NUMERO: 1300 ANNO: 2014

A P P U N T I

STUDENTE: Carnazzo

MATERIA: Meccanica dei Fluidi + Temi + Eserc., Prof.Boano_Butera

MECCANICA DEI FLUIDI — Prof. BUTERA - BOANO

1,5 pti/cad — 5 pti

Esame: Scritto: 10 domande chiuse + 1 esercizio ← max 20 pti
Orale

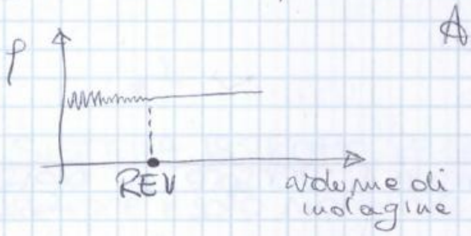
Ricevimento su appuntamento.
Testo di riferimento: Idraulica Citrini - Noseda
Casa editrice ambrosiana.

Prof.ssa Butera

Fluido: capace di subire variazione di forma con forze modeste.
La deformazione che subisce è permanente.

Fluido { Liquido, Gas } si distinguono per il comportamento che hanno per le variazioni di volume.

Lo studio dei fluidi lo faremo senza studiare il livello molecolare, lo considereremo come un mezzo continuo.

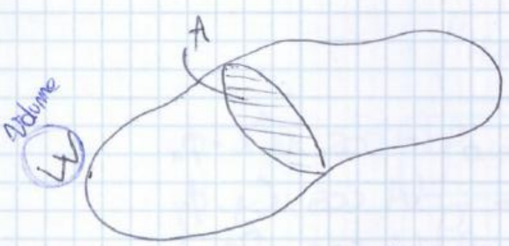


Ampliando il volume d'indagine la densità diventa costante, ben definita. Il volume più piccolo che noi studieremo è il REV.

REV: volume rappresentativo elementare

STATO DI SFORZO che agisce sul corpo continuo.

Sul fluido possono agire le:
forze di massa e le forze di superficie. Le prime sono proporzionali alla massa, le seconde sono applicate al contorno del corpo. Vediamo come si distribuiscono le forze di superficie.
Ho un volume di fluido W, lo divido in due con una superf. A



Sulla superficie della parte a dx dovrò avere lo stesso sistema di forze $\vec{\Pi}$ della superficie a sx affinché tutto sia in equilibrio.

$$\frac{d\vec{\Pi}}{dA} = \vec{\Phi}_n$$

Φ è uno sforzo che agisce sulla superficie elementare A. Non sappiamo come è orientato la sua orientazione dipende dallo stato di sollecitazione. Φ_n avrà componente normale e tangenziale.

forza infinitesima che agisce su dA:

$$\boxed{d\vec{\Pi}} = \vec{\Phi}_n \, dA = \text{spinta elementare}$$

Φ_n non significa che agisce solo lungo n, ma significa che agisce in un modo qualsiasi sulla sup. elementare che ha come normale n.

$$\boxed{\vec{\Pi}} = \int d\vec{\Pi} = \int_A \vec{\Phi}_n \, dA$$

sistema di forze

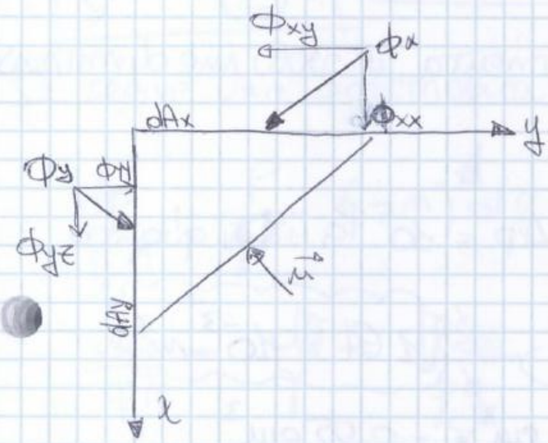
Lo sforzo $\vec{\Phi}_n$ si può scomporre lungo x, y e z.

$$\vec{\Phi}_n = \vec{\Phi}_x \cos\hat{nx} + \vec{\Phi}_y \cos\hat{ny} + \vec{\Phi}_z \cos\hat{nz}$$

componente lungo x : $\Phi_{nx} = \overset{\sigma_x}{\Phi_{xx}} \cos\hat{nx} + \overset{\tau_z}{\Phi_{yx}} \cos\hat{ny} + \overset{\tau_y}{\Phi_{zx}} \cos\hat{nz}$

" " y : $\Phi_{ny} = \overset{\tau_z}{\Phi_{xy}} \cos\hat{nx} + \overset{\sigma_y}{\Phi_{yy}} \cos\hat{ny} + \overset{\tau_x}{\Phi_{zy}} \cos\hat{nz}$

" " z : $\Phi_{nz} = \overset{\tau_y}{\Phi_{xz}} \cos\hat{nx} + \underset{\tau_x}{\Phi_{yz}} \cos\hat{ny} + \underset{\sigma_z}{\Phi_{zz}} \cos\hat{nz}$



Quindi in realtà le componenti di sforzo sono solo 6 perchè si dimostra che $\Phi_{xy} = \Phi_{yx}$, ecc.

SISTEMA ISOTROPO RELATIVAMENTE AGLI SFORZI: se lo sforzo è sempre e solo normale indipendentemente dalla orientazione della faccia. Se lo sforzo è costante è detto pressione.

$\vec{\Phi}_n = p\vec{n}$ ← ISOTROPO

PROPRIETÀ DEI FLUIDI

• Densità $\boxed{\rho = \frac{M}{V}} = \left[\frac{kg}{m^3}\right]$

$\boxed{\rho_{H_2O} = 1000\ kg/m^3}$ da ricordare a memoria

$\boxed{\rho_{aria} = 1,22\ kg/m^3}$

$\rho_{liquidi} \simeq$ costante

$\rho = \rho(p;\ \text{temperatura})$ eq. caratteristica del fluido.

• Peso specifico $\boxed{\gamma = \frac{Peso}{Volume}} = \left[\frac{N}{m^3}\right]$

Peso $= Mg \longrightarrow \boxed{\gamma = \rho \cdot g}$

$M = \rho W \qquad dM = 0$

$$d\rho W + \rho dW = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dW}{W}} \quad (2)$$

Unendo la 1 e la 2 ottengo:

$$\boxed{\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{\varepsilon}} \quad (4)$$

Se segue una politropica: $\frac{p}{\gamma^n} = cost$

$$\frac{dp}{\gamma^n} + \frac{p}{\gamma^{n+1}}(-n)\,d\gamma = 0 \longrightarrow dp = \frac{d\gamma}{\gamma}\,p\,n$$

$$\frac{dp}{pn} = \frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{d\rho g}{\rho g} = \boxed{\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{pn}} \quad (3)$$

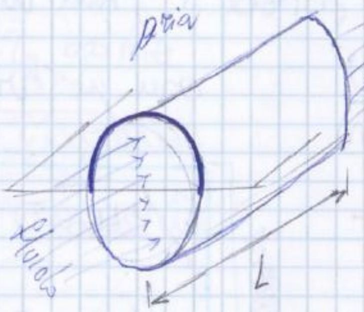
Unendo (3) e (4): $\boxed{\varepsilon = np}$ con p: pressione assoluta
n: esponente della politropica

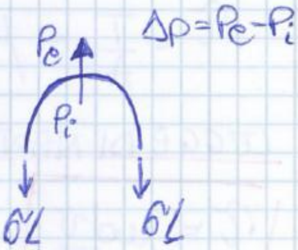
• Tensione superficiale

$F = \sigma L$

σ: tensione superficiale: forza di coesione con se stessa.

$\boxed{\sigma_{H_2O} = 0{,}072\ N/m}$ ricordare a memoria





R_1 ed R_2 sono i raggi di curvat. Per superf. sferica $R_1 = R_2 = R$

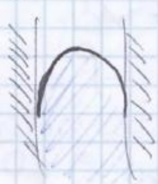
$$\boxed{\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}$$

da sapere

Bagna le pareti (acqua)

Vincolo (forze di coesione)

NON bagna le pareti (mercurio)



Per notare queste curvature il diametro dei ~~di~~ tubicini deve essere molto piccolo.

Lezione 06 Marzo

<u>Viscosità</u>

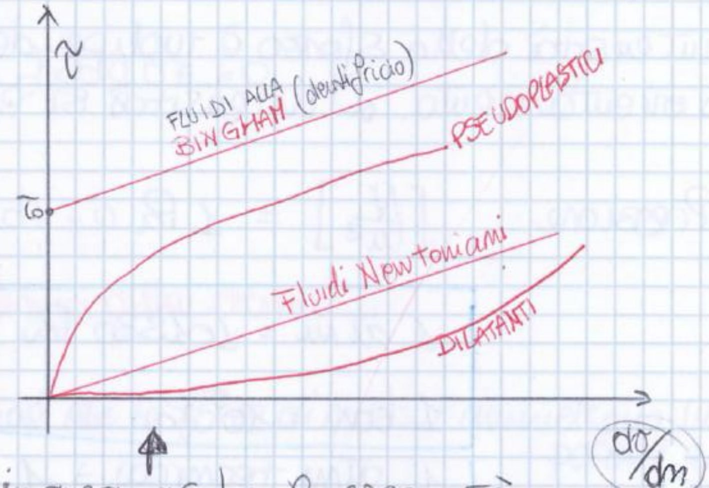
$$\tau = \mu \frac{dv}{dh}$$

↑ viscosità dinamica Kg/ms

$$\nu = \mu / \rho \quad [m^2/s]$$

Fluidi Newtoniani: viscosità costante, una retta che parte dall'origine → H_2O, Olio, gas.

Dilatanti: la viscosità aumenta all'aumentare della velocità di deformazione angolare.



in questo grafico la viscosità è il coeff. angolare della curva.

↓ velocità di deformazione angolare

Fluidi in quiete

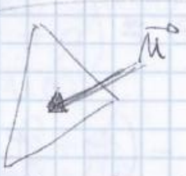
$$\tau = \mu \frac{dv}{dn}$$

per un fluido in quiete tutti gli sforzi tangenziali sono nulli, abbiamo solo sforzi normali

$$\left.\begin{array}{l} v=0 \\ \frac{dv}{dn}=0 \end{array}\right\} \tau=0$$

$$\begin{cases} \phi_{nx} = \sigma_x \cos\hat{nx} + \underbrace{\tau_z}_{=0} \cos\hat{ny} + \underbrace{\tau_y}_{=0} \cos\hat{nz} \\ \phi_{ny} = \underbrace{\tau_z}_{=0} \cos\hat{nx} + \sigma_y \cos\hat{ny} + \underbrace{\tau_x}_{=0} \cos\hat{nz} \\ \phi_{nz} = \underbrace{\tau_y}_{=0} \cos\hat{nx} + \underbrace{\tau_x}_{=0} \cos\hat{ny} + \sigma_z \cos\hat{nz} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_{nx} = \sigma_x \cos\hat{nx} \\ \phi_{ny} = \sigma_y \cos\hat{ny} \\ \phi_{nz} = \sigma_z \cos\hat{nz} \end{cases}$$



per il fatto di essere in quiete:

$$\vec{\phi}_n = \sigma_n \cdot \vec{n} \rightarrow \begin{cases} \phi_{nx} = \sigma_n \cos\hat{nx} \\ \phi_{ny} = \sigma_n \cos\hat{ny} \\ \phi_{nz} = \sigma_n \cos\hat{nz} \end{cases}$$

quindi:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_x \cos\hat{nx} = \sigma_n \cos\hat{nx} \\ \sigma_y \cos\hat{ny} = \sigma_n \cos\hat{ny} \\ \sigma_z \cos\hat{nz} = \sigma_n \cos\hat{nz} \end{array}\right| \rightarrow$$

semplificando e sommando i termini lungo le 3 direzioni:

$$-\frac{\partial p}{\partial y}\,dy\,dx\,dz\,\vec{j}-\frac{\partial p}{\partial z}\,dz\,dx\,dy\,\vec{k}-\frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy\,dz\,\vec{i}=0$$

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial p}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)dx\,dy\,dz=0$$

$$\rho\vec{F}\,dx\,dy\,dz-\text{grad}\,p\,dx\,dy\,dz=0$$

$$\boxed{\rho\vec{F}=\text{grad}\,p}$$ Equazione indefinita della statica

se $\vec{F}=\text{grad}\,U$ (ammettiamo cioè che le forze di massa ammettono un potenziale)

$\rho\,\text{grad}\,U=\text{grad}\,p$ $\qquad\rho=\rho(p,T)$

$\downarrow$

se la superficie è equipotenziale è anche isobarica (e viceversa)

x del campo gravitazionale: $\vec{F}=-g\vec{k}=-g\,\text{grad}\,z$ $\hookrightarrow$ poichè $\text{grad}\,z=\left(\underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{=0}\vec{i}+\underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}_{=0}\vec{j}+\underbrace{\frac{\partial z}{\partial z}}_{=1}\vec{k}\right)$

sostituisco: $\rho(-g\,\text{grad}\,z)=\text{grad}\,p$

$-\gamma\,\text{grad}\,z=\text{grad}\,p$

$-\text{grad}\,z=\text{grad}\,p/\gamma$ $\rightarrow$ integro $\rightarrow$ $-z=\frac{p}{\gamma}+C$

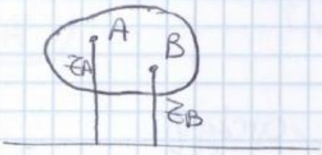
(z = posizione)

LEGGE DI STEVINO

$$\boxed{z+\frac{p}{\gamma}=\text{costante}}$$ Per un fluido incomprimibile

z = quota ; p/γ : altezza piezometrica

$z+p/\gamma$ = quota piezometrica



$$z_A+\frac{p_A}{\gamma}=z_B+\frac{p_B}{\gamma}$$

$$p_A=p_B+\gamma(z_B-z_A)$$

La quota piezometrica tra i due punti si mantiene costante.

Idrostatica: $\sigma_n = p \cdot \vec{n}$ → In idrostatica abbiamo solo sforzi normali. Lezione 10 Marzo

$$\rho \vec{F} = \operatorname{grad} p$$

Hp: fluido pesante ed incomprimibile

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost} \qquad (F = -g \operatorname{grad} z)$$

p assolute → sempre positive

0 — 101330 Pa → pass

p relative →

−101330 Pa — 0 → prel

In generale usiamo sempre $p_{rel} = p$, mentre la pass la indico con p^*

PIANO DEI CARICHI IDROSTATICI RELATIVO: piano su cui la prel = 0

PIANO DEI CARICHI IDROSTATICI ASSOLUTO: " " " pass = 0

Quanto vale la distanza in verticale tra i due piani?

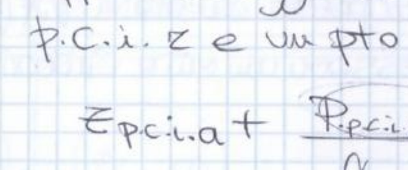
Applico la legge di stevin (usando p relative) tra un punto sul p.c.i.r e un pto sul p.c.i.a:

$$z_{pcia} + \frac{\underbrace{p_{pcia}}_{-101330\,Pa}}{\gamma} = z_{pcir} + \cancel{\frac{p_{pcir}}{\gamma}}_{=0}$$

$$z_{pcia} - z_{pcir} = \frac{101330}{\gamma} \quad \text{Distanza tra i piani idrostatici.}$$

per l'acqua → $\gamma_{H_2O} = 9806\ N/m^3$ → $z_{pcia} - z_{pcir} = 10{,}33\,m$

Conosco la posizione del pcir, quanto vale la pressione in un pto noto? Lo posso sapere se applico la legge di Stevin.



$$z_{pcir} + \cancel{\frac{p_{pcir}}{\gamma}}^{0} = z_A + \frac{p_A}{\gamma}$$

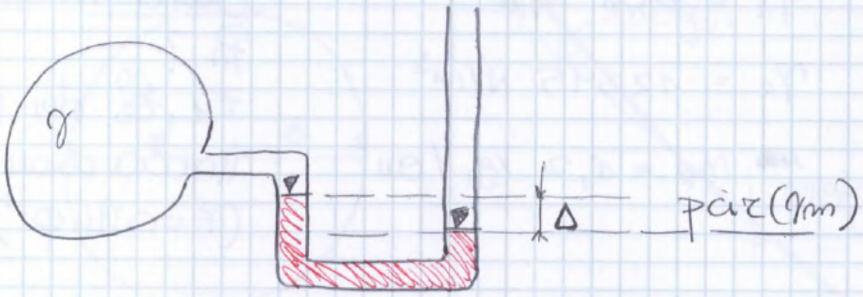
$$p_A = \gamma\,(z_{pcir} - z_A) = \gamma\, h_A$$

h_A → Affondamento del pto A dal pcir.

h_A può essere $\begin{cases} h > 0 & \text{se A è sotto i pcir.} \\ h < 0 & \text{se A è sopra pcir} \end{cases}$

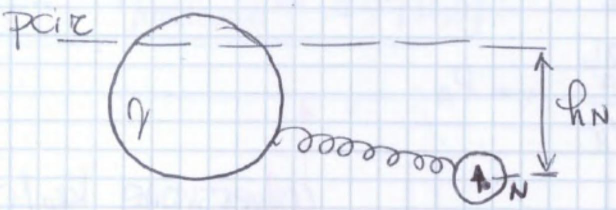
Non posso avere affondam. negativo rispetto al pcia!

