

$$F = \gamma \frac{m_T m}{r_T^2}$$ Ma la stessa forza la abbiamo anche scritta come $P = mg$

$$mg = \gamma \frac{m_T m}{r_T^2}$$ Però non conosciamo queste costanti e in particolare γ.

Dall'osservazione del sistema terra - luna è però possibile ricavare

$$F_{TL} = \gamma \frac{m_T m_L}{r_{TL}^2} = m_L \omega_L^2 r_{TL} \Rightarrow \gamma m_T = \omega_L^2 r_{TL}^3 \Rightarrow \gamma = \frac{\omega_L^2 r_{TL}^3}{m_T}$$

$$g = \gamma \frac{m_T}{r_T^2} \Rightarrow g = \frac{\omega_L^2 r_{TL}^3}{r_T^2}$$

Inoltre conoscendo la massa della terra (grazie a Cavendish) è possibile misurare la costante di gravitazione universale

$$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \; m^3 / Kg\, s^2$$

ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

In quanto forza centrale è conservativa, per cui si può definire un'energia potenziale relativa a tale forza.

$$dW = \underline{F} \cdot d\underline{s} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_1 \cdot d\underline{s}$$

$\hat{u}_1 \cdot d\underline{s} = |u_1||ds|\cos\theta = ds\cos\theta = dr$

F è la forza di attrazione gravitazionale esercitata dal corpo 1 sul corpo 2

$\hat{u}_1 \cdot d\underline{s}$ è la proiezione di $d\underline{s}$ su $\hat{u}_1$

$$W = \int_A^B dW = \int_{r_a}^{r_b} -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -\gamma m_1 m_2 \left(-\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_a}\right)$$

$$-\gamma \frac{m_1 m_2}{r_a} - \left(-\gamma \frac{m_1 m_2}{r_B}\right) = E_{P,A} - E_{PB}$$

$$E_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

L'energia potenziale vale 0 all'infinito. Quando m_2 si avvicina a m_1 la forza gravitazionale fa un lavoro positivo e m_2 acquista energia cinetica.

massa 1 $\longleftrightarrow$ campo $\longleftrightarrow$ massa 2

L'interazione tra gli oggetti si esplicita attraverso una perturbazione delle proprietà fisiche dello spazio, che chiamiamo campo. L'interazione non avviene fra le due masse ma fra il campo

Il campo si può pensare come un condizionamento dello spazio rilevabile tramite sonde di prova opportune. Esiste un oggetto che modifica lo spazio e un altro che ne sente la modifica.

$$G = \frac{F}{\text{sonda}}$$

Lo spazio diventa allora pieno di cavità, di buche scavate dai corpi che gli sono stati poggiati sopra. allora ad un piccolo corpo che passa troppo vicino ad una stella succede che è costretto a deviare il suo percorso per assecondare la curvatura del lenzuolo.

foto lez. 11 p 21

Esistono due tipi di campi: scalari e vettoriali.

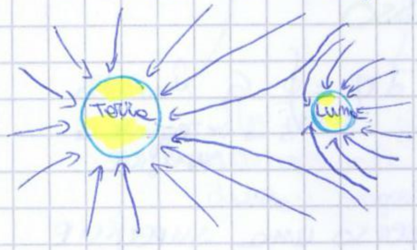
Campo gravitazionale terrestre:

$$\vec{G}(T) = \frac{F}{m_p} = -\gamma \frac{m_T m_p}{m_p r^2} \hat{u}_r = -\gamma \frac{m_T}{r^2} \hat{u}_r$$

Il campo aumenta se r diminuisce.
m_p è la massa di prova $m_p \ll m_T$
m_T genera il campo (massa della terra)
$G \sim g$ in prossimità della terra

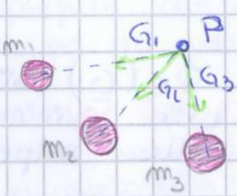
LINEE DI FORZA

La linea di campo di un campo vettoriale, anche detta linea di forza, è una curva ideale che ha come tangente in ogni punto la direzione del vettore del campo stesso. Per ogni punto passa una sola linea di campo che perciò si può dire univocamente definita.

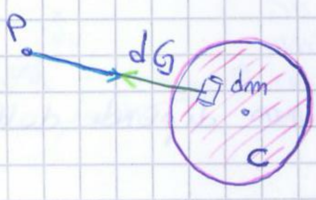


PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

$$\underline{E}_{ris} = \underline{E}_{terra} + \underline{E}_{luna}$$



$$\underline{G}(P) = \sum_{i=1}^{N} G_i = \sum_{i=1}^{N} -\gamma \frac{m_i}{r_i^2} \hat{u}_i$$

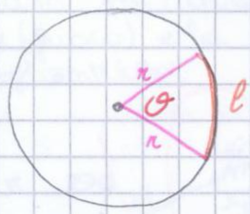


$$d\underline{G}(P) = -\gamma \frac{dm}{r^2} \hat{u} \qquad * \; dm = \rho \, dV$$

$$\underline{G}(P) = \int_C -\gamma \frac{dm}{r^2} u = \int_V -\gamma \rho \frac{dV}{r^2} \hat{u}$$

ANGOLO PIANO

L'angolo piano è la parte di piano delimitato da due rette incidenti in un punto.



$$\theta = \frac{l}{r}$$

Se l fosse tutta la circonferenza avrei

$$\theta_{TOT} = \frac{l}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

ANGOLO SOLIDO

L'angolo solido è la naturale estensione dell'angolo piano. Nel caso del piano, due rette incidenti in un punto determinano un angolo piano, così nello spazio tridimensionale si prende un fascio di rette che passano in un punto e determinano una regione nello spazio detta angolo solido

$$\Omega = \frac{S}{r^2}$$

Se l. fosse l'intera sfera avrei

$$\Omega = \frac{S}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

foto slide

Come si definisce un angolo solido che non giace su una sfera?
Considero un dS e lo proietto su una sfera di centro O e raggio r che sottende l'area

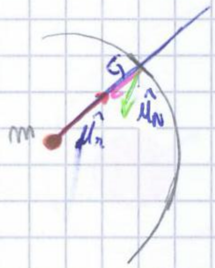
$$dS' = dS \cos\theta$$

L'elemento di angolo solido è per definizione

$$d\Omega = \frac{dS'}{dr^2} = \frac{dS}{dr^2}\cos\theta$$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI GAUSS

Considero il flusso attraverso una qualsiasi superficie generato da una massa posta all'interno.



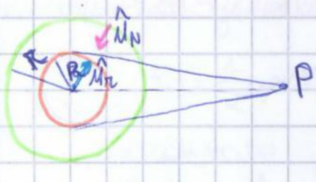
$$\phi_S(G) = \oint_S d\phi = \oint_S G \cdot \hat{u}_N \, dS = \oint_S |G| \cos\theta \, dS =$$

$$= \oint_S \gamma \frac{m}{r^2} \cos\theta \, dS = \gamma m \oint_S \frac{\cos\theta}{r^2} dS = \gamma m \int_S d\Omega = \gamma m \, 4\pi$$

Un campo generato da una massa all'esterno genera un flusso attraverso la superficie che è uguale in entrata e in uscita dalla superficie, per cui nel netto si ha un flusso nullo

APPLICAZIONE DEL TEOREMA: DISTRIBUZIONE SFERICA DI MASSA

Ho una massa m distribuita omogeneamente su una sfera di raggio R.



Su ogni punto esterno alla sfera su cui si distribuisce uniformemente la carica agiscono punti disposti simmetricamente, che generano un campo radiale, dipendente solo dalla distanza dal centro della sfera.

$$G = -G(r)\,\hat{u}_r$$

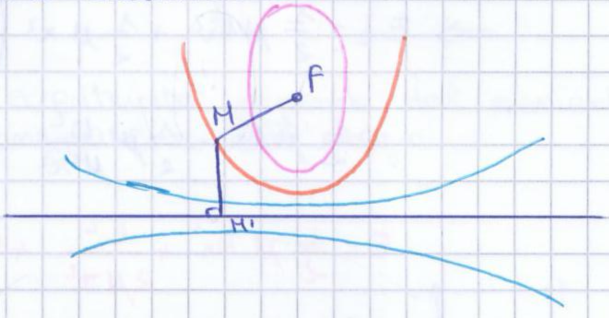
Per calcolare $G(r)$ usiamo il teorema di Gauss, con superficie di integrazione una sfera concentrica di raggio $r > R$.

RICHIAMO SULLE CONICHE

Si formano dall'intersezione di un doppio cono con un piano.
Si chiama conica il luogo dei punti del piano per i quali è costante il rapporto fra la distanza fra un punto (fuoco) e la distanza da una retta (direttrice). Tale rapporto si chiama eccentricità:

$$e = \frac{MF}{MM'}$$

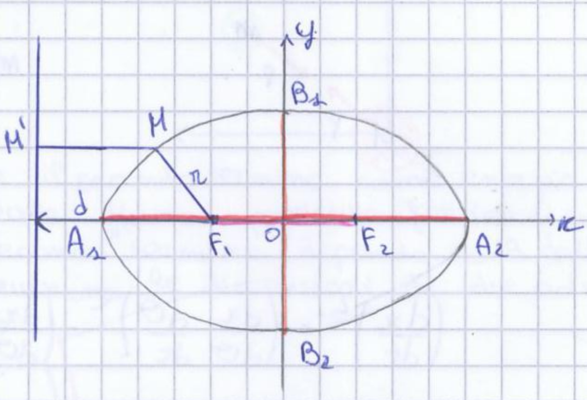
$e > 1$ iperbole
$e = 1$ parabola
$e < 1$ ellisse



$a = OA_2 = OA_1 \rightarrow$ semiasse maggiore
$b = OB_2 = OB_1 \rightarrow$ semiasse minore
F_1F_2 è l'asse focale
$e = OF_1 = OF_2 \rightarrow$ eccentricità

$$A = \pi a b$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



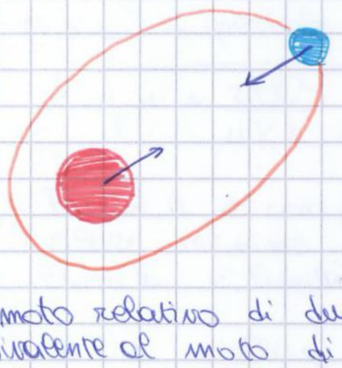
$$e = \frac{FM}{MM'} = \frac{r}{d - r\cos\theta}$$

Dalla definizione di eccentricità si ricava anche l'equazione di una conica in coordinate polari con l'origine in uno dei fuochi: $\frac{1}{r} = \frac{1}{ed} + \frac{1}{d}\cos\theta$
Per l'ellissi vale:

$$a = \frac{ed}{1-e^2} \qquad b = a\sqrt{1-e^2} \qquad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

centro del sistema e direttrice (distanza)

Problema dei due corpi e massa ridotta:



In un sistema inerziale
$$\underline{F} = m\underline{a} \qquad -\underline{F} = M\underline{a}_M$$

L'accelerazione relativa di m rispetto a M
$$\underline{a} = \underline{a}_m - \underline{a}_M = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\underline{F} = \frac{1}{\mu}\underline{F}$$

$$\mu = \frac{mM}{m+M} \qquad \text{MASSA RIDOTTA}$$

$$F = \mu a$$

Il moto relativo di due punti sottoposti alla loro interazione mutua è equivalente al moto di un punto con massa eguale alla massa ridotta e forza pari alla forza di interazione mutua.

PROBLEMA DEI DUE CORPI: LA TRAIETTORIA

Una massa m si muove in un piano sotto l'azione di un campo gravitazionale conservativo generato da una massa M avrò:

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 + E_p$$

In coordinate polari

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu K}{L^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu K^2}}\cos\theta\right)$$

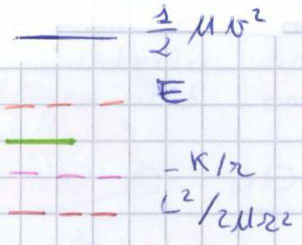
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{ed} + \frac{1}{d}\cos\theta = \frac{1}{ed}\left(1 + e\cos\theta\right)$$

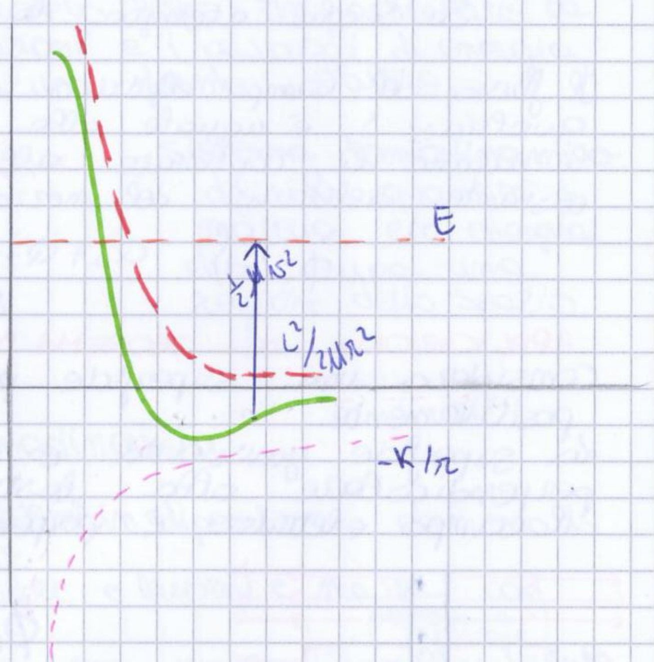
$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu K^2}}$$ l'eccentricità dipende dal momento angolare e dall'energia

ENERGIA

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}\mu \dot{r}^2}_{E_c \text{ radiale}} + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu r^2}}_{E_c \text{ azimutale}} - \underbrace{\frac{K}{r}}_{E_p}$$

Formalmente possiamo invece considerare il secondo termine come energia potenziale, aggiuntiva a quella gravitazionale di una particella fittizia di cui il primo termine è l'E_c totale, infatti il secondo termine dipende solo dalla posizione e non dalla velocità. Si diminuiscono le dimensioni da due ad una





Per $E>0$, r assume un valore minimo ma può assumere valori arbitrariamente grandi: l'orbita è aperta

$e > 1 \rightarrow$ iperbole

$$e = \sqrt{1 + \frac{2|E|L^2}{\mu K^2}} > 1$$

Per $E<0$, r è compreso tra un valore minimo e massimo: l'orbita è limitata o chiusa

$e < 1 \rightarrow$ ellisse $\qquad e = \sqrt{1 - \frac{2|E|L^2}{\mu K^2}} < 1$

CAMPO ELETTRICO	CAMPO GRAVITAZIONALE
• conservativo	• conservativo
• attrattivo/repulsivo	• attrattivo
• andamento prop. al quadrato della distanza	• andamento prop al quadrato della dist
• campo centrale $G = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{u}_r$	• campo centrale $G_{grav} = -\gamma\frac{Mm_g}{r^2}\hat{u}_r$
• vale Gauss	• vale Gauss
• vale il principio di sovrapposizione degli effetti	• vale il principio di sovrapposizione degli effetti
• genera una forza conservativa	• genera una forza conservativa

TERMODINAMICA

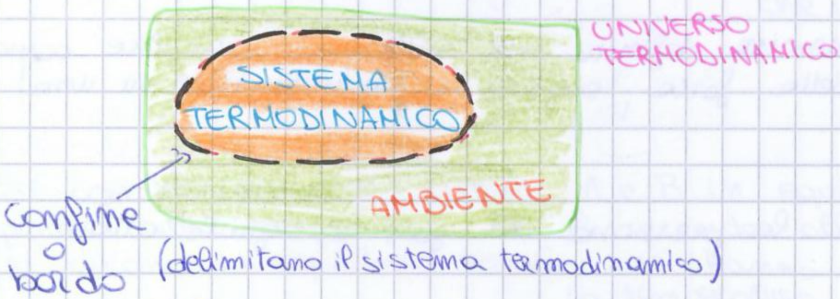
Quando abbiamo studiato in meccanica i sistemi di particelle abbiamo detto come si abbiano dei limiti nello studio di sistemi a molti corpi imposti dal numero dei gradi di libertà. Nei corpi rigidi i vincoli imposti dalla rigidità del corpo che impone una distanza fissata tra le particelle riduce a 6 i gradi di libertà del problema.