Altro caso: Menisco a sx più alto di quello a dx.
La press nel recipiente contiene il fluido γ è negativa



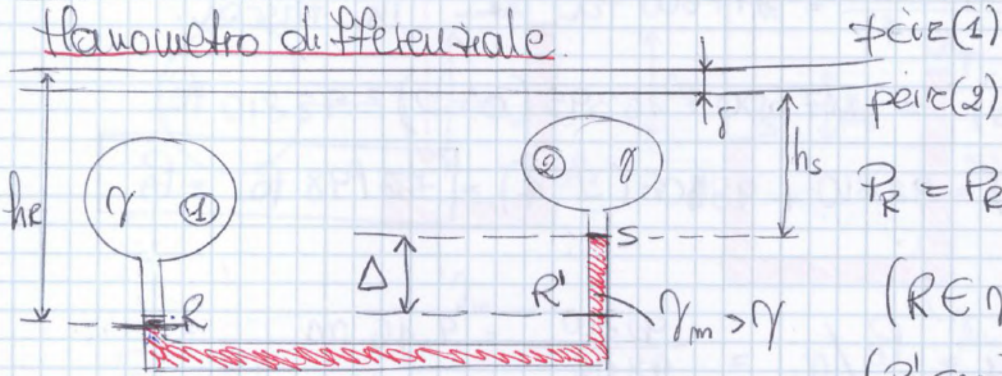
(Δ è negativo)

Manometro metallico: il valore della pressione che misura è la pressione rispetto al baricentro del quadrante del manometro metallico



$$p_N = h_N \cdot \gamma$$

Manometro differenziale



$$P_R = P_{R'}$$

$$(R \in \gamma) \rightarrow P_R = \gamma\, h_R$$

$$(R' \in \gamma_m) \rightarrow P_{R'} = P_S + \Delta \cdot \gamma_m$$

Δ: dislivello tra i due menischi = lettura manometrica

$$P_{R'} = P_S + \Delta \cdot \gamma_m$$

$$P_{R'} = \gamma\, h_S + \Delta \cdot \gamma_m$$

$$P_{R'} = \gamma\,(h_R - \delta - \Delta) + \Delta \cdot \gamma_m$$

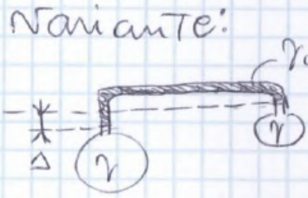
$$P_R = P_{R'}$$

$$\cancel{\gamma h_R} = \cancel{\gamma h_R} - \gamma\delta - \gamma\Delta + \Delta\gamma_m$$

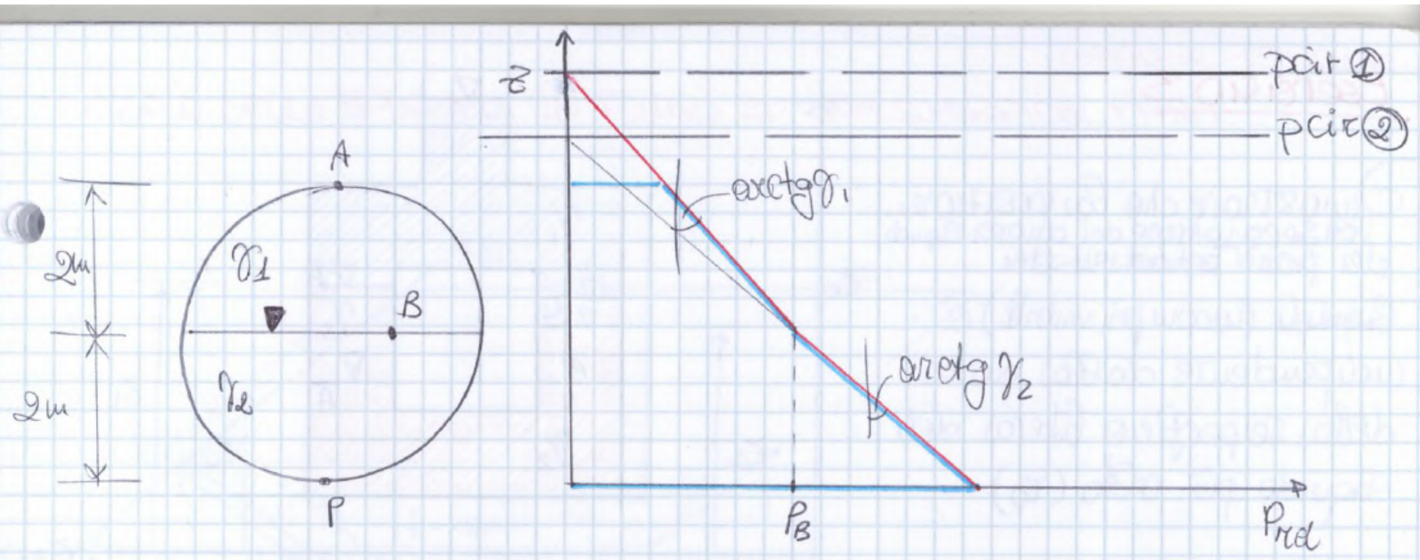
$$\delta = \frac{\Delta(\gamma_m - \gamma)}{\gamma}$$

se $\gamma_m > 2\gamma \rightarrow \delta = \Delta\ (>1)$

Variante:



$\gamma_m < \gamma$



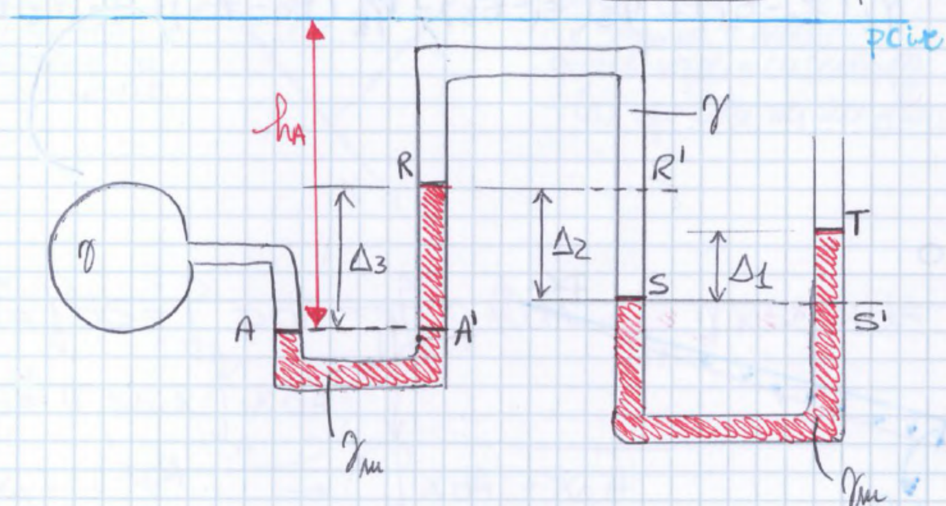
Esercizio 2 ricorda a memoria

$$\boxed{\text{RMK: } \gamma_{mercurio} \cong 13\,\gamma_{H_2O}}$$

Dati $\gamma = 9806\ N/m^3$; $\gamma_m = 133362\ N/m^3$

$\Delta_1 = 0{,}35\ m$; $\Delta_2 = 0{,}25\ m$; $\Delta_3 = 0{,}30\ m$

Determ la posizione del pcir.

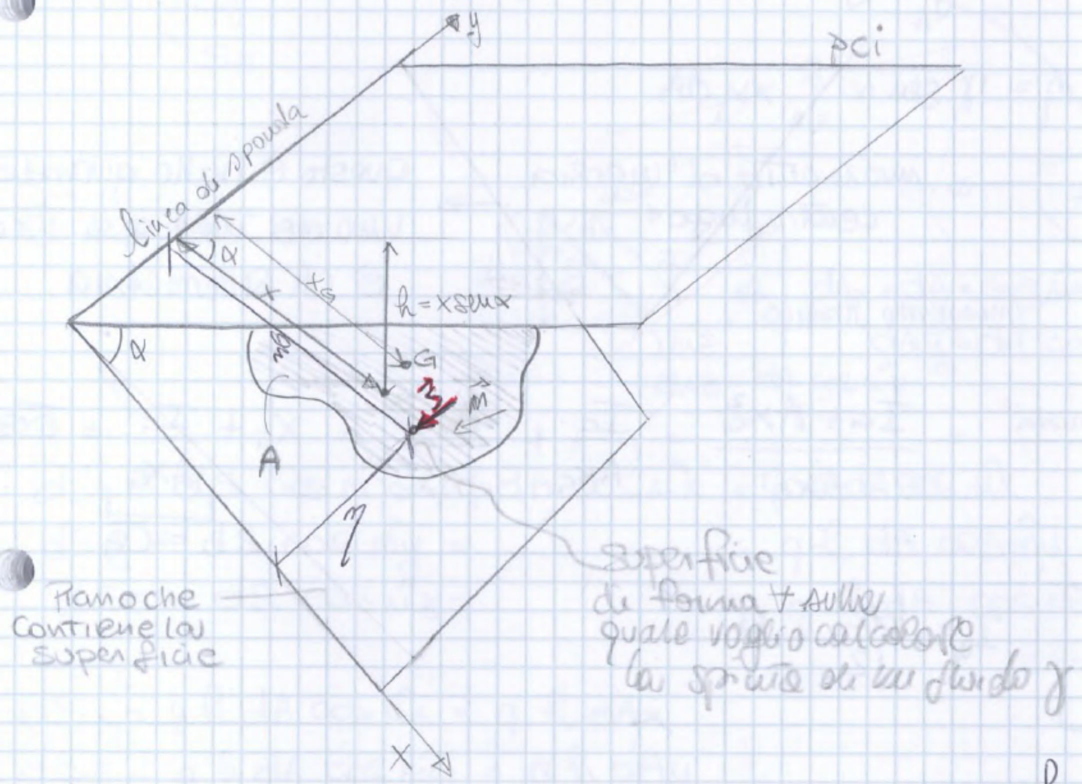


$P_A = \gamma\, h_A$

$$
\left.
\begin{aligned}
P_A &= P_{A'} \\
P_{A'} &= P_R + \Delta_3 \cdot \gamma_m \\
P_R &= P_{R'} \\
P_{R'} &= P_S - \Delta_2 \cdot \gamma \\
P_S &= P_{S'} \\
P_{S'} &= \underbrace{P_T}_{=0} + \Delta_1 \cdot \gamma_m
\end{aligned}
\right\}
\quad
\begin{aligned}
P_A &= \Delta_3 \gamma_m - \Delta_2 \gamma + \Delta_1 \gamma_m = \\
&= P_A = 133362(0{,}65) - 0{,}25 \cdot 9806 = \\
P_A = \gamma h_A &= 84233\ Pa
\end{aligned}
$$

$$h_A = \frac{84233\ Pa}{9806\ N/m^3} = 8{,}59\ m$$

CALCOLO DELLA SPINTA DI UN FLUIDO SU UNA SUPERFICIE PIANA.



$$\vec{S} = \int dS = \int_A p\,dA = \int_A \gamma h\,dA = \int_A \gamma x\,\text{sen}\alpha\,dA$$

La spinta $\vec{S}$ sarà orientata come la normale perché somma di sole spinte elementari normali.

$$S = \gamma\,\text{sen}\alpha \int_A x\,dA$$

$$x_G = \frac{\int x\,dA}{A} \rightarrow \int x\,dA = x_G A$$

$$S = \gamma\,\text{sen}\alpha \cdot x_G \cdot A = \gamma h_G A = p_G A$$

Adesso voglio determinare la posizione del punto di applicazione di $\vec{S}$.

(x) ξ e η sono le coordinate del punto $C = (\xi, \eta)$: CENTRO DI SPINTA

$$S\xi = \int dS\,x = \int_A p\,dA\,x = \int_A \gamma h x\,dA = \int_A \gamma x\,\text{sen}\alpha\,x\,dA$$

$$S\eta = \int dS\,y = \int_A p\,dA\,y = \int_A \gamma h y\,dA = \int_A \gamma x\,\text{sen}\alpha\,y\,dA$$

$$S\xi = \int_A \gamma\,\text{sen}\alpha\,x \cdot x \cdot dA$$

$$A\gamma h_G \xi = \gamma\,\text{sen}\alpha \int_A x^2\,dA$$

$$A\cancel{\gamma} x_G \cancel{\text{sen}\alpha}\,\xi = \cancel{\gamma}\,\cancel{\text{sen}\alpha} \int_A x^2\,dA \rightarrow \xi = \frac{\int_A x^2\,dA}{A x_G} = \frac{I_{\text{lin. sponda}}}{M}$$

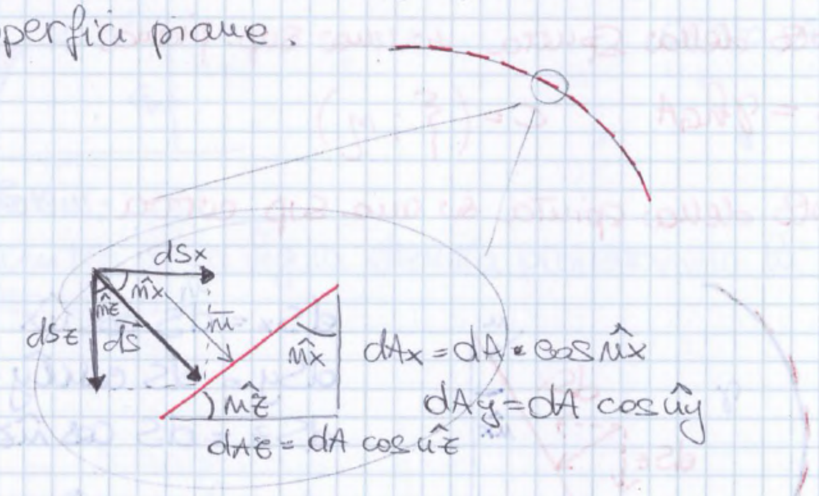
momento statico

Applicazione alle superfici curve: metodo delle componenti

Posso suddividere la superficie curva A in infinitesime superfici piane.