In un gas si ha il problema di dover descrivere il comportamento di un numero di particelle dell'ordine di 10^{23} (numero di Avogadro). Possibilità sono:

1) approccio statistico:
studio dei valori medi (teoria cinetica dei gas)
2) termodinamica classica:
studio di coordinate macroscopiche suggerite dall'esperienza e definite ad hoc (temperatura, pressione, volume, densità, ecc.)

Ricordiamo dalla meccanica il principio di conservazione dell'energia e la presenza di forze dissipative quali l'attrito.

Uno dei principali argomenti della termodinamica riguarda proprio il **bilancio energetico complessivo** di un processo fisico. In particolare la termodinamica studia le trasformazioni e i passaggi di energia da un sistema ad un altro e da una forma all'altra.



Sistema termodinamico: definita quantità di materia e/o energia che occupa una regione dello spazio

Classificazione dei sistemi termodinamici

Si possono distinguere vari tipi di sistemi, in dipendenza dal modo di scambiare energia con l'esterno:
sistemi aperti: scambiano energia (calore e lavoro) e massa con l'ambiente. (pentola in ebollizione)
sistemi chiusi: scambiano energia ma non massa con l'ambiente (pentola a pressione)
sistemi isolati: non scambiano né energia né massa con l'ambiente
L'universo è quindi per definizione un sistema isolato, non essendoci un ambiente esterno di riferimento con cui scambiare massa o energia.

I bordi dei sistemi termodinamici, e quindi i sistemi stessi, si possono classificare nel modo seguente:
- sulla base dello scambio di calore in: sistemi adiabatici se non consentono lo scambio di calore, sistemi diatermici se invece lo consentono.
- sulla base dello scambio di lavoro in: bordi rigidi se non consentono lo scambio di lavoro, bordi flessibili se lo consentono.
- sulla base dello scambio di massa in: bordi permeabili se consentono il passaggio di ogni specie chimica, bordi semipermeabili se consentono il passaggio di alcune specie chimiche, bordi impermeabili se invece non consentono il passaggio di alcuna specie chimica.

EQUAZIONE DI STATO

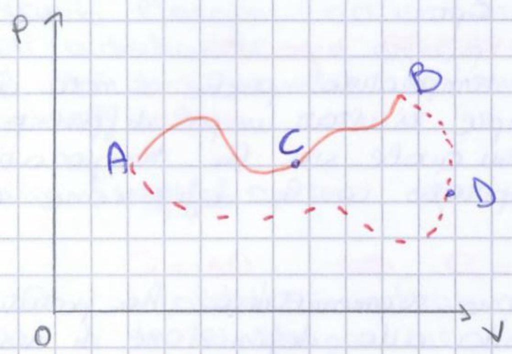
In uno stato di equilibrio esiste in generale una precisa relazione fra le coordinate termodinamiche che si esprime sotto forma di eq. di stato.

$f(p, T, V) = 0$ forma implicita

$$\left.\begin{aligned} p &= p(V,T) \\ V &= V(p,T) \\ T &= T(p,V) \end{aligned}\right] \text{forma esplicita}$$

TRASFORMAZIONE TERMODINAMICA

È un processo tramite il quale un sistema termodinamico passa da uno stato di equilibrio ad un altro. Nel caso in cui due o tutte le variabili termodinamiche di un sistema si modifichino (il variare di solo una d'esse è impossibile in quanto sono tutte interconnesse da una eq. di stato) siamo in presenza di una trasformazione termodinamica, che porta il sistema verso un altro punto di equilibrio.
Lo stato iniziale e finale di una trasformazione sono due stati di equilibrio. Gli stati intermedi non è detto che lo siano.



RAPPRESENTAZIONE DI UNA TRASFORMAZIONE TERMODINAMICA (CLAPEYRON)

È durante la trasformazione che il sistema scambia energia

EQUILIBRIO TERMICO

Si considerino due sistemi A e B in equilibrio termodinamico, il primo alla temperatura T_A il secondo alla temperatura T_B. I sistemi si dicono in equilibrio termico se hanno la stessa temperatura.

$T_A = T_B$ La temperatura è l'indice dell'equilibrio termico fra due sistemi

Due sistemi che siano ciascuno in equilibrio termico con un terzo sistema sono in equilibrio termico fra loro.] PRINCIPIO ZERO DELLA TERMODINAMICA

Proprietà transitiva dell'equilibrio termico

→ se dopo un certo tempo gli oggetti raggiungono la stessa temperatura T_c le pareti sono diatermiche e i sistemi si dicono in contatto termico.
se dopo un certo tempo mantengono la temperatura iniziale non si ha equilibrio termico, le pareti e i sistemi si dicono adiabatiche

DEFINIZIONE EMPIRICA DI TEMPERATURA

L'associazione di un valore della temperatura ad ogni stato di equilibrio di un sistema termodinamico può essere fatta attraverso la seguente procedura:
si assume un sistema termodinamico di riferimento detto termometro descritto da una sola coordinata termodinamica z, detta caratteristica termometrica e si fissa arbitrariamente la funzione $\theta = \tau(z) = \alpha z$ detta funzione termometrica attraverso una procedura di taratura e graduazione del termometro

dell'acqua contenuta nel calorimetro, ricavando la variazione di energia interna derivante dall'azione meccanica del mulinello.

$$W = \eta \Delta T = \eta (T_B - T_A)$$

Il sistema termodinamico (l'acqua) passa da uno stato iniziale di equilibrio a temperatura T_A ad uno finale a temperatura T_B tramite quattro diversi processi, ma il lavoro meccanico è sempre lo stesso. Questo risultato ci porta a definire una funzione di stato che dipende solo dallo stato iniziale e finale e si chiama ENERGIA INTERNA

$$W = \eta (T_B - T_A) = -U_B + U_A = -\Delta U$$

L'energia interna dipende solo dalle coordinate termodinamiche del sistema. Se il sistema fornisce lavoro all'esterno il lavoro è assunto positivo e pertanto l'energia interna diminuisce, se invece il lavoro è fatto dall'esterno sul sistema l'energia interna aumenta

CALORE

Si può pensare di produrre lo stesso innalzamento di temperatura Δt avvicinando l'acqua ad un corpo più caldo, all'interno di un contenitore a pareti adiabatiche (e dunque non vi è altro scambio con l'ambiente esterno). C'è uno scambio di energia non grazie ad un lavoro meccanico ma grazie al calore.

Verificata l'uguaglianza sperimentale si può postulare:

$$Q = \Delta U \implies Q = -W$$

Dove Q è il calore scambiato, senza lavoro meccanico esterno, per far variare di Δt la temperatura della massa dell'acqua e W il lavoro che deve essere speso, in condizioni adiabatiche, per ottenere la stessa variazione di temperatura con un lavoro meccanico.

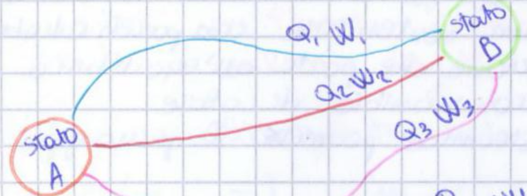
Calore e lavoro

Quando un sistema compie una trasformazione da uno stato A ad uno stato B, scambiando sia lavoro W che calore Q con l'ambiente, si osserva sperimentalmente che la quantità Q-W è la stessa qualunque sia la trasformazione che congiunge lo stato iniziale e quello finale, mentre singolarmente Q e W dipendono dalla trasformazione che congiunge i due stati.

PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

$$Q - W = U_B - U_A = \Delta U$$

→ È un principio di conservazione dell'energia dove si aggiunge all'energia meccanica (lavoro) anche lo scambio di energia termica (calore).

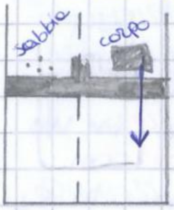


ΔQ e W sono energie che fluiscono, non sono proprie del sistema.
ΔU fa parte del sistema.

$$Q_1 - W_1 = Q_2 - W_2 = Q_3 - W_3 = U_B - U_A$$

TRASFORMAZIONI REVERSIBILI e IRREVERSIBILI

Gli stati intermedi di una trasformazione termodinamica possono essere di equilibrio o non di equilibrio.
Una forza finita non equilibrata fa passare il sistema attraverso stati di non equilibrio. Una trasformazione si dice quasi-statica se le forze esterne che agiscono sul sistema subiscono solo un cambiamento infinitesimo in modo che la forza non equilibrata sia infinitesima. Quando non ho istante per istante equilibrio termodinamico non posso avere il passaggio fra stati di equilibrio e quindi ho una trasformazione irreversibile. Durante una trasformazione quasi-statica, ad ogni istante il sistema si trova infinitamente prossimo ad uno stato di equilibrio termodinamico. In questa situazione ideale lo stato di un sistema può essere descritto mediante le sue coordinate termodinamiche.



Ho un contenitore chiuso su tre pareti e aperto su una dove è presente un pistone. Se appoggio un corpo di massa M sul pistone esso precipita e la reazione è irreversibile. Se però aggiungo una massa M di sabbia granulo per granulo esso sarà reversibile perché istante per istante il sistema sarà in equilibrio.

La condizione di quasi-staticità non è sufficiente a garantire la reversibilità di una trasformazione (devo aggiungere che non ci siano forze dissipative).
Una trasformazione reversibile può essere interrotta in qualsiasi degli stati intermedi e ripresa, si può anche invertire il senso della trasformazione.

Una trasformazione è detta reversibile se essa avviene attraverso stati di equilibrio e in assenza di forze dissipative.
Una trasformazione è detta irreversibile qualora non si svolga secondo le modalità precedenti, ossia passi attraverso stati di non equilibrio o avvenga in presenza di forze dissipative oppure si verifichino, durante il suo svolgimento entrambe queste reazioni.

CALORIMETRIA

Due corpi che si trovino a diversa temperatura sono posti in un recipiente adiabatico, per cui non vi è scambio di calore con l'esterno. Non viene compiuto lavoro sui due corpi, pertanto l'energia interna complessiva del sistema non varia. Però lo stato termodinamico di ognuno dei due corpi varia perché dopo un certo tempo la loro temperatura cambia e raggiungono una temperatura di equilibrio.

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$$
$$\Delta U_1 = -\Delta U_2$$
$$Q_1 = -Q_2$$

Il calore scambiato fra i due corpi può essere misurato e si osserva una proporzionalità fra il calore scambiato, la massa del corpo stesso e la sua variazione di temperatura.

$$Q = mc(T_f - T_i)$$

⊛ $mc = C$

dove c è il calore specifico: il calore specifico è il calore che occorre scambiare con l'unità di massa di una data sostanza alla temperatura T, per farne innalzare la temperatura di un grado Kelvin.

Si ha uguaglianza tra calore ceduto e assorbito:

$$m_1 c_1 (T_{eq} - T_1) = -m_2 c_2 (T_{eq} - T_2)$$

$$T_{eq}(m_1 c_1 + m_2 c_2) = m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2$$

$$T_{eq} = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

quantità ben definita, λ. Risulta quindi che il calore specifico richiesto per il cambiamento di stato di una massa m di una sostanza pura è:

$$Q = \lambda m$$

TRASMISSIONE DEL CALORE

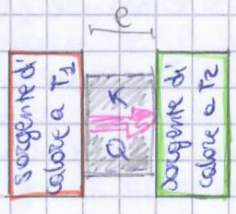
Lo scambio di calore tra sistemi avviene tramite meccanismi di interazione a livello microscopico eventualmente accompagnati da trasporto di materia o tramite emissione-assorbimento di radiazione elettromagnetica.
In generale, quindi, possiamo distinguere tre meccanismi di trasmissione distinti:

- CONDUZIONE senza movimento macroscopico di materia
- CONVEZIONE movimento di masse fluide
- IRRAGGIAMENTO onde elettromagnetiche

Questi operano sempre in presenza di una differenza di temperature tra sistemi

TRASMISSIONE DEL CALORE PER CONDUZIONE ATTRAVERSO UNA LASTRA

Una lastra di area A e spessore ℓ, viene posta in contatto con due sorgenti di calore a temperature T_1 e T_2, $T_1 > T_2$. Il calore dQ viene trasferito lungo la lastra, nel tempo infinitesimo dt.

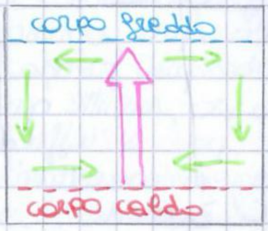


Calore trasmesso per unità di tempo:

$$P_C = \frac{dQ}{dt} = K \cdot A \cdot \frac{T_1 - T_2}{\ell}$$ LEGGE DI FOURIER

Dove K è la conducibilità termica del materiale.
La conduzione è legata alla mobilità degli elettroni di conduzione.

TRASMISSIONE DEL CALORE PER CONVEZIONE



La convezione è un tipo di trasporto (di materia ed energia), assente nei solidi e trascurabile per i fluidi molto viscosi, causato da un gradiente di pressione e dalla forza di gravità e caratterizzato da **moti di circolazione interni al fluido**. Nel caso in cui il moto convettivo sia associato ad uno scambio termico, si parla di convezione termica. Il fenomeno della convezione termica si ha quando un fluido (come l'acqua o aria) entra in contatto con un corpo la cui temperatura è maggiore di quella del fluido stesso. Aumentando di temperatura per conduzione, il fluido a contatto con l'oggetto si espande e diminuisce di densità, e a causa della spinta di Archimede sale essendo meno denso del fluido che lo circonda che è più freddo, generando così moti convettivi, in cui il fluido caldo sale verso l'alto e quello freddo scende verso il basso.

IRRAGGIAMENTO

Irraggiamento termico: emissione di energia termica emessa dai corpi sotto forma di onde elettromagnetiche (radiazioni termiche) a causa della loro temperatura. Tutti i corpi a temperatura maggiore di 0K emettono energia termica sotto forma di onde elettromagnetiche. A differenza della conduzione e della convezione, la trasmissione del calore per irraggiamento non richiede la presenza di un mezzo materiale, ma può avvenire

GAS

GAS IDEALI e GAS REALI

Un gas ideale è un modello ideale di gas per cui sono verificate le tre leggi fisiche dette di Boyle-Mariotte, prima legge di Gay-Lussac (o legge di Charles), seconda legge di Gay-Lussac.

Un gas ideale deve possedere queste proprietà:
- le molecole sono puntiformi
- interagiscono fra di loro e con le pareti del recipiente mediante urti perfettamente elastici (ovvero non vi è dispersione di energia durante gli urti)
- non esistono forze di interazione a distanza tra le molecole del gas: le molecole si dicono non interagenti
- le molecole del gas sono identiche fra loro e indistinguibili.

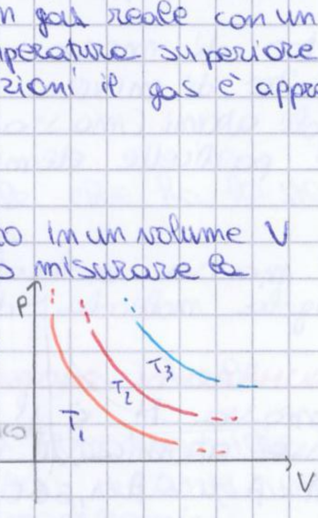
In conseguenza di ciò:
- il gas non può essere liquefatto per sola compressione
- il calore specifico è costante, mentre nei gas reali è funzione della temperatura.