$\vec{S}$ — S_x, S_y, S_z

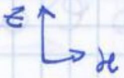
$d\vec{S} = p\, dA\, \vec{n}$



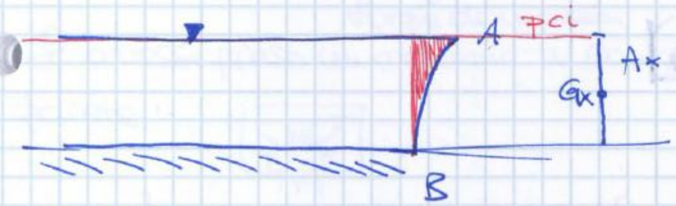
$$dS_x = dS \cos \hat{n}x = p\, dA \cos \hat{n}x = \gamma h\, dA \cos \hat{n}x$$
$$dS_y = dS \cos \hat{n}y = \dots = \gamma h\, dA \cos \hat{n}y$$
$$dS_z = dS \cos \hat{n}z = \dots = \gamma h\, dA \cos \hat{n}z$$

$$dS_x = \gamma h\, dA \cos \hat{n}x = \gamma h\, dA_x$$
$$dS_y = \gamma h\, dA \cos \hat{n}y = \gamma h\, dA_y$$
$$dS_z = \gamma h\, dA \cos \hat{n}z = \gamma h\, dA_z$$

Esempio 1



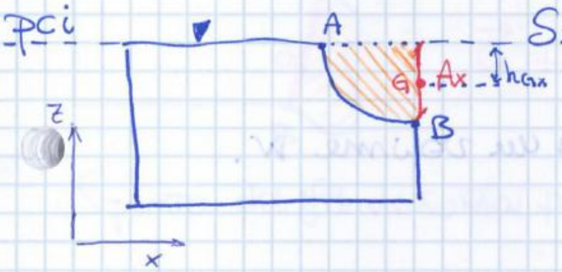
Calcolare la spinta sulla superfic. curva AB



$S_x = \gamma h_{G_x} A_x$ → baricentro della figura ottenuta proiettando la curva lungo x

$S_z = \gamma W$

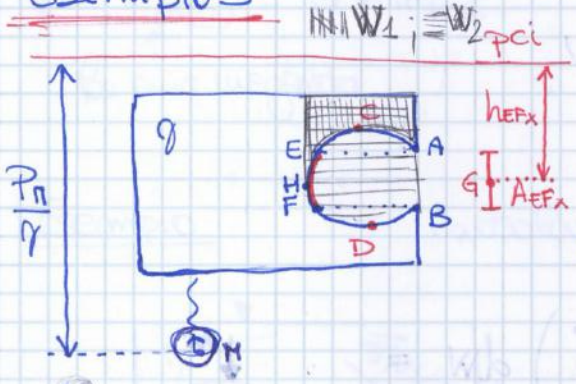
Esempio 2



$S_x = \gamma h_{G_x} A_x$

$S_z = \gamma W$ → volume compreso tra la superficie ed il piano dei carichi idrostatici

Esempio 3



$\mu = 1\ kgp/cm^2$

$P_M = \frac{9{,}806}{10^4}\ Pa = \gamma h_M \rightarrow h_M = \frac{P_M}{\gamma}$

$S_x = \underbrace{S_{xAC}}_{\text{sarà negativa}} + \underbrace{S_{xCD}}_{\text{positiva}} + \underbrace{S_{xDB}}_{\text{sarà negativa}}$

$|S_{xAC}| = |S_{xCE}|$ uguali in modulo, hanno verso opposto.

$|S_{xFD}| = |S_{xBD}|$

$S_{xAE} = 0$

$S_{xFB} = 0$ → $S_x = S_{xEF} = \gamma h_{EF_x} \cdot A_{EF_x}$

$S_z = \gamma(W_1 - W_2)$

Esempio 4

Spinta sul volume rosso?

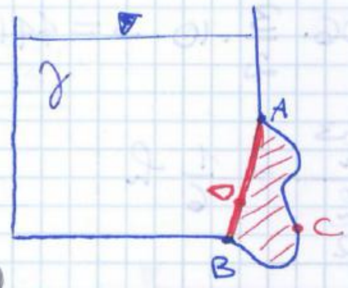
$S_x = 0$

perchè proiettando lungo x ho uguali proiezioni quindi da A a B parte dx e da A a B parte sx ho sforzi uguali e con segno opposto.

$\vec{G} = -\vec{\pi} \rightarrow \boxed{\underbrace{\vec{G}}_{\text{forze di massa}} + \vec{\pi} = 0}$ Equazione globale dell'equilibrio statico.

Se avessi preso un volume W con una superficie comune alla parete:

Esempio Calcolare la spinta sulla ~~...~~ superficie AB.



$\vec{G} + \vec{\pi} = 0$ ← rmk: questa eq. si applica ad un volume!

Chiudo AB con una superficie piana

$$\vec{G} + \vec{\pi}_{ACB} + \tilde{\pi}_{ADB} = 0$$

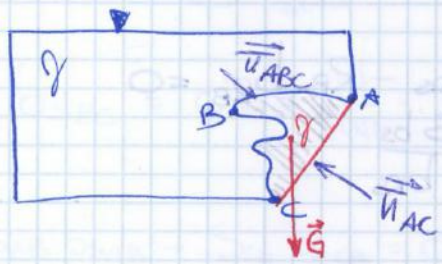
RMK: $\vec{\pi}$ sono spinte dall'esterno!!!

Spinta del fluido sulla parete = − Spinta parete sul fluido.

$\underbrace{-\vec{\pi}_{ACB}}_{\text{la mia incognita}} = \vec{G} + \vec{\pi}_{ADB}$ con $\vec{G} = -\gamma W \vec{k}$

$\vec{\pi}_{ADB} = A_{AB}\, \gamma\, h_{GAB}\, \vec{n}$

Esempio Calcola la spinta del fluido sulla parete ABC



$$\vec{G} + \vec{\pi} = 0$$

$$\vec{G} + \vec{\pi}_{ABC} + \vec{\pi}_{AC} = 0$$

$$\vec{\pi}_{ABC} = -\vec{G} - \vec{\pi}_{AC}$$

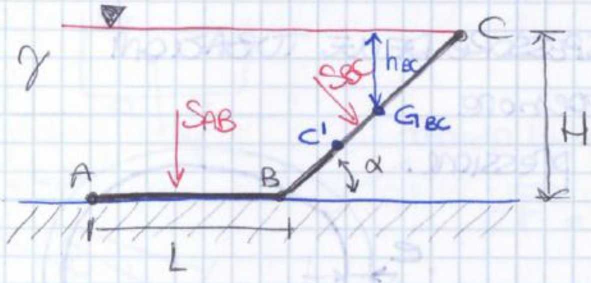
$$R_B = \frac{S\, b_s}{b_{RB}} = \frac{564825{,}6 \cdot \left(\frac{a}{2}+0{,}296\right)}{4} = \frac{648\,420}{2}\ N = 324210\ N$$

Momento necessario per aprire la paratoia $> S \cdot b_s = 564824{,}6\left(\frac{4}{2}+0{,}296\right) =$

$= \cancel{}\ 1296839{,}6\ Nm$

Il centro di spinta non cade ad $1/3$ dalla base perchè è il risultato di un andamento delle pressioni trapezio e non triangolare.

$\boxed{Es\ 3}$



B) $S_{AB}\, b_{S_{AB}} - S_{BC}\, b_{S_{BC}} = 0$

$S_{AB} = \gamma\, h_{AB}\, L \cdot 1$

assumo profondità unitaria

$b_{S_{AB}} = \frac{L}{2}$

questo affondam. si calcola lungo la verticale

$$S_{BC} = \gamma\, h_{G_{BC}} \frac{H}{\operatorname{sen}\alpha} \cdot 1 = \gamma \frac{H}{2} \cdot \frac{H}{\operatorname{sen}\alpha} = \gamma \frac{H^2}{2 \operatorname{sen}\alpha}$$

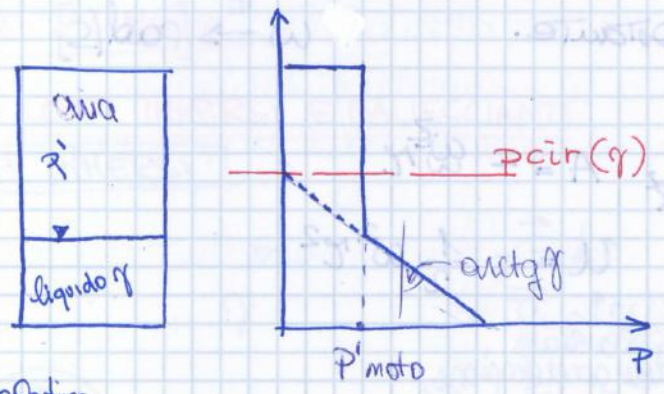
$b_{S_{BC}} = C'B = \frac{H}{\operatorname{sen}\alpha} \cdot \frac{1}{3} \leftarrow$ ad $\frac{1}{3}$ dalla base perchè è andam. delle pressioni è triangolare

$S_{AB}\, b_{S_{AB}} - S_{CB}\, b_{S_{CB}} = 0$

$$\gamma H L \cdot \frac{L}{2} - \gamma \frac{H^2}{2\operatorname{sen}\alpha} \cdot \frac{H}{\operatorname{sen}\alpha} \cdot \frac{1}{3}$$

Trovo $L \longrightarrow L = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{H}{\operatorname{sen}\alpha}$

Per quale α tale lunghezza L è minima? $\alpha = 90° \longrightarrow L_{min} = \frac{H}{\sqrt{3}}$



Per l'aria si può assumere pressione costante (è come se il pci dei gas fosse all'infinito).

p': press. relativa

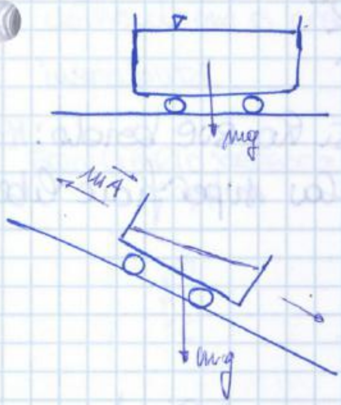
$S = pA$

$S_x = pA_x \quad S_y = pA_y \quad S_z = pA_z$

per l'aria → per i gas posso calcolare la spinta anche lungo z proiettando su un piano

FLUIDO IN QUIETE CONTENUTO IN UN RECIPIENTE CON ACCELERAZIONE A

Se $a=0$ (moto rett. uniforme) vale tutto ciò che abbiamo studiato fino ad ora.



Fluido in quiete e recipiente che si muove

$\rho \vec{F} = \text{grad}\, p$ ← vale sempre

In questo caso invece sul fluido non agisce solo la forza peso, ma anche $m\vec{A}$.

$\vec{A}$: accelerazione del recipiente.

$\vec{F} = -g\,\text{grad}z - \vec{A}$ (mentre prima avevamo detto $F = -g\,\text{grad}z$ e così eravamo arrivati alla legge di Stevin)

$\vec{A} = \text{grad}U$ → A ammette un potenziale

$\vec{F} = -g\,\text{grad}z - \text{grad}U$

$\rho(-g\,\text{grad}z - \text{grad}U) = \text{grad}\,p$

$$\text{grad}z + \frac{\rho}{\rho g}\text{grad}U + \frac{\text{grad}p}{\gamma} = 0$$

$$\text{grad}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{U}{g}\right) = 0$$

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{U}{g} = \text{cost} \qquad z + \frac{U}{g} = \text{cost} \xrightarrow{\text{se}} \text{pressione costante}$$

Nota che se $\vec{A}=0 \rightarrow U=0 \rightarrow z=\text{cost}$, pressione costante, che è ciò che ci dice Stevin.

Lezione 24 Marzo

CORPI IMMERSI E GALLEGGIANTI

CORPI IMMERSI

$\vec{G} \downarrow$

$\vec{\pi} = \gamma W \uparrow$

$G \equiv C$

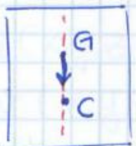
se $|G| = |\pi|$ il corpo è in equilibrio.

se $G > \pi \rightarrow$ affonda

se $G < \pi \rightarrow$ corpo sale in superficie fino a galleggiare fino a ridurre la spinta.

Se il baricentro coincide con il centro di spinta, siamo in condizioni di equilibrio alla rotazione. Se baricentro e centro di spinta non coincidono si creano piccoli momenti che generano rotazioni di instabilità.

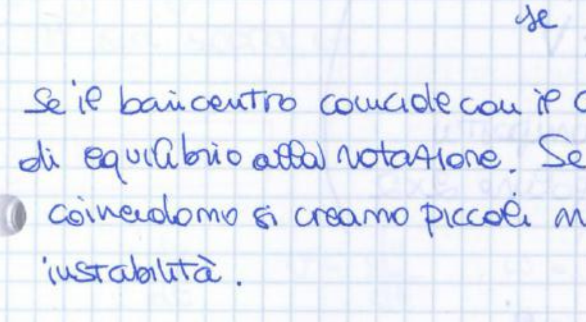
EQUILIBRIO, nessuna coppia



Generazione di coppie destabilizzante, perché forza-peso e spinta non sono più sulla stessa retta d'azione.

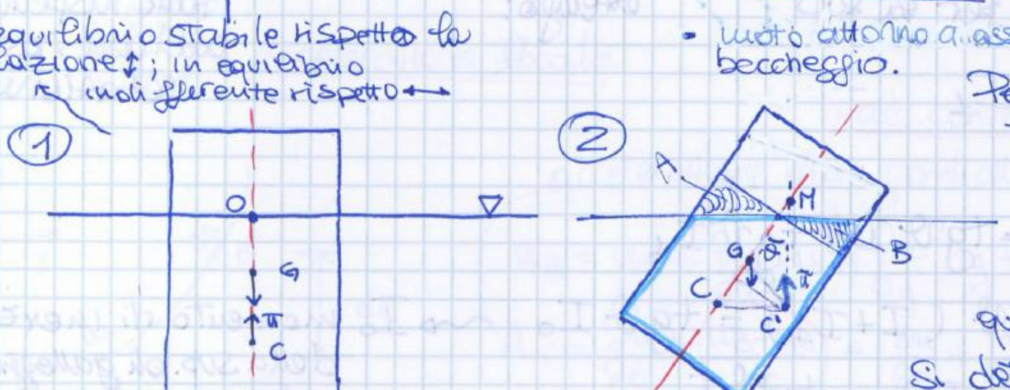
CORPI GALLEGGIANTI

C → centro di carena: centro della parte immersa



- moti attorno ad un asse longitudin: moti di rollio. (asse → ⊙)
- moto attorno a asse orizzont. = moto di beccheggio.

è in equilibrio stabile rispetto la traslazione ↕; in equilibrio indifferente rispetto ↔



Per piccole oscillazioni il volume $A \equiv B$. Il nuovo volume di carena è ⇦ quindi C si sposta a C'. Si determina una rotazione che riporta il galleg. alla POSIZIONE 1.

Questo si verifica fino a che la retta d'azione di π incontra

$$CC' = MC \operatorname{sen}\vartheta = \operatorname{tg}\vartheta \frac{I_0}{V}$$

per piccole oscillazioni $\operatorname{sen}\vartheta \cong \operatorname{tg}\vartheta$

$$MC \cancel{\operatorname{sen}\vartheta} = \cancel{\operatorname{tg}\vartheta} \frac{I_0}{V} \longrightarrow \boxed{MC = \frac{I_0}{V}}$$

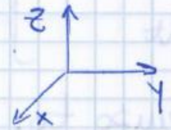
Distanza centro di spinta — metacentro

$MC = MG + GC$

MG → distanza metacentrica.

Bisogna garantire che MG sia tale che M sia sopra G.

CINEMATICA



$$u = \frac{dx}{dt} \qquad v = \frac{dy}{dt} \qquad w = \frac{dz}{dt}$$

$$\vec{v} = \vec{v}(x,y,z,t)$$

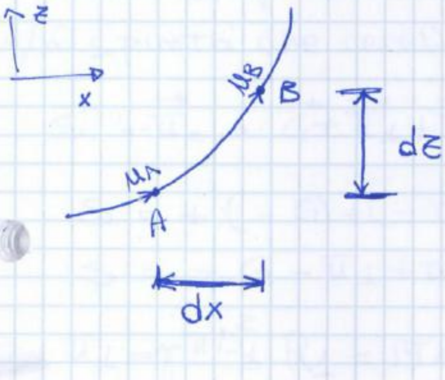
VELOCITÀ
$$\begin{cases} u = u(x,y,z,t) \\ v = v(x,y,z,t) \\ w = w(x,y,z,t) \end{cases}$$

Approccio Euleriano: osservo il moto in tutti i punti.

Approccio Lagrangiano

- Accelerazione? $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z,t) \Rightarrow$ acceler $= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$
- seguo la particella, sono solidale alla particella.