Relazione fra gas ideali e reali

Sperimentalmente si trova che a densità sufficientemente basse tutti i gas, indipendentemente dalla loro composizione chimica, tendono a mostrare una certa relazione semplice fra le variabili termodinamiche P, V e T. La bassa densità (pressioni basse) garantisce una buona approssimazione di una bassa interazione intermolecolare e il fatto che le molecole possano essere considerate tutte approssimativamente uguali. Per avere una buona approssimazione di un gas reale con un gas ideale si richiede inoltre che il gas abbia una temperatura superiore a quella di liquefazione. Si dice che in queste condizioni il gas è approssimabile con un gas ideale.

LEGGE DI BOYLE

Data una massa M di un gas qualsiasi contenuto in un volume V in uno stato di equilibrio termodinamico, possiamo misurare la pressione P e la temperatura T. Mantenendo costante la temperatura e facendo variare pressione e volume si ottiene sperimentalmente la legge di Boyle.

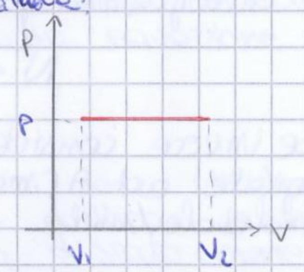


$pV = \text{costante}$ se è costante equilibrio termodinamico

PRIMA LEGGE DI GAY-LUSSAC (O LEGGE DI CHARLES)

Consideriamo ora una trasformazione isobara (pressione costante). Si verifica che il volume varia linearmente con la temperatura.

$$V = V_0(1 + \alpha t)$$

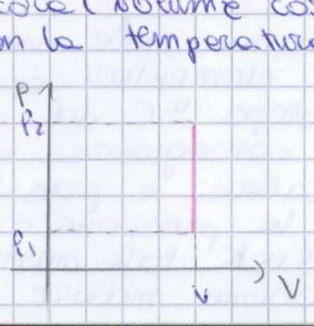


La temperatura è espressa in Celsius, V_0 è il volume occupato dal gas a $t = 0\,°C$ e α è una costante che varia poco al variare del tipo di gas ed è detta coefficiente di dilatazione termica.

SECONDA LEGGE DI GAY-LUSSAC

Se si considera ora una trasformazione isocora (volume costante). Si verifica che la pressione varia linearmente con la temperatura.

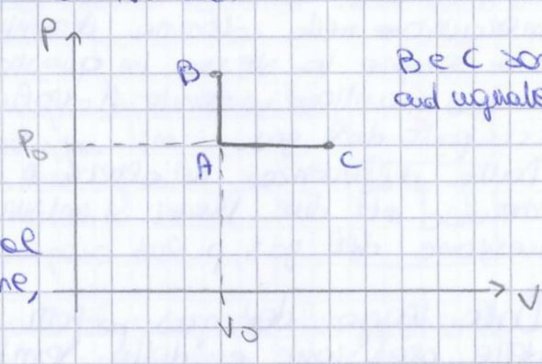
$$p = p_0(1 + t\beta)$$



Legge universale dei gas perfetti

Dalla legge di Boyle, Gay-Lussac e Avogadro è possibile ricavare un'unica legge che le comprende tutte: l'equazione di stato dei gas ideali.

Si considerino n moli di gas alla pressione atmosferica p_0 e alla temperatura $T_0 = 273.15\,K$. Occupano un volume pari a $V_0 = nV_m$ (avogadro). Mantenendo costante il volume e portando la temperatura al valore T, la pressione si porta al valore:



$$p_T = p_0\,\alpha T$$

moltiplicando per V_0

$$p_T V_0 = p_0 V_0\,\alpha T$$

Oppure possiamo portare la temperatura al valore T mantenendo costante la pressione, il volume si porta al valore

$$V_T = V_0\,\alpha T$$

moltiplicando per p_0

$$p_0 V_T = V_0 p_0\,\alpha T$$

Per un altro stato di equilibrio generico (p, V) a temperatura T il prodotto PV per la legge di Boyle

$$p_T V_0 = p_0 V_T = pV$$

quindi

$$pV = p_0 V_0\,\alpha T = n\,p_0 (V_m\,\alpha) T$$

Il prodotto $p_0 V_m \alpha$ è una costante universale che ha lo stesso valore per tutti i gas (contenente dei gas ideali.

$$R = p_0 V_m \alpha = 8.314\,J/mol\cdot K$$

E dunque si ottiene l'equazione di stato di un gas ideale

$$PV = nRT$$ → lega le tre variabili termodinamiche in un punto fissato e non durante una trasformazione termodinamica.

Definiamo dunque gas ideale un sistema le cui coordinate termodinamiche p, V, T in uno stato di equilibrio obbediscono alla equazione

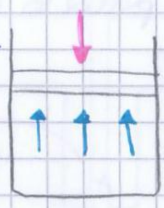
$$pV = nRT$$

Questo mostra che in un gas ideale in equilibrio sono incidenti solo due variabili, in quanto la terza si ricava dall'eq. di stato. Ricordando che $N/N_A = n$ si può scrivere l'eq. di stato come

$$pV = nRT = \frac{N}{N_A} RT = N K_B T$$

$$K_B = \frac{R}{N_A} = 1{,}38\cdot 10^{-23}\,J/K$$ COSTANTE DI BOLTZMANN

Si hanno scambi di energia fra il sistema e l'ambiente mediante il lavoro termodinamico quando vi sono dei cambiamenti macroscopici del sistema da un punto di vista meccanico: ad esempio
1. Innalzamento di un peso, compressione di una molla.
2. abbassamento di un peso, decompressione di una molla.
Si dice che il lavoro è compiuto dal sistema sull'ambiente e si prende come segno quello positivo, se al contrario quindi dall'ambiente sul sistema si prende il segno negativo.



Consideriamo un recipiente con un coperchio mobile. Supponiamo che inizialmente il sistema sia in equilibrio e quindi la pressione del gas sia uguale a quella esterna, che in generale sarà la somma della pressione atmosferica più quella dovuta al peso del coperchio.
Aumentando la temperatura del gas si osserva un aumento della pressione del gas che porta ad una espansione, fino ad un nuovo equilibrio. In questo processo si passa da uno stato di equilibrio ad un altro, per cui la differenza di energia cinetica è nulla ed il lavoro complessivo è nullo: si hanno contributi negativi dovuti alla forza peso del coperchio e alla pressione esterna, e contributi positivi dovuti alle forze di pressione del gas. Si dice dunque che il gas lavora contro le forze esterne.

Per uno spostamento infinitesimo $d\underline{r}$ verso l'alto il gas fa un lavoro elementare dW tale che:

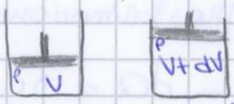
$$dW + \underline{F}^{(e)} \cdot d\underline{r} = 0$$

$$\Rightarrow \quad dW = -\underline{F}^{(e)} \cdot d\underline{r} = p_e A \, dh = p_e \, dV$$

dove dV è la variazione (positiva) di volume del gas e p_e è la pressione risultante sulla superficie S dovuta a tutte le forze esterne

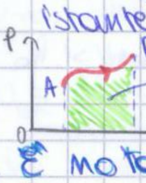
Dunque, quando un gas subisce una trasformazione avviene uno scambio di lavoro che in termini infinitesimi si può scrivere in generale come:

$$dW = p_e \, dV$$



$$W = \int_A^B p_e \, dV$$ → valido per una trasformazione finita tra due punti A e B.

La funzione $p_e(V)$ però si conosce solo in alcuni casi:
1. La trasformazione è reversibile e pertanto si può calcolare l'integrale, dato che la pressione è determinata istante per istante in ogni stato intermedio, $p_e = p_{gas} = p$



W = l'area sottesa

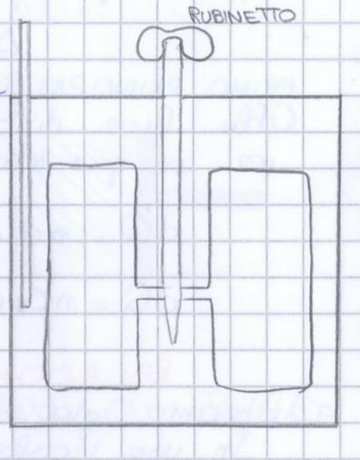
$$W = \int_A^B p_e \, dV = \int_A^B p \, dV$$

2. È noto la pressione esterna, che per esempio è costante ($p_e = p_{amb}$), allora anche se la trasformazione non è reversibile il lavoro si calcola come:

$$W = p_{amb}(V_B - V_A)$$

Dato che la variazione di temperatura è la stessa nelle due trasformazioni e che l'energia interna è una funzione solo della temperatura si ha $Q_p > Q_V$, cioè il calore che bisogna cedere a una mole di gas per fare aumentare la sua temperatura di 1K è maggiore se la trasformazione avviene a pressione costante che non se avviene a volume costante, perchè a pressione costante il gas compie anche lavoro.

ENERGIA INTERNA DEL GAS IDEALE



La dipendenza dell'energia interna dalle coordinate termodinamiche risulta dall'analisi dell'esperimento di Joule sull'espansione libera di un gas ideale. Contenitore a due camere di volume V separate da un rubinetto (R). Il gas inizialmente si trova nella camera di sinistra mentre in quella di destra c'è il vuoto. Le pareti del contenitore sono diatermiche, e il tutto è contenuto in un contenitore adiabatico. Aprendo il rubinetto si osserva che il gas si espande nella camera di destra ma la temperatura del sistema si mantiene costante (espansione adiabatica irreversibile). Essendo le pareti adiabatiche vuol dire che il sistema non scambia calore con l'esterno ($Q=0$). Inoltre per quanto riguarda il lavoro

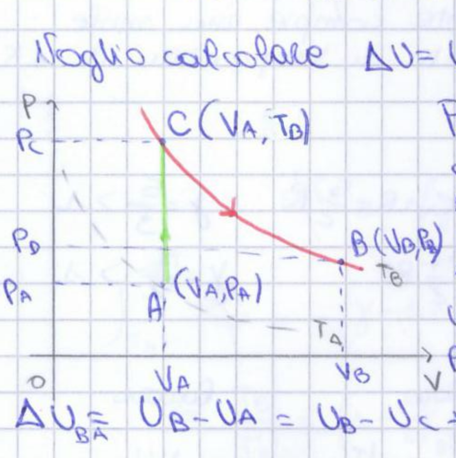
$W = \int_A^B p\,dV = p_{ext}\,\Delta V$ ma per il gas la p_{ext} è il vuoto, per cui $W=0$

	stato iniziale	stato finale	
Pressione	P_0	$P_0/2$	→ lo trovo da $PV=nRT$ sapendo volume e temperatura finali
Volume	V_0	$2V_0$	→ perchè si espande nell'altro contenitore
Temperatura	T_0	T_0	→ lo vedo guardando il termometro

È ISOTERMA, ADIABATICA ed IRREVERSIBILE

ΔU sarà funzione solo della temperatura in quanto è l'unica ad essersi mantenuta costante.

Voglio calcolare $\Delta U = U_B - U_A$.



Poichè l'energia interna è una variabile di stato e dunque dipende solo dagli estremi di integrazione, ma non dal tipo di trasformazione che faccio, posso congiungere gli stati di equilibrio A e B tramite una trasformazione isocora reversibile ed una trasformazione isoterma passando per il punto C.

$$\Delta U_{BA} = U_B - U_A = U_B - U_C + U_C - U_A = \Delta U_{BC} + \Delta U_{CA}$$

Poichè però C e B sono alla stessa temperatura trovandosi su una isoterma $U_C = U_B$ per cui $\Delta U_{BC} = 0$. Lungo il tratto BC si ha una isocora (lavoro nullo). Il primo principio della termodinamica ci porta a dire che:

$$\Delta U_{BA} = \Delta U_{CA} = Q_{CA} = n c_V (T_C - T_A) = n c_V (T_B - T_A)$$

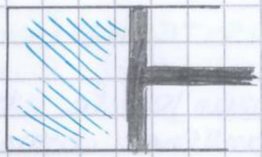
$$U(T) = n c_V \Delta T + \text{costante}$$ → è definita a meno di una costante

STUDIO DI ALCUNE TRASFORMAZIONI

Trasformazioni termodinamiche notevoli:
- adiabatiche
- isoterme
- isocore
- isobare

ADIABATICHE (qualsiasi)

Contenitore a pareti adiabatiche con parete mobile - scambio solo di lavoro fra sistema e ambiente



$$W_{AB} = -\Delta U = -m\,c_V\,(T_B - T_A) = \frac{1}{\gamma - 1}(p_A V_A - p_B V_B)$$

$$c_p - c_V = R \qquad pV = mRT$$

Se si ha una espansione $W_{AB} > 0$ $\quad \Delta U < 0 \quad T_B < T_A$

Se si ha una compressione $W_{AB} < 0$ $\quad \Delta U > 0 \quad T_B > T_A$

ADIABATICHE (reversibili)

$$dU + dW = m c_V\, dT + p\, dV = dQ = 0$$

Siccome tutti gli stati intermedi infinitesimi sono di equilibrio posso utilizzare l'equazione di stato $pV = mRT$. Che gli stati siano sempre in equilibrio lo sappiamo dal fatto che è una trasformazione reversibile. $p = \frac{mRT}{V}$

$$m c_V\, dT + \frac{mRT}{V}\, dV = 0$$

$$\frac{\cancel{m} c_V\, dT}{T} = -\cancel{m}R\cancel{T}\,\frac{dV}{V} \qquad R = c_p - c_V$$

$$\cancel{c_V}\frac{dT}{T} = -\underbrace{\frac{(c_p - c_V)}{c_V}}_{\frac{c_p}{c_V} - 1 = \gamma - 1}\frac{dV}{V}$$

$$\frac{dT}{T} = -(\gamma - 1)\frac{dV}{V}$$

$$\int_{T_A}^{T_B}\frac{dT}{T} = -(\gamma - 1)\int_{V_A}^{V_B}\frac{dV}{V}$$

$$\ln\frac{T_B}{T_A} = (1-\gamma)\ln\frac{V_B}{V_A}$$

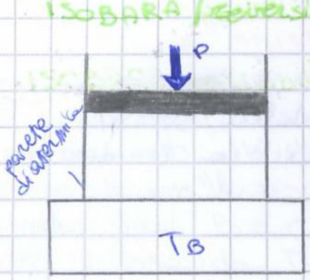
$$\frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{1-\gamma} \Rightarrow \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_B}{T_A}$$

$$T_A V_A^{(\gamma-1)} = T_B V_B^{(\gamma-1)} \Rightarrow T V^{(\gamma-1)} = cost$$

$$Q_{BC} = n c_p (T_B - T_A) \qquad \Delta U = n c_V (T_B - T_A)$$

Se si cede calore al gas, il suo volume e la sua temperatura aumentano, e il gas compie lavoro, mentre se si assorbe calore dal gas subisce lavoro.
Una trasformazione isobara si ottiene mettendo il gas a temperatura T_A in contatto termico con una sorgente a temperatura T_B: la trasformazione è irreversibile, in quanto non c'è equilibrio termico fra sistema e ambiente.

ISOBARA (reversibile)



Per ottenere una trasformazione isobara reversibile bisogna mettere a contatto il sistema con sorgenti infinitesimamente più calde del sistema ed attendere l'equilibrio termico e passare ad una sorgente infinitesima successiva.

RIASSUMENDO

$W \rightarrow$ $U_B > U_A$, $T_B > T_A$, $V_B < V_A$, $p_B > p_A$ — compressione adiab.

$U_B < U_A$, $T_B < T_A$, $V_B > V_A$, $p_B < p_A$ $\rightarrow W$ — espansione adiab.