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ = accelerazione locale



acc. convettiva

accelerazione della particella lungo x

$$u_B = u_A + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$A_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u_B - u_A}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

Esercitazione 24 Marzo

ES 1

Dati

$D_1 = 1\ m$

$D_2 = 4\ m$

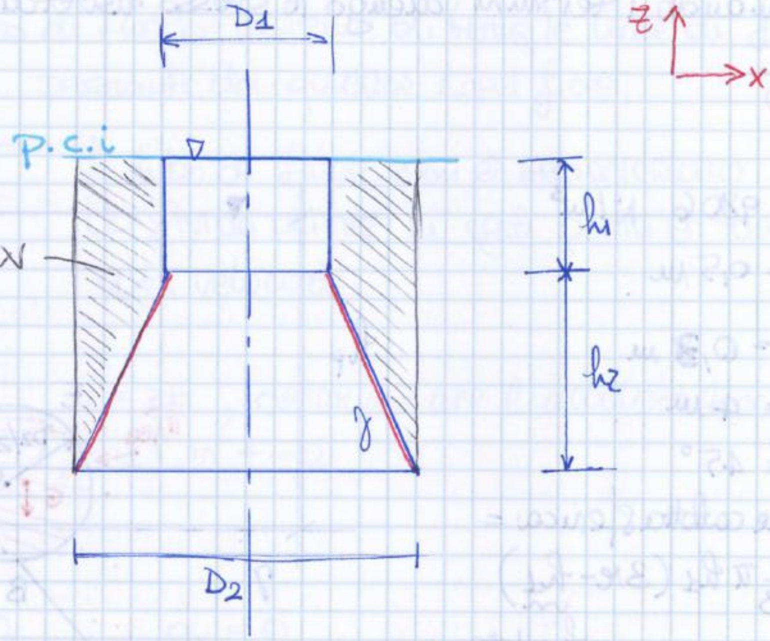
$h_1 = 2\ m$

$h_2 = 6\ m$

$\gamma = 9806\ N/m^3$

Volume tronco di cono:

$V_{tc} = \frac{1}{3}\pi h_2 (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$



Determinare

La spinta del fluido sulle pareti rosse.

La risultante della componente orizzontale degli sforzi è nulla. Ad ogni quota la componente orizzontale della spinta è uguale e opposta a dx e sx. Quindi la spinta ha solo componente lungo z.

Applico il metodo delle componenti:

volume compreso tra superficie e pci : W

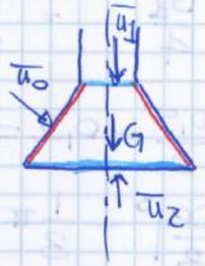
$$S_z = \gamma W = \gamma \left(\frac{\pi D_2^2}{4}(h_1+h_2) - \frac{\pi D_1^2}{4} h_1 - \frac{1}{3}\pi h_2 (r_1^2+r_2^2+r_1 r_2) \right)$$

$$S_z = 9806 \, (100{,}48 - 1{,}57 - 32{,}98) = 646510\ N$$

Applico adesso il metodo dell'equazione globale.

Chiudo con le due superfici azzurre.

$G + \pi_1 + \pi_2 + \pi_0 = 0$



π_0 è la spinta del recipiente sul fluido.

La spinta che cerchiamo sarà l'opposto di π_0

$\vec{S} = -\vec{\pi}_0 = \vec{G} + \vec{\pi}_1 + \vec{\pi}_2$ $\quad$ $\vec{S}$ sarà verticale perché somma di spinte verticali.

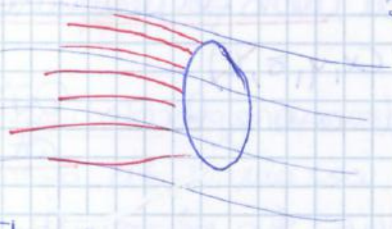
$S = +(-G) + (-\pi_1) + \pi_2$

$S = -G - \pi_1 + \pi_2$

$\pi_1 = \gamma \frac{\pi D_1^2}{4} h_1 = 15403{,}23$ $\qquad$ $\pi_2 = \gamma \frac{\pi D_2^2}{4}(h_1 + h_2)$

Lezione 26 Marzo

Tubo di flusso: insieme di tutte le linee di flusso passanti da quella superficie.



Il tubo di flusso non è attraversato da fluido perché in ogni punto è tangente alla velocità.

$\boxed{\text{Esercizio}}$ tipo quiz.

Dati: $u = 3x$, $v = -3y + t$, $w = 3t$; determinare l'accelerazione NEL PUNTO P di coordinate $(1, 2, 1)$ in $t = 2$

$\downarrow$

approccio euleriano

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \begin{cases} a_x = \frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow a_x = 0 \\ a_y = \frac{\partial v}{\partial t} \rightarrow a_y = 1 \\ a_z = \frac{\partial w}{\partial t} \rightarrow a_z = 3 \end{cases}$$

$$|a| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 3^2} = 3,16$$

determinare l'accelerazione della particella transitante (che passa) dal punto $(1, 2, 1; t = 2)$

$\Downarrow$

approccio lagrangiano

In questo caso mi viene richiesto l'accelerazione totale.

$$\begin{cases} A_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \\ A_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \\ A_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_x = 0 + 3x \cdot 3 + (-3y + t) \cdot 0 + 3t \cdot 0 = 9x \\ A_y = 1 + 3x \cdot 0 + (-3y + t)(-3) + 3t \cdot 0 = 1 + 9y - 3t \\ A_z = 3 + 3x \cdot 0 + (-3y + t) \cdot 0 + 3t \cdot 0 = 3 \end{cases}$$

In $P(1, 2, 1, t = 2) \rightarrow \begin{cases} A_x = 9 \\ A_y = 13 \\ A_z = 3 \end{cases} \rightarrow A = \sqrt{9^2 + 13^2 + 3^2} = 16,09$

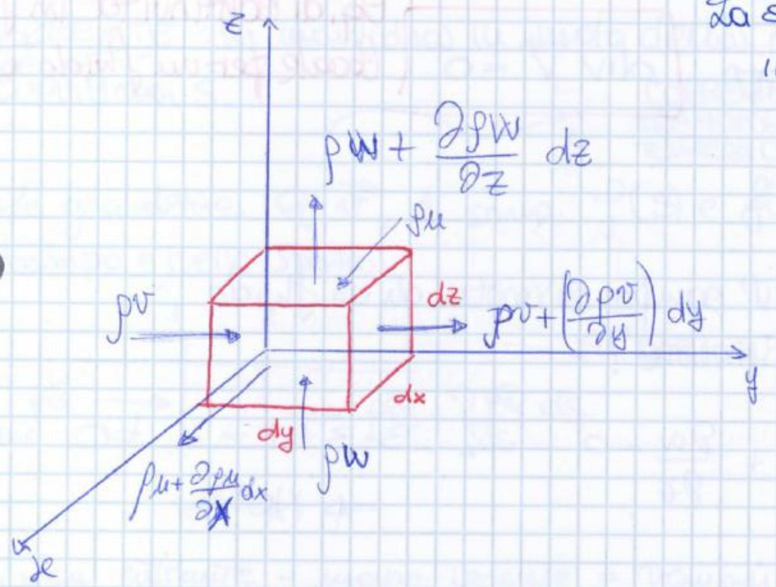
velocità media: $\boxed{\bar{V}} A = Q$

$$\bar{V} = \frac{\int_A v \, dA}{A}$$

Eq. di continuità: legge di conservazione della massa.

In un tempo dt: massa entrante − massa uscente = variazione di massa all'interno del volume considerato.

La scrivo prima per un volume infinitesimo.



massa entrante − massa uscente =

$$= \rho v \, dx\, dz\, dt - \left(\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy\right) dx\, dz\, dt + \rho u \, dy\, dz\, dt - \left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx\right) dy\, dz\, dt + \rho w \, dx\, dy\, dt - \left(\rho w + \frac{\partial \rho w}{\partial z} dz\right) dx\, dy\, dt =$$

$$= -\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz\, dt$$

variazione di massa avvenuta all'interno del volume considerato, nel tempo $dt = \frac{\partial massa}{\partial t} dt$

massa $= \rho \, dx\, dy\, dz$

$$\frac{\partial(\rho \, dx\, dy\, dz)}{\partial t} dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx\, dy\, dz\, dt$$

quindi:

$$-\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz\, dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx\, dy\, dz\, dt$$

caso comune nelle applicazioni : $\rho = cost \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$\cancel{\rho} \int_A v_n \, dA = 0 \rightarrow \boxed{\int_A v_n \, dA = 0}$ ~> ~~ovvero è~~ non significa che non ho portata, ma che ciò che entra è perfettamente uguagliato da ciò che esce, perché ricordo che v_n ha un segno.

$\int dQ = 0 \rightarrow Q_{IN} - Q_{OUT} = 0$

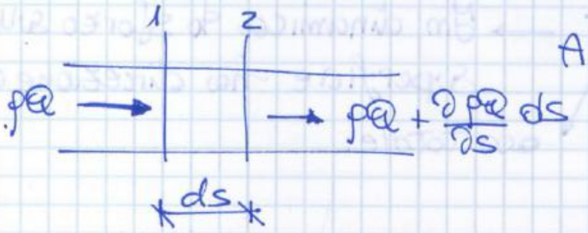
Per un fluido incomprimibile e per una ∀ superfic. chiusa, la portata entrante è uguale a quella uscente attraverso la superficie stessa.

Lezione 31 Marzo Adesso devo scrivere l'eq. di continuità per le correnti.

CORRENTE : si individua il moto della corrente attraverso l'ascissa curvilinea s.

CORRENTE: MOTI CARATTERIZZATI DAL FATTO CHE TUTTE LE TRAIETTORIE HANNO SENSIBILMENTE LA STESSA DIREZIONE.

Le grandezze $Q, \vec{v}, A$ sono $f(s)$ e $f(t)$; possono variare nel tempo e nello spazio.



A : sezione trasversale.

massa entrante − massa uscente = variazione di massa

$$\rho Q dt - \left(\rho Q + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds\right) dt = \frac{\partial (\rho A ds)}{\partial t} \cdot dt$$

$$-\frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds dt = \frac{\partial (\rho A ds)}{\partial t} dt$$

$$-\frac{\partial \rho Q}{\partial s} \cdot ds \, \cancel{dt} = ds \frac{\partial \rho A}{\partial t} \cdot \cancel{dt}$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho Q}{\partial s} + \frac{\partial \rho A}{\partial t} = 0}$$ eq. di continuità applicata alle correnti

se il fluido è incomprimibile $\rho = cost \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$

Primo caso:
moto permanente $\rightarrow \frac{\partial A}{\partial t} = 0$

$\hookrightarrow \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \rightarrow Q(s) = cost$ ← portata costante lungo il percorso.

$Q_1 = Q_2$

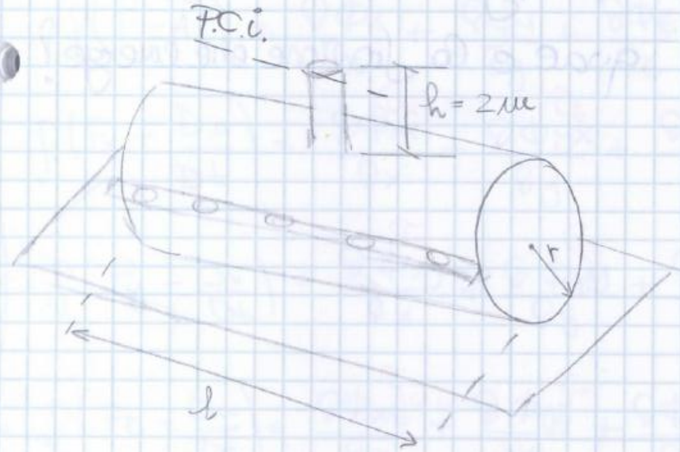
$$\rho\vec{F}\,dxdydz - \left(\frac{\partial\vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\Phi}_z}{\partial z}\right) dxdydz = \rho dxdydz\,\vec{A}$$

$$\boxed{\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \frac{\partial\vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\Phi}_z}{\partial z}}$$ Equazione indefinita della dinamica

Se in questa metto $\vec{v}=0$ dovrei ottenere l'eq. indefinita della statica:

$$\rho(\vec{F}-\underbrace{\vec{A}}_{=0}) = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k} \longrightarrow \rho\vec{F} = \text{grad}\,p$$

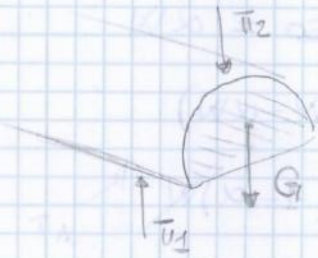
Esercizio 2



bulloni ogni 24 cm

$\gamma = 9806\ N/m^3$

$P_g = 4{,}5\ kN$



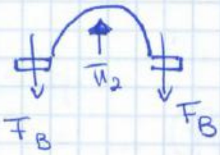
$$\vec{\pi}_2 + \vec{\pi}_1 + \vec{G} = 0$$

$$G = \gamma \frac{\pi R^2 L}{2} = 9806\ \pi \frac{2^2}{2} \cdot 1 = 61613\ N$$

$$\pi_1 = \gamma\, 2RL\, h_G = 156\,896\ N \qquad \text{con } h_G = h + r$$

$$\pi_2 = -(-61613) - 156896 = -95283\ N$$

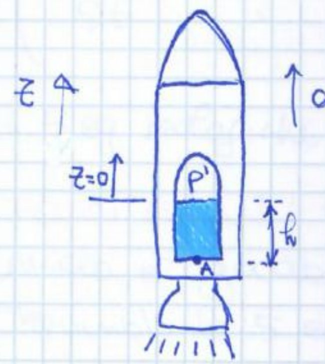
spinta della calotta metallica sul fluido



$$\pi_2 = 10 F_B = 9528{,}3\ N$$

$$F_B = \frac{\pi_2}{10} = 9528{,}3\ N$$

ESERCIZIO 3



$$\rho \vec{F} = \text{grad}\, p$$

$$\boxed{-g\, \text{grad}\, z - a\vec{k}}$$

$$\rho(-g-a) = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (\uparrow z)$$

Dati

$D = 3m$

$p' = 3\ bar$ (p assoluta)

$\gamma_{carb} = 0{,}8\ \gamma_{H_2O}$

$h_{iniz} = 3m$

$a = 10\ m/s^2$

$(p_{atm} = 1\ bar)$

Determinare: la forza sul fondo del serbatoio al decollo se questo avviene con $a = 10\ m/s^2$

$$p = -\rho(g+a)z + C_1$$

$$p^* = p' - \rho(g+a)z$$

$$p^*_A = p' - \rho(g+a)(-3) = 3\cdot 10^5 - 0{,}8 \cdot 1000\,(9{,}8+10)(-3) \cong$$

$$= 347520\ Pa$$

$$\uparrow S = -347520 \cdot \pi D^2/4 + 10^5\ \pi D^2/4 = -1750\ kN$$

Lezione 03 Aprile

Parto dalla eq. indefinita della dinamica.

$$\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z}$$

dove $\vec{F}$ sono le forze di massa per unità di massa)

$$\begin{cases} \rho\left(F_x - \frac{Du}{Dt}\right) = \frac{\partial \overset{\sigma_x}{\Phi_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial \overset{\tau_z}{\Phi_{yx}}}{\partial y} + \frac{\partial \overset{\tau_y}{\Phi_{zx}}}{\partial z} \\ \rho\left(F_y - \frac{Dv}{Dt}\right) = \frac{\partial \overset{\tau_z}{\Phi_{xy}}}{\partial x} + \frac{\partial \overset{\sigma_y}{\Phi_{yy}}}{\partial y} + \frac{\partial \overset{\tau_x}{\Phi_{zy}}}{\partial z} \\ \rho\left(F_z - \frac{Dw}{Dt}\right) = \frac{\partial \overset{\tau_y}{\Phi_{xz}}}{\partial x} + \frac{\partial \overset{\tau_x}{\Phi_{yz}}}{\partial y} + \frac{\partial \overset{\sigma_z}{\Phi_{zz}}}{\partial z} \end{cases}$$

SFORZI TANGENZIALI

$\Phi_{xy} = \Phi_{yx} = \tau_z$

$\Phi_{zx} = \Phi_{xz} = \tau_y$

$\Phi_{yz} = \Phi_{zy} = \tau_x$

SFORZI NORMALI

$\Phi_{xx} = \sigma_x$

$\Phi_{yy} = \sigma_y$

$\Phi_{zz} = \sigma_z$

10 variabili

$\rho, u, v, w, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$

5 eq.
- 3 eq.
- $\rho = \ldots$ (fluido incomprimibile $\rho = \text{cost}$)
- $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\, \rho\vec{v} = 0$ Eq di continuità in forma locale.

+ 5 eq reologiche → ci dicono come gli sforzi si comportano all'interno del fluido, ovvero legano τ alle velocità

FLUIDI IDEALI: si assume che lo stato di sforzo in condizioni di moto è uguale a quello nello stato di quiete.

Quindi le 5 eq reologiche assumono la forma particolare che segue:

$$\begin{cases} \tau_x = 0 \\ \tau_y = 0 \\ \tau_z = 0 \\ \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p \end{cases}$$

② $-\int_W \left(\frac{\partial \rho u \vec{v}}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \vec{v}}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \vec{v}}{\partial z} \right) dW$

$$= -(-1)\int_A \rho \vec{v} \underbrace{(u \cos \hat{nx} + v \cos \hat{ny} + w \cos \hat{nz})}_{v_n} dA = \int_A \rho \vec{v}\, v_n dA$$

$$\vec{G} + \vec{I} + \int_A \rho \vec{v}\, v_n\, dA = -\vec{\Pi}$$

$$\vec{G} + \vec{\Pi} + \vec{I} + \int_A \rho \vec{v}\, v_n\, dA = 0$$

$\rho v_n dA$: massa che nell'unità di tempo passa attraverso dA

$\rho v_n dA \vec{v}$: quantità di moto " " " "

$M = \int_A \rho v_n \vec{v}\, dA$ quantità di moto che nell'unità di tempo attraverso la superficie A.

↓

flusso di quantità di moto.

$$\vec{M} = \vec{M}_e - \vec{M}_u = \int_{A_e} \rho \vec{v}\, v_n\, dA - \int_{A_u} \rho \vec{v} |v_n|\, dA$$

quindi: $\boxed{\vec{G} + \vec{\Pi} + \vec{I} + \vec{M}_e - \vec{M}_u = 0}$ Eq. globale

nelle correnti:

$\vec{M}_e = \int_{A_e} \rho \vec{v}\, v_n\, dA = \vec{n} \int_{A_e} \rho v^2 dA$ se prendo $v_n = v$ = velocità media

$\vec{M}_e = \int_A \rho v^2 dA = \beta \rho v^2 A = \beta \rho \frac{Q^2}{A}$ $\quad v A = Q$

$\rightarrow \beta = \frac{\int_A \rho v^2 dA}{\rho v^2 A}$ coeff di ragguaglio

$\vec{M}_u = \beta \rho v^2 A$

Spesso noi poniamo $\beta = 1$

Lezione 04 Aprile

Consideriamo un fluido perfetto, allora è descritto dall'equazione:
$\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \text{grad}\, p$.

Ipotizzo inoltre di essere nel campo della gravità, allora
$F = -g\, \text{grad}\, z$.

Ulteriore ipotesi è quella di fluido incomprimibile. $\rightarrow \rho = \text{cost}$

$$\rho(-g\, \text{grad}\, z) - \rho\vec{A} = \text{grad}\, p$$

$$-\gamma\, \text{grad}\, z - \rho\vec{A} = \text{grad}\, p$$

$$-\frac{\cancel{\rho}\vec{A}}{g\cancel{\gamma}} = \text{grad}\, z + \frac{1}{\gamma}\, \text{grad}\, p$$

$$\text{grad}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{\vec{A}}{g}$$

acc. totale

Adesso considero una terna di riferimento solidale alla particella:

Allora scrivo il gradiente con riferim. agli assi (s, n, b)

"binormale"

(1) $$\frac{\partial}{\partial s}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{1}{g}\frac{Dv}{Dt}$$

(2) $$\frac{\partial}{\partial n}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{1}{g}\cdot\frac{v^2}{r}$$

acceler. centripeta

r: distanza della particella considerata dal centro di curvatura

(3) $$\frac{\partial}{\partial b}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = 0$$ $\rightarrow$ perché in questa direzione non ho accelerazione

Integrando l'ultima: $\rightarrow \underbrace{z + \frac{p}{\gamma}}_{\text{quota piezometrica}} = \text{costante lungo } b$

Dalla (2): $z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost}$ lungo n se $r \to \infty \to$ traiettorie rettilinee

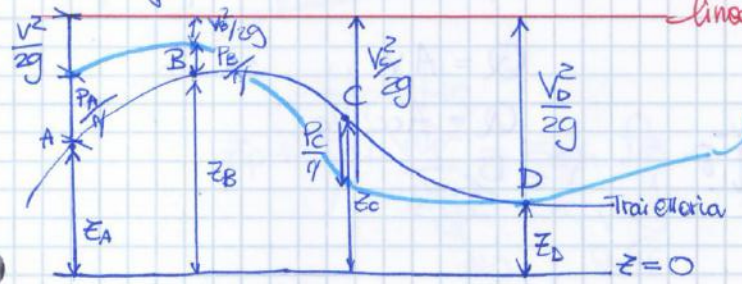
la quota piezometrica diminuisce andando nella direzione del centro di curvatura. Se $r = \infty$, cioè ho traiettorie rettilinee: $\frac{\partial}{\partial n}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = 0$, cioè $z + \frac{p}{\gamma}$ è costante lungo n.

$$H = z + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}$$

$\frac{V^2}{2g}$ esprime l'energia cinetica per unità di peso

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow \frac{E_c}{peso} = \frac{1}{2}\frac{m v^2}{m g} = \frac{1}{2}\frac{V^2}{g}$$

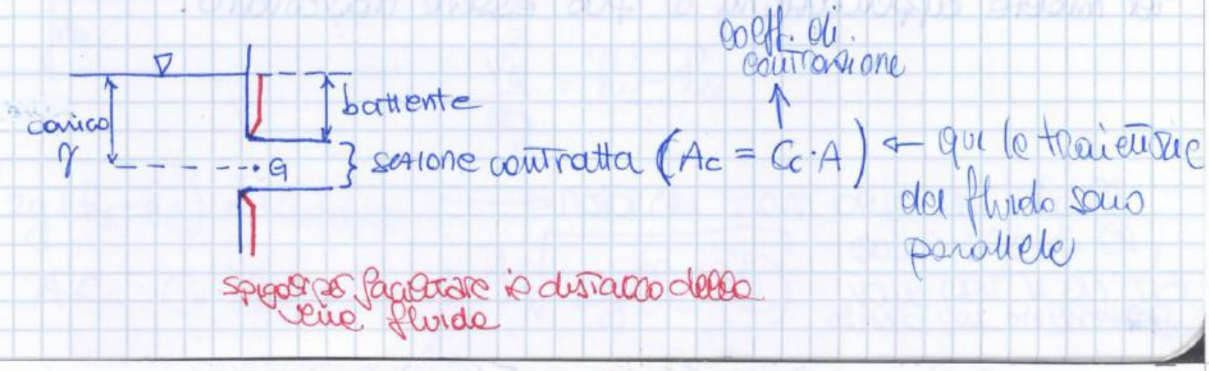
$\frac{P}{\gamma}$ energia di pressione dovuta al fatto che la particella si trova all'interno di un fluido che ha una certa distribuzione di pressione.



Conosco z_A.
Ipotizzo $p_A > 0$; sommo il termine $\frac{p_A}{\gamma}$ e il termine $\frac{V^2}{2g}$ come segmenti sopra z_A.
Per il teo di Bernoulli il carico totale deve restare costante.
Costruisco i segmenti anche per gli altri pti.
Ipotizzo pressione positiva anche per B. Ammetto invece $p_C < 0$.
Per il pto D prendo il caso $p_D = 0$,
Poi unisco tutte le quote piezometriche. Questo si chiama linea piezometrica;
Dove si verifica che l.c.t è parallela a l.p. in quel tratto la velocità è costante.

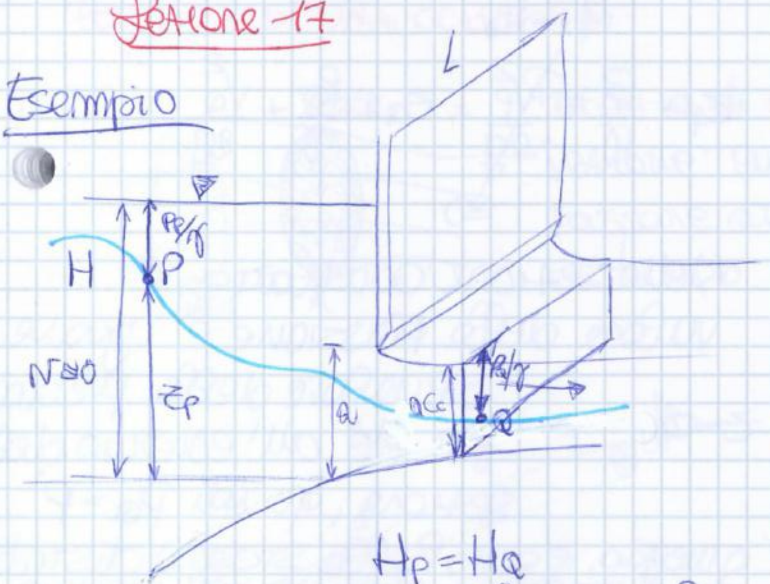
FORONOMIA

Luci a battente: la vena fluida è tutta a contatto con la luce. In questi casi la parete del serbatoio deve essere sagomata con uno spigolo vivo.



Sezione 17

Esempio



$A = C_c A$
$\downarrow$
$0{,}61$

$Q = \mu A \sqrt{2gh}$

$A_c = C_c A = C_c aL$

$Q = A_c v_c$

$$H_P = H_Q$$

$$\underbrace{z_P + \frac{p_P}{\gamma}}_{} + \underbrace{\frac{v_P^2}{2g}}_{\simeq 0} = \underbrace{z_Q + \frac{p_Q}{\gamma}}_{aC_c} + \frac{v_Q^2}{2g}$$

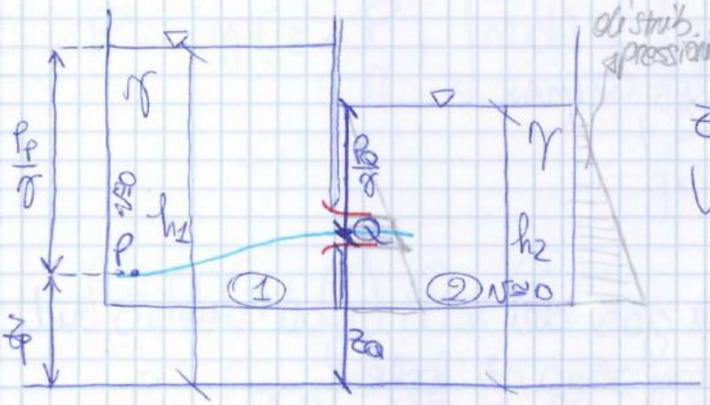
$$\frac{V_Q^2}{2g} = H - aC_c \qquad V_Q = \sqrt{2g(H-aC_c)} = V_{media}$$

$\downarrow$ uguale in tutti i punti della sezione trasversale

$$Q = C_c A \, C_v V_{media} = C_c A C_v \sqrt{2g(H-aC_c)} = \mu A \sqrt{2g(H-aC_c)}$$

C_v: coeff correttivo velocità $\simeq 0{,}99$

Esempio: Due serbatoi con una luce in parete sottile



$$H_P = H_Q$$

$$\underbrace{z_P + \frac{p_P}{\gamma}}_{h_1} + \underbrace{\frac{v_P^2}{2g}}_{\simeq 0} = z_Q + \frac{p_Q}{\gamma} + \frac{v_Q^2}{2g}$$

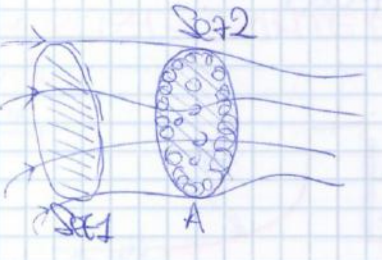
$$\frac{V_Q^2}{2g} = h_1 - h_2$$

$$V_Q = \sqrt{2g(h_1-h_2)} = V_{media}$$

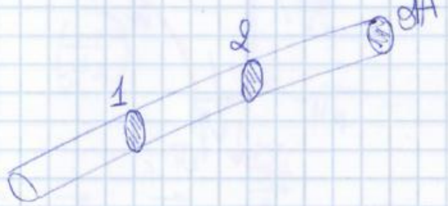
$\longrightarrow$ nota che non dipende dalla posizione di Q, vale per $\forall$ punto della sez. ristretta.

$$Q = A C_c \cdot C_v V_{media} = \mu A \sqrt{2g(h_1-h_2)}$$

POTENZA DI UNA CORRENTE



Potenza di una corrente in una data sezione: energia che la corrente fa passare attraverso quella sezione nell'unità di tempo.



$$dP = \gamma H dQ$$

$$dP_1 = dP_2$$

$$P_1 = \int dP_1 \qquad P_2 = \int dP_2 \Longrightarrow P_1 = P_2$$

Un fluido perfetto, incomprimibile, nel campo della gravità, mantiene la potenza costante di sezione in sezione.

$$P = \int dP = \int \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) dQ = \int \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) v \, dA =$$

$$= \int_A \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) v \, dA + \int_A \gamma \frac{v^3}{2g} dA$$

Se la corrente è lineare o gradualmente variata = traiettorie rettilinee parallele $\rightarrow z + \frac{p}{\gamma}$ = costante nella sezione trasversale

$$P = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \int v \, dA + \underbrace{\int_A \gamma \frac{v^3}{2g} dA}_{\text{potenza cinetica } P_c} = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \int v \, dA + P_c$$

$$P = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) Q + P_c$$

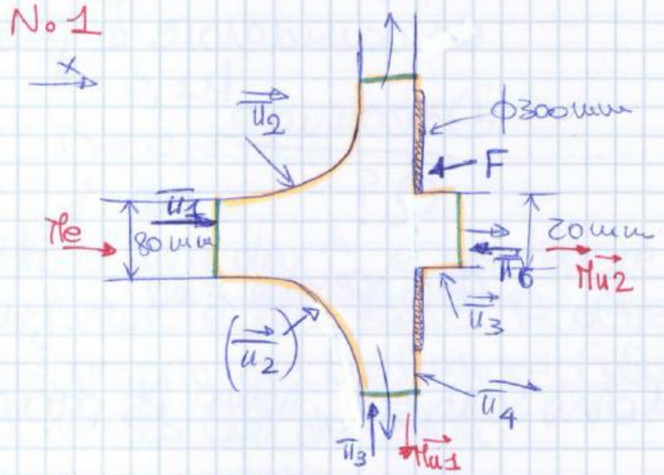
$$P_c = \int \gamma \frac{v^3}{2g} dA = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{coeff di Coriolis}}}{\alpha} \gamma \frac{V_{media}^2}{2g} Q \qquad \text{con } \alpha = \frac{\int \gamma \frac{v^3}{2g} dA}{\gamma \frac{V^2}{2g} Q}$$

$$P = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) Q + \alpha \gamma \frac{V_{media}^2}{2g} Q$$

Lezione 18

ESERCIZI - SPINTE DINAMICHE

N. 1



Determinare

La componente lungo x del getto di azione sulla piastra: S_x

Dati

$v = 40$ m/s uguale in tutti i pti.

$\rho =$ cost

$\vec{G} + \vec{\Pi} + \vec{I} + \Pi_e - \Pi_u$ da applicare al volume

$\Pi_2, \Pi_4, \Pi_5 = 0$ perché a contatto con atmosfera

$\Pi_1, \Pi_6, \Pi_3 = 0$ perché sono su sez con traiett rett. e parallele quindi lì la pressione è = alla pressione all'esterno che è la pressione atmosferica

$I =$ nullo

$$\vec{G} + \vec{F} + \vec{\Pi_e} - \vec{\Pi_{u1}} - \vec{\Pi_{u2}} = 0$$

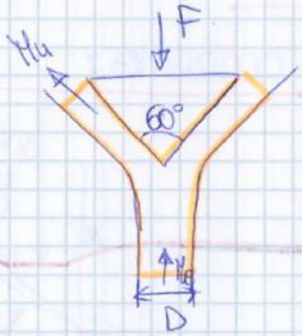
lungo x: $-F_x + \Pi_e + \Pi_{u2} = 0$

$$F_x = \Pi_e + \Pi_{u2}$$

$$F_x = \beta \rho v^2 A_1 - \beta \rho v^2 A_2 = \beta \rho v^2 \left(\frac{\pi\, 0{,}08^2}{4} - \frac{\pi \cdot 0{,}02^2}{4} \right)$$

$$F_x = 1 \cdot 1{,}2 \cdot 40^2 = 9{,}05\ N$$

N.3



Dati

$F = 0,1 N$

$D = 0,1 m$

$\rho =$ [illegible]

Getto d'aria da ↑ e per tenere il deflettore è necessaria F oltre il peso proprio del deflettore. Calcolare la massa del deflettore.

Massa aria ≃ 0

Velocità costante = 30 m/s

$$\underbrace{\vec{G}+\vec{\Pi}}_{(G_{deflett}+F)}+\underbrace{\cancel{\vec{I}}}_{=0 \text{ perché sono in moto permanente}}+\vec{M}_e-\vec{M}_u=0$$

$z \uparrow$

$$\underbrace{-\cancel{G}}_{=0 \text{ testo dice peso aria trasc.}}-G_{defl}-F+\beta\rho V^2 A_e-\beta\rho V^2 A_u \cos 30° = 0$$

$\rho = cost \quad Q_e = Q_u \rightarrow A_e V_e = A_u V_u \rightarrow A_u = A_e$

$$-G_{defl}-F+\beta\rho V^2 A(1-\cos 30°)=0$$

$$G_{defl} = -0,1 N + 1 \cdot 1,2 \cdot 30^2 \cdot \frac{\pi \cdot 0,15^2}{4}(1-\cos 30°)$$

$$m_{defl} = \frac{G_{defl}}{9,81} = 0,105 \text{ kg}$$

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} \qquad V_2 = \frac{Q}{A_2}$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha \frac{Q^2}{2gA_1^2} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha \frac{Q^2}{2gA_2^2}$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) = \alpha \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\right)$$

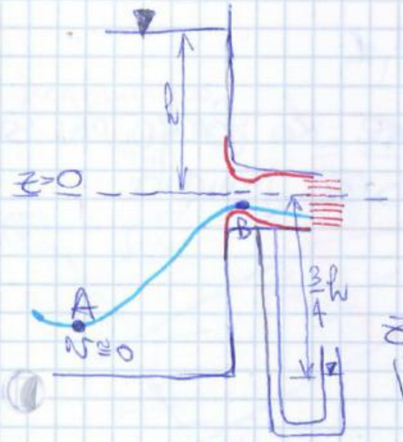
$$\delta = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} = \alpha \frac{Q^2}{2g} \frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2 A_1^2}$$

$$Q = A_1 A_2 \sqrt{2g/\alpha \cdot \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} \cdot \frac{1}{A_1^2 - A_2^2}}$$

Boccaglio e diaframma.

Tubo di Pitot: ~~due~~ due cilindri coassiali, due prese (una statica e una dinamica).

SERBATOIO CON TUBO ADDIZIONALE ESTERNO



C: contratta U: usata

$V_c > V_u$

$P_c < P_u$

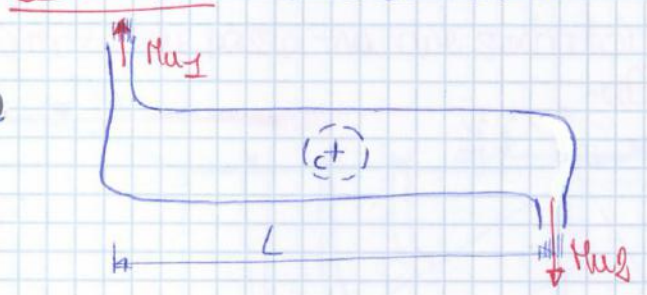
$H_A = H_B$

$$\underbrace{z_A + \frac{p_A}{\gamma}}_{h} + \frac{V_A^2}{2g} = \underbrace{z_B + \frac{p_B}{\gamma}}_{-\frac{3}{4}h} + \frac{V_B^2}{2g}$$

$$\frac{V_B^2}{2g} = h + \frac{3}{4}h = \frac{7}{4}h \rightarrow V_B = V = \sqrt{2g\frac{7}{4}h}$$

$$Q = \underbrace{C_c C_v}_{0,6} A \sqrt{2g\frac{7}{4}h} = 0,8\, A\sqrt{2gh}$$

ESERCIZIO vista dall'alto



Dati

$\gamma = 9806\ N/m^3$

$v = 3\ m/s$

$d = 0{,}05\ m$

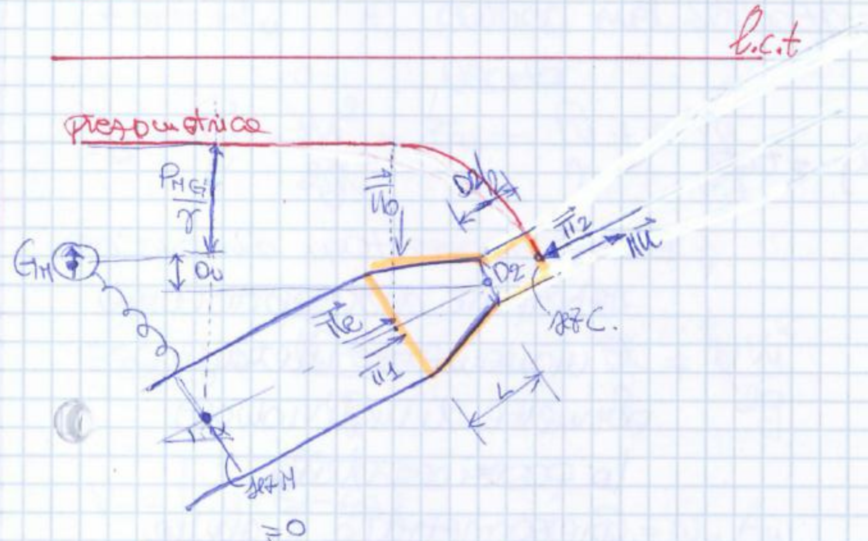
$L = 0{,}4\ m$

tra $\vec G, \vec \Pi, \vec I, \vec M_e, \vec M_u$ solo il flusso del momento della q.d.m. da momento rispetto a C.

$M_{u1} = M_{u2} = \beta \rho v^2 A$

coppia $= \beta \rho v^2 A \cdot L = 7{,}068\ Nm$

ESERCIZIO



Dati

$\gamma = 9806$ — Indicaz. pressione del manometro

$M = 0{,}2\ kgp/cm^2$

$a = 0{,}5\ m$

$\alpha = 30°$

$D_1 = 0{,}2\ m$

$D_2 = 0{,}1\ m$

$L = 0{,}4\ m$

$C_c = 0{,}9$

Det: $\vec \Pi_0$

$$\vec G + \vec \Pi + \underbrace{\cancel{\vec I}}_{=0} + \vec M_e - \vec M_u = 0$$

$$-\vec \Pi_0 = \vec \Pi_1 + \underbrace{\cancel{\vec \Pi_2}}_{\to 0} + \vec G + \vec M_e - \vec M_u$$

$\Pi_1 = A p_1$ $\qquad \vec G = \gamma W$

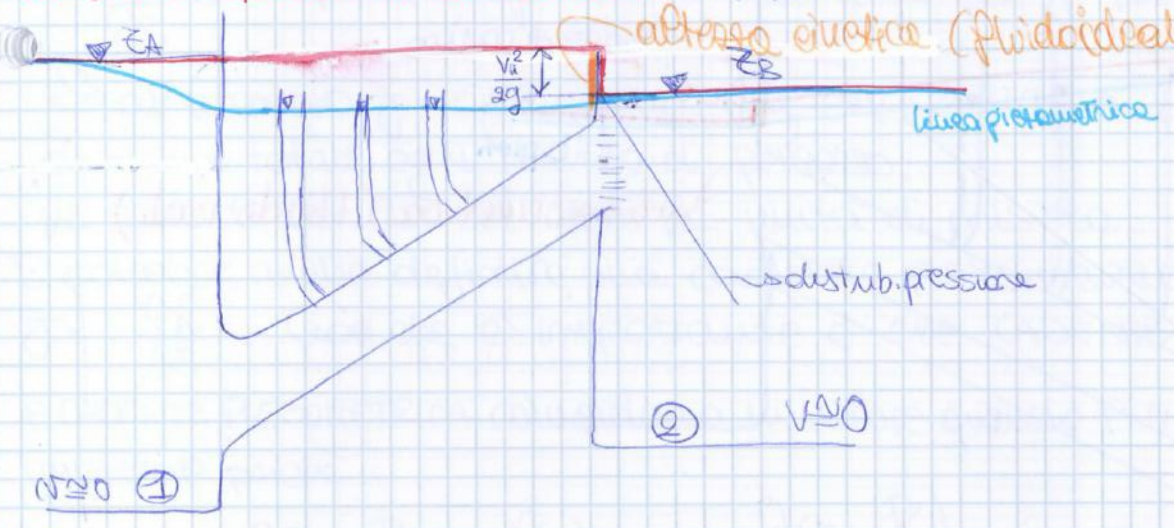
$$z_M + \frac{p_M}{\gamma} = z_{GM} + \frac{p_{MG}}{\gamma}$$

linea piezom. della sez dove è inserito il manometro si colloca di p_{MG}/γ sopra rispetto al manometro

$$p_{MG} = \frac{0{,}2 \cdot 9{,}8}{10^{-4}} = 19600\ Pa$$

Lezione 21

Portata che passa tra due serbatoi: fluido ideale



Si avvia un moto tra serbatoio 1 e 2.
Il fluido è perfetto, qual è la portata che transita?

$H_s = H_u$: carico nel serbatoio = carico nella sezione di uscita.

$$z_s + \frac{p_s}{\gamma} + \underbrace{\cancel{\alpha\frac{V_s^2}{2g}}}_{=0} = z_u + \frac{p_u}{\gamma} + \alpha\frac{V_u^2}{2g}$$

possiamo ipotizzare $\alpha = 1$;

$$\underbrace{z_{sup\,lib}}_{z_A} + \underbrace{\cancel{\frac{p_{sup\,lib}}{\gamma}}}_{=0} = z_B + \underbrace{\cancel{\frac{p_B}{\gamma}}}_{=0} + \underbrace{\alpha}_{1}\frac{V_u^2}{2g}$$

$$V_u = \sqrt{2g(z_A - z_B)} \qquad Q = V_u A_u$$

$\frac{V_u^2}{2g} = z_A - z_B$ → il dislivello di carico $H_A - H_B$ si è trasformato in energia cinetica

Se metto una batteria di canne piezometriche vedo che il livello si pone come in figura al livello della linea piezometrica un percorso unitario.

$\frac{\partial H}{\partial S}$ è di per sé negativa, quindi alla fine J risulta positiva.

Se ad esempio $J = 0{,}002$ vuol dire che perdiamo 2 millimetri di carico totale ogni metro di percorso.
La cadente dei carichi non ha unità di misura.
Si potrebbe anche definire una cadente piezometrica come:
$J = -\frac{\partial h}{\partial S}$. Ciò che è importante è che CADENTE DEI CARICHI e CADENTE PIEZOMETRICA coincidono in valore quando il moto è uniforme perchè:

$$J = -\frac{\partial\left(z + \frac{P}{\gamma} + \alpha\frac{V^2}{2g}\right)}{\partial s} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{moto uniforme } \frac{\partial V}{\partial S} = 0}}{=} -\frac{\partial\left(z + \frac{P}{\gamma}\right)}{\partial S}$$

Questo vuol dire che nel moto uniforme la linea piezometrica e quella dei carichi totali hanno la stessa inclinazione.

Dato $J = -\frac{\partial H}{\partial S}$

Come faccio a conoscere H_{finale} se conosco $H_{iniziale}$?

$$\partial H = -J\,\partial S \xrightarrow{\text{integro}} \int_{H_{in}}^{H_{fin}} \partial H = -\int_{S_{in}}^{S_{fin}} J\,\partial s$$

$$H_f - H_0 = -\int_{S_{in}}^{S_{fin}} J\,ds = -J\int_{S_{in}}^{S_{fin}} ds \rightarrow = H_f - H_0 = -JL$$

stesso materiale e assenza di discontinuità geometriche + moto uniforme → $J = \text{cost}$

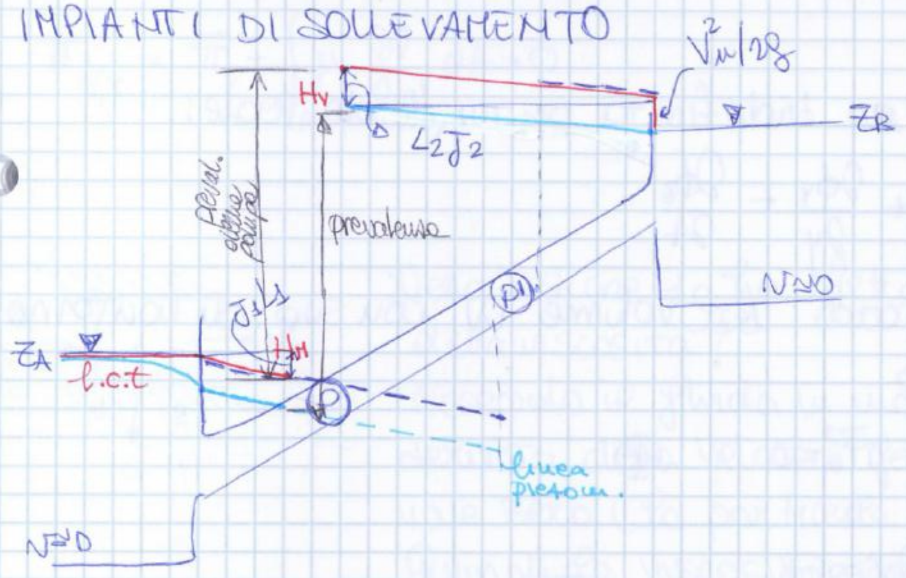
$$\boxed{H_f = H_0 - JL}$$

Queste perdite di carico sono dette DISTRIBUITE.
(Le concentrate invece sono dovute a variazioni brusche di geometria, valvole, curve.)

Tornando ai nostri due serbatoi...

$$H_A - \text{perdite} = H_u$$

IMPIANTI DI SOLLEVAMENTO



Voglio far salire il fluido dal serbatoio a sx in quello a dx → mi serve una pompa.

Eq. del moto.

$$H_A - L_1 J_1 + \Delta H_p - L_2 J_2 - \frac{V_u^2}{2g} = H_B$$

$$\Delta H_p = \underbrace{H_B - H_A}_{z_B - z_A} + L_1 J_1 + L_2 J_2 + \frac{V_u^2}{2g}$$

ΔH_p = prevalenza della pompa.

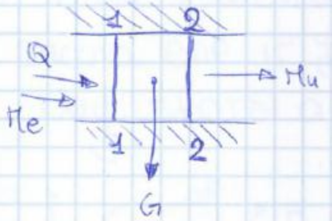
Se metto la pompa in alto (P') quindi la linea dei carichi totali sarebbe quella - - . Questa soluzione non è quasi mai usata perchè ho pressioni negative

$$h_V - h_M = \text{differenza tra quote piezometriche} = \text{prevalenza.}$$

Potenza ceduta alla corrente fluida $= P_V - P_M = \gamma Q (H_V - H_M)$

$$P_{elettr.} = \gamma \frac{Q(H_V - H_M)}{\eta}$$

$$\vec{\Pi}_{\sigma,\tau} = \vec{\Pi}_{\sigma} - \int_A \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} \, dA = 0$$



Nella sezione 1 ha effetto il contributo della viscosità?
Essendo il fluido in moto uniforme, la derivata della velocità fatta rispetto ad n vale zero (la particella non sta accelerando). Quindi la viscosità non determina una spinta aggiuntiva rispetto a Π_σ.

Ma, lungo la parete le cose cambiano: nella direzione della normale ho un gradiente di velocità quindi ci ho contributo della viscosità e non solo della pressione.

REGIMI DI MOTO

Esperimento di Reynolds per la visualizzazione delle traiettorie.

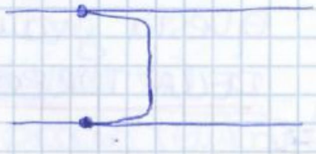
Per velocità basse vedo la traiettoria del fluido 2 procedere in maniera rettilinea: MOTO LAMINARE. I filetti scorrono l'uno sull'altro senza rimescolamento.

Se aumentiamo la velocità si passa ad un moto di transizione verso il moto turbolento ed il filetto inizia a presentare delle fluttuazioni. Allora si dice che oltre al moto di trasporto (nella direzione principale del flusso), nasce un moto di agitazione. Aumentando ancora la velocità il filetto si spezza rimescolandosi con tutta la massa fluida: MOTO TURBOLENTO

Profili di velocità

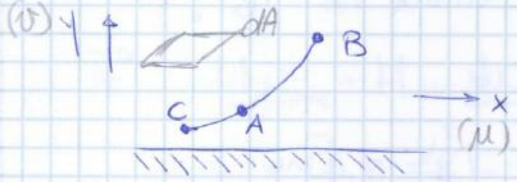
moto laminare →

moto turbolento →



$$\mathcal{J} = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{\overline{u}}$$ idem per le altre componenti $$\mathcal{J} = \frac{\sqrt{\overline{v'^2}}}{\overline{v}}$$

Quando scriviamo le eq. per un fluido turbolento quale velocità bisogna usare? prima di rispondere vediamo ancora che il fatto che ci sia moto turbolento induce ancora degli sforzi aggiuntivi.



Una particella si sposta da A a B per effetto della fluttuazione $v' > 0$

da A a B $\rightarrow v' > 0$
e si ritrova con $u' < 0$ } $u'v' < 0$

da A a C $\rightarrow v' < 0$
e si ritrova con $u' > 0$ } $u'v' < 0$

se ho una sup dA attraversata da fluido:

$v'dA$ volume che nell' unità di tempo passa attrav. dA

$\rho v'dA$ massa che " " "

$\rho v'dA\,dt$ massa che nel tempo dt è passata attraverso dA

tale massa ha subito una variazione di quantità di moto

$$m(V_f - V_{iniz}) = \rho v'dA\,dt\,(u_B - u_A) = \rho v'dA\,dt\,(-u') =$$
$$= -\rho u'v'\,dA\,dt$$

ma, per il teor. dell' impulso, ad una variazione di quantità di moto corrisponde una forza

$$F\,dt = m\,d\vec{v}$$

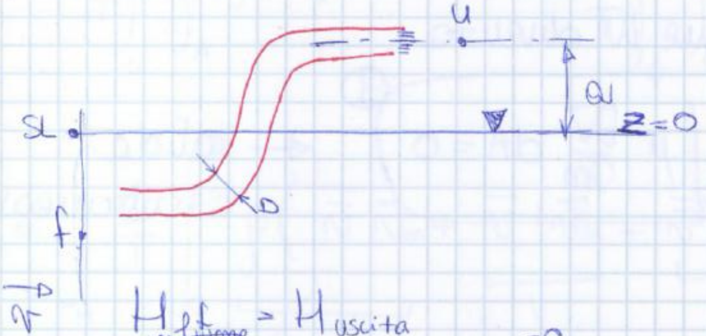
$$\vec{F} = \frac{-\rho u'v'\,dA\,\cancel{dt}}{\cancel{dt}} = -\rho u'v'\,dA$$

$$\boxed{\frac{\vec{F}}{dA} = -\rho u'v'}$$ Sforzo turbolento dovuto alla presenza di turbolenze

Allora nel moto turbolento   T di osservazione (vedi ☆)
faremo un equilibrio ~~così~~: non istantaneo ma nel piccolo tempo ✓

Esercizio - Quiz

Nella corrente di un corso d'acqua che defluisce con velocità uniforme V, viene immerso un tubo ad S controcorrente con una estremità alla quota di 1 m sopra la superf. libera. Ammesso il liquido perfetto determinare la portata effluente dal tubo.



$V = 10$ m/s

$D = 0{,}08$ m

$a = 1$ m

$$H_{\text{nel fiume}} = H_{\text{uscita}}$$

$$z_f + \frac{p_f}{\gamma} + \frac{V_f^2}{2g} = \underbrace{z_u}_{=a} + \overbrace{\cancel{\frac{p_u}{\gamma}}}^{=0} + \frac{V_u^2}{2g}$$

$$z_f + \frac{p_f}{\gamma} = \underbrace{\cancel{z_{SL}}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\frac{p_{SL}}{\gamma}}}_{=0} = 0$$

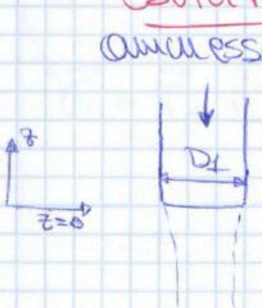
$$\frac{V_f^2}{2g} = a + \frac{V_u^2}{2g} \rightarrow \frac{V_u^2}{2g} = \frac{V_f^2}{2g} - a$$

$$V_u = \sqrt{V_f^2 - 2ga} = \sqrt{10^2 - 2 \cdot 9{,}8 \cdot 1} = 8{,}96 \text{ m/s}$$

$$Q = \pi \frac{D^2}{4} \cdot V_u = 0{,}0448 \text{ m}^3/\text{s}$$

Esercizio - Quiz

Data la tubazione circolare che sbocca nell'atmosf., ammesso che il liq. effluente sia perfetto e si comporti come sistema continuo, Dire qual è la forma della vena fluida in uscita dal tubo.



$$D = D(z)$$

$Q_1 = Q$ portata alla sez di uscita = portata alla generica sezione a valle.

$$V_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = V \frac{\pi D^2}{4} \rightarrow \frac{D^2}{D_1^2} = \frac{V_1}{V} \rightarrow D = D_1 \sqrt{\frac{V_1}{V}}$$

$$H_1 = H \rightarrow \overset{=0}{\cancel{z_1}} + \overset{=0}{\cancel{\frac{p_1}{\gamma}}} + \frac{V_1^2}{2g} = z + \overset{=0}{\cancel{\frac{p}{\gamma}}} + \frac{V^2}{2g} \rightarrow V_1^2 = 2gz + V^2 = -2g|z| + V^2$$

$$V^2 = V_1^2 + 2g|z| \rightarrow \frac{V_1^2}{V^2} = \frac{V_1^2}{V_1^2 + 2g|z|} \;; \quad D = D_1 \left(\frac{V_1^2}{V_1^2 + 2g|z|} \right)^{1/4}$$

Per $z \uparrow \rightarrow D \downarrow$ quindi la vena in uscita si contrae indefinitamente.

la velocità non è alla prima potenza; vediamo quindi come si fa.

$$\frac{1}{T}\int_0^T \int_A \rho \vec{v}\, v_n \, dA\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \int_A \rho (\vec{\bar{v}} + \vec{v}')(\bar{v}_n + v_n')\, dA\, dt =$$

$$= \int_A \frac{1}{T}\int_0^T \rho\left(\vec{\bar{v}}\,\bar{v}_n + \vec{v}'\,\bar{v}_n + \vec{\bar{v}}\,v_n' + \vec{v}'\,v_n'\right) dt\, dA =$$

$$\frac{1}{T}\rho\vec{\bar{v}}\,\bar{v}_n \int_0^T dt \qquad \underbrace{\frac{1}{T}\int \rho \vec{v}'\,\bar{v}_n\, dt}_{=0} \qquad \underbrace{\frac{1}{T}\int \rho \vec{\bar{v}}\, v_n'\, dt}_{=0} \qquad \frac{1}{T}\int_0^T \rho v' v_n'\, dt$$

$$= \int_A \left(\rho \vec{\bar{v}}\,\bar{v}_n + \rho \overline{\vec{v}'\, v_n'}\right) dA$$

quindi: $\vec{M}_e - \vec{M}_u = \vec{M}_{e\bar{v}} - \vec{M}_{u\bar{v}} + \int_A \rho\, \overline{\vec{v}' v_n'}\, dA$

moto laminare

$$\boxed{\vec{G} + \vec{\Pi}_{\bar{p}} + \vec{I}_{\bar{v}} + \vec{M}_{e\bar{v}} - \vec{M}_{u\bar{v}} + \underbrace{\int_A \rho\, \overline{\vec{v}' v_n'}\, dA - \int_A \mu \frac{\partial \vec{\bar{v}}}{\partial n}\, dA}_{} = 0}$$

rappresentano le resistenze al moto; le forze che gli esterni oppongono.

$$\vec{G} + \vec{\Pi}_{\bar{p}} + \vec{I}_{\bar{v}} + \vec{M}_{e\bar{v}} - \vec{M}_{u\bar{v}} = \underbrace{\int \mu \frac{\partial \vec{\bar{v}}}{\partial n}\, dA - \int \rho\, \overline{\vec{v}' v_n'}\, dA}_{}$$

forza di trascinamento della corrente.

$$T = \gamma W J = \int_{A\,lat} \frac{\partial \vec{v}}{\partial n}\, dA - \int_{A\,laterale} \rho\, \overline{\vec{v}' v_n'}\, dA$$

allora anche T è una forza che si esplica solo nella superf. laterale.

$$T = \tau A_{laterale} = \gamma A_{base} L J$$

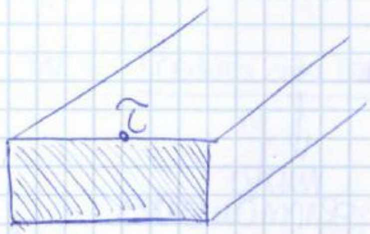
$\mathcal{R} \rightarrow$ RAGGIO IDRAULICO

$$\tau = \gamma A_{base} \cancel{L} J / Perim \cancel{L} = \tau = \gamma \frac{A_{base}}{Perim} J$$

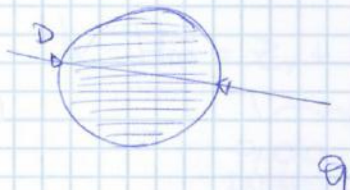
$$\boxed{\tau = \gamma \mathcal{R} J}$$

Esempio

Le τ_0 sono le τ sulla parete.
Quanto vale la τ_0 (sulla parete)?



$$\tau_0 = \gamma \frac{A}{P} J = \gamma \frac{bh}{2b+2h} J$$



$$\tau_0 = \gamma \frac{A}{P} J = \gamma \frac{\pi \frac{D^2}{4}}{\pi D} J = \gamma \frac{D}{4} J = \gamma \frac{r}{2} J$$

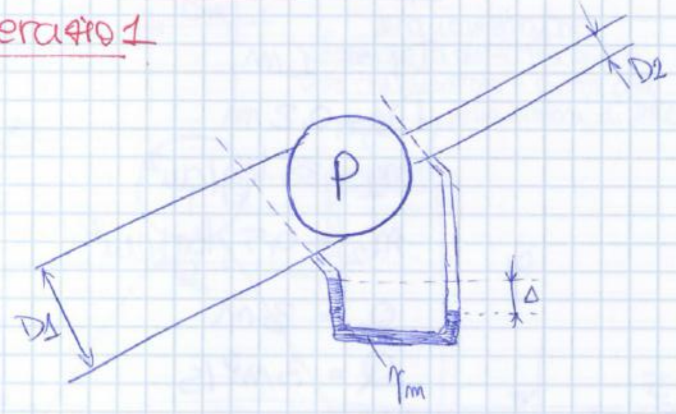
quindi N.B. raggio idraulico di una condotta circolare è = raggio/2

Quanto vale qui il raggio idraulico?

$$\mathcal{R} = \frac{A_{sez}}{P} = \frac{\text{Area sezione}}{\text{Perimetro bagnato}}$$

Lezione 25 - Esercitazione

Esercizio 1



$\gamma = 9806\ N/m^3$

$\gamma_m = 133362\ N/m^3$

$D_2 = 0{,}2\ m$

$D_1 = 0{,}25\ m$

$\Delta = 0{,}3\ m$

$\eta = \cancel{0{,}5}\ 0{,}75$

$Q = 0{,}05\ m^3/s$

Tra le sezioni di entrata e di uscita della pompa è inserito un manometro differenziale che fornisce una indicazione Δ. Nota la portata Q sollevata dalla pompa determinare la potenza che occorre fornire alla pompa.

$$W = \frac{P_{\text{ceduta alla corrente}}}{\eta}$$

$$P_{\text{ceduta corrente}} = \gamma Q \underbrace{(H_v - H_m)}_{\text{PREVALENZA}}$$

$$H_v - H_m = \underbrace{z_v + \frac{p_v}{\gamma}}_{\text{quota piezometrica }(h)} + \alpha \frac{V_v^2}{2g} - z_m - \frac{p_m}{\gamma} - \alpha \frac{V_m^2}{2g}$$

$$H_v - H_m = h_v - h_m + \frac{Q^2}{A_v^2\, 2g} - \frac{Q^2}{A_m^2\, 2g}$$

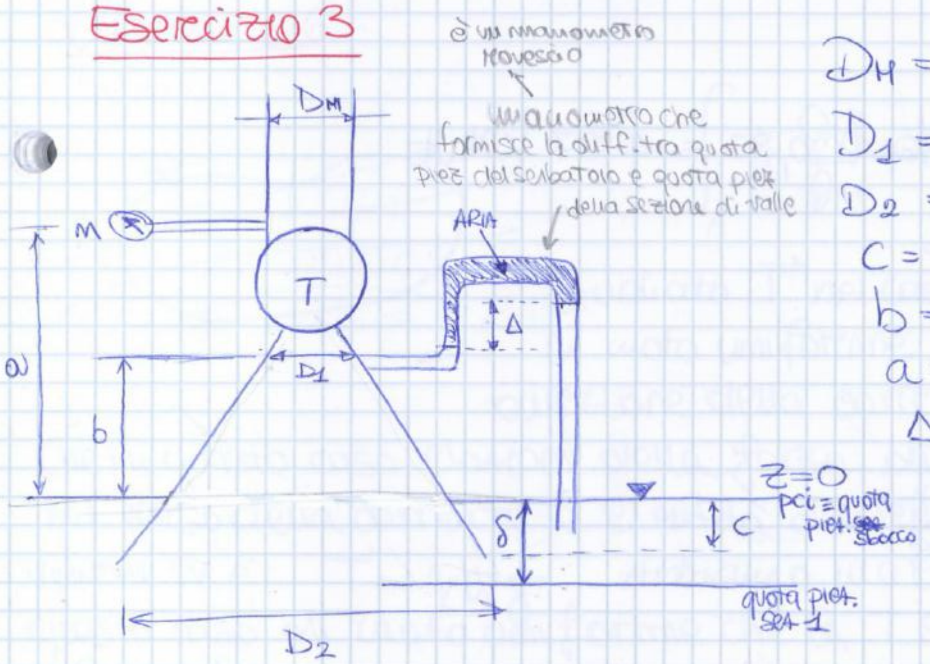
Il manometro differenziale mi da la differenza δ fra le quote piezometriche

$$\delta = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

$$H_v - H_m = 0{,}3\ \frac{133362 - 9806}{9806} + \frac{0{,}05^2}{2 \cdot 9{,}81} \left(\frac{1}{\left(\pi \frac{0{,}2^2}{4}\right)^2} - \frac{1}{\left(\pi \frac{0{,}25^2}{4}\right)^2} \right) = 3{,}86\ m$$

$$W = \frac{9806 \cdot 0{,}05 \cdot 3{,}86}{0{,}75} = 2{,}52\ kW$$

Esercizio 3



$D_M = 0{,}8\ m$

$D_1 = 1\ m$

$D_2 = 3\ m$

$c = 2m$

$b = 3m$

$a = 6\ m$

$\Delta = 0{,}3\ m$

$\gamma = 9806\ N/m^3$

$m = 26\ kg/cm^2$

$\eta = 0{,}82$

$W_{tronco\ di\ cono} = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + rR + r^2)$

Ritenendo trascurabili le perdite di carico lungo il diffusore e pari all'intera altezza cinetica la perdita di sbocco, determinare la portata Q e la potenza della turbina. Calcolare la spinta sul diffusore note le indicazioni Δ del manometro differenziale ad aria ed m del manometro metallico.

$$\delta = \Delta \frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma}$$ ← il numeratore ha i segni invertiti perché rovescio

$$\delta = 0{,}3$$

$$H_1 - \frac{V_2^2}{2g} = H_S \qquad S:\ \text{serbatoio}$$

$$\underbrace{z_1 + \frac{P_1}{\gamma}}_{-\Delta} + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g} = \underbrace{z_S + \frac{P_S}{\gamma}}_{=0\ \text{per il sistema di riferimento scelto}} + \cancel{\frac{V_S^2}{2g}}^{=0}$$

$$-\Delta + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g} = 0$$

$$-\Delta + \frac{Q^2}{2gA_1^2} - \frac{Q^2}{A_2^2 \cdot 2g} = 0 \qquad Q = 1{,}916\ \frac{m^3}{s}$$

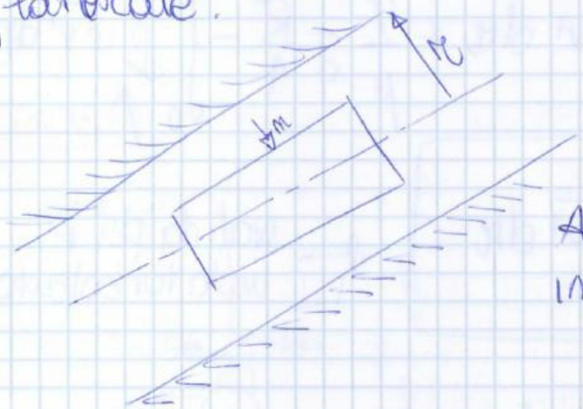
$$W = \eta\gamma Q(H_m - H_v)$$

$$H_m - H_v = z_m + \frac{P_m}{\gamma} + \frac{V_m^2}{2g} - z_1 - \frac{P_1}{\gamma} - \frac{V_1^2}{2g} = a + \frac{26 \cdot 9{,}8}{10^{-4}} \cdot \frac{1}{9806} + \frac{1{,}916^2}{2 \cdot 9{,}8\left(\frac{\pi \cdot 0{,}8^2}{4}\right)^2} - \Delta + \sqrt{\ } - \frac{1{,}916^2}{2 \cdot 9{,}8 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 0{,}1^2}{4}\right)^2}$$

Lezione 26

$$\vec{T} = \int_A \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} dA - \int_A \rho \overline{\vec{v}' v_n'} dA$$

Studiato $\vec{T}$ nel caso di una corrente in moto uniforme, W coassiale con la direzione della corrente e abbiamo visto che in questo caso l'azione della forza di trascinamento $\vec{T}$ è nel verso della corrente e l'entità dell'effetto dato da un volume W è: $T = \gamma W J$. Abbiamo inoltre visto, sempre in questo caso di moto uniforme che la T si esplica sulla superf. laterale.



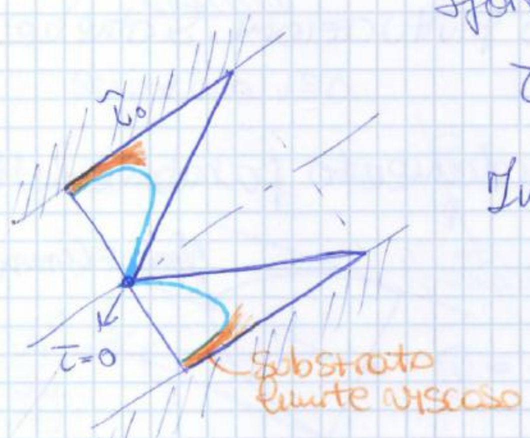
Inoltre se la corrente è con sezione circolare la τ ha espressione $\tau = \gamma \frac{r}{2} J$

Andamento delle τ in moto uniform. in condotta circolare:

$$\tau = \gamma \frac{r}{2} J = -\mu \frac{d\bar{u}}{dr} + \rho \overline{u'v'}$$

Sforzo massimo: alle parete $\rightarrow \tau_0 = \gamma \frac{R}{2} J$

$$\tau_0 = \gamma \mathcal{R} J$$



In generale $\mathcal{R} = \frac{\boxed{\text{Area}}}{\boxed{\text{Perim. Bagnato}}}$

ANDAMENTO DEL PROFILO DI VELOCITÀ per moto uniforme in condotta circolare.

Partiamo dalla relazione:

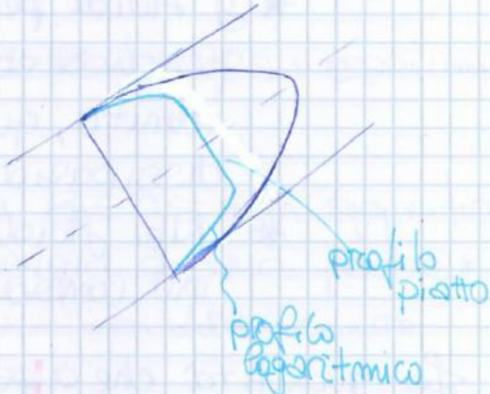
$$\tau = \gamma \frac{r}{2} J = -\mu \frac{d\bar{u}}{dr} + \rho \overline{u'v'}$$

Se moto laminare $\rightarrow$ $Q = u_{med} A = \frac{\gamma J}{\mu} \frac{D^2}{32} \frac{\pi D^2}{4}$

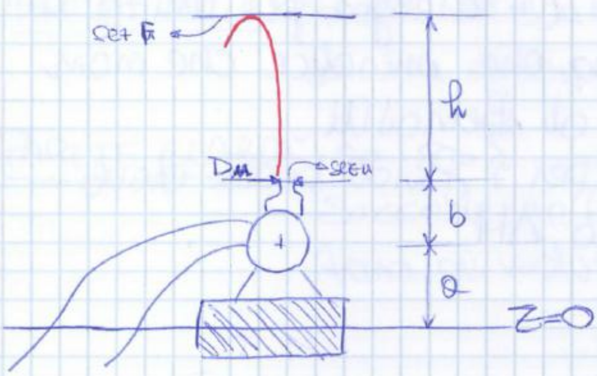
FORMULA DI POISEUILLE $\leftarrow$ $Q = \frac{\gamma J D^4 \pi}{\mu \cdot 128}$

Nel moto turbolento invece come sarà il profilo di velocità?

$$\overline{u}(r) = \underbrace{\frac{\gamma J}{4\mu} (R^2 - r^2)}_{\text{parabolico}} - \underbrace{\int_r^{D/2} \frac{\rho}{\mu} \overline{u'v'} \, dr}_{>0}$$



Esercizio



Dati
$\gamma = 9806\ N/m^3$
$h = 20\ m$
$D_u = 0{,}05$
$a = 2m$
$b = 1\ m$
$\eta = 0{,}75$

serbatoio $v \cong 0$

$H_u = H_f$ $\quad z_u + \underbrace{\frac{p_u}{\gamma}}_{=0 \text{ hp semplificat}} + \frac{V_u^2}{2g} = z_F + \underbrace{\frac{p_F}{\gamma}}_{=0 \text{ hp semplificat}} + \frac{V_F^2}{2g} \rightarrow 0$

$\frac{V_u^2}{2g} = z_f - z_u \rightarrow Q = \frac{\pi D_u^2}{4} \sqrt{2g(z_F - z_u)} = 0{,}039\ m^3/s$

$W = \frac{P}{\eta}$ $\quad P = \gamma Q \underbrace{(H_v - H_m)}_{\text{prevalenza}} \rightarrow W = \frac{9806 \cdot 0{,}039\,(a+b+h)}{0{,}75} = 11727\ W$

$H_{MONTE} = H_{serbat}$
$H_{valle} = H_{uscita} = H_F$ } perchè mi dice che non ci sono perdite

$H_{MONTE} = z_s + \frac{p_s}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = 0$ $\qquad H_{valle} = H_F = (a+b+h) + 0 + 0$

Allora è meglio dare una definizione che sia già direttamente collegata alla energia dissipata. Si parla di

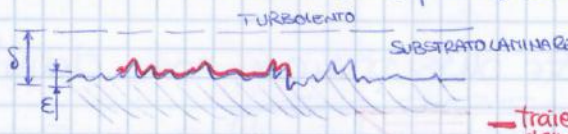
SCABREZZA EQUIVALENTE ε

il concetto è che si passa da una superficie con profilo molto frastagliato e complesso ad una con una scabrezza di dimensioni uniformi quindi facile da definire, in maniera tale che la parete reale e quella semplificata abbiano come effetto le stesse dissipazioni di energia.

Per la definizione di scabrezza equivalente si basa su esperimenti fatti dallo studioso Russo Nikuradse

Se dico che la parete reale ha una scabrezza $\varepsilon = 0{,}5$ mm significa che quella parete dissipa la stessa energia di una parete così fatta ε → granelli di sabbia posti artificialmente

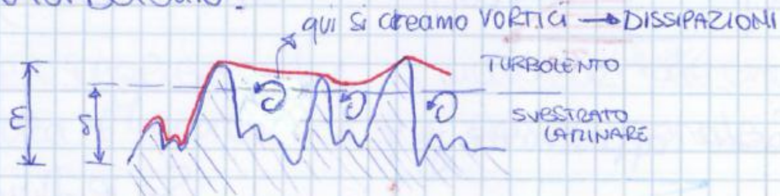
PARETE LISCIA: parete con scabrezza minima da non provocare alcuna dissipazione $\varepsilon << \delta$



PARETE SCABRA: se $\varepsilon > \delta$

— traiettoria della particella fluida

Succede che le asperità vengono in contatto con la zona di moto turbolento.



Lo spessore δ dipende dal numero di Re: Re↑ → δ↓

---

* Velocità di attrito (shear velocity): $u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$

La velocità di attrito permette di distinguere i due comportamenti tra parete scabra e liscia. Calcolo il Re con la velocità d'attrito e con dimensione caratteristica pari alla scabrezza:

$$Re_* = \frac{u_* \varepsilon}{\nu} < 5 \rightarrow \text{PARETE LISCIA}$$

$$Re_* = \frac{u_* \varepsilon}{\nu} > 70 \rightarrow \text{PARETE SCABRA}$$

Uso l'analisi dimensionale. Lezione 28

$$\tau_0 = f(\underset{=}{\rho}, \underset{\text{viscosità dinamica}}{\mu}, \underset{\text{velocità}}{u}, \underset{=}{D}, \varepsilon) \longrightarrow \pi_1 = f(\pi_2, \pi_3)$$

6 grandezze $\rightarrow$ $N=6$, $M=3$ $\longrightarrow$ $N-M=3$ gruppi adimensionali da determinare

$$[\rho] = ML^{-3}$$

$$[u] = LT^{-1}$$

$$[\tau_0] = ML^{-1}T^{-2}$$

$$[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$$

$$[D] = L$$

$$[\varepsilon] = L$$

Grandezze da adimensionalizzare: τ_0, μ, ε. Si può fare ciò combinando le altre tre grandezze scelte ρ, u, D.

$$\pi_1 = \frac{\tau_0}{\rho^a u^b D^c}$$ $\leftarrow$ devo scegliere a, b, c in maniera tale che tutta l'espressione sia adimensionale

dimens denominat = dimens. numeratore

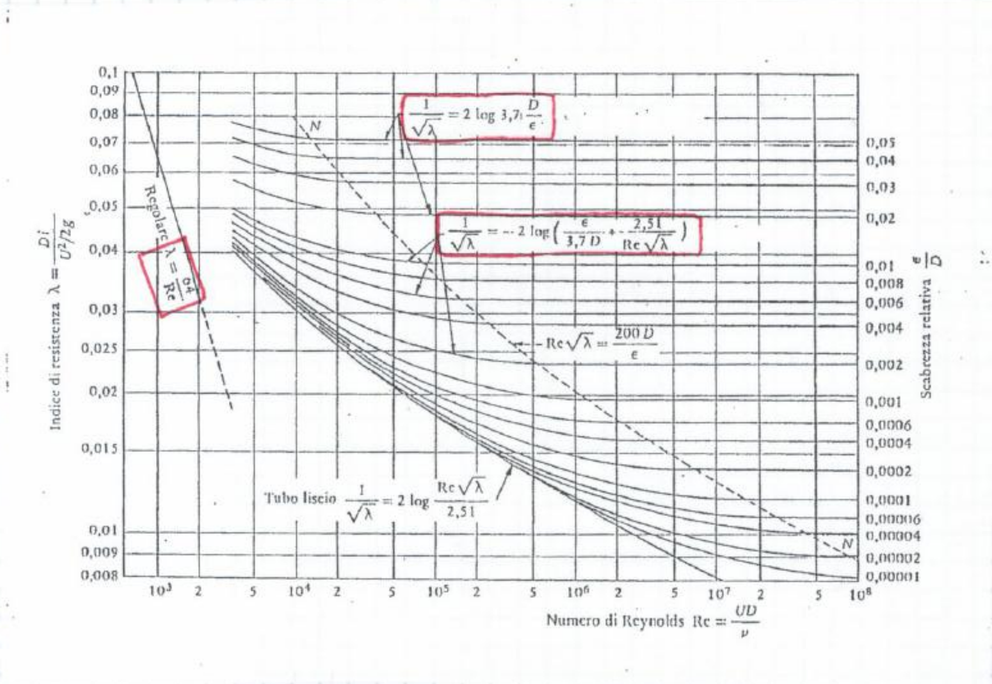
$$\begin{cases} [M] & a=1 \\ [L] & -3a+b+c=-1 \\ [T] & -b=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} a=1 \\ c=-1-2+3 \\ b=2 \end{cases} \quad \begin{cases} a=1 \\ c=0 \\ b=2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\pi_1 = \frac{\tau_0}{\rho u^2}}$$ primo numero adimensionale trovato

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho^a u^b D^c} \quad \begin{cases} a=1 \\ -3a+b+c=-1 \\ -b=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=1 \\ c=1 \\ b=1 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\pi_2 = \frac{\mu}{\rho u D} = \frac{1}{Re}}$$

Re < 2000 moto laminare

Re > 4000 moto turbolento
- TUBO LISCIO (curva unica)
- TUBO SCABRO (zona moto turbolento di transizione)
- TUBO SCABRO (zona moto assolutamente turbolento)



Nel moto laminare ho una retta e non entra in gioco la ε.

Si trova il legame sperimentale $\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64\mu}{\rho u D}$

Per il tubo liscio vale la relazione: $\boxed{\lambda = 0{,}316\, Re^{-0{,}25}}$ $\lambda = \lambda(Re; \cancel{\varepsilon/D})$

Nella zona di moto turbolento di transizione contano sia il nro di Re sia la scabrezza relativa.

Nella zona di moto assolutamente turbolento la scabrezza non entra più in gioco infatti la curva è costante - $\lambda = \lambda(\cancel{Re}, \frac{\varepsilon}{D})$

Quindi gli sforzi tangenziali di tipo viscoso non hanno più effetto nel moto completam. turbolento.

Nella zona di transizione contano sia Re che la scabrezza relativa $\lambda = \lambda(Re, \frac{\varepsilon}{D})$

Se fisso il diametro della condotta, il fluido (ρ, μ) e faccio aumentare la velocità si verifica che aumenta Re.

Ma se aumenta Re cosa succede alle altre grandezze?

Lezione 29

DISSIPAZIONI CONCENTRATE

Tutte le volte che abbiamo una variazione brusca della geometria della condotta, allora quei punti sono affetti da perdite di carico concentrate.

* dissipazioni concentrate → variazione geometrica

Il fluido passa da una velocità maggiore nel primo tratto a una minore nel secondo tratto. Il problema è che questa variazione non può avvenire in maniera istantanea, il fluido raggiunge il diametro maggiore solo dopo una certa distanza dal punto di variazione di geometria (vedi andamento rosso della vena fluida). Si creano vortici stazionari, questi vortici dissipano energia → perdita di carico.

Idem per il caso di un restringimento:

Anche se la perdita di carico di un restringimento è di regola minore rispetto a quelle di un allargamento.

A causa del restringimento si creano le sezione contratta, all'interno della quale si creano vortici (più piccoli rispetto a quelli dall'allargamento di diametro).

* Quindi il concetto è che variazioni di geometria → → vortici che per restare continuamente in movimento necessitano di energia → perdite di carico! → diminuz. di carico totale → ΔH

$$\Delta H_{conc.} = K \frac{u^2}{2g}$$

$\frac{u^2}{2g}$ → termine cinetico

K → numero dipendente dai vari casi. (dalle varie geometrie)