$Q \rightarrow$ $U_A = U_B$, $T_A = T_B$, $p_A V_A = p_B V_B$ $\rightarrow W$ — espansione isoterma

$W \rightarrow$ $U_A = U_B$, $T_A = T_B$, $p_A V_A = p_B V_B$ $\rightarrow Q$ — compressione isoterma

$Q \rightarrow$ $U_B > U_A$, $T_B > T_A$, $p_A/T_A = p_B/T_B$ — riscaldamento isocoro

$U_B < U_A$, $T_B < T_A$, $p_A/T_A = p_B/T_B$ $\rightarrow Q$ — raffreddamento isocoro

$Q \rightarrow$ $U_B > U_A$, $T_B > T_A$, $V_A/T_A = V_B/T_B$ $\rightarrow W$ — espansione isobara

$W \rightarrow$ $U_B < U_A$, $T_B < T_A$, $V_A/T_A = V_B/T_B$ $\rightarrow Q$ — compressione isobara

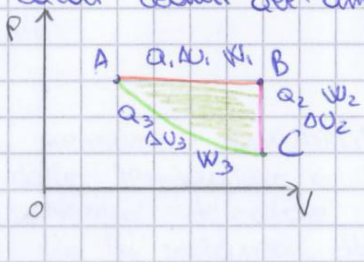
TRASFORMAZIONI CICLICHE

Trasformazione ciclica è una trasformazione in cui lo stato finale coincide con quello iniziale. In questo caso il primo principio prevede che il lavoro scambiato sia uguale al calore scambiato.

$$Q = W$$

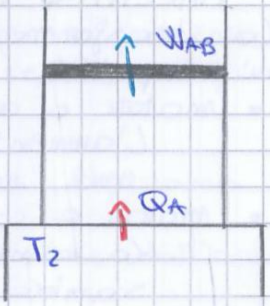
Se durante il ciclo viene prodotto lavoro ($W > 0$) assorbendo calore dall'esterno (da un numero opportuno di sorgenti) il ciclo si dice termico.
Se durante il ciclo viene richiesto lavoro ($W < 0$) estraendo calore dal sistema il ciclo si dice frigorifero.
Il calore può essere scritto, separando il contributo di tutti i calori assorbiti dal sistema ($Q_A > 0$) e tutti i calori ceduti all'ambiente dal sistema ($Q_C < 0$)

$$Q = Q_A + Q_C = Q_A - |Q_C|$$



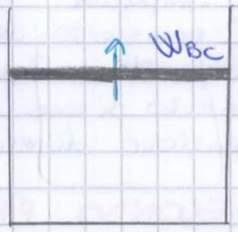
$$\Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3 = 0$$

ESPANSIONE ISOTERMA REVERSIBILE AB



è una successione di stati di equilibrio in cui a seguito di una diminuzione dp della pressione esterna si è un aumento dV del volume e una diminuzione dT della temperatura, che però viene riportata alla temperatura T_2 dalla sorgente che cede una quantità di calore dQ al sistema in modo da mantenere T costante. Il risultato finale della trasformazione finita fra A e B è un assorbimento di calore del sistema pari a: $Q_A = mRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} = W_{AB}$

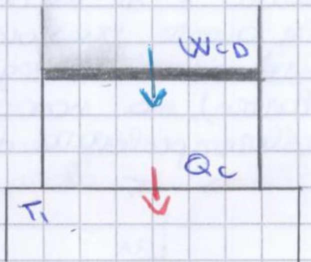
ESPANSIONE ADIABATICA REVERSIBILE BC



è una successione di stati di equilibrio in cui a seguito di una diminuzione della pressione dp esterna si è un aumento dV del volume e una diminuzione dT della temperatura. Il risultato finale della trasformazione finita fra B e C è un abbassamento della temperatura del sistema da T_2 a T_1.

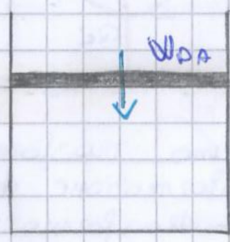
$T_2 V_B^{(\gamma-1)} = T_1 V_C^{(\gamma-1)}$ Il lavoro: $W_{BC} = -\Delta U = m c_V (T_2 - T_1)$

COMPRESSIONE ISOTERMA REVERSIBILE CD



Analogo al caso AB, dove però si ha un aumento dp della pressione esterna e conseguente diminuzione dV del volume e aumento di dT della temperatura, che porta il sistema a cedere una quantità di calore dQ questa volta alla sorgente T_1. Il risultato finale della trasformazione finita fra C e D è una cessione di calore del sistema all'ambiente pari a: $Q_C = mRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C} = W_{CD}$

COMPRESSIONE ADIABATICA REVERSIBILE DA



Analogo al caso BC, dove però si ha un aumento dp della pressione esterna e conseguente diminuzione dV del volume e aumento di dT della temperatura. Il risultato della trasformazione finita tra B e C è un innalzamento della temperatura del sistema da T_1 a T_2.

$T_1 V_D^{\gamma-1} = T_C V_A^{\gamma-1}$ Il lavoro $W_{DA} = -\Delta U = m c_V (T_1 - T_2) = -W_{BC}$

Sommando tutti i contributi otteniamo:

$$Q = Q_A + Q_C \underbrace{=}_{\text{vale perché la trasformazione è ciclica}} W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = W_{AB} + W_{CD}$$

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{T_1 \ln(V_D/V_C)}{T_2 \ln(V_B/V_A)} = 1 - \frac{T_1 \ln(V_C/V_D)}{T_2 \ln(V_A/V_B)}$$

Dividendo membro a membro le relazioni relative alle adiabatiche si ha:

$$\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{(\gamma-1)} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{(\gamma-1)} \implies \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

Da cui:

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}}$$

→ non compare nessuna caratteristica del gas. Dipende solo dalle temperature a cui avvengono gli scambi isotermici di calore. Questo è vero qualsiasi sia la sostanza che descrive il ciclo.

OSSERVAZIONI

Il secondo principio non viola il primo principio: il primo principio nega la possibilità di creare o distruggere energia, il secondo nega di usare l'energia in un modo particolare.

Se il secondo principio non fosse vero:

- sarebbe possibile condurre una motonave attraverso l'oceano estraendo calore dall'oceano
- fare funzionare una centrale elettrica estraendo calore dall'aria circostante
- ...

MOTO PERPETUO

Con moto perpetuo si intende un regime di funzionamento di una macchina in cui viene creata energia in contraddizione con i principi della termodinamica. Secondo la definizione di Max Planck:

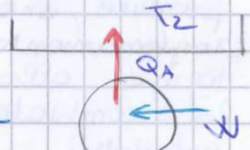
> "È impossibile ottenere il moto perpetuo per via meccanica, termica, chimica, o qualsiasi altro metodo, ossia è impossibile costruire un motore che lavori continuamente e produca dal nulla lavoro o energia cinetica".

Moto perpetuo di prima specie: è il funzionamento continuo di una macchina che crea la sua energia, violando così il primo principio.
Moto perpetuo di seconda specie: è il funzionamento di una macchina che sfrutta l'energia interna di un solo serbatoio, violando così il secondo principio.

CICLO MONOTERMO

Un processo ciclico che si svolge utilizzando una sola sorgente si dice monotermo. Il secondo principio pone delle grosse limitazioni a questo tipo di processo dovute all'enunciato di Kelvin-Planck.

$$Q \leq 0 \qquad W \leq 0$$



Pertanto l'unico ciclo monotermo possibile è quello per cui viene fornito lavoro ad una macchina che lo trasforma completamente in calore, che viene poi ceduto ad una sorgente termica.

Se il ciclo monotermo è reversibile: i segni delle disuguaglianze dovrebbero poter essere invertiti ($Q \geq 0$ $W \geq 0$), ma questo implicherebbe una violazione del secondo principio nel caso $Q > 0$ e $W > 0$. Nel caso di un monociclo monotermo reversibile si ha pertanto:

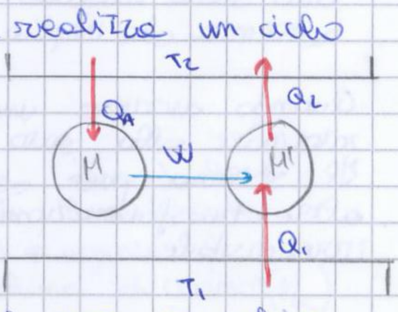
$$Q = 0 \qquad W = 0$$

Equivalenza degli enunciati di Kelvin-Plank e Clausius

L'equivalenza può essere dimostrata facendo vedere che la violazione di un enunciato implica la violazione dell'altro e viceversa. Dunque:

- se l'enunciato di Kelvin-Plank è falso, l'enunciato di Clausius è falso (1)
- se l'enunciato di Clausius è falso, l'enunciato di Kelvin-Plank è falso (2)

(1) Supponiamo che esista una macchina M che realizza un ciclo monotermo producendo il lavoro W assorbendo un calore Q_A da un'unica sorgente a temperatura T_2. Consideriamo anche un'altra macchina reversibile M' che produce il lavoro W' assorbendo il calore $Q_2 > 0$ a temperatura T_2 e cede il calore $Q_1 < 0$ a un serbatoio a temperatura $T_1 < T_2$. Poiché questa seconda macchina è reversibile è possibile invertire il senso di percorrenza del ciclo e realizzare una macchina

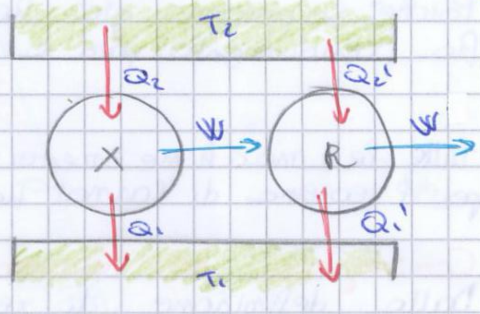


TEOREMA DI CARNOT

Può essere considerato come l'enunciazione matematica del secondo principio della termodinamica, in quanto fissa il massimo rendimento di una macchina termica.

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Si considerino le due macchine reversibili X ed R che lavorano utilizzando le stesse sorgenti di calore alle temperature T_1 e $T_2 > T_1$ dimensionate in modo da produrre lo stesso lavoro. Non facciamo ipotesi sulla macchina X mentre consideriamo reversibile la macchina R. Supponiamo che:



$$\eta_X > \eta_R$$

$$\frac{W}{Q_2} > \frac{W}{Q_2'} \Rightarrow \frac{1}{Q_2} > \frac{1}{Q_2'}$$

$$\Rightarrow Q_2' > Q_2$$

Poi dal primo principio si ha che

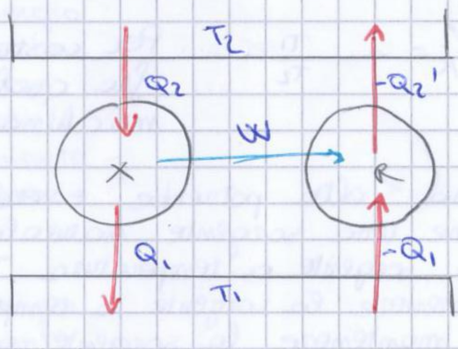
$$Q_2 + Q_1 = W$$
$$Q_2' + Q_1' = W$$

$$\Rightarrow Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2'$$

$$Q_1 - Q_1' = Q_2' - Q_2 > 0 \quad \Rightarrow Q_1 - Q_1' > 0 \quad , Q_2 - Q_2' < 0$$

Mettiamo in contatto le due macchine, invertendo la macchina reversibile e facendola lavorare come una macchina frigorifera. Il calore prodotto dalla macchina X viene utilizzato completamente per far funzionare la macchina frigorifera. Viene assorbito il calore $-Q_1'$ e ceduto $-Q_2'$.

Si ha:



$$\frac{W}{Q_2} > \frac{W}{Q_2'} \Rightarrow Q_2 < Q_2'$$

$$Q_2 - Q_2' < 0$$

Per cui

$$Q_1 - Q_1' = Q_2' - Q_2 > 0$$

Complessivamente la macchina assorbe il calore $Q = Q_1 - Q_1' > 0$ dalla sorgente a temperatura T_1, non c'è scambio di calore con l'esterno e viene ceduto calore $Q = Q_2' - Q_2 < 0$ alla sorgente a temperatura T_2, il che equivale a violare l'enunciato di Clausius. Questo implica che l'ipotesi da cui siamo partiti era sbagliata e si ha:

$$\eta_X \leq \eta_R$$

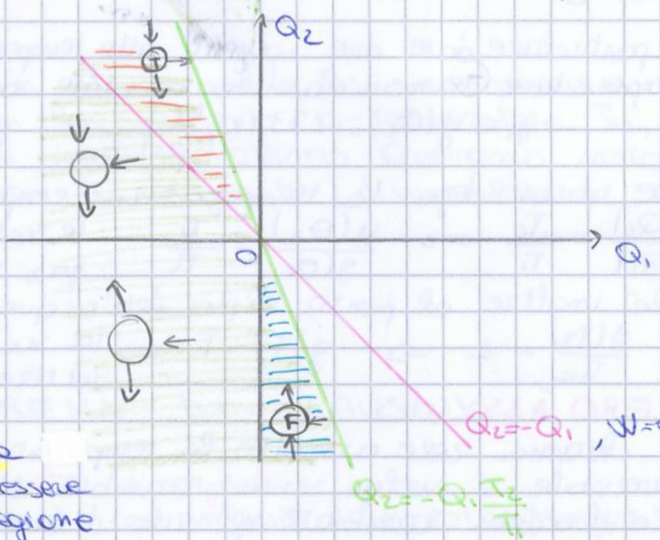
$$\eta_X^{max} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \rightarrow$$ questo rendimento si ha quando la macchina è reversibile. Il rendimento lo chiamiamo η_R ed è uguale al rendimento della macchina di carnot (η_C)
$\Rightarrow \eta_R = \eta_C$

Dal primo principio invece si ha che:

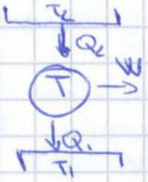
$$Q_1 + Q_2 = W$$

Queste due equazioni rappresentate in un piano (Q_1, Q_2) individuano varie aree, alcune permesse (al di sotto della retta di equazione $Q_2 = -Q_1\, T_2/T_1$) e altre con determinate caratteristiche sul segno di lavoro e calore (in particolare la bisettrice di equazione $Q_2 = -Q_1$ separa il semipiano a destra della retta in cui $W > 0$ da quello a sinistra in cui si ha $W < 0$).

Il diagramma di Raveau descrive le aree trovate e le macchine termiche consentite per quei valori dei calori e delle temperature.

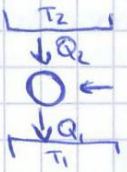


$$\frac{Q_2}{T_2} = -\frac{Q_1}{T_1} \qquad Q_2 = -Q_1 \frac{T_2}{T_1}$$

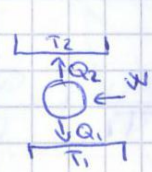


è una macchina termica che ci può essere solo in una certa regione sopra la bisettrice e sotto la retta $Q_2 = -Q_1 \frac{T_2}{T_1}$

è una macchina frigorifera che può esserci solo sotto la retta $Q_2 = -Q_1 \frac{T_2}{T_1}$ e nel piano della parte positiva delle ascisse.



ha lavoro negativo, fornisco energia alla macchina per andare da una sorgente a temperatura maggiore ad una a temperatura minore. Questo avviene già naturalmente dunque non è una macchina interessante



Non ho bisogno di lavoro per fornire calore a due sorgenti. Basta una terza sorgente a temperatura maggiore e diventa un procedimento naturale

TEMPERATURA TERMOMETRICA ASSOLUTA

Il teorema di Carnot permette di definire una scala (assoluta) delle temperature detta "temperatura termodinamica assoluta" che è indipendente dalle caratteristiche di un particolare sistema termodinamico (termometro). Si assume come "caratteristica termometrica" il calore scambiato da una macchina reversibile tra la sorgente la cui temperatura si vuole definire ed una sorgente di temperatura convenzionalmente prefissata (ad es. alla temperatura del punto triplo dell'acqua, fissata per convenzione uguale a 273,16 K). Detta θ una generica temperatura empirica si definisce la temperatura termodinamica assoluta: